



HAL
open science

Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation

Julia Pilet

► To cite this version:

Julia Pilet. Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. Education. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2012. Français. NNT : . tel-00784039v1

HAL Id: tel-00784039

<https://theses.hal.science/tel-00784039v1>

Submitted on 3 Feb 2013 (v1), last revised 2 Mar 2016 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS.DIDEROT (Paris 7)
UFR de Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques :
épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Julia PILET

Parcours d'enseignement différencié
appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire
à la fin de la scolarité obligatoire :
modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne
et évaluation

Thèse dirigée par Madame Brigitte GRUGEON-ALLYS

Soutenue publiquement le 11 décembre 2012

Membres du jury :

Marianna BOSCH, Universitat Ramon Llull, rapporteuse
Hamid CHAACHOUA, Université Joseph-Fourrier de Grenoble, rapporteur
Élisabeth DELOZANNE, Université Pierre-et-Marie-Curie, examinatrice
Brigitte GRUGEON-ALLYS, Université Paris-Créteil-Est, directrice de thèse
Éric RODITI, Université Paris-Descartes, examinateur
Fabrice VANDEBROUCK, Université Paris-Diderot, examinateur

Remerciements

Ces trois années de thèse ont été d'une richesse inestimable en questionnements et en rencontres. C'est avec émotion que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ma thèse.

J'adresse en premier lieu mes remerciements les plus sincères à Brigitte Grugreon-Allys pour avoir dirigé cette thèse. Sa confiance, son soutien, sa disponibilité sans limite et ses conseils avisés m'ont permis de réaliser mon travail dans les meilleures conditions. Je lui suis infiniment reconnaissante de m'avoir proposé de m'inscrire dans la lignée des travaux de recherche qu'elle mène depuis plusieurs années.

Je remercie Françoise Quentin-Chenevotot. Présente dès mes premiers pas en didactique des mathématiques, elle a toujours su porter un regard judicieux sur mon travail et effectuer des relectures méticuleuses.

Je remercie également Élisabeth Delozanne d'avoir accepté de faire partie mon jury de thèse. Ses conseils, toujours pertinents, m'ont beaucoup enrichie et encouragée.

Je remercie Michèle Artigue. Tous les entretiens qu'elle m'a accordés ont contribué à une prise de recul et à un nouvel élan dans ma recherche.

Je remercie tous les participants du projet PepiMeP et l'association Sésamath, grâce à qui j'ai pu vivre l'aventure tant professionnelle qu'humaine d'une recherche pluridisciplinaire. Nos rendez-vous du lundi, parfois vifs en discussions, ont contribué à la dynamique de ma recherche et à mon évolution de jeune chercheuse. Je tiens à remercier : Naima El-Kechai, Arnaud Rommens, Yvonnick Labed, Claire Cazes et particulièrement Dominique Prévit dont le travail de qualité a fortement contribué à la réalisation du projet.

Merci à Cécile, Fabrice, Françoise H., Françoise P., Bruno et Marianne pour s'être prêtés au jeu de la recherche et avoir si chaleureusement ouvert les portes de leurs classes. Nos discussions dans le groupe IREM ont considérablement fait évoluer mon regard sur l'enseignement de l'algèbre.

Je remercie Marianna Bosch et Hamid Chaachoua, les rapporteurs de cette thèse, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'adresse également mes remerciements à Éric Roditi et Fabrice Vandebrouck qui me font l'honneur d'être membres de mon jury. À cette occasion, je tiens à exprimer ma reconnaissance à Éric pour avoir contribué à mon recrutement en tant qu'ATER à l'Université Paris-Descartes ce qui me permet de terminer ma thèse dans les meilleures conditions.

Je remercie toute l'équipe du Laboratoire de Didactique André Revuz de l'Université Paris-Diderot pour son accueil chaleureux. Merci à Evelyne, Martine, Sandrine et Nadine

pour leur travail de qualité et leurs encouragements. Merci à Vincent pour son assistance à la gestion des caméras et des dictaphones. Merci à Jérôme pour son aide précieuse dans mes recherches bibliographiques ; il a su divertir nos repas du midi par des récits qui donnaient lieu à des discussions toujours plus originales et variées.

J'ai une pensée émue pour tous les occupants des bureaux de doctorants 5C6 et 5B1. Grâce à eux, j'ai trouvé un espace de détente et d'échanges où je pouvais évoquer tous les petits soucis de la vie du thésard. Il y a ceux qui sont là depuis le début, merci à : Quellita pour son rôle de l'infirmière en Pologne, Carolina pour ses encouragements et sa bienveillance, Marc, le roi du \LaTeX , sans qui ma bibliographie aurait été privée de majuscules, Pablo pour ses idées créatives et son camion dédié aux sorties en groupe et Laura dont la présence apportait la chaleur de l'Italie. Il y a les anciens. Merci à : Yann pour sa bonne humeur, David pour sa capacité à déconcentrer tout le monde, Avenilde pour son sourire, Brice pour ses séances de cinéma, Victor pour la salsa, Rémi à qui on dit « Vive la cryptographie ! » et Joseph qu'on espère revoir à Paris ! Et puis il y a ceux qui sont arrivés en cours de route. Merci à : Soraya, ma compagne sur le terrain des expérimentations (bon courage pour la suite !), Zoé pour la logique, Luis pour avoir persévéré dans ses visites en 5C6, Dominique pour sa gentillesse, Lynn pour les relectures en anglais, Katalin et Assia pour leur enthousiasme des débuts de thèse. Merci enfin à Nicole. Présente avant, pendant et après, tu n'as, certes, pas commencé ta thèse mais tu occupes ta place en 5C6 avec tes bons conseils, tes rigolades et tes coupes de cheveux.

Merci à toute l'équipe des jeunes chercheurs pour la vitalité de ses échanges scientifiques et toutes les soirées sans didactique : Nicolas, Hussein, Joris, Simon, Marie-Line, Stéphane, Marianne, Éric, Sara . . .

Merci à l'association En Act de m'avoir donné envie de faire du théâtre et à Yann de m'avoir embarquée dans le projet fou de monter une pièce durant la dernière année de la thèse. Merci à toute la troupe Pauline K., Pauline M., Jeanne, Soline, Romain, Antoine, Charlotte, Denis, Gaëlle, Sylvain, Violaine, Renaud, Céline, Vanessa.

Je tiens à remercier Yves Pineau, mon kinésithérapeute. Grâce à ses connaissances inépuisables sur le dos, j'ai pu éviter le drame du torticolis. Promis, maintenant, je me tiens droite !

Merci à mes voisins Ronan, Julien et Jacqueline avec qui c'est toujours un plaisir de gérer l'immeuble.

Merci à mes amis les plus chers. Momo, ton amitié, ta bonne humeur et nos discussions sur tout et n'importe quoi ont représenté un soutien inestimable. J'en profite pour saluer la « bande des Italiens » avec qui j'ai passé tant de soirées : Marco, Ilena, Nicole, Giulio, Claudia, Paolo et tous les autres. Sara, promis, je vais trouver un train pour te rendre visite dans ton nouveau chez toi. Meli et Christophe, en écrivant vos noms, j'ai le goût du maté et des rêves d'Argentine. Violaine et Rémi, le duo des anciens Beaumontois, vous êtes restés mes fidèles camarades de classe (et si on se remettait à la musique ?). Lorraine, tu as prouvé que tu étais l'amie de toujours. Andrea, merci pour l'énergie que tu as mise à me faire découvrir l'Italie. Mose, merci pour la découverte du Blue Note et de Berlin. Tessa, merci pour la gaieté de nos balades en Ile-de-France.

Mes remerciements s'adressent enfin à ma famille. À mes parents qui m'ont toujours épaulée, n'ont jamais douté de moi et ont su m'accompagner dans les moments les plus difficiles. Un immense merci à ma mère qui a surmonté les termes techniques du didacticien pour corriger l'orthographe et les phrases bancales. À mon père qui m'a aidé à me ressourcer en respirant l'air iodé de la Méditerranée. À Elsa dont la complicité, infaillible, même par-delà les monts, les vaux et, depuis l'an dernier, l'océan Atlantique, m'a été d'une aide précieuse. À Archie dont les petits plats, de plus en plus réussis, m'ont réconfortée à de nombreuses reprises et m'ont procuré de la nourriture spirituelle. À Papé, Mamie, Sig et Mémé pour leur soutien de toujours.

Enfin merci à Sido qui, depuis sa douillette couverture, est la seule à avoir assisté à toutes les étapes de la rédaction. Sa sagesse, son regard profond et ses roulades au soleil me donnent toujours plus de courage pour la suite...

Table des matières

1	Problématique et méthodologie	15
1.1	Problématique	15
1.1.1	Gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et différenciation de l'enseignement	15
1.1.2	Hétérogénéité des apprentissages	17
1.1.3	Deux processus de différenciation	18
1.1.4	Question centrale et premières hypothèses de travail	21
1.1.5	Enjeu de notre travail	21
1.2	Contexte de la recherche : le projet PepiMeP et le logiciel de diagnostic Pépite	22
1.2.1	Les projets Pépite et Lingot	23
1.2.2	Le projet PepiMeP	27
1.2.3	Délimitation du sujet de thèse	28
1.2.4	Une troisième hypothèse de travail	30
1.3	Objectifs de la thèse	31
1.3.1	Modélisation de parcours d'enseignement différencié	31
1.3.2	Précisons notre questionnement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique	32
1.3.3	Des hypothèses	33
1.4	Principaux choix théoriques et méthodologiques	35
1.4.1	Le cadre de la théorie anthropologique de la didactique	35
1.4.2	Une analyse basée sur une OM épistémologique de référence relative aux expressions algébriques	38
1.4.3	Opérationnalisation de l'OM de référence	39
1.4.4	Modèle de parcours d'enseignement différencié	40
1.4.5	Une démarche itérative de conception du modèle de PED	42
1.5	Plan d'étude	46

2	Une référence épistémologique à partir de travaux de didactique de l'algèbre	49
2.1	Des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre dans la TAD	50
2.1.1	La notion de modélisation dans les travaux de Chevallard . . .	51
2.1.2	Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire dans les travaux de Gascón	52
2.1.3	Un modèle de l'algèbre élémentaire comme processus d'algébrisation de programmes de calcul dans les travaux de Ruiz-Munzón	53
2.1.4	Conclusion	56
2.2	Le modèle de l'activité algébrique dans les travaux de Kieran	57
2.2.1	Les sources de signification de l'algèbre chez Kieran	57
2.2.2	L'activité générative	63
2.2.3	L'activité transformationnelle	67
2.2.4	L'activité globale	73
2.2.5	Complémentarité des trois types d'activité	74
2.2.6	Conclusion	74
2.3	En conclusion : une référence épistémologique pour nos travaux . . .	75
3	OM de référence et OM à enseigner relativement aux expressions algébriques	79
3.1	Une OM de référence	80
3.1.1	Place de l'OM régionale dans l'OM globale du domaine algébrique	80
3.1.2	Trois OM locales	81
3.1.3	OM1, Génération des expressions algébriques	83
3.1.4	OM2, Équivalence des expressions algébriques	86
3.1.5	OM3, Algèbre des polynômes	89
3.1.6	Conclusion	92
3.2	Questions et méthodologie	93
3.3	Analyse des programmes	95
3.3.1	Les programmes étudiés	95
3.3.2	A propos de l'organisation des programmes	95
3.3.3	A propos de la terminologie adoptée	96
3.3.4	Analyse écologique	97

3.3.5	Analyse praxéologique	105
3.3.6	Synthèse sur l'OM à enseigner dans les programmes	110
3.4	Analyse des manuels	112
3.4.1	Choix des manuels	112
3.4.2	Analyse écologique	115
3.4.3	Analyse praxéologique	122
3.4.4	Synthèse sur l'OM à enseigner dans les manuels	162
3.5	Synthèse	166
3.5.1	Caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner	167
3.5.2	Des implicites dans l'enseignement de l'algèbre	167
3.5.3	Deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié	169
3.5.4	A propos de la convocation de OM2 dans la résolution des problèmes du brevet des collèges, une évolution de l'OM à enseigner ?	170
3.5.5	A propos de l'OM enseignée	173
4	Modélisation de parcours d'enseignement différencié	175
4.1	Interprétation des OM apprises dans l'OM de référence	176
4.1.1	Les tâches diagnostiques	176
4.1.2	L'analyse <i>a priori</i> pour coder les réponses des élèves	180
4.1.3	Le regroupement des stéréotypes pour catégoriser les OM apprises	191
4.1.4	Une catégorisation des OM apprises	193
4.1.5	La part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises : des sous-questions génératrices	200
4.2	Le modèle de PED	201
4.2.1	Une démarche itérative et collaborative avec les enseignants et les chercheurs en informatique	202
4.2.2	Questions centrales dans la modélisation	203
4.2.3	Description du modèle de PED	204
4.3	Analyse <i>a priori</i> de trois PED	212
4.3.1	Méthodologie	213
4.3.2	Analyse <i>a priori</i> du parcours 1	213
4.3.3	Analyse <i>a priori</i> du parcours 2	232
4.3.4	Analyse <i>a priori</i> du parcours 3	240

4.4	Collaboration avec les différents partenaires du projet PépiMeP . . .	251
4.4.1	Collaboration avec les enseignants du groupe IREM	251
4.4.2	Collaboration avec les chercheurs en informatique, les développeurs et l'association Sésamath	253
4.5	Bilan	264
5	Analyses des expérimentations	265
5.1	Questions et méthodologie	266
5.1.1	Questions et cadres théoriques	266
5.1.2	Déroulement des expérimentations et données recueillies . . .	267
5.1.3	Méthodologie d'analyse des données	269
5.2	Analyse des expérimentations dans la classe de 3 ^e de Garance	271
5.2.1	Un portrait de Garance et de ses élèves	271
5.2.2	La répartition des élèves en groupe	284
5.2.3	Parcours 1 : les choix de Garance	286
5.2.4	Analyse <i>a posteriori</i> sur le parcours 1	290
5.2.5	Parcours 2 : les choix de Garance	309
5.2.6	Analyse <i>a posteriori</i> du parcours 2	312
5.2.7	Parcours 3 : les choix de Garance	326
5.2.8	Analyse <i>a posteriori</i> du parcours 3	330
5.2.9	L'évolutions des technologies « dominantes » utilisées par les élèves sur le moyen terme	340
5.2.10	Conclusion sur les expérimentations	343
5.3	Evolution de la répartition des élèves en groupe sur l'ensemble des classes	348
5.3.1	Présentation des graphiques et premières analyses	348
5.3.2	Quelques analyses sur l'évolution de la répartition des élèves en groupe	354
6	Conclusion et perspectives	357
6.1	Une OM épistémologique de référence	359
6.1.1	Référence épistémologique	359
6.1.2	OM épistémologique de référence	359
6.2	Une opérationnalisation de l'OM de référence	360
6.2.1	Du côté de l'institution : OM à enseigner	360
6.2.2	Du côté des élèves : OM apprises et technologies dominantes .	361

6.3	Le modèle de parcours d'enseignement différencié	362
6.3.1	La modélisation	362
6.4	Perspectives	366
Références		369
A Le test diagnostic Pépite		385
A.1	Les tâches diagnostiques	385
A.2	Le codage des réponses des élèves sur l'exercice 9 du test Pépite . . .	394
A.3	L'algorithme du calcul du stéréotype	407
B Les parcours d'enseignement différencié		415
B.1	Présentation des groupes	416
B.1.1	Présentation du groupe A	416
B.1.2	Présentation du groupe B	416
B.1.3	Présentation du groupe C	417
B.2	Parcours à l'étape « Retour sur des connaissances anciennes »	419
B.2.1	Revenir sur le rôle de l'algèbre pour résoudre des problèmes de généralisation ou de modélisation	419
B.2.2	Valider des règles de formation et transformation des expres- sions pour travailler l'équivalence des expressions	424
B.2.3	Etudier des expressions équivalentes	428
B.2.4	Travailler l'aspect structural des expressions en les associant à d'autres représentations et vice-versa	432
B.3	Parcours à l'étape « Travail sur des connaissances nouvelles »	435
B.3.1	Etudier des expressions équivalentes	435
B.3.2	Valider des règles de formation et transformation des expres- sions pour travailler l'équivalence des expressions	436
B.3.3	Reconnaître la structure des expressions	438
B.3.4	Travailler les techniques de développement et de factorisation .	439
B.3.5	Réinvestir les techniques de calcul algébrique pour résoudre des problèmes (modélisation, généralisation, preuve, calculs astucieux)	448
B.4	Liste d'exercices	449
C Liste des expérimentations et des PED expérimentés		499
C.1	Liste des expérimentations et des données recueillies	499

C.1.1	Pré-expérimentations entre janvier et juin 2011	499
C.1.2	Expérimentations menées entre octobre et juin 2012	501
C.2	Les parcours d'enseignement différencié expérimentés	504
C.2.1	Les PED pour la pré-expérimentation en seconde dans la classe de Pauline	504
C.2.2	Les PED pour la pré-expérimentation en troisième dans la classe de Fabien	515
C.2.3	Les PED pour l'expérimentation menée en seconde dans la classe de Caroline	534
C.2.4	Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3A)	541
C.2.5	Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Garance (3B)	553
C.2.6	Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Benoît	558
C.2.7	Les PED pour l'expérimentation menée en troisième dans la classe de Fabien	561
C.3	Les bilans des enseignants sur le groupe IREM	571
D	Données analysées de la classe de Garance	581
D.1	Les documents constitutifs de la progression en algèbre	581
D.2	Cahier de quelques élèves	595
D.3	Productions des élèves sur le parcours 1	615
D.4	Productions des élèves sur le parcours 2	642
D.5	Productions des élèves sur le parcours 3	652
E	Transcriptions des séances observées chez Garance	663
F	Perspectives pour un exercice interactif	749
G	Indexation des exercices	765

Introduction

La gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la différenciation de l'enseignement sont deux thèmes d'actualité dans l'enseignement secondaire français. Les enseignants, qui s'appuient le plus souvent sur des catégories d'élèves du type « les bons, les moyens, les faibles », semblent démunis pour repérer et exploiter les manifestations des connaissances des élèves et ont peu accès à des ressources adaptées pour gérer l'hétérogénéité de leurs apprentissages. L'enjeu de notre thèse est donc de fournir des outils aux enseignants pour les aider à gérer l'hétérogénéité des apprentissages, prenant en compte les besoins des élèves dans un domaine mathématique à la fin de la scolarité obligatoire (3^e-2^{de}).

Notre travail de thèse porte sur la modélisation didactique de parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire articulés à un logiciel de diagnostic, le logiciel Pépité, en vue d'une implémentation informatique dans des systèmes de ressources en ligne. Dans cette thèse, il s'agit de la plateforme LaboMeP de l'association Sésamath. La thèse porte aussi sur l'évaluation de ce modèle, à la fois du point de vue de sa pertinence cognitive et épistémologique et du point de vue de son écologie possible dans l'enseignement secondaire actuel. Nous situons nos travaux dans une approche anthropologique afin de prendre en compte le contexte institutionnel dans lequel l'élève apprend.

Notre étude s'organise en cinq chapitres. Le chapitre 1 sert d'introduction à la problématique et aux origines de notre recherche. Nous y précisons nos questions de recherche, le cadre théorique retenu et les principaux choix méthodologiques. À l'issue de ce chapitre, nous précisons le plan d'étude retenu pour les cinq chapitres suivants.

Chapitre 1

Problématique et méthodologie

Dans ce chapitre, nous présentons la problématique et la méthodologie de notre recherche. Après avoir problématisé notre travail autour de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et de la différenciation de l'enseignement, nous situons notre recherche dans le contexte du projet de recherche PepiMeP. Nous précisons ensuite nos questions de recherche, les principaux choix théoriques et méthodologiques et le plan d'étude retenu.

1.1 Problématique

1.1.1 Gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et différenciation de l'enseignement

Notre travail de thèse porte sur une question vive dans l'enseignement français depuis plusieurs années : la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la régulation de l'enseignement différencié (cf. §1.1.2 et §1.1.3). On assiste à un décalage entre les politiques éducatives, qui préconisent la mise en place de dispositifs pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages, et les travaux des chercheurs en didactique et en science de l'éducation qui soulignent les limites de ces mêmes dispositifs.

D'un côté, les politiques éducatives, menées depuis plusieurs années, stipulent que, pour « *assurer la réussite de tous les élèves* », l'École apporte des réponses différenciées aux difficultés des élèves¹. Elles multiplient les injonctions à la mise en

1. Voir par exemple les textes officiels de l'Éducation nationale à l'adresse <http://eduscol.education.fr/pid23251/personnalisation-des-parcours.html>, pour le lycée, <http://eduscol.education.fr/cid54928/accompagnement-personnalise.html> ou le rapport *Le mé-*

place de dispositifs de re-médiation, d'accompagnement personnalisé, d'individualisation et de personnalisation de l'enseignement hors du temps scolaire ou de pédagogie différenciée (Przesmycki, 2008). D'un autre côté, les enseignants éprouvent des difficultés à mettre en place ces dispositifs. Des études de didactique et de science de l'éducation (par exemple, Kahn, 2012 ; Meirieu, 2005 ; Bolon, 2002 ; Charnay & Mante, 1992 ; Perrenoud, 1998 ; D. Butlen & Pezard, 1991) mettent en évidence des limites de ces dispositifs lorsqu'ils ne prennent pas suffisamment en compte le contenu enseigné et l'évaluation des élèves. Bolon (2002) écrit :

« Les textes ministériels ne différencient pas les domaines d'apprentissage : tout se passe comme si les dispositifs pédagogiques étaient indépendants de la discipline enseignée et de ses finalités. » (p.70)

Pour les chercheurs du réseau RESEIDA², s'ajoute « *un souci de faciliter la tâche aux élèves* », qui se traduit par un « *glissement de l'activité intellectuelle vers des activités à faible enjeu cognitif* ». Ils écrivent :

« L'intention de prendre en considération les différences et les difficultés que l'on perçoit chez les élèves et d'« adapter » les tâches, les exigences, les supports de travail ou les modalités d'aide qu'on leur propose est louable mais quand elle ne se fonde pas sur une analyse et une prise en charge de ce qui fait difficulté d'apprentissage pour les élèves, elle conduit fréquemment à leur proposer des tâches restreintes, de plus en plus morcelées, qu'ils peuvent effectuer et réussir les unes après les autres sans trop d'effort, mais au terme desquelles il n'y a pas de réel apprentissage et de réelle construction de savoir. » (Rochex & Crimon, 2011)

La trop faible prise en compte des finalités du contenu enseigné pour évaluer les besoins d'apprentissage des élèves, la proposition de tâches avec un trop faible enjeu cognitif et la tendance à orienter l'enseignement vers l'individuel plutôt que le collectif conduiraient les dispositifs de différenciation proposés par les enseignants à construire des inégalités plutôt qu'à les réduire. Bien entendu, certains travaux tentent d'aller au-delà de ces limites. Par exemple, Charnay (1995) avec les nombres à l'école élémentaire dans le cadre du groupe E.R.M.E.L.³ et, Frère (1997) avec la géométrie en classe de 4^e ont une réflexion orientée sur le contenu mathématique, qui toutefois ne s'appuie pas préalablement sur une évaluation diagnostique des connais-

tier d'enseignant <http://www.senat.fr/rap/r11-601/r11-601.html>

2. Le réseau RESEIDA est un regroupement interdisciplinaire de chercheurs issus de plusieurs laboratoires français et francophones. Piloté par E. Bautier et J-Y. Rochex, il porte sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages. Il a été créé en 2011 à l'initiative de l'équipe ESCOL (Éducation Scolarisation) de l'Université de Paris 8. Il a permis d'unifier et de consolider une approche originale, qualifiée d'approche relationnelle et contextuelle de la production des inégalités et, plus largement, des pratiques scolaires.

3. Équipe de Recherche en Mathématiques à l'École élémentaire.

sances des élèves dans le domaine étudié. Selon nous, les enseignants sont parfois démunis pour apporter une réponse adaptée à la mise en place de tels dispositifs.

Pour interroger les difficultés rencontrées par les enseignants dans la gestion de l'hétérogénéité et de la différenciation de l'enseignement, nous nous appuyons sur des travaux de didactique portant sur ces questions. Nous nous situons notamment par rapport aux travaux de la 13^e École d'été de didactique des mathématiques dont un thème était intitulé « *Différenciations et hétérogénéités, une question vive* » (Coulange & Margolinas, 2007 ; Sarrazy, 2007 ; Castela, 2007 ; Bautier, 2007).

1.1.2 Hétérogénéité des apprentissages

Pour mieux situer la question de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves par les enseignants, nous nous situons par rapport aux travaux de Sarrazy (2007, 2002) et Chopin (2011). Pour examiner la question du lien entre les hétérogénéités pouvant caractériser un système didactique et l'enseignement des mathématiques, Sarrazy propose une typologie des formes d'hétérogénéité :

- l'*hétérogénéité exogène*, définie à partir de critères non-didactiques comme la catégorie socio-professionnelle d'origine des élèves. Elle n'est pas prise en compte dans notre recherche,
- l'*hétérogénéité péri-didactique* correspondant à un ensemble de critères liés aux acquisitions disciplinaires et indirectement à l'action didactique, par exemple « le niveau scolaire des élèves »,
- l'*hétérogénéité didactique* « *constitutive de l'action didactique elle-même, produit de la nécessité qu'a le professeur d'ajuster les exigences curriculaires aux contraintes effectives de sa classe (niveaux des élèves, temps disponible, niveau de difficulté des connaissances à transmettre...)* ». Sarrazy la définit plus précisément :

« Toute action didactique trouve sa raison d'être dans une hétérogénéité initiale entre deux institutions : le professeur est celui qui sait ; l'élève est, par définition, celui qui ne sait pas ou sait mal. L'intention didactique visant à réduire cette distance, se manifeste par tout un ensemble d'actions visant à faire naître ou à transformer les rapports des élèves à des objets dont la maîtrise nécessite les connaissances visées par l'enseignant. » (Sarrazy, 2007, p. 124)

- l'*hétérogénéité des situations* « *sans laquelle on serait conduit à naturaliser la notion en considérant les critères de différenciation comme des caractéristiques « personnelles » des élèves* ». Les situations peuvent avoir des fonctions didactiques différenciées dépendantes de leurs propriétés et des décisions prises

par l'enseignant.

Ainsi, la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves par les enseignants relève des quatre types d'hétérogénéité mentionnés par Sarrazy. Leur prise en compte les conduit à ajuster leur enseignement, et, comme le soulignent Sensevy, Maurice, et Murillo (2008), à produire une différenciation didactique :

« Dans son travail, le professeur a produit ce que nous avons pu appeler une différenciation didactique ordinaire, qui se réfère aux efforts habituels, « ordinaires », produits par le professeur pour « prendre en compte » la réception différentielle de son action didactique par chaque élève. » (Sensevy et al., 2008, p. 109)

Dans le paragraphe suivant, nous interrogeons les différents types de processus de différenciation didactique rencontrés. En effet, cette notion permet de mettre en avant les difficultés des enseignants dans leur gestion de l'hétérogénéité des apprentissages.

1.1.3 Deux processus de différenciation

Plusieurs travaux font référence à des processus de différenciation dans l'enseignement. Pour structurer notre synthèse, nous reprenons les deux grands types de processus de différenciation distingués dans les travaux du réseau RESEIDA : les processus de différenciation « active » et « passive ».

a. Les processus de différenciation « active »

Les processus de différenciation « active » sont de deux natures. Le premier type de processus de différenciation « active » relève d'un dispositif mis volontairement en œuvre par l'enseignant, par exemple de pédagogie différenciée ou de personnalisation. Il consiste à organiser un enseignement différencié en adaptant les tâches, les exigences, les supports de travail ou la modalité d'aide proposée aux « *caractéristiques réelles ou supposées des élèves* ». Mais, comme nous l'avons déjà souligné, ces caractéristiques sont souvent réduites au niveau scolaire supposé des élèves, à leur aptitude à travailler vite ou lentement.

Le second processus de différenciation active relève de « contrats didactiques différentiels »⁴. Il agit à l'insu de l'enseignant, en dehors de tout groupement d'élèves. Alors que l'enseignant et les élèves pensent que tous sont confrontés à la même

4. Rochex et Crinon soulignent que ce terme est emprunté à Maria-Luisa Shubauer-Leoni dans son intervention au colloque *Le contrat didactique, différentes approches*, qui a eu lieu à Marseille en mars 1987.

tâche et aux mêmes exigences, ils sont en fait confrontés à des contrats didactiques différentiels⁵. Ces contrats...

« ... se présentent comme des formes récurrentes, souvent même ritualisées, d'interactions entre maître et élèves, qui diffèrent sensiblement d'un type d'élève à l'autre, et dont la répétition, constatée tout au long d'une année scolaire, ne peut que conduire à une différenciation, fort inégale, des univers de savoirs et d'activités fréquentés par les uns et par les autres. » (Rochex & Crinon, 2011, p. 92)

Ce second type de différenciation active nourrit notre réflexion sur le rôle de l'évaluation, pour apporter des aides adaptées aux besoins des élèves, et sur le fait qu'une meilleure connaissance de ces besoins est nécessaire et pourrait réduire les contrats didactiques différentiels. Nous revenons sur la question de l'évaluation dans nos hypothèses de travail (cf. §1.1.4).

b. Les processus de différenciation « passive »

Le deuxième type relève de processus de différenciation « passive ». Nous l'avons rencontré dans trois travaux différents qui développent des points de vue proches.

La différenciation didactique passive chez Sensevy

Sensevy et al. (2008) définissent les processus de différenciation passive :

« Enseigner quelque chose à un groupe, c'est produire des différences dans ce groupe, c'est construire in fine de la normalité statistique, avec des élèves qui réussissent très bien, des élèves qui réussissent très mal, un « grand nombre d'élèves » qui réussissent moyennement, etc. Le professeur, dans son action usuelle, peut être vu comme un constructeur de normalité statistique.

C'est bien ce phénomène que nous appelons différenciation didactique passive : cette différenciation est didactique, puisqu'elle est le résultat d'un rapport différencié des élèves et du professeur aux objets de savoir ; elle est passive, dans la mesure où elle ne constitue pas le résultat d'un projet explicite et déterminé. » (Sensevy et al., 2008, p. 117)

Sensevy et al. (2008) utilisent la notion de distance à la performance attendue, introduite par Maurice et Murillo (2008), pour identifier l'écart entre les connaissances initiales de chaque élève et les connaissances enseignées par le professeur. Comme les élèves ont un rapport différencié aux connaissances enseignées, deux phénomènes peuvent conduire à des processus de différenciation et à des inégalités : soit l'enseignant choisit des tâches convenant mieux aux élèves dont les connaissances sont disponibles, soit il apporte une aide plus ou moins efficace en fonction de la distance à la performance attendue.

5. Cette idée est proche, par exemple, des travaux de Robert (2008b, p. 53), pour qui l'enseignant a une prise en compte « différentielle des élèves ». Sensevy et al. (2008) développent un point de vue proche : « Enseigner quelque chose à un groupe, c'est produire des différences dans ce groupe ».

Les processus de différenciation passive dans les travaux RESEIDA

Dans les travaux RESEIDA, les processus de différenciation didactique se définissent comme suit :

« Des processus de différenciation (ou de production d'inégalités) « passive », ou encore « par défaut » parce qu'ils mettent au jour des modes de faire des enseignants, des modes d'organisation, d'enchaînement et de pilotage des tâches et activités dans la classe, des types de discours et d'interactions langagières qui, faute de désigner et d'enseigner explicitement ce qui relève des enjeux d'apprentissage pertinents, conduisent à ce que soient exigés de tous les élèves des savoirs, des compétences, des modes de faire qui ne sont pas ou guère enseignés, ni même parfois nommés ou désignés à tous. Ce faisant, le caractère transparent ou incident des savoirs en jeu, leur disparition, leur mise au second plan ou non-élucidation derrière le privilège accordé à la « mise en activité » des élèves, et donc à la multiplicité et la succession des tâches, aboutissent souvent à laisser pour une large part à la seule charge des élèves la mise en relation des tâches entre elles, et de ces tâches avec des enjeux et des contenus de savoir qui s'en émancipent et puissent ainsi anticiper sur d'autres tâches. » (Rochex & Crinon, 2011, p. 91)

Ainsi, des modes de faire des enseignants, comme le rôle du langage et de la gestuelle ou la multiplicité et la succession de tâches isolées les unes des autres, laisseraient à la charge des élèves certaines nécessités d'apprentissage sans qu'ils s'en aperçoivent et conduiraient à construire des inégalités entre les élèves.

Des processus différenciateurs dans les travaux de Castela

Selon Castela (2007), certains élèves réussissent alors que d'autres échouent en mathématiques, parce que certains rencontrent des conditions qui leur permettent de réaliser les apprentissages nécessaires à la réussite scolaire, quand d'autres n'y parviennent pas. Castela se place dans une approche anthropologique et étudie

« les phénomènes silencieux d'apprentissage dans l'enseignement des mathématiques et des effets différenciateurs de ces besoins d'apprentissage ignorés du système d'enseignement, ignorés au sens où, très peu explicités dans les textes officiels, les apprentissages en question ne sont pas organisés institutionnellement. » (Castela, 2007, p. 91)

La prise en compte par les enseignants de l'hétérogénéité didactique et péri-didactique contribuerait à des processus différenciateurs entre les élèves. Il existerait des savoirs et des savoir-faire implicites qui conduiraient à une émergence de rapports personnels des élèves à un savoir pas toujours adaptés au rapport institutionnel attendu au sein de l'institution considérée. Cela nous amène à notre questionnement et à nous positionner par rapport au terme de différenciation.

1.1.4 Question centrale et premières hypothèses de travail

L'identification de différents processus de différenciation *passive* contribuent à nourrir notre questionnement sur les sources de difficulté des élèves en lien avec la gestion de l'hétérogénéité par les enseignants.

Les enseignants peuvent se trouver en difficulté pour repérer et exploiter les manifestations des connaissances des élèves et ne pas trouver de ressources pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages. Ils s'appuient le plus souvent sur des catégories d'élèves du type « les bons, les moyens, les faibles, les rapides » (Rogalski, 2005), supposés situer leur niveau en mathématiques. Mais ces catégories semblent peu exploitables pour organiser la régulation des apprentissages car pas suffisamment reliées aux contenus enseignés et aux besoins d'apprentissage des élèves dans un domaine donné.

Nous nous interrogeons sur les difficultés des enseignants à gérer l'hétérogénéité des apprentissages. Ne sont-elles pas renforcées par :

- leur méconnaissance de processus différenciateurs et en particulier d'effets différenciateurs liés à des besoins d'apprentissage ignorés du système d'enseignement et à des savoirs implicites laissés à la charge des élèves,
- le peu d'évaluations diagnostiques disponibles pour identifier les connaissances des élèves ?

Ce questionnement nous conduit à prendre en compte le fait que l'élève apprend dans une institution donnée où le savoir est transmis selon certaines conditions. Nous nous situons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999, 1998).

Nous formulons deux hypothèses :

H1 : L'identification des connaissances apprises des élèves à partir d'une évaluation diagnostique peut faciliter la constitution de groupes d'élèves, la proposition de types de tâches adaptées aux besoins d'apprentissage repérés par le diagnostic et l'organisation d'une gestion didactique de l'hétérogénéité minimisant les contrats différentiels.

H2 : Certaines difficultés des élèves sont liées à des besoins d'apprentissage ignorés du système d'enseignement de l'institution considérée. Mettre à la disposition des élèves et des enseignants des ressources permettant d'organiser ces apprentissages implicites peut favoriser une évolution plus idoine des rapports personnels des élèves à un savoir.

1.1.5 Enjeu de notre travail

Cet aperçu met en avant un besoin d'études et de recherches pour accompagner les enseignants face à la question de la prise en compte de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves dans l'avancée du temps didactique. C'est

dans cette perspective que nous inscrivons notre travail de thèse. Notre enjeu est de proposer aux enseignants des outils adaptés à une gestion de l'hétérogénéité des apprentissages dans un domaine donné prenant en compte un diagnostic des besoins d'apprentissage des élèves dans ce domaine, relativement à l'institution dans laquelle l'élève apprend. Nous ne nous situons pas dans une perspective d'individualisation mais d'enseignement au sein de la classe. C'est dans ce sens que nous avons défini le terme de « parcours d'enseignement différencié » (cf. §1.4.4)

Les questions suivantes nous animent : Quels sont les besoins d'apprentissage des élèves sur un domaine ? Comment les repérer ? Quels exercices et quelles aides apporter ? Pour quels objectifs ? Avec quelle gestion didactique ? À quel moment de l'étude ? À quels élèves les proposer ?

Notre enjeu peut paraître vaste et ambitieux. Commençons par situer notre recherche dans son contexte pour en délimiter davantage le sujet.

1.2 Contexte de la recherche : le projet PepiMeP et le logiciel de diagnostic Pépité

Notre travail de thèse s'inscrit dans un contexte particulier. Il se situe dans la continuité de travaux de recherche réalisés dans le cadre des projets pluridisciplinaires Pépité, Lingot et actuellement le projet PepiMeP (cf. figure 1.1, pour une chronologie plus détaillée voir la figure 1.2), qui visent à la conception d'Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (E.I.A.H.).

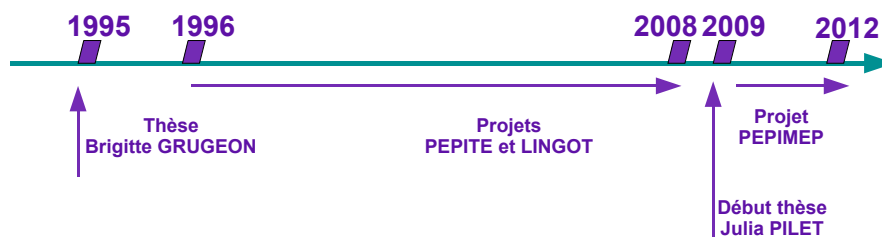


FIGURE 1.1 – Historique des projets Pépité, Lingot et PepiMeP

Pour préciser dans quelle mesure notre travail s'inscrit dans la continuité de ces projets et délimiter notre sujet, nous retraçons brièvement leur historique. Il s'agit de montrer que la conception et les évolutions successives d'un logiciel de test diagnostic, nommé Pépité, et de l'analyse des réponses au test ont été guidées par la

volonté de l'équipe de chercheurs de créer un outil visant à permettre une régulation différenciée de l'enseignement de l'algèbre à la fin de la scolarité obligatoire (14-15 ans).

1.2.1 Les projets Pépite et Lingot

a. Des projets pluridisciplinaires

Le travail de recherche s'appuie sur les travaux de Grugeon (1995) qui a défini un modèle de la « compétence algébrique » attendue en fin de 3^e, comme référence pour délimiter les types de problèmes à prendre en compte et organiser un diagnostic des compétences des élèves en algèbre élémentaire à la transition 3^e-2^{de}. Les projets Pépite et Lingot ⁶ (2000-2008), qui regroupaient principalement des chercheurs en didactique des mathématiques de l'équipe de l'Université Paris 7, des chercheurs en informatique des laboratoires du LIUM (de l'Université du Maine, du LIP6 de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, des chercheurs en psycho-ergonomie de l'université Paris 8, ainsi que des enseignants et des formateurs d'enseignants (des I.U.F.M. de Rennes, Créteil, Lille et Amiens), ont permis l'automatisation du diagnostic, donnant naissance à la réalisation des versions successives du logiciel de diagnostic Pépite. Une chronologie détaillée des projets Pépite et Lingot est présentée à la figure 1.2. Pour davantage de précisions, nous dirigeons les lecteurs vers les publications (Jean, 2000 ; Prévité, 2008 ; Delozanne, Prévité, Grugeon, & Chenevotot, 2010 ; Grugeon, 2009 ; Chenevotot & Grugeon, 2009 ; Chenevotot, Grugeon, & Delozanne, 2009).

b. Au départ, les travaux de Grugeon

Au départ, ces projets s'appuient sur un modèle multidimensionnel du domaine algébrique. En référence à la dialectique outil-objet introduite par Douady (1986), Grugeon (1995, 1997) structure le domaine algébrique en deux dimensions non indépendantes et non hiérarchisées : la dimension *outil* et la dimension *objet*. Cette structuration s'inscrit dans les travaux de didactique de l'algèbre des années 90 qui remettent en question un enseignement de l'algèbre comme « arithmétique généralisée » (Chevallard, 1989 ; Gascón, 1994).

Nous en rappelons les principales caractéristiques qui seront développées dans le

6. Ce projet a été financé dans le cadre du programme Cognitique du MRT, *École et sciences cognitives, les apprentissages et leurs dysfonctionnements*, de 2002 à 2004.

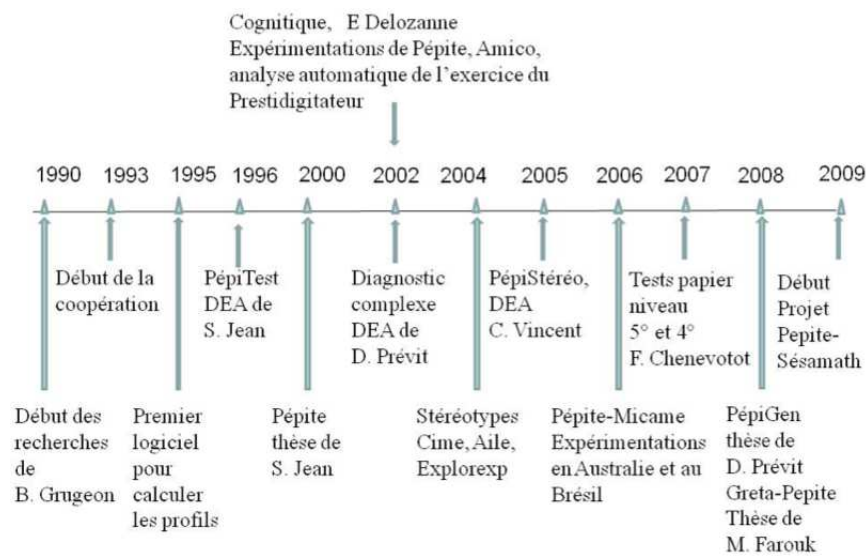


FIGURE 1.2 – Historique détaillé des projets Pépite et Lingot

chapitre 2. L’algèbre est considérée comme un outil pour résoudre des problèmes pris dans des contextes divers. Suite aux travaux de Chevallard (1985b, 1985a, 1989) et Gascón (1994), Grugeon distingue les problèmes arithmétiques, de généralisation et de preuve, de modélisation et de mise en équation issus des cadres numériques, algébriques et fonctionnels. Dans ces problèmes, l’outil algébrique a différentes fonctions. Il permet de produire des expressions et de traduire les relations mathématiques d’un problème, de les interpréter puis de les manipuler pour le résoudre. Dans sa dimension *objet*, l’algèbre est considérée comme un ensemble structuré d’objets ayant des propriétés, des modes de représentation et de traitement. Les objets mis en jeu au collège et au lycée en France sont, par exemple, les expressions algébriques, les formules ou les équations. Ils sont introduits au collège et sont en rupture avec les pratiques arithmétiques (Vergnaud, 1989a, 1989b, 1990) ou avec des fausses continuités (Kieran, 1992). Cette dimension prend en compte les usages du symbolisme, le statut et le sens à donner aux objets.

A partir de cette caractérisation du domaine de l’algèbre, Grugeon définit différents aspects de la « compétence algébrique » comme suit :

« Nous définissons les différents aspects de la compétence algébrique comme suit :

- Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions outil et objet :
 - sur le plan outil, la compétence algébrique s’évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à

sa résolution. Différents contextes, différents domaines d'emploi mettent en jeu la dimension outil de l'algèbre aussi bien dans des tâches de formulation, de résolution que de preuve, l'« arithmétique traditionnelle » n'en étant qu'un parmi d'autres. Un intérêt tout particulier est porté aux capacités à utiliser l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques.

- sur le plan objet, il est nécessaire de prendre en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique (instrumentale et sémiotique) du traitement algébrique. La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et sémiotique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions algébriques. Elle peut aussi s'évaluer en termes de capacité à manipuler des ostensifs pilotés par des non-ostensifs.

À ce niveau scolaire, nous devons prendre en compte deux autres éléments pour évaluer la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique.
- L'efficacité algébrique requiert une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et structural et à développer une nécessaire fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions pour en faire des usages variés. » (Grugeon, 1997)

La compétence algébrique joue le rôle d'une référence. Indépendante des institutions tout en se situant dans leur champ d'action, elle permet d'étudier à la fois les rapports institutionnels et personnels à l'algèbre élémentaire.

Les différents aspects de la compétence algébrique ont permis de délimiter les types de problèmes à prendre en compte pour définir le test diagnostique papier-crayon, composé de vingt-deux tâches (cf. chapitre 4 et annexe A). Une grille d'analyse multidimensionnelle fondée sur le modèle du domaine algébrique permet de coder les réponses des élèves et d'établir le profil cognitif d'un élève. Ce profil cognitif situe le développement conceptuel de l'élève en algèbre et de décrire : « les principaux traits de son comportement en algèbre élémentaire qui donne un modèle intelligible de son rapport personnel à l'algèbre. ». Le passage d'une description à un niveau microscopique (codes des réponses de l'élève) à un niveau macroscopique (recoupement transversal des codes, composante par composante) s'est avéré nécessaire pour dresser le profil cognitif de l'élève en algèbre. Trois niveaux de description permettent de décrire les principaux traits de fonctionnement des élèves en algèbre à travers leur profil cognitif. Le premier niveau résume les compétences algébriques en termes de réussite et d'échec par rapport à un niveau attendu. Le deuxième pointe les cohérences de fonctionnement selon l'usage des lettres, le calcul algébrique, la traduction, les types de justification. Le troisième décrit la flexibilité dans l'articulation entre registres de représentation. Nous les présentons dans le chapitre 4.

Face à la complexité de l'analyse des réponses des élèves à partir de la grille multidimensionnelle et à son coût élevé en temps, l'automatisation du diagnostic (passage d'un test papier-crayon à un test informatisé et analyses automatique des réponses), qui a donné naissance au logiciel Pépite (Jean, 2000 ; Jean-Daubias, 2002) et à ses évolutions (Prévit, 2008), s'est révélée nécessaire pour en envisager la diffusion auprès des enseignants.

c. Des profils cognitifs aux stéréotypes

Les profils cognitifs se sont révélés donner une description trop fine des apprentissages de chaque élève pour assister la prise de décisions didactiques, au niveau de la classe, sur la constitution de groupes d'élèves et sur les exercices à proposer. Le travail mené dans le projet Pépite a évolué vers la définition de *stéréotypes*, une réification du profil cognitif plus exploitable pour une régulation de l'enseignement.

Nous avons émis deux hypothèses de travail :

- *H1 : Pour prendre des décisions didactiques sur les activités d'apprentissage adaptées au profil cognitif, il est nécessaire de disposer d'un niveau de modélisation d'abstraction plus élevé à côté du modèle cognitif très fin proposé par Pépite. Nous avons appelé les modèles de ce niveau des « profils types », puis des « classes de profils » et enfin des « stéréotypes » pour adopter une terminologie en cours dans la communauté de recherche [...].*
- *H2 : Le concept de stéréotype constitue un outil conceptuel pour favoriser l'appropriation par les enseignants d'un artefact complexe comme l'est le logiciel Pépite car il permet d'articuler diagnostic individuel et « géographie de la classe » pour organiser la régulation des apprentissages en classe, c'est-à-dire de faire progresser la classe en respectant les différences individuelles.*

(Delozanne, Grugeon, Artigue, Rogalski, & Chenevotot, 2005, p. 3)

Un stéréotype est défini comme une classe de profils équivalents, c'est-à-dire un ensemble de profils pour lesquels les compétences algébriques des élèves peuvent être jugées suffisamment proches pour bénéficier de situations d'apprentissage adaptées ayant les mêmes objectifs. Le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire situe l'élève sur trois composantes et de niveaux sur chaque composante (cf. chapitre 4) (Grugeon, 2009) : l'usage de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes (codé UA, quatre niveaux), la traduction entre différents registres sémiotiques (des écritures numériques, des écritures algébriques, des figures géométriques, des représentations graphiques, du langage naturel) (codé TA, trois niveaux), l'usage des règles de calcul algébrique (codé CA, trois niveaux). Nous les exploitons pour situer les besoins d'apprentissage des élèves en algèbre élémentaire et proposer aux enseignants des outils adaptés au diagnostic repéré. Cette étape s'inscrit dans le projet PepiMeP.

1.2.2 Le projet PepiMeP

Actuellement, ce projet pluridisciplinaire se poursuit dans le cadre du projet PepiMeP⁷ (2010-2012) qui regroupe des chercheurs en didactique des mathématiques du Laboratoire de Didactique André Revuz de l'Université Paris-Diderot, des chercheurs en informatique du Laboratoire d'Informatique de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, et les membres de l'association Sésamath⁸ (Grugeon, Pilet, Chenevotot, & Delozanne, 2012 ; Chenevotot, Grugeon, Pilet, & Delozanne, 2012 ; Grugeon-Allys et al., 2011).

L'association Sésamath créée en 2001 et composée de professeurs de mathématiques développe des ressources en ligne diversifiées, libres et gratuites comme la plateforme LaboMeP, les exercices interactifs de MathenPoche et les manuels scolaires Sésamath. Les chiffres témoignent de son importance dans l'enseignement des mathématiques en France : y sont inscrits plus de 15 000 enseignants à Sésaprof et un collégien sur quatre⁹. Les collaborations fréquentes entre l'association Sésamath et les chercheurs en didactique des mathématiques (par exemple, Hyperpro, 2009 ; Sabra, 2011) illustrent à la fois une ouverture de l'association à la diffusion de situations issues de la recherche en didactique des mathématiques et une réelle demande des enseignants d'aide à la conception d'outils performants face à la « *multiplication exponentielle et la pénétration facile* » (Artigue & Gueudet, 2008) des ressources en ligne¹⁰ dans l'enseignement secondaire¹¹.

Le projet a pour objectif de transférer des résultats de recherche dans une communauté d'enseignants et d'accompagner l'évolution des rapports entre conception,

7. Ce projet *Conception collaborative et itérative de ressources pour différencier l'enseignement en algèbre* débuté en 2010 est financé par la Région Ile-de-France (Convention n° 09003412) dans le cadre de l'appel d'offre PICRI dont l'objectif est de favoriser les liens entre les laboratoires de recherche et les associations.

8. <http://www.sesamath.net/>

9. <http://www.vousnousils.fr/2012/01/16/sebastien-hache-un-collegien-sur-quatre-est-inscrit-a-notre-dispositif-labomep-519918>

10. Une ressource en ligne est définie par Cazes et Vandebrouck dans (Vandebrouck, 2008, p. 183) de la façon suivante : « *une ressource Internet qui a les caractéristiques suivantes : 1/ il s'agit d'une ressource élaborée à des fins d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ; 2/ elle est disponible en ligne et seul un navigateur Internet est nécessaire ; 3/ elle est constituée d'exercices de mathématiques organisés selon un certain classement ; 4/ à chaque exercice est associé un environnement qui peut comporter des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices...), du cours, mais aussi des analyses de réponses ou la solution complète de l'exercice.* »

11. Parmi ces ressources en ligne, citons WIMS, Euler, les ressources de l'association Sésamath, MathenPoche pour les élèves et LaboMeP pour les enseignants ou encore Mathoumatheux.

développement et usage des ressources en ligne, pour favoriser des apprentissages en mathématiques. Il s'agit de mettre à disposition des enseignants, d'une part, l'outil de diagnostic Pépite développé et, d'autre part, des exercices adaptés aux besoins des élèves repérés par le diagnostic Pépite en algèbre élémentaire. L'enjeu de notre thèse porte sur ce dernier point. Le projet consiste d'abord de transférer ces outils sur la plateforme en ligne *LaboMeP*¹² (figure 1.3) de l'association Sésamath et ensuite d'en analyser les usages par les enseignants et d'en dégager des conditions de viabilité.

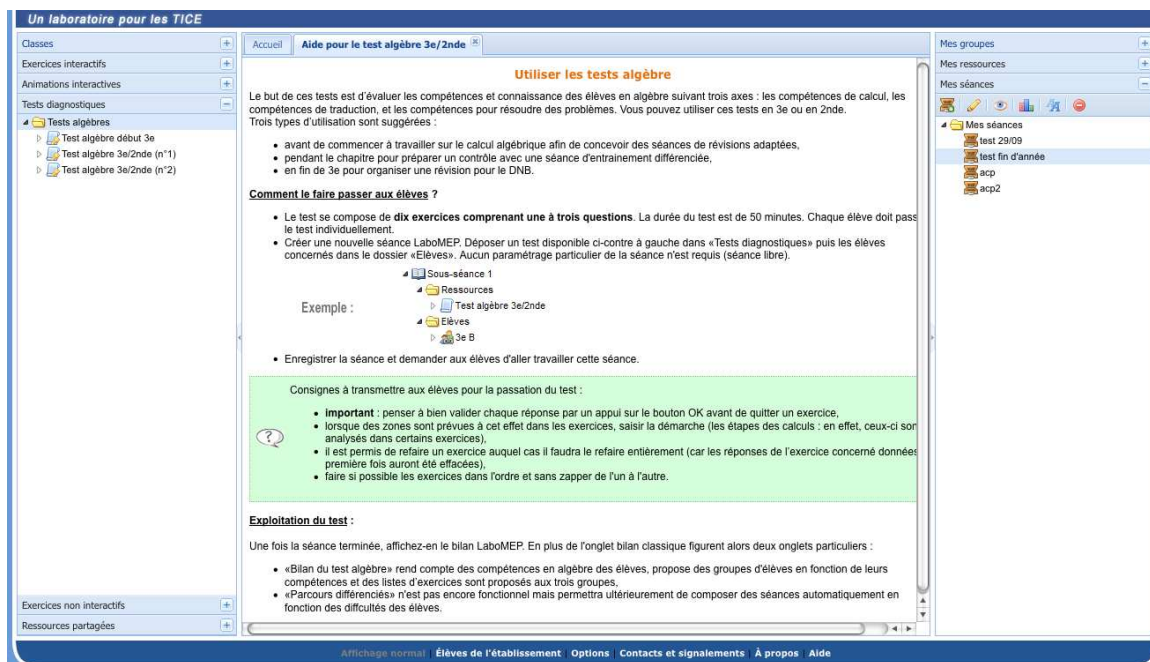


FIGURE 1.3 – Accès au logiciel Pépite depuis la plateforme LaboMeP

1.2.3 Délimitation du sujet de thèse

C'est dans le contexte du projet PepiMeP que nous délimitons notre problématique.

a. Retour sur notre questionnaire

Notre enjeu est de proposer aux enseignants des outils adaptés à une gestion de l'hétérogénéité des apprentissages dans le domaine de l'algèbre élémentaire et

12. Consulter par exemple les articles relatifs à LaboMeP dans la revue MathémaTICE <http://revue.sesamath.net/spip.php?page=recherche&recherche=labomep&x=0&y=0>

prenant en compte à la fois les besoins d'apprentissage des élèves repérés par un diagnostic dans ce domaine (ici le logiciel de diagnostic Pépite) et l'institution dans laquelle l'élève apprend. Les niveaux scolaires considérés sont la classe de troisième et la classe de seconde.

Considérons le scénario suivant. Des élèves viennent d'entrer en troisième. Préalablement au chapitre sur les *Identités remarquables*, le professeur décide de faire passer le test diagnostic Pépite. Parmi les stéréotypes présents, deux sont dominants : CA3 UA3 TA3 et CA2 UA3 TA2¹³. Ces stéréotypes ne relèvent pas du même développement dans la construction de la compétence algébrique. Pour les élèves en CA3 UA3 TA3, la conduite des calculs des élèves s'appuie davantage sur la reconnaissance d'ostensifs (signes +, -, =, etc.) et rarement, au niveau technologico-théorique, sur la hiérarchie des opérateurs, les propriétés du calcul algébrique et le rôle des parenthèses. Les écritures algébriques ou numériques en ligne sont rarement interprétées selon leurs aspects procédural et structural, ce qui se traduit par un calcul non contrôlé, des erreurs de type concaténation ($3 + 2a = 5a$) ou linéarisation ($a^2 = 2a$) et un appui sur des démarches arithmétiques. En revanche, les élèves en CA2 UA3 TA2 s'appuient davantage sur la structure des expressions et leur équivalence pour transformer des expressions simples sans parenthèse. Mais ils privilégient encore majoritairement l'aspect procédural pour transformer des expressions complexes ce qui conduit souvent à des calculs « à l'aveugle », non contrôlés, ne préservant pas l'équivalence des expressions ainsi qu'à des règles de transformation erronées en lien avec le parenthésage du type $(a + 2)^2 = a^2 + 4$. Pour tous, l'algèbre comme outil de résolution de problèmes est immotivée et peu adaptée. Les élèves ont majoritairement recours à des démarches arithmétiques et mobilisent rarement les lettres. Quelle(s) tâche(s) proposer à ces élèves? Bien souvent, les enseignants leur proposent de refaire des tâches de calcul algébrique de même nature.

Ce scénario met en évidence le rôle des stéréotypes pour définir des parcours d'enseignement différencié ainsi que l'intérêt du travail didactique à réaliser pour modéliser ces parcours. Il soulève la question principale suivante que nous serons amenés à préciser au fil de la thèse :

- Quels types de tâches concevoir, selon quels enjeux didactiques et comment les mettre en œuvre pour qu'ils soient adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves en algèbre élémentaire, repérés par le logiciel de diagnostic Pépite, et à la stratégie d'enseignement pour la classe?

13. Les intitulés des composantes CA, UA et TA ont été introduits à la page 26, les niveaux sur chaque composante sont présentés au début du chapitre 4

b. Le domaine de l'algèbre

L'inscription de notre travail dans le projet PepiMeP nous a conduit à limiter notre sujet à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Le domaine de l'algèbre élémentaire semble porteur pour interroger l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. En France, comme dans la plupart des autres pays, l'algèbre constitue un élément pivot du curriculum mathématique de l'enseignement secondaire pour pouvoir poursuivre des études scientifiques ou technologiques. L'algèbre fournit des outils dans la plupart des domaines mathématiques comme la géométrie ou l'analyse ainsi que d'autres domaines non mathématiques. Pourtant, il constitue un obstacle difficilement surmontable pour beaucoup d'élèves. A ce propos, Kieran (1992) écrit :

« However, to cover their lack of understanding, it appears that students resort to memorizing rules and procedures and they eventually come to believe that this activity represents the essence of algebra. » (Kieran, 1992, p. 390)

De nombreux travaux en didactique des mathématiques utilisant des approches différentes qu'elles soient épistémologiques, cognitives ou anthropologiques, mettent en évidence des difficultés d'apprentissage et d'enseignement en algèbre. Ces travaux peuvent nous donner des points d'appui pour les étudier.

c. Le choix de centrer l'étude sur les expressions algébriques

Le calcul sur les expressions algébriques étant convoqué dans la résolution des problèmes mettant en jeu des formules ou des équations, nous avons choisi de centrer notre étude sur les expressions algébriques. Nous nous intéressons plus particulièrement à la génération des expressions algébriques, au calcul sur ces expressions et à leur utilisation dans des contextes extra- ou intra-mathématiques.

1.2.4 Une troisième hypothèse de travail

Comme nous l'avons déjà évoqué dans notre première hypothèse de travail, la question de l'évaluation est centrale pour accéder aux besoins d'apprentissage des élèves et notamment en algèbre.

Certains travaux de didactique de l'algèbre comme ceux de Nicaud (2005), Croset (2009) et Chaachoua (2010) ont contribué à répondre à la question de l'évaluation en algèbre élémentaire en catégorisant les erreurs des élèves. Mais celles proposées portent sur une partie restreinte du domaine de l'algèbre, qui concerne principalement l'aspect technique (développer, factoriser, résoudre des équations) ou de la

dimension *objet* (en référence à la dialectique outil/objet de Douady, 1986). Or, l'algèbre est aussi un outil pour résoudre des problèmes (Chevallard, 1985b ; Grugeon, 1997 ; Kieran, 2007).

Ces travaux apportent une connaissance des difficultés des élèves sur une partie restreinte de l'algèbre ce qui ne permet pas de les situer par rapport au domaine global. Or, des erreurs dans la transformation des expressions peuvent cacher des difficultés plus profondes sur le sens donné aux lettres et sur le rôle de l'algèbre dans la résolution de problème. Nous faisons l'hypothèse que la proposition d'exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves suppose d'accéder à une référence prenant en compte le domaine algébrique dans sa globalité et de relier les besoins d'apprentissage des élèves par rapport à cette référence. De ce point de vue, nous faisons l'hypothèse que le diagnostic et le modèle de stéréotype¹⁴ apportent un cadre de recherche pertinent, puisqu'ils proposent un ensemble de tâches diagnostiques recouvrant le domaine algébrique dans ses dimensions *outil* et *objet*. La définition de stéréotypes en algèbre élémentaire constitue une avancée importante comparée aux catégories utilisées habituellement par les enseignants (de type « les bons, les moyens, les faibles »). C'est pourquoi nous posons la troisième hypothèse de travail suivante :

H3 : Le modèle de stéréotype est un outil pertinent pour organiser un enseignement différencié et des groupes d'élèves.

1.3 Objectifs de la thèse

1.3.1 Modélisation de parcours d'enseignement différencié

Le travail de thèse porte sur la modélisation didactique de parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire articulés à un logiciel de diagnostic, ici le logiciel Pépite, en vue d'une implémentation informatique dans des systèmes de ressources en ligne. Les niveaux scolaires considérés sont la troisième et le début de la seconde. Ce travail porte aussi sur l'évaluation de ce modèle, à la fois du point de vue de sa pertinence cognitive et épistémologique, et du point de vue de son écologie possible dans l'enseignement secondaire actuel. Nous nous centrons sur les effets possibles sur les apprentissages des élèves¹⁵.

14. Ils sont introduits dans le paragraphe 1.2.1 et présentés plus en détails dans le chapitre 4.

15. L'analyse des usages de ces ressources du point de vue des enseignants fait l'objet d'une autre thèse en didactique des mathématiques rattachée au projet PepiMeP. Elle est menée par S. Bedja à l'Université de Paris-Diderot et dirigée par B. Grugeon et C. Cazes.

Voici une première définition d'un *parcours d'enseignement différencié*, noté PED, qui sera précisée au fil de la thèse :

Un parcours d'enseignement différencié est déterminé par une question génératrice, fixant un objectif d'enseignement commun à la classe, choisi par l'enseignant, pour un certain moment de l'étude. Il est organisé autour de tâches différenciées, relevant de cet objectif d'enseignement commun, et adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves en algèbre repérés par un diagnostic et de leur gestion didactique.

1.3.2 Précisons notre questionnement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique

Nous commençons par envisager notre questionnement sous l'angle des sources de difficulté de l'apprentissage et de l'enseignement en algèbre. Des travaux de didactique de l'algèbre utilisant une approche cognitive mettent en avant des processus de conceptualisation des objets de l'algèbre liés à des difficultés d'apprentissage des élèves. Selon nous, ces difficultés peuvent être renforcées par le fait que l'élève apprend dans une institution donnée, où le savoir est transmis selon certaines conditions. Cette considération conduit à situer nos travaux dans l'approche anthropologique du didactique développée par Chevallard :

La TAD postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques « du savoir appris » sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition didactique. (Bosch & Gascón, 2005)

Situons notre problématique en termes d'institution et de rapport au savoir. Le *rapport personnel* d'un individu (ici un élève) à un objet de savoir (ici les objets de l'algèbre élémentaire) est le système de toutes les interactions que cet individu peut avoir avec l'objet. Ce rapport révèle les significations qu'un élève donne aux objets de l'algèbre et dans quelles situations il les mobilise. Mais tout savoir vit d'abord dans une institution qui en assure la production, la gestion et le contrôle. A chaque institution est associée un ensemble d'objets d'enseignement, vis-à-vis desquels l'institution crée un *rapport institutionnel* au savoir. Lorsqu'un individu devient sujet d'une institution dans une position donnée (par exemple, celle d'élève), tout objet de cette institution « *va se mettre à vivre pour l'individu sous la contrainte* » (Chevallard 1989 ou Chevallard 2003) du rapport institutionnel lié à cette position. Le système éducatif français est une institution particulière qui manifeste, vis-à-vis de certains individus occupant la position d'élève l'intention de rendre leur rap-

port personnel à certains objets de savoir conformes aux rapports institutionnels correspondants.

En troisième et au début de la seconde, les élèves ont rencontré l’algèbre depuis au moins deux ans. Ils ont construit des rapports personnels à l’algèbre correspondant à des connaissances apprises dans le système d’enseignement français (classes et professeurs). Certains ne sont pas idoines¹⁶ à la poursuite du cursus scolaire en mathématique. À ce propos, Chevallard (1989) écrit :

« Les distorsions provoquées [...] par les contraintes didactiques permanentes, engendrent chez l’élève un rapport personnel au savoir enseigné présentant des pathologies déterminées, ou, à tout le moins, certaines particularités qui le rendent peu idoine. » (Chevallard, 1989, p. 29)

Notre questionnement peut être précisé :

- Sous quelles conditions et quelles contraintes le système éducatif français en mathématiques a-t-il conduit les élèves à construire des rapports personnels à l’algèbre non idoines ?
- Comment les amener à faire évoluer leur rapport personnel à l’algèbre vers un rapport idoine ?
- En quoi la mise en place de parcours d’enseignement différencié prenant en compte les besoins repérés des élèves peut-elle favoriser cette évolution ?

1.3.3 Des hypothèses

Cet objectif et ces nouveaux questionnements nous conduisent à formuler deux hypothèses de travail supplémentaires. La première concerne la nécessité d’une nouvelle référence commune entre évaluation diagnostique et modélisation de parcours d’enseignement différencié. La seconde concerne la nécessité de travailler en collaboration avec des enseignants du secondaire.

a. La nécessité d’une nouvelle référence commune

Dans le logiciel Pépite, les rapports personnels à l’algèbre sont modélisés par des stéréotypes pour mettre en relation rapport personnel des élèves à l’algèbre et rapports institutionnels à l’algèbre dans les institutions où les élèves ont appris.

16. Ce terme est introduit par Chevallard (1989) : le rapport personnel d’un élève à l’algèbre peut être adapté au rapport institutionnel attendu, sans être pour autant idoine aux emplois effectifs de l’algèbre : « Vous pourrez douter, en revanche, que le rapport officiellement imposé se révèle bien adapté ou, comme nous dirons, idoine, à certains emplois effectifs que vous avez en tête (par exemple factoriser un polynôme $P(c)$ du troisième degré, afin de résoudre l’équation $P(x) = 0$). »

La structure d'analyse construite vise à repérer les caractéristiques dominantes des rapports à l'algèbre. Mais elle est peu opératoire pour caractériser des questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

C'est pourquoi il s'est avéré nécessaire de construire un modèle commun pour, à la fois, décrire les praxéologies apprises et les praxéologies institutionnelles et mieux prendre en compte la part des implicites institutionnels dans le développement des praxéologies apprises. C'est un point d'appui essentiel pour dégager les questions génératrices à aborder dans les parcours. Pour construire cette modélisation commune, nous nous appuyons sur une OM de référence permettant d'analyser les différentes étapes du processus de transposition didactique.

Notre quatrième hypothèse porte sur les conditions nécessaires à la modélisation didactique de parcours différenciés d'apprentissage en algèbre élémentaire, articulés à un diagnostic, en vue d'une implémentation informatique dans des systèmes de ressources en ligne.

H4 : Il est nécessaire de faire évoluer la modélisation didactique utilisée dans le logiciel Pépite pour unifier « évaluation diagnostique » et « parcours d'enseignement différencié » et répondre à l'exigence de formalisme de la modélisation en EIAH en vue d'une automatisation du diagnostic (déjà réalisé) et des parcours différenciés d'enseignement sur une plateforme en ligne.

b. La nécessité de travailler en collaboration avec des enseignants du secondaire

Notre objectif est de concevoir un modèle qui puisse être écologiquement viable dans les classes du collège et de seconde. Il doit permettre à la fois de s'intégrer de manière cohérente dans les progressions annuelles sur l'algèbre (projet global), et d'élaborer des séances avec des enjeux précis de construction de savoir (projet local). Il doit proposer également une gestion didactique adaptée aux objectifs d'apprentissages visés. Pour cela, nous postulons qu'il est nécessaire de travailler en collaboration avec des enseignants de l'enseignement secondaire.

H5 : Travailler avec une communauté d'enseignants pour proposer des ressources prenant en compte les pratiques existantes est incontournable pour garantir les conditions de leur viabilité dans l'enseignement secondaire actuel.

Nous avons maintenant réuni tous les éléments nécessaires pour présenter nos principaux choix théoriques et méthodologiques.

1.4 Principaux choix théoriques et méthodologiques

1.4.1 Le cadre de la théorie anthropologique de la didactique

Nous situons notre travail dans la Théorie anthropologique du didactique (TAD) développée par Chevallard (1999, 1992). Ce cadre nous permet de disposer de notions comme celles, déjà évoquées, de rapports institutionnels et personnels à un objet et de praxéologies. Deux raisons principales motivent ce choix. D'une part, nous postulons que la conception d'exercices adaptés aux besoins repérés des élèves doit tenir compte de l'institution dans laquelle l'élève apprend ainsi que des praxéologies mathématiques (Chevallard, 1999) qu'il y rencontre. D'autre part, la théorie anthropologique du didactique propose un modèle épistémologique de l'activité mathématique permettant l'étude des processus de production et de circulation du savoir. Ses outils s'avèrent particulièrement adaptés pour répondre à notre objectif : celui de modéliser les savoirs et savoir-faire en jeu au collège et ceux à mettre en jeu dans les parcours d'enseignement différencié.

Nous présentons une synthèse des notions utilisées dans cette thèse. Il s'agit des notions de praxéologie, d'agrégation des praxéologies, de niveau de convocation des types de tâches et d'ostensifs et de non-ostensifs.

a. La notion de praxéologie

La Théorie anthropologique du didactique propose un modèle épistémologique dans lequel toute activité humaine « *consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une certaine technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ . En bref, toute activité met en œuvre une organisation qu'on peut noter $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique* ». (Chevallard, 1999, p.3)

L'étude du rapport personnel d'un élève à un objet de savoir nécessite d'observer comment il mobilise cet objet dans l'accomplissement de tâches relatives au type T au sein d'une institution. C'est pourquoi nous utilisons la notion de praxéologie.

Chevallard distingue les notions de tâches, de types de tâches et de genre de tâches. Chacune porte sur l'activité à réaliser mais à différents niveaux de généralité :

« ...la notion de tâche, ou plutôt de type de tâches, suppose un objet relativement précis. Monter un escalier est un type de tâches, mais monter, tout court, n'en est pas un. De même, calculer la valeur d'une fonction en un point est un type de tâches mais calculer, tout court, est ce qu'on appellera un genre de tâches, qui appelle un déterminatif. [...] » (Chevallard, 1999, p.3)

On parle de praxéologie mathématique ou d'organisation mathématique pour désigner un « *objet de la réalité mathématique* » (Chevallard, 1999).

Toute praxéologie est constituée de deux blocs : un bloc pratico-technique $[T/\tau]$, ordinairement identifié comme un savoir-faire et d'un bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$, ordinairement identifié comme un savoir.

b. L'agrégation des praxéologies

Dans une institution, les praxéologies existent rarement comme praxéologies ponctuelles mais elles s'agrègent selon différents niveaux :

« Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques $\tau_{i,j}$ correspondant à autant de types de tâches $T_{i,j}$. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, $[T_{i,j}/\tau_{i,j}/\theta_i/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ . » (Chevallard, 1998, p. 5)

Autrement dit, dans une institution, les praxéologies s'emboîtent les unes dans les autres selon les différents niveaux : ponctuel, local, régional et global. Cet emboîtement suit la hiérarchie des niveaux de codétermination didactique Chevallard (1999) : sujet, thème, secteur, domaine et discipline. Le sujet est une organisation ponctuelle, le thème est une organisation locale, le secteur est une organisation régionale, le domaine est une organisation globale et la discipline est commune à tous les domaines.

Nous utilisons les notions de praxéologie ponctuelle, locale, régionale et globale pour modéliser l'agrégation des types de tâches impliqués dans les calculs sur et avec les expressions algébriques.

c. Niveau de convocation des types de tâches

Pour décrire et modéliser les enjeux d'apprentissage présents dans un corpus de problèmes, Castela (2008) introduit une nouvelle terminologie, s'inspirant des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances introduits par Robert (2008a). Elle distingue les OM ponctuelles R-convoquées (convoquées par le résolveur) et les OM T-convoquées (convoquées par la tâche) dans l'analyse des tâches proposées aux élèves.

« Si l'élève a la charge de reconnaître le type T_0 ou si, malgré les spécificités technologico/théoriques du problème et de son contexte, il doit choisir OM_0 parmi plusieurs OM relatives à T_0 pour mener à bien la résolution, nous dirons que l'organisation mathématiques efficace OM_0 intervient au niveau OM R-convoquée, avec ou sans choix de la technique suivant les cas, pour signifier que le résolveur a la responsabilité de convoquer lui-même cette OM pour

résoudre le problème. Dans le cas contraire (l'énoncé mentionne explicitement le type de tâches et certains éléments de la tâche font qu'une seule technique est envisageable), nous dirons que OM_0 intervient au niveau OM t-convoquée, autrement dit mobilisée par la tâche elle-même. » (Castela, 2008, p. 152)

Pour analyser les différentes OM ponctuelles impliquées dans la résolution d'une tâche autour des expressions algébriques, nous serons souvent amené à utiliser la distinction introduite par Castela. Cela permet notamment de mettre en évidence des OM ponctuelles, ignorées par l'institution ou implicites mais pourtant requises, pour mener à terme le calcul algébrique et donner des raisons d'être aux questions abordées.

d. La dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs

Les notions d'ostensifs et de non-ostensifs sont introduites dans la TAD pour décrire les ingrédients (les matières premières) qui composent les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories des différentes organisations praxéologiques constitutives du savoir mathématique. L'observation de l'activité mathématiques conduit à distinguer les objets matériels et perceptibles, les objets ostensifs, des notions, des concepts et des idées, des objets non-ostensifs. Plus précisément, Chevallard (1993) écrit :

« On appelle ostensifs les objets qui ont pour nous une forme matérielle, sensible au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même pour les gestes, les mots, les schémas, les dessins, les graphismes et les écritures et formalismes.[...] Le propre des ostensifs est de pouvoir être manipulés.[...]

Au contraire des ostensifs, les non-ostensifs - soit ce que l'on nomme usuellement notions, concepts, idées, etc. - ne peuvent pas à strictement parler, être manipulés : ils peuvent seulement être convoqués à travers la manipulations d'ostensifs associés. » Chevallard (1993)

Les moyens écrits, les gestes, les discours, les graphismes instrumentent l'activité mathématique tout en conditionnant le développement. C'est ainsi qu'il y a une dialectique entre les ostensifs et les non-ostensifs :

« Comme on le verra maintenant, les objets ostensifs et les objets non-ostensifs sont unis par une dialectique qui considère les seconds comme des émergents de la manipulation des premiers et, en même temps, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation. [...] En toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non-ostensifs. » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 90)

Nous utilisons ces notions lorsque nous analysons les organisations mathématiques intervenant dans les manuels ou dans les programmes. La description des techniques mises en œuvre et de l'environnement technico-théorique montre que la manipulation des expressions algébriques au collège peut rester au niveau de la manipulation

d'ostensifs, sans entrer dans la dialectique avec les non-ostensifs et, par conséquent, donner des moyens de contrôle et de guidage adéquats. Par exemple, le recours à des ostensifs oraux, « On supprime les parenthèses », ou à l'ostensif graphique « flèches » pour guider le développement de l'expression de $3(x + 2)$, peuvent laisser implicite la co-activation des notions de distributivité de la multiplication sur l'addition et d'équivalence des expressions.

Le cadre théorique principal de cette thèse est celui de la théorie anthropologique du didactique dont nous venons de rappeler les principales notions. Nous présentons maintenant nos choix méthodologiques.

1.4.2 Une analyse basée sur une OM épistémologique de référence relative aux expressions algébriques

Les outils de la TAD s'avèrent particulièrement adaptés (opérateurs et formels) pour modéliser les praxéologies apprises, relatives aux expressions algébriques et construire une référence commune. Nous faisons référence aux travaux de Bosch qui introduit l'idée d'une OM de référence dans les étapes de la transposition didactique (cf. figure 1.4) :

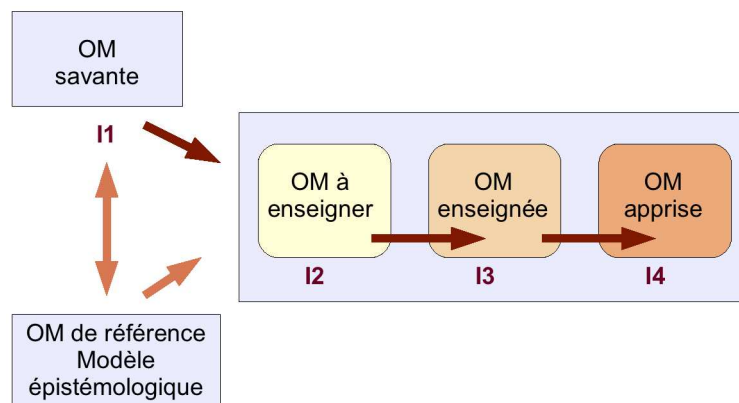


FIGURE 1.4 – Schéma du processus de transposition didactique (Bosch & Gascon, 2005)

- (a) L'OM à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum de mathématiques. La base empirique pour élaborer ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et dans les manuels. Son influence sur [l'OM enseignée et l'OM apprise] est centrale bien que ni le professeur ni l'institution scolaire ne disposent explicitement de ce modèle mais uniquement de matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux.

- (b) *Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniement. (Bosch & Gascón, 2005, p. 117)*

C'est pourquoi, dans notre étude, nous commençons par établir une référence épistémologique dans laquelle nous situons sur quels aspects épistémologiques reposent, selon nous, la génération des expressions algébriques, le calcul sur les expressions et leur utilisation dans des contextes intra- et extra-mathématiques. Nous construisons cette référence épistémologique dans le chapitre 2, à partir de la relecture de travaux de didactique de l'algèbre.

Cette référence épistémologique est un appui pour construire une OM de référence relativement aux expressions algébriques. L'OM de référence est centrale dans notre étude. Nous la rendons opérationnelle à deux niveaux.

1.4.3 Opérationnalisation de l'OM de référence

a. Opérationnalisation de l'OM de référence pour analyser les praxéologies à enseigner

Nous cherchons à caractériser les praxéologies à enseigner à travers l'étude des programmes et des manuels du collège et de la classe de seconde. L'OM à enseigner autour des expressions algébriques est-elle complète? Permet-elle la construction d'un rapport personnel idoine au calcul sur et avec les expressions algébriques? Les éléments du bloc technologico-théorique développés, en particulier, sont-ils suffisamment portés par les éléments épistémologiques nécessaires au calcul sur et avec les expressions algébriques?

Pour ceci, nous analysons des besoins d'apprentissage ignorés par l'institution relativement à l'OM épistémologique de référence, à travers l'étude des habitats et des niches. Celles des OM ponctuelles principalement convoquées dans la résolution des tâches, des éléments technologiques et théoriques mobilisés ou absents dans les discours technologiques utilisés, de la dialectique entre ostensifs et non-ostensifs impliquées (chapitre 3).

Nous interprétons les écarts entre l'OM de référence et l'OM à enseigner comme des savoirs implicites de l'enseignement sur les expressions algébriques. Cette analyse

met en évidence des contraintes institutionnelles qui sont imputables aux contenus mathématiques pour son enseignement, et qui, certainement en affectent son étude en classe.

Une analyse, en organisations mathématique et didactique et en niveaux de co-détermination, peut mettre en évidence d'éventuels savoirs cachés. L'enjeu est de dégager des questions génératrices pour introduire des raisons d'être des expressions algébriques et travailler le bloc technologico-théorique relatif à l'OM des expressions algébriques.

b. Opérationnalisation de l'OM de référence pour analyser les praxéologies apprises

Une deuxième opérationnalisation de l'OM de référence vise à caractériser des praxéologies apprises (chapitre 4). Nous cherchons à interpréter le diagnostic et le modèle de stéréotype relativement à l'OM de référence pour caractériser des niveaux technologiques justifiant la constitution de groupes d'élèves ayant des besoins d'apprentissage proches en algèbre. Cela correspond à une catégorisation des praxéologies apprises.

Nous faisons l'hypothèse que seule une description des OM apprises au niveau des technologies donne accès à une vue d'ensemble de la cohérence des modes de fonctionnement et de raisonnement des élèves. Ce type d'analyse nous permet d'éclairer dans quelle mesure un niveau technologique laisse vivre des erreurs de calcul ou des dysfonctionnements dans les pratiques algébriques des élèves.

De plus, cette étude permet de faire des hypothèses sur l'existence ou non d'articulation entre des trois OM locales dans les catégories d'OM apprises correspondant aux groupes d'élèves constitués. Nous cherchons à mettre en évidence la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises, afin de dégager des sous-questions issues des questions génératrices à travailler dans les parcours.

1.4.4 Modèle de parcours d'enseignement différencié

a. Lien avec les notions d'AER et de PER

L'introduction de la notion de « parcours d'enseignement différencié » prend en compte celles de « parcours d'étude et de recherche » et d'« activité d'étude et de recherche » introduites par Chevallard (2011, 2005). L'auteur les définit comme suit :

« Les notions d'AER (« Activité d'Étude et de Recherche ») et de PER (« Parcours d'Étude et de Recherche ») ont pour objet de fonder une modélisation

anthropologique des processus didactiques fonctionnels (et non formels), c'est-à-dire regardés dans une perspective non-monumentaliste, dans laquelle un savoir n'est pas un monument que l'on visite, mais un outillage immatériel et matériel fonctionnellement ordonné à l'étude de certains types de questions.

*Le schéma de base de cette modélisation peut s'énoncer ainsi : un processus didactique - ou, plus exactement, un processus d'étude et de recherche - a son point de départ dans un projet social visant à apporter une réponse R (à valider selon divers critères) à une certaine question Q . Une AER (relative à Q) peut être « quasi-isolée », en ce sens que la question Q est rencontrée et étudiée *ex abrupto*. Elle peut, par contraste, prendre place au contraire dans un PER, au sein d'une lignée d'AER engendrées par l'étude d'une « sur-question » génératrice du PER. »*

La notion de parcours d'enseignement différencié se rapproche de celle de PER et AER, dans le sens où nous recherchons des questions génératrices pour travailler des raisons d'être des expressions algébriques et du calcul sur et avec les expressions. Mais elle s'en éloigne. D'une part, parce qu'il s'agit d'une reprise de notions à enseigner, travaillées depuis plusieurs années. D'autre part, nous prenons en compte des besoins d'apprentissage des élèves à partir d'un diagnostic des connaissances apprises des élèves (le diagnostic Pépite). C'est pourquoi, pour nous démarquer des PER et des AER, nous choisissons la désignation de « parcours d'enseignement différencié » noté aussi PED.

Il s'agit de mettre en place une organisation didactique, c'est-à-dire, selon Bosch et Gascón (2005)

« un processus d'étude structuré en moments qui part d'une ou plusieurs OM ponctuelles et, qui par l'élargissement et le complément progressif des questions problématiques qui s'y posent, engendre une série d'OM intermédiaires qui finissent par s'intégrer en une nouvelle OM dont elles constituent la "raison d'être" » (Bosch & Gascón, 2005)

b. Appui sur la théorie des situations didactiques

Nous utilisons des éléments de la théorie des situations didactiques (TSD) pour associer la recherche de types de tâches à convoquer en fonction des besoins d'apprentissage des élèves repérés par le diagnostic à leur gestion didactique et les éléments du milieu à prévoir. Pour affiner la conception des situations à proposer aux élèves, nous nous appuyons sur les notions de milieu, de variable didactique et de contrat didactique. Selon les besoins d'apprentissage des élèves, nous proposons des situations reposant sur le même type de tâches, mais différenciées par les milieux proposés : nature et complexité des expressions, forme d'énoncés, aides proposées aux élèves.

Nous complétons les éléments d'analyse concernant l'analyse *a priori* des situations dans le chapitre 4 et *a posteriori* dans le chapitre 5.

1.4.5 Une démarche itérative de conception du modèle de PED

a. Une démarche itérative spécifique au contexte de recherche de la thèse

Notre thèse étant rattachée au projet de recherche PepiMeP pluridisciplinaire, le choix d'une démarche itérative, couramment utilisée en E.I.A.H. (Mackay & Fayard, 1997 ; Delozanne, 2006), s'impose pour concevoir le modèle de PED.

Cette démarche est décrite dans Delozanne et al. (2010). Le projet Lingot s'est structuré autour d'une démarche itérative fondée sur la réalisation de prototypes pour mettre à l'épreuve des hypothèses, produire des résultats et formuler de nouvelles questions de recherche. Il s'est organisé de la manière suivante : un outil de diagnostic papier-crayon, un logiciel de diagnostic assisté, un bilan de compétences individuel et un bilan de classe. Chaque cycle s'appuie d'abord sur une étude didactique pour élaborer un modèle didactique descriptif. Puis, les informaticiens mettent au point un modèle formel pour systématiser et rendre exécutables, par des machines, les modèles descriptifs. Un prototype est construit en prenant en compte les remarques des utilisateurs enseignants, puis il est expérimenté dans les classes. L'analyse des résultats de l'expérimentation conduit à une nouvelle recherche didactique pour faire évoluer les modèles.

b. Une démarche itérative pour les PED

Nous faisons l'hypothèse que cette démarche est efficace pour la recherche engagée. Elle consiste à élaborer et à affiner un modèle didactique par des itérations successives suite à la collaboration avec les différents partenaires du projet. L'objectif est, du côté informatique, de le systématiser, de dégager un prototype d'indexation des exercices pour automatiser la proposition des PED et de le peupler d'exercices et, du côté des élèves et des enseignants, de questionner l'efficacité et la viabilité des PED par le biais des pratiques d'enseignement de l'algèbre et de différenciation de l'enseignement. La collaboration avec les différents partenaires du projet joue un rôle important dans les différentes itérations de l'élaboration du modèle. Nous présentons la version actuellement stabilisée de la modélisation dans le chapitre 4. La collaboration concerne des chercheurs en didactique des mathématiques, des chercheurs en informatique, des membres de l'association Sésamath, des développeurs, et des enseignants (cf. figure 1.5). Nous, les chercheurs en didactique des mathéma-

tiques, jouons un rôle central : c'est à partir des modèles didactiques établis selon une étude théorique présentée précédemment que débute la collaboration avec les enseignants et les chercheurs en informatique.



FIGURE 1.5 – Un travail collaboratif

Au départ, un premier modèle est proposé ; il est issu de la recherche en didactique des mathématiques menée en amont. Puis, suite à des allers et retours, il est affiné pour prendre en compte les conditions et les contraintes d'enseignement et informatiques.

- Du point de vue des élèves, il s'agit de concevoir un modèle de PED qui les amène à convoquer des OM ponctuelles adaptées à leurs besoins d'apprentissage en algèbre pour déstabiliser des connaissances erronées et construire des modes d'interprétation et de justification ;
- Du point de vue des enseignants, il s'agit de concevoir un modèle de PED suffisamment flexible et adaptable qui puisse être écologiquement viable dans les classes du collège et de seconde. Il permet aux enseignants de s'intégrer de manière cohérente et économique dans les progressions annuelles sur l'algèbre (projet global), et d'élaborer des séances avec des enjeux précis de construction de savoir (projet local) et avec un déroulement et une gestion didactique adaptés aux objectifs d'apprentissages visés (dévolution de la situation, régulation de l'activité des élèves et institutionnalisation des savoirs visés) ;
- Du point de vue informatique, il s'agit de concevoir un modèle qui puisse être systématisé pour permettre son implémentation et le rendre accessible à un large public d'enseignants et d'élèves du collège et du lycée depuis la plateforme en ligne LaboMeP développée par l'association Sésamath.

Au début du projet, il était prévu que tous les PED soient constitués d'exercices interactifs mais l'analyse didactique a révélé la nécessité de convoquer des types de tâches souvent peu présents dans les manuels et dans le vivier d'exercices interactifs proposés par Sésamath. C'est pourquoi les PED sont peuplés majoritairement

d'exercices papier-crayon et de quelques exercices interactifs de LaboMeP (cf. annexe A). Par ailleurs, il n'est pas été possible pendant le travail de recherche de travailler sur des logiciels tels que *Aplusix* (cf. §2.2.3) dans l'environnement LaboMep. Les exercices papier-crayon conçus ont été mis en ligne parmi les exercices non-interactifs de LaboMeP. Pour certains d'entre-eux, nous envisageons de les faire évoluer pour les rendre interactifs. Un première ébauche exploratoire de l'implémentation d'exercices papier-crayon est présentée à la fin du chapitre 5 (cf. annexe F).

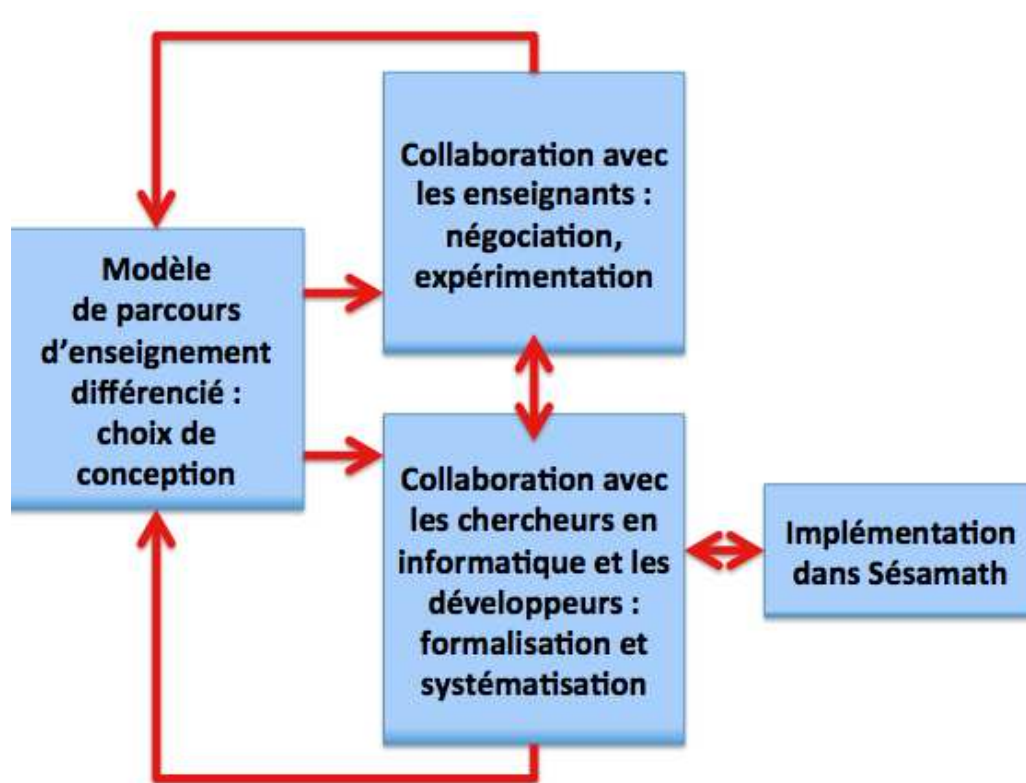


FIGURE 1.6 – Schéma général de méthodologie itérative

Cette démarche de recherche itérative est illustrée dans la figure 1.6. Nous la caractérisons par :

- une démarche itérative liée à la collaboration avec des enseignants qui consiste en la proposition, la négociation et l'expérimentation des PED à partir d'un document écrit. Les expérimentations et les retours des enseignants sont analysés et permettent de revenir sur nos choix¹⁷ ;

17. Ce point de vue est proche de la notion d'ingénierie de développement de Perrin-Glorian (2011). L'auteur écrit à propos de la diffusion d'ingénierie didactique et de la production de

- une démarche itérative liée à la collaboration avec les chercheurs en informatique et avec des développeurs qui consiste à formaliser les PED et à réaliser un prototype d’indexation des exercices y intervenant pour permettre leur automatisation dans LaboMeP. Au départ, les chercheurs en didactique produisent un modèle discursif composé d’un texte et éventuellement de tableaux à caractères didactiques (expertise didactique). Il est transformé en un modèle formel, exécutable. Ces transformations s’accompagnent de la prise en compte des évolutions suggérées par la collaboration avec les enseignants. A cette étape, tous les cas limites doivent être pris en compte pour que le modèle formel et le prototype associé puissent fonctionner. Il est aussi peuplé par des exercices avec des critères bien définis pour que l’implémentation puisse associer à un PED les exercices correspondants. Cette dernière étape est complexe car elle amène inévitablement à faire évoluer le langage des enseignants au-delà du travail didactique réalisé.

Les deux démarches ne sont pas indépendantes mais s’influencent l’une l’autre. La collaboration avec les enseignants a un impact sur la formalisation et le peuplement du modèle ainsi que sur les choix réalisés pour favoriser la compatibilité des formulations utilisées avec les pratiques des enseignants et la culture de Sésamath. Dans l’autre sens, la nécessité de formaliser et de systématiser le modèle entraîne une réflexion avec les enseignants qui vise à affiner le modèle en envisageant tous les cas possibles.

Ainsi, la collaboration avec, d’une part, les chercheurs en informatique et les membres de Sésamath impliqués dans PepiMeP et, d’autre part, avec des enseignants regroupés au sein du groupe IREM de l’Université Paris-Diderot « Enseignement différencié en algèbre » joue un rôle important dans la modélisation des PED. Nous précisons cette démarche et les modes de collaboration qui ont guidé les relations avec ces différents partenaires dans le chapitre 4.

Les principaux choix méthodologiques de notre travail qui viennent d’être pré-

ressources pour l’enseignement ordinaire : « *La production et la diffusion de ressources pour l’enseignement et la formation des maîtres est devenue une question de recherche d’actualité avec le développement des outils informatiques de communication mais elle n’est pas nouvelle. [...] On peut en distinguer au moins deux types : d’une part la production directe de ressources par des recherches-action comme celles qui se sont développées depuis 40 ans dans les IREM ou dans les équipes INRP, d’autre part la transposition d’ingénieries didactiques issues de recherches visant aussi des questions plus théoriques. C’est au deuxième cas que je m’intéresserai dans la suite, c’est-à-dire au cas où il y a une volonté de production scientifique et pas seulement de partage d’expérience.* » (Perrin-Glorian, 2011, p. 8)

sentés seront précisés au fur et à mesure de la thèse. Nous avons maintenant réuni tous les éléments nécessaires pour présenter notre plan d'étude.

1.5 Plan d'étude

Notre étude s'organise en cinq chapitres et suit les différentes étapes de la méthodologie qui vient d'être présentée.

Le chapitre 1, dans lequel s'insère ce paragraphe, fait l'objet de la présentation de la problématique, du contexte de la recherche, du cadre théorique et de la méthodologie.

Dans le chapitre 2, nous faisons une synthèse de travaux de didactique de l'algèbre pour établir une référence épistémologique des éléments qui fondent la génération des expressions algébriques, du calcul sur ces expressions et de leur utilisation dans des contextes intra ou extra-mathématiques. Nous organisons le chapitre en fonction de plusieurs types de travaux : d'une part ceux relevant d'une approche anthropologique, qui proposent des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre et, d'autre part, ceux relevant d'une approche cognitive du côté de l'activité de l'élève et des processus de conceptualisation de l'algèbre. Cette référence nous sert de fil directeur dans les analyses des chapitres suivants.

Le chapitre 3 est consacré à la mise en évidence de besoins d'apprentissage ignorés par l'institution et laissés à la charge des élèves pendant l'enseignement de l'algèbre au collège et en seconde. Nous commençons par dégager une OM de référence relativement aux expressions algébriques selon la référence épistémologique établie au chapitre 2. Cette OM de référence est opérationnalisée pour analyser les programmes officiels et des manuels du collège et de la classe de seconde. Nous en dégageons les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner relativement aux expressions algébriques dans ces institutions. Les niveaux de la classe de 5^e à la classe 2^{de} sont concernés afin d'avoir accès à toutes les étapes de construction de l'OM à enseigner et de l'OD associée. La mise en perspective de l'OM à enseigner dans l'OM de référence relativement aux expressions algébriques, nous permet de mettre en évidence l'incomplétude du bloc technologico-théorique de l'OM à enseigner au collège et au début de la seconde. Certaines nécessités d'apprentissages liées aux éléments épistémologiques au cœur du travail sur les expressions algébriques s'en trouvent ignorées ou laissées implicites. Cela nous conduit à formuler deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

Dans le chapitre 4, nous présentons le modèle de parcours d'enseignement diffé-

rencié. Dans un premier temps, nous interprétons les tâches diagnostiques du logiciel Pépite et les stéréotypes à partir de l'OM de référence. Le nombre élevé de stéréotypes nous a conduit à les regrouper et à dégager des niveaux technologiques correspondant à des catégories d'OM apprises. Les niveaux sur les trois composantes du stéréotype permettent de catégoriser des niveaux technologiques. La mise en perspective des savoirs et savoirs-faire laissés implicites par l'institution avec ces niveaux technologiques éclaire sur les questions prioritaires à aborder pour les faire évoluer et fournit des éléments pour sélectionner des types de tâches souvent rarement abordés en classe et d'organiser leur gestion didactique. Dans un deuxième temps, les choix de modélisation des parcours d'enseignement différencié sont présentés. Nous proposons l'analyse *a priori* des énoncés et d'un processus didactique possible les accompagnant. Nous explicitons en quoi la catégorisation de niveaux technologiques nous permet d'attribuer un jeu sur les variables didactiques et de choisir un milieu en fonction des groupes. Le modèle est mis en perspective du travail collaboratif avec des enseignants et les partenaires du projet PepiMeP. Pour terminer, nous présentons l'indexation qui a été conçue pour automatiser la génération des parcours d'enseignement différencié.

Le chapitre 5 est consacré à l'analyse de certaines des expérimentations menées dans le cadre du groupe IREM de l'Université Paris-Diderot « Enseignement différencié en algèbre ». Dans un premier temps, nous analysons qualitativement les expérimentations menées dans la classe de 3^e d'une enseignante, appelée Garance, afin de tester nos choix de conception sur les rapports personnels des élèves à l'algèbre et leur compatibilité avec les choix d'enseignement de l'enseignante. Dans un deuxième temps, nous proposons une analyse des stéréotypes rencontrés et de leur répartition en groupes en fonction des niveaux scolaires sur l'ensemble des élèves ayant passé le test afin de tester nos choix de regroupement et d'évaluer les niveaux technologiques dominants présents dans les classes.

Dans le chapitre 6, nous concluons par des perspectives de recherche pour revenir sur nos choix théoriques et méthodologiques et sur les résultats de chaque chapitre.

Chapitre 2

Une référence épistémologique à partir de travaux de didactique de l'algèbre

La relecture de travaux de didactique de l'algèbre, qui fait l'objet de ce chapitre, vise à établir une référence épistémologique sur les éléments cruciaux pour la génération, la manipulation et l'utilisation des expressions algébriques. Nous cherchons donc à répondre à la question suivante : qu'est-ce qui est au cœur de la génération des expressions algébriques, du calcul sur ces expressions et de leur utilisation dans des contextes intra-ou extra-mathématiques ? Rappelons que, dans notre plan d'étude, cette référence épistémologique est un appui pour construire une OM de référence, présentée au chapitre 3. Cette OM de référence vise à faire le lien et à comparer les OM apprises et l'OM à enseigner dans l'objectif de mieux prendre en compte la part des implicites institutionnels dans le développement des praxéologies apprises et d'en dégager des questions génératrices pour concevoir des parcours d'enseignement différencié.

Le modèle de la « compétence algébrique » de Grugeon (1997) (cf. §1.2.1b.) permet de situer le rapport personnel de l'élève du point de vue du développement conceptuel des objets de l'algèbre et des difficultés rencontrées à l'entrée dans une nouvelle institution en lien avec le décalage entre les rapports institutionnels à l'algèbre des deux institutions. Mais, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, ce modèle n'est pas opératoire pour mettre en relation les rapports personnels des élèves à l'algèbre en lien avec des implicites institutionnels. C'est pourquoi nous avons besoin de faire évoluer et d'affiner cette référence autour des expressions algébriques. Nous envisageons notre questionnement sous l'angle des travaux de didactique de

l'algèbre déjà présents chez Grugeon mais aussi de travaux plus récents.

Ce chapitre est structuré à partir de l'étude de plusieurs modèles de l'algèbre élémentaire relevant de deux approches théoriques différentes. D'abord, des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre présentés sont ceux développés dans une approche anthropologique (§2.1). Le domaine algébrique y est modélisé pour rendre compte des phénomènes didactiques et transpositifs qui déterminent la place et la fonction de l'algèbre à enseigner dans les curriculum. Nous exposons les travaux de Chevallard (1990, 1989, 1985b) et Gascón (1994), qui ont remis en question le modèle implicite de l'algèbre comme arithmétique généralisée en introduisant la notion de modélisation, ainsi qu'un modèle de l'enseignement de l'algèbre à enseigner plus récent (Ruiz-Munzón, 2010 ; Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch, & Gascón, 2012), qui présente la genèse de l'algèbre élémentaire en tant que processus d'algébrisation. Ensuite, nous développons des modèles de l'activité algébrique. Ils se situent dans une approche cognitive du côté de l'activité de l'élève et des processus de conceptualisation de l'algèbre (§2.2). Nous faisons référence au modèle de l'activité algébrique de Kieran (1996, 2007), ce qui permet de mettre en réseau de nombreux travaux de didactique de l'algèbre. Ces deux approches théoriques sont complémentaires vis-à-vis de notre problématique. Elles permettent de situer les rapports personnels des élèves et les processus de conceptualisation de l'algèbre des élèves relativement au rapport institutionnel à l'algèbre attendu dans l'institution où l'élève apprend. Nous tirons parti de cette complémentarité dans l'ensemble des travaux relatés pour dégager une référence épistémologique autour des expressions algébriques, qui sert de fil directeur dans nos analyses tout au long de la thèse (§2.3).

2.1 Des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre dans la TAD

Nous présentons ici des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre, conçus dans la théorie anthropologique du didactique. Comme annoncé dans l'introduction, nous exposons d'abord les travaux de Chevallard (1990, 1989, 1985b) et Gascón (1994) puis ceux de Ruiz-Munzón (2010) ; Ruiz-Munzón et al. (2012).

2.1.1 La notion de modélisation dans les travaux de Chevallard

Chevallard (1985b, 1989) étudie le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Une analyse des programmes et des manuels anciens jusqu'à ceux en vigueur à l'époque où les articles sont écrits, l'amène à établir un constat édifiant. La triade arithmétique-algèbre-géométrie, qui structurerait le curriculum avant la réforme des mathématiques modernes, est délaissée. Les programmes scolaires des années 1980 manquent de « *référence explicite à l'algèbre* » et présentent une « *poussée vigoureuse du numérique* » et « *l'évanouissement de l'apprentissage des outils algébriques* ». Ils conduisent à un manque d'idonéité du rapport officiel au calcul algébrique, au collège, par rapport aux usages faits dans la suite du cursus mathématique. Chevallard met en avant que « *le rapport de l'élève au calcul algébrique n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation algébrique de l'expression, d'une part, et substitution de valeurs numériques, d'autre part* ». La dialectique du numérique et de l'algébrique est perdue :

« Au-delà de la disparition de la structure du corpus mathématique enseigné en arithmétique et en algèbre, c'est la dialectique du numérique et de l'algèbre - implicitement présente à travers l'"opposition" de l'arithmétique et de l'algèbre - qui va se trouver atteinte. Plus que jamais, les liens du numérique et de l'algébrique s'en trouveront relâchés. » (Chevallard, 1985b, p. 75)

Pour lui, cette dialectique est centrale dans la maîtrise du calcul algébrique et de sa fonctionnalité :

*« L'algébrique est un outil de l'étude du numérique, le premier outil, le plus élémentaire sans doute (à un niveau intermédiaire viendraient par exemple la théorie des séries entières, la théorie des fonctions analytiques, etc.). Mais, inversement (et c'est ce qui nous autorise à parler de **dialectique**), pour que le fonctionnement de cet outil soit efficace, il faut quelque peu **étudier** cet outil, par exemple se poser les problèmes de la factorisation des expressions algébriques (afin notamment de résoudre des équations algébriques). Or, en ce point, le numérique lui-même est un outil d'étude à l'algébrique.¹ » (Chevallard, 1985b, p. 75)*

Par exemple, dans l'enseignement secondaire, l'algébrique permet de prouver que la somme de deux entiers impairs consécutifs $2p - 1$ et $2p + 1$ est un multiple de 4 puisque $(2p - 1) + (2p + 1) = 4p$ ou de calculer 101^2 en le transformant en $(100 + 1)^2$ pour utiliser une identité remarquable. Dans l'autre sens, le numérique est outil, par exemple, pour donner du sens aux propriétés des expressions algébriques, pour contrôler ses résultats en substituant des valeurs numériques aux variables de l'ex-

1. Chevallard fait référence à une méthode « *ingénieuse* » développée par Newton qui permet de trouver, à partir du numérique, les facteurs d'une expression algébrique.

pression algébrique étudiée ou pour la recherche de contre-exemple de l'équivalence de deux expressions algébriques.

Face à ce constat, Chevallard s'attache au problème didactique de la définition d'un curriculum, qui assure un rapport officiel à l'algèbre plus idoine aux tâches auxquelles l'algèbre est employée. Pour lui, le modèle de l'enseignement de l'algèbre doit assurer « *la maîtrise formelle du calcul fonctionnel* ». La maîtrise formelle du calcul algébrique ne peut avoir lieu sans une « *maîtrise du calcul algébrique fonctionnel* », c'est-à-dire « *sans que l'on fasse droit aux emplois du calcul algébrique* ». Il introduit la notion clef de modélisation mathématique Chevallard (1989, p. 53) :

« La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université. Grille de lecture et d'interrogation, elle fournit un cadre de référence au sein duquel il devient alors possible de faire surgir des différences significatives - entre arithmétique et algèbre notamment. » (Chevallard, 1985b, p. 61)

« *Du mode clos* » des problèmes arithmétiques, le champ de problèmes de l'algèbre est élargi et structuré :

« D'emblée, la puissance algébrique est mise en relation avec le fait de désigner par des lettres, à côté des quantités inconnues, que l'on recherche, les quantités connues elles-mêmes - les données. » (Chevallard, 1985b, p. 65)

Alors que Chevallard (1985b) se penche sur le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège et propose d'élargir les types de problèmes travaillés, Gascón (1994) propose un modèle alternatif au modèle de l'algèbre comme arithmétique généralisée.

2.1.2 Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire dans les travaux de Gascón

Dans la lignée des travaux de Chevallard, Gascón (1994) met en avant le côté réducteur de l'enseignement de l'algèbre comme une « arithmétique généralisée » :

« L'algèbre enseignée n'est pas à proprement parler une arithmétique généralisée étant donné qu'elle ne contient pas strictement l'arithmétique enseignée : d'une part, la résolution algébrique de certains problèmes arithmétiques suppose des instruments qui ne font plus partie de l'algèbre telle qu'elle est enseignée aujourd'hui ; d'autre part, l'algèbre enseignée posséderait une thématique propre qui n'est, en aucun sens, une généralisation de celle de l'arithmétique. » (Gascón, 1994, p. 47)

L'auteur revisite le patron d'analyse-synthèse décrit par Pappus pour proposer un modèle alternatif de l'algèbre à enseigner comme arithmétique généralisée. Il montre que le patron d'analyse-synthèse est limité « *comme technique mathématique* » pour résoudre tous les problèmes algébriques. Il en propose des variations, ce qui met

en évidence un nouveau champ de problèmes relevant de la modélisation mathématique. Dans le nouveau modèle de l'enseignement de l'algèbre, l'algèbre n'est plus introduite comme arithmétique généralisée mais comme un instrument nécessaire à la modélisation mathématique.

Dans des travaux plus récents, la notion clef de modélisation est toujours présente. Le modèle de l'enseignement de l'algèbre de Ruiz-Munzón (2010) se présente sous la forme d'un processus d'algébrisation des praxéologies mathématiques en articulation avec une modélisation algébrico-fonctionnelle.

2.1.3 Un modèle de l'algèbre élémentaire comme processus d'algébrisation de programmes de calcul dans les travaux de Ruiz-Munzón

Face à l'évolution de la transposition didactique qui a conduit à l'émiettement des contenus de l'algèbre (cf. §2.1.1), Ruiz-Munzón (2010) et Ruiz-Munzón et al. (2012) cherchent à rendre compte des phénomènes didactiques et transpositifs qui affectent l'écologie didactique de l'algèbre. Ruiz-Munzón propose un modèle épistémologique de référence selon lequel la genèse de l'algèbre élémentaire se situe dans un processus d'algébrisation de programmes de calcul. Partant d'un système initial formé des praxéologies relevant de l'exécution des programmes de calcul pas à pas, il évolue vers la construction de praxéologies de plus en plus algébrisées. L'algèbre élémentaire est ici présentée comme un processus de modélisation progressive de systèmes mathématiques partant des programmes de calcul arithmétiques jusqu'aux fonctions. Dans le modèle de Ruiz-Munzón, ce processus s'articule avec le développement de la modélisation algébrico-fonctionnelle, ce qui permet de relier les outils fonctionnels au processus d'algébrisation.

Notre étude étant centrée sur les expressions algébriques, nous présentons ici les différentes étapes que comporte le processus d'algébrisation de l'algèbre élémentaire. Mais, avant de présenter les trois étapes principales de ce processus, nous commençons par situer les programmes de calcul dans l'algèbre élémentaire.

a. L'algèbre élémentaire comme science des programmes de calcul

La conception de l'algèbre comme processus de modélisation progressive conduit à disposer d'un système initial à modéliser. Concernant l'algèbre, il s'agit de la modélisation de programmes de calcul (noté PC) en expression algébrique. Pour

Chevallard, la notion d'expression algébrique repose sur l'« entité » programme de calcul :

« Une “expression algébrique” est un énoncé symbolique qui exprime un certain programme de calcul. L'expression algébrique $E(x) = 15x - 3(x + 1)$ exprime le programme de calcul II dont une expression “rhétorique” est la suivante : “Multiplier le nombre donné par quinze puis retrancher au nombre obtenu le triple du successeur du nombre donné”. » Chevallard et Bosch (2012)

Pour Chevallard, l'algèbre élémentaire est motivée par un grand type de tâches qui est de déterminer si deux programmes de calcul sont équivalents, c'est-à-dire s'ils retournent la même valeur numérique pour toutes les valeurs de la variable. L'algèbre élémentaire trouve ainsi toute sa force en tant qu'outil de modélisation et de preuve. Elle peut être considérée comme une science pour décrire, étudier et calculer avec et sur les programmes de calcul.

b. Les trois étapes du processus d'algébrisation

Le processus d'algébrisation présenté par Ruiz-Munzón est structuré en trois étapes (cf. figure 2.1).

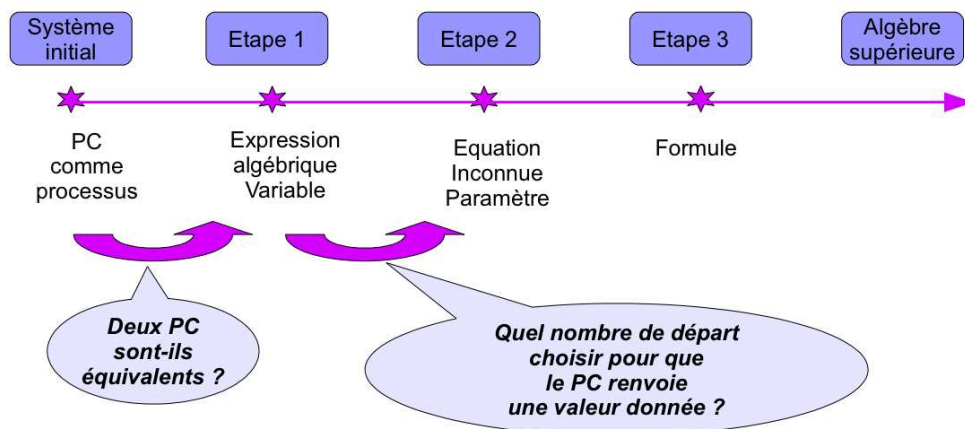


FIGURE 2.1 – Les trois étapes du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón

Au départ, le système est formé de praxéologies relevant du calcul arithmétique élémentaire. Les programmes de calcul sont donnés par leurs descriptions langagières, c'est-à-dire leur effectuation pas à pas. Le corpus des problèmes de l'arithmétique élémentaire peut être résolu par la description d'un programme de calcul et de son exécution. La première étape du processus d'algébrisation consiste à cesser de considérer le programme de calcul comme un processus et à le considérer comme un tout. Cette matérialisation nécessite une explicitation globale de sa structure.

Cette étape est introduite par le grand problème soulevé par Chevallard : deux programmes de calcul étant donnés, sont-ils équivalents? Les techniques du système initial sont limitées et il devient nécessaire d'en introduire de nouvelles pour créer et de simplifier des écritures. Ce besoin introduit un nouvel environnement technologico-théorique avec la notion d'« expression algébrique ». Les expressions algébriques sont des modèles symboliques des programmes de calcul. Prenons par exemple le programme de calcul P1 : « Prendre un nombre, lui ajouter 1, multiplier le tout par 4 » et le programme de calcul P2 : « Prendre un nombre, le multiplier par 4, lui ajouter 4 ». P1 et P2 sont équivalents. En effet, si n désigne le nombre choisi, les expressions algébriques $(n + 1) \times 4$ et $4n + 4$ modélisent P1 et P2 et la propriété de distributivité permet de prouver leur équivalence. La prise en compte de la hiérarchie des opérations des programmes de calcul et des règles associées à l'usage des parenthèses est nécessaire.

La deuxième étape du processus d'algébrisation est motivée par une nouvelle question : un programme de calcul étant donné, quel nombre de départ choisir pour que le programme de calcul renvoie une valeur donnée? Par exemple, Zoé pense à un nombre entier, le multiplie par 2, ajoute 3, multiplie le résultat par le nombre de départ et soustrait 2, elle trouve 12; à quel nombre a-t-elle pensé? Cette question appelle de nouvelles techniques pour résoudre des équations du premier et du second degré et à un environnement technologico-théorique étendu avec les notions d'équation, d'inconnue et de paramètre. Le travail algébrique scolaire se situe principalement à cette étape avec la résolution de problèmes permettant de modéliser des relations mathématiques en équations.

La troisième étape du processus d'algébrisation apparaît lorsque le nombre d'arguments du programme de calcul n'est pas limité :

*« [Il] se produit lorsqu'on ne limite pas le nombre de variables avec lesquelles on travaille et qu'on élimine la distinction entre inconnues et paramètres. »
(Ruiz-Munzón et al., 2012)*

Il fait intervenir la notion de formule. Cette étape apparaît peu dans le travail algébrique scolaire. Il est présent en physique avec un travail de production, de transformation et d'interprétation de formules. Au-delà de cette étape, le processus se poursuit vers « l'algèbre supérieure », par le passage de l'algèbre élémentaire au calcul différentiel.

2.1.4 Conclusion

Les trois modèles épistémologiques de l'algèbre qui viennent d'être présentés se situent dans une approche anthropologique. La même préoccupation les rassemble. La conception de modèles épistémologiques de référence de l'algèbre vise à rendre compte des phénomènes didactiques et transpositifs qui affectent l'écologie didactique de l'algèbre (son statut et sa manière d'exister dans le curriculum et dans les classes), problème soulevé dès les premiers travaux de Chevallard. Pour Chevallard et Gascón, ce sont les notions de modélisation et de preuve qui permettent de démarquer la puissance de l'algèbre comme outil privilégié pour aborder des problèmes intra et extra-mathématiques face à une algèbre réduite à une arithmétique généralisée. Pour Ruiz-Munzón, c'est un processus d'algébrisation qui s'inscrit dans un processus de modélisation progressive où les praxéologies sont de plus en plus algébrisées. Les expressions algébriques, qui sont au centre de nos préoccupations, apparaissent dès la première étape de ce processus ce qui la rend fondamentale pour la poursuite du processus d'algébrisation. Ce modèle renforce notre choix de centrer nos travaux sur les expressions algébriques.

Trois éléments épistémologiques relatifs à la génération, à la manipulation et à l'utilisation des expressions algébriques ressortent dans ces travaux :

- le rôle des programmes de calcul et de l'étude de leur équivalence dans la génération des expressions algébriques et des règles du calcul algébrique,
- le passage de la considération d'un programme de calcul comme processus à un programme de calcul considéré comme un résultat,
- le rôle de la dialectique entre le numérique et l'algébrique dans l'apprentissage de la fonctionnalité du calcul algébrique.

Pourtant, comme le montrent Chevallard (1985b) et Chevallard et Bosch (2012), les processus de transposition didactique successifs depuis la réforme des mathématiques modernes montrent que les élèves ont peu l'occasion de rencontrer des praxéologies qui les font intervenir.

Nous proposons maintenant de tirer parti des travaux de didactique de l'algèbre issus d'une approche cognitive, du point de vue de l'activité de l'élève, pour interroger les processus de conceptualisation de l'algèbre. A l'issue de ces analyses, nous concluons en mettant en perspective les éléments épistémologiques retenus dans chaque approche.

2.2 Le modèle de l'activité algébrique dans les travaux de Kieran

Dans ce paragraphe, le modèle de l'algèbre élémentaire évoqué s'inscrit dans une approche cognitive du point de vue de l'activité de l'élève. Le modèle qui fait référence est celui introduit par Kieran (1996, 2007). Elle a développé un modèle de l'activité algébrique qui permet de mettre en réseau de nombreux travaux de didactique de l'algèbre. Nous en proposons une synthèse, orientée vers notre objet de recherche : les expressions algébriques. Lorsque cela s'avère pertinent, nous la complétons par des résultats issus d'autres travaux.

Kieran a développé un modèle, nommé « modèle GTG », qui distingue trois types d'activités algébriques élémentaires : l'activité générative, l'activité transformationnelle et l'activité globale (meta-activité algébrique). Ce modèle est construit sur un croisement entre les sources de signification de l'algèbre (qu'est-ce qui donne du sens à l'algèbre ?) et l'idée de l'algèbre comme activité (qu'est-ce que l'algèbre ?). Kieran conçoit l'algèbre comme activité en référence à différents travaux de didactique de l'algèbre. Elle s'appuie notamment sur une étude de Lee (1997), qui a posé à des mathématiciens, enseignants et étudiants la question suivante : « qu'est-ce que l'algèbre ? ». Un type de réponse domine, celui de l'algèbre comme une activité :

« Algebra emerges as an activity, something you do, an area of action in almost all of the interviews (p.187, Lee, 1997). » (Kieran, 2007, p. 713)

Dans les paragraphes suivants, nous détaillons les différents types d'activités algébriques caractérisés par Kieran. Pour cela, nous évoquons différents travaux de didactique de l'algèbre empruntés à d'autres auteurs et significatifs pour travailler les expressions algébriques. Nous commençons par les différentes sources de signification de l'algèbre dans les travaux de Kieran.

2.2.1 Les sources de signification de l'algèbre chez Kieran

Dans une perspective épistémologique, Kieran (2007) s'attache à décrire ce qui peut rendre l'algèbre significative : « *Algebraic meaning : Where does it come from ?* ». Pour cela, l'auteure s'inspire d'une classification des sources de signification (« *sources of meaning* » en anglais) de l'algèbre proposée par Radford (2004).

« For Radford, meaning in school algebra is produced in the “crossroads of diverse semiotic mathematical and non-mathematical systems” and is deemed to come from three primary sources : (a) the algebraic “structure” itself, (b) the problem context, and (c) the exterior of the problem context. » (Kieran, 2007, p. 711)

Selon Kieran, les trois sources de signification introduites par Radford ne prennent pas assez en compte le fait que les représentations mathématiques² (représentations graphiques, tableau de valeurs, etc) occupent une place importante dans les programmes scolaires actuels. C'est pourquoi elle adapte la classification de Radford et ajoute une quatrième source de signification « *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations* ». La nouvelle classification, qui fait l'objet d'une présentation approfondie, devient :

1. « *Meaning from within mathematics* :
 - a. *Meaning from the algebraic structure itself, involving the letter-symbolic form*
 - b. *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations*
2. *Meaning from the problem context*
3. *Meaning derived from what which is exterior to the mathematics/problem context (e.g. linguistic activity, gestures and body language, metaphors, lived experience, image building)* » (Kieran, 2007, p. 711)

Il nous apparaît pertinent de retenir cette classification dans notre étude cas Kieran y décrit ce qui permet de donner du sens aux objets de l'algèbre, ce qui peut éclairer sur les difficultés des élèves et les classes d'erreurs. Quelles sont les sources de signification de l'algèbre auxquelles un élève se réfère, ne se réfère pas ? Quels liens font les élèves entre ces sources de signification ? Comment peut-on les exploiter pour penser des exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves ? Quelle source de signification faire intervenir en priorité ? Dans quelle mesure un jeu sur différentes sources de signification pourrait-il permettre d'amener les élèves à remettre en question des apprentissages erronés ?

Nous développons maintenant les principaux aspects de chaque source de signification.

a. A propos de *Meaning from the algebraic structure itself, involving the letter-symbolic form*

Cette source de signification est fondamentale dans la compréhension des objets de l'algèbre. Elle concerne la construction du symbolisme algébrique, à la fois à travers la dialectique du numérique et de l'algébrique (Chevallard, 1985b), et à travers la mise en relation des aspects syntaxique et sémantique et celle des aspects

2. Kieran utilise le terme de « *mathematical representations* » que nous avons traduit par « *représentations mathématiques* ». Par la suite, nous le traduirons dans les termes de Duval (1993) par « *registres de représentations sémiotiques* ».

structural et procédural des objets mathématiques et, en particulier, des expressions algébriques.

« This structural source of meaning not only links letter-symbolic representations to their numerical foundations but also provides connections among the symbolic forms of algebra, its equivalences, and its property-based manipulation activity. Although the algebra research literature often refers to the structure of expressions, the latter phrase both shuns definition and proves difficult for students to grasp. [...] This source of meaning is considered by many mathematics educators and researchers to be fundamental to algebra learning. (Kieran, 2007, p. 711) »

Kieran reprend une citation de Booth à propos de « l'aspect sémantique de l'algèbre » :

« Our ability to manipulate algebraic symbols successfully requires that we first understand the structural properties of mathematical operations and relations which distinguish allowable transformations from those that are not. These structural properties constitute the semantic aspects of algebra. (Booth, 1989, pp.57-58) » (Kieran, 2007, p. 711).

Ces extraits montrent à quel point la manipulation des expressions algébriques est dirigée par une flexibilité, à travailler en s'appuyant à la fois sur les aspects syntaxiques et sémantiques et sur les aspects structural et procédural des expressions algébriques, développés aux paragraphes 2.2.2 et 2.2.3.

Nous complétons cette synthèse par deux approches.

D'une part, Bosch et Chevallard (1999) et (Chevallard, 1993), adoptent une approche, déjà présentée dans le chapitre d'introduction, par la dimension ostensive de l'activité algébrique. Le traitement algébrique y est décrit comme une manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs. Ils évoquent une double fonction des ostensifs : une fonction sémiotique, qui correspond à la capacité des ostensifs à produire du sens, et une fonction instrumentale qui traduit la capacité des ostensifs à s'intégrer dans des manipulations techniques, technologiques et théoriques.

D'autre part, dans le cadre de sa thèse de doctorat, Bardini (2003) s'est appuyée sur l'analyse épistémologique de Serfati (2005) de la construction du symbolisme pour analyser les rapports personnels des élèves aux expressions algébriques et notamment au symbolisme. La mise en perspective des erreurs persistantes des élèves avec les six figures de représentation développées par Serfati éclaire sur l'interprétation de ces erreurs. Nous présentons ici les principaux liens tissés par Bardini. Pour Serfati, l'écriture symbolique mathématique s'est constituée autour de six *figures de représentation* :

1. *La représentation du requis*, c'est-à-dire la représentation symbolique d'un élément, permanent dans le texte mais inconnu. Le symbole (la lettre) a alors le statut d'inconnue.

2. *La représentation du donné.* Le donné est aujourd’hui appelé « paramètre »³. Depuis Descartes, dans sa *Géométrie* (1637), l’usage veut que les inconnues soient représentées par les dernières lettres de l’alphabet (x, y, z) et les connues, les paramètres, par les premières (a, b, c). Le fait qu’un symbole puisse représenter à la fois le donné et le requis revient à accepter que les lettres puissent avoir différents statuts. Or, ce point peut être source de difficultés dans le contexte scolaire.
3. *La représentation des instructions opératoires élémentaires* comme, par exemple, l’addition, la multiplication et l’extraction de racines. Le cas de l’addition, développé par Bardini, met en évidence que l’erreur fréquente de concaténation ($a + b \rightarrow ab$) est cohérente avec l’interprétation épistémologique du signe d’addition. L’addition est considérée sous l’angle opérationnel. Elle n’est plus interprétée comme un objet⁴ ce qui, comme le souligne Serfati (2005, p. 71) », correspond à « *la fonction première véritable de tous les assemblages élémentaires [qui] est bien [...] d’assurer la codification d’une instruction d’exécution et non la valeur du résultat* ».
4. *La représentation de l’enchevêtrement des instructions* qui répond à la question de la séparation et de l’agrégation des signes dans le texte symbolique. C’est l’apparition de délimitants, comme les parenthèses et les crochets, qui permet de distinguer le produit de 2 par la somme de x et de 3, représentée symboliquement par $2(x + 3)$, de la somme du produit de 2 par x avec 3, représentée par $2x + 3$. L’interprétation des délimitants conduit à considérer les expressions du point de vue de leur structure (Sfard, 1991) et peut être mise en lien avec la tendance des élèves à se débarrasser au plus vite des signes délimitants, par exemple dans des erreurs du type : $a(b + c) \rightarrow ab + c$.
5. *La représentation de la mise en relation par égalité.* La mise à égalité dans le discours rhétorique suit le fil du texte sans pouvoir être considérée dans le sens inverse ce qui lui donne un caractère dissymétrique. Selon Serfati, cette dissymétrie a persisté dans les premières représentations symboliques du signe d’égalité puis elle s’est effacée à partir de la mise en place des « deux traits parallèles » dans le registre symbolique, introduits par le mathématicien Recorde.

3. Chevallard met en avant à plusieurs reprises (Chevallard, 1985b ; Chevallard & Bosch, 2012) la disparition des paramètres dans les programmes actuels comme une « dénaturation de “l’art algébrique” ».

4. Bardini fait le lien avec la notion de *procept* développée par Tall, c’est-à-dire le fait de pouvoir interpréter l’expression symbolique aussi bien en tant que procédure qu’en tant qu’objet.

Ceci rejoint, selon Bardini, les difficultés rencontrées par les élèves, soulignées à plusieurs reprises dans notre étude, vis-à-vis des différents statuts du signe d'égalité, notamment dans la rupture entre l'arithmétique et l'algébrique. La difficulté, pour les élèves, réside dans le passage d'une interprétation dissymétrique du signe d'égalité, caractéristique de l'écriture rhétorique, qui peut s'avérer très persistante, à une perception du signe d'égalité comme une relation d'équivalence (propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité).

6. *La représentation des concepts composés* comme les puissances (carré, cube) ou l'exponentielle.

b. A propos de *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations*

Cette source de signification concerne les liens entre les différents registres sémiotiques. Chez Duval (1995), la dimension sémiotique du travail algébrique réside dans le fait de mettre en jeu, parallèlement au registre des écritures algébriques, d'autres registres sémiotiques comme celui des écritures numériques, celui des représentations graphiques, celui des dessins en géométrie ou encore celui de la langue naturelle, afin, par exemple, de reformuler des énoncés, de faire apparaître les relations entre les variables. La conversion d'un registre sémiotique à un autre n'est pas transparente mais elle dépend du degré de complexité de son exécution, que Duval caractérise par la congruence ou la non-congruence entre les unités respectives des représentations de départ et d'arrivée. La congruence est caractérisée par la correspondance sémantique terme à terme entre les unités signifiantes des deux représentations ; la non-congruence demande une réorganisation entre les unités signifiantes du registre de départ et celui d'arrivée. Par exemple, la phrase « il y a six fois plus d'élèves (E) que de professeurs (P) » demande une réorganisation pour être traduite par $6P = E$ dans le langage algébrique alors que la phrase « le nombre d'élèves est égal à six fois celui des professeurs » lui est congruente.

La dimension sémiotique du travail algébrique est centrale dans l'apprentissage de l'algèbre :

« The opportunity to coordinate objects and actions within two different representations, such as the graphical and the letter-symbolic, is considered by many [mathematics educators and researchers] to be crucial in creating meaning in algebra (e.g. Fray, 1989; Romberg, Fennema & Carpenter, 1993; Yerushalmy & Schwartz, 1993). » (Kieran, 2007, p.712)

Diversifier les liens entre les écritures algébriques et différents registres sémiotiques peut aider les élèves à conceptualiser les objets de l'algèbre et rendre l'activité algè-

brique plus significative.

« Kaput (1989) has argued that the problem of student learning in algebra is compounded by the inherent difficulties in dealing with the highly concise and implicit syntax of formal algebraic symbols and the lack of linkages to other representations that might provide feedback on the appropriate actions taken. As a consequence, he has promoted the kind of mathematical-meaning building that has its source in translations between mathematical representation systems. » (Kieran, 2007, p. 712)

Aujourd'hui, l'enseignement de l'algèbre cherche à s'appuyer davantage sur les liens entre registres sémiotiques, par exemple par une approche fonctionnelle de l'algèbre. L'introduction d'environnements technologiques, comme les calculatrices graphiques, peut favoriser les liens entre le registre des expressions algébriques et celui des représentations graphiques. Cependant, comme le souligne Kieran, certains élèves peuvent éprouver des difficultés à établir ces liens.

Nous nous interrogeons : dans quelle mesure un jeu sur les différents registres sémiotiques peut-il être utilisé pour aider les élèves à donner davantage de sens aux objets de l'algèbre ?

c. A propos de *Meaning from the problem context*

Dans la lignée des travaux de Chevallard (1985b) et Gascón (1994), Kieran évoque plusieurs travaux en didactique de l'algèbre qui montrent l'importance de la résolution de problèmes internes ou externes aux mathématiques pour accompagner la construction du sens donné aux objets de l'algèbre. L'algèbre n'est pas seulement un ensemble d'objets avec des propriétés qui permettent de les manipuler, c'est aussi un outil pour résoudre des problèmes du domaine algébrique comme les problèmes de généralisation, de modélisation, de mise en équation ou les problèmes fonctionnels.

« In contrast to the internal semantics of algebra as a site for meaning making (Booth, 1989), the external semantics of a problem permit the algebra learner to fuse symbols and notations with events and situations, thereby creating an external meaning for certain objects and processes of algebra. A strongly held belief in algebra education is the notion that problem-solving contexts are foundational to the emergence and evolution of algebraic reasoning (e.g., Bednarz & Janvier, 1996; Bell, 1996). » (Kieran, 2007, p. 712)

Quels types de problèmes mettre en jeu ? En quoi la résolution de problèmes peut-elle intervenir dans une régulation de l'enseignement de l'algèbre ? Comment faire intervenir l'algèbre comme outil implicite⁵ avec pour objectif, par exemple, de

5. Douady écrit : « Nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite. » (Douady, 1986, p. 9)

montrer les limites du numérique et de redonner du sens aux objets de l'algèbre, puis, comme outil explicite dans la résolution de problèmes plus complexes ?

d. A propos de *Meaning derived from what which is exterior to the mathematics/problem context*

D'après Kieran, seuls les travaux récents en didactique de l'algèbre (par exemple Arzarello & Robutti, 2001 ; Radford, Demers, Guzmàn & Cerulli, 2003) prennent en compte des éléments extérieurs aux mathématiques comme les gestes, les mouvements du corps, les mots, les métaphores, les artefacts. Bien que relevant de faits extérieurs aux mathématiques, ils participent à la constitution de l'activité algébrique.

« Hence it seems to us, one of the didactic questions with which to deal is that of the understanding of how those non-algebraic meanings are progressively transformed by students up to the point to attain the standards of the complex algebraic meanings of contemporary school mathematics. (Radford, 2000, p.240) » (Kieran, 2007, p. 713)

Le rôle de cette source de signification pourra être questionné lors de la mise en œuvre des parcours d'enseignement différencié.

Kieran décrit les trois activités algébriques du modèle GTG en référence à la classification des sources de signification que nous venons de présenter. Dans les paragraphes suivants, nous décrivons ces trois activités.

2.2.2 L'activité générative

L'activité générative concerne la formation et l'interprétation des objets de l'algèbre élémentaire comme les expressions algébriques et les équations. Par exemple, il peut s'agir de la formation des équations à une inconnue qui traduisent un problème, de la formation des expressions générales traduisant des modèles géométriques ou numériques, souvent appelés « patterns », de la formation de règles traduisant des relations numériques. Pour Kieran, l'activité générative se situe la plupart du temps dans un contexte de résolution de problèmes de modélisation, de généralisation ou de preuve, mettant en jeu une activité globale :

« The generational activity of algebra involves forming and interpreting the objects of algebra, usually within the context of some global/meta-level activity. » (Kieran, 2007, p. 716)

Cette activité joue un rôle majeur à l'entrée dans l'algèbre au niveau de la construction du symbolisme algébrique, de la rupture avec les pratiques arithmétiques, dans la flexibilité à relier différents registres sémiotiques et dans la flexibilité à interpréter

les expressions à la fois structurellement et procéduralement. Nous complétons la synthèse la Kieran en revisitant chacun de ces points.

a. La construction du symbolisme algébrique et la rupture avec les pratiques arithmétiques

Les différents statuts de la lettre et du signe d'égalité commencent à se constituer dans l'activité générative et peuvent être en rupture avec les pratiques arithmétiques.

La lettre endosse différents statuts, répertoriés en fonction du contexte dans lequel elle est utilisée ; par exemple, dans le document d'accompagnement des programmes du collège, « Du numérique au littéral »⁶, dans les travaux de Booth (1984) et de Kieran (1992). Voici les différents statuts que nous retenons :

- le statut de variable ou de nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs. Ce statut est utilisé dans le contexte fonctionnel, d'utilisation de formule, de généralisation ou de preuve.
- le statut d'indéterminée : la lettre représente des nombres quelconques comme dans les identités où l'égalité est universellement vraie. Par exemple, dans l'énoncé « pour toutes les valeurs réelles données aux lettres a , b et k , on a $k(a + b) = ka + kb$ », les lettres a , b et k sont des indéterminées.
- le statut d'inconnue : la lettre désigne un nombre inconnu à déterminer. C'est le contexte de la résolution, de la mise en équation et d'équation.
- le statut de paramètre : la lettre représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres qui ont le statut de variable, d'inconnue ou d'indéterminée. Par exemple, dans la définition d'une fonction linéaire de coefficient a déterminée par $x \rightarrow ax$, x a le statut de variable et a celui de paramètre.

Les élèves ont des difficultés à reconnaître et à mobiliser les différents statuts de la lettre en fonction du contexte dans lequel celles-ci interviennent. Diverses recherches dont celles de Küchemann (1981, 1978), synthétisées dans (Kieran, 1992, p. 396), ont mis en évidence différents statuts donnés aux lettres par les élèves comme :

- la lettre évaluée : la lettre est assimilée à une valeur numérique dès le début,
- la lettre non prise en considération : la lettre est ignorée ou aucun sens n'est donné à sa présence,

6. Ce document, intitulé « Du numérique au littéral », est téléchargeable à l'adresse : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf.

- la lettre représentant un objet concret : la lettre est considérée comme l’abréviation d’un objet concret,
- la lettre représentant une inconnue : la lettre est considérée comme un nombre particulier mais inconnu,
- la lettre représentant un nombre généralisé : la lettre est considérée comme un représentant de plusieurs valeurs,
- la lettre représentant une variable : la lettre est considérée comme un représentant d’un ensemble de valeurs non spécifiées et il existe une relation systématique entre deux tels ensembles de valeurs.

Le signe d’égalité « = » a plusieurs statuts en algèbre, dont un certain nombre sont répertoriés dans le document d’accompagnement des programmes du collège déjà cité.

- Il peut annoncer un résultat comme en arithmétique. C’est par exemple le cas dans $42 + 9 = 51$. Dans ce cas, le signe apparaît comme orienté de la gauche vers la droite.
- Il peut indiquer une instanciation, par exemple lorsqu’on demande de calculer $3x + 7$ avec $x = 1$.
- Il peut indiquer que les objets mathématiques de part et d’autre du signe d’égalité sont équivalents. Il signifie que, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les deux expressions de part et d’autre du signe « = » sont égales. Cette utilisation apparaît dans la transformation des expressions ou dans des énoncés universels comme « pour toutes les valeurs réelles données aux lettres a , b et k , on a $k(a + b) = ka + kb$ ».
- Il est utilisé dans des énoncés dont on se demande s’ils peuvent être rendus vrais, par exemple dans la résolution d’équation.

Nous retenons deux difficultés dans la conceptualisation des différents usages du signe d’égalité. La première concerne le passage des pratiques arithmétiques, qui favorisent le signe d’égalité comme annonce de résultat et une lecture gauche-droite, aux pratiques algébriques, qui introduisent le signe d’égalité comme symbole d’équivalence. La deuxième concerne les différents statuts entre la manipulation des expressions algébriques, où le signe d’égalité sous-entend des énoncés universellement vrais, et la résolution d’équations, où le signe d’égalité sous-entend qu’on se demande si l’énoncé peut être rendu vrai.

Pour tenter d’expliquer et de comprendre les difficultés des élèves lors de l’acquisition du langage algébrique, plusieurs travaux de didactique de l’algèbre mettent en avant une « *rupture épistémologique entre l’arithmétique et l’algèbre* ». Vergnaud,

Cortes, et Favre-Artigue (1987) évoquent une double rupture épistémologique : la première, dans l'analyse des caractéristiques des démarches arithmétiques et algébriques et la deuxième, dans l'analyse des objets et des techniques intervenant dans la résolution (statut du signe d'égalité, statut des lettres, modes de contrôle dans la transformation des écritures). Ce point de vue est repris par Kieran (2001) dans les termes de *fausses continuités* (interprétations différentes des signes d'égalité et d'opération) et de *discontinuités* (démarches de résolution distinctes, utilisation de nouveaux objets) entre l'arithmétique et l'algèbre. Nous retenons les points suivants :

- Le changement du statut du signe d'égalité : dans le contexte arithmétique, il signifie une annonce de résultat, alors qu'il a différents statuts dans le contexte algébrique, notamment celui de l'équivalence ce qui peut entraîner chez les élèves des difficultés à travailler avec des identités (par exemple, $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ pour tout x ou $5 + 9 = 10 + 4$) ou des équations (par exemple, $3x + 5 = 4x + 3$).
- Le changement d'objets : le travail arithmétique se fait avec des « nombres concrets » (Gascón, 1994, p. 46), alors que le travail algébrique est une manipulation des symboles qui peuvent être interprétés de manières différentes en fonction du contexte : équations et inconnues, identités et nombres généralisés ou encore formules, fonctions et variables.
- L'évolution du sens donné aux signes et aux opérateurs : en arithmétique, on évalue toujours les opérations alors qu'en algèbre on suspend l'évaluation. Toute pratique algébrique peut aboutir à une expression ou à une nouvelle relation entre des grandeurs, ce qui va à l'encontre des calculs arithmétiques qui conduisent toujours à un nombre. Cette rupture peut expliquer des erreurs de type concaténation (par exemple $3 + x \rightarrow 3x$) chez les élèves qui, en accord avec ce qui est attendu en arithmétique, cherchent à donner un résultat sans aucun opérateur. Les expressions algébriques sont des objets construits à partir de nombres et de signes opératoires. Contrairement à l'arithmétique, l'algèbre ne distingue pas clairement le processus de calcul et le résultat. Une expression algébrique peut conserver des signes opératoires et rester non évaluée alors que, dans les pratiques arithmétiques, un signe opératoire indique un calcul à effectuer. En effet, en arithmétique, les signes « +, -, ×, =, etc. » représentent une action (par exemple, le + et le = dans $3 + 8 = 11$), tandis qu'en algèbre, ils peuvent représenter comme en arithmétique une action ($x + 3 = 8$) ou bien, pour les opérations, une permanence (par exemple pour la multiplication dans $a(b+c) = ac+ac$) ou encore, pour l'égalité, une équivalence

- (par exemple, dans les identités remarquables). Cette dualité des signes en algèbre est en rupture avec les pratiques arithmétiques (Gascón, 1994, p. 46).
- Des schémas de résolution de problèmes distincts (Gascón, 1994).

b. Les liens entre les différents registres sémiotiques

L'activité générative est sollicitée dans le contexte de résolution de problèmes de type modélisation, généralisation ou preuve, ce qui permet de faire des liens entre les symboles et les notations avec des contextes et des situations plus ou moins concrets. Elle met donc en jeu la conversion entre le registre des expressions algébriques et d'autres registres sémiotiques comme celui des graphiques, des écritures numériques ou des programmes de calcul. L'importance et le rôle du lien entre les différents registres sémiotiques dans la construction du sens donné aux objets de l'algèbre ont déjà été soulignés dans le paragraphe sur la source de signification *Meaning from the other mathematical representations, including multiple representations*. Ces traductions entre différents registres offrent des possibilités de travailler sur les aspects procédural et structural, présentés dans le paragraphe 2.2.3 qui suit.

2.2.3 L'activité transformationnelle

Cette activité concerne les processus de manipulation algébrique des expressions comme développer, factoriser, transformer une expression en une autre équivalente, additionner ou multiplier des expressions polynomiales, résoudre des équations, des inégalités, simplifier des expressions, substituer par des valeurs numériques, travailler avec des équations et des expressions équivalentes. L'équivalence est au cœur de l'activité transformationnelle puisque le passage de la forme symbolique d'une expression à une autre a pour but de maintenir l'équivalence. Cette activité inclut la construction du sens donné à l'utilisation des propriétés algébriques dans la manipulation des expressions. Kieran s'intéresse aux éléments théoriques qui la fondent. Elle remarque que les travaux récents de didactique portent une attention particulière à fonder théoriquement le travail manipulatoire de l'algèbre.

« In other words, algebraic transformations are not viewed simply as procedural, but also as theoretical. Thus, notions of equivalence figure more prominently in some of this later work. » (Kieran, 2007, p. 722)

Nous portons une attention particulière à l'équivalence des expressions et au contrôle théorique, aspects que Kieran met au cœur des éléments théoriques de l'activité transformationnelle.

a. Le contrôle théorique et l'équivalence des expressions

Kieran cite Pimm :

« One resource of algebra is a rich plurality of symbolic forms ; one core notion, that of equivalence. Equivalence and transformation are linked notions, indicating sameness perceived in difference for some purposes, or indifference with respect to others ? The existence of multiple expressions “for the same thing” can suggest the very possibility of transforming expressions directly to get from one to another. (Pimm, 1995, p. 89) » (Kieran, 2007, p. 722)

Dans cet extrait, Pimm souligne certains éléments au cœur de l'activité algébrique : une même expression peut avoir plusieurs écritures, ces écritures sont équivalentes, le passage d'une expression à une autre s'effectue par une transformation qui conserve l'équivalence. Ces éléments font référence à la prise en compte du double aspect syntaxique et sémantique dans la manipulation d'une expression algébrique qui s'appuie sur le « sens » et la « dénotation » des expressions, termes introduits par Frege (1971) et repris dans les travaux de Drouhard⁷. Grâce à cette référence aux travaux de Frege et de Drouhard, nous complétons la synthèse de Kieran.

Drouhard (1992) étudie la signification d'une expression algébrique. Les expressions algébriques dépendent d'un ensemble de caractéristiques qui leur sont propres : leur « syntaxe », leur « dénotation », leur « sens » et leur « interprétation ». Par « syntaxe », Drouhard entend les conventions liées aux écritures algébriques (parenthèses, barre de fraction, etc.) et les transformations formelles des expressions algébriques associées aux règles algébriques. Pour ce qui concerne le « sens » et la « dénotation », Drouhard fait référence à la distinction établie par Frege (1971) entre « sens » et « dénotation ». Un objet mathématique a une unique dénotation mais peut avoir différentes représentations. Par exemple, le nombre 4 peut s'écrire 2×2 , $\sqrt{16}$ ou encore $8/2$. Ces écritures sont différentes mais ont la même dénotation car elles se réfèrent au même nombre. Les expressions $4(x - 1)$, $x^2 - (x - 2)^2$ ont la même dénotation mais ont des sens différents car elles ne relèvent ni du même domaine de description, ni du même point de vue. Les informations données par les écritures sont différentes ainsi que les transformations formelles qui leur sont applicables. L'« interprétation » d'une expression dépend du cadre⁸ dans lequel elle intervient. Par exemple, $4(x + 1)$ a pour interprétation, dans le cadre fonctionnel, l'image par x de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe $4(x + 1)$, ou dans le cadre géométrique, l'aire d'un rectangle de côtés 4 et $x + 1$ pour des valeurs de x positives. Le calcul algébrique nécessite

7. Nous conseillons aux lecteurs de se reporter à (Bardini, 2003, chapitre 2) qui synthétise différents travaux de didactique de l'algèbre reprenant les termes de « sens » et de « dénotation » introduits par Frege.

8. Le terme « cadre » est à prendre dans le sens que lui donne Douady (1986).

un travail subtil entre le « sens » et la « dénotation » : le choix des transformations des expressions est guidé par le sens. Lorsqu'une expression est transformée en une autre, le but est d'obtenir deux expressions équivalentes, c'est-à-dire qui ont des sens différents mais une même dénotation. Il se pose la question du contrôle de cette transformation. Une référence aux propriétés du calcul algébrique utilisées permet d'assurer théoriquement que la première expression transformée est équivalente à la deuxième.

Cependant, comme le note Kieran dans l'extrait suivant, les élèves ont des difficultés à identifier les propriétés utilisées :

« Students have a great deal of difficulty in identifying the properties they use when they transform algebraic expressions. » (extrait de Demby, 1997) (Kieran, 2007, p. 723)

Ces difficultés freinent la pratique d'un contrôle théorique adapté, ce qui empêche les élèves de complètement maîtriser leurs techniques.

b. Le contrôle théorique et la dialectique entre le numérique et l'algébrique

Selon Kieran, un second aspect du contrôle théorique est en lien avec la dialectique numérique-algébrique. Elle écrit :

« Another element of theoretical control that is considered basic to transformational activity is the knowledge that relates the algebraic domain with the arithmetical. For example, numerical substitution activity within expressions and equations can help students make connections between the arithmetical and the algebraic world. [...] In the case of equivalent expressions, students came to see that different expressions were being used to represent the same process. This activity also had an impact on students' view of expressions and variables, which suggests that a task that is transformational in nature can simultaneously be related to generational activity if it leads to an evolution of students' conceptions of the objects of algebra. » (Kieran, 2007, p. 723)

Comme le souligne Chevallard (1985b) (cf. §2.1.1), l'algébrique est un outil d'étude du numérique et, inversement, le numérique est un outil d'étude de l'algébrique. Un retour au numérique est un moyen, par exemple, de contrôler le résultat d'une transformation. Or, comme le montre Chevallard dans cet extrait, cette dialectique et donc la possibilité d'un contrôle théorique par le numérique, s'est perdue.

« Sur ce patron, vous lui [un élève] proposez de factoriser par exemple l'expression suivante : $(2x - 3)^2 - 4(x + 1)(4x - 6) + (4x^2 - 9)$. Il parvient sans retard au résultat « attendu », soit $-4(2x - 3)(x + 2)$, par un calcul dont le luxe de détails vous surprend mais où vous voyez le reflet d'un enseignement adressé à des débutants en calcul algébrique. Cet élève, pensez-vous, maîtrise fort bien ce type de problème de factorisation. Vous admirez même que, parvenu à l'expression $(2x - 3)(-4x - 8)$, il ait pensé à mettre en facteur le coefficient -4 , et qu'il l'ait fait sans coup férir. Mais voici qu'il attend de vous une approbation,

et vous le dit : ne se serait-il pas trompé ? Vous croyez habile de lui répondre qu'il pourrait tenter de procéder par lui-même à quelques vérifications, en donnant à x des valeurs numériques simples, « par exemple -2 , qui annule la seconde expression et qui devrait donc annuler la première ». Votre élève d'occasion, pourtant, paraît ne rien entendre à ce discours. Son étonnement vous étonne. Vous répétez votre suggestion. « On n'a jamais fait ça ... », finit-il par avouer. Vous comprenez enfin qu'il n'y a pour lui, à cet instant, aucun lien entre la transformation qu'il a fait subir à l'expression algébrique proposée, d'une part, et le fait de substituer des valeurs numériques à ce... petit x qu'il a si habilement manipulé, d'autre part. Aucun. » (Chevallard, 1989, p. 46)

Lorsqu'il demande à un élève, qui vient d'effectuer une factorisation, s'il ne s'est pas trompé, il s'aperçoit que celui-ci ne fait pas le lien entre la transformation des expressions et le fait de leur substituer des valeurs numériques. Chevallard met ainsi en évidence que le rapport institutionnel conduit à un rapport personnel des élèves dans lequel le calcul algébrique est employé sans que ne s'instaure une dialectique entre le numérique et l'algébrique.

Deux exemples d'environnements informatiques pour développer un contrôle théorique chez les élèves

Certains travaux de didactique de l'algèbre ont donné naissance à des environnements informatiques d'apprentissage de l'algèbre, basés sur l'équivalence des expressions et la dialectique numérique-algébrique. Nous en présentons deux, l'*Algebrista* de Cerulli et Mariotti (2009), cité par Kieran, et, *APLUSIX* de Nicaud (1994). Nous portons une attention particulière à ces travaux. En effet, l'intégration de notre thèse dans le projet PépiMeP ouvre des perspectives de conception et d'usage des technologies à prendre en considération dans la conception d'exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves.

L'objectif de l'*Algebrista* (Cerulli & Mariotti, 2009) est de développer chez les élèves une perspective théorique des manipulations algébriques. L'activité algébrique est fondée sur le concept d'équivalence en distinguant preuve et vérification. L'équivalence de deux expressions est prouvée si une expression est transformée en une autre au moyen d'axiomes. L'utilisation d'axiomes est le seul moyen de prouver l'équivalence de deux expressions. La vérification numérique, c'est-à-dire la substitution de nombres aux lettres puis le calcul de l'expression numérique, est le principal moyen de prouver que deux expressions ne sont pas équivalentes. Dans l'environnement l'*Algebrista*, les axiomes sont accessibles par des boutons, les élèves ont la possibilité de créer leurs propres boutons, dits « boutons transformation ou théorème ». Ainsi, le contrôle théorique peut s'opérer de deux façons :

- Prouver que les expressions sont équivalentes en se reportant aux propriétés

utilisées pour passer d'une expression à une autre ;

- Vérifier que les expressions ne sont pas équivalentes en remplaçant les lettres par des valeurs numériques.

La preuve permet aux élèves de percevoir que plusieurs expressions peuvent représenter le même objet. La vérification leur permet de travailler sur la dialectique numérique-algébrique.

Nicaud (1994) adopte un autre point de vue dans le cadre du développement du système d'Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (E.I.A.H.) nommé *APLUSIX*. Il propose une analyse de l'évolution du sens du calcul algébrique en trois niveaux sémantiques. Le premier niveau consiste à donner des valeurs aux variables d'une expression et à la calculer. Le second niveau consiste à transformer une expression en une expression équivalente dans des calculs à un seul pas (développement ou factorisation). Le troisième niveau, considéré par Nicaud comme essentiel pour l'activité algébrique, consiste à organiser le raisonnement en étapes à partir de connaissances stratégiques, comme les règles de transformation syntaxique. Ainsi, le logiciel accompagne l'activité transformationnelle de l'élève.

c. La reconnaissance de la structure de l'expression

Kieran souligne dans cet extrait que la perception de la forme est une autre source de difficulté chez les élèves dans la manipulation des expressions :

« The kinds of errors that students can make in algebraic transformational activity (e.g., Carry et al., 1980 ; Lemoyne, Conne, & Brun, 1993 ; Matz 1982 ; Sleeman, 1984) have suggested to some researchers (e.g., Kirshner, 1989) that the issue is not an absence of theoretical control but rather a misperception of form. » (Kieran, 2007, p. 723)

Ceci fait référence à la reconnaissance de la structure des expressions, c'est-à-dire l'interprétation d'une expression du point de vue de sa structure. Or, la reconnaissance de la structure est fondamentale pour développer une intelligence du calcul, c'est-à-dire pour faire le choix de l'écriture adaptée ou de la transformation à effectuer en fonction du but visé.

d. Les aspects procédural et structural des expressions algébriques

Sfard (1991) considère deux aspects fondamentaux des notions mathématiques abstraites comme les nombres, les expressions algébriques ou les fonctions. Elle distingue l'aspect structural qui considère la notion comme un objet et l'aspect opérationnel ou procédural qui considère la notion comme un processus. À une conception structurale correspond un concept conçu comme un objet (à prendre dans un sens

différent de Douady). A une conception procédurale, correspond un concept conçu comme un processus. Ces deux aspects sont complémentaires. Mais, le processus d'apprentissage d'une notion s'accompagne de la construction d'une flexibilité entre son aspect structurel et son aspect opérationnel. Kieran (1992) explicite la distinction entre les termes procédural et structural en algèbre :

« Procedural refers to arithmetic operations carried out on numbers to yield numbers. For example, if we take the algebraic expression, $3x + y$, and replace x and y by 4 and 5, the result is 17. Another example involves the solving of $2x + 5 = 11$ by substituting various values for until the correct one is found. In both these ostensibly algebraic examples, the objects that are operated on are not the algebraic expressions but their numerical instantiations. Furthermore, the operations that are carried out these numbers are computational - they yield a numerical result. Thus, both of these examples illustrate a procedural perspective in algebra.

The term structural, on the other hand, refers to a different set of operations that are carried out, not I numbers, but on algebraic expressions. For example, if we take the algebraic expression $3x + y + 8x$, this can be simplified to yield $11x + y$ [...]. In this both examples, the objects that are operated on are the algebraic expressions, of some numerical instantiation. The operations that are carried out are not computational. Furthermore, the results are yet algebraic expressions. » (Kieran, 1992, p. 392)

Une même expression algébrique peut être associée à plusieurs représentations reposant sur les aspects structurel et procédural. L'aspect procédural d'une expression se réfère à un processus de calcul alors que l'aspect structurel d'une expression se réfère à un objet dont la forme et la structure peuvent être décrites. Par exemple, l'expression $2x + 3$ peut être interprétée :

- du côté procédural : comme le processus opératoire « prendre un multiple de 2 et lui additionner 3 » qui est applicable sur des valeurs numériques ;
- du côté structurel : comme le nombre résultant du processus opératoire consistant à prendre un nombre, le multiplier par 2 et lui ajouter 3, ou bien comme l'expression générique d'un nombre congru à 3 modulo 2, ou bien encore comme l'image de x par la fonction de la variable x qui à x associe $2x + 3$.

A la lumière d'analyses historiques et cognitives, Sfard fait l'hypothèse que, pour la plupart des humains, une nouvelle notion se conceptualise d'abord par son aspect procédural. La transition de l'aspect procédural à l'aspect structurel peut être longue et difficile. Sfard la modélise en trois étapes :

1. l'intériorisation : la familiarisation avec les nouveaux objets,
2. la condensation : la mobilisation des objets à un niveau procédural,
3. la réification ou l'encapsulation : les objets sont envisagés comme des entités conceptuelles indépendamment de tout processus susceptible de l'engendrer ; l'aspect structurel est mobilisé.

L'acquisition du langage algébrique se développe d'une part sur la construction des deux aspects et d'autre part sur une fonction d'adaptabilité en fonction des contextes : quel aspect de l'expression utiliser en fonction de l'usage visé ?

L'analyse historique de la construction du symbolisme algébrique proposée par Serfati (2005) suggère également que la conception des expressions se soit développée depuis une conception procédurale vers une conception structurale. Il distingue deux aspects dans la représentation symbolique : le premier consiste à représenter une instruction élémentaire (le procédural) et le second à représenter un résultat (le structural) (« procédure ou résultat ? » (Serfati, 2005, p. 76)).

« Nos deux exemples nous conduisent aussi à revenir sur le statut de l'interprétation des écritures symboliques : procédure, comme nous l'avons dès le début postulé, ou résultat ? Les intentions premières de l'auteur du texte avaient chaque fois été claires : il avait voulu coder une opération à effectuer, c'est-à-dire une action à exécuter, et non le résultat de celle-ci. » (Serfati, 2005, p. 77)

Serfati montre que la distinction entre l'instruction d'exécution et le résultat, encore explicite chez Leibniz et ses contemporains au XVII^{ème} siècle, devient implicite au fil du temps. Il prend pour exemple les fonctions.

*« D'une séparation implicitement assumée entre instruction d'exécution et résultat de celle-ci, naîtra peu à peu cependant, à partir du milieu du XVIII^{ème} siècle, du fait d'Euler et Riemann, l'objectivation du concept moderne de fonction (en termes modernes, elle s'articule dans la différence entre le $f(x)$ et le f) que Frege fut, à notre connaissance, le premier à mettre en forme philosophique dans *Fonction et concept*. » (Serfati, 2005, p. 78)*

Il est ensuite conduit à distinguer deux positions face à une expression : les positions d'auteur et de lecteur reprises par Bardini (2003) pour étudier « le rapport au symbolisme algébrique » chez les élèves.

2.2.4 L'activité globale

L'activité globale au niveau du meta fournit le contexte et la motivation pour engager les élèves dans les activités générative et transformationnelle.

« Although algebraic activity involving problem solving, more particularly word-problem solving, has been integrated into the previous sections, on generational and transformational activity, three types of global/meta-level activity for which a significant body of algebra research exists with this age group of learner have been reserved for this section : generalizing, proof and proving, and modeling. » (Kieran, 2007, p. 725)

Cette activité consiste en la résolution de problèmes dans lesquels on ne peut s'engager sans utiliser le symbolisme. Il s'agit des problèmes intervenant dans la dimension *outil* de l'algèbre (cf. §1.2) comme la modélisation, la généralisation de « patterns »,

les prédictions et les conjectures, la justification et la preuve. L'activité globale fournit un cadre pour construire et travailler avec les objets de l'algèbre. La conceptualisation des objets de l'algèbre a lieu aussi dans l'activité globale :

« These [the global/meta-level activities] are the kind of activities that provide the surround for engaging in mathematical activity in general, and algebraic activity in particular – and, thus, for constructing and working algebraic objects and processes. » (Kieran, 2007, p. 714))

L'activité globale recoupe certains aspects des activités transformationnelle et générative sans pour autant les égaler :

« Generalization and problem solving can be present in much of generational and transformational activity of algebra, especially during the early stages of learning, thus, the global/meta-level activity of algebra or both broader than and at the same time not quite as broad as algebra. » (Kieran, 2007, p. 714))

Cette dernière citation nous conduit à quelques remarques sur la complémentarité des trois types d'activités.

2.2.5 Complémentarité des trois types d'activité

Dans le modèle GTG de Kieran, la conceptualisation des objets de l'algèbre a lieu dans les trois types d'activités. L'activité transformationnelle y joue un rôle important à condition qu'elle soit travaillée avec un contrôle théorique. Mais elle ne doit pas occuper une place prépondérante ni être minimisée face aux activités générative et globale. Par ailleurs, Kieran souligne la dynamique entre les activités générative et globale. La résolution d'un problème pourra engager plus ou moins une activité générative ou globale en fonction du niveau des élèves. Ainsi, aux premières étapes de l'apprentissage de l'algèbre, un problème de généralisation ou de modélisation engage principalement dans une activité générative.

2.2.6 Conclusion

Nous avons exposé les trois types d'activité du modèle développé par Kieran en nous centrant sur les expressions algébriques au cœur de notre recherche. La présentation de chaque activité nous a permis d'avoir un panorama de travaux de didactique de l'algèbre faisant état des processus et des difficultés de conceptualisation des objets de l'algèbre chez les élèves. La liste des travaux de recherche n'est pas exhaustive mais nous avons retenu ceux qui nous permettaient d'éclairer notre problématique.

Pour conclure, nous dégagons les aspects épistémologiques qui nous semblent les plus pertinents à retenir, pour interroger le travail avec et sur les expressions

algébriques :

- Le jeu sur les différentes représentations sémiotiques pour donner du sens aux objets de l’algèbre et rendre nécessaire l’introduction des lettres permettant l’équivalence des expressions algébriques et des représentations sémiotiques,
- Le rôle essentiel du contrôle théorique des transformations algébriques, en lien avec l’équivalence des expressions et le numérique,
- L’importance de la reconnaissance de la structure des expressions pour guider l’activité transformationnelle,
- La dialectique entre l’aspect procédural et l’aspect structural des expressions algébriques pour organiser la traduction d’un registre sémiotique à un autre.

Dans le paragraphe suivant, nous concluons par une référence épistémologique en tirant parti des éléments épistémologiques retenus dans chacune des approches anthropologique et cognitive.

2.3 En conclusion : une référence épistémologique pour nos travaux

La relecture des travaux de didactique de l’algèbre considérés dans les approches anthropologique ou cognitive nous a conduit à dégager les éléments épistémologiques suivants, caractérisant ce qui est au cœur de la génération des expressions algébriques, de leur interprétation, du calcul contrôlé sur ces expressions et de leur utilisation dans des contextes intra- ou extra-mathématiques. Il s’agit de l’équivalence des expressions, la dialectique entre le numérique et l’algébrique, les aspects structural et procédural des expressions et l’interprétation des expressions algébriques dans d’autres registres de représentation. Nous mettons en évidence, dans cette synthèse, que ces éléments sont souvent communs aux deux approches. Nous les retenons comme constitutifs de la référence épistémologique aux expressions algébriques retenue dans notre travail pour construire un rapport idoine au calcul algébrique sur les expressions. D’une part, les approches cognitives montrent qu’ils sont source de difficultés chez élèves. D’autre part, les approches anthropologiques, retenues comme constitutives des modèles de l’enseignement de l’algèbre, mettent en évidence que, depuis la réforme des mathématiques modernes, les évolutions successives des processus de transposition didactique ont eu tendance à les dénaturer (par exemple, Chevallard & Bosch, 2012), ce qui peut favoriser la construction de rapports personnels des élèves à l’algèbre en décalage avec un rapport idoine. Bien qu’ils soient

reliés les uns aux autres, nous détaillons séparément ces éléments.

L'équivalence des expressions

L'équivalence des expressions algébriques est centrale dans plusieurs des travaux rencontrés. Parmi les quatre caractéristiques d'une expression (syntaxe, dénotation, sens et interprétation) distinguées par Drouhard (cf. §2.2.3), la dénotation permet de caractériser les expressions équivalentes : deux expressions algébriques sont équivalentes si elles ont la même dénotation. Pour Chevallard et Ruiz-Munzón, la génération des expressions est avant tout motivée par la question centrale de l'équivalence des programmes de calcul et donc l'équivalence des expressions associées. L'équivalence des programmes de calcul donne des conditions à mettre en œuvre pour introduire les expressions algébriques et la hiérarchie des opérations en lien avec les règles de calcul. Pour Kieran, l'activité transformationnelle doit être développée avec un contrôle théorique des transformations algébriques effectuées ; qui est guidé par l'équivalence des expressions. Ainsi, l'équivalence des expressions est au cœur d'une maîtrise du calcul algébrique, parce qu'elle permet non seulement un contrôle théorique des transformations, mais aussi le développement d'une intelligence des calculs liée au sens des expressions, pour choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé.

La dialectique entre le numérique et l'algébrique

Cette dialectique, introduite par Chevallard (cf. §2.1.1), permet d'entretenir les liens entre le numérique et l'algébrique et inversement. Kieran y fait référence comme moyen de contrôler les transformations algébriques.

Les aspects structural et procédural des expressions

La flexibilité à passer d'une conception procédurale des expressions à une conception structurale est présente dans les deux approches théoriques rencontrées. Alors que chez Ruiz-Munzón, le passage du procédural au structural est central dans la première étape du processus d'algébrisation, les travaux de Sfard laissent supposer que les élèves qui rencontrent le plus de difficultés construisent une conception procédurale ou pseudo-structurale des expressions, ce qui peut être un obstacle au développement d'une activité transformationnelle adaptée avec un contrôle théorique et une intelligence des calculs. Un des enjeux du travail avec et sur les expressions est d'amener les élèves à travailler avec flexibilité les aspects procédural et structural des expressions. Les travaux de Bardini (2003) semblent ouvrir des possibilités

pour développer le jeu entre différents registres de représentation des expressions algébriques. Écritures algébriques, programmes de calcul, schéma de calcul, représentation en arbre permettent de travailler les deux aspects procédural et structural des expressions algébriques.

L'interprétation des expressions algébriques dans d'autres registres de représentation

L'interprétation des expressions algébriques dans d'autres registres de représentation comme le registre graphique, les représentations en arbre, les programmes de calcul, les schémas de calcul ou le registre des grandeurs (Duval, 1993) joue un rôle important dans la conceptualisation de l'algèbre. Pour Kieran, la flexibilité à interpréter dans les différents registres de représentation participe à la signification donnée aux expressions algébriques.

Les éléments épistémologiques que nous retenons interviennent dans la mobilisation des techniques utilisées et dans la convocation des types de tâches pour la résolution des différents problèmes du domaine algébrique présentés plus haut, à savoir, les problèmes de généralisation, de modélisation, de mise en équation ou les problèmes fonctionnels. Nous nous interrogeons : les programmes scolaires, les manuels, les modes de faire des enseignants (discours, gestuelles, etc.), les organisations didactiques mises en place amènent-ils les élèves à travailler avec ces éléments épistémologiques pour construire des modes d'interprétation des expressions, de justification et des techniques pour anticiper et vérifier les transformations du calcul algébrique ? Les aident-ils à convoquer les types de tâches intermédiaires pour organiser et contrôler le calcul algébrique ? Dans le cas contraire, la non-prise en compte de ces éléments, ne favorise-t-elle pas des processus différenciateurs, comme évoqué au chapitre 1 (cf. §1.1.2) ? Ces questionnements nous conduisent au chapitre suivant. Nous nous appuyons sur cette référence épistémologique pour construire une OM de référence permettant de mettre en relation les rapports personnels des élèves avec les rapports institutionnels à l'algèbre, en fin de collège et début de lycée.

Chapitre 3

OM de référence et OM à enseigner relativement aux expressions algébriques

Ce chapitre est consacré à la mise en évidence de besoins d'apprentissage ignorés par l'institution et laissés à la charge des élèves dans l'enseignement de l'algèbre au collège et en seconde. Nous commençons par dégager une OM de référence relativement aux expressions algébriques selon la référence épistémologique établie au chapitre 2. Cette OM de référence est opérationnalisée pour analyser les programmes officiels et des manuels du collège et de la classe de seconde. Nous dégageons les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner relativement aux expressions algébriques dans ces institutions. Les niveaux de la classe de 5^e à la classe 2^{de} sont concernés afin d'avoir accès à toutes les étapes de construction de l'OM à enseigner et de l'OD associée. La mise en perspective de l'OM à enseigner dans l'OM de référence relativement aux expressions algébriques, nous permet de mettre en évidence l'incomplétude du bloc technologico-théorique de l'OM à enseigner au collège et au début de la seconde. Certaines nécessités d'apprentissages liées aux éléments épistémologiques au cœur du travail sur les expressions algébriques s'en trouvent ignorées ou laissées implicites. Cela nous conduit à formuler deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

Ce chapitre est constitué de cinq parties. D'abord, nous décrivons l'OM régionale de référence relativement aux expressions algébriques (§ 3.1). Ensuite, nous précisons la méthodologie adoptée (§ 3.2) pour l'analyse des programmes officiels (§ 3.3) et des manuels scolaires (§ 3.4). Ces analyses conduisent à dégager les caractéristiques de l'OM à enseigner ce qui nous permet de dégager des savoirs et savoir-faire implicites

et des questions génératrices à travailler dans les parcours d'enseignement différencié (§ 3.5).

3.1 Une OM de référence

3.1.1 Place de l'OM régionale dans l'OM globale du domaine algébrique

Notre étude est centrée sur la première des trois étapes du processus d'algébrisation du modèle épistémologique de référence développé par Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012) présenté dans le chapitre 2 au paragraphe b.. Dans ce modèle, l'algèbre élémentaire est conçue comme un processus d'algébrisation de programmes de calcul. La première étape s'attache à une des difficultés majeures de l'apprentissage de l'algèbre, au centre de nos préoccupations, à savoir l'introduction des expressions algébriques et les fondements du calcul. Les programmes de calcul ne sont plus considérés comme un processus (processus de calcul en lien avec le numérique ou les « patterns » géométriques) mais comme un résultat, ce qui permet de les explorer du point de vue de leur structure et de les manipuler. Cette évolution rend compte de la limite du procédural pour interroger l'équivalence de deux programmes de calcul. Les élèves sont amenés à construire la notion d'expression algébrique comme modèle symbolique des programmes de calcul, à développer de nouvelles techniques pour les créer et les transformer. Ainsi, le traitement de programmes de calcul équivalents fait émerger un nouvel environnement technologico-théorique pour justifier la formation des expressions algébriques et les techniques de transformation (simplification, développement, factorisation).

Notre étude étant centrée sur la première étape du processus d'algébrisation, nous proposons de la spécifier en termes d'OM locales et régionales. Dans l'OM globale du domaine algébrique, nous distinguons au moins trois OM régionales : une première relative aux expressions algébriques, une seconde relative aux formules et une troisième relative aux équations (cf. figure 3.1). Nous situons les praxéologies constitutives de la première étape du processus d'algébrisation dans l'OM régionale relative aux expressions algébriques.

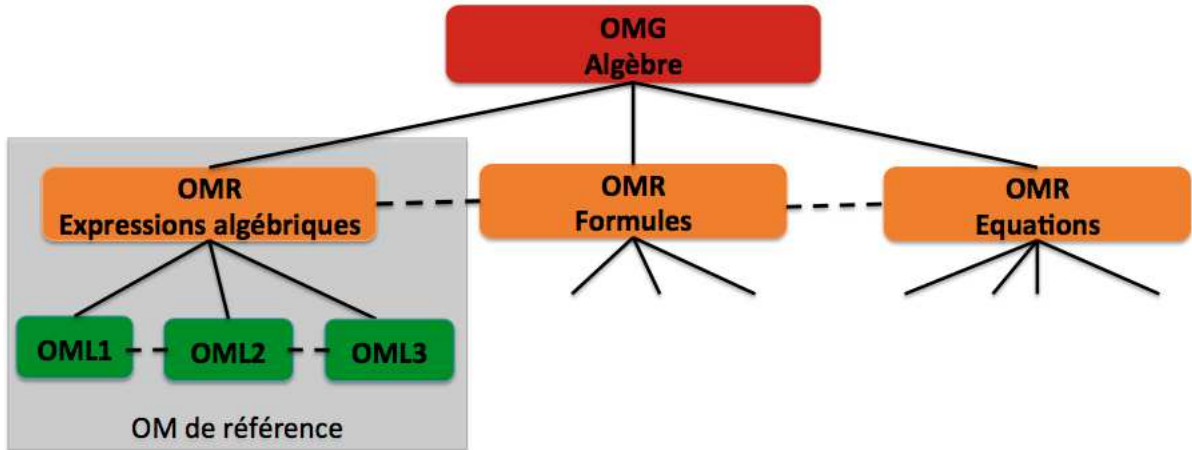


FIGURE 3.1 – OM globale du domaine algébrique

3.1.2 Trois OM locales

À la lumière des synthèses des travaux précédents et à l'image des travaux de Bosch, Espinoza, et Gascón (2003) sur les limites de fonctions, nous caractérisons l'OM de référence relative aux expressions algébriques en algèbre élémentaire comme une OM régionale relative aux expressions algébriques. Elle intègre **trois OM locales** (cf. figure 3.2) qui répondent à la référence épistémologique établie au chapitre 2. La première OM locale, **OM1**, vise à donner des raisons d'être à la génération des expressions algébriques. Celles-ci apparaissent nécessaires pour étudier les programmes de calcul et leur équivalence, ce qui conduit à solliciter les dialectiques numérique-algébrique et procédural-structural. OM1 est une OM locale autour de la génération des expressions algébriques dans la résolution de problèmes de généralisation et de preuve mais aussi de mise en équation et de modélisation. Elle permet de dégager une technologie justifiant la génération et la simplification des expressions algébriques. La généralisation s'appuie sur des processus de modélisation et donc de traduction de relations mathématiques entre un registre sémiotique et celui des écritures algébriques. L'étude de l'équivalence de programmes de calcul conduit à des expressions algébriques équivalentes, dont l'étude amène à l'émergence des propriétés du calcul algébrique et la hiérarchie des opérateurs. Ce travail sur les expressions équivalentes convoque des types de tâches de la seconde OM locale **OM2** qui concerne la dénotation et le sens des expressions algébriques. Elle est gérée par une technologie qui prend en compte l'interprétation des expressions algébriques pour les transformer et les mettre en lien avec d'autres registres de représentation. Enfin, OM1 et OM2 permettent de définir une technologie, basée sur les propriétés

du calcul algébrique, pour justifier les transformations d'une expression algébrique en expressions équivalentes. Elle fait l'objet de la troisième OM locale, **OM3**, appelée algèbre des polynômes.

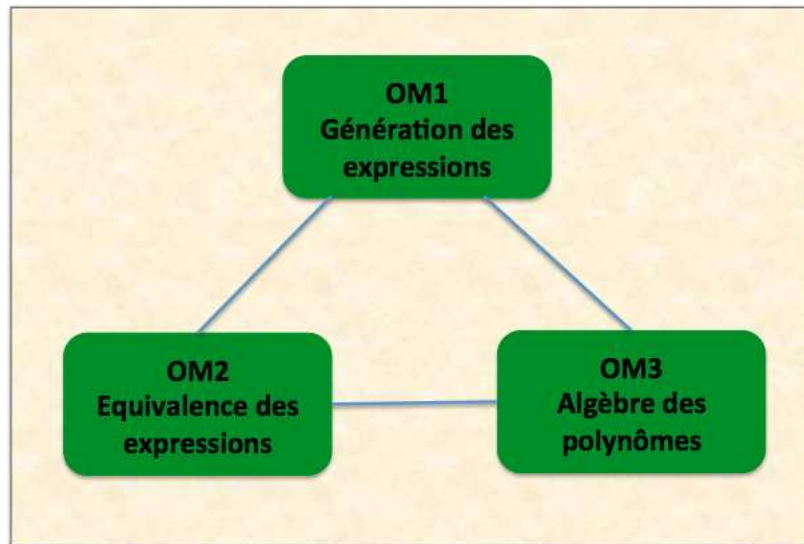


FIGURE 3.2 – Les trois OM locales de l'OM régionale de référence relative aux expressions algébriques

Chaque OM locale est décrite dans un paragraphe :

- OM1 (§3.1.3) sur la génération des expressions algébriques ; la résolution de problèmes et les différents registres de représentation,
- OM2 (§3.1.4) sur l'équivalence des expressions algébriques,
- OM3 (§3.1.5) sur l'algèbre des polynômes.

Pour chaque OM locale, nous identifions les principaux genres de tâches constitutifs, les principales techniques impliquées et les éléments technologiques mis en jeu. Toutes les techniques ne sont pas codées, nous indiquons celles qui sont idoines. Notre présentation des genres de tâches n'est pas exhaustive, nous donnons suffisamment d'éléments pour, d'une part, rendre compte des principaux éléments techniques et technologies impliqués dans le calcul sur et avec les expressions algébriques et, d'autre part, mettre en évidence les liens entre les trois OM locales, notamment pas le fait qu'un type de tâche se décompose en plusieurs types de tâches de la même OM locale ou dans une autre. Nous revenons sur ce dernier point dans le paragraphe 3.1.6.

3.1.3 OM1, Génération des expressions algébriques

a. Présentation

OM1 est une organisation mathématique autour de la génération des expressions algébriques dans la résolution de problèmes de généralisation et de preuve. Elle donne des raisons d'être à l'OM régionale relative aux expressions algébriques, en abordant la notion d'expression algébrique comme modèle symbolique pour représenter des programmes de calcul et étudier leur équivalence.

b. Principaux genres de tâches

Les principaux genres de tâches constitutifs de cette organisation mathématique sont les suivants :

- $T_{P-Exp/Formule}$ Produire une expression algébrique pour résoudre un problème de généralisation, de preuve ou produire une formule,¹ c'est-à-dire une relation entre plusieurs variables non dissymétrisées, pour résoudre un problème de modélisation,
- T_T Traduire une expression algébrique dans un registre de représentation sémiotique et inversement,
- T_A Associer une expression algébrique à une représentation sémiotique dans d'autres registres.

Les types de tâches relatifs à chaque genre sont présentés dans le tableau 3.1. La liste des types de tâches n'est pas exhaustive.

La distinction entre les genres de tâches *Produire* et *Traduire* repose sur deux éléments. La première distinction relève du fait que, dans la production d'une expression, l'introduction d'une ou plusieurs lettres est à la charge de l'élève alors que ce n'est pas le cas dans la traduction. La deuxième distinction relève de la hiérarchie entre les deux genres de tâches. La production convoque la traduction. En effet, dans la résolution d'un problème de généralisation, de preuve ou de modélisation, la production d'une expression algébrique fait appel à la traduction entre un registre de représentation sémiotique et celui des écritures algébriques.

La distinction entre les genres de tâches *Traduire* et *Associer* relève du fait que, dans l'association, les deux représentations des objets ou relations mathématiques

1. Nous faisons ici le lien avec les formules. La production d'une expression algébrique précède la production d'une formule. En effet, lorsqu'un problème demande de produire une formule (« en fonction de »), c'est avant tout la production des deux expressions algébriques constituant les deux membres de la formule qui intervient.

sont données.

Parmi les types de tâches du genre *Traduire*, nous distinguons ceux qui demandent la traduction d'un registre de représentation vers celui des écritures algébriques, $T_{T-Registre \rightarrow Exp}$, de ceux qui demandent l'inverse $T_{T-Exp \rightarrow Registre}$. Dans le cas des programmes de calcul, le premier, $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$, concerne la traduction d'un programme de calcul en une expression algébrique, donc le passage de l'aspect procédural des expressions au structural, alors que le second $T_{T-Exp \rightarrow Prog}$ met en jeu le passage de l'aspect structural vers le procédural. Cette différence est étudiée dans les travaux de Bardini (2003).

c. Techniques pour T_T Traduire

Nous donnons ici des techniques génériques pour les genres de tâches *Traduire* et *Associer* car les techniques dépendent des registres sémiotiques et des expressions en jeu. Cette technique générique, notée $\tau_{Traduction}$, consiste à :

- Interpréter la relation mathématique. Cette interprétation peut-être plus moins complexe en fonction de la congruence sémiotique², c'est-à-dire si la traduction nécessite une reformulation ou non (cf. §2.2.1),
- Appliquer les règles de conversion entre le registre sémiotique en jeu et celui des écritures algébriques.

De même, nous donnons une technique générique pour le genre de tâches *Produire*, notée $\tau_{Produire}$:

- Convoquer une ou plusieurs lettres,
- Traduire la relation entre les registres sémiotiques à partir de la technique présentée ci-dessus.

d. Éléments technologiques

Le discours technologique s'appuie sur les règles de formation des expressions algébriques, sur les règles de conversion d'un registre de représentation sémiotique à un autre, sur le rôle des opérateurs $+$, $-$, \times , $:$ et $^{\wedge}$ (puissance) et des délimitants $(,)$, $[$ et $]$, et sur la hiérarchie des opérations (propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$).

2. La congruence sémiotique constitue une variable didactique du genre de tâches *Traduire*.

Genres	Types de tâches
Produire T_P	$T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ?
	$T_{P-Exp-Resultat-PC}$ Prouver le résultat d'un programme de calcul
	...
Traduire T_T	$T_{T-Exp-Prog}$ Traduire une expression algébrique par un programme de calcul Exemple : $(3+x)2-3x$ se traduit par « Choisir un nombre, ajouter 3, multiplier le résultat par 2 (ou prendre le double du résultat); soustraire le triple du nombre initial » (aspect procédural en jeu)
	$T_{T-Prog-Exp}$ Traduire un programme de calcul par une expression algébrique
	$T_{T-Exp-LgNat}$ Traduire une expression algébrique dans le langage naturel Exemple : $(3+x)2-3x$ est la différence entre le double de la somme d'un nombre x et de 3 et le triple de ce nombre (aspect structural en jeu)
	$T_{T-LgNat-Exp}$ Traduire une expression donnée en langage naturel par une expression algébrique Exemple : La différence entre le double de la somme d'un nombre x et de 3 et le triple de ce nombre se traduit par $(3+x)2-3x$
	$T_{T-Exp-Longueur}$, $T_{Exp-Perimetre}$, $T_{Exp-Aire}$, $T_{Exp-Volume}$, $T_{Exp-Angle}$ Traduire une expression algébrique comme, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle
	$T_{T-Longueur-Exp}$, $T_{Perimetre-Exp}$, $T_{Aire-Exp}$, $T_{Volume-Exp}$, $T_{Angle-Exp}$ Traduire, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle par une expression algébrique
	$T_{T-Relation-Formule}$ Traduire une relation entre deux grandeurs ou deux quantités par une formule Exemple : Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs.
	$T_{T-Formule-Relation}$ Traduire une formule par une relation entre deux grandeurs ou deux quantités Exemple : $E=6P$
	$T_{T-Pteari-Exp}$ Traduire une propriété d'un nombre par une expression algébrique Exemple : un entier impair s'exprime sous la forme $2n+1$ avec $n \in \mathbb{Z}$
	$T_{T-Exp-Pteari}$ Traduire une expression algébrique comme la propriété d'un nombre
	$T_{T-Arbre-Exp}$ Traduire un arbre par une expression algébrique
	$T_{T-Exp-Arbre}$ Traduire une expression algébrique par un arbre
	Associer T_A
$T_{A-Exp-Prog}$ Associer une expression algébrique à un programme de calcul et inversement (aspect procédural)	
$T_{A-Exp-LgNat}$ Associer une expression algébrique à une phrase en langage naturel (aspect structural) et inversement	
$T_{A-Relation-Formule}$ Associer une relation entre deux grandeurs ou deux quantités à une formule et inversement	

TABLEAU 3.1 – Les types de tâches de OM1

3.1.4 OM2, Équivalence des expressions algébriques

a. Présentation

OM2 est une organisation mathématique locale autour du concept d'expression algébrique. Elle aborde la question de l'équivalence des expressions rattachée à celle d'OM1 sur l'équivalence des programmes de calcul. Plusieurs caractéristiques des expressions sont concernées : leur dénotation, c'est-à-dire le fait que plusieurs expressions puissent avoir la même dénotation, leur sens et leur interprétation (au sens de Drouhard (1992)), correspondant à l'aspect sémantique des expressions ainsi que leurs aspects structural et procédural dans l'interprétation des expressions.

b. Principaux genres de tâches

Les principaux genres de tâches constitutifs de OM2 sont les suivants :

- $T_{Prouver-equiv}$ Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre,
- T_{Tester} Tester l'égalité de deux expressions,
- $T_{Structure}$ Identifier la structure d'une expression de type donné,
- $T_{Choisir}$ Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé.

Les types de tâches relatifs à chaque genre sont présentés dans le tableau 3.2.

Genres	Types de tâches
$T_{Prouver-equiv}$ Prouver	$T_{Prouver-equiv}$ Prouver que deux expressions algébriques (ne) sont (pas) égales pour toute valeur
T_{Tester} Tester l'égalité de deux expressions	T_{Tester} Tester l'égalité de deux expressions d'une ou de plusieurs variables
$T_{Structure}$ Identifier la structure	$T_{Structure-som}$ Identifier une somme algébrique de termes
	$T_{Structure-produit}$ Identifier un produit de facteurs
	$T_{Structure-carre}$ Identifier un carré
	$T_{Structure-cube}$ Identifier un cube
$T_{Choisir}$ Choisir	Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé
$T_{Associer}$ Associer	$T_{Associer}$ Associer deux expressions égales pour tout x Exemple : Associer les formes factorisées aux formes développées

TABLEAU 3.2 – Les types de tâches de l'OM2

c. Des techniques pour T_{Tester}

Les techniques associées au genre de tâches T_{Tester} peuvent être de plusieurs natures :

- $\tau_{Tester-1}$ Celle basée sur la dialectique de l’algébrique et du numérique qui consiste à tester l’égalité en calculant les expressions pour une ou plusieurs valeurs numériques. Cette technique convoque la substitution par une valeur numérique qui fait l’objet du type de tâches T_{C-num} de OM3 ,
- $\tau_{Tester-2}$ Celle qui consiste à tester l’égalité à partir des représentations graphiques des fonctions définies par les expressions. Cette technique est envisageable une fois l’étude des fonctions commencée,
- $\tau_{Tester-3}$ Celle basée sur les écritures algébriques qui consiste en une analyse symbolique des écritures algébriques, par exemple en comparant les coefficients des monômes de même degré ou les termes constants. Cette technique convoque l’identification de la structure, $T_{Structure}$.

Ces techniques peuvent être instaurées comme des moyens de vérification des calculs algébriques mais elles permettent seulement de conjecturer, d’augmenter le degré de certitude de l’égalité de deux expressions pour toutes les valeurs. Parfois, elles peuvent permettre d’obtenir une condition suffisante, par exemple, trois essais qui retournent la même valeur suffisent pour prouver l’équivalence dans le seconde degré; mais dans la plupart des cas, c’est une procédure de preuve (au sens de Balacheff (1987)) qui permet de s’assurer de l’équivalence de deux expressions.

d. Des techniques pour $T_{Prouver-equiv}$

Les techniques associées au type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ abordent la notion d’égalité des expressions pour toutes les valeurs de la lettre (égalité des polynômes). Elles peuvent être de plusieurs natures :

- $\tau_{Prouver-equiv-1}$ Celle basée sur la propriété d’égalité des polynômes « Deux polynômes à coefficients réels de degré au plus n qui coïncident en $n + 1$ valeurs sont égaux ». Elle consiste à tester l’égalité des expressions pour un nombre de valeurs suffisant dans le but de s’assurer de l’égalité des expressions. Par exemple, trois tests sur des valeurs différentes renvoyant la même valeur suffisent pour le second degré. Les programmes actuels du collège et de seconde rendent cette technique hors de la portée des élèves du collège.
- $\tau_{Prouver-equiv-2}$ Celle basée sur la propriété d’égalité des polynômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux ». Cette technique qui consiste, soit à s’appuyer sur la structure des expressions et à comparer les coefficients des monômes de même degré des écritures développées réduites après

transformation, soit à calculer la différence des deux expressions et montrer qu'elle est nulle.

- $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Celle basée sur la conjecture puis la preuve de l'équivalence des expressions. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ ou $\tau_{Tester-2}$ pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence ou non des expressions. Si elles ne le sont pas, elle consiste à donner un contre-exemple. Sinon, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre.

Au collège et au début du lycée, la technique la plus pertinente à mettre en œuvre est $\tau_{Prouver-equiv-3}$. Appuyée par la dialectique du l'algébrique et du numérique ou par le graphique, elle permet d'amener les élèves à appréhender la dénotation des expressions (elles dénotent le même nombre ou la même fonction en fonction du contexte). Dans le cas où c'est le numérique qui intervient, les aspects procédural et structural des expressions interviennent ce qui permet de faire le lien avec l'équivalence des programmes de calcul correspondant aux expressions. La technique $\tau_{Prouver-equiv-2}$ met en jeu une analyse symbolique des écritures algébrique et s'appuie sur la structure des expressions, ce qui la rend pertinente pour le niveau scolaire. $\tau_{Prouver-equiv-1}$ ne peut être attendue à ce niveau scolaire, la propriété en jeu est hors des programmes actuels du collège et de seconde.

e. Des techniques pour $T_{Structure}$

Une technique générique associée au genre de tâches $T_{Structure}$ consiste à identifier l'opérateur de plus haut niveau dans l'expression. Pour cela, les représentations des expressions mettant en jeu leur aspect structural comme la représentation en arbre ou la formulation en langage naturel peuvent être utilisées. Par exemple, l'expression $x(x + 3)$ est un produit de deux facteurs. L'opérateur de plus haut niveau est la multiplication et sa formulation en langage naturel est le produit de x par la somme de x et de 3.

f. Éléments technologiques

Le discours technologique qui permet de justifier ces techniques est centré sur la propriété d'égalité des polynômes : deux polynômes sont égaux pour tout réel si et seulement si ils sont de même degré et les coefficients des monômes de même degré

sont égaux. Au collège et au début du lycée, c'est la technique de conjecture et de preuve qui est principalement attendue. La conjecture s'appuie sur le test numérique ou graphique et la preuve s'appuie sur les propriétés du calcul algébrique permettant de s'assurer que l'équivalence est conservée dans les transformations algébrique. Pour prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur de la lettre, on utilise le calcul algébrique et, pour prouver que deux expressions ne sont pas égales, un contre-exemple suffit. Le discours technologico-théorique qui permet de justifier ces techniques fait appel à la quantification et est basé sur les règles de formation des expressions algébriques et sur le rôle des opérateurs $+$, $-$, \times , $:$ et $^{\wedge}$ et des délimitants $(,)$, $[\text{ et }]$. Il s'appuie au niveau théorique sur la dénotation et le sens des expressions et leurs aspects structural et procédural.

3.1.5 OM3, Algèbre des polynômes

a. Présentation

OM3 est une organisation mathématique locale autour de l'algèbre des polynômes qui s'appuie sur l'hypothèse de l'existence d'expressions équivalentes et pose la question de la transformation d'une expression en une autre, équivalente. En fin de scolarité obligatoire (16 ans en France), les polynômes considérés sont au maximum de degré 3 et les coefficients sont réels, même si, la plupart du temps, ils sont restreints aux entiers relatifs et aux fractions.

b. Principaux genres de tâches

Les genres de tâches constitutifs de OM3 sont les suivants :

- T_D Développer une expression algébrique de type donné,
- T_F Factoriser une expression algébrique de type donné,
- T_R Réécrire un monôme de type donné,
- T_C Calculer une expression algébrique.

Les types de tâches relatifs à chaque genre sont présentés dans le tableau 3.3. Nous renvoyons le lecteur à ce tableau pour une meilleure compréhension des notations utilisées.

Dans la classification du tableau 3.3, la présence des types de tâches $T_{FDA-mon+mon}$ et $T_{DDS-entier \times som}$ nécessite d'être précisée :

- la « réduction » d'une expression algébrique correspond au type de tâches $T_{FDA-mon+mon}$ *Factoriser une somme de monômes pour en donner la forme*

développée réduite. Il s'agit d'un cas particulier T_{FDA} Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun est apparent dans tous les termes.

- la « suppression des parenthèses », souvent mentionnée dans les manuels scolaires dans des expressions du type $-2(x + 3)$, correspond au type de tâches $T_{DDS-entier \times som}$ Développer une expression en appliquant la distributivité simple de la multiplication sur l'addition $k(a + b) = ka + kb$ où $k \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un cas particulier du type $T_{DDS-mon \times som}$ Développer un produit de deux facteurs du type « monôme \times somme » avec la distributivité simple de la multiplication sur l'addition.

c. Une technique générique d'instanciation

Les techniques utilisées pour réaliser ces genres de tâches sont basées sur la technique générique d'instanciation, notée $\tau_{Instanciation}$, c'est-à-dire l'instanciation des règles de calcul et des conventions du calcul algébrique. Les techniques spécifiques dépendent des expressions algébriques. Par exemple, prenons le type de tâches $T_{FIR-diff}$ impliquant la factorisation d'une différence de deux carrés sur l'expression $64x^2 - 49$. La technique d'instanciation consiste à :

1. $T_{Structure}$: Reconnaître la structure de l'expression afin de déterminer la propriété à appliquer comme une différence de deux termes, sans facteur commun apparent,
2. Réécrire l'expression sous la forme d'une différence de deux carrés, convoquant $T_{R-carre}$: $64x^2 - 49 = 8^2x^2 - 7^2 = (8x)^2 - 7^2$,
3. Appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$: $(8x)^2 - 7^2 = (8x - 7)(8x + 7)$.

Certains types de tâches impliquent la convocation d'autres. Dans cet exemple, $T_{Structure}$ Identifier la structure de l'expression (type de tâches constitutif de OM2) et $T_{R-carre}$ Réécrire un monôme sous la forme d'un carré sont convoqués. La convocation de types de tâches dans les techniques est à la charge des élèves (elles interviennent au niveau R-convoqué) ce qui peut être source de difficultés. Pour des expressions de complexité faible, une reconnaissance de la forme de l'expression à partir des seuls ostensifs peut suffire pour réussir la transformation d'une expression sans que les types de tâches intermédiaires aient été convoquées. Ce fonctionnement de OM3 au seul niveau syntaxique, pour des expressions simples, peut amener à rarement faire le lien avec OM2. Nous montrons dans le paragraphe 3.4 que c'est

Genres	Types de tâches
T_D Développer	$T_{DDS-mon \times som}$ Développer un produit de deux facteurs avec la distributivité simple de la multiplication sur l'addition Exemple : $x(x + 3)$
	$T_{DDS-entier \times som}$ Développer une expression en appliquant la distributivité simple de la multiplication sur l'addition $k(a + b) = ka + kb$ où $k \in \mathbb{R}$ Exemples : $-2(x + 3)$, appelé « Supprimer les parenthèses »
	$T_{DDD-som \times som}$ Développer un produit de deux facteurs avec la double distributivité de la multiplication sur l'addition Exemple : $(3x + 2)(x - 3)$
	$T_{DIR-som \times diff}$ Développer un produit de deux facteurs du type $(a + b)(a - b)$ Exemple : $(x - 3)(x + 3)$
	$T_{DIR-car}$ Développer un carré Exemple : $(x - 3)^2$
T_F Factoriser	T_{FA} Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun est apparent dans tous les termes – $T_{FA/mon} = T_{FA}$ sur des monômes : $(2x)^2 + 2x$ ou $7x + 7 \times 3$ – $T_{FA/som} = T_{FA}$ sur des sommes : $x(2x + 1) + (2x + 1)(x + 5)$
	$T_{FA-mon+mon}$ Factoriser une somme de monômes pour en donner la forme développée réduite Exemple : $5x + 3 + 2x$, appelé « Réduire »
	T_{FA^*} Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun est apparent dans un des termes – $T_{FA^*/mon} : 4x^2 + 2x$ ou $7x + 21$ – $T_{FA^*/som} : x(2x + 1) + (4x + 2)(x + 5)$
	T_{FNA} Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun n'est pas apparent – $T_{FNA/mon} : 16x + 12x^2$ – $T_{FNA/som} : (4x)^2 + 6x(2x + 1)$
	$T_{FIR-diff}$ Factoriser une différence de deux carrés Exemple : $64x^2 - 49$
	$T_{FIR-som}$ Factoriser une somme algébrique de trois termes du type $a^2 \pm 2ab + b^2$ Exemple : $x^2 + 2x + 1$
	T_R Réécrire un monôme
T_C Calculer	T_{C-num} Calculer la valeur d'une expression algébrique en donnant aux variables des valeurs numériques Exemple : $x^3 - 2x + 3(x + 2)$ pour $x = 2$
	$T_{CDS-num}$ Calculer une exp. numérique en utilisant la distributivité simple Exemple : $8 \times 93 + 2 \times 93$ ou 103×15
	$T_{CIR-num}$ Calculer une exp. numérique en utilisant des identités remarquables Exemple : 102^2 ou 99×101
Notation. $DDS/DDD/DDIR$: Développer par la Distributivité Simple/Double/ Identité Remarquable $FA/FA^*/FNA$: Factoriser par Distributivité avec facteur commun Apparent/ Apparent dans un des termes/ Non Apparent FIR : Factoriser par Identité Remarquable; CDS, CIR : Calculer par Distributivité Simple/Identité Remarquable	

TABLEAU 3.3 – Les types de tâches constitutifs de OM3

ce qui se produit dans la plupart des manuels du collège où l'aspect syntaxique des expressions est davantage privilégié dans OM3.

d. Éléments technologiques

Les éléments technologiques qui permettent d'expliquer et justifier la transformation d'une expression en une autre peuvent être décrits par les propriétés et les conventions d'écritures du calcul algébrique. Nous rappelons celles qui structurent l'organisation des programmes du collège :

- Distributivité simple de la multiplication sur l'addition : pour tous nombres a , b et c , on a $a(b + c) = ab + ac$,
- Distributivité double de la multiplication sur l'addition : pour tous nombre a , b , c et d on a $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$,
- Identités remarquables : pour tous nombres a et b , on a $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,
- Convention d'écriture du signe \times : $a \times b$ se note ab pour tous nombres a et b ,
- Convention d'écriture sur les puissances : $a \times a$ se note a^2 pour tout nombre a .

Les propriétés et les conventions du calcul algébrique sont caractérisées, au niveau théorique par les propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$ et de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

3.1.6 Conclusion

En conclusion, l'OM de référence, relative aux expressions algébriques définies, s'organise en une OM régionale, qui intègre trois OM locales intimement liées. La manipulation des expressions algébriques (développer, factoriser), constitutive de OM3, trouve d'une part des raisons d'être dans OM1 à travers des problèmes de généralisation conduisant à l'étude de programmes de calcul équivalents et, d'autre part, des moyens de contrôle de la conservation de l'équivalence dans OM2. De plus, OM2, qui concerne l'équivalence des expressions, trouve aussi ses raisons d'être dans OM1. C'est donc une agrégation entre OM1, OM2 et OM3 qui donne du sens aux expressions algébriques et à leur manipulation.

Les liens entre les trois OM locales provient notamment du fait que la convocation de certains types de tâches d'une OM locale implique la convocation d'autres types de tâches de cette OM locale ou des autres. Nous donnons ici les trois exemples les plus représentatifs et qui sont au cœur de nos analyses :

1. Les genres de tâches de *Factoriser* et *Développer* (OM3) convoquent $T_{Structure}$ (OM2) et T_R (OM3).
2. Le genre de tâches $T_{Prouver-equiv}$ (OM2) convoque $T_{Structure}$ (OM2), T_{Tester} (OM2) et T_D (OM3).
3. Le type de tâches $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ *Prouver que deux programmes de calcul sont équivalents* (OM1) convoque :
 - la mobilisation d’une lettre,
 - la traduction avec $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ (OM1),
 - la preuve que deux expressions sont équivalentes et donc
 - la reconnaissance de la structure $T_{Structure}$ (OM2),
 - le test par des valeurs numériques T_{Tester} (OM2),
 - le développement T_D (OM3).

Selon nous, c’est la convocation des différents types de tâches impliqués dans la convocation du type de tâche principal qui peut rester implicite dans l’enseignement. Nous nous interrogeons notamment pour déterminer si le caractère implicite de la convocation de types de tâches « cachés » n’est pas accentué par les discours technologiques, les organisations didactiques et le curriculum praxique (Castela, 2007) que les élèves ont rencontrés.

Cette OM de référence nous donne des critères pour l’analyse praxéologique des programmes, du document d’accompagnement et des manuels du collège et de seconde qui est présentée dans le paragraphe suivant. Il s’agit de repérer comment les trois OM interviennent dans les rapports institutionnels à l’algèbre attendus au collège et en seconde et comment leur agrégation y est organisée.

3.2 Questions et méthodologie

Nous adoptons une approche écologique et praxéologique pour interpréter l’OM à enseigner relative aux expressions, au collège et en seconde. Elle caractérise le rapport institutionnel attendu à l’algèbre élémentaire en fin de scolarité obligatoire. Elle transparait dans les programmes officiels, le document d’accompagnement *Du numérique au littéral au collège de 2008*³, les manuels scolaires et les épreuves du brevet des collèges. L’OM à enseigner en seconde est analysée, afin d’éclairer et de mettre en perspective celle du collège.

3. Ce document est téléchargeable à l’adresse : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Notre étude s'organise en trois parties : (1) l'analyse de l'OM à enseigner développées dans les programmes officiels et le document d'accompagnement au collège et au lycée (§3.3), (2) celle dans les manuels scolaires (§ 3.4) et, enfin, (3) une synthèse des caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner à l'issue de laquelle nous mettons en évidence des savoirs et savoir-faire implicites (§3.5). Les références des programmes et des manuels retenus sont précisées dans les paragraphes 3.3.1 et 3.4.1. Chacune de ces études s'organise en deux temps : une étude de l'OM globale des programmes relativement à l'algèbre précède une analyse plus fine de l'OM régionale sur les expressions algébriques. Cette deuxième analyse est menée à la lumière de l'OM de référence présentée en 3.1. Dans un premier temps, nous adoptons une approche écologique pour porter un regard global sur l'habitat et la niche de l'algèbre dans les programmes et les manuels. La structure des programmes et des manuels est étudiée relativement aux différents niveaux de codétermination didactique : domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude (Chevallard, 1999, 2003). Les questions suivantes nous animent :

- Quel est l'habitat de l'algèbre? Où et comment apparaît-il dans les programmes officiels et dans les manuels?
- Quelle est la fonction de l'algèbre? A quelle fin est-elle introduite? Quelles en sont les raisons d'être?
- Avec quels objets est-elle mise en relation? Comment sont mises en œuvre ces relations?

Dans un deuxième temps, nous analysons plus finement les praxéologies en jeu, concernant les expressions algébriques. L'analyse des programmes officiels, du document d'accompagnement et des manuels s'attache à décrire, en référence aux trois OM locales de l'OM de référence, les types de tâches rencontrés, les techniques mathématiques développées et le discours technologico-théorique qui permet de justifier les techniques.

- Les types de tâches des trois OM locales apparaissent-ils dans les programmes et les manuels?
- Les raisons d'être sont-elles travaillées? Si oui, quelles sont-elles?
- Quelles sont les relations entre ces types de tâches? Comment s'agrègent ces types de tâches par rapport aux OM locales et régionales de référence? Sont-elles travaillées uniquement au niveau ponctuel et indépendamment les unes des autres? La convocation des types de tâches impliqués dans la résolution d'un autre de la même OM locale ou d'une différente est-elle présentée?
- Quelles sont les techniques associées à chaque type de tâches?

- Quelles sont les technologies et théories les justifiant ? Sont-elles explicitées ?
- Quels rôles sont attribués aux ostensifs dans la conduite du calcul algébrique ?

Pour chaque OM locale, nous relevons les types de tâches qui interviennent. Et, pour les manuels, nous analysons *a priori* les tâches pour dégager les types de tâches convoqués, leur fréquence, les techniques développées et les discours technologico-théoriques qui les justifient.

3.3 Analyse des programmes

3.3.1 Les programmes étudiés

Les programmes étudiés sont ceux en vigueur pour la rentrée scolaire 2011 : le bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008 pour le collège et le bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009 pour la classe de seconde. L'analyse des programmes du collège de 2008 est mise en perspective par rapport aux programmes antérieurs : ceux de l'arrêté du 10 janvier 1997 relatif aux programmes du cycle central des collèges (classes de 5^e et de 4^e) et le bulletin officiel spécial n°10 pour la classe de 3^e.

3.3.2 A propos de l'organisation des programmes

L'analyse anthropologique s'appuie sur l'étude de la structuration des programmes.

Depuis 2008, les programmes du collège sont structurés en quatre rubriques pour chaque niveau scolaire : « *Organisation et gestion de données, fonctions* », « *Nombres et Calculs* », « *Géométrie* », « *Grandeurs et mesures* ». Pour chaque rubrique, ils s'organisent dans une présentation en colonnes intitulées « *Connaissances* », « *Capacités* » et « *Commentaires* ». Les « *capacités* » exigibles dans le socle commun sont clairement identifiées. Les « *connaissances* » renvoient à ce que les élèves doivent savoir comme les définitions, les propriétés ou les théorèmes alors que les « *capacités* », exprimées avec des verbes d'action, renvoient à ce que les élèves doivent savoir faire⁴. Par exemple, en cinquième, la « *capacité* » *Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens* relève de la « *connaissance* » *Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition*. Du point de vue de l'approche anthropologique, Chevallard écrit :

4. Le guide « *Enseigner et apprendre les mathématiques en 4^e* » qui accompagne le manuel de mathématiques de 4^e chez Didier de la collection *Horizon* sous la direction de J.-F. Chesné et M.-H. Le Yaouanq a une interprétation des programmes conforme à celle que nous adoptons.

« Le bloc $[\theta, \Theta]$ est, ordinairement, identifié comme un savoir (alors que le bloc $[T, \tau]$ constitue un savoir-faire) » (Chevallard, 1998, p. 5).

C'est pourquoi nous interprétons les « capacités » comme des ingrédients du bloc pratico-technique ($[T, \tau]$) et les « connaissances » comme des ingrédients du bloc technologico-théorique ($[\theta, \Theta]$). Les commentaires apportent parfois des informations complémentaires qui nous aideront à définir les types de tâches, les techniques, les éléments technologiques et théoriques ou les intitulés des différents niveaux de co-détermination didactique. Par exemple, le commentaire « *Utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques* » peut amener à l'évaluation d'expressions algébriques pour des valeurs numériques ou bien à des tâches de calcul réfléchi.

Les programmes de seconde ont une organisation similaire. Les domaines d'études sont au nombre de trois : *Fonctions, Géométrie, Statistiques et probabilités*. Ils s'organisent en colonnes intitulées « Contenus », « Capacités » et « Commentaires ».

3.3.3 A propos de la terminologie adoptée

Il convient de situer la terminologie employée dans notre travail par rapport à celle des programmes officiels en France au collège et en seconde. Dans les instructions officielles, les termes « *algébrique* » et « *littéral* » sont utilisés en fonction du niveau scolaire. En effet, les termes « *calcul littéral* » et « *expression littérale* » sont privilégiés pour le collège. Ils disparaissent en seconde au profit des termes « *calcul algébrique* » et « *expression algébrique* ». Ceci peut s'expliquer par le fait qu'en seconde, l'algèbre est un outil au service des fonctions. Face à ces termes différents, il a semblé pertinent, pour faciliter la clarté de notre travail, de n'en retenir qu'un. Pour rester dans la continuité des travaux de didactique de l'algèbre, le terme « *algébrique* » s'est imposé. Nous utiliserons dans la suite les termes de « *calcul algébrique* » et « *expression algébrique* ».

L'absence du terme « *algèbre* » dans les programmes scolaires est notable. Chevallard et Bosch (2012) soulignent qu'il a en fait disparu :

Le substantif algèbre apparaît encore dans le texte de ces programmes [ceux des années 1980], où il a trois occurrences ; il n'apparaît plus du tout dans le texte des programmes actuels.

Dans ce qui suit, nous adoptons une approche écologique pour porter un regard global sur l'habitat et la niche de l'algèbre dans les programmes scolaires du collège et de seconde.

3.3.4 Analyse écologique

a. Au collège : trois habitats pour l'algèbre

Comme nous l'avons dit, les programmes du collège de 2008 sont structurés en quatre rubriques pour chaque niveau scolaire : « *Organisation et gestion de données, fonctions* », « *Nombres et Calculs* », « *Géométrie* », « *Grandeurs et mesures* ». Nous identifions ces rubriques au niveau du domaine d'étude dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique. Les contenus relatifs à l'algèbre en 2008 apparaissent dans trois domaines : « *Organisation et gestion de données, fonctions* », « *Nombre et Calculs* » et « *Grandeurs et mesures* » ce qui met en évidence trois habitats pour l'algèbre (cf. tableau 3.4). Notons que, même si l'algèbre intervient comme outil explicite au service du calcul analytique, aucun contenu relatif à l'algèbre n'apparaît explicitement dans le domaine « *Géométrie* ». Nous n'étudierons pas cet aspect.

Classe	Organisation et gestion de données, fonctions	Nombres et Calculs	Grandeurs et mesures	Géométrie
5 ^e	x	x		
4 ^e		x		
3 ^e	x	x	x	

TABLEAU 3.4 – Présence de l'algèbre au collège en fonction des domaines et des niveaux scolaires dans les programmes de 2008

Le domaine « *Nombre et calculs* » se découpe en deux secteurs : les expressions algébriques et les équations.

Les programmes de 1997 et 1998 sont structurés différemment. Trois domaines d'étude les composent : « *Travaux géométriques* », « *Travaux numériques* », « *Organisation et gestion de données, fonctions* ». Les contenus relatifs à l'algèbre apparaissent dans les domaines « *Travaux numériques* », « *Organisation et gestion de données, fonctions* » ce qui met en évidence deux habitats pour l'algèbre (cf. tableau 3.5).

Classe	Travaux numériques	Organisation et gestion de données, fonctions	Travaux géométriques
5 ^e	x		
4 ^e	x		
3 ^e	x	x	

TABLEAU 3.5 – Présence de l'algèbre au collège en fonction des domaines et des niveaux scolaires dans les programmes de 1997 et 1998

Deux différences concernant les habitats entre les versions de 1997-1998 et 2008

sont notables et conduisent à interroger l'évolution de la niche écologique de l'algèbre dans les instructions officielles. La première concerne la présence de l'algèbre en 5^e dans « *Organisation et gestion de données, fonctions* » en 2008 : dans quelle mesure ce nouvel habitat a-t-il un rôle dans l'introduction de l'algèbre ? La seconde concerne l'apparition de l'algèbre, en 2008, dans le nouveau domaine « *Grandeurs et mesures* » : quelle est la fonction occupée par l'algèbre ?

Pour analyser la niche de l'algèbre, les contenus des programmes de 1997, 1998 et 2008 sont interprétés, pour chaque niveau scolaire et domaine d'étude, selon les trois niveaux de codétermination : secteurs, thèmes et sujets d'études. Lorsque cela était pertinent, nous avons conservé les commentaires. Cette interprétation des programmes, présentée dans les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8, éclaire sur l'OM globale à enseigner au collège en 2008 et sur ses évolutions par rapport aux versions antérieures.

Premièrement, l'apparition de l'algèbre en classe de 5^e dans le domaine « *Organisation et gestion de données* » sous les sujets d'étude « *Utiliser et produire une expression littérale* » marque un tournant dans la fonction donnée à l'algèbre dès son introduction. La production d'expressions algébriques apparaît pour la première fois explicitement pour résoudre des problèmes de généralisation, de modélisation et de mise en équation au collège. Or, comme nous l'avons déjà souligné dans l'OM de référence, c'est à travers ces problèmes que les expressions algébriques trouvent leur raison d'être. Cette évolution marque une volonté d'introduire l'algèbre non plus comme une arithmétique généralisée (Chevallard, 1985b ; Gascón, 1994) mais comme un outil au service de la résolution de problèmes de généralisation ou de preuve. Cela offre l'occasion de motiver l'introduction de l'algèbre, par exemple en lien avec l'étude de l'équivalence des programmes de calcul et de faire les liens entre les trois OM locales, comme nous l'avons souligné dans l'OM de référence (cf. §3.1). Cependant, on peut s'interroger sur la façon dont cette évolution est prise en compte par les enseignants et les auteurs des manuels.

Deuxièmement, depuis 2008, la preuve et la résolution de problèmes pris dans des contextes divers occupent une place importante dans les commentaires et objectifs des programmes. Donner du sens aux lettres et au calcul algébrique et favoriser la construction d'une rationalité algébrique chez les élèves en sont les principales raisons. Le recours à l'algèbre, dont l'initiation est amorcée en sixième par l'utilisation de formules (aire, périmètre,...), est instauré en classe de cinquième. À partir de la classe de quatrième, l'accent est mis sur l'utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes et, depuis 2008, pour prouver des résultats. Des problèmes arithmétiques,

de modélisation, de généralisation, de preuve et de mise en équation peuvent être convoqués pour travailler les différentes directions de travail soulevées dans cet extrait des commentaires relatifs à la section « *Calcul littéral* » en quatrième, dans les programmes de 2008 :

- « *Les travaux se développent dans trois directions :*
- *utilisation d’expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;*
 - utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;
 - utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). »⁵

Troisièmement, la présence de l’algèbre, en 2008, dans « *Grandeurs et mesures* », même discrète, encourage à l’utilisation d’expressions et de formules dans le cadre des grandeurs.

Ainsi, la mise en perspective des programmes de 2008 avec ceux de 1997 et 1998 met en évidence des évolutions dans l’habitat et la niche de l’algèbre et plus particulièrement des expressions algébriques. Depuis 2008, elle apparaît davantage comme outil de modélisation dans la résolution de problèmes. Néanmoins, l’algèbre apparaît dispersée entre ses trois habitats. Les programmes apportent peu d’éléments concrets sur la façon dont ils s’articulent. Des OM ponctuelles sont développées et doivent s’agrèger en des OM locales, régionales et globales qui trouvent leurs raisons d’être dans l’articulation entre les sujets d’étude développés. Seuls des éléments généraux ou des pistes à suivre sont donnés. Par exemple, en 5^e, en 2008, il est ajouté en commentaire « *de nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine “Grandeurs et mesures”, conduisent à utiliser des expressions littérales* ». De même, en 4^e, les types de tâches explicités sont dans la rubrique « *Nombres et calculs* » mais les commentaires précisent que les travaux s’orientent vers l’utilisation de l’algèbre (extrait cité plus haut). L’analyse praxéologique qui suit (§3.3.5) éclairera sur la façon dont les OM ponctuelles s’agrègent.

b. En seconde : un habitat pour l’algèbre

Dans la classe de seconde, les programmes sont structurés en trois domaines d’études : « *Fonctions* », « *Géométrie* » et « *Statistiques et probabilités* ». Les contenus relatifs à l’algèbre apparaissent dans celui intitulé « *Fonctions* » (tableau 3.9), ce qui met en évidence que la niche de l’algèbre se réalise dans le contexte de la résolution de problèmes fonctionnels. Cette répartition est la même dans les programmes précédents de la classe de seconde, présentés dans le bulletin officiel spécial n°2 du

5. Les deux dernières phrases sont en italique dans le texte. Elles indiquent des points du programme qui ne sont pas exigibles pour le socle commun.

30 août 2001. Le principal habitat de l'algèbre est le domaine des fonctions. C'est la fonctionnalité de l'algèbre qui est visée en seconde, ce qui marque une différence importante avec les programmes du collège. Le développement de la maîtrise du calcul algébrique s'appuie sur l'anticipation et l'intelligence du calcul. Il est travaillé au service de la résolution de problèmes fonctionnels.

c. La place de l'algèbre du collège à la seconde

L'habitat et la niche de l'algèbre évoluent entre le collège et la seconde. Au collège, l'algèbre est travaillée dans trois domaines alors, qu'en seconde, l'algèbre est principalement travaillée au service des fonctions. Cette évolution dans les habitats nécessite d'être prise en compte dans notre étude. Elle peut être responsable de décalages entre le rapport à l'algèbre attendu en seconde et celui attendu en troisième. Ces décalages peuvent éclairer sur d'éventuels apprentissages laissés implicites et non problématisés au collège mais nécessaires pour la seconde.

d. Conclusion sur l'analyse écologique des programmes

En conclusion, l'analyse écologique montre des évolutions dans les niches et les habitats de l'algèbre, d'une part, par rapport aux programmes du collège de 1997 et 2008, et, d'autre part, entre la classe de troisième et la classe de seconde. Cette analyse n'explique pas suffisamment les liens entre les différents domaines concernés par l'algèbre. C'est pourquoi nous avons étudié les programmes de façon plus approfondie au niveau des thèmes et des sujets d'étude en prenant comme point d'appui l'OM de référence définie plus haut.

Domaine	Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
5 ^e , 1997			
Travaux numériques	Introduction. <i>Comme en 6^e, la résolution de problèmes constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Ces problèmes, en associant à une situation donnée une activité numérique, renforcent le sens des opérations et des écritures numériques et littérales figurant au programme et développent les qualités d'organisation et de gestion de données numériques. Il convient donc de ne pas multiplier les activités techniques pures.</i>		
	Enchaînement d'opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition	Développer avec la distributivité simple Factoriser avec la distributivité simple
	Initiation à la notion d'équation	Égalité	Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques
5 ^e , 2008			
Nombres et calculs	Objectifs. <i>La résolution de problèmes a pour objectifs : [...]</i> – de familiariser les élèves aux raisonnements conduisant à des expressions littérales – d'apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation		
	Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers	Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition	Développer avec la distributivité simple Factoriser avec la distributivité simple
	Initiation à la notion d'équation	Égalité	Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques
	Commentaires. <i>L'intégration des lettres dans ce type d'égalité est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numériques ou géométriques.</i>		
Organisation et gestion de données, fonctions	Expressions littérales	Expressions littérales	Utiliser une expression littérale Produire une expression littérale
	Commentaires. <i>De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules).</i>		

TABLEAU 3.6 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 5^e dans les programmes de 1997 et de 2008

Domaine	Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
4 ^e , 1997			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Développement	Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques
			Développer des expressions du type $(a + b)(c + d)$
			Réduire une expression littérale à une variable du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$
	Commentaires. <i>L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement en cherchant des situations qui permettent aux élèves de donner du sens à l'introduction de ce type de calcul. Le travail proposé s'articule en deux axes :</i> <ul style="list-style-type: none"> – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers. 		
4 ^e , 2008			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Développement	Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques
			Développer des expressions du type $(a + b)(c + d)$
			Factoriser une expression avec un facteur commun du type a , ax , x^2
	Réduire une expression littérale à une variable du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$		
Commentaires. <i>L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. Le travail proposé s'articule autour de trois axes :</i> <ul style="list-style-type: none"> – utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; – utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). 			

TABLEAU 3.7 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 4^e dans les programmes de 1997 et de 2008

Domaine	Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
3 ^e , 1998			
Travaux numériques	Écritures littérales, identités remarquables	Factorisation	Factoriser des expressions telles que : $(x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$; $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$
		Identités remarquables	Factoriser une expression algébrique avec une identité remarquable
			Développer une expression algébrique avec une identité remarquable
Commentaires. <i>Les travaux s'articuleront sur deux axes :</i> – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers.			
Organisation et gestion de données, Fonctions	Fonctions linéaires, fonctions affines	Fonction linéaire	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image
3 ^e , 2008			
Nombres et calculs	Écritures littérales	Factorisation	Factoriser une expression algébrique avec un facteur commun apparent
		Identités remarquables	Factoriser une expression algébrique avec une identité remarquable
			Développer une expression algébrique avec une identité remarquable
Commentaires. <i>Les travaux se développent dans trois directions :</i> – utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; – utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).			
Organisation et gestion de données, fonctions	Fonctions linéaires, fonctions affines	Coefficient directeur de la droite représentant une fonction linéaire	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image
Grandeurs et mesures	Introduction. <i>Comparer des aires, des volumes, des figures ou des objets à partir d'expressions algébriques.</i>		

TABLEAU 3.8 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 3^e dans les programmes de 1998 et de 2008

Domaine	Secteurs	Thèmes	Sujets d'étude
2 ^{de} , 2009			
Fonction	Fonctions	Image, antécédent, courbe représentative	Traduire le lien entre deux quantités par une formule
	Expressions algébriques	Transformation d'expression algébrique en vue de la résolution de problème	Associer à un problème une expression algébrique
			Identifier la forme la plus adéquate d'une expression en vue de la résolution du problème donné
			Développer des expressions polynomiales et rationnelles simples
			Factoriser des expressions polynomiales et rationnelles simples
Commentaires. <i>Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.</i>			

TABLEAU 3.9 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude en classe de 2^{de} dans les programmes de 2009

3.3.5 Analyse praxéologique

L'analyse des programmes de 2008 pour le collège et de 2009 pour la classe de seconde est menée à partir des trois OM locales qui définissent l'OM régionale de référence relativement aux expressions algébriques. Notre étude est complétée par l'analyse du document d'accompagnement des programmes du collège.

Une partie de cette étude consiste à repérer les types de tâches présents de chaque OM locale puis les techniques et les éléments technologiques et théoriques mobilisés dans les programmes. Cela a parfois nécessité une interprétation des programmes. En effet, certaines « capacités » et « connaissances », spécifiées dans les programmes, donnent lieu directement à des types de tâches alors que d'autres sont sous-entendues par les commentaires ou les objectifs. Par exemple, le commentaire « *Les activités de comparaison d'aires d'une part, et de volumes d'autre part, de figures ou d'objets obtenus par agrandissement ou réduction, sont, en particulier, autant d'occasions de manipulations de formules et de transformations d'expressions algébriques* » (troisième, domaine « *Grandeurs et mesures* », 2008) peut donner lieu à plusieurs types de tâches comme ceux du genre *Traduire une expression algébrique dans un registre de représentation sémiotique et inversement* ou *Produire une expression pour résoudre un problème*.

a. OM1 - Génération des expressions algébriques

Au collège, les types de tâches du genre *Produire une expression algébrique* sont présents explicitement pour la première fois depuis 2008. Cette présence offre la possibilité d'introduire les expressions algébriques en amenant à considérer les programmes de calcul non plus uniquement comme des processus mais comme des résultats. Or, dans la présentation de OM1 (§ 3.1.3), nous avons déjà souligné l'importance de ces raisons d'être dans le premier processus d'algébrisation. Cependant, les programmes sont silencieux sur le rôle joué par la production d'expression relativement à l'introduction des expressions. Seul le document d'accompagnement, dont on peut s'interroger sur l'usage qu'en font les enseignants et les auteurs de manuels, apporte des éléments. La situation du carré bordé (cf. figure 3.3) sert d'exemple pour montrer comment un problème de généralisation peut permettre de motiver, d'une part, l'introduction de l'algèbre comme modèle symbolique de processus de calcul, et, d'autre part, l'introduction des propriétés du calcul algébrique à partir de l'existence de processus et donc d'expressions équivalentes. Cette situation répond à la question génératrice de la première étape du processus d'algébrisation de

Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012) (cf. §3.1). Cette situation consiste à :

Établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre [figure 3.3], quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

Dans un premier temps, les élèves sont invités à déterminer le nombre de carreaux grisés pour des valeurs déterminées du nombre de carreaux sur le côté du carré, puis, dans un second temps, à formuler en langage naturel une méthode de calcul, et, dans un dernier temps, à produire une formule mathématique. La nécessité d'avoir à désigner le nombre de carreaux sur le côté justifie l'emploi d'une lettre. Les méthodes de calcul utilisées et par conséquent les formules produites sont diverses. [...]

Dans le problème du nombre de carreaux grisés, la diversité des méthodes de calcul et des formules produites amène la question de l'équivalence des expressions. Celle-ci peut être testée sur des valeurs numériques avant d'être prouvée en ayant recours au calcul littéral. Dans les transformations d'écritures ainsi effectuées, la lettre acquiert un statut d'indéterminée symbolisant un nombre quelconque. (Document d'accompagnement « Du numérique au littéral » de 2008, p.2)

Exemple de problème : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

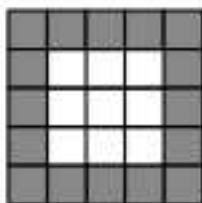


FIGURE 3.3 – La situation du carré bordé dans le document d'accompagnement « Du numérique au littéral » de 2008

Le document d'accompagnement met en avant toutes les potentialités de cette situation. Les différentes interprétations du nombre de carrés grisés sont exploitées pour faire émerger l'existence d'expressions équivalentes. Sa mise en œuvre peut s'appuyer sur l'utilisation du tableur et faire le lien avec le numérique. Son prolongement peut conduire à travailler différents statuts du signe d'égalité et de la lettre comme ceux de variable, d'indéterminée, d'inconnue ou encore de paramètre :

Un prolongement à la situation du nombre de carreaux grisés consiste à poser le problème de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal, par exemple à 112 ou à 74. [...]

A propos de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré quand le nombre de carreaux hachurés est connu, l'existence de solution dépend des valeurs attribuées à ce dernier nombre. Un prolongement à ce problème consiste à déterminer des valeurs du nombre N de carreaux grisés pour lequel le problème a une solution, ce qui peut conduire à discuter, par exemple, l'existence

d'une solution à l'équation $4n - 4 = N$ où la lettre N a alors le statut de paramètre. (Document d'accompagnement Du numérique au littéral » de 2008, p.2 et p.3)

De plus, l'étude de programmes de calcul équivalents à partir de leur modélisation symbolique présente des potentialités pour amener les élèves à un travail sur les expressions au niveau structural et non seulement au niveau procédural.

« La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». Pour rééquilibrer l'enseignement des deux aspects, l'étude du type de problèmes « Les programmes de calcul que traduisent deux expressions algébriques sont-ils équivalents ? » permet de motiver le travail « structural » sur les expressions algébriques, qui nécessite l'identification de la forme d'une expression et souvent le changement de cette forme (transformation), selon le but poursuivi. On est alors conduit à apprendre aux élèves à déterminer la forme d'une expression, selon des catégories qui évoluent au cours de l'enseignement. Savoir si une expression est une somme ou un produit est une tâche incontournable, que l'élève doit à terme savoir faire seul, sans indication de la part du professeur ou de l'énoncé de l'exercice. » (Document d'accompagnement « textitDu numérique au littéral » de 2008, p.5)

Les types de tâches du genre *Traduire* sont sous-entendus par des commentaires ou des objectifs faisant le lien entre l'utilisation des expressions algébriques et le domaine des grandeurs et mesures⁶. Le fait que ces types de tâches n'apparaissent pas explicitement comme sujet d'étude laisse supposer la délicate articulation entre la transformation des expressions algébriques avec des contextes qui leur donnent du sens. Le lien avec les différents registres de représentation pour travailler les deux aspects « procédural » et « structural » des expressions est mis en exergue dans le document d'accompagnement du collège :

« On peut faire un parallèle, en géométrie, avec la description d'une figure (aspect « structural ») et un programme de construction qui permet de la réaliser (aspect « procédural »). » (Document d'accompagnement Du numérique au littéral » de 2008, p.5)

En seconde, la situation est différente puisqu'il ne s'agit plus d'introduire les expressions algébriques mais de les rattacher au domaine des fonctions. La production et la traduction figurent explicitement comme sujet d'étude : *Traduire le lien entre deux quantités par une formule.*

b. OM2 - Équivalence des expressions algébriques

Les questions relatives à l'équivalence et la structure des expressions ne figurent pas dans les programmes du collège. Le seul type de tâches constitutif de OM2 qui

6. Voir par exemple les extraits de commentaire dans les tableaux 3.6 et 3.7 et la phrase d'introduction au domaine *Grandeurs et mesures* dans le tableau 3.8.

apparaît dans les programmes du collège est : *Tester l'égalité de deux expressions en leur attribuant des valeurs numériques*. Il est présent en cinquième sous la forme *Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques*. Il est rattaché au secteur des équations et non à celui des expressions algébriques (tableau 3.6), ce qui place davantage le statut de la lettre comme inconnue et non comme variable. Il permet de travailler le statut d'équivalence dans le contexte d'équation et non dans le contexte d'identité ce qui nécessite une quantification.

Si les programmes laissent implicites l'équivalence et la structure des expressions, le document d'accompagnement les mentionnent de manière explicite. Les principaux types de tâches de OM2 apparaissent dans le document d'accompagnement.

Les types de tâches *Tester* puis *Prouver que deux expressions sont / ne sont pas égales pour tout réel* apparaissent dans cet extrait du document d'accompagnement :

« Après qu'une transformation d'expression algébrique (factorisation, développement, réduction, ...) a été faite, un type de tâches doit faire l'objet d'une meilleure visibilité pour les élèves : comment contrôler qu'elle a été faite sans erreur ? Il est souhaitable d'aider les élèves à se doter de moyens de contrôles économiques du développement ou de la factorisation d'une expression auxquels l'expert recourt constamment, comme par exemple, la vérification du coefficient de plus haut degré ou du terme constant. Il faut aussi en montrer les limites qui justifient le recours à des tests sur un nombre restreint de valeurs bien choisies. Le recours à une calculatrice pour effectuer des tests sur des valeurs numériques en facilite la validation. En classe, le professeur peut montrer l'usage du tableau pour contrôler l'exactitude de l'égalité $(3x - 1)(2x + 5) = 6x^2 + 13x - 5$: [...]. Si le développement est exact, en faisant varier la valeur attribuée à x [...] les valeurs numériques qui s'affichent [...] varient également, mais restent égales. Il est important que les élèves soient conscients que ce type de contrôle conduit à penser que deux expressions sont effectivement égales sans toutefois en avoir la certitude (des critères permettant de l'obtenir seront étudiés plus tard). En revanche, le fait que, pour une valeur attribuée à x , il n'y ait pas égalité des valeurs des deux expressions, suffit à prouver qu'elles ne sont pas égales. » (Document d'accompagnement, p. 6)

Cet extrait soulève le lien avec différents aspects déjà soulignés dans nos analyses : l'importance d'un contrôle théorique pour valider les transformations algébriques effectuées et le rôle de la dialectique algébrique-numérique dans la validation des calculs. Les techniques et éléments technologiques présentés dans cet extrait coïncident avec ceux présentés dans l'OM de référence.

De même, les types de tâches du genre *Identifier la structure d'une expression*, peu soulignés dans les programmes, apparaissent dans le paragraphe du document d'accompagnement intitulé « *Les deux aspects d'une expression algébrique : « procédural » et « structural »* ». Il est souligné que :

La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». [...] On

Exercice 2 : (5 points)

On donne :

$$D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2.$$

1. Développer et réduire D.
2. Factoriser D.
3. Résoudre l'équation : $(2x - 3)(x + 2) = 0$.

FIGURE 3.4 – Un exemple d'exercice classique du brevet des collèges, extrait de l'examen en Métropole de 2006

est alors conduit à apprendre aux élèves à déterminer la forme d'une expression, selon des catégories qui évoluent au cours de l'enseignement. Savoir si une expression est une somme ou un produit est une tâche incontournable, que l'élève doit à terme savoir faire seul, sans indication de la part du professeur ou de l'énoncé de l'exercice. » (Document d'accompagnement, p.5)

Plusieurs techniques, correspondant à celles développées dans l'OM de référence, sont proposées pour identifier la structure d'une expression :

- « *La description en langue naturelle d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » [...]*
- *L'usage d'un arbre : la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect « procédural »), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect « structural »).* » (Document d'accompagnement, p.5)

En seconde, la présence du type de tâches « *Identifier la forme la plus adéquate d'une expression en vue de la résolution du problème donné* » sous-entend un appui sur le sens et la structure de l'expression (la forme factorisée sera plus adaptée pour résoudre une équation-produit) et le fait que plusieurs expressions puissent être équivalentes. Ce type de tâches est présent au collège et conduit à des exercices classiques du brevet des collèges (cf. figure 3.4) mais dans lesquels il n'est pas à la charge de l'élève. Il apparaît dans les introductions des programmes où le choix d'une écriture adaptée est mentionnée.

c. OM3 - Algèbre des polynômes

Au collège, les sujets d'étude du domaine *Nombres et calculs* donnent lieu à la majorité des types de tâches constitutifs de OM3. Les types de tâches des genres *Développer*, *Factoriser* apparaissent explicitement. Le commentaire « *Utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques* » (quatrième et troisième, domaine « *Nombres et calculs* » en 2008) donne lieu à des types de tâches pour effectuer des calculs numériques. Seuls les types de tâches relatifs à la réécriture

des monômes et au choix de l'expression la plus adaptée ne sont pas mentionnés. Les règles de calculs liées aux propriétés convoquées évoluent au fil des classes (cf. tableau 3.10).

Propriété	Classes		
	5 ^e	4 ^e	3 ^e
Distributivité simple	x		
Distributivité double		x	
Identités remarquables			x

TABLEAU 3.10 – Niveaux de classe d'introduction des propriétés du calcul algébrique

Si certains éléments technologiques, comme les règles de calculs, sont précisés, les techniques qui permettent de réaliser ces types de tâches sont absents des programmes. Par exemple, pour *Développer une expression algébrique avec la distributivité simple*, l'instanciation n'est pas explicitée mais seulement sous-entendue puisqu'il s'agit « d'utiliser l'égalité $k(a + b) = ka + kb$ dans le bon sens ». Dans les commentaires, il n'y a pas de trace de la question de la validation ou du contrôle des calculs alors que, comme nous l'avons déjà souligné, cela n'est pas le cas dans le document d'accompagnement.

Au lycée, pour la classe de seconde, les genres de tâches relatifs à la transformation d'expressions algébriques sont également présents sans que soient précisés des techniques et des éléments technologico-théoriques. Les expressions ne sont plus uniquement polynomiales mais également rationnelles ce qui en augmente la complexité par rapport au collège.

Au collège comme au lycée, OM3 est l'OM locale la plus présente. La trace de OM3 dans les programmes coïncide avec l'ensemble des types de tâches techniques. Mais il y a très peu de traces sur les liens étroits entre OM3 et OM2 et entre OM3 et OM1.

3.3.6 Synthèse sur l'OM à enseigner dans les programmes

Nous retenons plusieurs points de nos analyses.

a. Un nouvel habitat et une nouvelle niche pour l'algèbre au collège

L'analyse écologique montre que, depuis 2008, l'algèbre apparaît dans le domaine d'étude « *Organisation et gestion de données, Fonctions* » en classe de cinquième ce qui est une évolution majeure par rapport aux programmes précédents. La place de l'algèbre comme outil pour généraliser, modéliser et prouver est valorisée, ce

qui encourage l'articulation entre les trois OM locales de référence pour donner une raison d'être aux expressions algébriques et mettre à disposition des élèves des moyens de calcul intelligent (choix de l'écriture la plus adaptée, contrôle des calculs). Cependant, les apports de ce changement dans l'enseignement et l'apprentissage sont mis en exergue uniquement dans le document d'accompagnement. Ce document souligne le changement de technologie mis en jeu par l'introduction des expressions algébriques et par les programmes de calcul et l'étude de leur équivalence.

b. La place laissée aux OM locales de référence

OM1 est présente, notamment en 5^e, avec la production d'expressions. Néanmoins, les types de tâches constitutifs de OM1 sont dispersés dans les trois habitats des programmes du collège. Ils restent souvent sous-entendus par les commentaires ou les objectifs et peu d'éléments sur leur mise en œuvre sont donnés. Il est donc nécessaire d'interpréter les programmes pour les rendre explicites. On peut s'interroger sur l'interprétation et l'exploitation des programmes par les enseignants et les concepteurs des manuels. Leur lecture les incitent-ils suffisamment à attribuer une place à l'interprétation des expressions, à la validation des calculs et à situer leur discours technologico-théorique à un niveau idoine ? Des effets différenciateurs de l'enseignement évoqués au chapitre 1 (cf. 1.1.1) ne sont-ils pas en lien avec un manque de prise en compte de ces éléments ?

L'OM locale la plus présente dans les programmes du collège et du lycée est OM3. On trouve peu de trace de OM2 dans les programmes du collège ce qui laisse supposer que les types de tâches de OM3 sont travaillés ponctuellement et que la transformation des expressions est principalement guidée par un travail syntaxique guidé par les ostensifs. Des éléments technologiques et théoriques sont pourtant apportés par le document d'accompagnement.

c. Les apports du document d'accompagnement : des éléments technologiques et des raisons d'être

Le document d'accompagnement complète les programmes officiels du collège. Il apporte des ingrédients du bloc technologico-théorique des OM ponctuelles qui sont dans les programmes comme les différents statuts des lettres et du signe d'égalité, l'introduction au calcul algébrique, les aspects procédural et structural d'une expression algébrique. Certaines ruptures entre les pratiques algébriques et numériques sont mentionnées. Des types de tâches sous-entendus ou absents des programmes appa-

raissent comme *Prouver que deux expressions sont égales/ ne sont pas égales pour toute valeur de la lettre*. Le contrôle des calculs, qui n'est jamais mentionné dans les programmes, fait l'objet d'un paragraphe (§5 p.6). Des tâches importantes sont abordées comme l'équivalence des programmes de calcul exprimés symboliquement. Les raisons d'être des expressions algébriques et de la distributivité simple sont mises en évidence. Cependant, on peut s'interroger sur le rôle joué par ce document chez les enseignants et les auteurs de manuels. Quelle place accordent-ils à ce document ? Est-il lu et utilisé par les enseignants ? Et si oui, comment ?

d. Une transition entre le collège et la seconde

A partir de la seconde, l'habitat et la fonction de l'algèbre évoluent. Les expressions algébriques sont travaillées au service de l'étude des fonctions ce qui implique des évolutions dans leur niveau de convocation et dans les types de problèmes et les raisons d'être qui y sont travaillées. Par exemple, le sujet d'étude *Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but* sollicite le sens des expressions, aspect qui est peu présent au collège où il est seulement suggéré par une injonction discrète dans la présentation des objectifs du domaine « *Nombres et calculs* » (cf. tableau 3.6). Des décalages entre le rapport institutionnel à l'algèbre au collège et en seconde sont ainsi mis en évidence. Le rapport institutionnel à l'algèbre en seconde met en jeu une pratique algébrique appuyée sur des éléments technologique et théorique qui sont implicites dans les programmes de collège.

Nous poursuivons notre étude avec l'analyse de manuels du collège et du lycée.

3.4 Analyse des manuels

3.4.1 Choix des manuels

Pour avoir un panorama global des caractéristiques de l'OM à enseigner qui apparaît dans les manuels, nous en avons analysé plusieurs pour chaque niveau scolaire. Comme dans l'analyse des programmes, le niveau de classe 2^{de} est parcouru pour mieux situer l'OM à enseigner au collège par rapport à celle de la classe de 2^{de}.

Au collège, les manuels retenus (tableau 3.11) pour les analyses écologiques et praxéologiques sont ⁷ :

7. Pour faciliter les références aux manuels dans la rédaction, nous les avons codés par un chiffre qui indique le niveau scolaire, les deux premières lettres de la collection et les deux derniers chiffres de l'année d'édition. Par exemple, le manuel de 5^e de la collection Phare de 2007 est codé 5PH07.

- les manuels de la collection *Phare* chez Nathan (éditions 2006 et 2010 pour la 5^e, éditions 2007 et 2011 pour la 4^e et éditions 2008 et 2012 pour la 3^e). Ces manuels, très utilisés par les enseignants, l'étaient par ceux qui ont participé aux expérimentations. Nous analysons deux éditions par niveau scolaire, parce qu'elles présentent des différences qui laissent supposer des évolutions dans l'interprétation des programmes.
- les manuels de la collection *Triangle* chez Hatier (édition 2010 pour la 5^e, édition 2011 pour la 4^e et édition 2008 pour la 3^e). Cette collection est une des premières à avoir développé la production d'expressions pour généraliser ou prouver. Avec un chapitre spécifique sur la démonstration par le calcul algébrique, les manuels *Triangle* sont représentatifs d'une volonté de mettre en avant la dimension outil de l'algèbre. Les éditions de 2006 et 2007 étant équivalentes à celles de 2010 et 2011, nous analysons uniquement les dernières versions. Pour la classe de 3^e, n'ayant pas eu accès à la version de 2012, nous analysons celle de 2008.
- les manuels de la collection *MathenPoche* chez Sésamath (édition 2010 pour la 5^e, édition 2011 pour la 4^e et édition 2008 pour la 3^e). Il s'agit de manuels libres, téléchargeables gratuitement sur Internet⁸ et créés à l'initiative de l'association Sésamath, qui est impliquée dans le projet de recherche PepiMeP. Ces manuels étant en partie exploitables depuis la plateforme LaboMeP, utilisée dans PepiMeP, il nous a paru indispensable de les analyser. Les éditions de 2006, 2007 et 2008 étant équivalentes à celles de 2010, 2011 et 2012, nous analysons uniquement les dernières versions.
- le manuel de la collection *Horizon* chez Didier de 4^e (édition 2011). Ce manuel n'existe actuellement qu'en classe de 4^e. Du même éditeur et des mêmes auteurs que le manuel *Math'x* de seconde, il en est, d'une certaine façon, l'équivalent en 4^e.

En seconde, les manuels retenus pour l'analyse écologique sont (tableau 3.12) :

- le manuel de la collection *Math'x* chez Didier (édition 2010) écrit par les mêmes auteurs que le manuel *Horizon* en 4^e,
- le manuel de la collection *Hyperbole* chez Nathan (édition 2010),
- le manuel de la collection *Transmath* chez Nathan (édition 2010),
- le manuel de la collection *Math 2^{de}* chez Nathan (édition 2011),

Les codages sont présentés dans les tableaux 3.11 pour les manuels du collège et 3.12 pour les manuels de seconde.

8. <http://www.sesamath.net/>

Collection, Éditeur	Manuel	Codage
Phare , Nathan	5 ^e 2006	5PH06
	5 ^e 2010	5PH10
	4 ^e 2007	4PH07
	4 ^e 2011	4PH11
	3 ^e 2008	3PH08
	3 ^e 2012	3PH12
Triangle , Hatier	5 ^e 2010	5TR10
	4 ^e 2011	4TR11
	3 ^e 2008	3TR08
Horizon , Didier	4 ^e 2011	4HO11
Mathenpoche , Sésamath	5 ^e 2010	5MP10
	4 ^e 2011	4MP11
	3 ^e 2008	3MP12

TABLEAU 3.11 – Manuels de collège retenus

Collection, Éditeur	Manuel	Codage
Math’x , Didier	Math 2 ^{de} 2010	2Mx10
Hyperbole , Nathan	Mathématiques 2 ^{de} 2010	2HY09
Transmath , Nathan	Math 2 ^{de} 2010	2TM10
Math 2^{de} , Nathan	Math 2 ^{de} 2010	2MT10
Symbole , Belin	Maths 2 ^{de} 2010	2SY10
Décllic , Hachette	Mathématiques 2 ^{de} 2010	2DE10
Repère , Hachette	Maths 2 ^{de} 2010	2RE10
Indice , Bordas	Maths 2 ^{de} 2009	2IN09
Pixel , Bordas	Maths 2 ^{de} 2010	2PI10

TABLEAU 3.12 – Manuels de seconde retenus

- le manuel de la collection *Symbole* chez Belin (édition 2010),
- le manuel de la collection *Décllic* chez Hachette (édition 2010),
- le manuel de la collection *Repère* chez Hachette (édition 2010),
- le manuel de la collection *Pixel* chez Bordas (édition 2010).

Suite à l’analyse écologique, les manuels de seconde sont regroupés selon trois catégories. Seul un manuel de chaque catégorie sera analysé praxéologiquement, à savoir les manuels : 2Mx10, 2IN09 et 2HY09.

Ainsi, l’analyse écologique concerne vingt-deux manuels dont treize du collège et neuf de seconde. L’analyse praxéologique concerne seize manuels dont treize du collège et trois de seconde.

3.4.2 Analyse écologique

L'analyse écologique des manuels consiste à situer les habitats et les niches attribués à l'algèbre par rapport aux injonctions des programmes officiels. Pour cela, nous interprétons les sommaires et les structures des manuels avec les niveaux de codétermination didactique : domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude. Nous associons une partie à un domaine, un chapitre à un secteur et un sous-chapitre, s'il y en a, à un thème. Un sujet d'étude est retenu s'il figure comme titre d'un paragraphe ou d'une méthode dans les manuels. Une analyse plus fine des types de tâches présents dans les manuels fait l'objet de l'analyse praxéologique (§ 3.4.3). Ce travail est présenté dans les tableaux 3.13, 3.14, 3.15 et 3.16. Nous en tirons plusieurs conclusions présentées dans les paragraphes suivants.

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Collection Phare			
Manuel 5PH06			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Tester une égalité
Manuel 5PH10			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Produire et utiliser une expression littérale
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Tester une égalité
Manuel 4PH07			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Utiliser le calcul littéral pour résoudre un problème
			Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant des valeurs aux lettres
Manuel 4PH11			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Prouver que deux expressions sont égales pour tout x ou pas
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Utiliser le calcul littéral pour résoudre un problème
			Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant des valeurs aux lettres
Manuel 3PH08			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 3PH12			
Nombres et calculs	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Équation produit nul
	Identités remarquables et applications	Calcul littéral	Développer avec les identités remarquables
			Factoriser avec les identités remarquables

TABLEAU 3.13 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels Phare

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Collection Triangle			
Manuel 5TR10			
Organisation et gestion de données	Initiation au calcul littéral et aux équations	Calcul littéral	Produire et utiliser une formule
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Prouver que deux expressions sont égales pour tout x ou pas
Manuel 4TR11			
Nombres et calculs	Calcul littéral et initiation à la démonstration	Calcul littéral	Produire et utiliser une formule
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 3TR08			
–	Calcul littéral et identités remarquables	Calcul littéral	Développer
			Factoriser
Collection Horizon			
Manuel 4HO11			
–	Calcul littéral	–	Produire et utiliser une formule
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Collection Mathenpoche			
Manuel 5MP10			
Travaux numériques	Calcul littéral	Calcul littéral	Produire et utiliser une expression littérale
			Développer une expression
			Factoriser une expression
			Tester si une égalité ou une inégalité est vraie
Manuel 4MP11			
Travaux numériques	Calcul littéral	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant des valeurs aux lettres
Manuel 3MP12			
Travaux numériques	Calcul littéral et équations	Calcul littéral	Développer une expression
			Factoriser une expression

TABLEAU 3.14 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels Triangle, Horizon et MathenPoche

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Manuels catégorie 1			
Manuel 2Mx10			
Fonctions	Développer, factoriser pour résoudre	Égalité « pour tout x » et équation	Prouver que deux expressions sont égales pour tout x ou pas
		Développer, factoriser	Développer une expression
			Factoriser une expression
			Reconnaître la structure
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
Manuel 2MT10			
–	Généralités sur les fonctions	–	Trouver une formule
–	Expressions algébriques. Équations	Expressions algébriques	Produire une expression algébrique pour résoudre un problème
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 2DE10			
–	Expressions algébriques et équations	Transformer une expression algébrique	Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
			Développer une expression
			Factoriser une expression
Manuel 2IN09			
–	Expressions algébriques	Les formes d'une expression algébrique	Reconnaître la structure d'une expression
		Transformation d'une expression algébrique	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
			Produire une expression algébrique pour résoudre un problème

TABLEAU 3.15 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels de 2^e

Domaine	Secteur	Thème	Sujet d'étude
Manuels catégorie 2			
Manuel 2HY10			
–	Fonctions, expressions algébriques et problèmes	Expressions algébriques	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
Manuel 2TM10			
–	Fonction carré. Problèmes du second degré	Développer, Factoriser	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
Manuel 2PI10			
–	Fonctions du second degré	Expressions algébriques	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Reconnaître la structure
Manuel 2RE10			
–	Fonctions de référence	Transformations d'écritures	Développer des expressions polynomiales
			Factoriser des expressions polynomiales
			Choisir la forme la plus adaptée d'une écriture
Manuels catégorie 3			
Manuel 2SY10			
Ni secteur, ni thème relatif aux expressions algébriques			

TABLEAU 3.16 – Domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude des manuels de 2^e

a. Au collège

Dans le tableau 3.17, nous présentons les domaines d'étude repérés dans les manuels scolaires des classes de 5^e, 4^e et 3^e. Nous indiquons en gras les domaines pour lesquels l'algèbre apparaît comme secteur d'étude.

Collection	Manuels	Domaines
Phare	5PH06, 5PH10 4PH07, 4PH11 3PH08, 3PH12	Nombres et calculs Organisation et gestion de données Géométrie Grandeurs et mesures
Triangle	5TR10	Nombres et calculs Organisation et gestion de données Travaux géométriques Grandeurs et mesures
	4TR11	Nombres et calculs Organisation et gestion de données Géométrie. Grandeurs et mesures
	3TR08	–
Horizon	4HO11	–
MathenPoche	5MP10	Travaux numériques Gestion de Données Travaux Géométriques Grandeurs et Mesures
	4MP11 5MP12	Travaux numériques Organisation et Gestion de Données Travaux Géométriques
Légende : Les domaines en gras signifient qu'ils incluent un secteur relatif à l'algèbre. Un – indique qu'il n'y a pas de structuration en domaines.		

TABLEAU 3.17 – Domaines d'études présents dans les manuels scolaires des classes de 5^e, 4^e et 3^e

La majorité des manuels du collège se structurent selon les quatre domaines des programmes : *Nombres et calculs*, *Organisation et gestion de données*, *Géométrie* et *Grandeurs et mesures*. Un habitat est donné à l'algèbre dans le domaine *Nombres et calculs*, ce qui ne correspond pas à la structuration des programmes de 2008. Le sujet d'étude *Produire une expression*, rattaché au domaine *Organisation et gestion de données* dans les programmes de 5^e, figure majoritairement dans les manuels dans le domaine *Nombres et calculs*. Seul le manuel Triangle 2010 de 5^e diffère en intégrant l'algèbre comme secteur d'étude du domaine *Organisation et gestion de données*. Les auteurs de ce manuel montrent ainsi leur volonté de suivre la nouvelle orientation de travail proposée en 2008 avec l'influence sur les raisons d'être des expressions et du calcul en lien avec l'équivalence des programmes de calcul.

Le manuel Phare 2012 de 3^e présente une spécificité. Deux secteurs d'étude relatifs aux expressions algébriques du domaine *Nombres et calculs* sont distingués : le premier est *Calcul littéral et équation produit nul* et le second est *Identités remarquables et applications*. Dans les autres manuels dont l'édition précédente de Phare 3^e datant de 2008, ces deux secteurs sont regroupés en un seul. Cette distinction laisse entendre une volonté de laisser une place plus grande à l'algèbre et de l'orienter davantage comme outil au service de la résolution de problèmes.

La présence de l'algèbre dans les manuels du collège ne coïncide pas totalement avec celle suggérée par les programmes. Hormis les spécificités de deux manuels, l'algèbre est concentrée en un seul habitat dans le domaine *Nombres et calculs*. Dans l'analyse praxéologique, nous porterons une attention particulière aux manuels Phare 2012 3^e et Triangle 2010 5^e, pour mieux déterminer en quoi leur organisation peut modifier la fonction donnée à l'algèbre et plus particulièrement aux expressions algébriques.

b. En seconde

Seuls les manuels Math'*x* et Repère, codés 2M*x*10 et 2RE10, proposent une structuration en domaines de leurs sommaires (cf. tableau 3.18). Cette structuration correspond à celle proposée par les programmes de seconde : *Fonctions, Statistiques et probabilités* et *Géométrie*. Le secteur relatif à l'algèbre est rattaché au domaine des fonctions ce qui correspond à l'orientation donnée par les programmes de seconde. Pour les manuels qui ne sont pas structurés en domaines, un secteur relatif à l'algèbre, quand il est présent, est, d'après l'ordre et l'intitulé des chapitres, en rapport avec les fonctions. Lorsque l'algèbre apparaît, c'est comme un outil au service des fonctions.

Nous regroupons les manuels de seconde selon trois catégories :

1. Ceux qui incluent les expressions algébriques au niveau du secteur, c'est-à-dire qu'un chapitre a un intitulé relatif aux expressions algébriques. Quatre des neuf manuels analysés sont concernés : **2M*x*10**, 2MT10, 2DE10, **2IN09**.
2. Les manuels qui incluent les expressions algébriques au niveau d'un thème d'étude rattaché au secteur *Fonctions du second degré*, c'est-à-dire que les expressions algébriques sont travaillées uniquement dans le chapitre relatif à l'étude des fonctions du second degré. Quatre manuels sont concernés : **2HY09**, 2TM10, 2RE10 et 2PI10.
3. Les manuels qui ne proposent ni secteur ni thème relatifs aux expressions algé-

Collection	Manuels	Domaines
Math'<i>x</i> Repère	2M <i>x</i> 10 2RE10	1. Fonctions 2. Statistiques et probabilités 2. Géométrie
Hyperbole, Transmath Math 2^{de} Symbole Déclic Indice Pixel	2HY09 2TM10 2MT10 2SY10 2DE10 2IN09 2PI10	–
Légende : Les domaines en gras signifient qu'ils incluent un secteur relatif à l'algèbre. Un – indique qu'il n'y a pas de structuration en domaines.		

TABLEAU 3.18 – Domaines d'étude présents dans les manuels scolaires de la classe de 2^e

briques même si certains types de tâches peuvent apparaître ponctuellement. Un manuel est concerné : 2SY10.

Ainsi, en seconde, l'algèbre n'a pas toujours le même statut. Elle est soit absente, soit présente au niveau du secteur ou au niveau du thème. On peut donc s'attendre à ce que l'OM à enseigner relativement aux expressions algébriques développée dans chaque catégorie de manuels ne laisse pas la même place aux OM locales de référence. Nous proposons d'analyser praxéologiquement au moins un des manuels de chaque catégorie.

3.4.3 Analyse praxéologique

a. Méthodologie

Étant donné le nombre de manuels considérés et la quantité d'exercices dans chacun d'entre eux, nous précisons la méthodologie adoptée pour leur analyse.

Les manuels s'organisent en trois parties : activités, cours et méthodes (parfois appelés savoir-faire) et exercices. Chaque partie joue un rôle différent et informe sur une partie des éléments de l'OM relative aux expressions algébriques construite dans le manuel. Nous les associons donc à différents moments de l'organisation didactique.

La partie *Activités* concerne principalement le moment de la première rencontre, même si le moment de l'exploration du type de tâches avec élaboration d'une technique ou celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique peuvent s'y trouver. C'est pourquoi nous analysons cette partie pour situer les raisons d'être de l'OM régionale relative aux expressions algébriques par rapport à celles mises en

évidence dans l'OM de référence. Nous nous intéressons à deux raisons d'être, celle de la génération des expressions algébriques et celle de l'introduction des propriétés de calculs.

La partie *Cours et méthodes* concerne principalement deux moments : celui de l'exploration du type de tâches avec l'exploration de la technique et celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique. Nous les analysons pour dégager les principaux types de tâches de l'OM de référence qui interviennent ainsi que les ingrédients techniques et technologiques qui composent les praxéologies. Nous dégagons des éléments sur la place accordée aux ostensifs dans la conduite et le contrôle du calcul algébrique.

La partie *Exercices* concerne principalement le moment de travail de la technique. Nous comptabilisons le nombre d'apparitions de chaque type de tâches afin de repérer ceux qui ne sont jamais ou peu travaillés. Nous nous intéressons à la place laissée à chacune des OM locales de référence.

L'analyse praxéologique des manuels s'organise en plusieurs temps. L'étude des parties *Activités* est suivie de celles des *Cours et méthodes* puis des *Exercices*. L'étude porte sur une analyse *a priori* des types de tâches convoqués dans ces différentes parties. Nous en dégagons le poids donné à chaque OM locale de référence, les liens qui existent entre elles et le niveau d'agrégation des types de tâches ponctuels, ce qui permet de conclure sur la présence de l'OM à enseigner présente dans les manuels. Nous apportons une analyse sur les différences entre la 3e et la 2de.

b. Analyse des parties *Activités*

L'analyse praxéologique des parties *Activités* est centrée sur les raisons d'être de l'OM régionale relative aux expressions algébriques. Deux raisons d'être nous intéressent :

- Qu'est-ce qui motive la génération des expressions algébriques ? Cette motivation est-elle associée à une évolution de la considération des programmes de calcul comme résultat et non simplement comme processus, comme cela est suggéré par le document d'accompagnement et mis en évidence dans l'OM de référence ?
- Qu'est-ce qui motive l'introduction des propriétés de calcul ? La distributivité simple est introduite en classe de 5^e, la distributivité double en classe de 4^e et les identités remarquables en classe de 3^e. Cette motivation est-elle associée à la question de l'équivalence des programmes de calcul, comme cela est

suggéré par le document d'accompagnement et mis en évidence dans l'OM de référence ?

Motivation des expressions algébriques

D'après l'OM de référence, les expressions algébriques trouvent leur raison d'être dans OM1. Au collège, nous avons rencontré deux types de motivation.

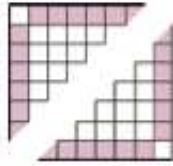
La première est la *production* d'une expression algébrique ou d'une formule dans le cadre de la résolution de problèmes de généralisation, modélisation ou de preuve. Dans ce cas, les expressions algébriques apparaissent comme une nécessité pour résoudre le problème donné. Dans l'OM de référence, nous avons mis en évidence une introduction par les programmes de calcul ce qui permet de montrer les limites des démarches numériques, par exemple, pour prouver le résultat du programme de calcul pour n'importe quelle valeur ou pour prouver que deux programmes de calcul sont équivalents. Cette motivation est suggérée par les documents d'accompagnement du collège ; elle suit l'orientation de travail suggérée par l'ajout du type de tâches *Produire une expression algébrique* dans les programmes de 2008 pour la classe de 5^e. Elle est illustrée dans la figure 3.5. Remarquons que les expressions algébriques ne sont pas distinguées des formules. Elles sont attachées à des formules. Il y a là une difficulté, dans l'institution, à travailler sur des expressions en dehors d'une relation qui s'accompagne d'une difficulté pour les élèves qui doivent alors considérer les expressions comme un tout. De plus, notons que dans l'exercice présenté à la figure 3.5, même si la question 3 porte sur l'équivalence des expressions, le niveau technico-théorique convoqué dépend des techniques utilisées comme l'utilisation d'un contre-exemple et la comparaison entre les expressions proposées.

La seconde motivation est la *traduction*, non contextualisée dans la résolution d'un problème, entre un registre sémiotique en jeu dans un cadre algébrique ou fonctionnel et celui des écritures algébriques. Dans ce cas, les expressions algébriques apparaissent comme un moyen de représenter symboliquement des grandeurs ou des relations données en langage naturel. Nous illustrons ce cas dans la figure 3.6.

Enfin, nous avons rencontré des manuels qui ne motivent pas l'introduction des expressions algébriques. Dans ce cas, elles ne sont pas introduites mais étudiées directement comme un objet.

Le tableau 3.19 présente les choix de chaque manuel du collège concernant la motivation des expressions algébriques. La moitié des manuels analysés (7 sur 13) n'introduisent pas les expressions algébriques par la production d'expressions dans le contexte de la résolution de problème. Ce choix ne suit pas les suggestions du

Activité 2 : Un carré sans coins



On a représenté ci-contre deux parties d'un carré. Il est constitué de petites cases ayant pour côté un carreau. Celles qui se trouvent sur les bords sont coloriées en rose, sauf les quatre coins.

1. Réalise une figure de 3 carreaux de côté. Indique le nombre de cases roses. Recommence avec un carré de 4 carreaux de côté puis avec un carré de 5 carreaux de côté.

2. Quel est le nombre de cases roses pour un carré de 6 carreaux de côté ? Et pour 12 carreaux ? Et pour 100 ?

3. Le professeur appelle x le nombre de carreaux d'un côté du carré et G le nombre de cases roses. Des élèves ont obtenu les expressions suivantes :

Anis: $G = x \times 4 - 2$

Chloé: $G = 4 \times (x - 2)$

Enzo: $G = 4 \times x - 8$

Basile: $G = x - 2 \times 4$

Dallia: $G = (x - 2) \times 4$

Florian: $G = 4 \times x - 4$

Parmi ces expressions, lesquelles sont fausses ? Pourquoi ? Y a-t-il plusieurs bonnes réponses ? Justifie.

4. Calcule le nombre de cases roses lorsque $x = 6$ puis $x = 24$ et enfin pour $x = 100$.

FIGURE 3.5 – Motivation des expressions algébriques par la situation du carré bordé dans le manuel 5MP10 (activité 2 p. 64)

A Expressions littérales

On étudie le carré bleu ci-contre.

1) a) Que permet de calculer le produit $4 \times c$?

b) Que représente la lettre c dans cette expression ?

On appelle **expression littérale** une expression qui utilise une ou plusieurs lettres.

2) a) Écrire une expression littérale qui permet de calculer l'aire de ce carré.

b) Que représente chacune des deux lettres c dans cette expression littérale ?

On dit que l'on a **exprimé** l'aire du carré **en fonction de c** .



FIGURE 3.6 – Motivation des expressions algébriques par la *traduction* dans le manuel 5PH10 (activité 1 p. 30)

Motivation	Manuels
Production : problèmes de généralisation, modélisation, preuve	5MP10, 4MP11, 3MP12, 4HO11, 4TR11, 3TR08
Traduction	5PH06, 5PH10, 5TR10
Non motivation	4PH07, 4PH11, 3PH08, 3PH12

TABLEAU 3.19 – Motivation des expressions algébriques dans les parties *Activités* des manuels scolaires du collège

document d'accompagnement. Certains ne les motivent pas du tout et d'autres les introduisent par le biais de la traduction. Les manuels Phare sont principalement concernés. En revanche, l'autre moitié des manuels (6 sur 13) motive les expressions algébriques par des problèmes de généralisation, de modélisation ou de preuve. Les

manuels MathenPoche, Horizon et Triangle sont concernés. L'orientation de travail donnée par les manuels 5MP10, 4HO11 et 3MP12 correspond à celle du document d'accompagnement. Des problèmes de généralisation du type carré bordé ou programmes de calcul équivalents sont menés en plusieurs étapes. Après le calcul du nombre de carrés unités sur des valeurs numériques, on demande de faire le calcul de façon générale, ce qui mène à la production de formules ou d'expressions. Puis le problème amène à comparer plusieurs expressions et à s'interroger sur ce qui peut justifier leur égalité pour toutes valeurs.

En seconde, les trois manuels motivent l'utilisation et la transformation des expressions algébriques par des problèmes fonctionnels (cf. figure 3.7), ce qui correspond à l'orientation donnée par les programmes de 2009.

Motivation des propriétés du calcul algébrique

A chaque niveau de classe du collège, une nouvelle propriété du calcul algébrique (distributivité simple et double, identités remarquables) est introduite (cf. tableau 3.10). Nous nous interrogeons sur les raisons d'être proposées dans les manuels pour introduire ces propriétés. Nous avons rencontré deux types d'introduction des propriétés du calcul algébrique.

La première approche est une introduction liée à la question de *l'équivalence des programmes de calcul*. La résolution d'un problème de généralisation conduit à des expressions algébriques équivalentes dont la preuve de leur équivalence donne une raison d'être aux propriétés. Cette introduction, suggérée par le document d'accompagnement, correspond à celle mise en évidence dans l'OM de référence. Par exemple, dans le manuel 4HO11 (cf. figure 3.8), se poser la question de la preuve de l'équivalence des programmes de calcul 1 et 2 donne une raison d'être à la propriété de distributivité simple. Dans le manuel 5MP10 (cf. figure 3.5), des procédés de calculs distincts ont conduit deux élèves à des expressions différentes qui sont prouvées équivalentes par la distributivité simple. Le document d'accompagnement oriente le travail dans ce sens, ce qui permet notamment de travailler sur la dialectique algébrique-numérique.

La seconde approche s'appuie sur la *décomposition des aires*. Considérer la même aire mais découpée différemment conduit à des expressions algébriques équivalentes. Il s'agit de s'appuyer sur le changement de cadre grandeurs-algèbre pour assurer l'équivalence entre des expressions qui représentent le même résultat. Ce cas est illustré par le manuel 4PH11 (cf. figure 3.9). Dans cet exemple, qui est représentatif, la propriété du calcul algébrique mise en jeu résulte du découpage des aires, d'ailleurs

guidé pas à pas, sans qu'il y ait de réelle raison d'être. Contrairement à l'approche par l'équivalence des programmes de calcul, l'appui sur le cadre des grandeurs conduit directement à considérer les expressions algébriques du point de vue structural sans dialectique avec l'aspect procédural. Cette approche conduit à un travail au niveau de la comparaison des écritures.

Enfin, certains manuels ne motivent pas les propriétés de calcul. Dans ce cas, les propriétés de distributivité et les identités remarquables répondent uniquement à la nécessité de les faire savoir aux élèves. Elles sont construites sans appui sur une modélisation ou une généralisation. Ce cas est illustré par le manuel 3PH12 (cf. figure 3.10), où les identités remarquables sont énoncées et démontrées sans aucune raison d'être. Elles sont construites à partir de la définition du carré comme produit d'un nombre par lui-même et de la double distributivité dans le cadre algébrique.

Motivation	Manuels
Programmes de calcul équivalents	5MP10, 3MP12, 4HO11
Décomposition des aires	5PH06, 5PH10, 4PH07, 4PH11, 3PH08, 3MP12, 4HO11, 5TR10, 4TR11
Pas de motivation	3PH12, 3TR08, 4MP11

TABLEAU 3.20 – Motivation des propriétés du calcul algébrique dans les parties *Activités* des manuels scolaires du collège

Le tableau 3.20 présente les raisons d'être de l'introduction des propriétés du calcul algébrique dans chaque manuel du collège. Les manuels de seconde n'y figurent pas car aucune propriété nouvelle n'est introduite à ce niveau scolaire. Il en ressort plusieurs points. Seuls trois des treize manuels du collège analysés donnent une raison d'être aux propriétés du calcul algébrique par la résolution de problème. Une majorité de manuels (9 sur 13) introduisent les propriétés par la décomposition des aires, sans comparaison des expressions dans le cadre algébrique et en dehors du cadre des grandeurs. Trois manuels ne donnent aucune raison d'être aux propriétés introduites. Ainsi seuls les trois manuels 5MP10, 3MP12, 4HO11 donnent une raison d'être aux propriétés du calcul algébrique en tant qu'expression symbolique de programmes de calcul équivalents.

Ainsi, dans la majorité des manuels, l'entrée dans le calcul algébrique se fait par OM1. Néanmoins, la résolution de problèmes n'est pas toujours privilégiée, notamment en classe de 5^e où l'introduction des expressions algébriques relève souvent de la traduction plutôt que de l'équivalence des programmes de calcul. La dénotation des expressions et la dialectique algébrique-numérique, questionnant l'équivalence

des expressions, sont peu travaillés sauf dans les manuels MathenPoche et Horizon où la résolution de problèmes est un pivot pour faire les liens entre OM3, OM2 et OM1.

Nous analysons dans le paragraphe suivant les parties *Cours et méthodes*.

Le minimum d'une aire

Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqués sur le dessin :

$AM = BN = BP = CQ = CR = DS = DT = AU = x$, avec $0 \leq x \leq 2$.

On note $A(x)$ l'aire du domaine coloré.

1. Montrer par un raisonnement géométrique que $A(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :
 $A(x) = 4x^2 + (4 - 2x)^2$ ou $A(x) = 16 - 4x(4 - 2x)$.
2. Montrer que l'on a aussi : $A(x) = 8x^2 - 16x + 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $A(2)$, puis $A(\sqrt{3})$.
- 4.a. Montrer que : $A(x) = 8(x - 1)^2 + 8$.
 b. En déduire que l'aire $A(x)$ est minimale pour $x = 1$.
- 5.a. Montrer que : $A(x) = (2x - 1)(4x - 6) + 10$.
 b. En utilisant l'expression précédente de $A(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $A(x)$ soit égale à 10.

FIGURE 3.7 – Un exemple de motivation des expressions algébriques dans un problème fonctionnel, en seconde, manuels 2IN09 (activité 2, p.60)

6 Demander le programme

OBJECTIFS
 Montrer l'intérêt
 de donner une lettre
 pour désigner un
 résultat général,
 donner du sens
 à l'égalité de
 deux expressions
 littérales ; revoir
 la distributivité

1. Appliquer chacun des programmes ci-dessous aux nombres 4 et 7.
 Que constate-t-on ?

Programme 1

- Choisir un nombre
- Multiplier par 6
- Soustraire 4

Programme 2

- Choisir un nombre
- Multiplier par 3
- Soustraire 2
- Multiplier par 2

Programme 3

- Choisir un nombre
- Soustraire 5
- Multiplier par le nombre de départ
- Additionner 24

2. Appliquer chaque programme au nombre 10.

3. Comment savoir si les programmes 1 et 2 donnent toujours le même résultat, pour n'importe quel nombre choisi au départ ?

FIGURE 3.8 – Une raison d'être de la propriété de distributivité simple dans le manuel 4HO11 (activité 6 p. 84)

3 Je démontre la règle de double distributivité

A Démonstration géométrique pour des nombres positifs
 Les nombres positifs a, b, c et d désignent des longueurs.
 Le rectangle $EFGH$ ci-contre est constitué de 4 rectangles colorés.

1 a) Exprimer en fonction des nombres a, b, c et d l'aire de chacun des rectangles colorés.
 b) En déduire une expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.
 2 Exprimer en fonction de a, b, c et d chacune des longueurs EF et FG .
 En déduire une nouvelle expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle $EFGH$.
 3 Recopier et compléter : $(a + b)(c + d) = \dots + \dots + \dots + \dots$.

B Démonstration algébrique pour des nombres relatifs
 a, b, c et d désignent des nombres relatifs.
 • Recopier et compléter la démonstration ci-contre.

$$\begin{aligned} (a + b)(c + d) &= a \times (\dots) + b \times (\dots) \\ (a + b)(c + d) &= a \times \dots + a \times \dots + b \times \dots + b \times \dots \\ (a + b)(c + d) &= ac + \dots + \dots + \dots \end{aligned}$$

FIGURE 3.9 – Un exemple de décomposition des aires pour introduire la distributivité double dans le manuel 4PH11 (activité 3 p. 64)

1 Je démontre les trois identités remarquables

a et b désignent des nombres relatifs.
 1 La professeure a démontré ci-dessous l'identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \times (a + b) \\ (a + b)^2 &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ (a + b)^2 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Étape 1
 Étape 2
 Étape 3

a) Justifier l'égalité ①.
 b) Justifier chacune des étapes de cette démonstration.
 2 Démontrer de même que : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 3 a) Développer, puis réduire l'expression $(a + b)(a - b)$.
 b) En déduire une troisième identité remarquable.

FIGURE 3.10 – Un exemple d'introduction des identités remarquables dans le manuel 3PH12 (activité 1 p. 84)

c. Analyse des parties *Cours et méthodes*

Étant donné que les parties *Cours et méthodes* correspondent aux moments de l'exploration du type de tâches ainsi que de la technique et de la constitution de l'environnement technologico-théorique, nous analysons les types de tâches qui interviennent, leur agrégation, les techniques développées, les discours technologico-théoriques qui les accompagnent et la place des ostensifs par rapport aux non-ostensifs qui y sont mobilisés.

Les types de tâches présents

Nous avons relevé la présence des types de tâches constitutifs de chaque OM locale de référence pour chaque manuel. Nous présentons les résultats dans le tableau 3.21. Pour une description des types de tâches, nous renvoyons le lecteur aux tableaux 3.1, 3.2 et 3.3.

Ce tableau met en évidence le fort poids donné à OM3 par rapport à OM2 et OM1 dans les parties *Cours et méthodes*. Seuls sept manuels font intervenir des types de tâches de OM2, et, parmi eux, seuls trois manuels font intervenir le type de tâches $T_{\text{Prouver-équiv}}$ *Prouver que deux expressions algébriques (ne) sont (pas) égales pour toute valeur de la lettre*. OM1 intervient seulement dans six manuels et uniquement deux d'entre eux évoquent la production d'expressions dans le cadre de la résolution de problèmes. Les liens entre les trois OM locales sont peu présents, ce qui donne lieu à différentes analyses que nous soulevons dans les paragraphes qui suivent.

Des OM ponctuelles peu reliées entre elles

Les types de tâches qui interviennent majoritairement sont ceux des genres *Développer* et *Factoriser*. Les propriétés du calcul algébrique sont énoncées et souvent mises en fonctionnement sur un exercice résolu ce qui offre la possibilité de décrire et interpréter une technique de développement ou de factorisation. Les types de tâches sont étudiés indépendamment les uns des autres sans être rattachés à d'éventuelles raisons d'être soulevées dans les parties *Activités*. Seuls les deux manuels 4TR11 et 4HO11 diffèrent en faisant intervenir le genre de tâches *Produire* ce qui fait le lien avec des raisons d'être dans l'introduction d'expressions algébriques. Parfois, comme dans cet extrait du manuel Triangle 5TR10, des raisons d'être sont rappelées en quelques mots au début du cours :

- « Le calcul littéral est un calcul qui utilise des lettres. Le calcul littéral sert à :
- établir une formule ;
 - trouver un nombre inconnu ;
 - prouver un résultat.

Genre	Type	Phare						MathenPoche			HORIZ			Triangle			HYpe			INDic			Mat				
		5e06	5e10	4e07	4e11	3e08	3e12	5e10	4e11	3e12	4e11	5e10	4e11	3e08	2HY05	2IN09	2Mx1										
OM1																											
Produire	T_{Produire-exp/formule}																										
Traduire	T_{Exp\to Prog}																										
	T_{Prog\to Exp}	x																									
	T_{Exp\to LgNat}																										
	T_{LgNat\to Exp}																										
	T_{Exp\to Longueur}																										
	T_{Longueur \to Exp}																										
	T_{Exp\to Perimetre}																										
	T_{Perimetre \to Exp}			x			x																				
	T_{Exp\to Aire}																										
	T_{Aire\to Exp}	x	x																								
	T_{Exp\to Volume}																										
	T_{Volume\to Exp}																										
	T_{Exp\to Angle}																										
	T_{Angle\to Exp}																										
	T_{Relation\to Formule}																										
	T_{Formule\to Relation}																										
	T_{Pteari\to Exp}																										
T_{Exp \to Pteari}																											
T_{Arbre\to Exp}																											
T_{Exp\to Arbre}																											
Associer	T_{A}																										
OM2																											
Tester	T_{Tester}	x	x	x	x																						
Preuve	T_{Preuve-equiv}					x																					
Structure	T_{Structure}																										
Choisir	T_{Choisir}																										
Associer	T_{Associer}																										
OM3																											
Développe	T_{DDS-mon x som}																										
	T_{DDS-entier x som}	x	x	x	x	x																					
	T_{DD-som x som}				x	x	x	x																			
	T_{DIR-som x diff}						x	x																			
Factoriser	T_{DIR-car}					x	x																				
	T_{FA/mon}			x		x																					
	T_{FA/som}					x	x																				
	T_{FA-Reduce}	x	x	x	x	x																					
	T_{FA^{*}/mon}			x	x																						
	T_{FA^{*}/som}																										
	T_{FNA/mon}					x																					
	T_{FNA/som}																										
	T_{FNA-IR-diff}							x	x																		
	T_{FNA-3t-IR}							x	x																		
Réécrire	T_{R-carre}																										
	T_{R-canonique}	x	x			x																					
Calculer	T_{C-num}					x																					
	T_{CDS-num}																										
	T_{CIR-num}																										

TABLEAU 3.21 – Présence des types de tâches des OM locales de référence dans les parties *Cours et méthodes* (pour les notations, voir les tableaux 3.1 page 85, 3.2 page 86 et 3.3 page 91)

- La simplification permet de faciliter la résolution de certains problèmes :*
- *calculer une égalité pour une certaine valeur de la lettre ;*
 - *trouver une valeur de la lettre ;*
 - *prouver une égalité. »*

Les techniques de OM3 davantage guidées par les ostensifs que les non-ostensifs

La transformation des expressions est centrale dans les parties *Cours et méthodes*. Nous cherchons ici à répondre à la question suivante : Qu'est-ce qui guide la transformation des expressions ? C'est-à-dire que nous nous intéressons aux techniques et aux discours technologico-théoriques qui sont développés et à la place occupée par les ostensifs pour organiser le calcul.

La technique mise en œuvre dans l'ensemble des manuels est celle de l'instanciation. Rappelons qu'elle consiste en plusieurs étapes :

1. Reconnaître la structure de l'expression afin de déterminer la(les) propriété(s) à utiliser,
2. Réécrire l'expression pour appliquer la(les) propriété(s) (mettre en évidence les carrés ou les facteurs communs),
3. Appliquer la(les) propriété(s) en attribuant des valeurs particulières aux variables générales de l'expression.

Toutes les étapes ne sont pas explicitées par les manuels. La reconnaissance de la structure figure uniquement dans six manuels :

- dans les manuels 4HO11, 3TR08, 2Mx10 et 2IN09,
- dans les manuels 3PH12 et 3MP12 seulement pour certaines structures, souvent en référence aux identités remarquables (par exemple, une différence de deux carrés).

Quant à la réécriture des expressions, cette étape est souvent omise alors qu'elle est indispensable dans la reconnaissance et l'application de la propriété adaptée à utiliser. D'ailleurs, le type de tâches *Réécrire un monôme sous la forme d'un carré* n'est jamais travaillé pour lui-même.

Le manuel 4HO11 propose une technique alternative à l'instanciation pour le type de tâches $T_{DDD-som \times som}$ *Développer un produit de deux facteurs avec la double distributivité de la multiplication sur l'addition*. Elle consiste à poser le calcul comme une multiplication de nombres relatifs (cf. figure 3.11). Selon nous, cette technique est intéressante mais présente le risque d'être trop détachée de la propriété de distributivité qui la justifie.

• Calcul posé

$$\begin{array}{r} \quad 3x + 2 \\ \times \quad x - 5 \\ \hline -15x - 10 \\ 3x^2 + 2x \\ \hline 3x^2 - 13x - 10 \end{array}$$

• Calcul posé

1 On écrit bien les termes dans l'ordre :
terme en x + nombre.

2 On multiplie comme avec des nombres :
« -5 fois $2 = -10$ », « -5 fois $3x = -15x$ » etc.
puis on ajoute.

FIGURE 3.11 – La technique de *Calcul posé* pour développer un produit dans la distributivité double dans le manuel 4HO11 (méthode 3 p. 90)

Pour chaque manuel et afin de repérer la part d'activation d'ostensifs et de non-ostensifs dans les techniques, nous avons relevé les ingrédients constitutifs du discours technologique à partir des critères suivants :

- Structure : Le manuel fait-il référence à la structure des expressions ? Discours du type « On reconnaît une différence de deux carrés ».
- Forme : Le manuel fait-il référence à la forme des expressions ? Discours du type « On reconnaît la forme $(a - b)^2$ ».
- Flèches : Des ostensifs graphiques comme des flèches, des traits soulignants, ou des encadrés sont-ils utilisés pour le développement (cf. la figure 3.12) ou la mise en évidence d'un facteur commun ?
- Couleur : Des ostensifs graphiques comme les couleurs ou la typographie grasse sont-ils utilisés pour organiser et mener à bien les calculs ?
- Discours : Un discours du type « On enlève les parenthèses » est-il utilisé ?
- Propriété : La propriété utilisée est-elle nommée ou énoncée ?
- Identification : Dans le cas où la propriété est énoncée, y a-t-il une identification entre les variables générales et les variables particulières de l'expression ? Par exemple, pour développer $x(x+3)$, on utilise la propriété $a(b+c) = ab+ac$ avec $a = x$, $b = x$ et $c = 3$.

L'analyse est présentée dans le tableau 3.22. Nous mettons en évidence plusieurs types de discours technologiques :

1. Les manuels qui ne proposent pas de discours. Un manuel est concerné.
2. Les manuels qui proposent un discours soutenu par des ostensifs graphiques de type flèches pour indiquer l'utilisation de la distributivité ou de type « couleurs » pointant les opérations à effectuer et par la description des actions comme « *On supprime les parenthèses* », « *On met en facteur* » qui sont censés à eux seuls indiquer comment s'applique la propriété mise en jeu. Ces discours sont guidés par des ostensifs. Il n'y a pas de référence aux propriétés mobilisées. Nous illustrons ce discours dans la figure 3.12. Sept manuels sont concernés.

Manuel	Struc- -ture	Forme	Flèches	Couleurs	Discours	Ptés.	Identi- -fication
Type de discours 1							
5TR10	N	N	N	N	N	N	N
Type de discours 2							
2HY09	N	N	N	O	N	N	N
5PH06	N	N	O	O	O	N	N
4PH07	N	N	O	O	O	N	N
5PH10	N	N	O	O	O	N	N
4PH11	N	N	O	O	N	N	N
5MP10	N	N	O	O	O	N	N
4MP11	N	N	O	O	O	N	N
Type de discours 3							
4HO11	O	O	O	O	O	O	N
4TR11	N	N	N	N	O	O	N
3TR08	O	O	N	N	O	O	O
2Mx10	O	O	N	O	O	O/N	N
2IN09	O	O	N	N	O	N	N
Type de discours 4							
3PH12	O/N	O/N	O	O	O	O/N	O/N
3PH08	N	O	O	O	O	O/N	O/N
3MP12	O/N	N	N	O	O/N	O	O
Légende : O=Oui, N=Non, O/N= cela dépend des expressions. Dans les manuels de 3 ^e et de 2 ^{de} , c'est souvent <i>Oui</i> pour les transformations qui relèvent de la distributivité et <i>Non</i> pour celles qui relèvent des identités remarquables.							

TABLEAU 3.22 – Les ingrédients constitutifs du discours technologique associés aux genres de tâches *Développer* et *Factoriser* dans les manuels

3. Les manuels qui appuient leur discours sur au moins un élément non-ostensif (structure ou propriété). Six manuels sont concernés et la moitié concerne des manuels de 2^{de}. Notons que les flèches et les couleurs sont très peu utilisées dans ces manuels. Ces manuels convoquent plus explicitement l'identification de la structure (type de tâches de OM2 $T_{Structure}$) des expressions pour reconnaître la propriété à utiliser, les réécritures de termes qui en découlent (type de tâches de OM3 T_{R-carr}). Nous illustrons ce discours dans la figure 3.13. Soulignons, dans cet exemple, la place des formes interrogatives et la distinction entre *Je cherche* et *Je rédige*.
4. Les manuels qui ont un discours intermédiaire entre les types 2 et 3, c'est-à-dire ceux dans lesquels des traces des structures et des propriétés apparaissent au moins une fois, souvent pour appliquer les identités remarquables. Il s'agit de trois manuels de 3^e. C'est donc le discours ostensif qui domine. Nous illustrons ce discours dans la figure 3.14.

$H = 7x(x-6) + (3x-2)(4x+5).$	→	On développe.
$H = 7x \times x - 7x \times 6 + (3x \times 4x + 3x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5)$		
$H = 7x^2 - 42x + 12x^2 + 15x - 8x - 10$	→	On supprime les parenthèses.
$H = 7x^2 + 12x^2 - 42x + 15x - 8x - 10$	→	On regroupe les termes en x et en x^2 .
$H = (7 + 12)x^2 + (-42 + 15 - 8)x - 10$	→	On simplifie en ordonnant.
$H = 19x^2 - 35x - 10$		

FIGURE 3.12 – Utilisation de flèches pour outiller le développement dans le manuel 4MP11 (méthode 3 p. 81)

En utilisant une identité remarquable

EXERCICE : Factoriser l'expression : $A = 9x^2 + 12x + 4$

ÉTAPES :

a) Je cherche

(1) Quels sont les termes de cette somme ?

(2) Dans ces termes y-a-il un facteur commun ?

(3) Puis-je utiliser une identité remarquable ?

(4) Je peux donc utiliser l'identité : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

b) Je rédige

J'applique l'identité :

• Ce sont $9x^2$, $12x$ et 4

• Non.

• Il y a trois termes dont deux carrés. Peut-être $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

• Avec $a^2 = 9x^2$ et $b^2 = 4$, on peut prendre $a = 3x$ et $b = 2$ et on a bien $2ab = 12x$

SOLUTION :

$A = 9x^2 + 12x + 4$

$A = (3x + 2)^2$

FIGURE 3.13 – Technique de factorisation par les identités remarquables dans le manuel 3TR08 (méthode 3 p. 118)

Au collège, le discours technologique qui accompagne la technique d'instanciation a davantage recours aux ostensifs (couleurs, flèches) qu'aux non-ostensifs. Dix des

• Factoriser $L = 9x^2 + 25y^2 - 30x$.		
Étape 1	$L = 9x^2 - 30x + 25y^2$	Je repère les carrés (en vert dans cet exemple). En effet, $9x^2 = (3x)^2$ et $25y^2 = (5y)^2$.
Étape 2	$L = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5y + (5y)^2$	L est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5y$. Je vérifie le double produit et son signe.
Étape 3	$L = (3x - 5y)^2$.	Je factorise en utilisant l'identité : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
• Factoriser $M = 16x^2 - 49$.		
Étape 1	$M = 16x^2 - 49$	Je reconnais une différence de deux carrés . En effet, $16x^2 = (4x)^2$ et $49 = 7^2$.
Étape 2	$M = (4x)^2 - 7^2$	M est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 7$.
Étape 3	$M = (4x + 7)(4x - 7)$.	Je factorise en utilisant l'identité : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

FIGURE 3.14 – Technique de factorisation par les identités remarquables dans le manuel 3PH08 (cours p. 38)

treize manuels du collège analysés sont concernés, ce qui représente une caractéristique dominante de l'OM à enseigner au collège. Ce recours aux ostensifs est marqué par un jeu de couleurs, l'apparition de flèches pour appliquer la règle de distributivité ou des verbes d'action qui conduisent à la reconnaissance de signes plutôt que de structures comme dans « *On reconnaît la forme $(a - b)^2$* », « *On observe trois termes précédés du signe +* » ou encore « *On supprime les parenthèses* ». Il est probablement accentué en classe par des ostensifs oraux et gestuels de l'enseignant. L'aspect syntaxique des expressions est plus mis en avant que l'aspect sémantique des expressions. Ce n'est pas l'appui sur les ostensifs qui nous interpelle mais le faible lien qui est fait avec les non-ostensifs. La convocation des types de tâches impliqués dans l'instanciation comme la reconnaissance de la structure et de la propriété à appliquer est souvent laissée implicite et à la charge des élèves. Les règles de calculs utilisées sont rarement explicitées, comme si le calcul algébrique fonctionnait sans propriétés. L'activation des non-ostensifs n'est donc possible que par les seuls discours du type « *On met en facteur* », « *On distribue* », dont on peut supposer qu'il favorise la construction d'une technologie permettant un contrôle de l'action pour des expressions simples mais qu'elle peut s'avérer insuffisante, notamment au lycée, pour traiter des expressions de structure complexe. En effet, c'est une dialectique entre ostensifs et non-ostensifs qui peut encourager le développement d'une intelligence du calcul, la construction d'automatismes guidant les manipulations algébriques à effectuer en fonction du but visé.

Le lien avec les non-ostensifs reste probablement implicite pour un certain nombre d'élèves. Le recours aux ostensifs peut fonctionner au collège puisque les formes des expressions étudiées sont peu diversifiées mais il peut contribuer à l'émergence de

difficultés à l'arrivée en seconde. L'algèbre n'y est plus étudiée pour elle-même mais comme un outil au service des fonctions. D'ailleurs, les manuels de seconde mettent davantage en jeu les non-ostensifs dans les parties *Cours et méthodes* puisque deux d'entre eux proposent un discours de type 3. Notons, à ce propos, que ces deux manuels (2IN09 et 2Mx10) sont de la catégorie qui inclut les expressions algébriques au niveau du secteur alors que le troisième 2HY09, qui propose un discours de type 2, les inclut seulement au niveau d'un thème. La structuration des manuels de seconde mise en évidence dans l'analyse écologique a donc une influence sur le type de discours proposé.

A propos de l'OM ponctuelle $T_{Prouver-equiv}$ Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre

Ce type de tâches, constitutif de OM2, est présent dans trois manuels (cf. tableau 3.21). Les deux techniques annoncées dans l'OM de référence sont sollicitées. La première, adoptée par les manuels 4PH11 et 2Mx10 (cf. figure 3.15), est basée sur la conjecture et la preuve. La conjecture consiste à tester l'égalité avec des valeurs numériques. C'est donc la dialectique numérique-algébrique qui est en jeu. La preuve dépend de l'égalité ou non des expressions. Si elles ne sont pas égales, elle consiste à donner un contre-exemple numérique. Au contraire, si elles sont égales, elle consiste en une preuve algébrique basée sur la mobilisation et l'usage des règles de calcul. La seconde, adoptée par le manuel 5TR10 (cf. figure 3.16) est basée sur la comparaison des expressions trouvées après développement et réduction. Ce manuel ajoute l'étape de recherche d'un contre-exemple dans le cas d'expressions non équivalentes.

Ces techniques sont justifiées par des apports technologico-théoriques qui font appel à la quantification et à des notions de logique même en classe de 5^e. Par exemple, on peut lire :

- Manuel 5TR10 page 126 : « *“Deux expressions littérales sont égale” signifie qu’elles donnent le même résultat, quelle que soit la valeur attribuée à la lettre.* »
- Manuel 4HO11⁹ page 88 : « *Écrire que $3x \times 4 = 12x$ signifie que, quand on donne une valeur à x , n’importe laquelle, et que l’on calcule les expressions $3x \times 4$ et $12x$, elles donnent toujours le même résultat.* »
- Manuel 2Mx10 page 85 : « *Pour démontrer que deux expressions ne sont pas*

9. Le type de tâches *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* n'est pas explicitement présent dans le manuel 4HO11, néanmoins, des éléments technologico-théoriques y sont présents.

égales pour tout x , il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas égalité, c'est un contre-exemple. Pour démontrer que des expressions sont égales pour tout x , des exemples ne suffisent pas, il faut le démontrer par le calcul algébrique. »

ÉNONCÉ On se demande si les expressions littérales ci-contre sont égales.

1) a) Calculer l'expression A pour $x=0$. $A = x(5x - 3) + 6$
 b) Calculer l'expression B pour $x=0$. $B = 5x^2 + 3$
 c) Les expressions A et B sont-elles égales? Justifier la réponse.

2) a) Calculer l'expression C pour $x=0$. $C = 5x^2 + 3(2 - x)$
 Les expressions A et C peuvent-elles être égales?
 b) Les expressions A et C sont-elles égales? Justifier la réponse.

SOLUTION

1) a) Pour $x=0$: $A = 0 \times (0 - 3) + 6 = 0 + 6 = 6$.
 b) Pour $x=0$: $B = 5 \times 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$.
 c) On constate que pour $x=0$, on a : $A \neq B$.
 Donc les expressions A et B ne sont pas égales.

2) a) Pour $x=0$: $C = 5 \times 0^2 + 3 \times (2 - 0) = 0 + 3 \times 2 = 6$.
 Pour $x=0$, les expressions A et C donnent le même résultat, ainsi ces expressions peuvent être égales, mais ce n'est pas sûr.

b) Développons les expressions A et C.
 $A = x(5x - 3) + 6 = 5x^2 - 3x + 6$
 $C = 5x^2 + 3(2 - x) = 5x^2 + 6 - 3x = 5x^2 - 3x + 6$
 Donc les expressions A et C sont égales.

Ceci ne prouve pas que ce soit le cas pour toutes les valeurs de x .

On ne peut pas calculer A et C pour toutes les valeurs de x ; il faut utiliser le calcul littéral.




FIGURE 3.15 – Prouver que deux expressions sont égales dans le manuel 4PH11 (méthode 1 p. 68)

Méthode >> **Exercice** : Y a-t-il égalité entre :
 $C = 2 \times (2 + 3x)$ et $D = 3x + 7x$?

ÉTAPES

(1) Je simplifie l'une des expressions ou les deux.
 (2) Je compare les expressions trouvées :
 - si elles sont identiques, je conclus ;
 - si elles ne sont pas identiques, je teste pour trouver un contre-exemple.
 (3) Je conclus.

EXAMEN

$C = 2 \times (2 + 3x)$ $D = 3x + 7x$
 $C = 4 + 6x$ $D = 10x$
 Les expressions ne sont pas identiques.
 Je teste pour $x = 2$:
 $C = 4 + 6 \times 2$ $D = 10 \times 2$
 $C = 4 + 12$ $D = 20$
 $C = 16$ $D = 20$
 Donc il n'y a pas égalité entre C et D.




FIGURE 3.16 – Prouver que deux expressions sont égales dans le manuel 5TR10 (méthode 2 p. 128)

Ainsi, dans les manuels où ce type de tâches apparaît, il fait l'objet de quelques « méthodes » (souvent deux ou trois) proposées par les manuels, ce qui lui donne une importance par rapport aux autres. Les techniques et le niveau technologico-théorique développés accordent une place à la dialectique algébrique-numérique et à

la preuve d'un énoncé vrai ou faux, ce qui n'est pas le cas pour les autres OM ponctuelles développées. Néanmoins, ce type de tâches, lorsqu'il apparaît, est déconnecté des autres et ne répond à aucune raison d'être. Il n'est pas mis en perspective par rapport au contrôle des calculs.

La validation des calculs, un questionnement quasiment inexistant

La transformation des expressions algébriques est centrale dans les parties *Cours et méthodes* des manuels. Des techniques sont établies mais la question de la validation et du contrôle des résultats est quasiment inexistante dans les manuels du collège et de seconde. Les genres de tâches T_{tester} *Tester l'égalité de deux expressions* et $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre*, lorsqu'ils vivent dans les manuels, sont souvent présentés isolément du contrôle des calculs alors qu'ils offrent des techniques pour l'exercer. C'est par exemple le cas des manuels Phare de 5^e et de 4^e (cf. tableaux 3.21 et 3.23) qui, en suivant les injonctions du programme¹⁰, laissent une place importante à T_{tester} mais à travers des tâches isolées et probablement pour faire le lien avec la recherche de la solution d'une équation. Seuls trois manuels évoquent la validation des résultats :

- Les manuels 4PH07 et 4PH11 (cf. figure 3.17) proposent de contrôler les calculs. Notons que, dans le manuel 4PH07, de 2007, aucun élément technico-théorique ne vient justifier le contrôle des calculs, ce qui n'est plus le cas dans la version de 2011.
- Le manuel 2IN09 propose deux types de contrôle (cf. figure 3.18). Le premier met en jeu le caractère réciproque du développement et de la factorisation : « *On peut toujours vérifier une factorisation en développant.* ». Le second met en jeu la dialectique algébrique-numérique ou la dialectique algébrique-graphique. Notons cependant, que le manuel ne mentionne pas le choix des valeurs numériques en lien avec l'économie des calculs.
- Ajoutons que, dans les éditions de 2007 et 2011 du manuel de la collection Transmath de 4^e, non analysé dans cette étude, le contrôle des calculs fait l'objet d'une méthode s'appuyant sur la dialectique algébrique-numérique (cf. figure 3.19). Le contrôle exercé met en jeu deux types de vérification : celle à partir de la comparaison des termes de plus haut degré et des termes constants et celle à partir du test d'une égalité puis la preuve à partir du type de tâches

10. Rappelons que le type de tâches *Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques* est présent dans les programmes de la classe de cinquième, voir § 3.3.5, 107.

Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre.

Énoncé :

- Développer l'expression $E = -4(5a - 7)$.
- Développer puis réduire l'expression $F = (6x + 3)(x - 5)$.
 - Tester le résultat pour $x = 1$.

Solution :

- $$E = -4(5a - 7)$$

$$E = -4 \times 5a + (-4) \times (-7)$$

$$E = -20a + 28.$$

Je distribue (-4) à (5a) et à (-7).
- $$F = (6x + 3)(x - 5)$$

$$F = 6x \times x + 6x \times (-5) + 3 \times x + 3 \times (-5)$$

$$F = 6x^2 - 30x + 3x - 15$$

$$F = 6x^2 - 27x - 15.$$

Je distribue 6x à x et à (-5) puis je distribue 3 à x et à (-5).
 - Test pour $x = 1$:

$$F = (6x + 3)(x - 5) = (6 \times 1 + 3)(1 - 5) = (6 + 3)(-4) = 9 \times (-4) = -36$$

$$F = 6x^2 - 27x - 15 = 6 \times 1^2 - 27 \times 1 - 15 = 6 - 27 - 15 = -36$$

Le résultat obtenu au a) après avoir développé et réduit F semble correct.

Mon test est réussi mais je ne peux pas affirmer que mon résultat est juste.

FIGURE 3.17 – Développement associé à un contrôle des calculs dans le manuel 4PH07 (méthode 2 p. 75)

<p>■ Des outils de vérification</p> <p>Pour vérifier une factorisation que l'on vient d'effectuer, on dispose de deux approches.</p>	<p>■ Vérification absolue</p> <p>Développer ce que l'on vient de trouver : par exemple, si l'on a trouvé la factorisation $x^2 - (2x + 1)^2 = (-x - 1)(3x + 1)$, on développe chacun des membres pour vérifier.</p> <p>■ Vérifications pratiques, mais non absolues</p> <p>Vérifier le résultat trouvé pour quelques valeurs simples de x : par exemple, on peut vérifier la factorisation $(x - 5)(x + 2) + (x + 2)(2x - 1) = 3(x + 2)(x - 2)$ en calculant que les deux membres donnent bien -12 pour $x = 0$, et 0 pour $x = 2$.</p> <p>Vérifier à l'aide de la calculatrice : dans l'éditeur de fonctions, entrer l'expression donnée dans Y1, puis l'expression factorisée dans Y2. Demander alors le tracé des deux courbes représentatives ou les tableaux de valeurs et comparer.</p>
---	--

FIGURE 3.18 – Le contrôle des calculs dans le manuel Indice 2^{de} 2009 (TP 2 p. 43)

Les rôles joués par OM2 et par OM1, qui amènent à concevoir une expression comme le résultat d'un programme de calcul, vis-à-vis de OM3 pour contrôler les calculs, sont très peu présents dans les manuels. Même si des types de tâches de OM2 sont travaillés, ils ne sont pas convoqués pour contrôler les résultats. Pourtant, le contrôle est un moyen de développer, au niveau technologico-théorique, l'intelligence des calculs, il peut être l'occasion de revenir sur des erreurs fréquentes de calcul. Il permet de travailler sur la dénotation des expressions.

A propos de la reconnaissance de la structure des expressions

Le genre de tâches $T_{structure}$ n'apparaît pas dans les parties Cours et Méthodes. Nous complétons cette remarque par une analyse des parties *Activités*. Celles qui

2 Contrôler une égalité

Énoncé

Voici ci-contre un développement effectué par Xavier.

a. Xavier souhaite contrôler sa réponse. Comment peut-il faire ?

b. Si Xavier s'est trompé, développer B correctement.

$$B = (3x + 4)(-x - 1,5)$$

$$B = -3x^2 + 8,5x - 6$$

Solution

a. • Xavier peut vérifier mentalement :

- le terme « en x^2 » : $3x \times (-x) = -3x^2$ ←
- le terme « constant » : $4 \times (-1,5) = -6$.

Donc pour l'instant Xavier n'a pas commis d'erreur.

• Xavier peut aussi tester l'égalité, par exemple, pour $x = 1$. Il remplace donc x par **1** dans les deux expressions de B.

$$(3 \times 1 + 4)(-1 - 1,5) = 7 \times (-2,5) = -17,5$$

$$-3 \times 1^2 + 8,5 \times 1 - 6 = -3 + 8,5 - 6 = -0,5$$

Or $-17,5 \neq -0,5$ donc Xavier a commis une erreur.

b. $B = (3x + 4)(-x - 1,5)$

$$B = 3x \times (-x) + 3x \times (-1,5) + 4 \times (-x) + 4 \times (-1,5)$$

$$B = -3x^2 - 4,5x - 4x - 6$$

$$B = -3x^2 - 8,5x - 6$$
 ←

Si l'une de ces vérifications n'est pas cohérente avec le développement obtenu, alors on peut conclure à une erreur.

Lors du test d'une égalité :

- un seul contre-exemple suffit à conclure à une erreur ;
- si l'on ne trouve pas de contre-exemple, **on ne peut pas avoir la certitude** que l'égalité soit vraie car on ne peut pas envisager tous les nombres relatifs.

On réduit la somme algébrique.

FIGURE 3.19 – Le contrôle des calculs dans le manuel Transmath 4^e de 2011 (méthode 2 p. 80)

mettent en jeu la reconnaissance de la structure des expressions concernent les trois manuels 4HO11, 2Mx10 et 2IN09. Les sommes et les produits sont identifiés à partir de la représentation en arbre des expressions algébriques. Ainsi, il ressort que seuls quelques manuels rendent explicite l'aspect structural des expressions et amènent à la dialectique prodécural-structural. Dans les autres manuels, cet aspect reste implicite.

En conclusion, les types de tâches intermédiaires et les discours technologiques liés à l'interprétation de la structure des expressions, à la reconnaissance des propriétés à utiliser, à la réécriture sont peu convoqués dans les parties *Cours et méthodes* des manuels analysés. Cela donne peu de conditions pour agréger les OM ponctuelles.

A propos du choix de l'expression la plus adaptée

Le type de tâches T_{Choisir} apparaît au niveau T-convoqué dans les manuels de seconde de la première catégorie, il est absent dans les manuels analysés du collège (cf. tableau 3.21 page 132). Il est convoqué dans le cadre des fonctions, ce qui correspond aux programmes (cf. figure 3.20). Il donne une raison d'être au calcul algébrique. Il permet de travailler l'intelligence des calculs en fonction du but visé. La dénotation et le sens des expressions y sont centraux.

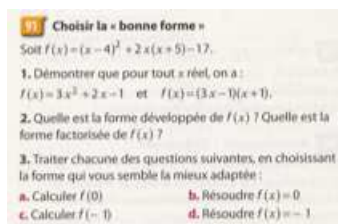


FIGURE 3.20 – Convocation de $T_{Choisir}$ dans le manuel Math'x 2^{de} de 2010 (exercice 91 p. 97)

d. Analyse des parties *Exercices*

Pour analyser les parties *Exercices*, nous avons relevé, dans chaque manuel, le nombre d'apparition des types de tâches constitutifs de chaque OM locale de référence (cf. tableaux 3.1, 3.2 et 3.3) afin de repérer ceux qui ne sont jamais ou peu travaillés. Pour faciliter la lecture, les résultats obtenus sont répartis dans quatre tableaux : les tableaux 3.23, 3.24 et 3.26 pour le collège et le tableau 3.25 pour la seconde. Son interprétation nécessite quelques précisions sur la façon dont l'analyse a été conduite :

1. Seuls les exercices convoquant les types de tâches au niveau T-convoqué sont comptabilisés¹¹,
2. Un exercice peut convoquer plusieurs types de tâches au niveau T-convoqué,
3. Une cellule vide signifie que le type de tâches considéré n'est pas convoqué,
4. Les types de tâches suivants viennent compléter ceux de OM2 :
 - $T_{Produire-egale}$: Produire une expression égale à une autre (par exemple, Produire des expressions égales à $6n + 12$),
 - $T_{Compléter-exp}$: Compléter des expressions pour qu'elles soient égales pour tout x , (par exemple, compléter $-4x + \dots = 10x$ pour que l'égalité soit vérifiée pour tout x),
 - $T_{Calculer-relation}$: Calculer la valeur d'une expression algébrique connaissant une relation numérique liant les variables, (par exemple, sachant que $a + b = 15$ et $a^2 - b^2 = 45$, calculer $a - b$),

11. De ce point de vue, notre analyse présente des limites. La convocation des types de tâches de OM3 au niveau R-convoqué dans la résolution des équations-produits ou dans la résolution de problèmes mériterait d'être analysée car elle permet de motiver l'usage de la factorisation et l'introduction des identités remarquables. Nous illustrons un exemple de ce type d'analyse sur un exercice proposé au brevet des collèges en 2007 à la page 159.

5. En seconde, les problèmes fonctionnels ne sont pas analysés. Cela aurait nécessité d'élargir notre référentiel de types de tâches aux fonctions.

Enfin, nous consacrons un paragraphe entier à l'étude de la complexité des expressions mises en jeu dans les genres de tâches *Développer* et *Factoriser*.

A propos de la présence de OM1

La production d'expressions $T_{Produire-exp/formule}$ n'est pas également présente d'un manuel à l'autre. Les manuels 5PH06, 5PH10, 4PH11, 3PH08 et 4MP11 convoquent ce type de tâches dans moins de 10% des exercices. Les manuels 4PH07, 3PH12, 5MP10, 5TR10, 4TR11 et 3TR08 le convoquent dans plus de 10% et moins de 20% des exercices. Les manuels 3PH12 et 4HO11 le convoquent dans plus de 20% des types de tâches. Le manuel 3PH12 se distingue des autres manuels de cette collection, ce qui peut être mis en relation avec l'habitat qui est laissé à l'algèbre. Rappelons qu'il propose deux chapitres relatifs à l'algèbre ce qui est favorable à davantage d'exercices consacrés à la résolution de problèmes dans les chapitres relatifs à l'algèbre.

Les types de tâches du genre *Traduire* et *Associer* sont convoqués. La traduction l'est principalement dans le sens « registre de représentation sémiotique » vers celui des écritures algébriques. L'autre sens, qui met en jeu l'aspect structural des expressions, est très peu présent.

Les programmes de calcul sont présents mais nous n'avons rencontré le type de tâches *Prouver que deux programmes de calcul sont équivalents* que dans un manuel. Les programmes de calcul interviennent mais ponctuellement, sans être l'occasion de revenir sur les liens entre les trois OM locales (cf. §OM-reference) de l'OM régionale sur les expressions algébriques.

A propos de la présence de OM2

OM2 est présente mais le nombre d'exercices convoquant des types de tâches de OM2 est faible par rapport à OM3. La dénotation et le sens des expressions sont donc peu travaillés ou laissés implicites aux élèves. La quantification est souvent omise, ce qui dénature la majorité des types de tâches de OM2. Les consignes sous-entendent que les expressions sont égales *pour tout x*, qu'il est demandé de compléter les égalités pour qu'elles soient vraies *pour tout x*.

Le type de tâches T_{Tester} est très présent dans les manuels Phare. Mais il vit dans des tâches isolées avec des consignes standardisées du type « *Calculer la valeur de $A = \dots$ pour $x = \dots$* ». Il intervient davantage, comme le préconise le programme

Genre	Type de tâches	Phare										Horizon			
		5e 06		5e 10		4e 07		4e 11		3e 08		3e 12		4e 11	
Total exercices		94		101		120		82		109		192		168	
OM1															
Produire	T_{Produire-exp/formule}	8	8,5%	6	5,9%	15	12,5%	6	7,3%	8	7,3%	33	17,2%	40	23,8%
	T_{Exp> Prog}			1	1,0%									3	1,8%
	T_{Prog> Exp}	3	3,2%	3	3,0%	4	3,3%	2	2,4%			11	5,7%	8	4,8%
	T_{Exp> LgNat}			1	1,0%										
	T_{LgNat> Exp}	1	1,1%	5	5,0%	1	0,8%			3	2,8%	3	1,6%	1	0,6%
	T_{Exp> Longueur}														
	T_{Longueur > Exp}					2	1,7%	1	1,2%	4	3,7%	1	0,5%	5	3,0%
	T_{Exp> Perimetre}			1	1,0%									1	0,6%
	T_{Perimetre > Exp}	10	10,6%	4	4,0%	3	2,5%	5	6,1%	1	0,9%	3	1,6%	4	2,4%
	T_{Exp> Aire}			1	1,0%	1	0,8%					1		1	0,6%
	T_{Aire> Exp}	2	2,1%	2	2,0%	4	3,3%	3	3,7%	7	6,4%	10	5,2%	7	4,2%
	T_{Exp> Volume}														
	T_{Volume> Exp}							1	1,2%					1	0,6%
	T_{Exp> Angle}														
	T_{Angle> Exp}													1	0,6%
	T_{Relation> Formule}	10	10,6%	2	2,0%	1	0,8%	3	3,7%	2	1,8%	10	5,2%	1	0,6%
	T_{Formule> Relation}														
T_{Pteari> Exp}	1	1,1%	1	1,0%	9	7,5%	1	1,2%			2	1,0%	2	1,2%	
T_{Exp > Pteari}	1	1,1%			1	0,8%			1	0,9%			5	3,0%	
T_{Arbre> Exp}													1	0,6%	
T_{Exp> Arbre}													2	1,2%	
Associer	T_{A-Exp-Aire}	1	1,1%			1	0,8%	1	1,2%			1	0,5%	1	0,6%
	T_{A-Exp-Perimetre}	2	2,1%	2	2,0%	1	0,8%							1	0,6%
	T_{A-Exp-Longueur}													1	0,6%
	T_{A-Exp-Volume}														
	T_{A-Exp-Prog}	1	1,1%	1	1,0%	1	0,8%					1	0,5%	1	0,6%
	T_{A-Exp-LgNat}	1	1,1%	1	1,0%										
T_{A-Relation-Formule}															
OM2															
Tester	T_{Tester}	6	6,4%	21	20,8%	16	13,3%	17	20,7%			8	4,2%	1	0,6%
Preuve	T_{Preuve-equiv}	2	2,1%	7	6,9%	1	0,8%	7	8,5%	7	6,4%	6	3,1%	4	2,4%
Structure	T_{Structure-somme}					3	2,5%							7	4,2%
	T_{Structure-produit}					3	2,5%							4	2,4%
	T_{Structure-carre}														
Choisir	T_{Choisir}											13	6,8%		
Associer	T_{Associer}	7	7,4%	7	6,9%			8	9,8%	8	7,3%	10	5,2%	7	4,2%
Produire e	T_{Produire-egale}														
Compléter	T_{Completer-exp}									3	2,8%	3	1,6%	4	2,4%
Calculer	T_{Calculer-relation}														
OM3															
Développe	T_{DDS-mon x som}	1	1,1%	12	11,9%	6	5,0%	3	3,7%	7	6,4%	7	3,6%	14	8,3%
	T_{DDS-entier x som}	8	8,5%	9	8,9%	18	15,0%	13	15,9%	6	5,5%	12	6,3%	19	11,3%
	T_{DDD-som x som}					16	13,3%	8	9,8%	16	14,7%	18	9,4%	20	11,9%
	T_{DIR-som x diff}									7	6,4%	23	12,0%	1	0,6%
	T_{DIR-car}									19	17,4%	40	20,8%	2	1,2%
Factoriser	T_{FA/mon}	3	3,2%	6	5,9%	4	3,3%	5	6,1%	2	1,8%	2	1,0%	2	1,2%
	T_{FA/som}									13	11,9%	27	14,1%		
	T_{FA-mon + mon}			12	11,9%	19	15,8%	7	8,5%	3	2,8%	4	2,1%	10	6,0%
	T_{FA*/mon}	2	2,1%	3	3,0%	5	4,2%	2	2,4%	3	2,8%	1	0,5%	9	5,4%
	T_{FA*/som}									9	8,3%				
	T_{FNA/mon}					2	1,7%			3	2,8%	1	0,5%	5	3,0%
	T_{FNA/som}									2	1,8%				
	T_{FIR-diff}									13	11,9%	24	12,5%		
T_{FIR-som}									13	11,9%	15	7,8%			
Réécrire	T_{R-carre}									1	0,9%				
	T_{R-canonique}	2	2,1%	6	5,9%							2	1,0%	5	3,0%

TABLEAU 3.23 – Nombre et pourcentage d'exercices convoquant chaque type de tâches dans les manuels des collections *Phare* et *Horizon*

Genre	Type de tâches	MathenPoche						Triangle					
		5e10		4e 11		3e 12		5e 10		4e 11		3e 08	
Total exercices		67		59		68		112		139		134	
OM1													
Produire	T_{Produire-exp/formule}	9	13,4%	5	8,5%	22	32,4%	14	12,5%	18	12,9%	21	15,7%
	T_{Exp> Prog}	2	3,0%	1	1,7%			1	0,9%	1	0,7%		
	T_{Prog> Exp}	2	3,0%	2	3,4%	6	8,8%	8	7,1%	7	5,0%	4	3,0%
	T_{Exp> LgNat}	1	1,5%			1	1,5%						
	T_{LgNat> Exp}	2	3,0%	1	1,7%	1	1,5%					1	0,7%
	T_{Exp> Longueur}												
	T_{Longueur > Exp}	1	1,5%			2	2,9%	5	4,5%	4	2,9%	3	2,2%
	T_{Exp> Perimetre}												
	T_{Perimetre > Exp}	4	6,0%	2	3,4%	1	1,5%	5	4,5%	4	2,9%	3	2,2%
	T_{Exp> Aire}												
	T_{Aire> Exp}	3	4,5%	4	6,8%	7	10,3%	1	0,9%	8	5,8%	10	7,5%
	T_{Exp> Volume}												
	T_{Volume> Exp}			1	1,7%					2	1,4%	3	2,2%
	T_{Exp> Angle}												
T_{Angle> Exp}									2	1,4%			
T_{Relation> Formule}	7	10,4%	6	10,2%	4	5,9%	15	13,4%	9	6,5%	3	2,2%	
T_{Formule> Relation}									2	1,4%			
T_{Pteari> Exp}	3	4,5%	1	1,7%	1	1,5%			1	0,7%	1	0,7%	
T_{Exp > Pteari}											1	0,7%	
T_{Arbre> Exp}	1	1,5%											
T_{Exp> Arbre}	1	1,5%											
Associer	T_{A-Exp-Aire}	1	1,5%	1	1,7%							1	0,7%
	T_{A-Exp-Perimetre}	1	1,5%	1	1,7%								
	T_{A-Exp-Longueur}	1	1,5%										
	T_{A-Exp-Volume}			1	1,7%								
	T_{A-Exp-Prog}			1	1,7%			2	1,8%				
	T_{A-Exp-LgNat}			1	1,7%								
T_{A-Relation-Formule}							1	0,9%	2	1,4%			
OM2													
Tester	T_{Tester}	8	11,9%			1	1,5%	6	5,4%				
Preuve	T_{Preuve-equiv}	4	6,0%	2	3,4%	1	1,5%	13	11,6%	7	5,0%	10	7,5%
	T_{Structure-somme}					1	1,5%			1	0,7%	1	0,7%
	T_{Structure-produit}			2	3,4%					1	0,7%	1	0,7%
Structure	T_{Structure-carre}											1	0,7%
	T_{Choisir}					1	1,5%						
Associer	T_{Associer}	3	4,5%	6	10,2%	8	11,8%	5	4,5%	15	10,8%	1	0,7%
Produire e	T_{Produire-egale}							1	0,9%				
Compléter	T_{Completer-exp}					1	1,5%			6	4,3%	2	1,5%
Calculer	T_{Calculer-relation}	1	1,5%					3	2,7%	4	2,9%	6	4,5%
OM3													
Développe	T_{DDS-mon x som}	4	6,0%	7	11,9%	3	4,4%			15	10,8%		
	T_{DDS-entier x som}	4	6,0%	11	18,6%	4	5,9%	10	8,9%	25	18,0%	4	3,0%
	T_{DDD-som x som}			10	16,9%	9	13,2%			15	10,8%	14	10,4%
	T_{DIR-som x diff}			1	1,7%	4	5,9%					14	10,4%
	T_{DIR-car}			4	6,8%	13	19,1%					26	19,4%
Factoriser	T_{FA/mon}	2	3,0%			1	1,5%	6	5,4%			1	0,7%
	T_{FA/som}	1	1,5%	1	1,7%	7	10,3%					7	5,2%
	T_{FA-mon + mon}	3	4,5%	4	6,8%	1	1,5%	4	3,6%	18	12,9%	2	1,5%
	T_{FA*/mon}	3	4,5%	4	6,8%	1	1,5%					12	9,0%
	T_{FA*/som}					6	8,8%					9	6,7%
	T_{FNA/mon}	1	1,5%	2	3,4%								
	T_{FNA/som}					2	2,9%					1	0,7%
	T_{FIR-diff}					6	8,8%					22	16,4%
	T_{FIR-som}					5	7,4%					15	11,2%
Réécrire	T_{R-carre}												
	T_{R-canonique}	9	13,4%	1	1,7%	1	1,5%	2	1,8%	11	7,9%	10	7,5%

TABLEAU 3.24 – Nombre et pourcentage d'exercices convoquant chaque type de tâches dans les manuels des collections *MathenPoche* et *Triangle*

Genre	Type de tâches	Hyperbole		Indice		Math'x	
		IHY09		2IN09		2Mx10	
Total exercices		20		81		70	
OM1							
Produire	T_{Produire-exp/formule}	2	10,0%	17	21,0%	15	21,4%
Traduire	T_{Exp> Prog}						
	T_{Prog> Exp}	1	5,0%	2	2,5%	1	1,4%
	T_{Exp> LgNat}			3	3,7%		
	T_{LgNat> Exp}			6	7,4%	1	1,4%
	T_{Exp> Longueur}						
	T_{Longueur > Exp}			2	2,5%		
	T_{Exp> Perimetre}						
	T_{Perimetre > Exp}			3	3,7%	1	1,4%
	T_{Exp> Aire}						
	T_{Aire> Exp}			7	8,6%	1	1,4%
	T_{Exp> Volume}						
	T_{Volume> Exp}	1	5,0%	2	2,5%	1	1,4%
	T_{Exp> Angle}						
	T_{Angle> Exp}						
	T_{Relation> Formule}	2	10,0%	8	9,9%	1	1,4%
	T_{Formule> Relation}						
	T_{Pteari> Exp}			1	1,2%		
	T_{Exp > Pteari}			1	1,2%		
T_{Arbre> Exp}							
T_{Exp> Arbre}							
Associer	T_{A-Exp-Aire}					1	1,4%
	T_{A-Exp-Perimetre}						
	T_{A-Exp-Longueur}						
	T_{A-Exp-Volume}						
	T_{A-Exp-Prog}						
	T_{A-Exp-LgNat}						
	T_{A-Relation-Formule}						
OM2							
Tester	T_{Tester}	1	5,0%			4	5,7%
Preuve	T_{Preuve-equiv}			2	2,5%	4	5,7%
Structure	T_{Structure-somme}			4	4,9%		
	T_{Structure-produit}	1	5,0%	3	3,7%	3	4,3%
	T_{Structure-carre}						
Choisir	T_{Choisir}	1	5,0%	7	8,6%	2	2,9%
Associer	T_{Associer}					4	5,7%
Produire et	T_{Produire-egale}						
Compléter	T_{Compléter-exp}					2	2,9%
Calculer	T_{C-relation}					1	1,4%
OM3							
Développe	T_{DDS-mon x som}			3	3,7%	3	4,3%
	T_{DDS-entier x som}	1	5,0%	1	1,2%	1	1,4%
	T_{DDD-som x som}	2	10,0%	4	4,9%	7	10,0%
	T_{DIR-som x diff}	2	10,0%			3	4,3%
	T_{DIR-car}	6	30,0%	5	6,2%	10	14,3%
Factoriser	T_{FA/mon}					11	15,7%
	T_{FA/som}	3	15,0%	5	6,2%	6	8,6%
	T_{FA-mon + mon}						
	T_{FA*/mon}					2	2,9%
	T_{FA*/som}	4	20,0%	5	6,2%	4	5,7%
	T_{FNA/mon}	2	10,0%	2	2,5%	1	1,4%
	T_{FNA/som}	0					
	T_{FIR-diff}	4	20,0%	12	14,8%	10	14,3%
T_{FIR-som}	1	5,0%	2	2,5%	9	12,9%	
Réécrire	T_{R-carre}						
	T_{R-canonique}			1	1,2%	2	2,9%
	T_{Quotient}			13	16,0%	1	1,4%
Calculer	T_{C-num}						
	T_{CDS-num}					2	2,9%

TABLEAU 3.25 – Nombre et pourcentage d'exercices convoquant chaque type de tâches dans les manuels de la classe de 2^e

		PHare						MathenPoche			HOri	TRiangle		
	Total	06	10	07	11	08	12	10	11	12	11	10	11	08
OM1	28	12	14	13	9	7	11	15	14	9	20	9	12	11
OM2	10	3	3	4	3	3	5	4	3	6	6	5	6	7
OM3	19	7	8	8	7	18	15	9	12	16	13	6	7	16
Total	57	22	25	25	19	28	31	28	29	31	39	20	25	34

TABLEAU 3.26 – Nombre de types de tâches convoqués dans les manuels du collège

de collège de 5^e, dans la recherche d’une solution d’équation que pour tester si une identité est vraie ou fausse. Pourtant, un travail sur les identités vraies pour toute valeur présente l’intérêt d’offrir une démarche de contrôle des calculs.

Le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est présent dans tous les manuels mais dans très peu d’exercices ce qui laisse supposer qu’il est très peu travaillé. De plus, la présence du type de tâches n’informe pas sur sa mise en œuvre. On peut s’attendre à ce que leur résolution reste au niveau de la reconnaissance des signes (par exemple, il manque le double produit dans $(a + 2)^2 = a^2 + 4$) sans investir la dialectique entre le numérique et l’algébrique pour prouver et aborder soit le contre-exemple (cas d’une identité fausse), soit la preuve algébrique (identité vraie pour toute valeur). Les deux manuels 4PH11 et 5TR10, qui le faisaient intervenir dans les parties *Cours et exercices*, le réinvestissent dans davantage d’exercices mais dans des tâches d’application isolées. Très peu de manuels exploitent ce type de tâches pour amener les élèves à déstabiliser des erreurs à partir de contre-exemples bien choisis.

La reconnaissance de la structure ($T_{Structure}$) est quasiment absente au niveau T-convoqué. Nous avons souligné qu’elle l’est aussi au niveau R-convoqué dans OM3. Dans OM1, les traductions faisant intervenir l’aspect structural des expressions sont également peu présentes (types de tâches $T_{Exp \rightarrow LgNat}$, $T_{LgNat \rightarrow Exp}$, $T_{Arbre \rightarrow Exp}$, $T_{Exp \rightarrow Arbre}$). Les élèves sont peu souvent amenés à solliciter explicitement l’aspect structural des expressions.

Parmi les types de tâches $T_{Choisir}$, $T_{Associer}$, $T_{Produire-egale}$ et $T_{Completer-exp}$, le dernier est le plus convoqué en raison des questions à choix multiples situées en fin de chapitre pour « *Faire le point* ». Ces types de tâches sont dans l’ensemble peu présents, alors qu’ils présentent un réel intérêt pour mettre en jeu le sens et la dénotation des expressions.

A propos de la diversité et de la complexité des expressions rencontrées dans les exercices techniques

Pour présenter la place laissée à OM3 et étudier les conditions pour faire les liens

entre OM2 et OM3 dans les manuels, nous complétons nos analyses par celle de la diversité et de la complexité des expressions mises en jeu dans les exercices techniques (structure des expressions, degré, nombre de facteurs, nombre de termes, nature des coefficients, ...). L'analyse des parties *Cours et méthodes* a révélé une tendance des manuels à proposer un discours technologique qui guide le travail technique au niveau d'ostensifs, ce qui laisse une part d'implicite quant aux non-ostensifs impliqués. Dans ce paragraphe, nous souhaitons mettre en évidence que ce travail au niveau des ostensifs peut suffire au collège mais s'avérer insuffisant au lycée, étant donné le caractère standardisé des expressions rencontrées par les élèves au collège. Nous cherchons à apporter des éléments de réponse à la question suivante : quelle diversité et complexité des expressions rencontre-t-on dans les exercices techniques des manuels scolaires ?

Nous distinguons différents niveaux de description de la structure des expressions dans les genres de tâches *Développer* et *Factoriser* ce qui nous permet de définir un référentiel de types de tâches.

Nous commençons par désigner les expressions « élémentaires » constitutives de toute expression algébrique du niveau collège :

- le monôme (codé *mon*) du type aX^n avec a un réel et n un entier naturel,
- la somme (codé *som*) du type $aX^n + b$ avec a et b des réels et n un entier naturel,
- le carré (codé *car*) du type $(mon)^2$ ou $(som)^2$,
- le produit (codé *prod*) du type « *som* × *som* », « *mon* × *som* », « *mon* × *car* » ou « *som* × *car* ».

Pour le genre de tâches *Factoriser*, nous spécifions les types de tâches par les critères suivants, dans cet ordre :

- la visibilité du facteur commun,
- le nombre de termes de la somme,
- la structure de chaque terme : carré, produit, monôme, somme.

Pour le genre de tâches *Développer*, nous spécifions les types de tâches par les critères suivants, dans cet ordre :

- la structure de plus haut niveau de l'expression : produit ou somme,
- le nombre de facteurs ou de termes,
- la structure des facteurs ou des termes : carré, produit, monôme, somme.

Ces spécifications nous ont permis d'établir un référentiel de types de tâches des genres *Développer* et *Factoriser* à partir de la structure des expressions. S'il n'est pas exhaustif, ce référentiel l'est suffisamment pour rendre compte de toutes les

Développement	Exemple
Un produit	
de deux facteurs sans carré	
$T_{DDS-mon \times som}$	$2x(x + 3)$
$T_{DDS-reel \times som}$	$-2(x + 3)$
$T_{DDD-som \times som}$	$(x + 6)(x + 8), (x^2 + 4)(2x - 3)$
$T_{DIR-som \times diff}$	$(2x + 5)(2x - 5)$
un carré	
$T_{DIR-(som)^2}$	$(2x + 3)^2, (2x - 3)^2$
$T_{D-(mon \times som)^2}$	$(3(2t - 1))^2$
de deux facteurs avec carré	
$T_{D-car \times som}$	$(2x + 3)^2(x - 1)$
$T_{D-car \times mon}$	$(2x + 3)^2x$
de trois facteurs avec au moins une somme	
T_{D-3f}	$2(-2x + 5)(x - 3), -(-2x + 5)(x - 3)$
cube	
T_{D-cube}	$(2x + 3)^3$
Une somme algébrique	
de deux termes	
$T_{D-prod+mon}$	$2x - (3x + 1), 10x^2 + (4x - 3)(4x + 3)$
$T_{D-prod+prod}$	$3(2x + 1) + 2(x + 4), (-4x - 8) + (7x + 2)$
$T_{D-car+mon}$	$(2x + 1)^2 + 9x^2$
$T_{D-car+car}$	$x^2 - (3 + x)^2, (x + 2)^2 + (3 + x)^2$
$T_{D-car+prod}$	$(x + 2)^2 + (x + 2)(2x + 3)$
de trois termes dont au moins un produit composé	
$T_{D-3t-prod+prod+prod;mon;som}$	$x + 2(x - 5) + 8(3 - 2x)$
$T_{D-3t-car+car+prod;mon;som}$	$(x + y)^2 + (x - y)^2 + 2(x + y)(x - y)$
$T_{D-3t-som+prod}$	$3x + 1 - (3x + 6)$
$T_{D-3t-som+car}$	$(2x + 1)^2 - x + 3$

TABLEAU 3.27 – Types de tâches du genre *Développer*

expressions algébriques rencontrées dans les manuels. Il est présenté sur des exemples dans le tableau 3.27 pour le genre de tâches *Développer* et dans le tableau 3.28 pour le genre de tâches *Factoriser*.

Nous avons relevé, pour l'ensemble des exercices techniques de chaque manuel, quel type de tâches est en jeu pour chaque expression. Le décompte obtenu est présenté dans les tableaux 3.29 pour le genre de tâches *Développer* et 3.30 pour le genre de tâches *Factoriser*. Un exercice est dit *technique* s'il consiste en des tâches isolées relevant des genres *Développer* ou *Factoriser*. Les expressions relevant du genre *Réécrire un monôme* ne sont pas considérées puisque les tableaux 3.23 et 3.24 comptabilisent déjà le nombre d'expressions convoquant ce type de tâches au niveau T-convoqué. Pour les genres *Développer* ou *Factoriser*, ces tableaux n'apportent pas le même type d'information puisque le niveau de description est plus précis dans

Factorisation	Somme (codé /som)	Monôme (codé /mon)
T_{FA} Facteur commun apparent		
T_{FA-2t} Somme de deux termes		
$T_{FA-car+prod}$	$(2x+1)^2 + (2x+1)(x+5)$ $(2x+1)^2 + (2x+1)$ $2(2x+1)^2 + (2x+1)$	$(2x)^2 + 2x$ $x^2 - 6x$ $2x^2 + 3x$
$T_{FA-prod+prod}$	$x(2x+1) + (2x+1)(x+5)$ $(x+3)(2x+1) + (2x+1)(x+5)$	$7x + 7 \times 3$ $2x + 2$
$T_{FA-reduire-2t}$		$7x + 3x, 7x^2 + 3x^2$
T_{FA-3t} Somme de trois termes et plus		
$T_{FA-3t-car}$	$(2x+1)^2 + (2x+1)(x+5) + 2x(2x+1)$	$x^2 + 6x + x$
$T_{FA-3t-nocar}$	$x(2x+1) + (2x+1)(x+5) + 2x(2x+1)$	$7x + 7 \times 3 + x^2 \times 7$
$T_{FA-reduire-3t}$		$7x+3x+5 \times x, 7x+3x+5$
T_{FA^*} Facteur commun non apparent dans au moins un terme		
T_{FA^*-2t} Somme de deux termes		
$T_{FA^*-car+prod}$	$(2x)^2 + 4x(x+5)$ $(2x+1)^2 + x(4x+2)$ $(2x+1)^2 + x(1+2x)$ $(2x+1)^2 + (x+1)(4x+2)$	
$T_{FA^*-prod+prod}$	$x(2x+1) + (x+5)(4x+2)$ $(x+3)(2x+1) + (x+5)(4x+2)$	$7x + 21, 7x^2 + 4x$ $8x+4, x^7+x^5, 3x^2-15x$
$T_{FA^*-car+car}$	$(2x+1)^2 + (4x+2)^2$	
T_{FA^*-3t} Somme de trois termes et plus		
$T_{FA^*-car+som}$	$(2x+1)^2 + 2x+1$ $(2x+1)^2 + 1+2x$ $x^2 + 3x + (x+3)^2$	
$T_{FA^*-prod+som}$	$x(2x+1) + 2x+1$ $x(2x+1) - 2x-1$ $(x^2 + 3x + (x+3)(x+1))$ $2x(x+3) + 4x+12$	
$T_{FA^*-IR-dif+prod}$	$x^2 - 9 + 3(x-3)$	
$T_{FA^*-3t-IR+prod}$	$4x^2 - 20x + 25 + (2x-5)(3x+4)$ et $x^2 - 4x + 4 - z^2$	
$T_{FA^*-car+prod+prod}$	$(2x+1)^2 + x(2x+1) + x^2(4x+2)$	
$T_{FA^*-prod+prod+prod}$	$(2x+1)(x+1) + x(2x+1) + x^2(4x+2)$	$x^4 + 4x^3 + 4x^2$ $3x^2 + 12x + 12$
T_{FNA} Facteur commun non apparent dans tous les termes		
T_{FNA-2t} Somme de deux termes		
$T_{FNA-car+prod}$	$(4x)^2 + 6x(2x+1)$	$(4x)^2 + 6x$
$T_{FNA-prod+prod}$	$(6x+4)(x+1) + (9x+6)(x+2)$	$16x + 12x^2, 7x^2 + 14x$
$T_{FNA-IR-dif}$	$(2x)^2 - (x+3)^2, 4x^2 - (x+3)^2$ $(2x+1)^2 - (x+3)^2$	$81 - 4x^2$
T_{FNA-3t} Somme de trois termes et plus		
$T_{FNA-3t-Dis}$	$(4x)^2 + 6x(2x+1) + 8x^2$	
$T_{FNA-3t-IR}$		$4x^2 \pm 12x + 9$
$T_{FNA-3t-prod+prod+prod}$		$a^3b + 2a^2b^2 + ab^3$

TABLEAU 3.28 – Types de tâches du genre *Factoriser*

les tableaux 3.29 et 3.30. Par exemple, le développement de l'expression $2(x + 1) + 2x$ relève du type de tâches $T_{DDS-reel \times som}$ dans les tableaux 3.23 et 3.24 (c'est la propriété de distributivité simple qui intervient) mais du type de tâches $T_{D-prod+mon}$ dans les tableaux 3.29 et 3.30.

Différentes **variables didactiques** entrent en jeu dans la complexité des expressions. Nous distinguons les variables suivantes, communes à tous les types de tâches :

- la nature des coefficients : entiers naturels, entiers relatifs, décimaux, fractions ou réels,
- le nombre de variables : par exemple, deux variables dans $2x + 7y + 3 + 5y$ et une variable dans $2x + 7x + 3 + 5x$
- la dénomination des variables : diversité dans le choix des lettres de l'alphabet ou uniquement des variables en x, y ,
- le degré de l'expression : par exemple, $x(2x + 3)$ et $x(2x^3 + 3)$,
- la visibilité du signe « \times » : par exemple, la différence entre $x(2x + 3)$ et $x \times (2x + 3)$,
- le nombre de signes « $-$ » : par exemple, la différence entre $x(2x + 3)$ et $-x(2x - 3)$,
- le fait d'entourer ou non les facteurs ou les termes par des parenthèses : par exemple, $2x + (4x + 3)2x$ et $(2x) + (4x + 3)2x$,
- la présence ou non du « 1 » dans la factorisation par un facteur commun : par exemple, $(2x + 1)^2 + (2x + 1)$ et $(2x + 1)^2 + 1 \times (2x + 1)$.

Nous complétons avec une autre variable didactique, appelée « Si possible » relevant de l'énoncé : l'élève a-t-il à sa charge la reconnaissance des expressions qui peuvent être développées ou factorisées? Par exemple, on trouve cette variable dans des énoncés du type « Développer et réduire, si possible, les expressions suivantes » (cf. figure 3.21). Enfin, pour le type de tâches impliquant la factorisation par les identités remarquables, les variables didactiques suivantes relatives au nombre de réécritures s'ajoutent :

- pour $T_{FNA-3t-IR}$: factoriser une somme de trois termes du type $A \pm B + C$ avec $A = a^2$, $B = 2 \times a \times b$, $C = b^2$
 - sans réécriture : (a) $(2x)^2 \pm 2 \times 2x \times 3 + 3^2$,
 - avec réécriture de A : (b) $4x^2 \pm 2 \times 2x \times 3 + 3^2$,
 - avec réécriture de B : (c) $(2x)^2 \pm 12x + 3^2$,
 - avec réécriture de C : (d) $(2x)^2 \pm 2 \times 2x \times 3 + 9$,
 - avec réécriture de B et C : (e) $(2x)^2 \pm 12x + 9$,

Développement	Phare				MathenPoche				HOri		Triangle		HYp	INdi	Mat	
	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	5e0f5e1c4e074e113e083e125e1c4e113e124e115e1c4e113e08	
Un produit																
de deux facteurs sans carré																
T_{DDS-mon x som}	4	6	8	6	12	6	6	6	3	6		15			1	
T_{DDS-reel x som}	28	16	12	12	5	7	8	10		12	12	15	4		1	
T_{DDD-som x som}			28	13	20	18		8	9	37		29	11	1	7	4
T_{DIR-som x diff}					17	25		1	9	1		2	22	2		3
un carré																
T_{DIR-(som)^2}					27	53		5	26			5	10	6		13
T_{D-(mon x som)^2}																1
de deux facteurs avec carré																
T_{D-car x som}																1
T_{D-car x mon}																1
de trois facteurs avec au moins une somme																
T_{D-3f}				1	3	5		9	1						2	
cube																
T_{D-cube}															4	1
Une somme algébrique																
de deux termes																
T_{D-prod+mon}	4	5	23	32	6	4	9	12	1	19	5	27	14			
T_{D-prod+prod}		1	1	1	11	4		17	7	12	4	35	4			3
T_{D-car + mon}					2	2							14	2	3	
T_{D-car + car}					5	6			2				3		5	4
T_{D-car + prod}					12	9			6				9	1	1	1
de trois termes dont au moins un produit composé																
T_{D-3t-prod+prod+prod; mon; som}			17	4	4	5	3	5	1	6					4	
T_{D-3t-car+car+prod; mon; som}					1	2			2							
T_{D-3t-som+prod}				6	7	1		8		16	1	1				
T_{D-3t-som+car}					2	1										
Total expressions	36	28	89	75	134	148	26	81	67	109	22	129	91	12	26	34
Total types de tâches convoqués	3	4	6	8	15	15	4	10	11	8	4	8	9	5	7	12

TABLEAU 3.29 – Nombre d’expressions convoquant les types de tâches du genre *Développer* dans les manuels scolaires

Factorisation	Phare					MathenPoche			HO	Triangle			HYP	INDI	Mat	
	5e06	5e10	4e07	4e11	3e08	3e12	5e10	4e11	3e12	4e11	5e10	4e11	3e08	HYO	INO	Mx1
T_{FA} Facteur commun apparent																
T_{FA-2t} Somme de deux termes																
T_{FA-car+prod/som}					14				6				19	2	2	4
T_{FA-car+prod/mon}	12	3	4	6	2		1		1	17			27			8
T_{FA-prod+prod/som}					17	17			4				24	1	6	5
T_{FA-prod+prod/mon}		19	16	19	6	10	4	4		5	14					3
Cas particulier : T_{FA-reduire-2t}	12	16	25	12	5	1	8	4		39	6	53	2			
T_{FA-3t} Somme de trois termes et plus																
T_{FA-3t-car/som}																
T_{FA-3t-car/mon}																
T_{FA-3t-nocar/som}																
T_{FA-3t-nocar/mon}						2		1	1							
Cas particulier : T_{FA-reduire-3t}		13	36		7	11	10	4	1	2	11	19	1			
T_{FA^{*}} Facteur commun non apparent dans au moins un terme																
T_{FA^{*}-2t} Somme de deux termes																
T_{FA^{*}-car+prod/som}					2								1			
T_{FA^{*}-car+prod/mon}																1
T_{FA^{*}-prod+prod/som}			8						3				1	1	5	2
T_{FA^{*}-prod+prod/mon}	12	5		5	5		4	7		18				2	5	3
T_{FA^{*}-car+car/som}													1			
T_{FA^{*}-car+car/mon}																
T_{FA^{*}-3t} Somme de trois termes et plus																
T_{FA^{*}-car+som}					8								2	1	1	3
T_{FA^{*}-prod+som}					4									1		3
T_{FA^{*}-IR-dif+prod}					2	6			1				2		2	2
T_{FA^{*}-3t-IR+prod}					1	4							2			1
T_{FA^{*}-car+prod+prod}									1							
T_{FA^{*}-prod+prod+prod/som}																
T_{FA^{*}-prod+prod+prod/mon}					5				1						1	3
T_{FNA} Facteur commun non apparent																
T_{FNA-2t} Somme de deux termes																
T_{FNA-car+prod/som}																
T_{FNA-car+prod/mon}																
T_{FNA-prod+prod/som}					1			6					1			
T_{FNA-prod+prod/mon}					4		4			12						1
T_{FNA-IR-dif/som}					4	3			8				28	2	7	7
T_{FNA-IR-dif/mon}					14	29			6				15	2		3
T_{FNA-3t} Somme de trois termes et plus																
T_{FNA-3t-Dis}																
T_{FNA-3t-IR}					16	29			8				26	2	1	12
T_{FNA-3t-prod+prod+prod}															1	
Total expressions	36	56	89	42	117	112	31	26	41	93	31	72	152	14	31	61
Total types de tâches convoqués	3	5	5	4	18	10	6	6	12	6	3	2	15	9	10	16

TABLEAU 3.30 – Nombre d’expressions convoquant les types de tâches du genre *Factoriser* dans les manuels scolaires

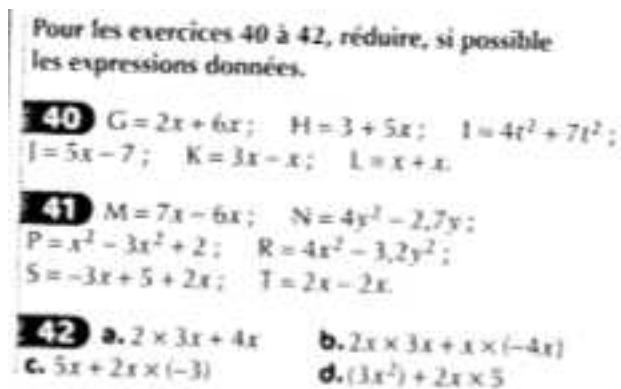


FIGURE 3.21 – Illustration de la variable didactique « Si possible » dans le manuel Horizon de 4^e (exercice 40 page 92)

- avec réécriture de A, B et C : (f) $4x^2 \pm 12x + 9$.
- pour $T_{FNA-IR-dif}$: factoriser une différence de deux carrés du type $A^2 - B^2$, nous relevons si A ou B demande une réécriture :
 - sans réécriture : $(2x)^2 - (x + 3)^2$,
 - avec réécriture : $4x^2 - (x + 3)^2$.

Nous avons relevé les variables qui interviennent sur les exercices techniques de chaque manuel. Une variable est considérée comme prise en compte si le manuel la fait intervenir dans au moins deux exercices. Nous présentons les résultats dans le tableau 3.31. Pour les variables didactiques relevant des types de tâches $T_{FNA-3t-IR}$ et $T_{FNA-IR-dif}$ (qui ne figurent pas dans le tableau 3.31), les expressions proposées demandent, dans la majorité des cas, une réécriture (par exemple, $4x^2 \pm 12x + 9$ et $4x^2 - (x + 3)^2$) qui est laissée à la charge des élèves. Notons qu'à ce sujet, nous avons déjà souligné que le type de tâches T_{R-carr} *Réécrire un monôme sous la forme d'un carré* n'était quasiment jamais convoqué dans les manuels (cf. tableaux 3.23, 3.24, 3.25).

Étant donné que les analyses présentées dans les trois tableaux 3.29, 3.30, 3.31 pourraient donner lieu à de nombreux commentaires, nous recentrons nos conclusions sur notre questionnaire principal : quelle diversité et complexité des expressions rencontre-t-on dans les exercices techniques des manuels scolaires du collège et de seconde ? Pour rendre compte de cette diversité et complexité, il convient de croiser le nombre d'expressions convoquant les types de tâches des genres *Développer* et *Factoriser* (cf. tableaux 3.29, 3.30) avec le jeu sur les variables didactiques associées. En effet, prenons pour exemple le manuel 5PH06, où le faible nombre de types

Variables	PHare						MathenPoche			HOriz TRIangle				HYpe INdic		Math
	5e06	5e10	4e07	4e11	3e08	3e12	5e10	4e11	3e12	4e11	5e10	4e11	3e08	2HY0	2IN0	2Mx1
Nature des coefficients							x			x						
Nombre de variables			x				x	x		x	x					
Lettres		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Degré								x		x			x		x	x
Visibilité "x"		x	x	x		x	x	x		x	x	x	x			x
Signe "-"			x		x			x		x		x				x
Parenthèse			x							x		x				x
"Si possible"								x		x	x	x	x			
"1" dans la factorisation																

TABLEAU 3.31 – Jeu sur les variables didactiques des genres de tâches *Développer* et *Factoriser*

de tâches rencontré s'accompagne d'un jeu quasiment inexistant sur les variables didactiques. Évidemment, la complexité des expressions rencontrées augmente avec les propriétés du calcul en jeu, ce qui explique que le nombre de types de tâches convoqués augmentent avec les niveaux scolaires. Après quelques commentaires sur les types de tâches rencontrés par niveaux scolaires, nous apportons des éléments de conclusion sur la diversité et la complexité des expressions de types de tâches convoqués dans les exercices techniques.

En classe de 5^e, le développement concerne majoritairement (souvent plus de 50% des expressions) des expressions du type $T_{DDS-reel \times som} (-2(x+3))$ et $T_{D-prod+mon} (2x - (3x+1))$. Peu d'expressions mettant en jeu le développement par un monôme ($T_{DDS-mon \times som}$) sont présentes. La factorisation concerne majoritairement des réductions de deux ou trois termes ($T_{FA-reduire-2t}$, $T_{FA-reduire-3t}$) et des factorisations par un réel ($T_{FA-car+prod/mon}$, $T_{FA-prod+prod/mon}$, $T_{FA*-prod+prod/mon}$). Il est normal qu'à ce niveau scolaire les expressions soient assez peu diversifiées. Néanmoins, le faible jeu sur les variables didactiques montre que les expressions sont relativement standardisées.

En classe de 4^e, le développement concerne majoritairement des expressions du type $T_{DDD-som \times som} ((x+6)(x+8))$, $T_{DDS-reel \times som} (-2(x+3))$, $T_{D-prod+mon} (2x - (3x+1))$. La factorisation concerne assez peu d'expressions par rapport au nombre d'expressions à développer. Les types de tâches majoritairement convoqués sont les mêmes qu'en classe de 5^e, à savoir des réductions de deux ou trois termes ($T_{FA-reduire-2t}$, $T_{FA-reduire-3t}$) et des factorisations par un réel ($T_{FA-car+prod/mon}$, $T_{FA-prod+prod/mon}$, $T_{FA*-prod+prod/mon}$). En fait, seul le manuel 4HO11 propose des exercices techniques dans lesquels les expressions sont diversifiées. D'une part, le

nombre de types de tâches convoqués est un des plus importants pour un manuel de 4^e et, d'autre part, le jeu sur les variables didactiques associées est très riche dans tous les exercices. La majorité des exercices fait intervenir la variable didactique « si possible » (cf. figure 3.21), c'est-à-dire que les élèves ont à leur charge la reconnaissance de la structure de l'expression pour développer ou factoriser.

En classe de 3^e, les manuels convoquent, certes, un nombre de types de tâches élevé (33 pour 3PH08, 25 pour 3PH12, 23 pour 3MP12, 24 pour 3TR08). Mais deux faits se conjuguent : la moitié des types de tâches de factorisation concerne des applications directes des identités remarquables ($T_{FNA-IR-dif} : a^2 - b^2$ et $T_{FNA-3t-IR} : ax^2 + 2abx + b^2$) conjugué et la pauvreté du jeu sur les variables didactiques qui rend les expressions formatées. Cela peut avoir comme conséquence un rôle prépondérant attribué aux ostensifs dans la dialectique des ostensifs et des non-ostensifs. Hormis pour les identités remarquables, la factorisation concerne majoritairement des sommes de deux termes dans lesquelles le facteur commun est apparent ou des réductions. Elle concerne assez peu de factorisations où le facteur commun n'est pas apparent dans tous les termes. Cette remarque est valable pour le développement où les élèves rencontrent majoritairement les types de tâches $T_{DIR-(som)^2} ((2x + 3)^2)$ et $T_{DIR-som \times dif} ((2x + 5)(2x - 5))$.

En classe de 2^e, les manuels se séparent selon les deux catégories de manuels retenues (cf. § 3.4.2 page 121). Le manuel 2HY09, qui inclut les expressions algébriques dans un thème du secteur sur les fonctions du second degré, propose peu d'exercices techniques sur la manipulation des expressions. Les types de tâches convoqués sont relativement diversifiés par rapport au nombre d'expressions mais le jeu sur les variables didactiques est quasiment inexistant. Les manuels 2Mx10 et 2IN09, qui incluent les expressions algébriques dans un secteur dédié à leur production et à leur transformation, proposent un nombre d'exercices techniques supérieur au manuel 2HY09. Les types de tâches sont diversifiés surtout dans le manuel 2Mx10. Ce manuel présente un jeu sur les variables didactiques.

En conclusion, nous constatons que pour chaque niveau scolaire, les types de tâches convoqués font intervenir les propriétés du calcul algébrique qui sont introduites, ce qui est normal. Même si certains manuels (par exemple 3PH08, 3PH12, 3TR08) diversifient les types de tâches, l'accent est mis sur des expressions standardisées. Cela se retrouve à travers la conjugaison de deux tendances : d'une part, les types de tâches dominants sont des applications directes des propriétés du calcul algébrique (par exemple, $-2(x + 3)$ pour la distributivité simple, $(x + 2)(x + 3)$ pour la distributivité double et $(x + 3)^2$ pour les identités remarquables), et, d'autre part,

les variables didactiques interviennent assez peu. Ainsi, il est par exemple assez rare, qu'en 3^e, les manuels convoquent le type de tâches $T_{FA^*-car+som}$ donnant lieu à des expressions du type $(2x + 1)^2 + 2x + 1$ ou $T_{DDD-som \times som}$ avec un jeu sur la variable didactique « degré » donnant lieu à des expressions du type $(x^2 + 4)(2x - 3)$ ou encore $T_{D-car+car}$ qui met en jeu des expressions du type $(3x + 2)^2 + (2x + 3)^2$ souvent présentes en seconde. Or, il est probable que le caractère trop isolé et ponctuel de la convocation de types de tâches mettant en jeu des expressions non standardisées encourage les enseignants à mettre l'accent sur des expressions standardisées et à laisser un caractère occasionnel à des factorisations ou des développements mettant en jeu des structures plus complexes qui demanderaient pourtant davantage de reconnaissance de la structure des expressions aux élèves. Évidemment, pour instaurer des réflexes, le caractère routinier de certaines expressions est nécessaire mais si les expressions rencontrées ne sont pas suffisamment diversifiées et complexes, l'élève peut les déchiffrer en s'appuyant sur la syntaxe sans mettre en œuvre l'aspect structural. La conséquence rejoint celle de l'analyse des parties *Cours et méthodes*. Un discours technologique qui guide le travail technique au niveau d'ostensifs peut suffire pour traiter des expressions standardisées. Cela laisse implicite la nécessité de convoquer des types de tâches de OM2 pour reconnaître la structure des expressions, les propriétés à utiliser et de s'appuyer sur l'équivalence des expressions pour conduire et contrôler les calculs algébriques.

A propos de la présence de OM3

La convocation des types de tâches de OM3 au niveau T-convoqué¹² concerne un nombre d'exercices supérieur à ceux de OM2 et de OM1. Le fait que l'accent soit mis sur OM3, est normal étant donné qu'un enjeu majeur des programmes du collège est la transformation des expressions. Ce que nous souhaitons souligner, c'est la tendance des manuels à travailler OM3 à travers des exercices techniques non finalisés dans lesquels¹³ :

- les types de tâches interviennent ponctuellement, désarticulés les uns des autres, ce qui est mis en valeur par le fait que, souvent, un seul type de tâches intervient par exercice,
- la reconnaissance de la structure est prise en charge implicitement par le fait

12. Rappelons que nos analyses ne prennent en compte que les types de tâches qui interviennent au niveau T-convoqué.

13. Les deux premières remarques ne sont pas quantifiées comme dans les tableaux 3.29 et 3.30 mais nous avons pu les constater lors de nos analyses.

qu'une seule structure intervienne par exercice et que la consigne, le titre de l'exercice ou la mise en page du manuel indiquent la propriété en jeu (cf. figure 3.23),

- la complexité des expressions et le jeu sur les variables didactiques associées, et donc leur structure, est formatée en fonction des niveaux scolaires.

Les exercices techniques dans lesquels OM3 intervient sont standardisés, mis en perspective avec aucun objectif, ce qui d'une part, laisse supposer que seul l'aspect syntaxique des expressions et un travail algébrique au niveau des ostensifs peut suffire pour les réaliser et, d'autre part, demande peu de convocation des types de tâches de OM2. Même si nous ne l'avons pas analysé pour des raisons déjà évoquées, les types de tâches de OM3 sont présents au niveau R-convoqué dans des tâches liées à la résolution de problèmes du domaine algébrique mais on peut supposer que les expressions rencontrées ne sont pas plus variées que celles des exercices techniques. Les élèves peuvent ainsi se retrouver démunis lorsqu'ils sont confrontés à des expressions qu'ils n'ont pas l'habitude de rencontrer, lorsque les types de tâches interviennent au niveau R-convoqué par exemple dans la résolution de problèmes du domaine de l'algèbre ou encore lorsqu'ils doivent s'appuyer sur le sens des expressions pour choisir la transformation à effectuer. Il y a là des implicites au niveau du discours technologique proposé aux élèves pour la transformation des expressions.

Nous donnons deux exemples de problèmes dont la résolution nécessite de convoquer des types de tâches au niveau R-convoqué. Le premier est un problème fonctionnel issu du manuel 2IN09 (cf. figure 3.7 page 129) dans lequel les types de tâches $T_{D-car+car}$ (question 1), $T_{D-prod+mon}$ (questions 1 et 5) et $T_{D-prod+mon}$ (questions 4) interviennent au niveau R-convoqué alors même qu'ils impliquent des expressions algébriques rarement rencontrées dans les manuels du collège (cf. tableaux 3.29 et 3.30). Le second exemple est un problème proposé au brevet des collèges de 2007 (cf. figure 3.22). La question 3 porte sur le type de tâches $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ Prouver le résultat d'un programme de calcul (OM1), qui se décompose en :

- T1 : Produire une expression à partir d'un programme de calcul (OM1)
 - T11 : Mobiliser la variable x pour produire une expression générale
 - T12 : Traduire le programme de calcul en l'expression algébrique $(x^2+4)x+4$ ($T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ dans OM1)
- T2 : $T_{Prouver-equiv}$ Prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur de la lettre
 - T21 : Identifier la structure de l'expression et reconnaître l'application de

On donne le programme de calcul :

- Choisir un nombre.
 - Lui ajouter 4.
 - Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
 - Ajouter 4 à ce produit.
 - Ecrire le résultat.
1. Ecrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait correctement ce programme avec le nombre -2 , on obtient 0.
 2. Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.
 3. a. Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un nombre entier (les essais doivent figurer sur la copie).
b. En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul ? Justifier la réponse.
 4. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

FIGURE 3.22 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2007

la distributivité ($T_{Structure}$ dans OM2)

- T22 : Développer l'expression algébrique $(x^2 + 4)x + 4$ en $x^2 + 4x + 4$ ($T_{D-prod+mon}$ dans OM3)
- T23 : Identifier la structure de l'expression et reconnaître une somme de trois termes remarquables ($T_{Structure}$ dans OM2)
- T24 : Factoriser l'expression algébrique $x^2 + 4x + 4$ ($T_{FNA-3t-IR}$ dans OM3)
- T25 : Identifier la structure de l'expression et reconnaître le carré d'un entier ($T_{Structure}$ dans OM2)

Cette décomposition est à la charge des élèves. La reconnaissance de la structure des expressions et les types de tâches de OM3 impliqués interviennent au niveau R-convoqué. Ils ont notamment à introduire une lettre pour traduire le programme de calcul en une expression algébrique, reconnaître la structure de l'expression pour identifier les propriétés à appliquer et atteindre le but visé. De même la question 4 laisse à la charge des élèves la mise en équation qui conduit à l'équation $(x + 2)^2 = 1$. La résolution de l'équation demande de se ramener à une équation-produit et donc d'anticiper la transformation à effectuer. Le type de tâches $T_{FNA-IR-dif/som}$ intervient au niveau R-convoqué.

La vérification des calculs est quasiment absente. Nous l'avons rencontrée dans quelques exercices isolés (n°79 dans 3TR08, n°55 et 10 dans 3PH12 et n°49 dans 4HO11, cf. figure 3.24) au cours desquels la notion de contre-exemple est parfois rencontrée. Même si elle est présente dans les parties *Cours et Méthodes*, elle n'est pas reprise dans les exercices dans le sens où très de peu consignes l'exigent ou même la suggèrent.

17 Sommes ou différences ?

Factorise ces expressions.

$$A = t^2 + 81 + 18t$$

$$D = x^2 + 36 - 12x$$

$$B = 4x^2 - 4xy + y^2$$

$$E = \frac{4}{9}p^2 + \frac{4}{3}pq + q^2$$

$$C = 81 + 16y^2 - 72y$$

$$F = \pi^2 + 10\pi + 25$$

18 Différences de deux carrés

Factorise ces expressions.

$$A = x^2 - 16$$

$$E = 4\pi^2 - 25$$

$$B = 1 - y^2$$

$$F = (t + 3)^2 - 16$$

$$C = 100x^2 - 9$$


$$G = (2x + 1)^2 - 25$$

$$D = 36 - 81x^2$$

$$H = (3i + 7)^2 - (i + 5)^2$$

FIGURE 3.23 – Extrait de 3MP12, page 43 : la structure des expressions est prise en charge par l'énoncé

55 On veut développer, puis réduire l'expression $E = 3(x - 1)(2 - x)$. Deux élèves commencent par distribuer le nombre 3.



1) Pour $x = 0$, calculer l'expression de l'énoncé, celle de Léa, ainsi que celle de Mathias.
 2) Quel élève s'est trompé ? Quelle erreur a-t-il commise ?
 3) Développer, puis réduire l'expression E .

79 COMME AU BREVET
 Pour chacune des expressions ci-dessous :
 (1) développer, puis réduire.
 (2) factoriser.
 (3) contrôler que l'expression développée est bien égale à l'expression factorisée.

a) $A = (3x - 4)^2 + (3x - 4)(7x - 5)$
 b) $B = (4x + 2)^2 - (5 - 2x)(4x + 2)$
 c) $C = (5x + 1)^2 - 4$

FIGURE 3.24 – Deux exercices qui amènent à contrôler les calculs (à gauche 3PH12 page 40, à droite 3TR08 page 123)

Les types de tâches relatifs au calcul numérique sont présents. T_{C-num} apparaît dans plus de 10% des exercices de la majorité des manuels, mais comme pour les exercices techniques, ils sont travaillés isolément du reste. Quant à $T_{CDS-num}$ et $T_{CIR-num}$, leur présence est forte dans les manuels 5^e de Phare où la transformation d'expressions est davantage travaillée sur des expressions numériques que sur des expressions algébriques.

Le type de tâches $T_{R-carre}$ Réécrire un monôme sous forme d'un carré n'est jamais travaillé au niveau T-convoqué alors qu'il intervient au niveau R-convoqué dans la plupart des exercices de factorisation par une identité remarquable et que cette réécriture est souvent source d'erreur chez les élèves.

A propos des exercices des manuels de seconde

Concernant les manuels de seconde, les catégories de manuels identifiées (cf. § 3.4.2 page 121) mettent en évidence une prise en compte différente des trois OM locales. Le manuel 2HY09, qui inclut les expressions algébriques dans un thème du secteur sur les fonctions du second degré (catégorie 2), propose peu d'exercices mettant en jeu OM1 et OM2. OM3 est davantage présente ce qui montre que les liens entre les trois OM locales ne sont pas travaillés. En revanche les manuels 2Mx10 et 2IN09, qui incluent les expressions algébriques dans un secteur dédié à leur production et à leur transformation (catégorie 1), proposent des exercices qui permettent de faire les liens entre les trois OM locales. Le manuel 2Mx10 laisse particulièrement une place à OM2. Le sens et la dénotation des expressions et leur aspect structural sont travaillés ce qui permet d'encourager une anticipation et une intelligence des calculs algébriques.

En conclusion, l'analyse des parties *Exercices* met en évidence une tendance des manuels à davantage favoriser des exercices techniques dans lesquels une conduite du calcul appuyée principalement par les ostensifs peut suffire à la réalisation des transformations algébriques. OM2 est présente mais pas suffisamment pour développer une réflexion sur l'équivalence des expressions, sa fonction dans le contrôle des calculs et contribuer à construire des raisons d'être aux OM ponctuelles de OM2. Les types de tâches de OM2 peuvent vivre à condition de mettre en place une organisation didactique permettant de faire vivre les différents moments de l'étude et d'élaborer un bloc technologico-théorique prenant en compte la référence épistémologique, en particulier dans des phases de recherche et de mise en commun. Par exemple, le manuel 4HO11, qui se distingue des autres par la diversité des types de tâches convoqués (cf. tableau 3.26), la diversité des expressions mises en jeu et la place importante laissée à la production d'expressions, donne des conditions favorables à une organisation didactique permettant de faire vivre un bloc technologico-théorique idoine. Les types de tâches n'y sont pas travaillés isolément les uns des autres. La résolution de problèmes diversifiés amène à en travailler les raisons d'être et à faire des liens entre les types de tâches.

3.4.4 Synthèse sur l'OM à enseigner dans les manuels

Nous tirons parti des analyses écologiques et praxéologiques pour faire ressortir les caractéristiques de l'OM à enseigner dans les manuels scolaires du collège et de seconde. Nous les mettons en perspective par rapport aux caractéristiques dégagées de l'analyse des programmes officiels et du document d'accompagnement (cf. §3.3.6).

Il s'agit de caractéristiques dominantes puisque certains manuels présentent des alternatives, comme nous avons tenté d'en rendre compte dans les analyses.

a. Un habitat pour les expressions algébriques au collège

La majorité des manuels offrent un habitat aux expressions algébriques dans le domaine « Nombres et calculs » ce qui diffère de l'analyse écologique des programmes officiels qui offre trois habitats aux contenus relatifs aux expressions algébriques. Seuls les deux manuels Phare 2012 3^e et Triangle 2010 5^e diffèrent ; mais, comme nous avons pu le souligner dans les analyses, cela n'a pas d'incidence majeure sur la fonction donnée à l'algèbre par rapport aux autres manuels. Ces deux manuels présentent les mêmes caractéristiques de l'OM à enseigner que les autres.

L'analyse écologique des programmes du collège montre une évolution majeure depuis 2008 dans l'habitat et la niche des contenus relatifs à l'algèbre. Mais, comme nous l'avons souligné, les apports sur l'introduction des expressions algébriques et de leur propriété dans l'apparition du sujet d'étude « Utiliser et produire une expression littérale » dans le domaine « Organisation et gestion de données » du programme de 5^e sont principalement mis en exergue dans le document d'accompagnement. Aussi, nous nous interrogeons : qu'en est-il dans les manuels scolaires du collège ?

b. Une motivation des expressions et des propriétés du calcul algébrique peu reliée à l'étude de l'équivalence des programmes de calcul

Le document d'accompagnement encourage l'étude de l'équivalence de programmes de calcul pour introduire les expressions algébriques et les propriétés du calcul. Cette étape correspond à la première étape du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012), sur laquelle nous nous appuyons pour construire l'OM de référence relativement aux expressions algébriques. Or l'analyse des parties « Activités » montre que, certes, l'entrée dans le calcul algébrique se fait par OM1 mais que, d'une part, les activités sont relativement pauvres et découpées et que, d'autre part, peu de manuels proposent un travail sur l'équivalence des programmes de calcul. Les programmes de calcul interviennent seulement ponctuellement dans les exercices, sans offrir l'occasion de revenir sur les liens entre les trois OM locales sauf dans les manuels des collections MathenPoche et Horizon. Ainsi les expressions algébriques et les propriétés de calcul sont peu introduites en questionnant la dénotation des expressions, la dialectique algébrique-numérique et le passage du procédural au structural. Les expressions sont rarement introduites dans le but de

faire émerger les conditions pour construire un bloc technologico-théorique du calcul algébrique appuyée sur la structure et l'équivalence des expressions.

Notons que l'introduction des expressions par l'équivalence des programmes de calcul entretient parfois une distinction ambiguë entre expression et formule. Par exemple, l'activité du manuel MathenPoche (cf. figure 3.5), qui fait référence au carré bordé, demande de comparer des expressions. Mais, dans l'énoncé, ce sont des formules qui sont écrites. Dans cette activité d'introduction, les expressions existent peu en-dehors des formules. Il est intéressant de noter que chez Phare (cf. 3.6), qui propose une activité à potentialité restreinte pour introduire les expressions algébriques et leur donner des raisons d'être, seules les expressions algébriques interviennent.

c. Des OM locales travaillées indépendamment les unes des autres

OM1 est présente dans l'introduction des expressions algébriques et dans des exercices de réinvestissement. Mais elle est quasiment inexistante dans les parties de cours ce qui, d'après l'OM de référence, ne met pas en avant les liens entre les trois OM locales de l'OM régionale sur les expressions algébriques. Dans les parties *Exercices*, les types de tâches du genre *Traduire* ne sont convoqués mais uniquement dans le sens d'un « registre de représentation sémiotique » vers celui des écritures algébriques. L'autre sens, qui met en jeu l'aspect structural des expressions, est très peu présent. Par ailleurs, les programmes de calcul, schéma de calcul ou arbre de calcul interviennent très peu. Pourtant, cela permettrait de travailler la dialectique entre les aspects procédural et structural des expressions algébriques.

OM2 est présente dans les parties *Cours et Méthodes* et *Exercices* à travers la convocation des types de tâches $T_{Prouver-equiv}$ et T_{Tester} . Lorsque OM2 apparaît, les techniques et le niveau technologico-théorique développés accordent une place à la dialectique de l'algébrique et du numérique ; ce n'est pas le cas pour les autres OM ponctuelles développées. Mais globalement, les types de tâches de OM2 sont peu convoqués au niveau R-convoqué. Lorsqu'il apparaît, il est déconnecté des autres et ne répond à aucune raison d'être. Il n'est pas mis en perspective par rapport au contrôle des calculs. De plus, l'absence de quantification conduit à dénaturer le travail sur l'équivalence des expressions.

OM3 est l'OM locale la plus présente dans les *Activités Cours et Méthodes* et *Exercices* dans les manuels ce qui est normal étant donné qu'un enjeu majeur des programmes du collège est la transformation des expressions. Néanmoins, nos ana-

lyses font ressortir une tendance dans les manuels du collège à accentuer l'aspect syntaxique des expressions au détriment de leur aspect sémantique, de leur aspect structural, du sens et de la dénotation trop souvent laissés implicites. OM3 est souvent travaillée en interne sans montrer la nécessité de convoquer les types de tâches de OM2. OM1 n'est pas toujours suffisamment l'occasion de faire le lien avec OM2 pour donner du sens aux types de tâches de OM3. Dans certains manuels, la succession d'exercices techniques dans lesquels les consignes et les expressions sont standardisées encourage une manipulation des expressions algébriques dans des tâches non finalisées ne conduisant à aucun but mathématique extérieur au calcul algébrique, phénomène que Tonnelle (1980) avait appelé le « le monde clos de la factorisation ». Néanmoins, nous avons pu souligner à différentes étapes de l'analyse certains manuels présentent des potentialités pour travailler les raisons d'être de l'OM régionale (manuels 5MP10, 3MP12, 4HO11), pour travailler la dénotation des expressions à partir de la dialectique numérique-algébrique (manuels 4PH11, 4HO11) ou bien pour travailler leur structure (manuels 4HO11, 3TR08). Il s'agit de potentialités dans le sens où seule la manière dont les types de tâches seront mis en œuvre peut permettre de faire émerger des techniques justifiées par un bloc technologico-théorique non uniquement appuyé sur des ostensifs.

d. Un niveau technologique qui attribue majoritairement un rôle prépondérant aux ostensifs dans la conduite et le contrôle du calcul algébrique

L'analyse de la partie « *Cours et Méthodes* » met en évidence que la conduite du calcul algébrique est réglée par un recours aux ostensifs (jeu de couleurs, flèches, verbes d'actions) qui favorisent la reconnaissance de signes laissant implicite celle des structures et de l'identification des propriétés à appliquer. L'activation des non-ostensifs est donc souvent possible par les seuls discours du type « *On met en facteur* », « *On distribue* » dont on peut supposer qu'ils permettent un certain contrôle de l'action pour des expressions simples mais qu'ils peuvent s'avérer insuffisants pour traiter des expressions de structure complexe. Mais l'analyse de la diversité et de la complexité des expressions proposées dans les exercices techniques montre que le recours aux ostensifs peut fonctionner au collège étant donné la standardisation des expressions algébriques et des énoncés proposés dans les manuels.

e. L'absence de la validation des calculs

La validation des calculs est quasiment absente. Nous l'avons rencontrée ponctuellement dans quelques « *Méthodes* » ou « *Exercices* », au cours desquels la notion de contre-exemple est parfois développée. Cependant, aucun manuel ne l'exige ou même ne la suggère systématiquement dans les exercices techniques. Pourtant, la validation des calculs peut permettre de donner du sens aux expressions et une raison d'être à la convocation de types de tâches de OM2 pour développer leur équivalence, le sens et la dénotation¹⁴. Or dans les manuels, seul l'appui sur des ostensifs graphiques (couleurs et flèches) sont proposés aux élèves pour contrôler leurs transformations algébriques. À ce propos, Abou Raad et Mercier (2009) écrivent :

« Ainsi, nous regardons le travail d'écriture : [développement accompagné de flèches] comme un travail de transformation combinatoire réglé par un système d'ostensifs. La création didactique d'ostensifs répond aux besoins de l'enseignement de toute matière mathématique [...] et on en trouve bien sûr dans le cas de la factorisation, où ils sont supposés aider à l'application des méthodes enseignées. Mais les ostensifs inventés à usage didactique n'auront jamais un statut mathématique. Ainsi, les deux liens tracés ci-dessus permettent-ils d'oublier l'existence d'une propriété qui fonde la pratique ainsi désignée, et cela comporte un risque : les ostensifs à usage didactique n'ont plus qu'une valeur instrumentale. Ils décrivent des règles d'action, ce qui enferme l'élève dans un monde d'interprétations personnelles de ces règles, sans contrôle mathématique. » (Abou Raad & Mercier, 2009, p. 171)

f. Des décalages entre la troisième et la seconde

A partir de la seconde, l'algèbre est travaillée au service des fonctions ce qui nécessite un travail sur le sens des expressions et un appui sur l'intelligence du calcul et l'anticipation des transformations à effectuer. Or ces aspects sont laissés implicites au collège, ce qui génère des décalages entre la classe de troisième et la seconde.

3.5 Synthèse

L'OM de référence relative aux expressions algébriques nous a guidé dans l'analyse des programmes officiels, du document d'accompagnement et des manuels scolaires du collège et de seconde pour mettre en évidence des caractéristiques de l'OM à enseigner au collège et en seconde. Ces caractéristiques nous éclairent sur des savoirs et savoir-faire implicites laissés à la charge des élèves. Nous en résumons ici les

14. Concernant la vérification et le contrôle des calculs, nous faisons référence aux travaux de Coppé (Chalancon, Coppé, & Pascal, 2002 ; Coppé, 1993)

éléments dominants.

3.5.1 Caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner

Les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner relative aux expressions algébriques sont les suivantes. Nous les énumérons ici sans développer les points qui l'ont déjà été :

1. Des raisons d'être des expressions algébriques et des propriétés du calcul peu rattachées aux des éléments constitutifs du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón et al., 2012), à savoir le passage de la conception du programme de calcul comme un processus à un programme de calcul considéré du point de vue de sa structure et l'étude de programmes de calcul équivalents ;
2. Trois OM locales inégalement présentes et surtout peu reliées entre elles ;
3. Un niveau technologique qui attribue un rôle prépondérant aux ostensifs dans la conduite et le contrôle du calcul algébrique, ce qui laisse implicite la convocation d'un certain nombre des types de tâches comme l'identification de la structure ou la réécriture ;
4. L'absence de la validation des calculs.

L'OM régionale autour des expressions algébriques est incomplète à la fin du collège et au début de la seconde, dans le sens où les éléments du bloc technologico-théorique ne sont pas suffisamment portés par les éléments épistémologiques nécessaires au calcul sur et avec les expressions algébriques. Les exercices des manuels proposés peuvent favoriser le développement d'une pratique algébrique peu appuyée sur des propriétés du calcul, sur la dialectique du numérique et de l'algébrique qui permet de créer la dialectique du structural et du procédural pendant la conduite des calculs algébriques.

3.5.2 Des implicites dans l'enseignement de l'algèbre

Les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner donnent lieu des savoirs et savoir-faire implicites. Nous les rattachons à la référence épistémologique établie au chapitre 2. Selon nous, le rapport institutionnel attendu au calcul algébrique n'est pas conforme aux nécessités épistémologiques de la discipline. L'existence de savoirs et savoir-faire implicites est liée au fait que les différents éléments épistémologiques relatifs au travail sur et avec les expressions algébriques ne sont pas enseignés ou

pas suffisamment impliqués dans l'activité algébrique demandée aux élèves. Certains savoirs et savoir-faire restent masqués notamment par le fait que, comme nous l'avons montré dans le paragraphe 3.1.6 sur l'OM de référence, des types de tâches intermédiaires interviennent dans la convocation d'autres, ce qui n'est pas suffisamment explicite dans l'OM à enseigner. Ces types de tâches sont en lien les différents éléments épistémologiques retenus au chapitre 2.

a. L'équivalence des expressions algébriques

Certes OM2 est présente dans l'OM à enseigner mais comme elle n'est pas suffisamment convoquée en lien avec ceux de OM1 et de OM3, l'équivalence des expressions n'est presque jamais présentée comme un aspect central de la manipulation des expressions algébriques ni comme un aspect permettant d'organiser la vérification et le contrôle des calculs. Le fait que les propriétés du calcul algébrique permettent de transformer une expression en une autre, équivalente, et le fait qu'on puisse utiliser l'une ou l'autre en fonction du but visés sont rarement directement impliqués dans l'OM à enseigner au collège, c'est-à-dire que la dénotation et le sens des expressions sont laissés implicites. Cela s'accompagne du fait que l'algébrique et le numérique sont peu travaillés en dialectique, aspect déjà souligné par Chevillard (1985b) (cf. chapitre 2 §2.1.1).

b. La dialectique de l'algébrique et du numérique

La dialectique de l'algébrique et du numérique consiste à travailler l'algébrique comme outil d'étude du numérique et le numérique comme outil d'étude de l'algébrique. L'algébrique comme outil d'étude du numérique est relativement présent dans les manuels à travers les types de tâches de OM3 comme $T_{CDS-num}$, $T_{CIR-num}$. Mais le numérique comme outil d'étude de l'algébrique est peu présent dans les manuels notamment comme outil pour contrôler les résultats. Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, le type de tâches T_{Tester} est présent ; mais il l'est davantage dans l'objectif de déterminer si tel nombre est solution d'une équation plutôt que de contrôler que deux expressions renvoient ou non les mêmes valeurs.

c. Les aspects procédural et structural des expressions

Assez peu de tâches présentes dans les manuels font référence à l'identification du processus de calcul associé à une expression algébrique. Pourtant, cela permet de

revenir sur la hiérarchie des opérateurs et sur l’usage des parenthèses et de distinguer dans quel ordre effectuer les opérations. La reconnaissance de la structure, qui fait référence au type de tâches $T_{Structure}$, est souvent masquée par des expressions standardisées et le nombre insuffisant de tâches convoquant $T_{Choisir}$ qui implique le sens des expressions.

d. Le lien avec d’autres registres de représentations

Les liens avec les registres de représentations sont présents mais nous soulignons deux points. Premièrement, la traduction entre un registre de représentation et celui des écritures algébriques concernent majoritairement celui des grandeurs. Elle fait peu intervenir les schémas de calcul, les programmes de calcul. Deuxièmement, un sens de traduction est majoritairement travaillé, celui qui part d’un registre de représentation vers le registre des écritures algébriques. Pourtant, comme le montre le travail de Bardini (2003), l’intervention des programmes et des schémas de calcul et un travail de traduction du registre des expressions algébriques vers un autre registre de représentation mobilisent une flexibilité à travailler sur les aspects procédural et structural des expressions. Or ces deux aspects semblent peu présents dans les discours technologiques proposés aux élèves.

En conclusion, nous avons mis en évidence que certaines nécessités d’apprentissage autour de la génération et de la manipulation des expressions algébriques sont laissés implicites dans l’enseignement secondaire. Ces apprentissages restent à la charge des élèves. Nous pouvons faire l’hypothèse que cela peut conduire les élèves à s’enfermer dans des règles de manipulation incorrectes et à pratiquer des contrôles inappropriés de leurs actions.

3.5.3 Deux questions génératrices à aborder dans les parcours d’enseignement différencié

La mise en évidence d’implicites dans l’OM à enseigner nous permet de faire des hypothèses sur les questions génératrices à aborder dans les parcours d’enseignement différencié.

L’analyse de l’OM à enseigner dans l’OM de référence éclaire sur des nécessités d’apprentissage souvent ignorées par l’institution qui restent à la charge des élèves. Nous avons mis en évidence celles reliées à la prise en compte de la dialectique numérique / algébrique, du double aspect procédural / structural d’un objet,

de l'équivalence des expressions dans les raisons d'être données à l'algèbre et à la conduite, le contrôle et l'anticipation du calcul sur les expressions algébriques.

Nous faisons l'hypothèse que les deux questions suivantes peuvent être génératrices pour aborder ces différents aspects dans les parcours d'enseignement différencié.

1. Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

La première est fondatrice de la première étape du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzón (cf. §2.1.3). Même si les élèves ont déjà rencontré l'algèbre, il nous semble indispensable de revenir sur cette question tout au long de l'avancée du temps didactique car elle est fondamentale pour donner du sens aux expressions algébriques, à leur transformation et aux propriétés du calcul. Comme nous l'avons déjà souligné, elle permet de faire le lien entre les trois OM locales de l'OM de référence relative aux expressions algébriques. La seconde est fondamentale dans la conduite des calculs. Étant implicite dans l'OM à enseigner, notamment par la faible présence de OM2, nous faisons l'hypothèse que le fait d'y revenir peut permettre aux élèves de faire évoluer leur rapport à l'algèbre vers un rapport idoine.

Ces deux questions permettent de générer des sous-questions à la base des objectifs d'apprentissage des parcours d'enseignement différencié construits.

3.5.4 A propos de la convocation de OM2 dans la résolution des problèmes du brevet des collèges, une évolution de l'OM à enseigner ?

Comme nous l'avons montré dans l'analyse des manuels, OM2 n'est pas absente et certains manuels suivent les orientations données par les documents d'accompagnement pour développer des situations visant à travailler potentiellement l'équivalence des expressions algébriques et donner des raisons d'être à leur génération et à leur transformation. Ces évolutions se retrouvent dans le brevet des collèges où apparaît la convocation de types de tâches OM2 dans la résolution des problèmes et des exercices de l'épreuve de mathématiques. Depuis 2007, le type de tâches de OM2 $T_{Prouver-equiv}$ en lien avec la dénotation des expressions (cf. analyse du brevet de 2007 figure 3.22 page 159 et les figures 3.25 à 3.27) et le type de tâches *Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul* de OM1 sont présents. Les types de tâches de OM3 apparaissent au niveau R-convoqués (cf. figure 3.26).

On donne le programme de calcul suivant :



Choisir un nombre.

- a) Multiplier ce nombre par 3.
- b) Ajouter le carré du nombre choisi.
- c) Multiplier par 2.

Ecrire le résultat.

1. Montrer que, si on choisit le nombre 10, le résultat obtenu est 260.
2. Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :
 - le nombre choisi est -5 ;
 - le nombre choisi est $\frac{2}{3}$;
 - le nombre choisi est $\sqrt{5}$.
3. Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ?

FIGURE 3.25 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2008

Si l'arrivée de ces types de tâches marque une première évolution vers l'agrégation des trois OM locales, leur mise en œuvre dans les classes n'en reste pas moins la clef pour qu'elles mettent en jeu, au niveau technologico-théorique, les différents aspects des expressions algébriques comme les dialectiques procédural-structural, numérique-algébrique et l'équivalence des expressions. Cela repose sur la mise en place d'une organisation didactique prenant en compte les différents moments de l'étude pour aborder toutes les nécessités épistémologiques du calcul sur et avec les expressions algébriques et aborder les potentialités didactiques de tâches suffisamment robustes pour les travailler.

EXERCICE 1

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- choisir un nombre de départ
- multiplier ce nombre par (-2)
- ajouter 5 au produit
- multiplier le résultat par 5
- écrire le résultat obtenu.

1.
 - a. Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5.
 - b. Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on ?
2. Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?
3. Arthur prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x , l'expression $(x-5)^2 - x^2$ permet d'obtenir le résultat du programme de calcul.
A-t-il raison ?

FIGURE 3.26 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2010

1. Deux affirmations sont données ci-dessous.

Affirmation 1

Pour tout nombre a : $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 9$.

FIGURE 3.27 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2011

Exercice 4

On cherche à résoudre l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$.

- 1) Le nombre $\frac{3}{4}$ est-il solution de cette équation ? et le nombre 0 ?
- 2) Prouver que, pour tout nombre x , $(4x - 3)^2 - 9 = 4x(4x - 6)$.
- 3) Déterminer les solutions de l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$.

FIGURE 3.28 – Extrait du brevet des collèges en Métropole de 2012

3.5.5 A propos de l'OM enseignée

L'OM enseignée est uniquement évoquée dans notre étude.

L'OM enseignée suit l'OM à enseigner dans le processus de transposition didactique. Elle « *apparaît dans le travail mathématique des élèves et dans la pratique que le professeur réalise avec eux dans la classe* » (Bosch, Fonseca, & Gascón, 2004). Étant donné les caractéristiques de l'OM à enseigner qui viennent d'être mises en évidence, il semble pertinent d'interroger les conséquences de l'OM à enseigner sur l'OM enseignée, relativement aux expressions algébriques. L'accès à l'OM enseignée nécessite l'analyse des pratiques et du rapport personnel des enseignants à l'algèbre et à son enseignement. Nous y avons eu accès par l'intermédiaire des travaux menés au sein du groupe IREM sur la différenciation en algèbre. Mais l'OM enseignée n'est analysée que pour une étude de cas dans le contexte particulier de la mise en œuvre des parcours d'enseignement différenciés (cf. chapitre 5). Elle n'est donc que très partiellement analysée et cela s'explique pour plusieurs raisons. Une analyse des pratiques des enseignants aurait nécessité d'autres approches théoriques que celles que nous avons adoptées et notre étude est davantage centrée sur le rapport personnel des élèves à l'algèbre que sur celui des enseignants. L'OM enseignée n'a pour autant pas été ignorée. D'une part, son analyse fait l'objet de la thèse en cours de Soraya Bedja, thèse en didactique des mathématiques développée au sein du projet PepiMeP. D'autre part, des travaux de didactique de l'algèbre que nous avons pu rencontrer, éclairent sur certaines contraintes de l'OM à enseigner vis-à-vis de l'OM enseignée. Par exemple, nous citons les travaux d'Abou Raad et Mercier (2009) :

L'action de l'enseignant consiste toujours, dans les classes observées, à proposer aux élèves la manipulation des systèmes d'ostensifs relatifs aux savoirs qu'il cherche à enseigner. (Abou Raad & Mercier, 2009)

Dans cet extrait, les auteurs mettent en évidence que les technologies sont davantage guidées par les ostensifs que les non-ostensifs, ce qui se retrouve dans les pratiques algébriques des enseignants. Ils avancent que les enseignants manquent de termes techniques pour décrire et conduire les calculs. Ils n'ont à leur disposition que le langage courant et des ostensifs graphiques ou gestuels (« supprimer les parenthèses ») pour décrire les technologies qui justifient les manipulations des expressions.

En conclusion de ce chapitre, nous avons construit une OM de référence qui est une OM régionale relativement aux expressions algébriques. Elle composée de trois OM locales : OM1 sur la génération des expressions, OM2 sur l'équivalence des expressions et OM3 sur l'algèbre des polynômes. Ces trois OM locales sont in-

timelement reliées par le fait que la convocation d'un type de tâches de l'une d'entre elles conduit à la convocation d'autres types de tâches de cette OM locale ou des deux autres. C'est pourquoi les raisons d'être de la génération des expressions algébriques et de leur transformation à partir des propriétés du calcul algébrique se trouvent dans les trois OM locales. Nous avons ensuite opérationnalisé cette OM de référence pour analyser les programmes scolaires du collège et de seconde dans le but de caractériser l'OM à enseigner. Nous avons mis en évidence que des savoirs et savoir-faire implicites relativement aux nécessités épistémologiques dégagées dans le chapitre 2. Cela nous a permis de dégager deux questions génératrices à aborder dans les parcours d'enseignement différencié. Dans le chapitre suivant, après avoir précisé en quoi le test diagnostique Pépite permet de caractériser les OM apprises par les élèves dans l'OM de référence, nous dégageons les technologies dominantes des OM apprises en lien avec la part d'implicites de l'OM à enseigner. Puis nous développons le modèle de parcours d'enseignement différencié et l'illustrons par le biais de quelques exemples.

Chapitre 4

Modélisation de parcours d'enseignement différencié

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de parcours d'enseignement différencié (PED). Nous tirons parti des conclusions du chapitre 3 : l'analyse de l'OM à enseigner à partir de l'OM de référence y met en évidence des besoins d'apprentissage ignorés par l'institution considérée. Ainsi, nous avons dégagé deux questions génératrices à aborder dans les parcours PED, qui sont les suivantes :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

Il reste maintenant à préciser ces questions à partir de l'examen des OM apprises comme annoncé dans l'introduction (cf. chapitre 1). Dans une première partie (§4.1), nous présentons le test diagnostique Pépite et l'analyse *a priori* qui permet de coder et d'analyser les réponses des élèves. Nous le mettons en perspective par rapport à l'OM de référence relative aux expressions algébrique. Cela conduit à l'interprétation du modèle de stéréotypes visant à catégoriser ces OM apprises et à les caractériser par des technologies « dominantes ». Nous concluons sur la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises, soit par l'énoncé de sous-questions génératrices à aborder dans les PED. Dans une deuxième partie (§4.2), nous présentons le modèle de PED que nous avons conçu au cours de notre recherche, en collaboration avec l'ensemble des partenaires du projet PépiMep : les enseignants d'un groupe IREM, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath. Dans une troisième partie (§4.3), nous proposons une analyse *a priori* de trois PED différents ; il s'agit des parcours qui sont testés en classe et qui feront, dans le chapitre 5, l'objet d'analyses *a posteriori*. La quatrième partie (§4.4) est consacrée à la description du mode de

collaboration avec les partenaires du projet, élément déterminant de la viabilité du modèle de PED dans l'enseignement ordinaire, de son automatisation et de sa diffusion sur LaboMep.

4.1 Interprétation des OM apprises dans l'OM de référence

Dans ce paragraphe, nous présentons le test Pépite et l'analyse *a priori* qui permet de coder et d'analyser les réponses des élèves. Pour plus de précisions sur ces analyses, nous renvoyons le lecteur au rapport intermédiaire 2010 du projet PépiMeP¹ (Grugeon, Delozanne, Pilet, & Chenevotot-Quentin, 2010).

4.1.1 Les tâches diagnostiques

a. Des tâches qui recouvrent le domaine algébrique

Le test actuel est composé de dix tâches diagnostiques, soit 27 items (Chenevotot et al., 2012), choisis en croisant à la fois les différents aspects de la compétence algébrique, pris comme référence (cf. §1.2, Grugeon, 1997), et les types de tâches développés dans les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes de mathématisation pour généraliser, modéliser, prouver ou mettre en équation, exercices techniques de calcul ou de reconnaissance. Ces dix tâches diagnostiques recouvrent les problèmes du domaine algébrique.

Ces tâches diagnostiques impliquent différents types de tâches de l'OM globale du domaine de l'algèbre (cf. §3.1.1) présents dans les programmes de collège et de seconde (cf. tableau 4.1) :

- de calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du (ou se ramenant au) premier degré,
- de production d'expression², de formule ou de mise en équation pour traduire

1. Ce rapport est disponible à l'adresse <http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm>

2. La distinction entre production et traduction dans cette catégorisation des types de tâches n'est pas prise dans le même sens que pour l'OM de référence construite dans notre travail. En effet, dans l'OM1, la distinction entre produire et traduire relève de savoir si l'introduction d'une lettre est à la charge de l'élève ou pas, alors qu'ici la traduction porte davantage sur l'interprétation de la structure des expressions et l'association entre deux registres sémiotiques.

Types de tâches	Nombre d'items	Item du test
de calcul algébrique	8 sur 27	1.1/1.2/1.3/1.4/5.1/5.2./5.3/5.4
de production d'expression	7 sur 27	3.1/6/8.1/8.2/8.3/9/10.2
de traduction ou de reconnaissance	11 sur 27	2.1/2.2/2.3/3.2/4.1/4.2/4.3/4.4/4.5/7/10.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 27	8.3/9/10.3

TABLEAU 4.1 – Organisation praxéologique du test composé de dix tâches diagnostiques (Chenevotot et al, à paraître)

- des relations entre variables selon les conditions de l'énoncé,
- de traduction ou de reconnaissance de relations mathématiques d'un registre de représentation dans un autre,
 - de résolution de problèmes dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) en mobilisant l'outil algébrique pour prouver des propriétés et mettre en équation.

Les tâches diagnostiques peuvent être des questions à choix multiples (QCM) ou des exercices à énoncés plus ou moins ouverts. Nous illustrons les items de chaque catégorie par une figure : la figure 4.1 pour les types de tâches de calcul algébrique, la figure 4.2 pour les types de tâches de production d'expression, la figure 4.3 pour les types de tâches de traduction ou de reconnaissance et la figure 4.4 pour les types de tâches de résolution de problèmes dans différents cadres. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour les énoncés de chaque tâche.

5 - Développer et factoriser une expression du second degré

Question n° 1 :
Parmi les réponses proposées, coche dans chaque cas celle qui est correcte.
(Note, si besoin, les calculs réalisés.)

L'expression $(2x - y)^2$ a pour forme développée :

$2x^2 - 4xy + y^2$ $4x^2 - 2xy + y^2$
 $4x^2 - y^2$ $4x^2 - 4xy + y^2$

L'expression $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$ a pour forme factorisée :

$(x + 2)(-3)$ $x^2 - x - 6$
 $(x + 2)(-5x + 10)$ $(x + 2)(x - 3)$
 $(x + 2) + (x - 3)$

FIGURE 4.1 – Exercice 5, questions 1 et 2 - Exemple de tâche diagnostique relevant du calcul algébrique

Chaque tâche diagnostique du test peut être caractérisée par un type de tâches,

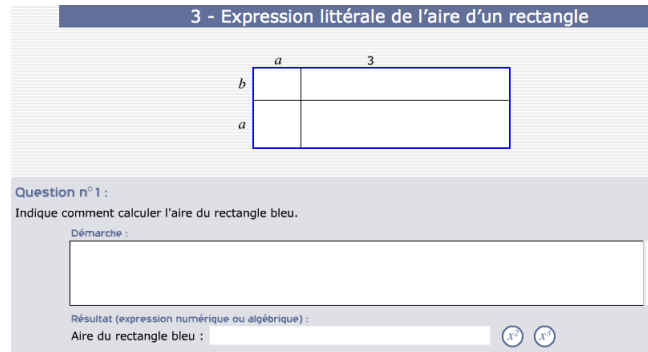


FIGURE 4.2 – Exercice 3, question 1 - Exemple de tâche diagnostique relevant de la production d'expression

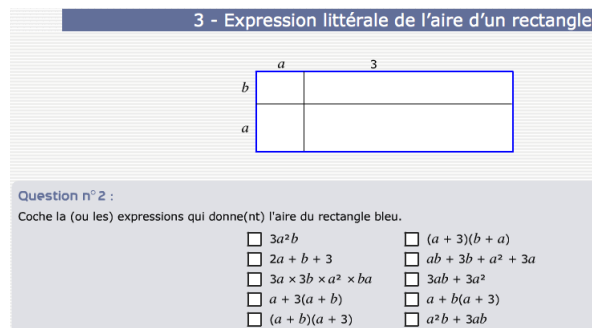


FIGURE 4.3 – Exercice 3, question 2 - Exemple de tâche diagnostique relevant de la traduction et de la reconnaissance

des techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés, les cadres et registres de représentation, la complexité des expressions en jeu, le niveau d'intervention des organisations mathématiques dans la tâche prescrite (Castela, 2007). Nous le montrons pour une des tâches diagnostiques la plus riche en terme d'analyse : le problème du prestidigitateur dans l'exercice 9. Nous nous appuyons sur Grugeon (2009, chapitre 2).

Le problème du prestidigitateur : l'exercice 9 de Pépite

La tâche est la suivante (cf. figure 4.4) :

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit au joueur : « Tu penses à un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. » Indique si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifie ta réponse.

Il s'agit de prouver que, pour tout nombre réel x , $P(x) = 7$, où $P(x)$ est l'expression algébrique du programme de calcul proposé. Cette tâche correspond au type de

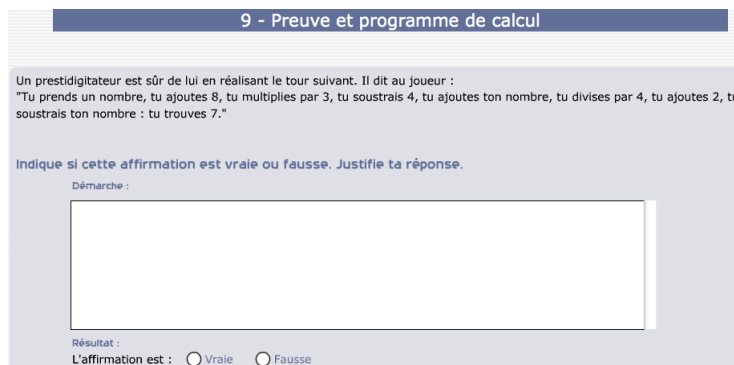


FIGURE 4.4 – Exercice 9 - Exemple de tâche diagnostique relevant de la résolution de problèmes dans différents cadres

tâches $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ « Prouver le résultat d'un programme de calcul » présent dans OM1. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 3 (cf. §3.1.6), ce type de tâches se décompose en plusieurs types de tâches :

- $T_{P-Exp-Resultat-PC}$: Prouver le résultat d'un programme de calcul (OM1)
 - T1 : Produire une expression à partir d'un programme de calcul (OM1)
 - T11 : Mobiliser la variable x pour produire une expression générale
 - T12 : Traduire un programme de calcul en une expression algébrique ($T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ dans OM1)
 - T2 : Effectuer le calcul
 - T21 : Identifier la structure de l'expression pour reconnaître les propriétés à appliquer ($T_{Structure}$ dans OM2)
 - T22 : Développer une expression algébrique (T_D dans OM3)
 - T23 : Réduire une expression algébrique ($T_{FA-mon+mon}$ dans OM3)

Les trois OM locales sont impliquées dans la résolution de cette tâche. Les types de tâches qui décomposent $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ conditionnent le choix des composantes mises en jeu dans l'analyse, selon la structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique.

Les variables caractérisant cette tâche sont les suivantes :

- *Nature des types de tâches* : prouver qu'une propriété numérique est vraie ; ce type de tâche fait appel à d'autres sous-types de tâches ;
- *Nature des expressions et complexité* : expression du premier degré à une variable x , globale parenthésée $[(x + 8) \times 3 - 4 + x]/4 + 2 - x$, à six niveaux de parenthèse, et mettant en jeu trois additions, deux soustractions, une multiplication et une division ; le programme de calcul est choisi pour

que l'expression obtenue soit un nombre ou un multiple du nombre initial ; les coefficients numériques peuvent varier selon des contraintes fixées.

- *Registres de représentation en jeu* : registre des programmes de calcul, registre des écritures algébriques, du registre discursif vers le registre des écritures algébriques ;
- *Niveau d'adaptation des connaissances en jeu* : disponible, étant donnée l'ouverture de la question.

La technique attendue met en jeu les éléments technologiques et théoriques suivant : la traduction algébrique, la preuve algébrique, la lettre comme nombre généralisé, l'expression globale parenthésée ou écriture de chaque étape de calcul, l'égalité comme relation d'équivalence.

b. Des tâches représentatives des types de tâches des trois OM locales

Afin d'interpréter les tâches diagnostiques et leur analyse dans l'OM de référence sur les expressions algébriques qui guide notre travail, nous relevons quel type de tâche de l'OM de référence intervient dans chaque tâche diagnostique. Ce travail est présenté dans le tableau 4.2. Seul le type de tâches convoqué par la tâche est indiqué. Nous ne présentons pas tous les types de tâches qui les composent (cf. chapitre 3) ; nous indiquons uniquement quelles OM locales sont impliquées dans la résolution. Le tableau 4.2 met en évidence que les principaux types de tâches constitutifs de chaque OM de référence sont convoqués dans les tâches diagnostiques relatives aux expressions algébriques. Ces types de tâches mettent en jeu l'agrégation des trois OM locales.

4.1.2 L'analyse *a priori* pour coder les réponses des élèves

a. Plusieurs niveaux de diagnostic

Les réponses des élèves ne sont pas seulement analysées en termes de réussite ou d'échec. Nous allons au-delà de l'évaluation de la validité des réponses en les codant en termes de cohérences de fonctionnement selon une analyse *a priori* fondée sur la grille d'analyse multidimensionnelle de Grugeon (1997). Plusieurs niveaux de codage des réponses des élèves sont définis dans le diagnostic pour établir le profil cognitif de l'élève et son stéréotype. Nous interprétons ces différents codages pour les assimiler soit à des technologies institutionnellement reconnues, soit à des technologies qui justifient et légitiment pour les élèves des techniques erronées récurrentes dans cette

Exercice	Item	OM1	OM2	OM3	Types de tâches
1	1.1				
	1.2				
	1.3				
	1.4				
2	2.1		x		$T_{Prouver-equiv}$
	2.2		x		$T_{Prouver-equiv}$
	2.3		x		$T_{Prouver-equiv}$
3	3.1	x			$T_{T-Aire \rightarrow Exp}$
	3.2	x	x	x	$T_{A-Aire-Exp}$
4	4.1		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.2		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.3		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.4		x		$T_{Prouver-equiv}$
	4.5		x		$T_{Prouver-equiv}$
5	5.1		x	x	$T_{Associer}$
	5.2		x	x	$T_{Associer}$
	5.3				
	5.4				
6	6				$T_{T-Relation \rightarrow Formule}$
7		x			$T_{T-Exp \rightarrow Aire}$
8	8.1	x			$T_{T-Aire \rightarrow Exp}$
	8.2	x			$T_{T-Aire \rightarrow Exp}$
	8.3			x	$T_{DDS-reel \times som}$
9	9	x	x	x	$T_{P-Exp-Resultat-PC}$
10	10.1				
	10.2	x			$T_{T-Relation \rightarrow Exp}$
	10.3				

Légende. Les lignes grisées correspondent aux items qui portent sur les expressions algébriques. Les lignes blanches sont celles qui ne portent pas sur des expressions algébriques mais sur des formules ou des équations.

TABLEAU 4.2 – Répartition des tâches diagnostiques du logiciel Pépité suivant les trois composantes du stéréotype et les trois OM locales de référence

institution. Nous l'illustrons sur l'exemple du problème du prestidigitateur.

b. Premier niveau de diagnostic : le diagnostic local ou le codage des réponses des élèves par exercice

Le codage des réponses des élèves aux différentes questions du test diagnostique s'effectue en deux temps. D'abord, la réponse de l'élève est identifiée à un « type de réponse » qui correspond à une technique correcte, incorrecte ou inadaptée mise en œuvre par l'élève³. Les différents types sont issus d'une analyse *a priori* des procédures que les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre au niveau scolaire considéré. Par exemple, pour l'exercice 9, seize types dominants sont distingués, chacun avec des variabilités (cf. (Grugeon et al., 2010, p. 55)).

Puis chaque type est codé grâce à une grille d'analyse multidimensionnelle (Grugeon, 1997), selon cinq dimensions : la validité de la réponse (V), le statut des lettres (L), le niveau technologique en jeu dans les écritures algébriques utilisées lors des transformations symboliques (EA), le niveau technologique en jeu dans les représentations utilisées lors d'une traduction (T), le niveau technologique de justification (J). Ce codage correspond au niveau technologique associé à la technique mise en œuvre l'élève. Nous renvoyons à l'annexe A pour une illustration du codage des réponses des élèves (Prévit, 2008) sur l'exercice 9 de Pépite. Nous pouvons associer les trois dimensions L, T et EA de ce codage aux technologies associées aux trois OM locales de référence : L correspond à OM1 pour la production et la mobilisation des lettres, T correspond à OM1 pour la traduction et EA correspond à OM2 et OM3 pour l'interprétation et la transformation des expressions. Remarquons qu'une dimension combine OM2 et OM3. L'interprétation de la structure des expressions pour les transformer n'est pas détachée de la transformation des expressions.

Pour donner une idée générale de la démarche et témoigner de la richesse d'analyse en vue d'une exploitation visant à en dégager des catégories d'OM apprises, nous donnons des exemples de réponses d'élèves et de codage à l'exercice 9 du test. Pour cela, nous nous appuyons sur Delozanne et al. (2010). Le lecteur peut se référer à Grugeon et al. (2010) ; Prévité (2008) ; Darwesh (2010) pour une description détaillée des différents types retenus et du codage des réponses des élèves pour chaque tâche diagnostique.

Les réponses de quatre élèves d'une classe de troisième à l'exercice 9 du test

3. Même si l'analyse n'est pas présentée en terme de technique, nous identifions les types comme des codages de techniques en lien avec le raisonnement et les propriétés utilisés par les élèves. Il serait envisageable de décrire chaque type en terme de technique correcte, incorrecte ou inadaptée.

Khemararak	Nicolas	Karine	Laurent
Soit 5 un nombre	$3 + 8 = 11$	$x + 8 = 8x$	$=[(x+8) \times 3 - 4 + x] / 4 + 2 - x$
$((5+8) \times 3 - 4 + 5) / 4 + 2 - 5 = 7 ?$	$11 \times 3 = 33$	$8x$	$= (3x + 24 - 4 + x) / 4 + 2 - x$
$((13) \times 3 - 4 + 5) / 4 + 2 - 5 = 7 ?$	$33 - 4 = 29$	$3 \times 8x = 24 + 3x =$	$= 4x + 20 / 4 + 2 - x$
$(39 - 4 + 5) / 4 + 2 - 5 = 7 ?$	$29 + 3 = 32$	$27x$	$= x + 5 + 2 - x$
$10 + 2 - 5 = 7 ?$	$32 / 4 = 8$	$27x - 4 = 23x$	$= 7$
$10 - 3 = 7 ?$	$8 + 2 = 10$	$23x + x = 24x$	
$7 = 7 ?$	$10 - 3 = 7$	$24x / 4 = 6x$	
Oui donc cela marche		$6x + 2 = 8x$	
		$8x - x = 7$	

FIGURE 4.5 – Réponses de quatre élèves à l'exercice 9 du test Pépite (extrait de Delozanne et al, 2010)

Pépite sont présentées dans la figure 4.5. Ces exemples ont pour objectif de montrer la diversité des réponses des élèves, la largeur du spectre des réponses analysées automatiquement et des exemples de cohérence que le logiciel détecte dans l'activité des élèves. Remarquons que l'analyse automatique des réponses à cet exercice (Prévit, 2008) ne se prétend pas exhaustive, mais qu'elle examine toutes les réponses correspondant aux types établis par les didacticiens. Elle produit, en particulier, automatiquement les codages indiqués dans le tableau 4.3.

Khemararak n'est pas encore entré dans une démarche d'utilisation de l'algèbre pour prouver puisqu'il se limite à donner un exemple; toutefois, sa maîtrise des calculs numériques et sa façon d'appréhender l'expression numérique de façon globale et de la transformer par équivalence, est un levier d'apprentissage qui devrait lui permettre d'entrer rapidement dans une démarche algébrique. Sa réponse est du type 12.2 : « Preuve par un exemple numérique, l'énoncé est traduit par une équation et les calculs sont corrects », codé⁴ V3, L5, E1, EA1, J2, T1. Cet élève ne convoque par le type de tâches T11 qui intervient dans la résolution. Il convoque T12 dans une traduction numérique.

Nicolas utilise, lui aussi, une preuve par l'exemple et maîtrise ces calculs simples. Par contre, il utilise une démarche arithmétique en indiquant une suite de calculs où le signe égal « annonce » un résultat. Sa réponse est du type 12.3 : « Preuve par des exemples avec une traduction correcte de l'énoncé pas à pas », codé V3,

4. Le codage des réponses des élèves du type 12.2 présenté dans l'annexe A n'est pas tout à fait identique à celui-ci parce que le codage a évolué depuis le début du projet notamment pour mieux spécifier les registres sémiotiques utilisés dans les réponses des élèves.

Dimensions	Exemples de critères et leur code			
	Khemarak	Nicolas	Karine	Laurent
Justification	Par l'exemple (J2)	Par l'exemple (J2)	De type formel scolaire avec application de règles fausses (J31)	Par l'algèbre (J1)
Utilisation des lettres	Pas d'utilisation des lettres (L5)	Pas d'utilisation des lettres (L5)	Utilisation des lettres avec utilisation de règles fausses (L3)	Utilisation correcte des lettres (L1)
Traduction	Traduction par une expression globale parenthésée (T1)	Traduction par expression partielle (T2)	Traduction par expression partielle enchaînée en succession d'opérations (T4)	Traduction par expression globale parenthésée (T1)
Signe =	Relation d'équivalence (E1)	Annonce un résultat (E2)	Annonce un résultat (E2)	Relation d'équivalence (E1)
Écritures algébriques	Correctes (EA1)	Correctes (EA1)	Identification incorrecte de + et × (assemble les termes)(EA42) règles fausses : $x + a \rightarrow x a$ $a x \pm b \rightarrow (a \pm b) x$ $a x - x \rightarrow a - 1$	Erreur de parenthèse avec mémoire de l'énoncé (EA31)
Validité	Réponse invalide (V3)	Réponse invalide (V3)	Réponse invalide (V3)	Réponse invalide (V3)

TABLEAU 4.3 – Codage des réponses de quatre élèves à l'exercice 9 du test Pépite (extrait de Delozanne et al, 2010)

L5, E2, EA1, J2, T2. Cet élève ne convoque par le type de tâches T11 et T12 qui interviennent dans la résolution de la tâche, il ne mobilise pas d'écriture numérique ou algébrique globalement parenthésée.

Karine utilise la lettre x , mais sa résolution est qualifiée de justification par le « formel scolaire » car elle utilise des règles fausses bien identifiées par les enseignants et les chercheurs en didactique. Par cette expression, nous désignons les élèves pour qui, « faire des mathématiques, c'est appliquer des règles vides de sens ». Sa réponse est du type 7.3 : « Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée », codé V3, L3, E2, EA42, J31, T4. Cette élève convoque T11 mais ne convoque pas T12 pour traduire globalement l'énoncé. Elle convoque aussi T23, mais avec des règles de type $x + a \rightarrow xa$ (concaténation). Cette technique indique globalement une technologie arithmétique.

Laurent est entré dans une démarche algébrique et son raisonnement prouve qu'il sait traiter des expressions équivalentes. Il convoque T11 et T12. Comme beaucoup d'élèves à ce niveau (classe de troisième), il ne maîtrise pas encore parfaitement l'utilisation des parenthèses mais il garde le sens des opérations. Sa réponse est du type 7.3 « Preuve algébrique avec une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée », codé V3, L1, E1, EA31, J1, T1.

Ces exemples montrent que le codage des réponses des élèves s'appuie sur les techniques qu'ils mettent en œuvre et les éléments technologiques qu'ils utilisent pour résoudre une tâche diagnostique. Ces éléments technologiques font référence aux trois OM locales. Le codage des réponses des élèves est le niveau de diagnostic le plus fin mis en œuvre. Il code les réponses des élèves sur chaque tâche du test Pépité. C'est une analyse transversale du codage des réponses qui permet de rendre compte de la cohérence de fonctionnement de l'élève sur l'ensemble des tâches et d'établir son profil cognitif. Cette analyse comporte deux niveaux. Le niveau 2 du diagnostic calcule des indicateurs et des descripteurs intermédiaires qui agrègent des codes établis par le diagnostic local. Le niveau 3 du diagnostic s'appuie sur les valeurs des descripteurs et des indicateurs du niveau précédent pour attribuer un niveau sur chaque composante du stéréotype.

c. Deuxième niveau de diagnostic : le diagnostic global et les indicateurs

Le deuxième niveau de diagnostic est à la fois quantitatif et qualitatif. L'analyse quantitative est présentée par des descripteurs qui traduisent le taux de réussite selon les types de tâches diagnostiques. Ils correspondent au taux de questions réussies par rapport au nombre de questions posées et au taux de questions réussies par rapport au nombre de questions abordées. L'analyse est aussi qualitative à partir d'indicateurs que nous interprétons comme un niveau technologique dominant sur les praxéologies développées globalement par les élèves sur l'ensemble des tâches.

Plusieurs indicateurs sont calculés pour chacune des trois composantes qui caractérisent le stéréotype. Rappelons ces trois composantes :

- Calcul algébrique (CA) : le calcul algébrique (dimension objet de l'algèbre). Cette composante sert à évaluer le degré de maîtrise du calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.
- Usage de l'algèbre (UA) : l'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (dimension outil de résolution et de preuve de l'algèbre). Cette composante permet d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.
- Traduction algébrique (TA) : la traduction d'une représentation en une autre. Il s'agit ici d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).

Trois indicateurs interviennent pour la composante Calcul algébrique (cf. tableau 4.4) :

- La Maîtrise du calcul algébrique (MCA) évalue la maîtrise du calcul algébrique dans les exercices techniques.
- La Maîtrise des règles (MR) est calculée à partir du code EA, qui représente le nombre d'utilisations correctes des règles de transformation (EA1) ou de maîtrise technique fragile (EA2) ou les règles de transformation non maîtrisées, mais avec identification correcte du rôle des opérateurs $+$ et \times (EA3).
- L'Interprétation des expressions (IE) correspond au taux d'exercices d'interprétation des expressions algébriques.

Trois indicateurs interviennent pour la composante Usage de l'algèbre (cf. tableau 4.5) :

- La Maîtrise de l'outil algébrique (MOA) évalue la mobilisation de l'algèbre

dans les exercices de mathématisation et particulièrement ceux qui nécessitent d'utiliser l'algèbre pour prouver (code J).

- La Justification algébrique (JA) est calculée à partir du taux d'exercices de mathématisation réussis, du nombre de justifications algébriques par rapport aux justifications par l'exemple ou à des arguments de type « formel scolaire » (code J).
- Le Statut des lettres (SL) est calculé à partir des critères de la dimension usage des lettres (code Li) avec une pénalité pour l'utilisation de lettres comme abréviations (L4) ou pour calculer avec des règles fausses (L3).

Deux indicateurs interviennent pour la composante Traduction algébrique (cf. tableau 4.6) :

- La Maîtrise de la traduction algébrique (MTA) évalue la maîtrise de la traduction algébrique dans les exercices d'interprétation des expressions algébriques en articulant avec d'autres registres (SIEAAR).
- La Traduction des relations mathématiques (TRM) évalue la maîtrise de la traduction des relations mathématiques dans les exercices de traduction entre des registres et celui des écritures algébriques (SIEAAR).

Composante	Descripteurs	Nature	Indicateurs	Valeurs	
Calcul algébrique	Taux de réussite sur les exercices techniques	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Taux de réussite sur les exercices mettant en œuvre l'interprétation des expressions algébrique	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Maîtrise du calcul algébrique (MCA)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise défailante	-0
	Maîtrise des règles (MR)	Qualitatif	Critères de la dimension : écriture algébrique (EA)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise défailante	-0
				Rôle des opérateurs non maîtrisé	-1
	Interprétation des expressions (IE)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V) et de la dimension justification	Interprétation appropriée des expressions	+2
				Interprétation des expressions moyennement appropriée	+1
				Interprétation défailante	-1

TABLEAU 4.4 – Les différentes valeurs des indicateurs de la composante CA (Grugeon et al., 2010)

Nous pouvons associer aux différentes valeurs sur les indicateurs des éléments technologiques impliqués dans la convocation de types de tâches relevant des trois

Composante	Descripteurs	Nature	Indicateurs	Valeurs	
Usage de l'algèbre	Taux de réussite sur les exercices de mathématisation	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Maîtrise de l'outil algébrique (MOA)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise défailante	-0
	Type de justification (JA)	Qualitatif	Critères de la dimension : type de justification(J)	Justification par l'algèbre fortement dominante	+3
				Justification par l'algèbre faiblement dominante	+2
				Justification par l'algèbre dominant dans un contexte trop faible	+1
				Justification de type scolaire dominante	-0
				Justification numérique dominante	-1
				Statut des lettres (SL)	Qualitatif
	Utilisation des lettres comme variable ou inconnue ou nombre généralisé	+2			
	Utilisation de lettre évaluée	+1			
	Pas d'utilisation des lettres	-0			
	Utilisation des lettres comme abréviation ou en appliquant des règles de calcul fausses	-1			

TABLEAU 4.5 – Les différentes valeurs des indicateurs de la composante UA (Grueon et al., 2010)

Composante	Descripteurs	Nature	Indicateurs	Valeurs	
Traduction algébrique	Taux de réussite sur les exercices mettant en œuvre l'utilisation de l'outil algébrique pour mettre en équation	Quantitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Nombre d'exercices réussis/nombre d'exercices posés	
	Maîtrise de la traduction algébrique (MTA)	Qualitatif	Critères de la dimension : validité(V)	Bonne maîtrise	+1
				Maîtrise insuffisante	-0
	Traduction des relations mathématiques (TRM)	Qualitatif	Critères de la dimension : traduction(T)	Traduction des relations mathématiques	+1
				Traduction abrégative	-0

TABLEAU 4.6 – Les différentes valeurs des indicateurs de la composante TA (Grueon et al., 2010)

OM locales. Les valeurs sur les indicateurs des composantes UA et TA, à savoir MOA, JA, SL, MTA et TRM correspondent à des éléments technologiques de OM1 comme les règles de conversion entre un registre sémiotique et celui des écritures algébriques. Les valeurs sur les indicateurs MR et MCA de la composante CA correspondent à des

éléments technologiques de OM3 comme les règles de calcul impliqués. Les valeurs sur les indicateurs MCA et IE de la composante CA correspondent à des éléments technologiques de OM2 comme la référence à l'équivalence des expressions, leur interprétation des expressions suivant les deux aspects procédural ou structural.

Ces descripteurs et indicateurs sont des éléments de diagnostic intermédiaires entre le codage des réponses et le profil des élèves. Ils permettent au troisième niveau du diagnostic de calculer par un algorithme le stéréotype de chaque élève.

d. Troisième niveau de diagnostic : le diagnostic global et le stéréotype

Un stéréotype se trouve ainsi caractérisé par des niveaux qui sont attribués sur les trois composantes. La détermination des niveaux s'appuie sur un algorithme défini à partir des éléments du modèle multidimensionnel et des calculs des descripteurs et des indicateurs. Une présentation détaillée de l'algorithme est présentée dans l'annexe A (voir Grugeon et al., 2010, p. 110). Ces niveaux vont de 1 à 4, suivant les composantes. Un stéréotype est de la forme : $CA_i UA_j TA_k$ ($1 < i, k < 3$ et $1 < j < 4$).

Nous reprenons la présentation synthétique de chaque composante présentée dans Delozanne et al. (2005); Grugeon (2009) pour rappeler la signification des niveaux attribués à chacune d'elles et faire le lien avec l'OM de référence dans le paragraphe 4.1.4. Cette présentation nous sert ensuite d'appui pour dégager les éléments technologiques dominants mobilisés par les élèves, en référence aux technologies présentées dans le chapitre 3 relativement aux trois OM locales de référence. D'après le paragraphe précédent (§ c.), les niveaux sur la composante Calcul algébrique (CA) peuvent s'interpréter pour faire des hypothèses sur les éléments technologiques mis en jeu par les élèves dans la résolution de tâches convoquant des types de tâches de OM2 et OM3. Les niveaux sur les composantes Usage de l'algèbre (UA) et Traduction algébrique (TA) peuvent s'interpréter pour faire des hypothèses sur les éléments technologiques mis en jeu par les élèves dans la résolution de tâches convoquant des types de tâches de OM1. Les formulations retenues s'adressent aux enseignants et ne sont pas des formulations didactiques. Elles résultent d'un travail de conception participative avec les enseignants.

La première composante du stéréotype est le Calcul algébrique, notée CA, porte sur la dimension *objet* de l'algèbre.

« CA a pour but d'évaluer le degré de maîtrise et la nature des techniques de calcul mis en jeu par l'élève. Les traitements mis en jeu sont relatifs à la conduite et au contrôle des calculs numériques, du calcul algébrique, à l'interprétation des expressions numériques et algébrique. » (Grugeon, 2009, p. 58)

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Usage de l'algèbre	UA	Étudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve	Niveau 1 : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique non adaptée.
			Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	TA	Étudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre	Niveau 1 : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction pas toujours adaptée.
			Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Étudier la capacité à calculer algébriquement	Niveau 1 : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

TABLEAU 4.7 – Les niveaux sur les composantes UA, TA et CA (Chenevotot et al., 2009)

La description des trois niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

La deuxième composante du stéréotype est l'Usage de l'algèbre, notée UA. La description des quatre niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

« Il s'agit de déterminer le mode selon lequel l'élève mobilise la démarche algébrique dans les tâches diagnostiques selon les différents emplois de l'algèbre mis en jeu. Il s'agit aussi d'analyser les types de justification et le statut de l'égalité mis en jeu dans la résolution. Cette composante permet d'évaluer l'entrée de l'élève dans la pensée algébrique, son éventuelle compréhension du rôle de l'algèbre comme outil de résolution et de preuve en rupture avec les démarches arithmétiques. » (Grugeon, 2009, p. 57)

La description des quatre niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

La troisième composante du stéréotype, notée TA.

« Elle permet d'étudier la mise en relation entre les registres de représentation du domaine algébrique. En d'autres termes, il s'agit de déterminer si l'élève parvient ou non à articuler le registre des écritures algébriques et les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique) et le mode de mise en relation des registres utilisés. Il s'agit d'analyser comment les

élèves interprètent des expressions algébriques en articulation avec les autres registres. L'évaluation de cette composante est essentielle pour déterminer l'efficacité avec laquelle l'élève va utiliser l'outil algébrique, efficacité fortement corrélée à sa flexibilité dans la traduction ou l'interprétation des représentations d'un registre dans un autre. » (Grugeon, 2009, p. 58)

La description des trois niveaux est présentée dans le tableau 4.7.

Le nombre de stéréotypes possibles s'élève à trente-six, ce qui est encore trop élevé, tant pour permettre de prendre des décisions sur les OM ponctuelles à proposer aux élèves que pour organiser un enseignement différencié viable dans les classes. Nous nous interrogeons : Comment regrouper les stéréotypes pour catégoriser les OM apprises ?

4.1.3 Le regroupement des stéréotypes pour catégoriser les OM apprises

Dans la définition du stéréotype, plusieurs niveaux sur chaque composante ont été définis. Ils correspondent à un stade de développement dans l'activité algébrique des élèves. Du point de vue anthropologique, ces différents niveaux correspondent au fait que, pour résoudre les tâches mettant en jeu des types de tâches de l'OM régional sur les expressions algébriques, les élèves utilisent des techniques qui ne mobilisent pas, au niveau technologique, les mêmes connaissances (propriétés numériques, propriétés algébriques) ni les mêmes modes de justification (Grugeon et al., 2012).

Un stéréotype est de la forme : $CA_i UA_j TA_k$ ($1 < i, k < 3$ et $1 < j < 4$), ce qui élève le nombre de stéréotypes possibles à trente-six. Ce modèle donne une vision globale des connaissances et des modes de raisonnement convoqués dans la résolution des tâches relevant du calcul sur et avec les expressions algébriques. Mais il est composé d'un nombre de stéréotypes trop élevé pour proposer des PED à chacun. Nous avons été conduit à regrouper les stéréotypes (Grugeon et al., 2012).

Nous regroupons les stéréotypes selon les composantes CA puis UA. Ce choix se justifie du fait, d'une part, que nous avons centré notre travail sur les expressions algébriques et le calcul sur ces expressions et, que, d'autre part, l'analyse de l'OM à enseigner a révélé une priorité pour les enseignants d'avoir à disposition de nouvelles propositions pour travailler le calcul sur les expressions algébriques. En effet, bien souvent, les enseignants proposent de refaire des tâches de calcul algébrique de même nature. De plus, nous avons montré dans le paragraphe 4.1.1 que les composantes CA et UA recouvrent les trois OM locales.

D'abord, nous regroupons les stéréotypes selon leur niveau sur la composante

CA, ce qui donne trois groupes : le groupe A pour le niveau 1 sur CA, le groupe B pour le niveau 2 sur CA et le groupe C pour le niveau 3 sur CA. Dans certains parcours d'enseignement différencié, notamment ceux qui visent à reconstruire des raisons d'être aux objets de l'algèbre, la dimension outil intervient. Cela nous amène à décomposer chaque groupe en deux sous-groupes. Un premier, le sous-groupe « + », pour les niveaux 1 et 2 sur UA et un second, le sous-groupe « - » pour les niveaux 3 et 4 sur UA. Le sous-groupe « + » correspond aux élèves qui ont un usage adapté de l'algèbre, dans au moins un type de problèmes alors que ceux du sous-groupes « - » sont majoritairement dans des démarches arithmétiques générant un usage immotivé et inadapté de l'algèbre. La composante TA est corrélée avec l'usage de l'outil algébrique qui intervient donc indirectement dans les regroupements. La répartition des groupes ainsi effectuée est présentée dans le tableau 4.8. Ce regroupement semble le plus pertinent pour travailler sur les expressions et le calcul algébrique. D'autres choix sont envisageables. Il est par exemple possible de reproduire une stratégie analogue à partir de l'entrée privilégiant la composante UA pour travailler la résolution de problèmes.

Gr C			Gr B			Gr A											
C-		C+	B-		B+	A-		A+									
CA	UA	TA	CA	UA	TA	CA	UA	TA									
3	3	1	3	1	1	2	3	1	2	1	3	1	1	1	1		
3	3	2	3	1	2	2	3	2	2	1	2	1	3	2	1	1	2
3	3	3	3	1	3	2	3	3	2	1	3	1	3	3	1	1	3
3	4	1	3	2	1	2	4	1	2	2	1	1	4	1	1	2	1
3	4	2	3	2	2	2	4	2	2	2	2	1	4	2	1	2	2
3	4	3	3	2	3	2	4	3	2	2	3	1	4	3	1	2	3

TABLEAU 4.8 – La répartition des stéréotypes en trois groupes et six sous-groupes

Ce regroupement permet de répartir équitablement les trente-six stéréotypes. Le nombre restreint de groupes peut faciliter l'organisation de la différenciation au sein de la classe tout en se rapprochant des pratiques habituelles des enseignants. Il regroupe les « bons » en calcul algébrique (groupe A), les « moyens bons » en calcul algébrique (groupe B) et les « fragiles » en calcul algébrique (groupe C) en distinguant, à l'intérieur de chaque groupe, les « bons à moyens bons » (sous-groupes « + ») et les « fragiles à très fragiles » (sous-groupes « - ») dans la résolution des différents types de problèmes du domaine algébrique.

Les groupes C+ et A- sont composés de stéréotypes peu probables ou dont nous faisons l'hypothèse qu'ils seront rencontrés rarement. Ce point est déjà évoqué dans

les travaux de Grugeon (2009) et de (Vincent et al., 2005).

« Si en théorie on dispose de trente-six stéréotypes, certains sont improbables. Dans le corpus de trois cent quarante élèves de troisième et de seconde dont nous disposons à l'heure actuelle, treize stéréotypes ont été relevés et souvent moins de six stéréotypes différents dans une classe ce qui nous rapproche du nombre de catégories spontanément identifiées par les enseignants. » (Grugeon, 2009, p. 63)

Ainsi, parmi les trente-six stéréotypes, certaines combinaisons semblent improbables notamment celles des groupes C+ et A-. C'est le cas du stéréotype (CA1, UA3/4 TA3) du groupe A-. Nous faisons l'hypothèse qu'un élève qui maîtrise le calcul algébrique l'utilise vraisemblablement de manière adaptée dans la résolution de problèmes. Inversement le stéréotype (CA3, UA1/2, TA1) du groupe C+ semble improbable. Nous faisons l'hypothèse qu'un élève qui ne maîtrise pas le rôle des opérateurs et des délimitants dans les calculs algébriques a une maîtrise probablement inadaptée de l'algèbre dans la résolution de problèmes et favorise des démarches arithmétiques. Nous faisons donc l'hypothèse que les groupes C+ et A- relèvent de stéréotypes improbables et que peu d'élèves se verront affectés aux groupes C+ et A-. Une analyse des stéréotypes rencontrés sur l'ensemble des expérimentations menées dans le cadre de la thèse permettra de revenir sur cette hypothèse dans la chapitre 5.

Ce regroupement catégorise tous les stéréotypes possibles, ce qui répond à une contrainte du projet PepiMeP. En effet, bien que certains stéréotypes apparaissent rarement, la contrainte informatique liée à l'implémentation du modèle de PED dans LaboMeP nécessite d'envisager tous les cas possibles.

Ce regroupement des stéréotypes nous permet de dégager une catégorisation d'OM apprises et de les caractériser par des technologies dites « dominantes ».

4.1.4 Une catégorisation des OM apprises

Nous interprétons chaque groupe de stéréotypes en terme de catégories d'OM apprises autour du calcul sur les expressions algébriques. Nous présentons ces OM apprises comme mobilisant des technologies de façon dominante, c'est-à-dire des éléments technologiques et théoriques utilisés majoritairement et relevant de la mobilisation d'objets mathématiques et de propriétés associées, des modes de discours, d'utilisation des ostensifs et de validation des calculs. Selon nous, seule une description des OM apprises au niveau des technologies donne accès à une vue d'ensemble de la cohérence des modes de fonctionnement et de raisonnement des élèves⁵. Les

5. Ce point de vue est proche de celui introduit par (Croset, 2009, p. 264) : « Ces comportements stables dans l'erreur doivent, selon nous, pouvoir s'expliquer, se justifier par la présence

technologies « dominantes » permettent de faire des hypothèses sur les techniques utilisées (attendues, erronées ou inadaptées) par les élèves et le fait que certaines classes d'erreurs puissent vivre dans les pratiques algébriques des élèves. Nous les présentons par groupe de stéréotypes dans le tableau 4.9 pour le groupe C, le tableau 4.10 pour le groupe B, le tableau 4.11 pour le groupe A. Notons que, dans ces tableaux, les technologies dominantes des groupes C+ et A- sont peu développées. Elles ne sont pas pertinentes, puisque, comme nous l'avons déjà souligné (cf. §4.1.3), les stéréotypes de ces groupes sont improbables et nous nous attendons à les rencontrer rarement dans les expérimentations.

Groupe C	
Θ_C Les élèves articulent insuffisamment les OM ponctuelles de OM2 et OM3. La transformation des expressions dans OM3 ne donne pas de raisons d'être à la reconnaissance de la structure ($T_{structure}$ dans OM2). La conduite des calculs s'appuie davantage sur la reconnaissance d'ostensifs (signes +, -, =, etc.) et rarement, au niveau technologico-théorique, sur la hiérarchie des opérateurs, les propriétés du calcul algébrique et le rôle des parenthèses. Les écritures algébriques ou numériques en ligne sont rarement interprétées selon leurs aspects procédural et structural ce qui se traduit par un calcul non contrôlé et un appui sur des démarches arithmétiques. Cela conduit à un manque d'acceptation d'un résultat contenant un signe opératoire et donc à des règles de transformation et de formation incorrectes du type concaténation ($3 + 2a = 5a$) ou linéarisation ($a^2 = 2a$). Les modes de raisonnements s'appuient rarement sur l'équivalence des expressions (OM2) et la dialectique entre l'algébrique et le numérique et privilégient des formulations d'ordre légal. On peut faire l'hypothèse que les élèves n'ont pas franchi la première étape du processus d'algébrisation.	
Groupe C-	Groupe C+
Θ_{C-} Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et donnent peu de raisons d'être à l'algèbre. L'algèbre comme outil de résolution de problèmes est immotivée et peu adaptée. Les élèves ont majoritairement recours à des démarches arithmétiques et mobilisent rarement les lettres. Ils ont des difficultés à mobiliser la hiérarchie des opérateurs dans la production d'expressions.	Θ_{C+} Les élèves articulent OM1 avec OM2 et OM3 et commencent à donner des raisons d'être à l'algèbre comme outil de résolution de problèmes.

TABLEAU 4.9 – Technologie « dominante » du groupe C

d'une technologie-en-acte chez ces élèves. C'est parce qu'ils ont en tête des éléments technologiques (erronés) qu'ils sont capables d'avoir un comportement stable (dans l'erreur) ».

Groupe B	
<p>Θ_B Les élèves articulent partiellement les OM ponctuelles de OM2 et OM3 pour conduire, anticiper et contrôler les transformations algébriques. Pour transformer des expressions simples sans parenthèse, ils s'appuient sur la structure des expressions et leur équivalence (OM2). Pour des expressions plus complexes avec parenthésage, ils s'appuient majoritairement sur l'aspect syntaxique des expressions et privilégient leur aspect procédural ce qui conduit souvent à des calculs « à l'aveugle » et non contrôlés ne préservant pas l'équivalence des expressions ainsi qu'à des règles de transformation erronées en lien avec le parenthésage du type $(a+2)^2 = a^2 + 4$. La conduite et le contrôle des calculs est davantage guidée par les ostensifs graphiques (flèches, surlignants) et des justifications d'ordre légal du type « il faut » que par les non-ostensifs et notamment les propriétés algébriques et le rôle des parenthèses. La dialectique de l'algébrique et du numérique est rarement utilisée pour conduire les calculs.</p>	
Groupe B-	Groupe B+
<p>Θ_{B-} Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et encore donnent peu de raisons d'être à l'algèbre comme outil de modélisation. L'outil algébrique pour résoudre les problèmes du domaine algébrique peut être disponible dans le cas de relations mathématiques simples. Par exemple, ils mobilisent peu $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ et T_D dans $T_{P-Exp-Resultat-PC}$.</p>	<p>Θ_{B+} Les élèves peuvent articuler OM1 avec OM2 et OM3 et commencent à donner des raisons d'être à l'algèbre. L'outil algébrique pour résoudre les problèmes de modélisation ou de preuve est adaptée pour des expressions peu complexes. Par exemple, les élèves mobilisent de manière adaptée $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ et T_D dans $T_{P-Exp-Resultat-PC}$.</p>

TABLEAU 4.10 – Technologie « dominante » du groupe B

Groupe A	
<p>Θ_A Les élèves articulent les OM ponctuelles de OM2 et OM3 pour conduire, anticiper et contrôler les transformations algébriques. Le calcul s'appuie sur les règles d'écriture et de transformation des expressions algébriques prenant en compte la structure des expressions et leur équivalence. La transformation d'une expression (type de tâches de OM1) s'appuie majoritairement sur la reconnaissance de la structure ($T_{structure}$ dans OM2) pour interpréter l'expression et appliquer la règle de calcul adaptée (l'équivalence des expressions). La conduite et le contrôle des transformations algébriques sont guidées par l'utilisation des ostensifs en lien avec les non-ostensifs associés (propriétés du calcul, etc.), ce qui permet de d'anticiper et d'orienter les calculs en fonction du but visé (intelligence du calcul).</p>	
Groupe A-	Groupe A+
<p>Θ_{A-} Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et donnent encore peu de raisons d'être à l'algèbre comme outil de modélisation contrairement au calcul algébrique. Les élèves peuvent encore avoir recours à des démarches arithmétiques.</p>	<p>Θ_{A+} Les élèves articulent OM1 avec OM2 et OM3 et donnent des raisons d'être à l'algèbre comme outil de modélisation. L'outil algébrique pour résoudre des problèmes de modélisation ou de preuve est majoritairement disponible et adapté. Par exemple, les élèves mobilisent de manière adaptée $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ et T_D dans $T_{P-Exp-Resultat-PC}$.</p>

TABLEAU 4.11 – Technologie « dominante » du groupe A

Le travail dans le cadre du projet PepiMep nous a permis de dresser une base de « solutions-élèves » relevant de chaque niveau technologique, qui est réactualisée au cours des nouvelles expérimentations. Nous donnons des exemples de réponses d'élèves des groupes C-, B-, B+ et A+ dans les tableaux suivants 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15.

Item	Énoncé	Réponses de Laure
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$(-3)^2 = 9 - 3^2 = 9$
1.3	QCM	$\sqrt{(-3)^2} = -3$
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (2/5)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^{(m)} \times a^{(n)} = a^{(m+n)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - $a^{(n)} = a \times n$
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	vrai - Car si $a = 5$ alors $2 \times 5^2 = 100$ et $(2 \times 5)^2 = 100$
3.1	Aire du rectangle	$6 \times a^3 \times b$
3.2	QCM	$3a \times 3b \times a^2 \times ba - 2a + b + 3$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $a \times a \times a \times a \times a = a^5$ et non a^6
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	faux - $4a^3 + 3a^2 = 7a^6$
4.3	$a^2 = a + a$	faux - $a^2 = a \times a$ et non $a + a$
4.4	$(a + 2)^2 = a^2 + 4$	faux - Pour $a = 1$, $3^2 = 9$ et $1^2 + 4 = 5$ et pas 9
4.5	$3 + 5a = 8a$	vrai - Il faut faire la somme des coefficients
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - 2xy + y^2$
5.2	Factoriser $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$	$(x + 2) + (x - 3)$
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	$-5/3$
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	$-1/2$
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$6e - p = p$
7	Correspondance expression aire	000001000
8.1	Aire du triangle	
8.2	Aire du rectangle	
8.3	Égalité d'aires	
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai - $6 + 5 = 11$ $11 \times 3 = 33$ $33 + 12 = 45$ $45/5 = 9$ $9 - 6 = 3$
10.1	Correspondance graphique	
10.2	Tarifs en fonction de n	
10.3	Tarif le plus avantageux	

TABLEAU 4.12 – Réponses de Laure au test Pépite (CA3 UA3 TA3) du groupe C- en début de troisième

Item	Énoncé	Réponses de Valérie
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$-3^2 = -9$
1.3	QCM	
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (5/6)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^3 \times a^2 = a^{(3+2)} = a^{(5)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - Aucune justification ne me convient.
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	vrai - Car $2a^2 = 2a \times 2a = (2a)^2$
3.1	Aire du rectangle	$a + 3 \times b + a$
3.2	QCM	$a + b(a + 3) - (a + 3)(b + a) - (a + b)(a + 3)$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $3 + 2 = 5$ pour les exposants
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	vrai - $4a^3 + 3a^2 = (4 + 3)a^{(3+2)}$
4.3	$a^2 = a + a$	faux - $a^2 = a \times a$ et non $a + a$
4.4	$(a + 2)^2 = a^2 + 4$	faux - Aucune justification ne me convient.
4.5	$3 + 5a = 8a$	vrai - Il faut faire la somme des coefficients
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - y^2$
5.2	Factoriser $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$	
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	$5/3$
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	0
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$e \times p$
7	Correspondance expression aire	000110110 (incorrect)
8.1	Aire du triangle	$10 \times$
8.2	Aire du rectangle	
8.3	Égalité d'aires	
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai - $10 + 5 = 15 \times 3 = 45 + 20 = 65 : 5 = 13 - 10 = 3$
10.1	Correspondance graphique	T2=bleu T1=rouge
10.2	Tarifs en fonction de n	110 et 160
10.3	Tarif le plus avantageux	7

TABEAU 4.13 – Réponses de Valérie au test Pépité (CA2 UA3 TA3) du groupe B- en début de troisième

Item	Énoncé	Réponses de Mélusine
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$(-3)^2 = 9$
1.3	QCM	$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2}$
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (5/6)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^{(m)} \times a^{(n)} = a^{(m+n)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - $a^2 = a \times a$
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	faux - Avec des parenthèses, le carré agit sur l'intérieur de la parenthèse, sans parenthèse le carré n'agit que sur le a
3.1	Aire du rectangle	$(3 + a) \times (a + b)$
3.2	QCM	$(a + 3)(b + a) - (a + b)(a + 3)$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $a^n \times a^p = a^{(n+p)}$
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	faux - On n'additionne pas des puissances qui n'ont pas le même exposant
4.3	$a^2 = a + a$	faux - Pour $a = 1$, $1^2 = 1$ et pas $1 + 1 = 2$
4.4	$(a + 2)^2 = a^2 + 4$	vrai - $(a + 2)^2 = a^2 + 2^2$
4.5	$3 + 5a = 8a$	faux - On ne peut pas additionner des nombres et des lettres
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - 2xy + y^2$
5.2	Factoriser $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$	$(x + 2)(-5x + 10)$
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	$5/3$
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	$-1/2$
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$6 \times p = e$
7	Correspondance expression aire	10010010 (incorrect)
8.1	Aire du triangle	$BA \times x/2$
8.2	Aire du rectangle	$FB \times (x + CD)$
8.3	Égalité d'aires	2 Démarche $10 \times 2/2 = 20/2 = 10$ et $2(2 + 3) = 2 \times 5 = 10$
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai - $((x + 8) \times 3 - 4 + x)/4 + 2 - x = 7$ $((2 + 8) \times 3 - 4 + 2)/4 + 2 - 2 = 7$
10.1	Correspondance graphique	T2=bleu T1=rouge
10.2	Tarifs en fonction de n	$n \times 4 + 30$ et $8 \times n$
10.3	Tarif le plus avantageux	8 Démarche : $4n + 30$ $8n$ $4n - 4n + 30$ $8n - 4n$ 30 $4n$ $30/4 = 7,5$

TABLEAU 4.14 – Réponses de Mélusine au test Pépite (CA2UA2TA1) du groupe B+ en fin de troisième

Item	Énoncé	Réponses de Joëlle
1.1	QCM	$5^2 \times 5^3 = 5^5$
1.2	QCM	$(-3)^2 = 9 - -3^2 = -9$
1.3	QCM	$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} - \sqrt{(-3)^2} = 3$
1.4	QCM	$(1/2) + (1/3) = (5/6)$
2.1	$a^3 \times a^2 = a^5$	vrai - $a^3 \times a^2 = a^{(3+2)} = a^{(5)}$
2.2	$a \times a = 2a$	faux - $a \times a = a^2$ est différent de $a + a = 2a$
2.3	$2a^2 = (2a)^2$	faux - $2a^2 = 2 \times a^2$ différent de $(2a)^2 = 4a^2$
3.1	Aire du rectangle	$ab + a^2 + 3b + 3a$
3.2	QCM	$(a+3)(b+a) - (a+b)(a+3) - ab + 3b + a^2 + 3a$
4.1	$a^3 \times a^2 = a^6$	faux - $a^n \times a^p = a^{(n+p)}$
4.2	$4a^3 + 3a^2 = 7a^5$	faux - On n'additionne pas des puissances qui n'ont pas le même exposant
4.3	$a^2 = a + a$	faux - $a^2 = a \times a$ et non $a + a$
4.4	$(a + 2)^2 = a^2 + 4$	faux - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4.5	$3 + 5a = 8a$	faux - On ne peut pas additionner des nombres et des lettres
5.1	Développer $(2x - y)^2$	$4x^2 - 4xy + y^2$
5.2	Factoriser $(x + 2)^2 - 5(x + 2)$	$(x + 2)(x - 3)$
5.2	Solution de $2(10 - x) = 10x$	$5/3$
5.3	Solution de $(x+1)(x-2) = -2$	0 et 1
6	Six fois plus d'élèves que de professeurs	$6p = e$
7	Correspondance expression aire	010011010
8.1	Aire du triangle	$5x$
8.2	Aire du rectangle	$2x + 6$
8.3	Égalité d'aires	2
9	Prestidigitateur et programme de calcul	vrai $[(x + 8) \times 3 - 4 + x]/4 + 2 - x,$ $= (3x + 24 - 4 + x)/4 + 2 - x,$ $= (4x + 20)/4 + 2 - x,$ $= x + 5 + 2 - x,$ $= 7$
10.1	Correspondance graphique	T2=bleu T1=rouge
10.2	Tarifs en fonction de n	110 et 160
10.3	Tarif le plus avantageux	8

TABLEAU 4.15 – Réponses de Joëlle au test Pépité (CA1 UA1 TA1) du groupe A+ en début de seconde

4.1.5 La part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises : des sous-questions génératrices

Dans le paragraphe précédent, nous montrons que nos choix de regroupement nous permettent, premièrement, d'interpréter les niveaux sur les composantes des stéréotypes en technologies dominantes utilisées par les élèves et, deuxièmement, de faire des hypothèses sur le type d'articulation des trois OM locales pour chaque groupe. Nous mettons maintenant en évidence la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises afin de dégager les questions à aborder dans les parcours. Notre réflexion est orientée sur les groupes B et C parce qu'ils présentent davantage de nécessités d'apprentissage.

L'analyse de l'OM à enseigner relativement à l'OM de référence donne un éclairage sur des nécessités d'apprentissage souvent ignorées par l'institution qui restent à la charge des élèves. Nous avons mis en évidence que les raisons d'être données à l'algèbre et la conduite, le contrôle et l'anticipation du calculs sur les expressions algébriques sont peu reliés, au niveau technologico-théorique, à la prise en compte de l'équivalence des programmes de calcul et des expressions algébriques, de la dialectique du numérique et de l'algébrique et des aspects procédural et structural. Or les technologies dominantes dans les groupes B et C révèlent que ce sont précisément ces différentes nécessités d'apprentissage que les élèves n'ont pas construites ou pas suffisamment reliées à la nécessité de les convoquer dans la pratique du calcul algébrique. En effet, les éléments technologiques dominants du groupe C montrent que les élèves ont davantage recours à des démarches arithmétiques et n'ont pas encore donné de raison d'être aux objets de l'algèbre. Il semble pertinent, pour ces élèves, de revenir sur le premier processus d'algébrisation à partir de l'équivalence des programmes de calculs. Les technologies dominantes des groupes B et C laissent vivre des erreurs dans la formation et la transformation des expressions, certes de nature différentes entre le groupe C et le groupe B mais, selon nous, en lien avec le fait que le contrôle des calculs est peu guidé par l'équivalence des expressions et la dialectique du numérique et de l'algébrique. La place attribuée aux ostensifs n'est pas suffisamment reliée aux non-ostensifs associés ce qui ne permet pas la co-activation des notions et propriétés du calcul intervenant dans la transformation des expressions. Les élèves interprètent peu les expressions par leur structure, c'est-à-dire qu'ils travaillent peu avec une flexibilité entre le procédural et le structural. Cela nous conduit à préciser les questions à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

Dans le chapitre 3, nous avons dégagé deux questions génératrices à travailler

dans les parcours :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

Ces questions sont encore larges et la part des implicites de l'OM à enseigner dans les technologies dominantes des groupes nous conduisent à dégager des sous-questions génératrices, plus précises, à aborder dans les parcours d'enseignement différencié.

Nous retenons les sept questions suivantes :

1. Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?
2. Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?
3. Les expressions sont-elles équivalentes ?
4. Comment interpréter des expressions dans différents registres sémiotiques pour appréhender la structure des expressions en lien avec le rôle des opérateurs et des délimitants ?
5. Comment interpréter des expressions pour appréhender leur structure et leur équivalence et anticiper les calculs algébriques ?
6. Comment contrôler et conduire un calcul algébrique ?
7. Comment mobiliser et conduire un calcul algébrique dans la résolution de problèmes du domaine algébrique ?

Il reste à définir les OM ponctuelles à convoquer et les conditions à mettre en place qui amèneront les élèves à faire évoluer le niveau technologique sur lesquels ils s'appuient pour travailler avec et sur les expressions algébriques. Cela fait l'objet du paragraphe suivant, dans lequel nous présentons le modèle de parcours d'enseignement différencié.

4.2 Le modèle de PED

Nous présentons le modèle de parcours d'enseignement différencié (PED) que nous avons conçu au cours de notre recherche, en collaboration avec l'ensemble des partenaires du projet PépiMep : les enseignants d'un groupe IREM, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath.

4.2.1 Une démarche itérative et collaborative avec les enseignants et les chercheurs en informatique

Notre thèse étant rattachée au projet de recherche PepiMeP, nous avons adopté une démarche de recherche itérative et collaborative pour concevoir le modèle de PED. Rappelons que ce projet vise à transférer des résultats de recherche dans une communauté d'enseignants et à accompagner l'évolution des rapports entre conception, développement et usage des ressources en ligne, pour favoriser des apprentissages en mathématique. L'objectif est de formaliser et de diffuser l'outil de diagnostic Pépité issu de la recherche dans le cadre du projet Lingot (Delozanne et al., 2005) et le modèle de PED pour les rendre accessibles à un large public d'enseignants et d'élèves du collège et du lycée depuis la plateforme en ligne LaboMeP développée par l'association Sésamath. Sont intervenues, dans la conception du modèle, non seulement les spécificités de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre en France mais aussi les contraintes des enseignants et celles de l'implémentation informatique. C'est pourquoi, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, la collaboration avec les différents partenaires du projet joue un rôle important dans les différentes itérations du modèle de PED.

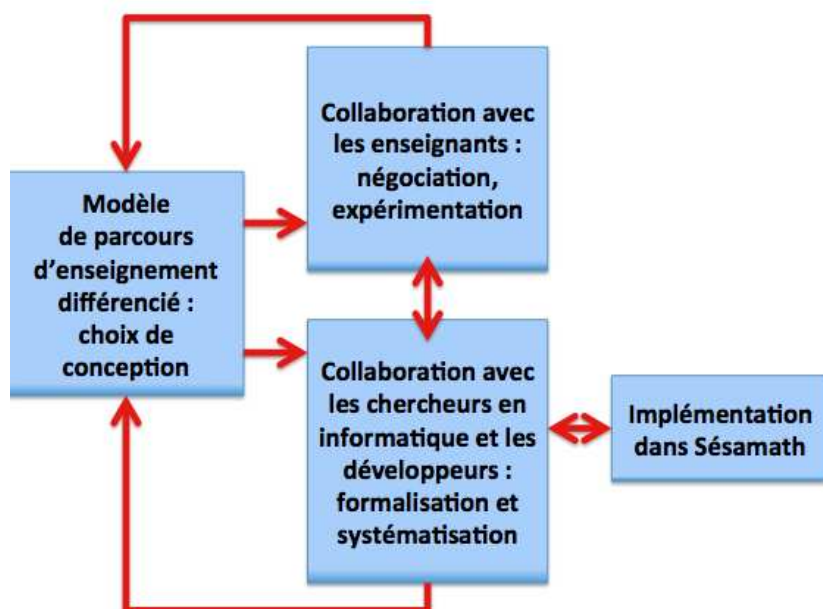


FIGURE 4.6 – Schéma général de la démarche itérative et collaborative avec les enseignants, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de PED stabilisé à l'issue de nom-

breux cycles de travail avec les partenaires du projet. La collaboration associe des chercheurs en didactique des mathématiques, des chercheurs en informatique, des membres de l'association Sésamath, des développeurs et des enseignants. La démarche itérative (cf. figure 4.6) consiste à affiner un modèle didactique au départ issu de la recherche en didactique des mathématiques par des itérations successives suite à la collaboration avec les différents partenaires du projet. L'objectif est, du côté informatique, de le systématiser, de dégager un prototype d'indexation des exercices pour automatiser la proposition des PED et le peupler d'exercices et, du côté des élèves et des enseignants, de questionner l'efficacité et la viabilité des PED avec les pratiques d'enseignement de l'algèbre et de différenciation de l'enseignement. Une description détaillée de cette méthodologie fait l'objet du paragraphe 1.4.5 du chapitre 1. Après avoir présenté le modèle de PED, nous abordons les modes de collaboration avec les chercheurs en informatique, les membres de Sésamath et les enseignants dans les paragraphes 4.4.1 et 4.4.2.

4.2.2 Questions centrales dans la modélisation

La conception du modèle de parcours d'enseignement différencié pose différentes questions liées à deux aspects interdépendants : l'évolution des apprentissages des élèves en algèbre et la régulation par l'enseignant du dispositif de différenciation en lien avec l'organisation didactique de l'enseignement en algèbre. L'une des contraintes importantes de l'enseignement que nous souhaitons prendre en compte dans le modèle est d'assurer l'avancée du temps didactique tout en nous adaptant à l'hétérogénéité des élèves relativement aux éléments technologico-théoriques qu'ils mobilisent dans la résolution des tâches.

De l'étude de l'OM à enseigner relativement à l'OM de référence, émergent deux questions génératrices à aborder dans les parcours (cf. §3.5.3). Nous les rappelons :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

L'étude de ces deux questions et la caractérisation des technologies dominantes de chaque groupe nous a permis de générer sept sous-questions génératrices (cf. §4.1.5). Elles sont à la base des objectifs d'apprentissage des parcours d'enseignement différencié que nous avons construits. Il reste à les définir en lien avec les objectifs d'apprentissage visés et le moment de l'étude. Pour cela, nous définissons les types de tâches à convoquer et les milieux auxquels confronter les élèves pour aborder ces questions et leur permettre de valider les réponses attendues. Ces différents éléments

permettent d'induire des exercices. Nous complétons notre questionnaire par la gestion et le contrat didactiques à mettre en place. Quels déroulements⁶ pour les accompagner (temps de recherche, mise en commun, institutionnalisation) ? Quelle place donner au collectif ? Comment gérer les différentes phases de validation, formulation, institutionnalisation ? Quels contrat et milieu établir, notamment concernant la validation et le contrôle des résultats ? Quel rôle de l'enseignant déterminer pour anticiper les techniques des élèves ? Quelles aides apporter pour remettre en cause les erreurs de calcul et les conceptions erronées ?

4.2.3 Description du modèle de PED

Pour décrire le modèle de parcours d'enseignement différencié, nous avons effectué différents choix, présentés dans les paragraphes suivants. Nous nous référons au schéma 4.7.

a. Trois entrées

Le modèle prend trois éléments en entrée, liés à la classe :

1. le niveau scolaire,
2. le secteur d'étude,
3. l'étape du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant.

Nous décrivons chaque entrée dans les paragraphes ci-dessous.

Le niveau scolaire

Dans notre cas, les niveaux scolaires concernés sont les classes de troisième et de seconde. Le niveau scolaire intervient sur le choix des types de tâches et sur les variables didactiques associées. Par exemple, à l'entrée en seconde, les élèves disposent des identités remarquables et le calcul algébrique est davantage orienté vers les fonctions. Cela participe aux choix des registres sémiotiques mis en jeu dans les milieux retenus et des expressions algébriques proposées.

Le secteur d'étude

Par secteur d'étude, nous faisons référence aux niveaux de codétermination didactique de Chevallard. Dans cette échelle, le secteur est relié à une OM régionale. Dans notre travail, le secteur étudié est relatif au domaine algébrique. Il s'agit du

6. Nous utilisons le terme de « déroulement » dans un sens général.

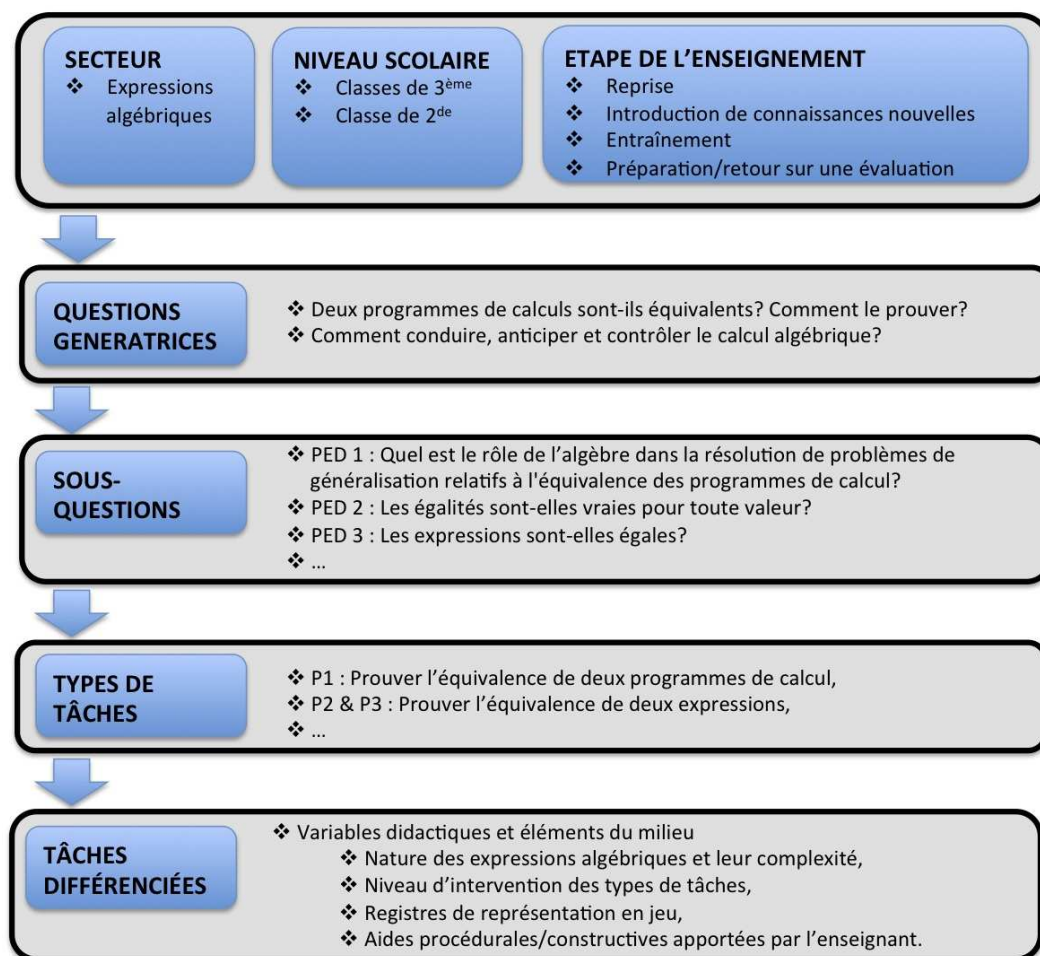


FIGURE 4.7 – Représentation schématique du modèle de PED

secteur sur les expressions algébriques, puisque nous avons centré notre étude sur l'OM régionale relative aux expressions algébriques.

Les étapes du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant

Nous distinguons plusieurs étapes du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant :

- l'étape de reprise pour revenir sur des connaissances anciennes et poursuivre l'étude,
- l'étape d'introduction de connaissances nouvelles,
- l'étape d'entraînement des connaissances en cours d'acquisition,
- l'étape de préparation ou de retour sur une évaluation.

Ces étapes correspondent soit aux moments de l'étude de Chevallard, soit au moment de reprise défini par Larguier (2009, 2012). Il s'agit de repérer l'étape à laquelle le parcours d'enseignement différencié est mis en place relativement au déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. Nous pouvons associer l'étape d'introduction de nouvelles connaissances aux moments de la première rencontre ainsi que de construction du bloc technologico-théorique. Nous pouvons associer l'étape d'entraînement des connaissances en cours d'acquisition au moment du travail de la technique. Nous proposons des parcours pour les étapes de reprise et d'entraînement des connaissances en cours d'acquisition.

Nous avons particulièrement travaillé avec les enseignants du groupe IREM à l'étape de la reprise, qu'il convient de définir davantage. Larguier (2009, 2012) souligne que la notion de *reprise d'étude* apparaît dans les textes de Chevallard :

« Dans un texte écrit dans le cadre de la formation initiale des professeurs de collège et de lycée, Chevallard (2002) parle également de la notion de la reprise d'étude : "Lorsque les élèves arrivent dans la classe, le thème θ ne leur est pas inconnu : le problème didactique posé au professeur est alors celui, non du recommencement, mais de la reprise et de la poursuite de l'étude du thème." » (Larguier, 2009, p. 28)

Larguier définit la notion de reprise du numérique comme suit :

« Lorsqu'un thème du numérique a déjà été en partie enseigné, soit au collège soit lors d'une rencontre précédente en seconde, j'appelle reprise du numérique le moment de l'enseignement où ce thème, ou bien des sujets liés à ce thème, interviennent de nouveau et sont actualisés dans des thèmes de l'enseignement de cette classe. La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés auparavant. » (Larguier, 2009, p. 31)

Cette définition peut s'adapter à l'enseignement de l'algèbre et aux expressions algébriques. L'étape de reprise a un rôle majeur dans la poursuite du travail sur les

expressions algébriques pour l'année scolaire. En effet, à l'entrée en troisième ou en seconde, l'enseignant reprend l'étude des expressions algébriques, qui a déjà été étudiée dans les classes antérieures. Ce contexte de reprise est propice à la remise en question des technologies dominantes développées par les élèves.

b. Caractérisation des PED à partir des trois entrées

Ces trois entrées étant fixées, les parcours d'enseignement différencié se caractérisent par :

1. Des questions génératrices qui déterminent des sous-questions génératrices,
2. Des types de tâches pour aborder ces sous-questions génératrices,
3. Des tâches différenciées issues d'un jeu sur des variables didactiques et des éléments du milieu en fonction des groupes.

Nous présentons chacune de ces caractéristiques.

Les questions et les sous-questions génératrices

Les questions génératrices sont issues de l'étude de l'OM à enseigner relativement à l'OM de référence dans le chapitre 3. Nous en avons dégagé deux :

1. Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
2. Comment conduire, anticiper et contrôler des transformations algébriques ?

Dans le paragraphe 4.1.5 de ce chapitre, nous avons dégagé sept sous-questions génératrices à partir de la mise en évidence de la part d'apprentissages implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises de chaque groupe. Ils concernent la faible prise en compte de l'équivalence des programmes de calcul et des expressions algébriques, de la dialectique de l'algébrique et du numérique et des aspects procédural et structural. Nous rappelons les sept questions :

1. Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?
2. Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?
3. Les expressions sont-elles équivalentes ?
4. Comment interpréter des expressions dans différents registres sémiotiques pour appréhender la structure des expressions en lien avec le rôle des opérateurs et des délimitants ?
5. Comment interpréter des expressions pour appréhender leur structure et leur équivalence et anticiper les calculs algébriques ?

6. Comment contrôler et conduire un calcul algébrique ?
7. Comment mobiliser et conduire un calcul algébrique dans la résolution de problèmes du domaine algébrique ?

Chaque sous-question correspond à ce que nous appelons un parcours d'enseignement différencié.

Les types de tâches

Nous associons aux sous-questions génératrices un ou plusieurs types de tâches. Les sept sous-questions et les OM ponctuelles qu'elles convoquent sont présentées dans le tableau 4.16.

N°	Intitulé du parcours Sous-questions génératrices	Types de tâches
1	Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?	$T_{P-Exp-Equivalence-PC}$
2	Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?	$T_{Prouver-equiv}$
3	Les expressions sont-elles équivalentes ?	$T_{Prouver-equiv}$ $T_{Choisir}$
4	Comment interpréter des expressions dans différents registres sémiotiques pour appréhender la structure des expressions en lien avec le rôle des opérateurs et des délimitants ?	$T_{T-Exp \leftrightarrow Longueur}$, $T_{Exp \leftrightarrow Perimetre}$, $T_{Exp \leftrightarrow Aire}$, $T_{T-Arbre \leftrightarrow Exp}$, $T_{T-LgNat \leftrightarrow Exp}$, $T_{T-Prog \leftrightarrow Exp}$
5	Comment interpréter des expressions pour appréhender leur structure et leur équivalence et anticiper les calculs algébriques ?	$T_{Associer}$, $T_{T-Arbre \leftrightarrow Exp}$, $T_{T-LgNat \leftrightarrow Exp}$, $T_{T-Prog \leftrightarrow Exp}$
6	Comment contrôler et conduire un calcul algébrique ?	T_D , T_F
7	Comment mobiliser et conduire un calcul algébrique dans la résolution de problèmes du domaine algébrique ?	T_D , T_F

TABLEAU 4.16 – Intitulé des parcours d'enseignement différencié et types de tâches convoqués

Pour faciliter la lecture de ce tableau, nous rappelons ici les intitulés des types de tâches définis au chapitre 3 :

- Pour OM1 :
 - $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul
 - $T_{T-Exp \leftrightarrow Longueur}$, $T_{Exp \leftrightarrow Perimetre}$, $T_{Exp \leftrightarrow Aire}$, $T_{Exp \leftrightarrow Volume}$, $T_{Exp \rightarrow Angle}$ Traduire une expression algébrique comme, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle et vice-versa

- $T_{T-Arbre \leftrightarrow Exp}$, $T_{T-LgNat \leftrightarrow Exp}$, $T_{T-Prog \leftrightarrow Exp}$ et Traduire, respectivement, la longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, le périmètre, l'aire d'une figure, le volume d'un solide, la mesure d'un angle par une expression algébrique
- Pour OM2 :
 - $T_{Prouver-equiv}$ Prouver l'équivalence de deux expressions algébriques
 - $T_{Choisir}$ Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé
 - $T_{Associer}$ Associer deux expressions égales pour tout x
- Pour OM3 :
 - T_D Développer une expression algébrique de type donné,
 - T_F Factoriser une expression algébrique de type donné,

Les sous-questions génératrices et les types de tâches qui leur sont associés permettent de définir des enjeux d'apprentissage communs à la classe. Une organisation didactique commune guide, à un niveau plus fin, l'organisation des phases individuelles (temps de recherche, apport d'aides) et collectives (processus de dévolution, phases de débat, institutionnalisation) dans la mise en œuvre du parcours en classe. Pour chaque sous-question, nous définissons des tâches et des stratégies différenciées, adaptées aux besoins d'apprentissage de chaque groupe.

Par exemple, pour les trois premiers parcours, les enjeux d'apprentissage et les stratégies différenciées sont ⁷ :

- **Parcours 1** - *Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?* Les stratégies différenciées sont :
 - Groupes A et B+ : Mobiliser l'outil algébrique pour généraliser et prouver des propriétés.
 - Groupes B- et C : Montrer les limites du numérique et motiver l'outil algébrique pour généraliser et prouver l'équivalence de programmes de calcul. Les situations proposées ne se situent pas dans le cadre d'une introduction aux lettres mais visent à permettre aux élèves de redonner du sens aux expressions en faisant le lien entre lettre et nombre. Il s'agit d'amener les élèves à percevoir les limites et le coût d'une démarche numérique pour résoudre un problème. La production d'une expression algébrique comme le résultat d'un programme de calcul permet de revenir sur la première étape du processus de généralisation et sur la hiérarchie des opérations.
- **Parcours 2** - *Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?* Les stratégies

7. Nous renvoyons à l'annexe B pour les enjeux d'apprentissage et les stratégies différenciées des autres parcours.

différenciées sont :

- Groupe A : Prouver ou invalider des propriétés du cadre algébrique.
- Groupe B : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation des expressions (utilisation des parenthèses, distributivité, carré, puissance) à partir des notions de preuve algébrique et de contre-exemple numérique.
- Groupe C : Déstabiliser des erreurs sur des règles de formation ou de transformation des expressions (concaténation, linéarisation, rôle des parenthèses) à partir des notions de preuve algébrique et de contre-exemple numérique.
- **Parcours 3** -*Les expressions sont-elles équivalentes ?* Les stratégies différenciées sont :
 - Groupe A : Prouver l'équivalence des expressions par le calcul algébrique et mobiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème, calculer astucieusement.
 - Groupes B et C : Donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre. L'équivalence entre plusieurs expressions est conjecturée à partir de tests numériques (tests avec différentes valeurs numériques) ou de tests graphiques (comparaison des courbes représentatives des fonctions définies par les expressions). L'équivalence des expressions est utilisée dans le but de calculer astucieusement une expression numérique et choisir la forme la plus appropriée au calcul de la valeur de l'expression pour une valeur numérique donnée.

Des tâches différenciées en fonction des groupes

Un jeu sur les variables didactiques et les éléments du milieu à faire intervenir permet de définir les stratégies différenciées et comment le ou les types de tâches visés sont convoqués en fonction des groupes. Ces choix reposent, d'une part, sur les technologies dominantes de chaque groupe et, d'autre part, sur les éléments technologiques que l'on souhaite faire mobiliser par les élèves.

Les variables didactiques concernent la nature et la complexité des expressions, le registre sémiotique utilisé, le niveau d'intervention des types de tâches impliqués dans les tâches à résoudre (cf. chapitre 1, Castela, 2008) ainsi que les éléments intervenant dans le milieu. Il s'agit des aides apportées par l'enseignant et des registres de représentation mis en jeu, par exemple l'intervention du registre des schémas de calcul peut aider à identifier un processus de calcul et à le traduire par une expression algébrique. Concernant les aides apportées par l'enseignant, nous faisons ici

référence au cadre théorique de la double approche. Nous reprenons la distinction entre aide procédurale et aide constructive développée par Robert (2008b) :

« Nous précisons ensuite les aides de l'enseignant en distinguant le moment où l'aide est donnée, la nature, et plusieurs formes de ces aides. En particulier, nous avons ainsi repéré deux types d'aides, selon qu'elles modifient les activités prévues a priori ou qu'elles ajoutent quelque chose à l'action des élèves.

Les unes, qu'on appellera « procédurales », jouent sur les tâches prescrites elles-mêmes, en modifiant strictement les activités par rapport à celles prévues à partir de l'énoncé. Elles correspondent aux indications que donne l'enseignant avant ou pendant le travail des élèves. Elles peuvent conduire à découper la tâche en introduisant des sous-tâches explicites, ou à choisir une méthode très contextualisée : cela change alors les adaptations attendues et peut orienter l'activité vers des résultats plus immédiats.

Les autres, aides dites « constructives », ajoutent quelque chose entre l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée), dans sa tête, de la connaissance qui pourrait en résulter ; que ce soit par une simple reprise de ce qui a été fait, même dans une application immédiate (tâche simple et isolée), ou par des rappels, des bilans, des interventions amenant les élèves à prendre une petite distance par rapport à ce qu'ils viennent de faire, à dégager une méthode un peu plus générale, à discuter des résultats. Ces aides peuvent présenter une petite décontextualisation de ce que les élèves ont mis en œuvre, par exemple le cas générique correspondant, ou indiquer comment faire le type de tâches concerné, ou expliquer pourquoi on a fait ces choix. » (Robert, 2008b, p. 51)

Ainsi, les tâches différenciées sont déterminées par un jeu sur les variables didactiques et les éléments du milieu à faire intervenir. Elles visent à faire évoluer les technologies mobilisées de façon dominante par les élèves d'un groupe pour réduire l'écart avec celles attendues. La connaissance des technologies dominantes pour chaque groupe, est un appui essentiel, d'une part, pour caractériser les milieux d'apprentissage dans les environnements papier-crayon ou informatique, les ressources à mettre à disposition, afin de favoriser des rétroactions adaptées aux réponses des élèves et, d'autre part, pour organiser la gestion des déroulements et des aides en fonction des groupes en classe. L'enjeu est, à partir d'une ou plusieurs OM et par l'élargissement et le complément progressif des questions intermédiaires qui s'y posent, d'engendrer une série d'OM intermédiaires qui finissent par s'intégrer en une nouvelle OM dont elles constituent les raisons d'être.

c. Définition d'un parcours d'enseignement différencié

Nous définissons un parcours d'enseignement différencié de la façon suivante. Un PED est défini par rapport à un secteur d'enseignement, un niveau scolaire et une étape du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. Il porte sur une sous-question génératrice, qui est le fil directeur des éléments à institutionnaliser et de la gestion didactique des différentes phases individuelles et

collectives dans la mise en œuvre du parcours en classe. Il s'agit de redonner des raisons d'être aux éléments à travailler et de les institutionnaliser. La sous-question est associée à un ou des types de tâches. Les tâches dans lesquelles il(s) est(sont) convoqué(s), sont différenciées en fonction des groupes : les technologies dominantes doivent être adaptées à chacun. La différenciation des tâches porte sur un jeu sur les variables didactiques, les éléments du milieu utilisés et les aides apportées. La combinaison du choix du type de tâches du jeu sur les variables didactiques, des milieux choisis, des aides apportées par l'enseignant et des déroulements retenus ont pour objectif de travailler les différents savoirs et savoir-faire implicites de l'OM à enseigner, liés à une faible prise en compte de l'équivalence des programmes de calcul, l'équivalence des expressions, de la dialectique de l'algébrique et du numérique et des aspects procédural et structural.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, la notion de parcours d'enseignement différencié se rapproche de celles de PER et AER définies par Chevallard (2011, 2005), dans le sens où nous définissons des questions génératrices pour travailler des raisons d'être des expressions algébriques et du calcul sur et avec les expressions. Mais elle s'en éloigne : premièrement, il s'agit d'une reprise de notions à enseigner, travaillées depuis plusieurs années ; deuxièmement, nous prenons en compte des besoins d'apprentissage des élèves dans les tâches proposées et dans leur organisation didactique à partir du logiciel de diagnostic Pépite. C'est pourquoi, pour nous démarquer des PER et des AER, nous choisissons la désignation de « parcours d'enseignement différencié ».

Nous définissons ainsi sept parcours d'enseignement différencié. Comme seuls trois d'entre-eux ont été travaillés avec les enseignants, nous les avons retenus pour présenter les analyses *a priori* des potentialités des tâches retenues, des aides et des déroulements prévus. Il s'agit des parcours 1, 2 et 3.

4.3 Analyse *a priori* de trois PED

Comme nous avons principalement travaillé sur les trois premiers parcours avec les enseignants du groupe IREM, nous les avons retenus pour présenter les analyses *a priori* des potentialités des tâches retenues, des aides et des déroulements prévus. Nous présentons dans le chapitre 5 les choix d'une enseignante sur ces parcours. Les intitulés et les sous-questions génératrices de ces trois parcours sont :

- Parcours 1 : Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ? Il s'inti-

- tule : Revenir sur le rôle de l’algèbre à partir de l’étude de l’équivalence des programmes de calculs dans un problème de généralisation,
- Parcours 2 : Les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ? Il s’intitule : Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l’équivalence des expressions,
 - Parcours 3 : Les expressions sont-elles équivalentes ? Il s’intitule : Étudier des expressions équivalentes.

4.3.1 Méthodologie

Pour chaque parcours, nous présentons des énoncés possibles et les éléments de gestion didactique qui les accompagnent. Les tâches et la gestion didactique prévues pour chaque parcours font l’objet d’une analyse *a priori*. Nous étiquetons les techniques envisageables et les technologies associées.

De plus, nous utilisons des éléments de la théorie des situations didactiques (TSD). Pour analyser *a priori* les tâches conçues pour les élèves, nous nous appuyons sur les notions de milieu, de variable et de contrat didactique. Nous analysons les variables didactiques et les milieux proposés : nature et complexité des expressions, formes d’énoncés, aides à apporter aux élèves.

Les observations recueillies *a priori* donnent des critères pour analyser *a posteriori* les enregistrements vidéo, audio et les productions des élèves (chapitre 5).

4.3.2 Analyse *a priori* du parcours 1

Le parcours concerné s’intitule « Revenir sur le rôle de l’algèbre à partir de l’étude de l’équivalence des programmes de calculs dans un problème de généralisation ».

a. Type de tâches et sous-questions génératrices

Les technologies dominantes mobilisées par les élèves des groupes C et B- dans la résolution de problèmes du domaine algébrique montrent qu’ils donnent peu de raisons d’être aux objets de l’algèbre et qu’ils restent encore majoritairement dans des démarches arithmétiques. Ce parcours vise à revenir sur la première étape du processus d’algébrisation à partir d’un problème de généralisation et d’équivalence des programmes de calcul. Pour les groupes B- et C, il s’agit de montrer les limites du numérique et de motiver l’outil algébrique pour généraliser et prouver l’équivalence de programmes de calcul. Pour les groupes B+ et A, ce parcours est l’occasion de

revenir sur la mobilisation de l'algèbre pour généraliser et prouver des propriétés. Le type de tâches convoqué est $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$: Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ? Les trois OM locales de référence sont convoquées. La sous-question génératrice en jeu est : Quel est le rôle de l'algèbre dans la résolution de problèmes de généralisation relatifs à l'équivalence des programmes de calcul ?

Nous envisageons ce parcours à l'étape de reprise pour revenir sur des connaissances anciennes et en poursuivre l'étude.

Pour proposer un problème qui permette d'étudier la généralisation et les programmes de calculs équivalents, nous nous sommes inspirés du problème dit du « carré bordé ». Nous en avons déjà présenté des caractéristiques dans le chapitre 3 (cf. §3.3). D'autres problèmes sont proposés (cf. annexe B), par exemple, l'étude de l'équivalence des programmes de calculs conduisant aux expressions $3a + 4a$, $7a$ et $3 + 4a$.

b. Le problème du carré bordé dans le document d'accompagnement

Le problème du carré bordé, travaillé à plusieurs reprises par différentes équipes⁸, figure dans les documents d'accompagnements⁹ pour initier les élèves à « *l'utilisation des lettres dans des situations où leur utilité peut être facilement reconnue par les élèves.* »

Dans notre cas, les élèves ont déjà rencontré le calcul algébrique depuis au moins deux ans, l'enjeu n'est pas d'introduire le calcul algébrique mais de lui redonner du sens. L'intérêt du problème du carré bordé est de conduire à la création d'un milieu qui permette de travailler les raisons d'être de l'algèbre. La question est : deux programmes de calculs étant donnés, renvoient-ils toujours la même valeur ? La technologie dominante du groupe C montre que les expressions algébriques sont rarement interprétées selon leur aspect procédural. Les élèves font peu de lien entre le registre des écritures algébriques et celui des programmes de calculs. L'enjeu est de faire comprendre aux élèves les raisons pour lesquelles ils ont été amenés à utiliser des expressions algébriques et à les transformer.

Ce problème consiste à établir une formule¹⁰ qui permette de calculer le nombre

8. Par exemple, (Combiér, Guillaume, & Pressiat, 1995 ; Coulange & Grugeon, 2008) ou « Les débuts de l'Algèbre au collège ou introduction au calcul littéral » rédigé par Geneviève Lé-Quang et Robert Noïrfalise, disponible sur le site de l'IREM de Clermont-Ferrand à l'adresse <http://www.irem.univ-bpclermont.fr/>.

9. Ce document est téléchargeable à l'adresse : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

10. S'il est demandé aux élèves d'exprimer la relation entre le nombre de carrés gris et le nombre

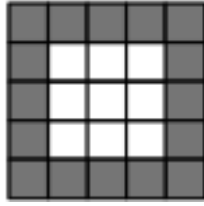


FIGURE 4.8 – Le carré bordé dans le document d’accompagnement

de carreaux unités grisés d’une figure construite sur le modèle ci-contre (cf. figure 4.8), quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré blanc. L’établissement de la formule a lieu en plusieurs phases :

- Phase 1 : déterminer le nombre de carreaux grisés pour des valeurs déterminées du nombre de carreaux sur le côté du carré,
- Phase 2 : formuler en langage naturel une méthode de calcul utilisée, l’aspect procédural des expressions est en jeu,
- Phase 3 : produire une formule mathématique.

A l’issue de la phase 3, la lettre a le statut de nombre généralisé. Le document d’accompagnement propose deux prolongements possibles mettant en jeu d’autres statuts de la lettre :

- Prolongement 1 : s’interroger sur la diversité et la validité des méthodes de calculs et des formules produites. C’est l’équivalence des expressions (statut d’indéterminée) qui est abordée,
- Prolongement 2 : déterminer le nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal à un nombre donné (statut d’inconnue). L’existence de solutions peut être l’occasion de travailler sur la notion de paramètre (statut de paramètre).

Le milieu ainsi créé a de fortes potentialités pour à la fois introduire les expressions algébriques comme un moyen de représenter les programmes de calcul et, étudier leur équivalence. En effet, les carrés unités gris peuvent être dénombrés suivant diverses stratégies qui conduisent à autant de programmes de calculs et de expressions équivalentes. La schématisation dans le registre des dessins constitue un milieu pour appuyer les stratégies de calcul. Si n désigne le nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc et N le nombre de carrés unités gris, différentes stratégies

de carrés blancs, c’est une formule qui est attendue. Il peut aussi être demandé d’exprimer le nombre de carrés gris en fonction du nombre de carrés blancs, auquel cas c’est une expression algébrique qui est demandée.

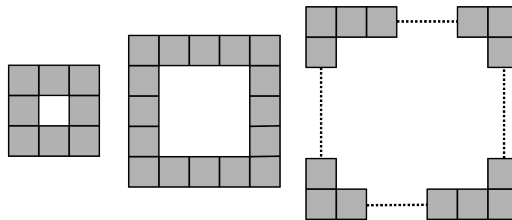
de calcul peuvent conduire aux formules suivantes : $N = 4n + 4$, $N = 4(n + 1)$, $N = 2(n + 2) + 2n$, $N = 4(n + 2) - 4$ mais aussi, $N = (n + 2)^2 - n^2$. Si, à la question « Des programmes de calcul donnent-ils toujours le même résultat ? » les élèves font référence à la situation et répondent « Parce qu'ils comptent le même nombre de carreaux », il est important de bien leur faire comprendre que ce sont les programmes de calcul qui sont objet d'étude et non ce qu'ils représentent.

c. Énoncés

Nous présentons les énoncés ainsi que les aides pour le groupe C, le groupe B- et les groupes B+ et A. Pour l'énoncé du groupe C, nous avons fait le choix de garder un énoncé proche de celui du document d'accompagnement.

• **Énoncé pour le groupe C**

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



Partie A

1. Si le carré blanc a un côté de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.
2. Même question avec le carré blanc de côté 4 unités.
3. Même question avec le carré blanc de côté 8 unités.
4. Même question avec le carré blanc de côté 100 unités. Pour t'aider, indique d'abord le procédé de calcul utilisé.
5. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ?

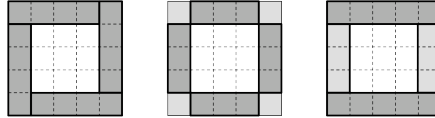
Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé. Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres expressions qui donnent le nombre de carrés gris entourant un carré blanc de côté a unités, où a est un nombre entier quelconque. Indique les expressions qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
 - $4 \times a + 4$
 - $(a + 2) \times 4$
 - $(a + 2) \times 4 - 4$
 - $(a + 1) \times 4$
 - $(a + 2) \times 2 + a \times 2$
 - $(a \times 4) - 4$
3. Le carré blanc a un côté de $a = 149$ unités. Quel est le nombre de carrés unités gris ? Choisis l'expression la plus adaptée pour ce calcul.

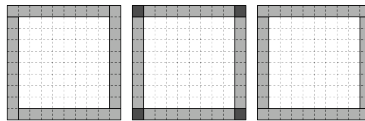
• *Aides pour le groupe C*

PREMIERE AIDE PARTIE A

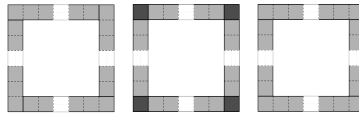
Aide pour la question 1 *Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



Aide pour la question 2 *Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



Aide pour les questions 3 et 4 *Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*

- $4 \times (3 + 1)$
- $4 \times 3 + 4$
- $2 \times (3 + 1) + 2 \times 3$

Aide pour la question 3 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*

- $4 \times (8 + 1)$
- $4 \times 8 + 4$
- $2 \times (8 + 1) + 2 \times 8$

Aide pour la question 4 *Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :*

- $4 \times (100 + 1)$
- $4 \times 100 + 4$
- $2 \times (100 + 1) + 2 \times 100$

TROISIEME AIDE PARTIE A

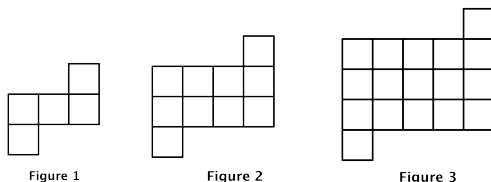
Aide pour la question 5 *Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur un des schémas de la première aide.*

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 *Tu peux associer une expression à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les expressions qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.*

• **Énoncé pour le groupe B-**

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carrés unités pour construire une figure de n'importe quelle taille.



Partie A

1. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 4 ?
2. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 30 ?
3. Écris une formule qui donne le nombre de carrés unités en fonction de la taille de la figure.

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

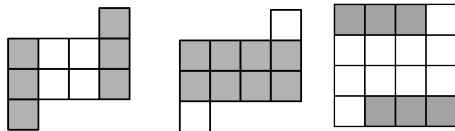
Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres expressions qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les expressions qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
 - $(a + 2)^2 - 2(a + 1)$
 - $a(a + 2) + 2$
 - $a^2 + 2a + 2$
 - $(a + 1)^2 - 2(a + 2)$
 - $a^2 + 2(a + 1)$
3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis l'expression qui demande le moins de calculs.

• **Aides pour le groupe B-**

PREMIERE AIDE PARTIE A

Aide pour les questions 1 et 2 Voici la figure de taille 2. Schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.



DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :

- $4^2 + 2 \times (4 + 1)$
- $4 \times (4 + 2) + 2$
- $(4 + 2)^2 - 2 \times (4 + 1)$

Aide pour la question 2 Sélectionne, parmi ces trois écritures, celle que tu utilises :

- $30^2 + 2 \times (30 + 1)$
- $30 \times (30 + 2) + 2$
- $(30 + 2)^2 - 2 \times (30 + 1)$

TROISIEME AIDE PARTIE A

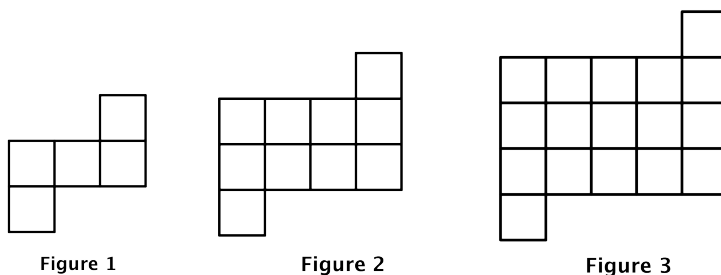
Aide pour la question 3 Utilise les questions précédentes. Pour trouver la formule, tu peux faire apparaître ton procédé de calcul sur l'un des schémas de la première aide.

AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 Tu peux associer une expression à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les expressions qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.

• **Énoncé pour les groupes B+ et A**

On construit des figures de différentes tailles à partir de carrés unités comme sur les modèles ci-dessous :



Partie A

1. Écris une formule qui détermine le nombre de carrés unités pour une figure de taille quelconque.

Partie B

1. Compare ta formule avec celles trouvées par tes camarades. Que peux-tu dire sur ces formules ? Question enseignant : comment expliques-tu que plusieurs formules répondent à la question 3 ?

Demande à ton enseignant la suite de l'énoncé.

Suite de l'énoncé :

2. On cherche d'autres expressions qui donnent le nombre de carrés unités en fonction de la taille a de la figure (a est un nombre entier quelconque). Indique les expressions qui conviennent dans la liste ci-dessous. Justifie ta réponse.
 - $(a + 2)^2 - 2(a + 1)$
 - $a(a + 2) + 2$
 - $a^2 + 2a + 2$
 - $(a + 1)^2 - 2(a + 2)$
 - $a^2 + 2(a + 1)$
3. Quel est le nombre de carrés unités dans la figure de taille 1000 ? Choisis l'expression la plus adaptée pour ce calcul. Choisis l'expression qui demande le moins de calculs.

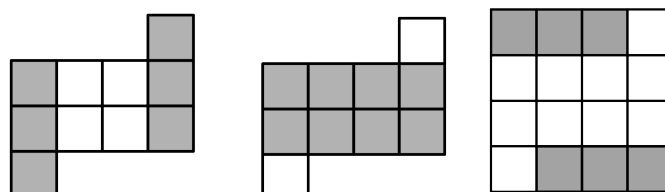
• **Aides pour les groupes B+ et A**

PREMIERE AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 *As-tu pensé à calculer le nombre de carrés unités pour une figure de petite taille ?*

DEUXIEME AIDE PARTIE A

Aide pour la question 1 *Voici la figure de taille 2. Pour t'aider à trouver la formule, schématise ta procédure de calcul sur l'un des trois schémas.*



AIDE PARTIE B

Aide pour la question 2 *Tu peux associer une expression à l'un des schémas de l'aide de la partie A. Pour les expressions qui te semblent incorrectes, tu peux les tester pour des petits nombres et justifier avec un contre-exemple.*

d. Trame commune des énoncés

Les énoncés s'organisent en deux parties. La première partie (partie A) consiste à utiliser le milieu du problème. D'abord, il s'agit d'identifier plusieurs programmes de calcul dénombrant le nombre de carreaux unités grisés. Ensuite, il s'agit de montrer les limites des techniques de comptage pour amener les élèves à exprimer les programmes de calcul par des expressions algébriques : plus la taille de la figure augmente, plus il devient nécessaire d'utiliser le langage algébrique. La deuxième partie (partie B) consiste à étudier l'équivalence des programmes de calcul à partir des expressions algébriques les traduisant dans le registre des écritures algébriques.

Le type de tâches $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ est convoqué. Il se décompose en plusieurs types de tâches, ce qui permet de mieux situer les enjeux de chaque partie :

- $T_{P-Exp-Resultat-PC}$: Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul (OM1)
 - T1 : Produire une expression traduisant chaque programme de calcul (OM1)
 - T11 : Mobiliser la variable x pour produire une expression générale
 - T12 : Traduire un programme de calcul en une expression algébrique ($T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ dans OM1)
 - T2 : Prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur ($T_{Prouver-equiv}$ dans OM2)
 - T21 : Tester les expressions en leur substituant des valeurs numériques (T_{Tester} dans OM2)

- T22 : Identifier la structure de l'expression pour reconnaître les propriétés à appliquer ($T_{Structure}$ dans OM2)
- T23 : Développer une expression algébrique (T_D dans OM3)
- T24 : Réduire une expression algébrique ($T_{FA-mon+mon}$ dans OM3)

La partie A est identifiée à T1 et la partie B est identifiée à T2. De plus, dans la partie A, s'ajoute au départ, le type de tâches T0 « Exprimer un programme de calcul » puisque, dans le problème de carré bordé, aucun programme de calcul n'est donné. Nous présentons l'analyse *a priori* de chaque partie dans les paragraphes ci-dessous. Pour faciliter la lecture, nous faisons souvent référence à l'énoncé du carré bordé proposé au groupe C.

e. Analyse *a priori* de la partie A

Dans la partie A, les types de tâches suivants sont convoqués :

- T0 Exprimer un programme de calcul
- T1 Produire une expression traduisant chaque programme de calcul

Ces types de tâches interviennent au niveau T-convoqué pour les groupes B- et C. Pour les autres groupes, T0 intervient au niveau R-convoqué. Il y a donc un jeu sur la variable didactique « découpage des énoncés » entre les groupes. Nous y revenons dans le paragraphe sur les variables didactiques. À la fin de la partie A, le professeur doit amener les élèves à travailler le type de tâche « Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul » étant donnés les différents programmes de calcul exprimés par les élèves.

Dans la partie A des groupes B- et C, il est d'abord demandé aux élèves de déterminer le nombre carrés unités grisés pour des valeurs numériques déterminées du nombre de carrés unités blancs (questions 1 à 4 du groupe C, question 1 du groupe B-). Ces valeurs numériques sont choisies de sorte à faire émerger l'identification d'un programme de calcul (T0, question 4 du groupe C, question 1 du groupe B-). Il est ensuite demandé aux élèves d'écrire une formule exprimant le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités blancs (T1, question 5 du groupe C, question 2 du groupe B-). Le recours au symbolisme algébrique est justifié par la nécessité d'exprimer de façon générale le nombre de carrés unités gris en fonction du nombre de carrés unités blancs.

Pour les groupes B+ et A, il est directement demandé d'exprimer une formule exprimant le nombre de carrés unités pour une taille quelconque (T1). Les élèves ont à leur charge l'identification d'un programme de calcul. Cela se justifie par le

fait qu'ils ont davantage recours à l'algèbre pour résoudre des problèmes de généralisation. Cependant, s'ils ont des difficultés à identifier un programme de calcul, la première partie de l'aide suggère le recours au numérique.

Plusieurs **techniques** appuyées sur des technologies différentes sont envisageables **pour obtenir le nombre de carrés grisés en fonction d'un nombre de carrés blancs fixés** (questions 1 à 4 du groupe C, question 1 du groupe B-) :

- τ_1 Une technique de comptage appuyée par la schématisation. Cette technique fonctionne lorsque le nombre de carrés blancs est petit (globalement inférieur à 10) mais elle présente des limites car elle est trop coûteuse en temps dès lors qu'on s'intéresse un nombre de carrés blancs supérieur à 10 ;
- τ_2 Une technique de dénombrement appuyée par une stratégie de calcul avec formulation ou non du programme de calcul ou avec production d'une écriture numérique pas à pas. C'est l'aspect procédural des expressions qui est en jeu ;
- τ_3 Une technique de dénombrement appuyée par une stratégie de calcul avec écriture numérique en ligne. C'est le résultat du programme du calcul qui est formulé. Les deux aspects procédural et structural des expressions sont en jeu. L'écriture numérique peut être correcte ou non en fonction de la prise en compte ou non par l'élève de la hiérarchie des opérations.

Le type de tâches T0 est convoqué lorsque l'élève met en jeu les techniques τ_2 et τ_3 .

Pour produire une expression algébrique traduisant le résultat du programme de calcul (T1) et donc **obtenir le nombre de carrés grisés dans le cas général** (question 5 du groupe C, question 2 du groupe B-, question 1 pour les groupes B+ et A), nous distinguons une technique attendue, d'une technique incorrecte :

- Une technique attendue est de mobiliser une lettre (T11) puis d'exprimer dans le cas général, le nombre de carrés grisés comme le résultat du programme de calcul dans le registre des écritures algébriques (T12 $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$) avec respect de la hiérarchie des opérations (utilisation de délimitants, rôle correct des opérateurs utilisés). Par exemple, $N = 4(n + 1)$. Cette technique nécessite l'introduction d'une lettre, d'un symbole ou d'un mot pour désigner le nombre de carrés blancs sur la bordure. Elle sollicite le passage du procédural au structural.
- Une technique incorrecte envisageable (groupe C) consiste à mobiliser une lettre (T11) puis à exprimer le nombre de carrés grisés comme le résultat du programme de calcul dans le registre des écritures algébriques (T12 $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$) *sans* respect de la hiérarchie des opérations (utilisation de délimitants, rôle correct des opérateurs utilisés). Par exemple, $N = n + 1 \times 4$. Cette technique

nécessite l'introduction d'une lettre, d'un symbole ou d'un mot pour désigner le nombre de carrés blancs sur la bordure. Elle conduit à des écritures incorrectes non parenthésées ou concaténées.

Le nombre de carrés grisés peut être exprimé par une expression « générale », par exemple $4(n+1)$ ou par une formule $N = 4(n+1)$, où n désigne le nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc et N le nombre de carrés unités gris.

Il est envisageable que certains élèves, notamment ceux des groupes C et B-, ne mobilisent pas de lettres (T11) pour généraliser et ne convoquent pas la traduction du registre des programmes de calcul à celui des écritures algébriques (T12). Nous envisageons deux techniques qui peuvent les conduire à obtenir le nombre de carrés grisés dans le cas général mais pas à produire une expression algébrique :

- Une technique qui conduit à exprimer un programme de calcul, c'est-à-dire comme une succession d'opérations à effectuer. Par exemple, « on ajoute 1 au nombre de carré blanc et on multiplie par 4 ». L'aspect procédural des expressions est sollicité mais la lettre n'est pas mobilisée ;
- Une technique qui conduit à exprimer le résultat d'un programme de calcul dans le langage naturel. Par exemple, le produit de 4 par la somme du nombre de carrés blancs et de 1. C'est l'aspect structural des expressions qui est sollicité.

Nous abordons dans le paragraphe i. les conditions à mettre en place pour pointer aux élèves le besoin de nouvelles techniques pour créer et simplifier des expressions algébriques correspondant à des programmes de calcul équivalents.

f. Analyse *a priori* de la partie B

Dans la partie B, pour tous les groupes, il est d'abord demandé aux élèves de comparer les différentes expressions trouvées dans la classe (question 1). Dans le cas où une seule expression apparaît, le déroulement prévoit que l'enseignant encourage l'apparition d'une autre expression par la mise en évidence d'un programme de calcul. Les élèves sont ensuite amenés à étudier l'équivalence des expressions (question 2). Le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ intervient au niveau T-convoqué dans tous les groupes. Différentes expressions algébriques sont proposées et l'élève doit déterminer celles qui donnent le nombre de carrés grisés. Plusieurs **techniques** appuyées par des technologies privilégiant certains aspects des expressions sont possibles. Nous les avons présentées dans le chapitre 3 (cf. § 3.1.4) :

- $T_{Prouver-equiv-2}$ Une technique appuyée sur la propriétés d'égalité des poly-

nômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux ». Elle consiste à transformer les expressions pour comparer les formes développées réduites. Il y a un appui sur l'identification de la structure des expressions. La dialectique de l'algébrique et du numérique n'est pas utilisée pour appréhender l'équivalence des expressions.

- $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Une technique de conjecture puis de preuve appuyée par la dialectique de l'algébrique et du numérique puis par les propriétés du calcul algébrique. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ (test numérique) ou $\tau_{Tester-2}$ (test graphique) pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence des expressions. En cas de non-équivalence, elle consiste à donner un contre-exemple. En cas d'équivalence, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre. Le test peut se faire « à la main » mais le recours au tableur offre un milieu plus riche pour appréhender l'équivalence. La possibilité de faire varier la variable sur un grand nombre de valeurs met davantage en évidence que l'égalité des valeurs pour les mêmes valeurs numériques de la variable (donc la dénotation) dans le cas où il y a équivalence. Dans l'autre cas, les résultats affichés diffèrent et une seule valeur pour laquelle ils diffèrent suffit pour justifier la non-équivalence des expressions (contre-exemple).
- Une technique appuyée par un changement de cadre. Le retour à la schématisation permet d'associer chaque expression à une stratégie de calcul du nombre de carrés unités blancs. Cette technique ne met pas en jeu l'équivalence des programmes de calcul mais ce qu'ils représentent.

La technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ est à privilégier pour les élèves des groupes C et B-. En effet, au niveau technologique, elle met l'accent sur le fait que les expressions représentent des programmes de calcul. Les dialectiques entre l'algébrique et du numérique et celles entre les aspects procédural et structural sont sollicitées. Nous renvoyons le lecteur à l'analyse *a priori* du parcours 2 (cf. §4.3.3) pour davantage de détails sur les types de tâches mis en jeu dans ces techniques.

Dans la dernière question (question 3), il est demandé à l'élève de calculer le nombre de carrés grisés pour un nombre de carrés blancs « grands ». Le type de tâches convoqué est T_{Tester} . Le calcul est facilité par le choix de l'expression la plus adaptée parmi celles proposées dans la question précédente. Il s'agit donc ici de

travailler sur le sens des expressions et l'anticipation des calculs numériques.

g. Variables didactiques

Nous présentons le choix des différentes variables didactiques en jeu même si certains ont déjà été évoqués dans les analyses des parties A et B.

Le choix du « pattern », c'est-à-dire de la forme à généraliser. Cette variable joue sur la complexité des programmes de calcul et des expressions produites. Elle fait le lien avec les erreurs à travailler selon les groupes. Deux patterns différents ont été retenus : le carré bordé pour le groupe C et une figure rectangulaire auxquelles sont ajoutées deux carrés unités pour les groupes A et B. Le pattern du groupe C permet de travailler la distributivité simple. Le pattern des groupes A et B¹¹ conduit à une expression de degré 2 et la majorité des programmes de calcul nécessitent l'utilisation de délimitants. La hiérarchie des opérations est plus complexe que dans celle du carré bordé. D'autres choix auraient pu être possibles. Par exemple, nous aurions pu retenir un seul pattern pour les trois groupes et proposer des découpages pour des énoncés différents. Mais, nous avons préféré laisser la possibilité au groupe C de travailler sur des expressions « simples » et de revenir sur les priorités opératoires et la distributivité simple.

Le découpage de l'énoncé et le niveau d'intervention des types de tâches. Comme nous l'avons souligné dans l'analyse *a priori* de la partie A, le découpage de l'énoncé et le niveau d'intervention des types de tâches qui décomposent $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ ne sont pas les mêmes d'un groupe à l'autre. Le type de tâches T0 « Identifier un programme de calcul » intervient au niveau T-convoqué pour les groupes C et B- alors qu'il intervient au niveau R-convoqué pour les groupes B+ et A. Les types de tâches T1 et T2 interviennent au niveau T-convoqué dans tous les groupes. Ce choix résulte de la caractérisation des technologies dominantes des groupes. Les élèves des groupes C et B- donnant encore majoritairement peu de raisons d'être aux expressions algébriques, nous avons souhaité découper l'énoncé pour les amener à percevoir les limites des démarches numériques. De plus, la référence au programme de calcul peut être un appui pour contrôler l'expression algébrique produite le traduisant par l'identification de l'ordre des opérations à effectuer.

Le choix du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc. Cette variable intervient dans les questions où il est demandé de calculer le nombre de carrés

11. Comme le carré bordé, ce pattern a déjà été exploité dans des recherches en didactique des mathématiques. Nous l'avons rencontré dans (Chua & Hoyles, 2011)

grisés pour un nombre fixé de carrés blancs afin de faire émerger les programmes de calculs (T0) pour les groupes C et B-. Un nombre de carrés blancs inférieur à dix favorise une technique de comptage mais fournit un milieu riche pour l'émergence des différentes stratégies de dénombrement. Un nombre de carrés blancs supérieur à 10 met en évidence les limites de la technique de comptage et la nécessité de verbaliser un programme de calcul puis une écriture numérique qui traduit le résultat du programme de calcul. Dans les groupes B- et C, au moins une question de chaque cas est proposée. Nous avons fait le choix de proposer davantage de questions avec un nombre de carrés blancs « petits » au groupe C afin de renforcer les limites de la technique de comptage et d'encourager l'émergence d'un programme de calcul. Ce choix est en lien avec les technologies dominantes mobilisées par les élèves de chaque groupe. Par ailleurs, cette variable didactique intervient dans la question 3 de la partie B. Le nombre choisi de carrés blancs est suffisamment grand pour donner des calculs complexes sauf pour une des expressions qui est la plus appropriée.

h. Les éléments du milieu

Plusieurs éléments peuvent composer le milieu. Les aides constructives à la disposition des élèves jouent un rôle important dans la construction du milieu.

Le tableur. L'utilisation du tableur est encouragée à plusieurs reprises dans le document d'accompagnement (pages 1 et 5 de ce document). Il fournit un milieu riche pour travailler la notion de variable, faciliter l'émergence d'une expression générale à partir d'un programme de calcul et appréhender l'équivalence des expressions. Son usage n'a cependant pas été retenu par les enseignants. Les outils informatiques, souvent difficiles d'accès dans les établissements, sont éloignés de leurs pratiques.

Les schémas permettent d'illustrer les différents stratégies de calcul des carreaux grisés. Ils sont utilisés comme moyen d'aide (par exemple, aide 1 du groupe C) pour faire émerger différents programmes de calcul. Dans chaque groupe, trois programmes de calcul sont mis en évidence.

Les écritures numériques du résultat du programme de calcul sont retenues comme moyen d'aide (par exemple, aide 2 du groupe C) pour faire émerger une expression algébrique à partir des programmes de calcul. Elles peuvent être utilisées pour mettre en évidence les priorités opératoires et la hiérarchie des opérations qui restent implicites dans la formulation des programmes de calcul.

Les schémas de calcul peuvent intervenir dans le milieu pour aider à identifier l'ordre des opérations à effectuer et passer du procédural au structural. Prenons, par

exemple, le schéma de calcul suivant :

$$n \xrightarrow{+1} n + 1 \xrightarrow{\times 4} 4(n + 1)$$

Il est associé à l'expression $4(n + 1)$. Dans le sens de lecture gauche-droite, il indique les étapes du programme de calcul associé et donc quelles opérations effectuer et dans quel ordre. Mais, contrairement au programme de calcul, le schéma fait explicitement apparaître l'utilisation de parenthèses pour respecter la hiérarchie des opérations. Dans l'autre sens de lecture, il indique la structure de l'expression. $4(n + 1)$ est un produit.

Nous abordons maintenant les conditions (contrat et gestion didactique) à mettre en place par l'enseignant pour construire le bloc technologico-théorique attendu.

i. Des conditions pour aborder le moment de construction du bloc technologique et théorique pendant le déroulement

Le déroulement prévoit une alternance entre des temps de recherche en binôme, des mises en commun, dépendantes des groupes, suivies de synthèses pour la classe entière. Étant donné que les élèves ont déjà rencontré l'algèbre, l'enseignante estime qu'une séance de cinquante minutes environ et éventuellement le début de la séance suivante suffisent pour traiter le problème. L'effectif du groupe B étant réduit, elle prévoit de laisser ce groupe davantage en autonomie et de garder davantage de temps pour les mises en commun du groupe C. Le déroulement suit les deux parties qui organisent les énoncés :

- Partie A : émergence des programmes de calcul et production d'expressions algébriques,
- Partie B : étude de l'équivalence des programmes de calcul .

La durée de la partie A est de trente à quarante minutes ; celle de la partie B est de vingt minutes. Il s'agit de durées approximatives. Une mise en commun et une synthèse sont prévues à l'issue de chaque partie. Des mises en commun peuvent être ajoutées en fonction du travail des élèves et des difficultés rencontrées. Voici une description plus précise du déroulement prévu et du rôle de l'enseignant en fonction des difficultés rencontrées par les élèves.

Lancement du problème

L'enseignant peut commencer la séance de travail en annonçant qu'il s'agit de revenir sur l'utilisation de l'algèbre dans la résolution de problème. Il peut préciser aux élèves que cet enjeu est le même pour tous, même si tous n'ont pas le même

problème. Il peut préciser que l'objectif est, dans un premier temps, de déterminer le nombre de carrés pour une schéma de taille quelconque.

Temps de recherche sur la partie A

La durée de cette étape est estimée à une vingtaine de minutes. Durant le temps de recherche, l'enseignant distribue les aides en fonction de l'avancement du travail des élèves et éventuellement interrompt le travail par des bilans. La plupart des élèves commencent par mettre en œuvre une technique de comptage des carreaux grisés. Il est possible de faire un premier bilan pour s'assurer que la formulation du problème est bien comprise par tous. Puis, le choix du nombre de carrés blancs rend la technique de comptage trop coûteuse en temps. À ce stade, la considération des questions précédentes peut permettre une généralisation et l'identification d'un programme de calcul. Certains élèves, notamment ceux du groupe C, auront des difficultés à l'établir. L'enseignant pourra introduire l'aide 1 et s'appuyer sur un milieu composé des différents schémas du problème. Il est possible d'établir un bilan intermédiaire pour faire ressortir et comparer les techniques utilisées par les élèves et les amener à formuler les programmes de calculs. Le milieu proposé dans l'aide est un appui pour l'identification et la validation des programmes de calcul. Il est ensuite demandé aux élèves de produire une expression générale. Si cette étape est difficile, l'enseignant apporte l'aide 2 puis l'aide 3 pour inciter les élèves à produire une écriture numérique correspondant au résultat du programme de calcul dans les questions précédentes. Certains élèves utilisent des lettres, d'autres des mots, la mise en commun sera l'occasion d'institutionnaliser l'utilisation des lettres.

Mise en commun sur la partie A

La durée est estimée à une dizaine de minutes. L'enseignant invite les élèves à présenter les expressions trouvées à partir des programmes de calculs utilisés. Si des lettres sont introduites, des précisions sont apportées sur ce qu'elles désignent. Le numérique a un rôle central dans le contrat didactique pour invalider les expressions erronées et mettre en évidence la nécessité du respect des priorités opératoires et des délimitants dans la hiérarchie des expressions. A l'issue de cette mise en commun, des interrogations sur l'équivalence des expressions en lien avec celle des programmes de calcul peut commencer à émerger.

Synthèse

La durée est estimée à cinq minutes. Cette partie concerne tous les groupes. La

présence de deux patterns différents offre l'occasion de décontextualiser les éléments de synthèse du problème. L'enseignant met en évidence le coût du calcul numérique face à l'efficacité d'une expression générale ou d'une formule pour calculer le nombre de carreaux pour n'importe quel nombre. Si plusieurs lettres sont apparues, il peut revenir sur l'indifférence du choix du nom des lettres en contrôlant que le nom de la lettre n'a pas d'importance. Il peut revenir sur l'utilisation des lettres en précisant que toutes les lettres peuvent être utilisées en mathématiques mais que les lettres n , a , x sont majoritairement utilisées ; il peut aussi revenir sur les conventions d'écritures. Si une seule stratégie de calcul est apparue, l'enseignant peut en faire émerger d'autres à partir des schémas. L'enseignant peut amener les élèves à mettre ensuite en évidence que plusieurs expressions ont émergé pour désigner le même nombre, c'est-à-dire qu'il conduit les élèves à construire la dénotation des expressions au niveau technologico-théorique. Les programmes de calculs conduisent à des expressions différentes mais ayant la même valeur, pour toute valeur de la lettre. La partie B est engagée : D'autres expressions conviennent-elles ? Comment déterminer celles qui donnent le nombre de carrés grisés ?

Temps de recherche sur la partie B

La durée est estimée à cinq minutes. Après un temps de recherche, l'enseignant invite les élèves à tester les expressions pour les valeurs numériques du début du problème. Si certains élèves éprouvent des difficultés, l'enseignant peut distribuer l'aide de la partie B et refaire le lien avec les différentes stratégies de dénombrement. Pour justifier les expressions correctes, les élèves sont amenés à transformer les expressions, ce qui est l'occasion de reprendre les règles de distributivité simple et double et les conventions d'écriture.

Mise en commun et synthèse sur la partie B

Les élèves sont amenés à débattre et comparer leurs justifications du fait que les expressions sont correctes ou non. La durée est estimée à une quinzaine de minutes. Les trois techniques prévues dans l'analyse *a priori* peuvent apparaître dans le débat. Mais l'objectif de l'enseignant est d'amener les élèves à la technique $\mathcal{T}_{Prouver-equiv-3}$ de conjecture puis de preuve pour favoriser la réflexion au niveau technologico-théorique sur le fait que des expressions équivalentes dénotent le même nombre pour la même valeur de la variable. Certains élèves commencent par proposer de faire le lien avec les stratégies de dénombrement des carrés ; mais le contrat didactique établi les amène à travailler sur les expressions générales et non sur ce qu'elles

représentent. L'enseignant propose alors de tester les expressions avec les valeurs numériques de la première partie, pour constater que certaines renvoient le même nombre, correspondant au nombre de carrés grisés, et d'autres non. L'équivalence des expressions est appréhendée par le numérique. L'utilisation d'un tableur peut venir ici enrichir le milieu. L'enseignant demande ensuite si cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre, ce qui conduit à instaurer le contre-exemple et la preuve par le calcul algébrique. Pour justifier les expressions correctes, les élèves sont amenés à transformer les expressions, ce qui est l'occasion de reprendre les règles de distributivité simple et double et les conventions d'écriture. Il est possible que certains élèves utilisent directement la preuve algébrique ; l'enseignant peut mettre en avant l'intérêt du test numérique pour conjecturer et éliminer les expressions pour lesquelles la valeur attendue n'est pas obtenue. À ce stade, les deux problèmes sont l'occasion de décontextualiser les résultats obtenus ; cela conduit à une synthèse. Des expressions différentes peuvent renvoyer le même nombre pour n'importe quelle valeur de la lettre. Pour savoir si deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre, on teste pour des valeurs numériques. Si les valeurs obtenues sont différentes, alors elles ne sont pas égales et on a un contre-exemple. Sinon, on peut seulement conjecturer l'égalité des expressions pour toute valeur de la lettre. Dans ce cas, la conjecture est prouvée en utilisant les propriétés du calcul (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, identités remarquables, etc). L'enseignant peut alors mettre en avant, dans la synthèse, que cette méthode est un moyen pour contrôler les transformations. La question B-3 montre l'intérêt d'avoir plusieurs expressions pour désigner le même nombre. C'est le sens des expressions qui est en jeu. Le choix de l'expression la plus appropriée, $(a + 1) \times 4$ pour le groupe C et l'expression $a^2 + 2a/2$ pour le groupe B, permet de réaliser les calculs numériques facilement.

j. Conclusion sur l'analyse *a priori* du parcours 1

Ce parcours est très riche parce qu'il convoque les trois OM locales de référence. Il permet de revenir sur les raisons d'être de l'introduction des expressions algébriques et des propriétés de calcul permettant de transformer une expression en une autre, équivalente.

Dans les énoncés proposés, nous choisissons de proposer le même type de tâches à tous les groupes : deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Ce choix résulte de la collaboration avec les enseignants et de la volonté de faciliter la gestion

didactique du problème et l'institutionnalisation. Mais d'autres choix sont possibles. Il serait envisageable de proposer, pour les groupes B+ et A qui ont déjà donné des raisons d'être à l'algèbre, un énoncé où T1 et T2 interviennent au niveau R-convoqué. Par exemple, le problème pourrait consister à déterminer le taille de la figure pour un nombre de carrés unités donnés. Dans ce cas, ce n'est plus l'équivalence des programmes de calculs qui est en jeu, mais le recours à l'algèbre pour mettre en équation le problème.

4.3.3 Analyse *a priori* du parcours 2

Ce parcours est intitulé « Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'équivalence des expressions ».

a. Type de tâches et sous-question génératrice

Comme les technologies dominantes mobilisées dans les démarches des élèves des groupes B et C, laissent vivre des erreurs récurrentes dans la formation et la transformation des expressions, ce parcours vise à les déstabiliser en étudiant l'équivalence des expressions et en favorisant l'articulation entre le numérique et l'algébrique. Il s'agit de développer d'une part, la dialectique de l'algébrique et du numérique à travers la conjecture de l'équivalence d'expressions et, d'autre part, des raisonnements de type preuve algébrique et contre-exemple numérique. Ce parcours convoque le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre*. Il porte sur la question suivante : les égalités sont-elles vraies pour toute valeur ?

Ce parcours est possible à plusieurs étapes du déroulement comme celles de reprise, d'entraînement ou de préparation à un contrôle.

b. Énoncés

L'énoncé a la forme suivante pour tous les groupes :

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toute valeur de a ? Justifie ta réponse.

<i>Egalité</i>	<i>Vraie/Fausse</i>	<i>Justification</i>

L'énoncé est accompagné d'une aide constructive, à la disposition des élèves.

- Tu peux **tester l'égalité** en donnant des valeurs numériques aux lettres, en utilisant un tableau ou en utilisant les représentations graphiques des deux membres de l'égalité.
- Tu montres qu'**une égalité est fausse** à partir d'un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de la lettre pour laquelle les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux.
- Tu prouves qu'**une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre** à partir d'une preuve algébrique. Un exemple ne suffit pas.

Les égalités sont choisies parmi celle proposées dans le tableau 4.17 et suivant des caractéristiques que nous présentons dans les paragraphes suivants.

Egalité	V/F	Type	A	B	C
$3p = 3 + p$	F	1			x
$p^2 = 2p$	F	1			x
$7p - p = 7$	F	1			x
$6 + 5p = 11p$	F	1			x
$5p - 3p = 2p$	V	1			x
$3(p + 2) = 3p + 2$	F	2			x
$5(2 + p) = 10 + 5p$	V	2			x
$3 \times (2 \times p) = 6 \times 3p$	F	2		x	x
$3 \times (2 \times p) = 6p$	V	2		x	x
$p(p + 2) = p^2 + 2$	F	2		x	x
$p(p + 2) = 2p + 2$	F	2		x	x
$p(p + 2) = p^2 + 2p$	V	2		x	x
$2p^2 = (2p)2$	F	1		x	x
$4p^2 = (2p)2$	V	1		x	x
$p + 3(p + 2) = 4p + 6$	V	2		x	
$p + 3(p + 2) = (p + 3)(p + 2)$	F	2		x	
$(p + 3)(p + 2) = p^2 + 5p + 6$	V	2		x	
$(p + 2)^2 = p^2 + 4$	F	1		x	
$(p + 2)^2 = p^2 + 4p + 4$	V	1		x	
$x(x + 1) + 1 = 2x + 1$	F	2	x	x	
$(x - y)^2 = (y - x)^2$	V	2	x		
$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$	V	2	x		
Légende. Le type 1 correspond aux égalités qui permettent de revenir sur le rôle des opérateurs ou sur une propriété erronée. Le type 2 correspond aux égalités qui permettent de revenir sur le contrôle des calculs.					

TABLEAU 4.17 – Variété des égalités pour le parcours 2

c. Analyse *a priori*

L'objectif de ce parcours est d'amener les élèves à revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'étude de l'équivalence des expressions. Comme présenté dans le chapitre 3 (cf. § 3.1.4), plusieurs techniques sont possibles mais seules deux d'entre-elles peuvent être envisagées au niveau scolaire considéré :

- $\tau_{Prouver-equiv-2}$ Celle basée sur la propriété d'égalité des polynômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux ». Cette technique qui consiste, soit à s'appuyer sur la structure des expressions et à comparer les coefficients des monômes de même degré des écritures développées réduites après transformation, soit à calculer la différence des deux expressions et à montrer qu'elle est nulle.
- $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Celle basée sur la conjecture puis la preuve de l'équivalence des expressions. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ (test numérique) ou $\tau_{Tester-2}$ (test graphique), pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence des expressions. En cas d'équivalence, elle consiste à donner un contre-exemple. En cas de non-équivalence, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre.

Ces techniques convoquent plusieurs types de tâches :

- $\tau_{Prouver-equiv-2}$
 1. Identifier la structure des expressions $T_{Structure}$ (OM2)
 2. Prouver :
 - Si l'égalité est vraie pour toute valeur : identifier la structure des expressions $T_{Structure}$ (OM2) et les développer si nécessaire T_D (OM3),
 - Si l'égalité est fautive : donner un contre-exemple ou justifier par la structure ($T_{Structure}$) des expressions la non-équivalence des expressions.
- $\tau_{Prouver-equiv-3}$
 1. Conjecturer : tester l'égalité en convoquant T_{Tester} (OM2) et, dans le cas d'une substitution par une valeur numérique, calculer la valeur des expressions pour la valeur numérique testée T_{C-num} (OM3),
 2. Prouver :
 - Si l'égalité est vraie pour toute valeur : identifier la structure des expressions $T_{Structure}$ (OM2) et les développer si nécessaire T_D (OM3),
 - Si l'égalité est fautive : donner un contre-exemple ou justifier par la structure ($T_{Structure}$) des expressions la non-équivalence des expressions.

Dans ce parcours, la technique attendue est $\tau_{Prouver-equiv-3}$, parce qu'elle permet de mettre en évidence que les expressions dénotent le même objet. Le test numérique est privilégié pour amener les élèves à conjecturer l'équivalence des expressions.

Nous envisageons différentes stratégies possibles que les élèves peuvent mettre en œuvre. Nous les étiquetons comme des techniques non attendues (notées τ_{NA}) ou erronées (notées τ_E).

Voici deux techniques non attendues que les élèves peuvent mettre en œuvre :

- τ_{NA-1} Celle appuyée par des formulations d'ordre légal du type « il faut » ou « on doit »,
- τ_{NA-2} Celle qui consiste à comparer les écritures développées et réduites dans le cas de deux expressions non égales. Il s'agit en fait de $\tau_{Prouver-equiv-2}$ dans l'OM de référence. Cette technique n'est pas attendue car c'est le contre-exemple qui l'est. Des arguments en français sont souvent ajoutés aux écritures symboliques.

Voici deux techniques erronées que les élèves peuvent mettre en œuvre :

- τ_{E-1} Celle appuyée par une preuve par l'exemple qui consiste à affirmer que deux expressions sont égales à partir d'un cas particulier. Pour ces élèves, si les expressions sont égales pour une ou deux valeurs, alors elles le sont pour toutes,
- τ_{E-2} Celle appuyée par une démarche dans le registre des écritures algébriques avec utilisation de règles de calculs incorrectes.

Ces techniques sont en lien avec des niveaux de justification. On peut faire l'hypothèse que de la non-convocation des types de tâches intermédiaires ne permet pas de donner des raisons d'être au niveau technologique et théorique attendu selon le cas (contre-exemple ou preuve algébrique). Nous proposons, dans le paragraphe, une analyse *a priori*, effectuée finement, des différentes techniques envisageables pour quelques égalités.

L'énoncé est accompagné d'une aide constructive qui suggère le recours au numérique et apporte une méthode pour prouver qu'une égalité est vraie pour toute valeur ou fausse. Cette méthode fait référence à $\tau_{Prouver-equiv-3}$.

d. Les variables didactiques et milieu

Les variables didactiques suivantes interviennent.

Le choix des expressions composant les égalités. Ce choix dépend des groupes. Les expressions sont choisies pour travailler sur des erreurs de calcul caractéristiques de chaque groupe. Nous distinguons deux grands types d'égalités :

1. Celles qui permettent de revenir sur le rôle des opérateurs (par exemple $3p = 3 + p$) ou celle liée à la connaissance d'une propriété erronée (par exemple

$(p + 2)^2 = p^2 + 4$). La complexité des expressions est simple.

2. Celles qui permettent de revenir sur le contrôle des calculs. Il s'agit d'égalité plus complexe liée à un développement erroné.

Dans le tableau 4.17, nous indiquons des égalités à proposer à chaque groupe. Dans la mise en œuvre du parcours, l'enseignant peut choisir les égalités à travailler tout en veillant à retenir au moins une égalité vraie et au moins une égalité fausse. Dans l'annexe B, nous avons proposé différents choix possibles ce qui se rapproche des assortiments définis par Esmenjaud-Genestoux (2000). Pour le groupe C, les expressions retenues font intervenir des erreurs de concaténation, de fausse linéarité ou de mauvaise utilisation des parenthèses tandis que pour le groupe B, il s'agit d'erreurs relatives à la distributivité ou l'utilisation incorrecte de règles sur les puissances. Pour les élèves du groupe A, il s'agit davantage de prouver des identités du calcul algébrique.

Le *changement de registres de représentation* intervient comme un élément du milieu visant à favoriser l'émergence d'une conjecture. Le passage au registre des écritures numériques permet de revenir au procédural. Le registre graphique n'est ici pas retenu parce qu'il ne permet pas, contrairement à celui des écritures numériques, de revenir à l'aspect procédural des expressions. Pour cela, des tests numériques sont menés « à la main » mais cela n'exclut pas, bien au contraire, l'utilisation d'un tableur ou d'un tableau de valeurs par l'enseignant pour renforcer le fait que les expressions renvoient ou non les mêmes valeurs. Le recours au numérique amène les élèves à évaluer les expressions pour des valeurs numériques, à identifier les processus de calcul et donc à déterminer quelles opérations effectuer dans quel ordre. Le registre des schémas de calculs peut être introduit pour amener les élèves à travailler l'articulation entre le procédural et le structural. Par exemple, le schéma de calcul de l'expression $4 + 3a$ est :

$$a \xrightarrow{\times 3} 3a \xrightarrow{+4} 3a + 4$$

Ce schéma indique dans quel ordre effectuer l'opération, ce qui est l'occasion de mettre en évidence que la multiplication est prioritaire sur l'addition. Sa lecture en sens inverse permet de dégager la structure de l'expression.

Le *découpage de l'énoncé* et le *niveau de convocation du type de tâches* sont les mêmes pour tous les groupes. Le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est T-convoqué par la tâche dans les trois groupes mais les élèves ont à leur charge la convocation des types de tâches intermédiaires indiqués plus haut. L'énoncé ne demande pas de conjecture et ne précise pas pour quelles valeurs numériques tester. Ce choix permet de laisser

émerger les techniques non attendues et erronées des élèves. C'est à l'enseignant d'amener ses élèves à une conjecture numérique.

Nous proposons maintenant une analyse *a priori* de chaque égalité.

e. Analyse fine des techniques et éléments technologiques et théoriques en jeu sur quelques égalités

Nous proposons une analyse *a priori* des différentes techniques envisageables pour quelques égalités. Elles mettent en évidence les différents niveaux technologiques en jeu. Nous avons choisi de présenter l'analyse pour les égalités retenues dans les expérimentations traitées dans le chapitre 5 (cf. §5.2.6). Ces analyses sont utilisées pour apprécier les productions des élèves. Pour faciliter la lecture des tableaux, nous notons τ_A pour la technique $\tau_{Prouver-equiv-3}$ pour technique attendue.

• $4 + 3a = 7a$. Cette égalité permet de travailler sur la *priorité* de la multiplication par rapport à l'addition. Elle est proposée au groupe C qui a une tendance à concaténer les expressions ($a + b \rightarrow ab$) pour donner un résultat sans opérateur. Dans la mise en commun, l'enseignant revient sur la priorité de la multiplication sur l'addition. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Vrai	Faux
Justification	Contre-exemple	Règle incorrecte $n + mx \rightarrow (n + m)x$	Ordre légal : « on ne peut pas additionner les nombres et les lettres »
Techniques	τ_A	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

• $a^2 = 2a$. Cette égalité est liée à une erreur de linéarisation due à une conception erronée de la notion de puissance. Dans la mise en commun, l'enseignant revient sur la définition des opérateurs : a^2 signifie $a \times a$ alors que $2a$ signifie $2 \times a$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Vrai	Vrai
Justification	Contre-exemple	Règle incorrecte $(nx)^2 \rightarrow nx^2$	Ordre légal : « a^2 signifie 2 fois a »
Techniques	τ_A	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

• $(2a)^2 = 4a^2$. Cette égalité met en jeu le rôle des parenthèses en lien avec la notion de puissance. Elle est liée à l'erreur de calcul $(2a)^2 = 2a^2$ souvent responsable de transformations incorrectes dans l'application des identités remarquables. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite le rôle des parenthèses : $(2a)^2$ signifie $2a \times 2a$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Vrai/Faux
Justification	Test numérique et preuve	Preuve sans test numérique	Preuve numérique	Règle incorrecte $(nx)^2 \rightarrow nx^2$	Ordre légal : « Il suffit d'enlever les parenthèses »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-1}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

- $(2a)^2 = 2a^2$. Comme la précédente, cette égalité revient sur le rôle des parenthèses en lien avec la notion de puissance. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite ce rôle : $(2a)^2$ signifie $2a \times 2a$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Vrai	Vrai	Vrai/Faux
Justification	Contre-exemple	Preuve algébrique	Règle incorrecte $(nx)^2 \rightarrow nx^2$	Ordre légal : « Il suffit d'enlever les parenthèses »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

- $a(a+2) = a^2 + 2$. Cette égalité revient sur l'application de la propriété de distributivité et le rôle des parenthèses. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite la propriété utilisée : $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ avec $x = a$, $y = a$ et $z = 2$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Faux	Faux	Vrai	Vrai/Faux
Justification	Contre-exemple	Preuve algébrique	Règle incorrecte $x(y+z) \rightarrow x \times y + z$	Ordre légal : « Il suffit d'enlever les parenthèses »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

- $a+3(a+2) = 4a+6$. Cette égalité revient sur la *priorité* de la multiplication et le rôle des parenthèses. Dans la mise en commun, l'enseignant explicite la propriété utilisée : $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ avec $x = 3$, $y = a$ et $z = 2$. Les justifications envisageables sont :

Réponse	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Justification	Test numérique et preuve	Preuve algébrique sans conjecture	Preuve numérique	Règle incorrecte $x(y+z) \rightarrow x \times y + z$ ou non respect de la <i>priorité</i> opératoire	Ordre légal : « $a+3$ est différent de $4a$ »
Techniques	τ_A	τ_{NA-2}	τ_{E-1}	τ_{E-2}	τ_{NA-1}

f. Des conditions pour aborder le moment de construction du bloc technologique et théorique pendant le déroulement

Nous présentons ici des conditions que le professeur peut mettre en place pour aborder le moment de construction du bloc technologico-théorique pendant le déroulement.

Le déroulement prévoit une alternance entre des temps de recherche relativement court, des mises en commun pour les différentes égalités retenues (cinq à dix minutes). Il se termine par une phase d'institutionnalisation. Il s'agit de créer une situation de formulation/validation reposant sur la validation d'une conjecture et la distinction entre conjecture et preuve. Les modalités de travail sont à déterminer par l'enseignant.

Pour lancer la séance et engendrer le processus de dévolution, l'enseignant précise les enjeux du parcours : revenir sur les erreurs de calcul à partir d'une nouvelle méthode de contrôle.

Pendant le temps de recherche, l'enseignant laisse émerger les justifications des élèves en lien avec les différentes techniques étiquetées dans l'analyse a priori. Il peut encourager les élèves à utiliser l'aide constructive qui suggère le recours au test numérique.

Pendant les phases de mise en commun, l'enseignant met en place différents éléments du contrat didactique pour faire évoluer les techniques erronées ou non attendues utilisées par les élèves. Il amène les élèves à comparer les techniques qu'ils proposent pour en montrer les limites :

- *remettre en question les formulations d'ordre légal* (τ_{NA-1}), par exemple, en mettant en évidence leurs limites (manque de précision, ...), en revenant au fait que les lettres représentent des nombres ou en explicitant clairement les propriétés du calcul algébrique auxquelles elles font référence ;
- *remettre en question la preuve par l'exemple numérique* (τ_{E-1}) en insistant que la quantification (les égalités sont vraies pour toutes les valeurs de la lettre) ;
- *remettre en question des règles erronées* en les déstabilisant avec un tableau de valeurs (par exemple à partir d'un tableur) ou un schéma de calcul. En effet, il est possible que certains élèves ne déstabilisent pas l'erreur visée, même après un ou deux tests numériques. Le recours au tableau de valeurs permet de faire intervenir un grand nombre de valeurs mettant clairement en évidence que les expressions ne renvoient pas le même nombre. L'intervention de

schéma de calculs pour représenter les expressions algébriques peut amener à identifier les programmes de calcul ayant pour résultat l'expression algébrique en jeu et donc à déterminer quelles opérations effectuer et dans quel ordre (Bardini, 2003). Enfin, l'enseignant explicite clairement les propriétés du calcul algébrique en jeu.

Dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant instaure $\tau_{Prouver-equiv-3}$ comme méthode de contrôle des calculs algébriques. Il explicite clairement les propriétés du calcul algébrique et revient sur le rôle des opérateurs et des délimitants à partir d'une ou deux égalités. Pour cela, il peut s'appuyer sur les schémas de calcul pour montrer le lien entre l'aspect procédural (quelles opérations effectuer et dans quel ordre?) et l'aspect structural (quelle est la dernière opération à effectuer?).

g. Conclusion sur *a priori* du parcours 2

L'énoncé de cet exercice est proche des tâches diagnostiques 2 et 4 du test Pépite (cf. annexe A) mais il est proposé dans un objectif différent du diagnostic. Dans le test, l'énoncé propose des justifications (question à choix multiples) alors que dans le parcours, la question est ouverte. C'est la mise en place du moment de la construction du bloc technologio-théorique pour répondre à la question : « l'égalité est-elle toujours vraie? » qui permet de revenir sur les erreurs de calcul des élèves et de construire des OM intermédiaires implicites à agréger (correspondant aux sous-types de tâches à convoquer) pour donner des raisons d'être aux règles de formation et de transformation des expressions algébriques.

4.3.4 Analyse *a priori* du parcours 3

Le parcours 3 s'intitule « Étudier des expressions équivalentes ».

a. Types de tâches en jeu et sous-question génératrice

Comme les technologies dominantes mobilisées par les élèves des groupes B et C prennent peu en compte l'équivalence des expressions pour guider et contrôler les transformations algébriques, ce parcours vise à donner des raisons d'être à la transformation des expressions et au fait qu'on puisse choisir la plus adaptée au but visé. Il s'agit de construire la dénotation des expressions comme un élément du bloc technologio-théorique pour guider la conduite du calcul algébrique.

Ce parcours a pour premier objectif d'amener les élèves à étudier des expressions équivalentes (deux expressions peuvent avoir la même dénotation) en favorisant, en

fonction des niveaux scolaires, les articulations entre l'algébrique et le numérique et l'algébrique et le graphique. Le parcours a pour deuxième objectif d'amener les élèves à choisir l'expression équivalente la plus appropriée (qui demande le moins de calculs) pour réaliser une tâche comme, dans le cadre numérique, un calcul numérique astucieux ou, dans le cadre fonctionnel, la détermination d'antécédent ou d'image. Ce parcours convoque les deux types de tâches de OM2 $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* et $T_{Choisir}$ *Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé*. Comme dans le parcours 2, le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ est central mais il est convoqué dans un objectif didactique différent de celui du parcours 2 puisqu'il ne s'agit pas de déstabiliser des erreurs de calcul. La formulation de la tâche est donc différente et le jeu sur les variables didactiques est distinct. La question est la suivante : les expressions sont-elles égales pour tout x ?

Ce parcours est possible à plusieurs étapes du déroulement comme l'étape de reprise, l'étape d'entraînement ou l'étape de préparation à un contrôle.

Nous présentons les tâches possibles à proposer à chaque groupe en fonction des niveaux scolaires de troisième et de seconde. Nous proposons ensuite une analyse *a priori* des tâches pour expliciter la structure générale des énoncés et les choix de variation réalisés en fonction des groupes.

b. Énoncés

Énoncé pour le groupe C (respectivement B) en classe de troisième

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

- $A(x) = (x + 2)^2 - 4$ (respectivement $A(x) = (x - 1)^2 - 4$)
- $B(x) = x(x + 4)$ (respectivement $B(x) = (x + 1)(x - 3)$)
- $C(x) = 9x - 6$ (respectivement $C(x) = x(x - 2) - x^2 - 2$)

x	$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$
2 (respectivement 1)			
3 (respectivement -1)			
0 (respectivement 0)			

1. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 2$ (respectivement $x = 1$), $x = 3$ (respectivement $x = -1$). Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Calcule la valeur des trois expressions pour $x = 0$. Confirmer-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?
4. Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 98×102 .

Énoncé pour le groupe A en classe de troisième

Voici trois expressions :

- $A(x) = (x - 2)(x + 2)$
- $B(x) = x^2 - 4$
- $C(x) = x^2 - 2x - 4$

1. Les trois expressions sont-elles égales pour tout x ? Justifie.
2. Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 98×102 .

Aide constructive à la disposition des élèves de troisième

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle elles ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer. Pour réécrire les expressions, pense à **utiliser les propriétés** suivantes. Pour tout a, b, c et d :
 - la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition : $a(b + c) = ab + ac$
 - la distributivité double de la multiplication par rapport à l'addition : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
 - l'identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - l'identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - l'identité remarquable : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Énoncé pour le groupe C en classe de seconde

On se demande si les trois fonctions f , g et h sont égales pour tout réel x :

- $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- $g(x) = (x + 1)(x - 3)$
- $h(x) = x(x - 2) - x^2 - 2$

1. **Conjecture numérique** : tu peux utiliser la fonction « tableau de valeurs » de ta calculatrice graphique
 - (a) Calcule la valeur des trois fonctions pour $x = 1$ et $x = -1$. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
 - (b) Calcule la valeur des trois fonctions pour $x = 0$. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
2. **Conjecture graphique** : Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f , g et h . Qu'observes-tu ? Quel lien peux-tu faire avec ta dernière conjecture ?
3. **Preuve** : Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?
4. Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :
 - a. Calculer $f(3)$.
 - b. Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par f .

Énoncé pour le groupe B en classe de seconde

On se demande si les trois fonctions f , g et h sont égales pour tout réel x :

- $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- $g(x) = (x + 1)(x - 3)$
- $h(x) = x(x - 2) - x^2 - 2$

1. **Conjecture graphique** : Représente sur le même écran de la calculatrice les fonctions f , g et h . Qu'observes-tu ? Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des trois fonctions ? Tu peux t'aider de la fonction « tableau de valeurs » de ta calculatrice.
2. **Preuve** : Les trois fonctions sont-elles égales pour tout x ? Justifie algébriquement. Tes conjectures sont-elles vérifiées ?
3. Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :
 - a. Calculer $f(3)$.
 - b. Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par f .

Aide pour les groupes C et B en classe de seconde

Question 1 :

- Pour démontrer que **deux fonctions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
- Pour démontrer que **deux fonctions « sont égales pour tout x »**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions des fonctions sous une même forme pour les comparer.

Question 4.b. (respectivement Question 3.b. pour le groupe B) : Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f . Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.

Énoncé pour le groupe A en classe de seconde

Voici plusieurs expressions d'une même fonction f définie pour tout réel x par :

- Expression 1 : $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$
- Expression 2 : $f(x) = x^3 - 7x + 6$
- Expression 3 : $f(x) = x(x^2 - 7) + 6$

1. Prouve algébriquement que les trois expressions sont égales pour tout réel x . Tu peux vérifier à l'aide ta calculatrice graphique.
2. Pour chaque question, choisis l'expression qui demande le moins de calcul pour :
 - a. Calculer $f(0)$.
 - b. Calculer $f(-3)$.
 - c. Déterminer le(s) antécédent(s) de 6 par f .

Aide pour le groupe A en classe de seconde

Question 1 :

- Pour conjecturer si des expressions sont égales, tu peux :
 - les tester avec une ou plusieurs valeurs numériques,
 - les représenter sur le même écran d'une calculatrice graphique.

- Pour démontrer que **deux expressions « ne sont pas égales »**, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de x pour laquelle leurs images ne sont pas égales.
 - Pour démontrer que **deux expressions « sont égales pour tout x »**, des exemples ne suffisent pas. Il faut le démontrer par une preuve algébrique (« avec x ») en réécrivant les expressions sous une même forme pour les comparer.
- Question 2. c :** Si $f(x) = y$, alors le réel x est un antécédent du réel y par f . Choisis l'expression la plus adaptée pour te ramener à une équation du type $I(x) = 0$.

c. Trame commune des énoncés

L'objectif de ce parcours est, d'une part, d'amener les élèves à appréhender le fait que deux expressions peuvent dénoter le même objet et, d'autre part, qu'on peut utiliser l'une ou l'autre en fonction du but visé. La trame commune des énoncés de chaque groupe est la suivante :

- Phase 1 : étudier des expressions équivalentes en convoquant le type de tâches est $T_{Prouver-equiv}$,
- Phase 2 : travailler avec des expressions équivalentes en convoquant le type de tâches est $T_{Choisir}$.

Le découpage de chaque énoncé en phases est présenté dans le tableau 4.18. Chaque phase fait l'objet d'une analyse *a priori* et d'un choix des variables didactiques spécifiques.

Niveau scolaire	3 ^e			2 ^{de}		
Groupes	A	B	C	A	B	C
Phase 1	Q1	Q1/Q2/Q3		Q1	Q1/Q2	Q1/Q2/Q3
Phase 2	Q2	Q4		Q2	Q3	Q4

TABLEAU 4.18 – Répartition des questions dans les phases 1 et 2 en fonction du niveau scolaire et du groupe

d. Analyse *a priori* de la phase 1

Techniques

Le type de tâches central dans la phase 1 est $T_{Prouver-equiv}$, prouver l'équivalence de deux expressions algébriques. Comme présenté dans le chapitre 3 (cf. § 3.1.4) et rappelé dans l'analyse *a priori* du parcours 2 (cf. §4.3.3), plusieurs techniques sont possibles mais seules deux d'entre-elles peuvent être envisagées au niveau scolaire considéré :

- $\tau_{Prouver-equiv-2}$ Celle basée sur la propriété d'égalité des polynômes « Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils sont de même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux. Cette technique qui consiste soit s'appuyer sur la structure des expressions et à comparer les coefficients des monômes de même degré des écritures développées réduites après transformation, soit à calculer la différence des deux expressions et à montrer qu'elle est nulle.
- $\tau_{Prouver-equiv-3}$ Celle basée sur la conjecture puis la preuve de l'équivalence des expressions. Cette technique s'effectue en deux étapes. D'abord, il s'agit de tester les expressions par convocation de T_{Tester} à partir des techniques $\tau_{Tester-1}$ (test numérique) ou $\tau_{Tester-2}$ (test graphique) pour conjecturer l'équivalence des expressions. Ensuite, la forme de la preuve dépend de l'équivalence des expressions. En cas d'équivalence, elle consiste à donner un contre-exemple. En cas de non-équivalence, la preuve consiste à convoquer les propriétés du calcul algébrique permettant de transformer l'une en l'autre.

Comme le niveau technologique dominant des élèves du groupe A s'appuie sur l'équivalence des expressions et sur le fait que deux expressions équivalentes dénotent le même objet, la technique attendue pour ce groupe est $\tau_{Prouver-equiv-2}$. En revanche, les groupes B et C n'ayant pas encore construit de bloc technologico-théorique s'appuyant sur l'équivalence des expressions, l'objet du parcours est de les amener à appréhender le fait que deux expressions équivalentes dénotent le même objet. C'est pourquoi la technique attendue est $\tau_{Prouver-equiv-3}$. Rappelons (cf. § 3.1.4 ou §4.3.3) que cette technique convoque le type de tâches T_{Tester} pour conjecturer l'équivalence ou non des expressions à partir d'un test numérique ou d'un test graphique. Pour la preuve, si les expressions ne sont pas équivalentes, un contre-exemple numérique est attendu ; sinon, c'est une preuve algébrique qui est attendue. Un développement ou une factorisation sont envisageables pour prouver l'équivalence mais la majorité des élèves choisira probablement le développement. Les genres de tâches *Développer* et *Factoriser* interviennent au niveau R-convoqué. Cette question développe l'intelligence du calcul. La reconnaissance de la propriété et de la transformation effectuée sont à la charge de l'élève. La preuve algébrique met en évidence que, si deux expressions sont équivalentes, il existe une suite de transformations algébriques justifiées par les propriétés du calcul transformant l'une en l'autre.

Les techniques non attendues ou erronées que les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre sont celles présentées dans l'analyse *a priori* du parcours 2 (cf. §4.3.3)

Variables didactiques et milieu

Les variables didactiques suivantes interviennent.

Le nombre d'expressions équivalentes. Pour tous les énoncés, trois expressions algébriques sont proposées. Pour les groupes B et C, deux expressions sont équivalentes alors que la troisième ne l'est pas. Pour le groupe A, deux choix sont possibles. Soit seules deux expressions sont équivalentes, soit les trois expressions sont équivalentes. Le choix de cette variable didactique est lié à l'objectif du parcours et au niveau technologique dominant de chaque groupe.

Le choix des expressions. Les trois expressions algébriques sont choisies parmi : des formes factorisées, des formes développées-réduites, des formes canoniques (par exemple $(x - 2)^2 - 4$) et des formes intermédiaires ni complètement développées, ni complètement factorisées (par exemple, $x(x^2 - 7) + 6$). Les expressions sont majoritairement de degré deux sauf pour le groupe A de seconde où les expressions sont du troisième degré. La principale variation se situe entre les groupes B et C. Nous avons fait le choix de proposer des structures plus simples pour le groupe C que pour le groupe B. Le niveau technologique du groupe C laissant vivre des erreurs sur le rôle des opérateurs, des expressions où la hiérarchie des opérations est plus simple sont retenues. Comme il ne s'agit pas ici de travailler les techniques de développement et de factorisation, ce choix ne défavorise pas le groupe C.

Le découpage de l'énoncé et le niveau d'intervention des types de tâches. Dans les trois groupes, le type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ intervient au niveau T-convoqué. La variation porte sur le découpage de l'énoncé en lien avec la conjecture. Pour les groupes B et C, l'énoncé est découpé de sorte que le type de tâches T_{tester} soit T-convoqué alors que celui du groupe A n'est pas découpé. En fonction du niveau scolaire, le test n'a pas lieu dans le même cadre. Le tableau 4.19 présente ces choix pour chaque groupe en fonction des niveaux scolaires. Le test graphique est plus pertinent en seconde qu'en troisième car le registre des représentations graphiques y a une place importante dans l'étude des fonctions.

Groupe	A	B	C
3 ^e	Pas de test	Test numérique ($\tau_{Tester-1}$)	Test numérique ($\tau_{Tester-1}$)
2 ^{de}	Pas de test	Test graphique ($\tau_{Tester-2}$)	Tests numérique ($\tau_{Tester-1}$) et graphique ($\tau_{Tester-2}$)

TABLEAU 4.19 – Découpage de l'énoncé en lien avec la conjecture dans la phase 1

En référence aux deux techniques $\tau_{Tester-1}$ et $\tau_{Tester-2}$ présentées dans le chapitre 3, nous distinguons deux types de tests pour conjecturer l'équivalence des expres-

sions :

- Le test numérique renvoie à la technique $\tau_{Tester-1}$. Il est demandé de tester les expressions pour deux valeurs numériques choisies de sorte qu'elles renvoient le même nombre (voir par exemple la question 1 des groupes C et B de troisième). Les élèves sont ainsi amenés à conjecturer l'égalité des expressions pour tout x . Puis un troisième test numérique permet d'éliminer une des expressions et de formuler une nouvelle conjecture. Ce troisième test fournit un contre-exemple pour prouver, à la question suivante, que l'une des expressions n'est pas équivalente aux autres.
- Le test graphique renvoie à la techniques $\tau_{Tester-1}$. Il est demandé aux élèves de tracer les représentations graphiques des fonctions définies par les trois expressions algébriques. Le fait que deux courbes apparaissent alors que trois fonctions sont définies, amène à conjecturer que deux des trois expressions sont équivalentes.

Le découpage de l'énoncé est en lien avec les changements de cadre.

Le changement de cadre et les registres convoqués. Suite aux changements de cadre mis en jeu, les registres de représentation convoqués interviennent comme des éléments du milieu. Ils visent à favoriser l'émergence d'une conjecture. Dans le cas du test numérique, c'est le passage du registre des écritures algébriques à celui des écritures numériques qui est en jeu. L'aspect procédural des expressions est sollicité. D'autres registres de représentation peuvent intervenir. Les schémas de calcul peuvent être sollicités pour les calculs numériques, notamment pour le groupe C, afin de revenir sur l'ordre des opérations à effectuer. Si les calculs numériques prennent trop de temps ou s'avèrent trop fastidieux pour les élèves, l'utilisation de la calculatrice est autorisée. Un tableau de valeurs est à remplir au fur et à mesure des questions par les élèves. Il joue un rôle important dans le milieu pour l'évolution de la conjecture. Il est prévu l'intervention d'un tableur, à l'issue de la question 2, pour renforcer le fait que deux des trois expressions dénotent le même nombre quelle que soit la valeur de la lettre. Dans le cas du test graphique, c'est le passage du registre des écritures algébriques à celui des représentations graphiques qui est sollicité.

Une *aide constructive* est disponible. Elle apporte une démarche pour prouver qu'une égalité est vraie pour toute valeur ou fausse. Cette démarche fait référence à

$\tau_{Prouver-equiv-3}$.

e. Analyse *a priori* de la phase 2

Le type de tâches central dans la phase 2 est T_{Choisir} . Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé. C'est le sens des expressions qui est en jeu. T_{Choisir} est convoqué par la tâche (T-convoqué) et intervient pour résoudre des types de tâches du :

- Cadre numérique en troisième :
 - Calculer astucieusement une expression numérique,
- Cadre fonctionnel en seconde :
 - Calculer l'image d'un nombre par une fonction,
 - Déterminer le(s) antécédent(s) d'un nombre par une fonction.

Le choix des valeurs numériques est important. Elles sont déterminées pour que le choix d'une des expressions équivalentes soit plus approprié parce qu'il demande peu de calculs. Par exemple, pour le parcours du groupe A en seconde, le choix de l'expression $x^3 - 7x + 6$ facilite le calcul de $f(0)$ alors que le calcul de $f(-3)$ est facilité par le choix de l'expression $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Seul le nombre de questions posées varie d'un groupe à l'autre afin d'équilibrer le travail demandé entre les phases 1 et 2 pour chaque groupe. Le découpage de l'énoncé est le même pour les trois groupes.

Le milieu peut faire intervenir la calculatrice pour que les élèves puissent contrôler leur résultat. Une aide constructive est disponible pour les élèves de seconde. Les définitions d'image et d'antécédent y sont données.

f. Des conditions pour aborder le moment de construction du bloc technologique et théorique pendant le déroulement

Nous proposons des conditions pour aborder la construction du bloc technologico-théorique pendant le déroulement. Il s'agit de propositions sur les démarches et les raisonnements à introduire aux élèves en fonction du but visé par la tâche.

L'enjeu est d'abord de guider le processus de dévolution de la tâche. L'enseignant commence par expliciter que l'enjeu de la séance est le même pour toute la classe mais avec des expressions différentes pour chaque groupe. Il précise que l'objectif est de travailler sur l'égalité d'expressions pour n'importe quelle valeur de la lettre. Le déroulement prévoit une alternance entre phase de travail individuel et phase de mise en commun de cinq à dix minutes chacun.

Un temps de recherche individuel sur la phase 1 permet de faire émerger les premières conjectures. L'enseignant s'assure que les élèves ont bien compris que

l'enjeu des tests numériques ou graphiques est de conjecturer l'égalité ou non des expressions. Si les calculs s'avèrent fastidieux pour les élèves, l'utilisation de la calculatrice est autorisée. C'est l'occasion pour l'enseignant de revenir sur les priorités opératoires et l'usage des parenthèses.

L'enseignant propose ensuite une mise en commun au cours de laquelle les tests numériques et graphiques sont commentés, à partir de la confrontation des solutions des élèves, pour formuler une conjecture. Le travail individuel s'enchaîne de la même façon avec la deuxième question. Dans le cas des tests numériques, la conjecture évolue. Pour la renforcer et la visualiser, l'enseignant peut utiliser un tableau de valeurs ou un tableur. Il s'agit maintenant de la prouver. Pour l'expression qui n'est pas égale aux autres, un contre-exemple est mis en évidence. L'enseignant pointe que la valeur pour laquelle les expressions ne sont pas égales joue le rôle de contre-exemple et qu'un contre-exemple suffit pour prouver que deux expressions ne sont pas égales. Pour les expressions égales, l'enseignant amène les élèves à la preuve algébrique : « Est-ce que vous êtes sûrs que c'est toujours vrai ? Pourquoi ? » Il insiste sur la quantification : « Nous, nous souhaitons donner une preuve de l'équivalence des expressions pour n'importe quelle valeur ». À ce stade l'enseignant peut mettre en évidence que les trois groupes travaillent sur le même objectif. Après un temps de recherche où l'aide méthodologique est sollicitée, la preuve algébrique est débattue. Les propriétés du calcul algébrique utilisées, qui sont rappelées dans l'aide, sont clairement identifiées.

La phase 2 est ensuite engagée. Elle motive le choix d'une des expressions équivalentes. L'enseignant amène les élèves à anticiper sur les calculs et à reconnaître l'expression qui demande le moins de calculs. Il s'en suit une institutionnalisation sur les points suivants :

- Des expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre même si elles sont des écritures différentes. La différence est liée à la structure sous-jacente des expressions. On peut remarquer que, de la même façon, un nombre possède plusieurs écritures comme 0,5 et $\frac{1}{2}$. Quelle que soit la valeur de x dans des expressions égales pour toute valeur de la lettre, on obtient le même résultat.
- On peut utiliser l'une ou l'autre des écritures équivalentes d'une expression pour calculer astucieusement une expression numérique, calculer la valeur d'une expression algébrique pour une valeur numérique donnée ou pour résoudre une équation.
- Pour vérifier que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre, on commence par conjecturer avec un tableau de valeurs, une représentation

graphique ou des tests numériques : si, en remplaçant la lettre par un nombre, les valeurs des expressions sont différentes, alors elles ne sont pas égales, sinon on peut seulement conjecturer que les deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre. Un, deux ou trois exemples numériques ne suffisent pas pour conclure que l'égalité est toujours vraie. L'enseignant peut s'appuyer sur l'évolution de la conjecture dans les tests numériques proposés. Dans ce cas, seule une preuve algébrique utilisant les propriétés du calcul permet de prouver l'égalité pour n'importe quelle valeur.

- L'enseignant encourage ses élèves à utiliser cette méthode comme moyen de contrôle des calculs.

g. Conclusion de l'analyse *a priori* du parcours 3

Ce parcours intitulé « Étudier des expressions équivalentes » vise à développer, au niveau technologico-théorique, la dénotation et le sens des expressions. Nous avons montré que ces deux aspects sont peu développés dans les programmes et les manuels scolaires. Il peut être proposé à toutes les étapes du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. Un jeu sur les variables didactiques et les éléments du milieu permet d'adapter l'énoncé proposé. Des exemples d'énoncés sont proposés dans l'annexe B.

En guise de conclusion sur les analyses *a priori* qui viennent d'être présentées, nous voudrions souligner deux points importants. Premièrement, nous nous sommes centrés sur les parcours 1, 2 et 3 mais rappelons que nous avons conçu en tout sept parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire. Ces trois parcours ont été particulièrement travaillés avec les enseignants parce qu'ils s'appuient sur des types de tâches qu'ils ont peu l'habitude de proposer à leurs élèves. Deuxièmement, les énoncés que nous avons proposés sont des propositions, d'autres sont possibles. C'est pourquoi, dans l'annexe B, sont associés plusieurs exercices à chaque parcours. Toutefois, certaines propositions pourraient être améliorées. En effet, les contraintes du projet PépiMeP et la nécessité de peupler les parcours nous a parfois conduit à proposer des exercices qui n'ont probablement pas fait l'objet d'analyses *a priori* suffisamment approfondies. Cette dernière remarque nous conduit à la présentation des modes de collaboration avec les différents partenaires du projet PépiMeP.

4.4 Collaboration avec les différents partenaires du projet PépiMeP

Dans cette partie, nous décrivons le mode de collaboration avec les partenaires du projet, élément déterminant de la viabilité du modèle de PED dans l'enseignement ordinaire et de son automatisation dans LaboMep.

4.4.1 Collaboration avec les enseignants du groupe IREM

Un groupe IREM autour de la différenciation en algèbre

Le mode de collaboration avec les enseignants a été déterminé par le besoin de concevoir un modèle de PED compatible avec l'enseignement ordinaire. Ce mode de collaboration devait permettre des échanges entre chercheurs et enseignants pour tester, affiner et peupler le modèle de PED, tout en laissant aux enseignants des marges de manœuvre pour se l'approprier et faire de nouvelles propositions à partir de leurs expériences et de leurs pratiques. De plus, le besoin de créer une communauté d'enseignants pour une autre recherche en cours sur les pratiques de différenciation des enseignants¹² nous a conduit à la création d'un groupe IREM sur l'enseignement et la différenciation en algèbre. Des pré-expérimentations, qui ne sont pas analysées dans l'étude présentée, ont eu lieu avant la création de ce groupe avec un enseignant de collège et un enseignant de seconde sur l'année scolaire 2010-2011. Elles sont présentées dans l'annexe C.

L'objectif du groupe est d'amener les enseignants à exploiter, en se les appropriant, les PED pour réguler l'enseignement de l'algèbre dans leurs classes et à prévoir avec eux des déroulements pour accompagner les PED. La passation et l'interprétation des résultats des élèves au test Pépite, l'intégration des PED dans l'organisation des progressions des enseignants, la place laissée aux différentes phases de formulation, validation et institutionnalisation dans les déroulements des PED, la mise en place d'un contrat par rapport au contrôle des calculs mais aussi une réflexion sur les difficultés des élèves en algèbre liées à des implicites de l'OM à enseigner ont fait l'objet de huit réunions réparties sur l'année scolaire. Les objectifs de la recherche et des observations en classe ont été clairement dévoilés aux enseignants. Toutefois, l'enseignant garde sa liberté quant à sa progression en algèbre et à l'intégration des PED dans cette progression.

12. Cette recherche fait l'objet de la thèse déjà citée de S. Bedja au LDAR de l'Université Paris 7 encadrée par B. Grugeon et C. Cazes.

Des enseignants de troisième et de seconde

Des enseignants volontaires de troisième et de seconde ont été réunis. Trois professeurs de troisième et un de seconde ont participé au groupe sur l'année scolaire 2011-2012. Tous enseignent dans des établissements de la région parisienne et ont une expérience du métier depuis plusieurs années.

Des autorisations multiples de la part des enseignants

Pour participer au groupe, les enseignants ont accepté :

- d'être filmés pendant les réunions du groupe IREM,
- de faire passer le test Pépité disponible sur LaboMeP en début et fin d'année et de mettre en place au moins un PED,
- l'observation et le recueil de vidéo et d'enregistrement audio sur des séances relatives à l'algèbre,
- l'accès à tous les documents écrits de la classe sur les contenus (cours, devoirs, cahiers de quelques élèves, écrits des élèves).

Les données recueillies sont utilisées de façon anonyme et seulement dans le cadre de la recherche. Nous avons prévu des autorisations écrites dans lesquelles les parents des élèves filmés ont accepté les enregistrements sonores et visuels. Au-delà du recueil des données, dès le premier contact, les échanges au sein du groupe ont été situés par rapport à un contrat de collaboration.

Un contrat de collaboration « donnant-donnant »

Le contrat de collaboration a été explicité. Les échanges au sein du groupe devaient permettre aux chercheurs comme aux enseignants de tirer parti du travail réalisé. Du point de vue des chercheurs, ce groupe a permis de tester le modèle, pour revenir sur nos choix et le préciser pour assurer son écologie et le rendre accessible à la culture actuelle des professeurs et donc de produire une ressource pour l'enseignement ordinaire. Du point de vue des enseignants, ce groupe a été l'occasion, pour eux, d'une part, d'être impliqués dans une recherche et de participer à la création d'une nouvelle ressource et, d'autre part, d'interroger et éventuellement de faire évoluer leurs rapports personnels à l'algèbre et à son enseignement. Pour cela, des réunions du groupe ont été consacrées à des analyses de vidéo prises pendant les séances observées.

Négociation des PED avec les enseignants

Au départ, nous avons présenté les sept PED aux enseignants sous la forme

d'exercices en précisant leurs enjeux didactiques. Le document qui a initié les discussions est présenté dans l'annexe B. Chaque enseignant a choisi, en fonction de son projet d'enseignement, le ou les parcours qu'il souhaitait travailler dans sa classe. Nous leur avons proposé de suggérer leur propres exercices mais ils ont préféré s'appuyer sur nos propositions. C'est en fin d'année qu'ils ont apporté des propositions de parcours d'enseignement différencié. Les parcours retenus et expérimentés dans les classes sont présentés dans l'annexe B. Nous avons négocié le choix des expressions, les formulations des énoncés et des aides. Nous avons déterminé ensemble les modalités de travail, la trame générale des déroulements et les apprentissages à institutionnaliser. Les difficultés probablement rencontrées par les élèves et les réponses possibles que l'enseignant pouvait apporter ont été anticipées. Ce mode de collaboration avec les enseignants nous a permis d'affiner les enjeux des parcours et de faire évoluer les énoncés et les déroulements pour mieux prendre en compte les contraintes des enseignants. Nous analysons les parcours retenus et les expérimentations en classe pour une enseignante de troisième, appelée Garance, dans le chapitre 5.

Présence du chercheur pendant les observations

Pendant les observations en classe, nous avons évité autant que possible toute intervention ou influence sur l'enseignement. Cependant, il est vrai que notre présence même dans la classe est un facteur de stress qui peut avoir des influences sur les observables. Nous y faisons référence dans l'analyse *a posteriori* du premier parcours passé dans la classe de Garance présentée dans le paragraphe 5.2.3 du chapitre 5.

La deuxième collaboration en lien avec le projet de recherche PepiMeP est la collaboration avec les chercheurs en informatique, les développeurs et l'association Sésamath.

4.4.2 Collaboration avec les chercheurs en informatique, les développeurs et l'association Sésamath

a. Mode de collaboration

La collaboration avec les chercheurs en informatique et les membres de Sésamath a consisté à formaliser et systématiser le modèle de PED pour permettre la génération automatique des PED dans LaboMeP et son adaptation à la culture de Sésamath. L'une des difficultés, tant informatique que didactique, a été de faire

coïncider le modèle théorique à caractère didactique avec deux logiques : celle de développement d'un prototype de recherche en informatique et celle, pragmatique, de développement de la plateforme Sésamath. La démarche de modélisation des PED a été guidée à la fois par les analyses didactiques et une démarche itérative dans le cadre du travail informatique. L'équipe s'est appuyée sur les documents produits suite aux analyses didactiques. Ces derniers ont été progressivement affinés, structurés et systématisés à la fois par la réflexion didactique et la nécessité de le formaliser pour l'implémentation des parcours d'enseignement différencié et l'indexation des exercices des PED. Le travail avec les informaticiens a eu pour objectif de faire évoluer un modèle didactique déclaratif en un modèle formel informatique. Le travail a porté sur les questions suivantes : comment caractériser les exercices et le choix des variables didactiques pour peupler les parcours ? Comment automatiser la proposition d'exercices des parcours en fonction des entrées ? Dans l'annexe B, nous associons selon les trois entrées du modèle de PED, des exercices papier-crayon et interactifs pour chaque parcours. L'indexation des exercices vise à rendre possible l'automatisation des parcours et leur évolution dynamique en fonction des ajouts ou des retraits d'exercices dans LaboMeP.

Du côté didactique, cette démarche a fait l'objet de la conception du modèle didactique de PED présenté ci-dessus. Du côté informatique, elle a fait l'objet d'un travail de conception, de modélisation et d'implémentation. Le modèle a été réalisé par N. EL-Kechaï, dans le cadre d'un contrat post-doctoral mené au Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (L.I.P.6) financé par projet PepiMeP. Ce travail a permis la réalisation de deux logiciels qui sont des premières versions de prototype pour implémenter le modèle de PED. Le logiciel PepiIndexation permet d'indexer la centaine d'exercices qui intervient dans les parcours. Le logiciel PépiPad automatise la génération des parcours et créer des séances différenciées sur LaboMeP en fonction des groupes à partir des résultats du test diagnostique Pépite et des choix de l'enseignant. Ces logiciels sont en cours d'intégration dans LaboMeP. Enfin, nous avons travaillé sur l'interface de présentation des résultats du test et des PED à destination des enseignants. Les enseignants du groupe IREM ont participé au travail d'élaboration des interfaces pour passer d'un langage théorique à un langage utilisé habituellement dans les classes.

b. PepiIndexation : indexation des exercices

Quels critères didactiques permettent d’attribuer un exercice à un groupe d’élèves pour un objectif d’enseignement donné? Voilà le type de questionnement qui a permis de systématiser et d’opérationnaliser le modèle des parcours. Le travail avec l’équipe de chercheurs en informatique nous a amené à spécifier et systématiser les choix des types de tâches et les variations sur un même type de tâches en fonction des groupes (variables didactiques, registres sémiotiques, niveaux de convocation des types de tâches, milieu). Ce travail a permis d’indexer les exercices intervenants dans les parcours, dans le but d’automatiser la proposition de parcours sur LaboMeP suite au passage du test Pépite et de la rendre évolutive suite aux ajouts de parcours ou d’exercices. Les exercices papier-crayon conçus dans le cadre de cette thèse comme les exercices interactifs présents sur LaboMeP ont pu être indexés. Un travail important d’opérationnalisation (vocabulaire utilisé par les enseignants notamment) a été mené pour permettre à des non-didacticiens d’indexer les exercices.

Une application Java¹³ a été réalisée pour permettre de renseigner les métadonnées des exercices mis en jeu dans les PED, s’appuyant sur une liste de « capacités » établie par l’équipe de chercheurs. La liste des capacités, présentée dans l’annexe G, a été établie à partir des analyses didactiques et des capacités présentées dans les programmes officiels du collège et de la classe de seconde. L’interface de saisie des métadonnées de PépiIndexation est illustrée dans la figure 4.9. La saisie, ainsi facilitée, peut être effectuée par les différents membres de l’équipe. En sortie, l’éditeur génère automatiquement le fichier xml des métadonnées de la banque d’exercices, qui est utilisée par le logiciel PépiPad pour construire les parcours d’enseignement différencié.

Pour plus d’information sur les aspects techniques, nous renvoyons le lecteur au « Rapport technique » rédigé par N. El-Kechaï et au rapport intermédiaire de 2011 du projet PepiMeP disponibles à l’adresse <http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm>.

L’indexation repose sur une catégorisation des « capacités » (correspondant globalement aux types de tâches) intervenant dans les programmes scolaires à la fin de la scolarité obligatoire (Chevallard, 2004). Notons que le vocabulaire utilisé n’est pas toujours celui de la recherche en didactique des mathématiques. Il s’est avéré nécessaire de s’appuyer sur les programmes scolaires, référence pour les enseignants

13. Cette application a été développée par Odette Auzende de l’équipe MOCAH du laboratoire L.I.P.6.

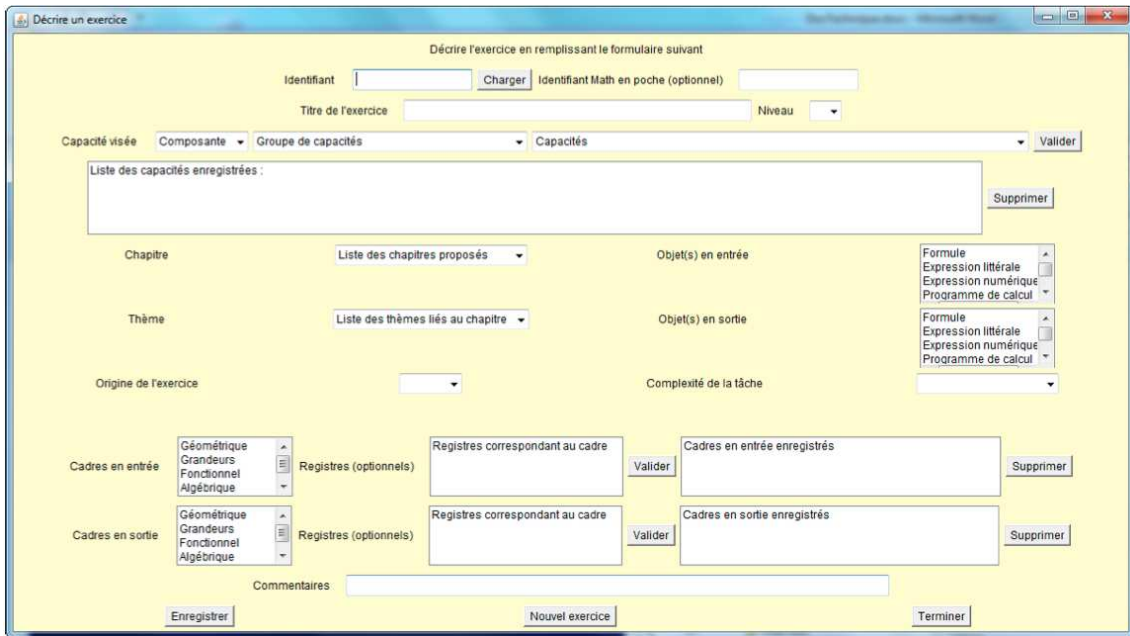


FIGURE 4.9 – L’interface de saisie des métadonnées de PepiIndexation.

et pour Sésamath, et donc d’utiliser la terminologie commune de « capacités ». C’est pourquoi les « types de tâches » sont exprimés en « capacités ». Les capacités sont classées selon les trois composantes du modèle du stéréotype : Usage de l’algèbre, Calcul algébrique et Traduction algébrique. Comme nous l’avons déjà souligné dans le paragraphe 4.1, ce classement a des correspondances avec l’OM de référence établie au chapitre 3.

Nous présentons les différents critères d’indexation retenus et leur correspondance avec le modèle de parcours différencié précédemment présenté. Ils ont été retenus suite à de nombreux allers et retours entre l’équipe de chercheurs en informatique et l’équipe de chercheurs en didactique des mathématiques, à partir des exercices retenus.

Les critères d’indexation sont les suivants (cf. figure 4.9) :

- *Identifiant de l’exercice* : identifiant de la base de données de Sésamath,
- *Titre de l’exercice*,
- *Niveau scolaire* pour lequel l’exercice a été conçu,
- *Capacité visée* : union des capacités visées dans l’exercice, c’est-à-dire des types de tâches « principaux ». Trois éléments sont spécifiés :
 - Composante du modèle de stéréotype dans lequel il intervient (UA, TA ou CA),
 - Groupe de capacités (correspondant à des genres de tâches),

- Capacités (correspondant à des types de tâches, cf. annexe G),
- *Chapitre* : c'est le chapitre dans lequel l'exercice est rattaché. À ce jour, la valeur « Calcul littéral » est disponible,
- *Thème* : c'est le thème auquel l'exercice est rattaché. Ce critère dépend du chapitre sélectionné. À ce jour, deux valeurs sont possibles pour le chapitre « Calcul littéral » : « Expressions algébriques » et « Equations ».
- *Objets mathématiques en entrée et en sortie* de l'exercice : expression littérale, expression numérique, programme de calcul, arbre, figure simple, figure complexe, fonction, formule, nombre, équation, identité, phrase, schéma géométrique, schéma de calcul,
- *Origine* : provenance de l'exercice. Trois valeurs sont possibles : LaboMeP, liste d'exercices conçus dans le cadre de cette thèse, manuels de Sésamath,
- *Complexité de la tâche* : complexité de la mise en fonctionnement des connaissances. Quatre valeurs sont possibles ; elles sont inspirées du programme de l'OCDE PISA : élémentaire, conceptuel simple, multi-pas et complexe,
- *Cadre(s) en entrée et en sortie* : géométrique, grandeurs, fonctionnel, algébrique, numérique. Pour chaque cadre, plusieurs registres sont associés. Par exemple, les registres associés au cadre algébrique sont : écriture algébrique, écriture numérique, figure géométrique, représentation graphique, LN processus (Pgme de calcul), LN structure, représentation en arbre, représentation en schéma de calcul.

Par exemple, l'exercice du groupe C du parcours 2 présenté à la page 232 est indexé comme présenté dans la figure 4.10. Une fois les exercices indexés, le logiciel PépiPad peut générer les PED.

Cette indexation pourrait être affinée. Elle a été élaborée pendant que notre travail de thèse était en cours si bien qu'aujourd'hui, nos analyses ont évolué et il semble que certains critères pourraient évoluer. Le choix d'indexer les exercices par des capacités plutôt que des types de tâches et, par des niveaux de complexité de la tâche plutôt que des niveaux de convocation des types de tâches nécessiterait d'être remis en question. Cela ne permet pas de décrire à un niveau fin les types de tâches qui composent celui en jeu globalement sur une question de l'exercice et leur niveau de convocation en lien avec le découpage de l'énoncé. Or, ce sont ces éléments qui forment la complexité de la tâche.

```

<exercice xmlns="modeleExo.xsd" identifiant="9" idMep="">
<titreExercice>Remettre en question des erreurs de calcul : des égalités vraies pour tout a ?</titreExercice>
<niveauExercice>3</niveauExercice>
<origineExercice>Lingot</origineExercice>
<chapitre>Calcul littéral</chapitre>
<theme>Expressions littérales</theme>
<complexiteTache>EL=élémentaire</complexiteTache>
<capacitesVisees>
<capacite>
<composante>UA</composante>
<groupeCapacites>3. Démontrer ou prouver </groupeCapacites>
<capaciteName>3.5. Prouver que 2 expressions littérales ne sont pas égales</capaciteName>
</capacite>
<capacite>
<composante>UA</composante>
<groupeCapacites>3. Démontrer ou prouver </groupeCapacites>
<capaciteName>3.7. Prouver que 2 expressions littérales sont égales</capaciteName>
</capacite>
</capacitesVisees>
<objetsExo>
<objetsEntree>
<objet>Expression littérale</objet>
<objet>Identité</objet>
</objetsEntree>
<objetsSortie>
<objet>Expression littérale</objet>
<objet>Identité</objet>
</objetsSortie>
</objetsExo>
<cadres-RegExo>
<cadres-RegEntree>
<cadre-RegAssocies>
<cadre>Algèbrique</cadre>
<registresAssocies>
<registre>écriture algébrique</registre>
</registresAssocies>
</cadre-RegAssocies>
</cadres-RegEntree>

```

FIGURE 4.10 – Indexation de l'exercice du groupe C présenté pour illustrer le parcours 2 (extrait du fichier xml)

c. PepiPad : générateur de parcours d'enseignement différencié

Le logiciel PépiPad intègre quatre types d'informations pour déterminer des exercices, à proposer à chaque groupe d'élèves, en fonction des objectifs choisis par l'enseignant. Premièrement, il prend en entrée le diagnostic cognitif établi par Pépite pour chaque élève. Deuxièmement, il prend en entrée le fichier de métadonnées qui décrit la banque d'exercices intervenant dans les parcours. Ce fichier a été généré par l'éditeur cité dans le paragraphe précédent. Troisièmement, il considère les trois entrées du modèle de PED : le niveau scolaire des élèves, le secteur d'étude et l'étape du déroulement de l'enseignement en algèbre organisé par l'enseignant. À ce jour,

seul le secteur « Expressions algébriques » et les étapes de reprise et d’entraînement sont disponibles. Quatrièmement, il prend en entrée les types de tâches convoqués et le jeu sur les variables didactiques caractérisant chaque parcours.

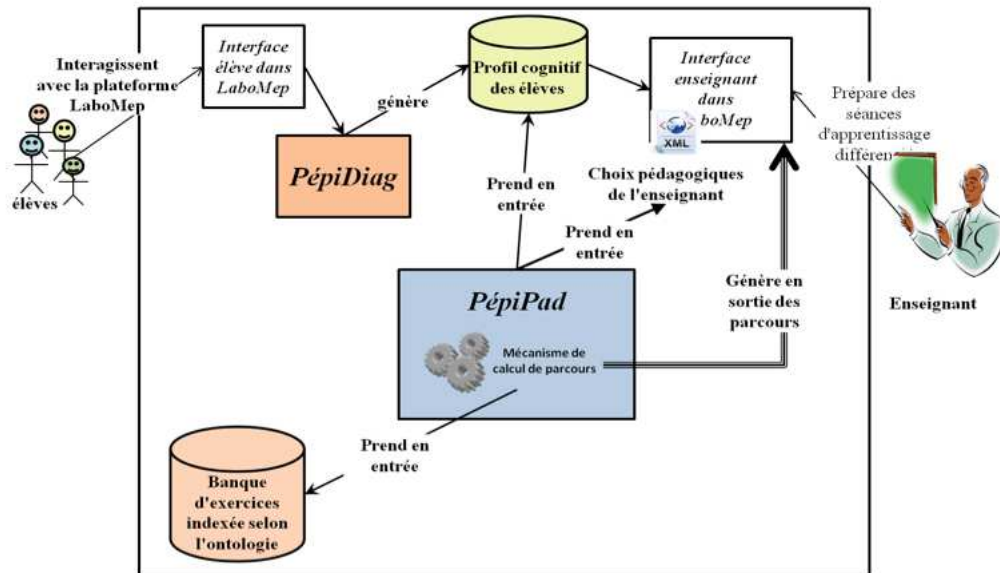


FIGURE 4.11 – Architecture générale de PepiPad.

Une vision synthétique de l’architecture fonctionnelle de PépiPad est illustrée par la figure 4.11. Pour plus d’information sur les aspects techniques, nous renvoyons le lecteur au « Rapport technique » rédigé par N. El-Kechaï et Dominique Prévit et au rapport de 2012 du projet PepiMeP disponibles à l’adresse <http://lutes.upmc.fr/delozanne/Lingot/Lingot.htm>. Actuellement, le logiciel PépiPad est en cours de finalisation. Une proposition de parcours est pourtant disponible sur LaboMeP. Elle est déterminée à partir des tableaux de l’annexe B. Mais cette proposition est statique et l’intérêt de PépiPad est de la rendre dynamique en prenant en compte les nouveaux exercices ajoutés. Pour faire coïncider la logique du modèle de parcours d’enseignement différencié avec la logique pragmatique du développement de la plateforme Sésamath, les parcours d’enseignement différencié et les étapes du déroulement de l’enseignement ont été renommés de manière à mieux correspondre aux pratiques habituelles sur Sésamath (cf. figure 4.12).

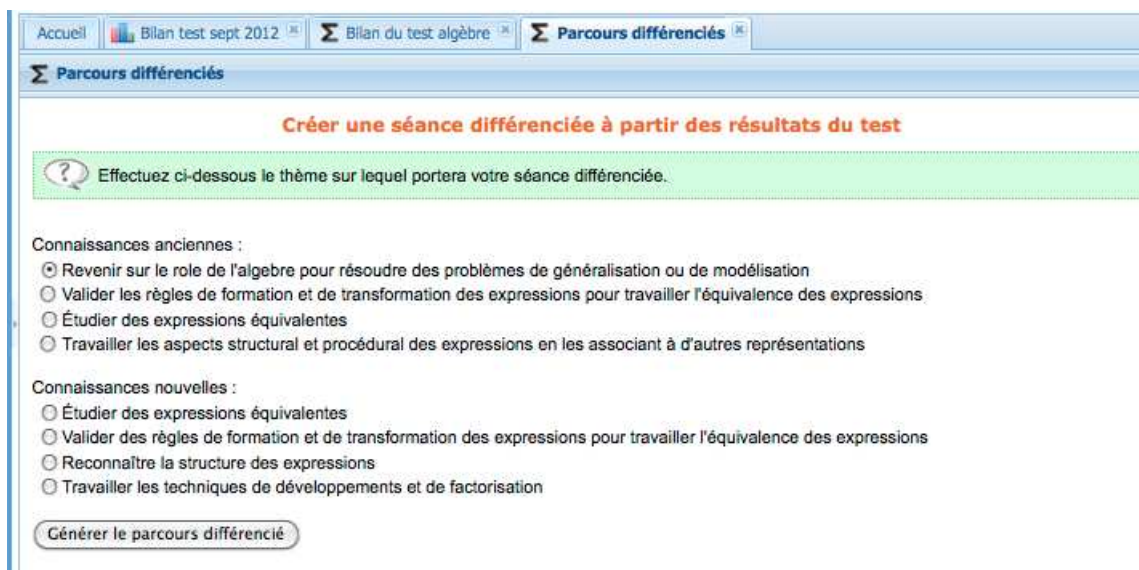


FIGURE 4.12 – La génération des PED actuellement sur LaboMeP

d. Une interface dans LaboMeP pour présenter les résultats du test Pépite aux enseignants

Une attention toute particulière a été portée par l'équipe pour présenter les groupes d'élèves aux professeurs dans LaboMeP et le bilan de chaque élève. Les enseignants du groupe IREM ont été sollicités pour proposer une interface qui soit adaptée aux pratiques d'évaluation et de différenciation des enseignants.

Une fois le test passé, l'enseignant accède au bilan de la classe (cf. §4.13). Il accède à un bilan pour la classe dans laquelle les élèves sont répartis en différents groupes. Chaque groupe est décrit par une ou deux phrases. Ces phrases sont formulées pour traduire les niveaux technologiques dominants de chaque groupe. La description de chaque groupe est la suivante :

- **Groupe A** : Les élèves donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée.
 - *Sous-groupe A+* : Les élèves donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée. Ils traduisent des relations entre des variables et utilisent l'algèbre pour résoudre avec succès plusieurs types de problèmes.
 - *Sous-groupe A-* : Les élèves donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée. Ils utilisent peu l'algèbre pour résoudre des problèmes.

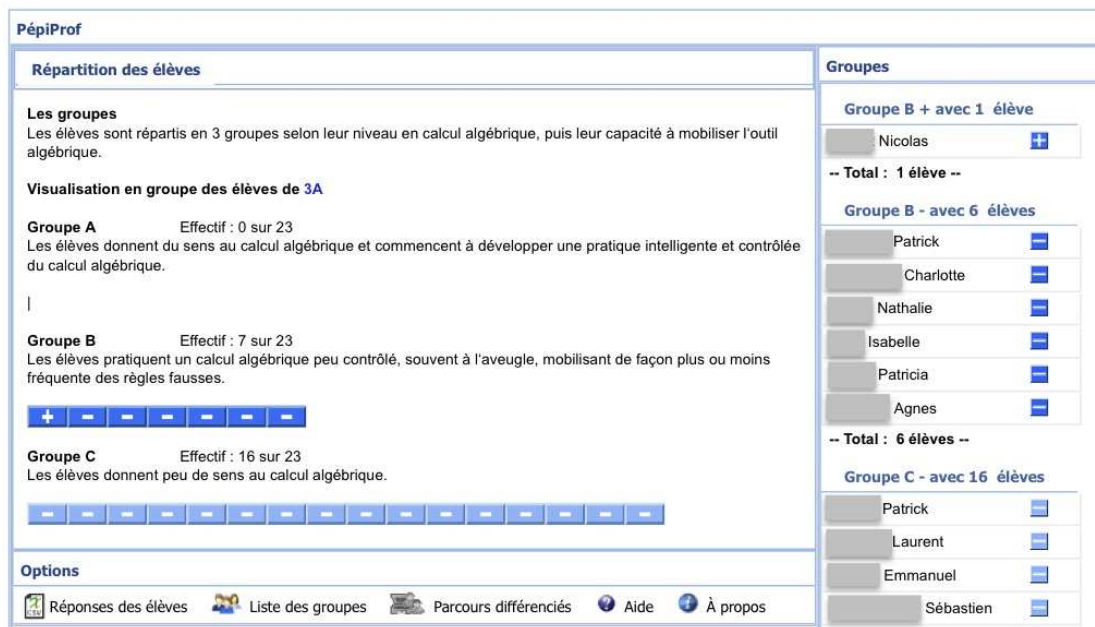


FIGURE 4.13 – Le bilan de la classe sur LaboMeP

- **Groupe B** : Les élèves pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses.
 - *Sous-groupe B+* : Les élèves pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses. Pour résoudre au moins un type de problème, ils utilisent une démarche algébrique adaptée.
 - *Sous-groupe B-* : Les élèves pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses. Pour résoudre des problèmes, ils utilisent des démarches numériques ou des démarches algébriques inadaptées.
- **Groupe C** : Les élèves donnent peu de sens au calcul algébrique.
 - *Sous-groupe C+* : Les élèves donnent peu de sens au calcul algébrique et commencent à l'utiliser pour résoudre des problèmes avec plus ou moins de succès.
 - *Sous-groupe C-* : Les élèves donnent peu de sens au calcul algébrique et l'utilisent peu ou pas comme outil pour résoudre des problèmes.

L'enseignant utilisateur peut accéder à la description de chaque groupe et sous-groupe en cliquant sur « Liste des groupes » et aux réponses des élèves au test en cliquant sur « Réponses des élèves ».

Le bilan de chaque élève est disponible. Il est illustré dans la figure 4.14 ; le

stéréotype est présenté et, pour chaque composante, les taux de réussite aux exercices et les niveaux des différents indicateurs sont précisés (cf. §4.1.2). L'enseignant peut accéder au détail des réponses de l'élève pour chaque tâche relativement à chaque composante comme le montre la figure (cf. §4.15). Des éléments de l'analyse des réponses en lien avec les types et les codages de l'analyse *a priori* de Pépite sont présentés.

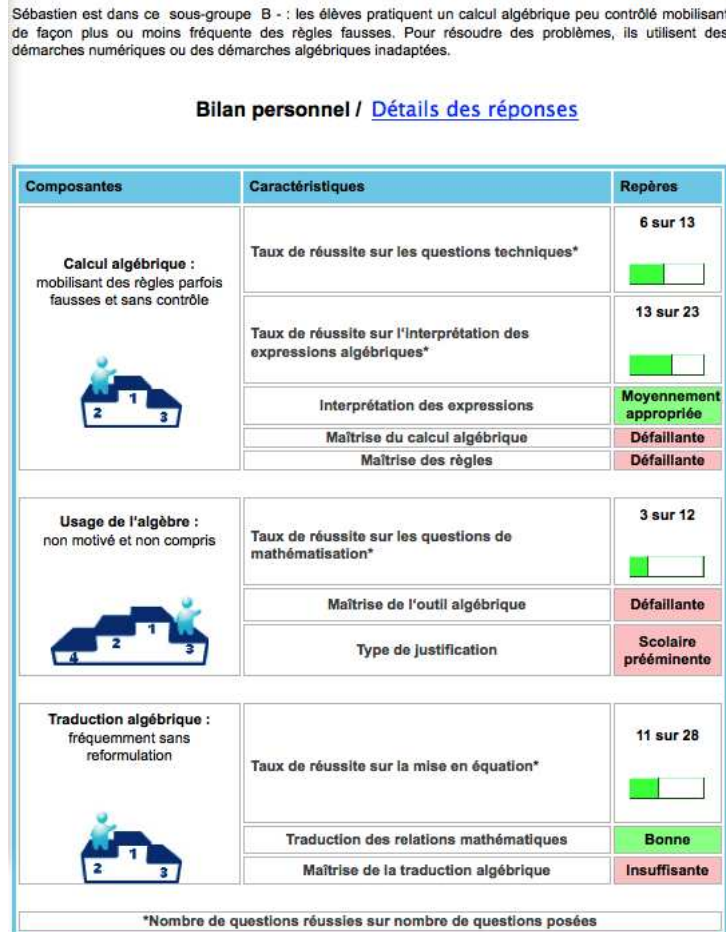


FIGURE 4.14 – Le bilan d'un élève du groupe B- sur LaboMeP

Les niveaux sur chaque composante du stéréotype ont été reformulés pour les enseignants comme suit :

- **CA** : trois niveaux relatifs à l'usage des règles de calcul algébrique :
 - CA1 : Calcul intelligent et contrôlé préservant l'équivalence des expressions,
 - CA2 : Calcul basé sur des règles syntaxiques souvent à l'aveugle ne préservant pas l'équivalence des expressions, règles de transformation erronées du type $(a + 2)^2 = a^2 + 4$

Détails des réponses de l'élève ■ Sébastien (2G7)

Usage de l'Algèbre				
Réponse	Question	Réponse	Démarche	Analyse de la réponse
Nombre de réponse(s) correcte(s) (ou partiellement) 6	2 - 1	vrai	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Règle correcte algébrique (contre exemple attendu)
	2 - 2	faux	$a \cdot a = a^2$ est différent de $a + a = 2a$	Règle correcte instanciée
	2 - 3	faux	Avec des parenthèses, le carré agit sur l'intérieur de la parenthèse, sans parenthèse le carré n'agit que sur le a	Règle correcte énoncée en français
	4 - 1	faux	$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$	Règle correcte algébrique
	4 - 3	faux	Le carré de a est égal au produit de a par lui-même	Argument faible énoncé en français
	4 - 5	faux	On ne peut pas additionner des nombres et des lettres	argument faux ou impertinent d'ordre légal énoncé en français
Nombre de réponse(s) incorrecte(s) 2	4 - 2	vrai	Pour faire la somme, on additionne les coefficients puis les exposants	Règle incorrecte énoncée en français qui assemble
	4 - 4	vrai	$(a+2)(a+2) = a \cdot a + 2 \cdot 2$	Règle incorrecte exprimée symboliquement : erreur de parenthèse

FIGURE 4.15 – Le détail des réponses d'un élève du groupe B- pour la composante usage de l'algèbre (UA)

- CA3 : Calcul sans signification et non opératoire, rôle des opérateurs non maîtrisé visible par des erreurs du type concaténation ($3 + 2a \rightarrow 5a$) ou linéarisation ($a^2 = 2a$);
- UA : quatre niveaux relatifs à l'usage de l'outil algébrique :
 - UA1 : Disponibilité de l'outil algébrique et usage adapté aux types de problèmes du domaine,
 - UA2 : Usage de l'outil algébrique adapté dans certains types de problèmes,
 - UA3 : Usage de l'outil algébrique non motivé et non adapté,
 - UA4 : Non disponibilité de l'outil algébrique et usage persistant de démarches arithmétiques;
- TA : trois niveaux relatifs à la traduction entre différents registres sémiotiques :
 - TA1 : Traduction adaptée et contrôlée,
 - TA2 : Traduction fréquemment sans reformulation,
 - TA3 : Traduction pour schématiser.

En conclusion, nous avons développé les modes de collaboration avec les partenaires du projet : les enseignants d'un groupe IREM, les chercheurs en informatique et l'association Sésamath. Ces collaborations ont été déterminantes pour envisager la viabilité du modèle de PED dans l'enseignement ordinaire et l'automatisation de la proposition de parcours dans LaboMep.

4.5 Bilan

À titre de bilan, nous retenons deux résultats principaux de ce chapitre.

Le premier résultat porte sur la caractérisation des OM apprises par des technologies « dominantes ». L'analyse des réponses du test Pépite et le modèle de stéréotype, l'un et l'autre développés depuis plusieurs années dans les projets de recherche Pépite et Lingot (cf. chapitre 1), ont joué un rôle essentiel dans cette caractérisation. Leur interprétation dans l'OM de référence éclaire sur la part des savoirs et savoir-faire ignorés de l'institution considérée (OM à enseigner) dans les OM apprises. Cela nous a permis de dégager sept sous-questions génératrices à aborder dans les parcours.

Le second résultat porte sur la modélisation des parcours d'enseignement différencié. Le modèle qui vient d'être présenté est un résultat central de notre étude. Il est conçu dans le cadre du projet pluridisciplinaire PépiMeP, ce qui a joué un rôle déterminant dans notre travail. Les premières versions des PED fondées sur les analyses didactiques sont progressivement affinées, structurées et systématisées à la fois par la réflexion didactique et la formalisation nécessaire pour permettre l'implémentation des parcours d'enseignement différencié et l'indexation des exercices des PED. Certes, le modèle de PED présente des limites. Nous avons conscience qu'il peut être davantage formalisé : c'est l'une des perspectives de la recherche. En outre, du fait des impératifs informatiques, les analyses *a priori* de tous les exercices intervenant dans chacun des parcours (annexe B) ne sont pas envisagées aussi finement que celles présentées dans le chapitre 4. La collaboration avec l'association Sésamath nous a conduit, cependant, à proposer une ressource évolutive avec des possibilités de modifications, d'ajouts et de retraits de parcours et d'exercices les composant.

Chapitre 5

Analyses des expérimentations

Afin de tester nos choix de conception des parcours d'enseignement différencié sur l'évolution des praxéologies apprises des élèves et leur compatibilité avec les choix d'enseignement des enseignants, nous avons travaillé en collaboration avec des enseignants volontaires de 3^e et de 2^{de} dans le cadre du groupe IREM de Paris-Diderot « Enseignement différencié en algèbre ». Les modes de collaboration ayant été présentés dans le chapitre 4 (cf. §4.4.1), il s'agit dans ce chapitre d'analyser une partie des expérimentations réalisées au sein du groupe. Au cours de l'année scolaire 2011-2012, nous avons proposé aux enseignants de ce groupe d'expérimenter dans leur classe le test Pépite et les parcours d'enseignement différencié de leur choix. Notre analyse est centrée sur les pratiques algébriques et les techniques mises en œuvre par les élèves relativement aux conditions d'enseignement mises en place par les enseignants. Elle s'appuie sur les analyses *a priori* des parcours présentées dans le chapitre 4 (cf. §4.3). L'analyse de l'usage des parcours par les enseignants ne fait pas l'objet de cette thèse mais relève d'autres travaux en cours en didactique des mathématiques dans le cadre du projet PépiMeP.

Après avoir précisé nos questions de recherche et nos choix méthodologiques pour l'analyse des expérimentations (cf. §5.1), nous analysons les évolutions des techniques et des technologies utilisées par les élèves suite à l'expérimentation des parcours 1, 2 et 3, présentés dans le chapitre 4, dans une classe de troisième et relativement aux conditions et contraintes de l'enseignante compte-tenu de son rapport à l'algèbre et à l'enseignement et des marges de manoeuvre possibles dans son établissement (cf. § 5.2). Nous terminons ces analyses par une conclusion qui fait le lien avec les expérimentations menées avec les autres enseignants du groupe IREM. Ensuite, nous analysons la répartition des stéréotypes présents sur l'ensemble des élèves ayant passés le test. Nous en tirons quelques conclusions concernant la répar-

tition des élèves en groupe et l'évolution des niveaux technologiques dominants des élèves entre le début de la classe de troisième et la fin de la classe de seconde (cf. §5.3).

5.1 Questions et méthodologie

5.1.1 Questions et cadres théoriques

La question centrale de ce chapitre est la suivante : les parcours d'enseignement différencié ont-ils permis, d'une part, de revenir sur les raisons d'être des expressions algébriques et des propriétés du calcul algébrique et, d'autre part, de travailler sur les enjeux didactiques prévus ? Nous nous intéressons à l'évolution des praxéologies des expressions algébriques construites par les élèves compte-tenu de l'organisation didactique mise en place par les enseignants. Cette évolution est questionnée à deux niveaux : localement, le temps de la mise en œuvre du parcours, et, globalement, sur les organisations didactiques et les mathématiques construites relativement à l'algèbre.

Selon nous, pour avoir un effet à court voire à moyen-terme sur les techniques et le niveau technologico-théorique utilisés par les élèves pour résoudre les tâches proposées, les parcours d'enseignement différencié doivent être en cohérence avec le projet global de l'enseignant. C'est pourquoi, nous sommes situons l'activité¹ des élèves par rapport à celle de l'enseignant.

Nous utilisons la complémentarité des cadres théoriques de la théorie anthropologique du didactique, de la théorie des situations didactiques et de la double approche pour les analyses *a priori* et *a posteriori* (concernant la complémentarité des cadres théoriques, nous citons, Artigue, Lenfant, & Roditi, 2003 ; Artigue, 2009 ; Artigue & Winslow, 2010). Notre questionnement est d'abord en lien avec la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) :

- Les OM convoquées dans les parcours et les OD mises en place par l'enseignant favorisent-elles une évolution OM apprises des élèves en algèbre ?
- Les raisons d'être des OM convoquées dans les parcours et les enjeux didactiques sont-ils explicités ?
- Les techniques envisagées (envisageables, non attendues et erronées) *a priori* sont-elles apparues ? Le parcours a-t-il permis de les faire évoluer ?

1. Étant donné que nous faisons référence à plusieurs cadres théoriques, nous utilisons le terme « activité des élèves » dans le sens général.

- Les types de tâches intermédiaires ou implicites convoqués sont-ils pointés par l'enseignant ?
- Quelles technologies ont été travaillées ? À quel niveau de justification se situent les pratiques algébriques des élèves et de l'enseignant ?
- Quelle est la place donnée à la dialectique des ostensifs et des non-ostensifs dans le discours des élèves et des enseignants ?

Mais la TAD ne nous permet pas d'interroger sous quelles conditions les raisons d'être et les enjeux didactiques des parcours ont été présentés aux élèves. C'est pourquoi nous utilisons les outils de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988) :

- La présentation des parcours a-t-elle favorisé le processus de dévolution de la tâche visée dans les parcours et de ses enjeux ?
- Les milieux créés étaient-ils adaptés aux objectifs des parcours et aux élèves de chaque groupe pour permettre une évolution des techniques et des technologies pour les OM convoquées ?
- Le contrat didactique a-t-il permis de valider les techniques et l'équivalence de programmes de calcul à partir de leurs résultats ?

Nous aurons parfois recours à la double approche (Robert, 2008a, 2008b) pour mettre en perspective l'activité de l'enseignant avec celles des élèves. Nous cherchons à analyser l'influence des interventions de l'enseignant, en particulier les aides qu'il apporte, sur l'activité des élèves parce qu'elles peuvent modifier la tâche prescrite et le contrat didactique initialement prévus par des valeurs ajoutées ou des dénaturations.

Avant d'aborder notre méthodologie d'analyse des données en lien avec les cadres théoriques retenus, nous présentons le déroulement des expérimentations et les données recueillies.

5.1.2 Déroulement des expérimentations et données recueillies

Les quatre enseignants du groupe IREM ont expérimenté des PED. La passation du test Pépite, l'interprétation de l'évaluation diagnostique, le choix des parcours en fonction des projets des enseignants et des profils des élèves construits par Pépite ainsi que la préparation de la mise en œuvre des parcours dans les classes ont été discutés dans le cadre du groupe IREM.

Le protocole d'expérimentation est le suivant :

1. Passage du test Pépite (test début troisième ou fin troisième-début seconde) avant de commencer le chapitre relatif à l'algèbre,

2. Séance(s) différenciée(s) pour revenir sur les connaissances anciennes,
3. Déroulement du (ou des) chapitre(s) d'algèbre,
4. Séance(s) différenciée(s) en cours de chapitre pour travailler les connaissances nouvelles, organiser le travail de la technique et préparer aux évaluations,
5. Pour les classes de troisième, passage du test Pépite (test fin troisième-début seconde) dans le courant du mois de mai pour préparer le Brevet.

Nous appelons « séance différenciée » une séance de classe qui porte sur un ou plusieurs des parcours d'enseignement différencié définis dans le chapitre 4. Différents parcours ont été proposés aux enseignants à partir du document présenté dans l'annexe B. Ils en ont choisis un ou plusieurs en fonction de leurs projets. L'ensemble des parcours expérimentés est présenté dans l'annexe C. Le jeu sur des variables didactiques comme le choix des expressions, le découpage des tâches, les milieux ainsi que le déroulement ont ensuite été discutés avec les enseignants. Ces choix sont présentés avec les analyses *a priori* des parcours. Les progressions en calcul algébrique ainsi que le choix de situations d'introduction aux identités remarquables, d'exercices d'entraînement ou des énoncés des évaluations sont restés à la charge des enseignants. Ils ont parfois été discutés dans les réunions IREM si les enseignants le souhaitaient.

Pour chaque classe, nous avons recueilli les données suivantes :

- les réponses des élèves aux tests,
- les productions des élèves sur les parcours et les évaluations en algèbre,
- les progressions du (des) chapitre(s) d'algèbre et les cahiers de quelques élèves,
- les enregistrements audio des interactions privées et publiques entre les enseignants et les élèves et au sein de certains binômes durant le déroulement en classe des parcours d'enseignement différencié,
- l'enregistrement vidéo orienté vers le tableau et l'enseignant en classe lors des séances intégrant des parcours d'enseignement différencié,
- l'enregistrement vidéo d'une séance de classe habituelle portant sur l'algèbre,
- les enregistrements audio des quelques réunions privées avec les enseignants pour définir les énoncés et les déroulements des parcours en fonction de leurs choix ou pour échanger sur les résultats des élèves au test par rapport à leur connaissance des élèves.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C pour une présentation plus détaillée de l'ensemble des données recueillies dans chaque classe. Un chercheur participant au groupe IREM était présent à chaque séance différenciée. Nous étions observateurs

chez deux des quatre enseignants : une enseignante de 3^e et une enseignante de 2^{de}.

Les enregistrements audio des séances différenciées permettent de transcrire les échanges entre l'enseignant et les élèves. Ils donnent accès aux interactions privées entre l'enseignant et ses élèves ainsi qu'aux interactions entre élèves puisque les déroulements prévoient un travail en binôme ou en groupe. Les interactions publiques sont accessibles par les enregistrements audio et vidéo.

Les enregistrements vidéo ont un double objectif. D'une part, ils permettent de filmer les gestes de l'enseignant ou des élèves et les écrits recueillis au tableau pendant les mises en commun. D'autre part, ils permettent de compléter l'enregistrement audio puisque, grâce au film, nous pouvons déterminer à quels élèves l'enseignant parle pendant les recherches individuelles.

Nous présentons maintenant notre méthodologie pour analyser les données recueillies.

5.1.3 Méthodologie d'analyse des données

a. Le choix d'analyser les données de la classe de 3^e de *Garance*

L'analyse de l'activité des élèves nécessitant une analyse fine de leurs productions et de leurs échanges en classe et les données recueillies étant nombreuses, il nous a fallu en sélectionner. Seules les données d'une classe de 3^e sont analysées. Pour faciliter la lecture, nous appelons l'enseignante de cette classe *Garance*. Ce choix s'explique pour deux raisons principales. D'une part, nous étions présents dans la classe pendant le déroulement des séances différenciées ce qui donne plus facilement une vision d'ensemble du travail réalisé. D'autre part, cette enseignante ayant réalisé trois séances différenciées, les données recueillies sont relativement nombreuses. Cela n'a pas été le cas dans l'autre classe où nous étions observateur. De plus, les enregistrements audio des échanges privés entre les élèves d'un même binôme n'ont pas été analysés car l'analyse des autres données s'est avérée ne pas être suffisamment riche pour tirer parti des expérimentations.

b. Des données analysées en plusieurs étapes

L'analyse des données recueillies dans la classe de *Garance* s'organise en plusieurs étapes.

Premièrement, nous analysons la progression en algèbre proposée par l'enseignante sur l'année scolaire et les cahiers des élèves à partir de l'OM de référence

définie au chapitre 3. Nous relevons les types de tâches travaillés et leur niveau d'agrégation en OM locales. Nous en dégageons l'OM à enseigner définie par Garance relative aux expressions algébriques dans cette classe. Cette analyse nous permet de situer les enjeux des parcours d'enseignement différencié choisis par l'enseignante par rapport à son projet global sur l'année. Selon nous, les parcours d'enseignement différencié ne peuvent avoir un effet à moyen voire à long terme sur les techniques et les technologies par les élèves que s'ils sont en cohérence avec les OM à enseigner et enseignée et l'OM didactique proposée par l'enseignante. Pour compléter, et avoir accès à l'OM effectivement enseignée, nous analysons une séance de classe habituelle portant sur le calcul algébrique. Cette séance est « habituelle » dans le sens où nous ne sommes pas intervenus sur le choix des tâches, de l'OM et de l'OD. Comme seule une séance est analysée, les éléments de l'OM effectivement enseignée ne sont que partiels mais supposés suffisants pour notre objectif et donner un échantillon pertinent des pratiques algébriques de Garance. Nous relevons les types de tâches, les techniques, le niveau technologico-théorique et les modes de justification en jeu pendant la séance. Cette séance habituelle ayant eu lieu après les séances différenciées, nous situons le niveau technologico-théorique et les modes de justification en jeu par rapport à ceux développés dans les parcours.

Deuxièmement, nous présentons les répartitions des élèves en groupe proposées par le logiciel de test Pépité au début de l'année scolaire (octobre 2011) et en fin d'année scolaire (mai 2012). Nous nous appuyons sur ces informations pour estimer « la géographie de la classe » en algèbre et son évolution au cours de l'année scolaire. Nous identifions quelques élèves pour lesquels le stéréotype a évolué. Nous analysons plus attentivement l'évolution de leurs réponses au test Pépité entre le premier et le second passage du test (cf. § 5.2.9).

Troisièmement, les données relatives au déroulement de chaque parcours sont analysées à partir des analyses *a priori* présentées dans le chapitre 4. Garance a retenu les parcours d'enseignement différencié 1, 2 et 3. Ils se sont déroulés sur trois séances différenciées. La première porte sur le parcours 1, la seconde sur les parcours 1 et 2 et la troisième sur le parcours 3. Les enregistrements video et audio sont transcrits et présentés dans l'annexe E. Pour chaque parcours, les énoncés et les éléments du milieu à faire intervenir choisis par Garance sont présentés et interrogés par rapport aux modifications qu'ils impliquent dans les analyses *a priori*. Ensuite, nous décrivons la trame des séances en déterminant la durée des différentes étapes du déroulement prévu *a priori*. Les productions des élèves sont analysées à partir des critères issus de l'analyse *a priori*. Cette vision d'ensemble des techniques

utilisées par les élèves nous guide pour analyser leur activité en classe. Nous mettons en perspective les productions des élèves relativement aux conditions mises en place par Garance : le processus de dévolution de la tâche, le contrat didactique mis en place, les adaptations du déroulement prévu en fonction de la réaction des élèves ou des incidents, la nature de ses interventions auprès des élèves (alliée ou antagoniste). L'activité des élèves est analysée relativement aux interventions de Garance et relativement au rôle joué par le milieu dans l'évolution des techniques et des niveaux technologiques prévue dans l'analyse *a priori*.

c. Une analyse quantitative des stéréotypes présents et des évolutions au cours d'une année scolaire

La dernière analyse concerne celle des stéréotypes rencontrés sur l'ensemble des élèves ayant passé le test. Il s'agit d'interroger :

1. nos choix de regroupement des stéréotypes,
2. l'évolution de la répartition en groupe des élèves en fonction du niveau scolaire et de la période l'année scolaire,
3. l'évolution de la répartition en groupe des élèves ayant passé deux fois le test diagnostique en cours d'année et ayant expérimenté les parcours d'enseignement différencié.

L'étude quantitative porte sur un échantillon d'élèves encore petit pour tirer des conclusions définitives. Néanmoins, cette étude donne une image locale des catégories de praxéologies apprises en algèbre avant le test et suite à l'expérimentation.

Comme annoncé, nous commençons par une analyse qualitative du passage des parcours d'enseignement différencié dans la classe de 3^e de l'enseignante Garance.

5.2 Analyse des expérimentations dans la classe de 3^e de Garance

5.2.1 Un portrait de Garance et de ses élèves

a. Contexte général

L'enseignante de la classe retenue exerce depuis plusieurs années dans un collège de la région parisienne. Nous la qualifions d'enseignante expérimentée. Selon elle, même si le collège n'est pas classé en Zone d'Éducation Prioritaire, des problèmes de

discipline et des difficultés sociales et scolaires des élèves rendent certaines classes difficiles.

N'ayant pas été convaincue par les dispositifs d'enseignement différencié rencontrés durant sa formation IUFM, elle a souhaité participer au groupe IREM pour faire évoluer ses pratiques à la fois sur la différenciation de l'enseignement et sur l'enseignement de l'algèbre. Elle constate une « *certaine réticence des élèves* » face à l'algèbre et qualifie de « *catastrophique* » l'apprentissage des élèves dans ce domaine. Elle attend du groupe IREM des échanges avec des collègues et des chercheurs pour tenter d'y remédier.

Son utilisation des T.I.C.E., qui nous concerne puisque le passage du test Pépite nécessite l'utilisation de LaboMeP, est limitée en raison d'une salle informatique faiblement équipée. Seuls onze postes sont disponibles et certains sont souvent inutilisables. Néanmoins, elle utilise assez fréquemment des logiciels de géométrie dynamique et parfois un tableur ou des exercices interactifs de MathenPoche pour le travail en demi-groupe ou en aide.

Durant l'année scolaire 2011-2012, elle a fait participer ses deux classes de troisième aux expérimentations. Nous analysons les séances avec la classe qu'elle trouve la plus dynamique. Cette classe, composée de vingt-et-un élèves, est d'un niveau faible mais, selon elle, équivalent des autres classes de troisième de ce collège. Garance apprécie cette classe pour la réactivité des élèves. En fin d'année, elle nous a communiqué l'orientation de dix-neuf élèves. Onze élèves ont été orientés en seconde générale, six en seconde professionnelle, un élève en Certificat d'Aptitude professionnelle et un élève en Centre de Formation des Apprentis.

b. Progression sur les contenus algébriques proposée par Garance

Nous commençons par décrire la progression réalisée par Garance relativement aux contenus algébriques dans sa classe de troisième au cours de l'année scolaire 2011-2012. Elle est issue des énoncés des exercices, des feuilles de cours distribuées et des évaluations proposées aux élèves. Ces documents sont présentés dans l'annexe D.

La progression globale sur l'année est la suivante :

1. de fin septembre à mi-octobre : organisation de moments de rappel au début de plusieurs séances sur les propriétés du calcul algébrique (genres de tâches Développer et Factoriser),
2. fin octobre : moment d'évaluation formative avec le passage du test Pépite,

3. de fin octobre à fin novembre : **Chapitre « Identités remarquables et développement »** ,
4. de décembre à janvier : organisation de moment de rappel au début de plusieurs séances sur les propriétés du calcul algébrique et les identités remarquables (genres de tâches Développer et Factoriser),
5. de janvier à début février : chapitre « Factorisation et équation » ,
6. de début février à début mars : organisation de moments de rappel au début de plusieurs séances sur les propriétés du calcul algébrique et la résolution des équations (genres de tâches Développer, Factoriser, Résoudre une équation),
7. fin avril : moment d'évaluation formative avec le passage du test Pépite fin avril.

Le contenu relatif à l'algèbre s'organise en deux chapitres. L'algèbre trouve deux habitats. D'abord, les identités remarquables sont introduites ce qui permet d'enrichir la structure des expressions rencontrées dans les genres de tâches de développement. Ensuite, la factorisation est travaillée pour motiver la résolution d'équations se ramenant au second-degré (équation-produit). Garance a l'habitude de débiter ses séances par des « calculs » numériques ou algébriques, qu'elle qualifie de « *moment de gymnastique* ». Elle propose des tâches de développement, de factorisation et de résolution d'équations (par exemple, *Développer* $(2x+3)^2$, $(x+7)(x-7)$, etc.) et, depuis son intégration au groupe IREM, des tâches nouvelles de preuve (par exemple, *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur* ou *Le carré de n'importe quel nombre pair est-il toujours un nombre pair ?*). Ces moments de rappel offrent la possibilité aux élèves de rencontrer des OM relatives aux expressions sur toute l'année scolaire.

Les expérimentations organisées pour tester les parcours ont eu lieu pendant le déroulement du chapitre « Identités remarquables et développement ». Ce chapitre suit une progression présentée dans la figure 5.1.

Ce chapitre commence par un moment d'évaluation avec le passage du test Pépite. Il a duré une séance (environ cinquante minutes) ; l'enseignante n'a pas souhaité revenir sur les réponses au test avec ses élèves. Ce moment d'évaluation est suivi d'un moment de reprise de l'étude avec les parcours d'enseignement différencié 1 et 2 intitulés *Revenir sur le rôle de l'algèbre à partir de l'étude de l'équivalence des programmes de calcul dans un problème de généralisation* (parcours 1) et *Revenir sur les règles de formation et de transformation des expressions algébriques à partir de l'équivalence des expressions* (parcours 2). L'enseignante les a choisis parce qu'elle

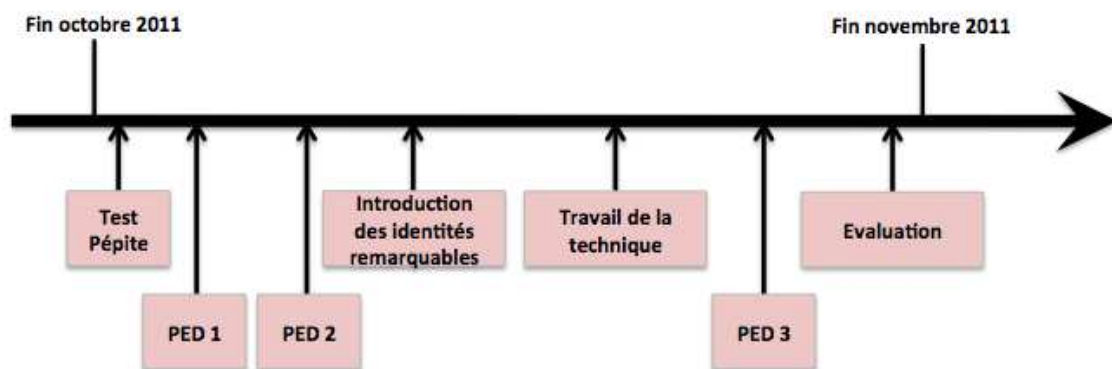


FIGURE 5.1 – Progression sur le chapitre « Identités remarquables et développement »

souhaitait revenir sur les raisons d'être de l'algèbre (sens donné aux lettres et aux transformations des expressions), sur les propriétés du calcul algébrique (distributivité simple et double) et sur le rôle des opérateurs et des délimitants. Ensuite, suit l'introduction des identités remarquables avec les moments de la première rencontre, de l'exploration des types de tâches $T_{DIR-car}$ *Développer un carré* et $T_{DIR-som \times dif}$ *Développer un produit de deux facteurs du type $(a + b)(a - b)$* , de l'émergence de la technique, de la construction du bloc technologico-théorique et de l'institutionnalisation. Les identités remarquables sont introduites par la décomposition des aires et la dialectique de changement de cadre algébrique et géométrique (cf. chapitre 3). Puis, arrive le moment du travail de la technique. Des types de tâches de OM2 et OM3 (prouver l'équivalence de deux expressions algébriques, développer des carrés de sommes ou des produits remarquables) sont d'abord convoqués, puis des types de tâches OM1 sont convoqués dans la résolution de problèmes (cf. figure 5.2). Le parcours 3, intitulé *Étudier des expressions équivalentes*, s'insère dans ce moment. Le chapitre est clos par un moment d'évaluation. Les élèves ont été évalués deux fois sur ce chapitre. La première évaluation, qui a eu lieu à la fin du chapitre, porte sur des genres de tâches de OM2 et OM3 : Développer, Prouver l'équivalence de deux expressions. La deuxième évaluation, qui a eu lieu un mois après le chapitre, porte sur des tâches techniques du genre *Développer* et sur la résolution d'un problème de preuve d'équivalence de programmes de calcul ($T_{P-Exp-Equivalence-PC}$). Les types de tâches décomposant $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ sont à la charge de l'élève comme la mobilisation des lettres et la traduction d'un programme de calcul par une expression algébrique.

Les dimensions *outil* et *objet* de l'algèbre sont travaillées. La dimension *outil* apparaît principalement en début et fin de chapitre dans des problèmes de généralisation et de preuve. La dimension *objet* est présente tout au long du chapitre à travers des tâches techniques. Nous spécifions plus précisément les types de tâches rencontrés par rapport aux trois OM locales de l'OM de référence relative aux expressions algébriques.

c. OM à enseigner relative aux expressions algébriques

Nous avons relevé les types de tâches rencontrés dans les tâches et les deux sujets d'évaluation donnés aux élèves. Les tâches données aux élèves sont déterminées à partir des documents composant la progression de Garance en algèbre et les cahiers des élèves (cours et exercices). Rappelons qu'ils sont présentés dans l'annexe D. Cette analyse s'appuie sur l'OM de référence présentée dans le chapitre 3.

OM1 - Génération des expressions algébriques

Exercice 1 :

Programme2
Choisir un nombre. Ajouter 5 à ce nombre. Élever au carré le résultat obtenu

Programme 1
Choisir un nombre. Multiplier ce nombre par 10. Ajouter 25 et le carré de ce nombre au résultat précédent.

- 1) Tester ces deux programmes avec les nombres 0, 2, -3, $\frac{2}{3}$
- 2) Quelle conjecture peut-on faire?
- 3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 : x est un nombre positif.
Quelle est la nature de ce triangle ?

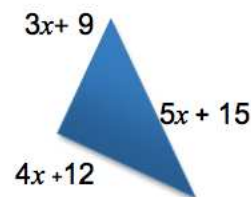


FIGURE 5.2 – Résolution de problèmes, extrait de la « fiche 2 » présentée dans l'annexe D

Les types de tâches de OM1 rencontrés sont :

- $T_{P-Exp-Equivalence-PC}$ Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul,
- $T_{P-Exp-Resultat-PC}$ Prouver le résultat d'un programme de calcul,

- $T_{T-Prog \rightarrow Exp}$ Traduire un programme de calcul par une expression algébrique
- $T_{T-Pteari \rightarrow Exp}$ Traduire une propriété d'un nombre par une expression algébrique et vice-versa,
- $T_{Aire \rightarrow Exp}$ Traduire l'aire d'un rectangle ou d'un carré par une expression algébrique,
- $T_{Perimetre \rightarrow Exp}$ Traduire le périmètre d'un rectangle, d'un carré par une expression algébrique.

La production d'expressions algébriques pour prouver des résultats généraux occupe une place importante au début de chapitre, pour donner des raisons d'être à l'algèbre, et, en fin de chapitre et dans les évaluations, pour réinvestir les nouvelles techniques rencontrées dans la résolution de problèmes. Les types de tâches de OM2 et OM3 y sont alors convoqués au niveau R-convoqué (cf. figure 5.2). Le changement de registre est présent à travers des traductions du registre des grandeurs et du registre des programmes de calcul vers celui des écritures algébriques. L'autre sens de traduction, qui permet de travailler l'aspect structural des expressions, n'est pas présent. Le changement de cadre est présent dans uniquement deux problèmes.

OM2 - Équivalence des expressions algébriques

L'enseignante donne un rôle important au type de tâches $T_{Prouver-equiv}$ *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre* à travers la tâche « Les égalités sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur ». Il est rencontré pour la première fois dès le début du chapitre dans le premier parcours d'enseignement différencié. La technique de conjecture puis de preuve, notée $\tau_{Prouver-equiv-3}$ dans le chapitre 3, appuyée par la dialectique algébrique-numérique émerge ce qui favorise la construction d'un bloc technologico-théorique dans lequel la dénotation et le sens des expressions sont présents. Elle est ensuite institutionnalisée dans le cours mais, comme le montre l'analyse qui suit d'une séance habituelle (cf. §5.2.1.d.), Garance a des difficultés à l'instaurer comme moyen de contrôle du calcul algébrique. Ce type de tâches est à nouveau rencontré dans les moments de rappel (appelés « calculs de début de séance » par l'enseignante), dans l'évaluation de fin de chapitre et dans des problèmes où il apparaît au niveau R-convoqué tels que la preuve de l'équivalence de programmes de calcul ou la preuve qu'un triangle est rectangle. La présence quasiment constante de ce type de tâches montre une volonté de solliciter la dialectique du numérique et de l'algébrique. Néanmoins, si le recours au test numérique commence à être instauré comme moyen de contrôle, il y a peu de travail sur la dialectique entre les aspects procédural et structural des expressions.

Le choix de l'expression la plus adaptée au but visé (type de tâches T_{Choisir}) n'apparaît pas. Le sens des expressions est donc peu travaillé à travers ce type de tâches.

OM3 - Algèbre des polynômes

Les types de tâches $T_{R\text{-canonique}}$ *Réécrire un monôme sous la forme canonique* aX^n et ceux du genre T_D *Développer* sont présents à travers des tâches très standardisées. Les développements portent uniquement sur des expressions du type $(a \pm b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $a(b+c)$ et $a(b-c)$, notamment dans des exercices techniques. La diversité des expressions est pauvre par rapport à celle qu'il est possible de rencontrer en classe de troisième (cf. chapitre 3, page 148 sur la complexité des expressions). Or, comme nous l'avons souligné dans le chapitre 3, le fait de travailler sur des expressions standardisées peut encourager un travail uniquement au niveau des ostensifs et de la reconnaissance de signes plutôt qu'un travail sur le sens et la structure des expressions.

Ils sont sollicités au niveau T-convoqué dans des exercices techniques et au niveau R-convoqué dans la résolution de problèmes de preuve. Mais nous pouvons faire l'hypothèse que les types de tâches intermédiaires à convoquer dans les OM relatives à l'interprétation des expressions, au contrôle des transformations reste absents ou implicites.

En conclusion, l'OM à enseigner convoque des types de tâches de trois OM locales de référence à différents moments de l'étude : moment de reprise, moment de travail de la technique, moment d'évaluation. Des articulations entre le numérique, l'algébrique et le géométrique, dans des problèmes sollicitant des changements de cadre et de registres de représentation, y sont nombreuses ce qui favorise des liens entre les trois OM locales et un travail au niveau de l'OM régionale relativement aux expressions algébriques. Il est important de préciser, pour la suite des analyses, que cette OM à enseigner est nouvelle pour Garance. Sa participation au groupe I.R.E.M. l'a amenée à faire évoluer les types de tâches et les modes de contrôle qu'elle propose. Dans son bilan de fin d'année (cf. annexe D), elle précise que les types de tâches *Prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de la lettre*, *Prouver le résultat d'un programme de calcul* ou *Prouver des propriétés numériques* sont nouveaux pour elle. De plus, elle dit avoir réalisé en cours d'année l'importance d'institutionnaliser des techniques de vérification des calculs. En revanche, les analyses montrent qu'il y a eu peu d'évolution de la prise en compte de la flexibilité entre les aspects procédural et structural des expressions, le contrôle et

l'intelligence du calcul.

d. Une technologie habituelle appuyée par des ostensifs et le recours aux formulations d'ordre légal

Nous analysons les cahiers des élèves (cours, corrections des exercices) et une séance habituelle sur l'algèbre afin de relever, dans le discours de l'enseignante, des éléments technologiques et théoriques auxquels se situent les pratiques algébriques de la classe. Nous nous intéressons au milieu et au contrat didactique mis en place pour valider les techniques utilisées.

Les cahiers des élèves

Dans les cahiers des élèves, nous nous sommes intéressés à la manière dont sont conduites les transformations algébriques. Pour cela, nous avons étudié les parties de cours comme les corrections d'exercices. Nous notons :

- peu de traces d'une explicitation de la propriété du calcul algébrique utilisée et d'identification entre la propriété et les valeurs de l'expression,
- des ostensifs graphiques comme les flèches pour accompagner la conduite du développement ou des traits pour faire ressortir l'indéterminée,
- peu de trace du contrôle des transformations par exemple par des tests numériques.

La technologie justifiant les techniques algébriques se situe au niveau des écritures algébriques et des ostensifs avec peu de référence aux non-ostensifs. Nous précisons cette remarque par l'analyse d'une séance habituelle.

Observation d'une séance « habituelle »

Nous sommes allés observer une séance portant sur l'algèbre dans laquelle nous ne sommes intervenus ni sur le choix des tâches données aux élèves ni sur le déroulement. Cette séance clôt le chapitre « Identités remarquables et développement ».

La séance a porté sur deux exercices. Le premier correspond à un moment de rappel qui débute traditionnellement toutes les séances de l'enseignante. Ce jour-là, il portait sur le genre de tâches *Développer* sur les expressions : $(4x + 7)^2$, $(x + \sqrt{17})(x - \sqrt{17})$, $(a - 5)^2$, $5x(x - 8)$, $(1 + \sqrt{3})^2$. Le second exercice met en jeu le type de tâches *Prouver le résultat général d'un programme de calcul*. Il s'agit de l'exercice du prestidigitateur présent dans l'exercice 9 du test Pépité et déjà analysé *a priori* (cf. chapitre 4) : « Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu penses à un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat

par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7. » L'affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse. »

Nous découpons la séance en étapes pour avoir une vision globale du déroulement :

1. Lancement de l'exercice 1 (1 minute 30 secondes)
2. Temps de recherche (12 minutes 30 secondes)
3. Proposition de réponses par des élèves au tableau (3 minutes)
4. Correction avec débat entre les élèves (17 minutes)
5. Lancement de l'exercice 2 (2 minutes)
6. Temps de recherche (4 minutes 30 secondes)
7. Mise en commun (12 minutes 30 secondes)

Deux épisodes sont révélateurs des éléments technologiques justifiant les techniques de développement utilisées. Il s'agit de la correction du développement de $(4x + 7)^2$ proposé par Mohammed et du développement de $5x(x - 8)$ proposé par Ina. Ces deux élèves sont dans le groupe C. Les deux élèves ont écrit au tableau :

- Mohammed : $(4x + 7)^2 = (4x)^2 + 2 \times 4x + 7 + 7^2 = 16^2 + 15^2 + 7$ [car $2 \times 4 + 7 = 15$].
- Ina : $5x(x - 8) = 5x \times x + 5x - 8 = 5x^2 + -3x$

Ces productions sont caractéristiques des élèves du groupe C. Elle présente des erreurs de concaténation ($ax + b \rightarrow (a + b)x$), une disparition de l'indéterminée ou une hiérarchie de opérations non respectée qui sont révélatrices d'un niveau technologique dominant guidé par des pratiques arithmétiques et l'utilisation d'ostensifs non guidée par les non-ostensifs.

Notre analyse renvoie aux échanges de la transcription de la séance habituelle intitulée « Transcription partielle d'une séance habituelle » présentée dans l'annexe D.

Dans les deux cas, l'enseignante laisse entendre que la transformation proposée par les élèves est erronée :

- 1. *Enseignant* : *Tout le monde est d'accord avec ça ?*
- 2. *Elève* : *Non.*
- 3. *Enseignant* : *En plus, c'est pas ça que tu as fait Mohamed, donc qu'est-ce qui ne va pas ? Ok, donc là, c'est quoi notre identité remarquable ? [...] a plus b au carré, ça donne quoi ? [Silence] Ok, il y a quoi entre le 2 et le a et le a et le b ?*

...