



**HAL**  
open science

# Caractérisation géométrique et morphométrique 3-D par analyse d'image 2-D de distributions dynamiques de particules convexes anisotropes. Application aux processus de cristallisation.

Benoît Presles

► **To cite this version:**

Benoît Presles. Caractérisation géométrique et morphométrique 3-D par analyse d'image 2-D de distributions dynamiques de particules convexes anisotropes. Application aux processus de cristallisation.. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2011. Français. NNT : 2011EMSE0632 . tel-00782471

**HAL Id: tel-00782471**

**<https://theses.hal.science/tel-00782471>**

Submitted on 29 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



NNT : 2011 EMSE 0632

## THÈSE

présentée par

**Benoît PRESLES**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne**

Spécialité : **Image, Vision, Signal**

### **CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE ET MORPHOMÉTRIQUE 3-D PAR ANALYSE D'IMAGES 2-D DE DISTRIBUTIONS DYNAMIQUES DE PARTICULES CONVEXES ANISOTROPES**

**Application aux processus de cristallisation.**

soutenue à Saint-Étienne, le 9 décembre 2011

Membres du jury :

Président :	Françoise PRÊTEUX, Directrice de recherche, MINES ParisTech, Paris
Rapporteurs :	Christian GERMAIN, Professeur, ENITA de Bordeaux, Bordeaux Ernest HIRSCH, Professeur, Université de Strasbourg, Illkirch
Examineur :	Yvan MAILLOT, Maître de conférences, Université de Haute-Alsace, Mulhouse
Co-encadrants :	Ana CAMEIRAO, Maître-assistant, ENS des Mines, Saint-Étienne Johan DEBAYLE, Chargé de recherche, ENS des Mines, Saint-Étienne
Co-directeur de thèse :	Gilles FÉVOTTE, Professeur, Université Lyon 1, Villeurbanne
Directeur de thèse :	Jean-Charles PINOLI, Professeur, ENS des Mines, Saint-Étienne

**Spécialités doctorales :**

SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX  
 MECANIQUE ET INGENIERIE  
 GENIE DES PROCEDES  
 SCIENCES DE LA TERRE  
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT  
 MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
 INFORMATIQUE  
 IMAGE, VISION, SIGNAL  
 GENIE INDUSTRIEL  
 MICROELECTRONIQUE

**Responsables :**

J. DRIVER                    Directeur de recherche            Centre SMS  
 A. VAUTRIN                Professeur                            Centre SMS  
 F. GRUY                     Professeur                            Centre SPIN  
 B. GUY                      Maître de recherche                Centre SPIN  
 J. BOURGOIS               Professeur                            Fayol  
 E. TOUBOUL               Ingénieur                             Fayol  
 O. BOISSIER               Professeur                            Fayol  
 JC. PINOLI                 Professeur                            Centre CIS  
 P. BURLAT                 Professeur                            Fayol  
 Ph. COLLOT                Professeur                            Centre CMP

**Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)**

AVRIL	Stéphane	MA	Mécanique & Ingénierie	CIS
BATTON-HUBERT	Mireille	MA	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
BENABEN	Patrick	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CMP
BERNACHE-ASSOLANT	Didier	PR 0	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean-Pierre	MR	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaïd	DR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR 1	Informatique	Fayol
BORBELY	Andras	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
BOUCHER	Xavier	MA	Génie Industriel	Fayol
BOUDAREL	Marie-Reine	PR 2	Génie Industriel	DF
BOURGOIS	Jacques	PR 0	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
BRODHAG	Christian	DR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
BURLAT	Patrick	PR 2	Génie Industriel	Fayol
COLLOT	Philippe	PR 1	Microélectronique	CMP
COURNIL	Michel	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR 1	Génie Industriel	CMP
DARRIEULAT	Michel	IGM	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DECHOMETS	Roland	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
DESRAYAUD	Christophe	MA	Mécanique & Ingénierie	SMS
DELAFOSSÉ	David	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR 1	Génie Industriel	Fayol
DRAPIER	Sylvain	PR 2	Mécanique & Ingénierie	SMS
DRIVER	Julian	DR 0	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
FEILLET	Dominique	PR 2	Génie Industriel	CMP
FOREST	Bernard	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CIS
FORMISYN	Pascal	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR	Sciences de la Terre	SPIN
GIRARDOT	Jean-Jacques	MR	Informatique	Fayol
GOEURLOT	Dominique	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
GROSSEAU	Philippe	MR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	MR	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	MR	Sciences de la Terre	SPIN
GUYONNET	René	DR	Génie des Procédés	SPIN
HERRI	Jean-Michel	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
INAL	Karim	PR 2	Microélectronique	CMP
KLÖCKER	Helmut	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	CR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
LERICHE	Rodolphe	CR CNRS	Mécanique & Ingénierie	SMS
LI	Jean-Michel	EC (CCI MP)	Microélectronique	CMP
MALLIARAS	George Grégory	PR 1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	MA	Mécanique & Ingénierie	SMS
MONTHEILLET	Frank	DR 1 CNRS	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
PERIER-CAMBY	Laurent	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Christophe	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean-Charles	PR 0	Image, Vision, Signal	CIS
ROUSTANT	Olivier	MA	Mathématiques Appliquées	Fayol
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
SZAFNICKI	Konrad	MR	Sciences & Génie de l'Environnement	Fayol
THOMAS	Gérard	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
TRIA	Assia		Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	MA	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
VIRICELLE	Jean-Paul	MR	Génie des Procédés	SPIN
WOLSKI	Krzysztof	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR 1	Génie Industriel	CIS

**Glossaire :**

PR 0            Professeur classe exceptionnelle  
 PR 1            Professeur 1ère classe  
 PR 2            Professeur 2ème classe  
 MA(MDC)      Maître assistant  
 DR             Directeur de recherche  
 Ing.            Ingénieur  
 MR(DR2)      Maître de recherche  
 CR             Chargé de recherche  
 EC             Enseignant-chercheur  
 IGM            Ingénieur général des mines

**Centres :**

SMS            Sciences des Matériaux et des Structures  
 SPIN          Sciences des Processus Industriels et Naturels  
 Fayol         Institut Henri Fayol  
 CMP          Centre de Microélectronique de Provence  
 CIS            Centre Ingénierie et Santé

*À mes parents.*



# Remerciements

## Je tiens à remercier :

En premier lieu mon directeur de thèse, Jean-Charles PINOLI, pour la confiance qu'il m'a accordée, tout d'abord en acceptant ma candidature en master recherche « Image, Vision, Signal », puis en thèse. Tout au long de ces années, il s'est montré disponible et a su m'aider dans mes recherches en me guidant, m'inspirant, me conseillant et en m'encourageant. Je tiens à lui témoigner tout particulièrement ma reconnaissance.

Mes remerciements vont ensuite à mon co-directeur de thèse, Gilles FÉVOTTE, qui m'a fait confiance en me proposant de travailler avec lui sur des problématiques liées au génie des procédés, en stage de master recherche puis en thèse. Johan DEBAYLE et Ana CAMEIRAO, mes co-encadrants de thèse, m'ont consacré du temps et apporté une aide précieuse : merci Johan pour ta disponibilité et pour toutes les discussions constructives que nous avons pu avoir ensemble.

Je tiens aussi à témoigner ma gratitude à Françoise PRÊTEUX qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance et a lu avec attention mon travail. À Christian GERMAIN et à Ernest HIRSCH qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi qu'à Yvan MAILLOT d'avoir été examinateur. Ils ont tous contribué par leurs jugements, analyses, remarques et suggestions à enrichir mon travail et à ouvrir de nombreuses perspectives.

Je remercie mes collègues de l'équipe « Mathematical Imaging and Pattern Analysis » (MIPA), Mathieu FERNANDES, Yann GAVET, Hélène GOUINAUD, Marthe LAGARRIGUE, Laurent NAVARRO et Séverine RIVOLLIER pour leurs réponses à mes nombreuses questions et sollicitations, pour leurs encouragements et pour le temps qu'ils ont consacré aux discussions que nous avons eu ensemble. Mais également mes collègues du centre SPIN, en particulier Amina BOUCHEMOUA, Yamina OUABBAS qui m'a fait le plaisir de relire mon travail et surtout Nesrine GHERRAS qui m'a énormément aidé et encouragé durant ces trois années. J'ai apprécié leur sympathie, leur bonne humeur, leur soutien. Je souhaite à chacun beaucoup de bonheur et de satisfactions pour sa vie personnelle et professionnelle. Je n'oublie pas Françoise BRESSON, Stéphanie JAVELLE, Jérôme MANCUSO et Andrée-Aimée TOUCAS dont la disponibilité m'a été très précieuse. D'une manière plus générale, mes remerciements s'adressent à tous les membres des centres SPIN et CIS de l'EMSE que j'ai eu le plaisir de côtoyer quotidiennement et que j'ai appris à connaître et à apprécier.

Merci à tous mes amis, que malheureusement, je n'ai pas vu souvent pendant ces trois années, et tout particulièrement à ceux qui sont venus m'encourager lors de la soutenance : Martin, Sébastien, Gaston, Pedro, FX, Mathias, Chouchou, Émilie, Charlie, Tim, etc.

Je remercie enfin ma famille. Leurs encouragements, leur confiance et leur assistance morale ont contribué à m'aider à mener à bien ce projet. J'ai une pensée particulière pour ma maman qui m'a apporté son concours lors de la rédaction de cette thèse.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
Avant-propos . . . . .	xiii
Problématique pharmaceutique . . . . .	xiii
Problématique scientifique . . . . .	xiv
Contexte scientifique . . . . .	xiv
Objectif scientifique . . . . .	xiv
Aboutissement (pharmaceutique) . . . . .	xiv
<b>I Étude bibliographique</b>	<b>1</b>
<b>1 Les méthodes d’analyses granulométriques</b>	<b>5</b>
1.1 Les méthodes hors ligne . . . . .	6
1.1.1 Le tamisage . . . . .	6
1.1.2 La sédimentation . . . . .	6
1.1.3 Le compteur Coulter . . . . .	7
1.2 Les méthodes en ligne . . . . .	7
1.2.1 Les méthodes laser . . . . .	8
1.2.2 La spectroscopie acoustique . . . . .	8
1.2.3 La méthode de visualisation . . . . .	9
1.3 Conclusion . . . . .	9
<b>2 Caractérisations géométrique et morphométrique par analyse d’image</b>	<b>11</b>
2.1 Formation des images 2-D . . . . .	11
2.1.1 Le modèle sténopé . . . . .	11
2.1.2 Caméra Charge-Coupled Device . . . . .	14
2.1.3 Caméra projective finie . . . . .	14
2.1.4 Paramètres intrinsèques de la caméra . . . . .	14
2.1.5 Paramètres extrinsèques de la caméra . . . . .	15
2.1.6 Transformation 3-D - 2-D . . . . .	16
2.1.7 Transformation 2-D - 3-D . . . . .	16
2.2 Caractérisation géométrique . . . . .	17
2.2.1 Géométrie intégrale . . . . .	17
2.2.2 Fonctionnelles géométriques . . . . .	17
2.2.3 Géométrie différentielle et fractale . . . . .	17



2.2.4	Géométrie stochastique . . . . .	18
2.3	Caractérisation morphométrique . . . . .	18
2.3.1	Morphologie mathématique . . . . .	18
2.3.2	Spectre de forme . . . . .	19
2.3.3	Fonctionnelles morphométriques . . . . .	19
2.4	Conclusion . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Les méthodes stéréologiques</b>	<b>21</b>
3.1	Stéréologie en coupes . . . . .	21
3.2	Stéréologie projective . . . . .	23
3.2.1	Méthodes sans a priori sur la forme de l'objet 3-D . . . . .	24
3.2.2	Méthodes basées sur un modèle 3-D . . . . .	25
3.3	Conclusion . . . . .	26
<b>II</b>	<b>Concepts et outils utiles pour la thèse</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Le simulateur informatique</b>	<b>31</b>
4.1	Objets 3-D modélisés . . . . .	31
4.2	Projections 2-D d'un objet 3-D . . . . .	32
4.3	Conclusion . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Diagrammes de forme</b>	<b>35</b>
5.1	Fonctionnelles géométriques et morphométriques . . . . .	35
5.2	Les diagrammes de forme . . . . .	36
5.3	Conclusion . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Reconstruction d'une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points du plan</b>	<b>41</b>
6.1	LDA- $\alpha$ -shapes . . . . .	42
6.2	Sélection automatique du paramètre de contrôle $\alpha$ . . . . .	43
6.2.1	Quelle est la forme perçue d'un ensemble de points ? . . . . .	44
6.2.2	Le critère proposé . . . . .	45
6.2.3	Pertinence du critère proposé . . . . .	45
6.2.4	Évaluation quantitative de l'algorithme de sélection automatique du paramètre $\alpha$ . . . . .	48
6.3	Conclusion . . . . .	49
<b>III</b>	<b>Développement</b>	<b>51</b>
<b>7</b>	<b>Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D</b>	<b>55</b>
7.1	Fonction de densité de probabilité des aires projetées . . . . .	55
7.1.1	Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$ . . . . .	56
7.1.2	Détermination de la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$ . . . . .	57
7.1.3	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$ . . . . .	58

7.2	Maximum de vraisemblance de $a$ des fonctions de densité de probabilité des aires projetées	60
7.3	Problème d'optimisation . . . . .	61
7.4	Résultats . . . . .	63
7.4.1	Influence du paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	63
7.4.2	Influence du paramètre de taille $a$ . . . . .	64
7.5	Amélioration de la méthode proposée . . . . .	69
7.5.1	Fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés . . . . .	69
7.5.2	Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$	69
7.5.3	Détermination de la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	71
7.5.4	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	71
7.5.5	Maximum de vraisemblance de $a$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés . . . . .	75
7.5.6	Résultats . . . . .	75
7.6	Conclusion . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Estimation de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D</b>	<b>85</b>
8.1	Le descripteur de forme stéréologique proposé . . . . .	86
8.1.1	Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$	86
8.1.2	Détermination de la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	88
8.1.3	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	88
8.2	Propriétés du descripteur de forme stéréologique proposé . . . . .	92
8.2.1	Caractérisation géométrique du domaine de définition de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	92
8.2.2	Étude de la robustesse au bruit de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	93
8.3	Utilisation du descripteur de forme stéréologique proposé pour estimer le paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	94
8.3.1	Maximum de vraisemblance de $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées . . . . .	94
8.3.2	Problème d'optimisation . . . . .	95
8.3.3	Résultats . . . . .	95
8.4	Conclusion . . . . .	96
<b>9</b>	<b>Estimation de la taille et de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D</b>	<b>105</b>
9.1	Maximum de vraisemblance de $a$ et $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité des aires projetées et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées . . . . .	107
9.2	Problème d'optimisation . . . . .	107
9.3	Résultats . . . . .	107
9.3.1	Influence du paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	108
9.3.2	Influence du paramètre de taille $a$ . . . . .	108
9.4	Amélioration de la méthode proposée . . . . .	111

9.4.1	Maximum de vraisemblance de $a$ et $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées . . . . .	111
9.4.2	Résultats . . . . .	111
9.5	Conclusion . . . . .	113
<b>10</b>	<b>Comparaison de la méthode proposée à une méthode de stéréologie classique</b>	<b>117</b>
10.1	La méthode de stéréologie projective classique . . . . .	117
10.2	Résultats . . . . .	118
10.2.1	Influence du paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	119
10.2.2	Influence du paramètre de taille $a$ . . . . .	120
10.3	Conclusion . . . . .	120
<b>IV</b>	<b>Application aux processus de cristallisation</b>	<b>123</b>
<b>11</b>	<b>Problématique pharmaceutique</b>	<b>127</b>
11.1	Dispositif expérimental . . . . .	127
11.2	Détermination de la distribution granulométrique de particules d'oxalate d'ammonium	128
11.2.1	Comparaison de la méthode $3SE$ avec une méthode d'estimation de taille et de forme dite 2-D . . . . .	129
11.2.2	Comparaison de la méthode proposée avec le compteur Coulter . . . . .	132
11.3	Conclusion . . . . .	133
<b>V</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>139</b>
<b>12</b>	<b>Conclusion</b>	<b>143</b>
12.1	Conclusion générale . . . . .	143
12.2	Publications et communications . . . . .	144
12.2.1	Journaux à comité de lecture . . . . .	144
12.2.2	Conférences internationales à comité de lecture avec proceedings . . . . .	144
12.2.3	Conférences nationales à comité de lecture avec proceedings . . . . .	144
12.2.4	Autres communications . . . . .	145
<b>13</b>	<b>Perspectives</b>	<b>147</b>
13.1	Perspectives pratiques . . . . .	147
13.2	Perspectives théoriques . . . . .	147
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>149</b>

# Table des figures

1.1	Exemple de distribution granulométrique. . . . .	6
1.2	Tamiseuse. . . . .	7
1.3	Image 2-D de projection de particules 3-D présentes dans la suspension. . . . .	9
2.1	Modèle sténopé. . . . .	12
2.2	Sténopé - modèle général. . . . .	13
2.3	Caméra projective finie. . . . .	14
2.4	Relation entre le repère associé à la caméra et le repère monde. . . . .	15
3.1	Estimation du volume d'un objet 3-D par la méthode de Cavalieri [75]. . . . .	22
3.2	Coupe d'une sphère [78]. . . . .	22
3.3	Image de projection d'un ensemble de sphères polydisperses. . . . .	24
3.4	Modèle 3-D de Larsen et al. [97]. . . . .	26
4.1	Types d'objets modélisés au sein du simulateur. . . . .	31
4.2	Pavage aléatoire selon une loi uniforme d'une sphère. / Pavage régulier selon un modèle icosaédrique d'une sphère. . . . .	32
4.3	Projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) d'un cube de côté $a = 10$ . . . . .	33
5.1	Quelques fonctionnelles géométriques classiques d'un ensemble compact : rayons des cercles inscrits ( $r$ ) et circonscrits ( $R$ ), diamètres de Feret minimum ( $\omega$ ) et maximum ( $d$ ). 35	
5.2	Représentation de la famille $\mathcal{F}$ dans le diagramme de forme $\mathcal{D}_{12}$ . . . . .	39
6.1	Un ensemble de points du plan représentant un chameau. . . . .	41
6.2	Triangulation de Delaunay d'un ensemble de points. . . . .	43
6.3	LDA- $\alpha$ -shapes de l'ensemble de points haricot pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	44
6.4	Aire et périmètre de plusieurs enveloppes de LDA- $\alpha$ -shapes. En noir, l'enveloppe des LDA- $\alpha$ -shapes. . . . .	45
6.5	Échantillonnage de la forme « camel-15 » selon trois densités de points (faible, moyenne, forte) et deux lois de probabilités (uniforme, hétérogène). La forme de référence $S_{\text{camel-15}}$ est en rouge. . . . .	46
6.6	Trois images de la base KIMIA. La forme de référence de chacune de ces images est plus ou moins convexe. . . . .	47

7.1	Densités de probabilité des aires projetées pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	59
7.2	Projection de la base et du coté de l'objet de type cylindre. . . . .	64
7.3	Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . . . . .	65
7.4	Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . . . . .	66
7.5	Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	67
7.6	Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	68
7.7	$GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ pour trois parallélépipèdes rectangles : deux parallélépipèdes rectangles isotropes et un parallélépipède rectangle anisotrope ( $K = 2.621.442$ ). . . . .	70
7.8	Densités de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ . . . . .	72
7.9	Densités de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	73
7.10	Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . . . . .	77
7.11	Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . . . . .	78
7.12	Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	79

7.13	Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de $a$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	80
7.14	Boîtes à moustache des valeurs estimées de $a$ en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	83
8.1	$HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ pour trois parallélépipèdes rectangles : deux parallélépipèdes rectangles isotropes et un parallélépipède rectangle anisotrope ( $K = 2.621.442$ ). . . . .	87
8.2	Enveloppe du LDA- $\alpha_{opt}$ -shapes de $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ pour trois parallélépipèdes rectangles : deux parallélépipèdes rectangles isotropes et un parallélépipède rectangle anisotrope ( $K = 2.621.442$ ). . . . .	89
8.3	Densités de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ . . . . .	90
8.4	Densités de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	91
8.5	Première colonne : enveloppe du domaine de définition de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ pour les objets 3-D convexes de type ellipsoïde, cylindre et bipyramide de paramètres de forme $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ . Deuxième colonne : enveloppe du domaine de définition de l'ensemble des projections orthographiques pour les objets de type ellipsoïde, cylindre et bipyramide de paramètre de forme $\alpha_1 = 1$ , quelle que soit la valeur de $\alpha_2 \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ . . . . .	98
8.6	Première colonne : enveloppe du domaine de définition de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ pour les objets 3-D convexes de type parallélépipède rectangle et pyramide de paramètres de forme $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ . Deuxième colonne : enveloppe du domaine de définition de l'ensemble des projections orthographiques pour les objets de type parallélépipède rectangle et pyramide de paramètre de forme $\alpha_1 = 1$ , quelle que soit la valeur de $\alpha_2 \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ . . . . .	99
8.7	Évolution de l'aire et du périmètre du domaine de définition de $H_{CO,1,\alpha_2}$ en fonction de $\alpha_2$ ( $\alpha_2 \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ ) pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur. . . . .	100
8.8	Exemple de déformation. . . . .	100
8.9	Distributions des valeurs estimées de $\alpha_2$ et évolution de l'erreur relative moyenne $RME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1,m \rrbracket})$ en fonction du nombre de projections $n \in \{1, 2, 5, 10, 50\}$ pour l'objet de type parallélépipède rectangle de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 10$ . . . . .	101
8.10	Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de $\alpha_2$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de de forme $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ ( $\alpha_1 = 1$ ). . . . .	102
8.11	Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de $\alpha_2$ et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections $n$ pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de forme $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ ( $\alpha_1 = 1$ ). . . . .	103
9.1	Évolution de l'erreur relative moyenne $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1,m \rrbracket})$ en fonction du nombre de projections $n$ pour l'objet de type parallélépipède rectangle de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . . . . .	106

9.2 Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . 109

9.3 Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . . 110

9.4 Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . . . . . 112

9.5 Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . . 114

10.1 Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d'objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . Les courbes en trait plein représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ . . . . . 119

10.2 Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d'objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . Les courbes en trait plein représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ . . . . . 120

10.3 Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d'objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . Les courbes en trait plein représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ . . . . . 121

10.4 Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimés en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d'objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . Les courbes en trait plein représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ . . . . . 121

11.1 Système expérimental. . . . . 128

11.2 Images de particules d'acide citrique. Entouré en rouge, la même particule sur quatre images successives. . . . . 128

11.3	Image 2-D en niveaux de gris de particules d'oxalate d'ammonium prise par la sonde <i>EZProbe</i> durant un processus de cristallisation. . . . .	129
11.4	Image de particules d'oxalate d'ammonium segmentée grâce à l'algorithme [2]. . . . .	130
11.5	Distributions de taille des particules d'oxalate d'ammonium calculées à trois instants différents de l'expérience de cristallisation étudiée et par deux méthodes différentes ( $t_0$ désigne le début de la nucléation, $\Delta t = 2/60$ minutes). . . . .	134
11.6	Évolution de l'erreur relative moyenne entre le volume réel et les volumes estimés en fonction du paramètre de forme $\alpha_2$ ( $n = 1$ projection). Les objets 3-D étudiés sont de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . En bleu, l'erreur $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{2D}^i\}_{i \in [1, m]})$ en fonction de $\alpha_2$ . En rouge, l'erreur $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in [1, m]})$ en fonction de $\alpha_2$ . . . . .	135
11.7	Évolution du nombre normalisé (%) de volumes sous-estimés (courbe bleue), sur-estimés (courbe rouge) et estimés exactement (courbe verte) grâce à la méthode 2-D en fonction du paramètre de forme $\alpha_2$ . Les objets 3-D étudiés sont de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . D'un point de vue statistique, la méthode 2-D n'estime « jamais » correctement le volume d'un objet 3-D de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , car la projection formant un carré de côté $a = 10$ est très peu probable. . . . .	135
11.8	Évolution du nombre normalisé (%) de volumes sous-estimés (courbes bleues), sur-estimés (courbes rouges) et estimés exactement (courbes vertes) grâce à la méthode 3SE en fonction du nombre de projection $n$ . Les objets 3-D étudiés sont de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . . . . .	136
11.9	Distributions de taille des particules d'oxalate d'ammonium au début du processus de cristallisation. En bleu, la distribution de taille calculée grâce à la méthode 3SE. En rouge, la distribution de taille calculée grâce au compteur Coulter. . . . .	137





# Liste des tableaux

5.1	Les fonctionnelles géométriques et morphométriques. $A$ , $P$ , $r$ , $R$ , $\omega$ et $d$ désignent l'aire, le périmètre, les rayons des cercles inscrits et circonscrits, les diamètres de Feret minimum et maximum, respectivement [147] [148] [149]. . . . .	36
5.2	Les trente et un diagrammes de forme. . . . .	38
6.1	Évaluation du critère proposé sur trois images plus ou moins convexes. L'erreur moyenne $\mu_{I_i}$ est en pourcentage et est calculée pour trois densités de points (faible, moyenne, forte) et deux lois de probabilités (uniforme, hétérogène). $\sigma_{I_i}$ désigne l'écart-type. . . . .	47
6.2	Évaluation quantitative de l'algorithme de sélection automatique du paramètre $\alpha$ sur la base d'images KIMIA. L'erreur moyenne $\mu$ est exprimée en pourcentage et est calculée pour trois densités de points (faible, moyenne, forte) et deux lois de probabilités (uniforme, hétérogène). $\sigma$ désigne l'écart-type. . . . .	48
7.1	Expression des aires projetées minimum et maximum en fonction des paramètres $a$ et $\alpha_2$ pour les objets de type ellipsoïde, cylindre et parallélépipède rectangle ( $\alpha_1 = 1$ ) [191].	56
7.2	Expression des aires projetées minimum et maximum en fonction des paramètres $a$ et $\alpha_2$ pour les objets de type bipyramide et pyramide. Contrairement aux expressions du tableau 7.1, ces expressions ont été conjecturées et n'ont pas été démontrées analytiquement. . . . .	56
7.3	Comparaisons des aires projetées minimum (maximum, respectivement) conjecturées aux aires projetées minimum (maximum, respectivement) simulées pour les objets de type bipyramide et pyramide de paramètres de taille $a \in \{1, 100\}$ et de paramètres de forme $\alpha_2 \in \{1, 50\}$ ( $\alpha_1 = 1$ ). . . . .	57
7.4	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $f_{CO,a,\alpha_2}$ pour l'objet de type ellipsoïde ( $N = 1.000.000$ ). . . . .	58
7.5	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $f_{CO,a,\alpha_2}$ pour l'objet de type cylindre ( $N = 1.000.000$ ). . . . .	60
7.6	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $f_{CO,a,\alpha_2}$ pour l'objet de type bipyramide ( $N = 1.000.000$ ). . . . .	60
7.7	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $f_{CO,a,\alpha_2}$ pour l'objet de type parallélépipède rectangle ( $N = 1.000.000$ ). . . . .	60
7.8	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $f_{CO,a,\alpha_2}$ pour l'objet de type pyramide ( $N = 1.000.000$ ). . . . .	60

7.9	Valeurs de $M_{CO}$ pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille $a = 10$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 50$ . . . . .	62
7.10	Valeurs de $M_{CO}$ pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille $a = 15$ et de paramètres de forme $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . . . . .	63
7.11	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ pour l'objet de type ellipsoïde ( $N = 5.000.000$ ). . . . .	74
7.12	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ pour l'objet de type cylindre ( $N = 5.000.000$ ). . . . .	74
7.13	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ pour l'objet de type bipyramide ( $N = 5.000.000$ ). . . . .	74
7.14	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ pour l'objet de type parallélépipède rectangle ( $N = 5.000.000$ ). . . . .	74
7.15	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer numériquement $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ pour l'objet de type pyramide ( $N = 5.000.000$ ). . . . .	75
8.1	Validation du nombre de projections $N$ ( $N = 10.000.000$ ) utilisé pour générer numériquement $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . L'erreur $MVE$ est exprimée en pourcentage. . . . .	92
8.2	Robustesse au bruit - Valeurs de l'erreur moyenne $MNE$ pour l'objet de type parallélépipède rectangle de paramètres de forme $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10\}$ . Le symbole $x$ signifie que pour une telle valeur de $PSNR$ et une telle valeur de $\alpha_2$ la déformation est trop importante, <i>i.e.</i> (Parallélépipède rectangle <sub>noisy</sub> , $\alpha'_1, \alpha'_2$ ) n'est pas toujours convexe. $MNE$ est exprimé en pourcentage. . . . .	94

# Introduction

## Avant-propos

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire des Procédés en Milieux Granulaires (LPMG, UMR CNRS 5148) de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne.

## Problématique pharmaceutique

**Remarque 0.1** *Ce travail fait suite au projet « Improving the Properties of Active Pharmaceutical Ingredients (IPAPI) » financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), ref. 07-BLAN-0183 [143] [144] [139].*

Initialement, cette étude a été motivée par une problématique pratique dans le domaine pharmaceutique. Celle-ci concerne l'amélioration de la qualité des médicaments et plus particulièrement l'amélioration du contrôle du procédé permettant de former les principes actifs : la cristallisation en solution. La cristallisation, au sens large du terme, est un changement d'état qui conduit, à partir d'une phase gazeuse ou liquide, à un solide de structure régulière et organisée, appelé cristal. La cristallisation en solution est une opération de séparation et de purification se déroulant au sein d'un cristalliseur qui a pour but de produire des solides avec des propriétés spécifiques. Elle dépend de plusieurs paramètres (température, sursaturation, etc.) qui influent grandement sur la taille et la forme des solides produits. Or, la taille et la forme des principes actifs pharmaceutiques ont un impact considérable sur la qualité finale des médicaments (efficacité thérapeutique, biodisponibilité, stabilité pendant le stockage, etc.). Il est donc primordial d'être capable de déterminer en temps réel la distribution granulométrique des solides en formation, pour pouvoir, si besoin est, modifier les paramètres opératoires permettant d'obtenir la géométrie cristalline désirée (forme, taille des particules, etc.). Pour ce faire, plusieurs méthodes de suivi granulométrique existent. Elles peuvent être classées en deux catégories : les méthodes dites en ligne et les méthodes dites hors ligne. Les méthodes en ligne permettent, grâce à un capteur installé au niveau du réacteur de cristallisation, de caractériser en temps réel la taille des solides présents dans la suspension. Les méthodes hors ligne permettent elles aussi de déterminer la taille des solides en formation, mais nécessitent pour cela que soit prélevé un échantillon de la solution. Ce prélèvement est très délicat, car il faut éviter la ségrégation hydrodynamique des grosses particules lors du prélèvement. Par ailleurs, les solides peuvent continuer à évoluer s'ils ne sont pas correctement filtrés, lavés et séchés. Ils sont susceptibles de se dégrader, de s'agglomérer ou encore de subir une transition de phase. C'est pourquoi, les méthodes de mesure en ligne sont privilégiées et plus particulièrement les méthodes d'analyse d'image. En effet, grâce à une caméra installée dans le cristalliseur, il est possible de visualiser en temps réel l'évolution en taille, mais aussi en forme, des

solides présents dans la suspension. Plus précisément, les capteurs d'analyse d'image permettent de visualiser en deux dimensions (2-D) les solides en trois dimensions (3-D) présents dans le réacteur. L'objectif premier de cette thèse est donc de réussir à déterminer la distribution granulométrique 3-D au cours du temps, à partir d'images 2-D de projections, des solides se formant lors d'un processus de cristallisation.

## **Problématique scientifique**

La projection d'un objet 3-D sur un plan 2-D entraîne nécessairement une perte d'informations. De plus, plusieurs objets 3-D distincts peuvent avoir la même projection 2-D. Déterminer la taille et la forme d'un objet 3-D à partir d'une ou plusieurs de ses projections 2-D n'est donc pas aisé. C'est tout l'enjeu de ce travail : mettre en place des méthodes génériques et efficaces permettant de caractériser géométriquement et morphométriquement des objets 3-D à partir de leurs projections 2-D.

## **Contexte scientifique**

Face à ces problématiques, une recherche bibliographique a initialement été effectuée sur les méthodes permettant de déterminer la distribution de taille des solides produits durant un processus de cristallisation. Ce travail bibliographique a favorisé la compréhension de la problématique pharmaceutique et s'est naturellement orienté vers les approches d'analyse d'image et de stéréologie. Cette étude préliminaire, ainsi que des rappels sur la formation des images 2-D, ont finalement abouti à la première partie de ce manuscrit : « Étude bibliographique ».

## **Objectif scientifique**

L'objectif de cette thèse est de mettre en place des méthodes génériques et efficaces permettant d'estimer la « taille » et la « forme » d'un objet 3-D à partir de ses projections 2-D, tout en veillant évidemment à la pertinence applicative. Après avoir exposé dans la deuxième partie de ce manuscrit quelques « Concepts et outils utiles pour la thèse », ces contributions génériques et originales sont introduites dans la troisième partie : « Développement ».

## **Aboutissement (pharmaceutique)**

Afin d'apporter une réponse à la problématique pharmaceutique, les différents apports précédemment établis (partie III) sont appliqués aux problèmes concrets d'estimation de taille et de forme des solides produits durant un processus de cristallisation. La quatrième partie de ce manuscrit, « Application aux processus de cristallisation », répond à la problématique initiale de cette thèse par l'estimation de distributions granulométriques de particules en suspension. Cette organisation du manuscrit permet de souligner le caractère générique des différentes contributions de la partie « Développement ».

Enfin, la cinquième partie, « Conclusion et perspectives », expose une conclusion générale ainsi que plusieurs perspectives.

Première partie

Étude bibliographique



# Sommaire de la Première partie

---

<b>1</b>	<b>Les méthodes d'analyses granulométriques</b>	<b>5</b>
1.1	Les méthodes hors ligne . . . . .	6
1.1.1	Le tamisage . . . . .	6
1.1.2	La sédimentation . . . . .	6
1.1.3	Le compteur Coulter . . . . .	7
1.2	Les méthodes en ligne . . . . .	7
1.2.1	Les méthodes laser . . . . .	8
1.2.2	La spectroscopie acoustique . . . . .	8
1.2.3	La méthode de visualisation . . . . .	9
1.3	Conclusion . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Caractérisations géométrique et morphométrique par analyse d'image</b>	<b>11</b>
2.1	Formation des images 2-D . . . . .	11
2.1.1	Le modèle sténopé . . . . .	11
2.1.2	Caméra Charge-Coupled Device . . . . .	14
2.1.3	Caméra projective finie . . . . .	14
2.1.4	Paramètres intrinsèques de la caméra . . . . .	14
2.1.5	Paramètres extrinsèques de la caméra . . . . .	15
2.1.6	Transformation 3-D - 2-D . . . . .	16
2.1.7	Transformation 2-D - 3-D . . . . .	16
2.2	Caractérisation géométrique . . . . .	17
2.2.1	Géométrie intégrale . . . . .	17
2.2.2	Fonctionnelles géométriques . . . . .	17
2.2.3	Géométrie différentielle et fractale . . . . .	17
2.2.4	Géométrie stochastique . . . . .	18
2.3	Caractérisation morphométrique . . . . .	18
2.3.1	Morphologie mathématique . . . . .	18
2.3.2	Spectre de forme . . . . .	19
2.3.3	Fonctionnelles morphométriques . . . . .	19
2.4	Conclusion . . . . .	19



<b>3</b>	<b>Les méthodes stéréologiques</b>	<b>21</b>
3.1	Stéréologie en coupes . . . . .	21
3.2	Stéréologie projective . . . . .	23
3.2.1	Méthodes sans a priori sur la forme de l'objet 3-D . . . . .	24
3.2.2	Méthodes basées sur un modèle 3-D . . . . .	25
3.3	Conclusion . . . . .	26

---

# Chapitre 1

## Les méthodes d'analyses granulométriques

Ce chapitre a pour objet de présenter les différentes méthodes utilisées en vue de l'estimation de distributions granulométriques de particules en suspension au cours du temps. La cristallisation, au sens large du terme (en phase gazeuse, en bain fondu, en solution), est un changement d'état qui conduit, à partir d'une phase gazeuse ou liquide, à un solide de structure régulière et organisée, appelé cristal. Dans l'industrie, la cristallisation est une opération unitaire de génie chimique très importante qui, à l'aide de procédés très variés, conduit à des solides de natures très diverses. Les particules produites industriellement doivent répondre à des spécifications bien déterminées comme le faciès, la pureté, la solidité, la taille car leurs propriétés physiques et par conséquent leurs propriétés d'usage (filtrabilité, coulabilité, etc.) en dépendent. Il est donc primordial d'être capable de caractériser en particulier la taille et la forme des solides en formation pour pouvoir, si besoin est, modifier les paramètres opératoires du processus de cristallisation (température, sursaturation, etc.) permettant d'obtenir la géométrie cristalline désirée (forme, taille des particules, etc.).

L'analyse granulométrique est l'opération consistant à étudier la répartition des différentes particules d'un échantillon suivant leurs caractéristiques (masse, taille, etc.). Le résultat de cette analyse, appelée distribution granulométrique/distribution granulométrique des particules ou encore distribution de taille/distribution de taille des particules (PSD : Particle Size Distribution), est généralement présenté sous la forme d'un tableau de distribution ou bien d'un histogramme normalisé. La figure 1.1 montre un exemple de distribution granulométrique où le nombre de particules est représenté en fonction de la taille. Plus précisément, l'échantillon de la figure 1.1 comprend :

- 20% de particules dont la taille est comprise entre 0 et 10 micromètres.
- 10% de particules dont la taille est comprise entre 10 et 20 micromètres.
- 70% de particules dont la taille est comprise entre 40 et 50 micromètres.

Ce type de distribution, appelé distribution granulométrique en nombre, est le plus couramment employé. Néanmoins, une distribution granulométrique peut également être exprimée à l'aide d'autres paramètres, *i.e.* masse des particules en fonction de la taille, nombre de particules en fonction du volume, etc.

Afin de déterminer la distribution de taille des particules produites au cours du temps lors d'un processus de cristallisation, de nombreuses méthodes d'analyses basées sur des principes physiques variés [89] [202] [161] peuvent être utilisées :

Taille des particules ( $\mu m$ )	Nombre (%)
[0 ;10[	20
[10 ;20[	10
[20 ;30[	0
[30 ;40[	0
[40 ;50]	70

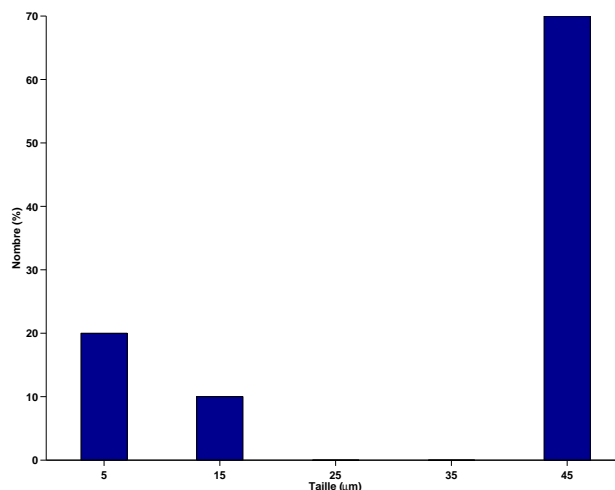


Figure 1.1 – Exemple de distribution granulométrique.

- les méthodes séparatives comme le tamisage, la sédimentation, etc ;
- les méthodes à variation de résistance électrique (zone électrique sensible) comme le compteur Coulter ;
- les méthodes basées sur la diffraction, diffusion, réflexion ou l'absorption d'un rayonnement ;
- les méthodes acoustiques où les spectres d'atténuation d'ondes acoustiques sont analysés ;
- les méthodes de visualisation couplées à des algorithmes d'analyse d'image.

La caractérisation de la phase dispersée pouvant se faire de manière continue (capteurs en ligne) ou discontinue (prélèvement d'un échantillon), les méthodes d'analyse granulométrique peuvent être regroupées en méthodes dites en ligne et méthodes dites hors ligne.

## 1.1 Les méthodes hors ligne

Les méthodes séparatives et à variation de résistance électrique sont des méthodes exclusivement hors ligne alors que les autres méthodes citées précédemment peuvent aussi bien être utilisées hors ligne qu'en ligne.

### 1.1.1 Le tamisage

Le tamisage est une des méthodes de mesure granulométrique les plus simples à mettre en œuvre et une des plus employées, notamment dans l'industrie pharmaceutique. Le principe de la méthode réside dans l'aptitude d'une particule à traverser les mailles d'un tamis de dimension donnée. Les tamis sont empilés les uns sur les autres par maille de dimension décroissante, les mailles les plus fines se trouvant en bas (figure 1.2). Il fournit une distribution granulométrique en masse (masse des particules en fonction de la taille). La taille mesurée est la taille de la maille du tamis bloquant le passage de la particule, ce qui peut être problématique pour des particules anisotropes.

### 1.1.2 La sédimentation

La méthode de sédimentation consiste à mesurer la vitesse de chute des particules dans un fluide (liquide ou gaz) sous l'influence de la gravité ou d'une force centrifuge. La taille des particules est liée à la vitesse de chute par l'équation de Stokes. Cette équation n'étant en toute rigueur valable que



Figure 1.2 – Tamiseuse.

pour des particules sphériques, la méthode de sédimentation n'est pas facile à adapter au traitement de particules anisotropes.

### 1.1.3 Le compteur Coulter

Le compteur Coulter est un appareil très utilisé en biologie pour dénombrer et estimer la taille de cellules sanguines, d'algues microscopiques, etc. L'échantillon de particules à analyser est dispersé dans un électrolyte contenu dans un récipient. Un tube percé d'un orifice calibré est plongé dans l'électrolyte. Deux électrodes en platine sont disposées de part et d'autre de la paroi du tube et sont traversées par un courant électrique. Lorsqu'une particule est aspirée par l'orifice, elle déplace son propre volume d'électrolyte et change ainsi la résistance électrique entre les deux électrodes. Cette variation de résistance dépend du volume de la particule. La taille mesurée représente approximativement le volume de la particule. Par rapport aux méthodes citées précédemment, le compteur Coulter peut être utilisé pour estimer la taille de particules non sphériques, ce qui est un avantage indéniable. De plus, mesurant un volume, il donne accès à une mesure 3-D.

## 1.2 Les méthodes en ligne

Les méthodes en ligne requièrent l'installation d'un capteur au niveau du cristalliseur. Elles permettent de s'affranchir des prélèvements d'échantillons et fournissent une information riche puisqu'il devient possible de déterminer la distribution granulométrique des particules en temps réel. Il s'agit des méthodes de granulométrie laser, des méthodes acoustiques et des méthodes basées sur l'analyse d'image.

### 1.2.1 Les méthodes laser

#### La diffraction laser

Le principe de cette méthode est fondé sur le phénomène de diffraction engendré par une particule située sur la trajectoire d'un faisceau laser. Plus la particule est petite, plus l'angle de diffraction est important. L'analyse de la répartition angulaire de l'intensité lumineuse diffractée et l'utilisation de la théorie de Fraunhofer, ou de la théorie de Mie, permettent de relier la taille de la particule à son spectre de diffraction. La théorie de Fraunhofer s'applique lorsque la taille de la particule est supérieure à la longueur d'onde de la lumière incidente. Lorsque la taille de la particule est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde incidente, c'est la théorie de Mie qui prévaut. Pour un ensemble de particules de tailles différentes, les spectres de diffraction de chaque particule se superposent et forment un spectre de diffraction global. En considérant que le spectre de diffraction global est la somme des spectres de diffraction de chaque particule, la distribution granulométrique des particules peut être déterminée, exprimée en volume en fonction d'un diamètre équivalent. Les théories de Fraunhofer et de Mie n'étant rigoureusement valables que pour des particules sphériques, la méthode de diffraction laser n'est pas adaptée au traitement de particules anisotropes [81].

#### La turbidimétrie

Cette technique, connue depuis de nombreuses années, s'appuie sur les principes de transmission et de rétrodiffusion de la lumière. La lumière transmise à travers une suspension dépend de la concentration en particules. Pour de faibles concentrations, l'intensité transmise peut être déterminée par la loi de Beer-Lambert-Bouguer. La mesure de l'intensité transmise à différentes longueurs d'ondes permet ainsi, via un processus d'inversion, de remonter à la concentration des particules, mais aussi à la distribution de taille des particules, moyennant l'hypothèse de la sphéricité. Dans le cas contraire, l'orientation des particules dans la suspension doit être aléatoire et leurs facteurs d'anisotropie connus [37] [62].

Dans le cas de milieux concentrés, la mesure porte sur le rayonnement rétrodiffusé et non plus sur le rayonnement transmis.

#### La réflexion laser - Focused Beam Reflectance Measurement (FBRM)

Le principe de cette méthode est fondé sur le phénomène de réflexion engendré par une particule située sur la trajectoire d'un faisceau laser en mouvement, de vitesse connue. En mesurant le temps pendant lequel la particule réfléchit le faisceau laser, la longueur pendant laquelle il y a réflexion en est déduite. Cette longueur est appelée longueur de corde. Pour un ensemble de particules, une distribution de longueur de corde est obtenue. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir s'appliquer à des particules non sphériques. Cependant, la conversion des longueurs de corde en taille est un problème complexe, limitant son champ d'application à des objets 3-D simples [77] [201] [99] [100].

### 1.2.2 La spectroscopie acoustique

Cette méthode repose sur le principe suivant : les ondes acoustiques planes se propageant dans une suspension subissent une atténuation (diminution de l'énergie acoustique) en fonction de la taille des particules (supposées sphériques), de la concentration, de la distance entre l'émetteur et le récepteur,

etc. En émettant des ondes acoustiques à des fréquences variables, un spectre d'atténuation est déterminé et la distribution granulométrique des particules est calculée à partir de ce spectre [126]. La qualité de la distribution de taille des particules ainsi calculée dépend de la validité des équations modélisant les mécanismes d'atténuation, de la précision des constantes physiques ou physicochimiques du modèle et de la méthode de déconvolution du spectre d'atténuation. La détermination de ces constantes physiques/physicochimiques et la nécessité d'une hypothèse a priori sur le type de distribution granulométrique (normale, log-normale, etc.) et la forme des particules, constituent les principales limites de cette méthode [127].

### 1.2.3 La méthode de visualisation

Grâce à une caméra placée au niveau du cristalliseur, cette méthode permet de visualiser en temps réel, les particules présentes dans la suspension. La caméra permet l'acquisition d'images 2-D numériques en niveaux de gris de particules 3-D. Plus précisément, elle acquiert des images 2-D de projections de particules 3-D (figure 1.3). En recourant à des algorithmes d'analyse d'image, il est possible

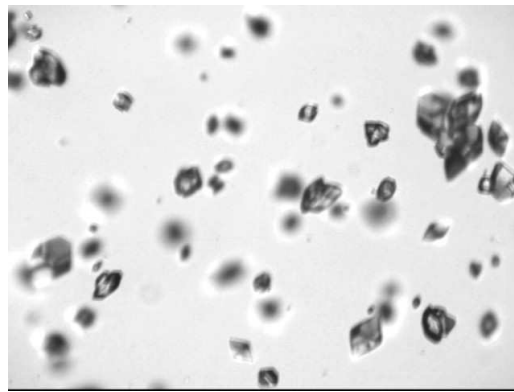


Figure 1.3 – Image 2-D de projection de particules 3-D présentes dans la suspension.

de segmenter [28] [208] [96] [195] [158] les particules visualisées, de caractériser à la fois leurs tailles et leurs formes [197] [27] [101] [207] et ainsi d'en déduire une distribution granulométrique [26] [196] [195]. L'analyse d'image peut s'appliquer quelle que soit la forme des particules étudiées. Elle permet d'accéder à une caractérisation 2-D des particules projetées, voire à une caractérisation 3-D des particules. Cependant, pour obtenir une caractérisation 3-D, une extrapolation des mesures effectuées sur les images 2-D est nécessaire.

## 1.3 Conclusion

Pour suivre l'évolution temporelle de la distribution granulométrique de particules se formant lors d'un processus de cristallisation, deux types de méthodes peuvent être utilisés : les méthodes dites hors ligne et les méthodes dites en ligne. Les méthodes hors ligne nécessitent d'effectuer des prélèvements de la solution à intervalles de temps réguliers, afin de les analyser, alors que les méthodes en ligne permettent, grâce à un capteur installé au niveau du cristalliseur, de caractériser en temps réel la taille des solides en suspension. Outre les défauts intrinsèques des méthodes hors ligne mentionnées précédemment, il s'avère qu'effectuer un prélèvement de la solution est assez problématique. Lors du prélèvement, il faut en effet éviter la ségrégation hydrodynamique des grosses particules. Par

ailleurs, les solides peuvent continuer à évoluer s'ils ne sont pas correctement filtrés, lavés et séchés. Ils sont susceptibles de se dégrader, de s'agglomérer ou encore de subir une transition de phase. C'est pourquoi, il est préférable de recourir aux méthodes de mesure en ligne. D'une manière générale, toutes les méthodes en ligne, exception faite des méthodes FBRM et de spectroscopie acoustique, ne peuvent pas évaluer la distribution granulométrique des particules au delà d'un certain taux de solide. De plus, elles ne permettent de caractériser les particules qu'indirectement. En effet, la taille 3-D est estimée à partir d'un modèle mathématique (méthodes laser, spectroscopie acoustique, etc.) impliquant généralement la formulation d'hypothèses fortes relatives à la forme des particules étudiées.

La méthode de visualisation en ligne couplée à des algorithmes d'analyse d'image est cependant un outil particulièrement intéressant dans le suivi des procédés de cristallisation car, contrairement aux autres méthodes, elle permet non seulement de visualiser les particules en suspension mais aussi donne accès à la fois à la taille et à la forme des particules projetées.

## Chapitre 2

# Caractérisations géométrique et morphométrique par analyse d'image

Dans le chapitre précédent, de nombreuses méthodes d'analyses granulométriques de particules en suspension ont été abordées. Parmi ces méthodes, l'analyse d'image 2-D s'est révélée comme étant la plus intéressante. L'objectif du présent chapitre est donc de présenter les différents outils permettant de caractériser des images / objets 2-D. Après une brève introduction où sont synthétisés quelques rappels portant sur le processus de formation d'une image 2-D, les outils permettant de caractériser géométriquement et morphométriquement une image ou un objet 2-D sont présentés.

### 2.1 Formation des images 2-D

Les concepts introduits dans cette section sont basés principalement sur quatre livres de référence [56] [183] [58] [67]. D'un point de vue géométrique, une caméra établit une correspondance entre un point 3-D de l'espace (trois composantes) et un point 2-D de l'image (deux composantes). Le modèle géométrique le plus simple établissant cette correspondance est le modèle appelé sténopé.

#### 2.1.1 Le modèle sténopé

##### Le modèle simplifié

D'un point de vue physique, les rayons de lumière entrent dans la caméra à travers un « petit orifice » et l'intersection de ces rayons avec le plan image forme l'image de l'objet 3-D (figure 2.1(a)).

D'un point de vue géométrique (figure 2.1(b)) : soient  $O$  le centre de la caméra, aussi appelé centre de projection, et  $(O, X_1, X_2, X_3)$  un système de coordonnées orthogonal tel que la caméra pointe dans la direction de  $X_3$  ( $X_3$  est appelé l'axe optique de la caméra). Le plan image est le plan parallèle aux axes  $X_1, X_2$  situé à une distance  $-f$  ( $f > 0$ ) de  $O$ , où  $f$  est la distance focale de la caméra.  $I$ , le point d'intersection entre l'axe optique et le plan image, est appelé le centre de l'image. Comme l'indique la figure 2.1(b),  $Q$ , l'image du point  $P$  (un point quelconque de l'espace), est le point d'intersection entre la droite  $PO$  et le plan image. Si  $P$  a pour coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  dans le repère  $(O, X_1, X_2, X_3)$  et  $Q$  (l'image du point  $P$ ) pour coordonnées  $(i_1, i_2)$  dans le repère  $(I, I_1, I_2)$  alors  $P$  et  $Q$  sont reliés par les équations suivantes :



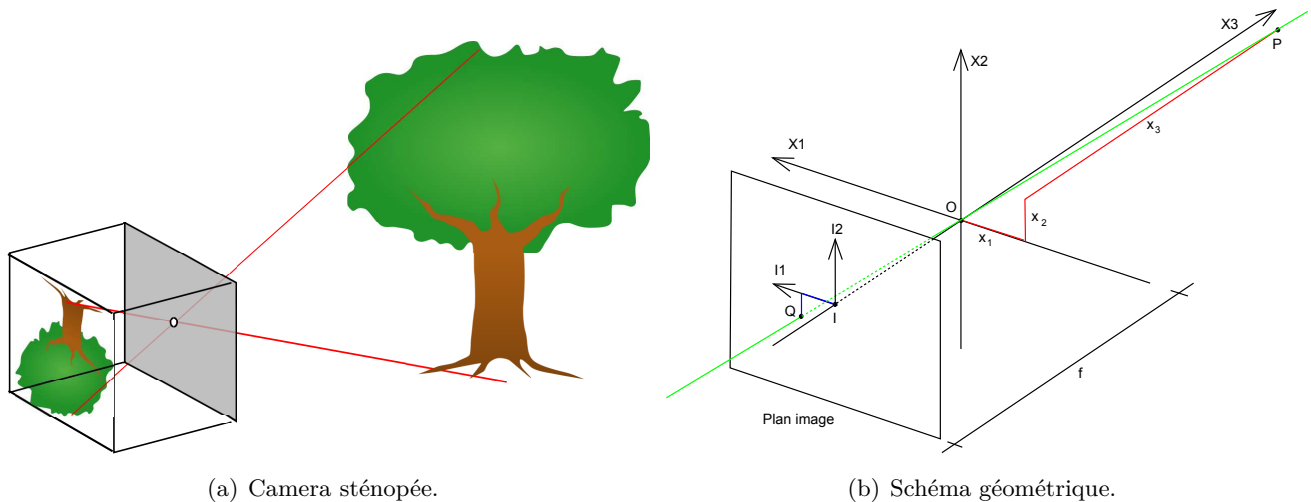


Figure 2.1 – Modèle sténopé.

$$i_1 = -\frac{f}{x_3}x_1 \quad (2.1)$$

$$i_2 = -\frac{f}{x_3}x_2 \quad (2.2)$$

En passant en coordonnées homogènes, ce système s'écrit matriciellement comme suit :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

L'image d'un objet 3-D de la scène par la caméra produit une image inversée de celui-ci (figure 2.1(a)). Pour créer une image non inversée, il est possible :

1. d'effectuer une rotation de  $\pi$  radians du repère  $(I, I1, I2)$  ;
2. de placer le plan image à une distance  $f$  (au lieu de  $-f$ ) de  $(O, X1, X2, X3)$ . Ce nouveau plan image (plan image virtuel), qui ne peut être implémenté en pratique, fournit une caméra théorique plus simple à analyser.

Dans les deux cas,  $P$  et  $Q$  sont désormais reliés par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Il est important de noter qu'en raison du facteur  $\frac{1}{x_3}$  cette transformation 3-D - 2-D, appelée projection en perspective, n'est pas linéaire et la projection d'un point n'est pas unique (tous les points de la droite  $PO$  ont la même projection). De plus, elle ne conserve ni les distances, ni les angles et la taille

d'un objet sur l'image est inversement proportionnelle à sa distance du centre  $O$ .

Si la distance le long de l'axe optique entre deux points quelconques de la scène (la profondeur de la scène) est beaucoup plus petite que la distance moyenne  $\bar{x}_3$  des points à la caméra, alors l'équation précédente peut s'approximer de la manière suivante (équation 2.5) :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Contrairement à la projection en perspective, ce type de projection, appelé projection en perspective faible, est linéaire ( $\frac{1}{\bar{x}_3}$  est un coefficient constant).

Enfin, si  $\frac{f}{x_3} \rightarrow 1$ ,  $P$  et  $Q$  sont reliés par les équations suivantes (équation 2.6) :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Ce type de projection, appelé projection orthographique, possède des propriétés intéressantes : contrairement aux projections précédentes, les distances et les angles sont conservés et la taille des objets ne varie pas en fonction de leurs distances à la caméra.

### Le modèle général

L'équation de la caméra sténopée simplifiée (équation 2.4) suppose que l'origine du repère  $(I, I_1, I_2)$  soit au centre de l'image. Or, en pratique, ce n'est pas le cas (figure 2.2). Si  $(i'_{10}, i'_{20})$  sont les coordon-

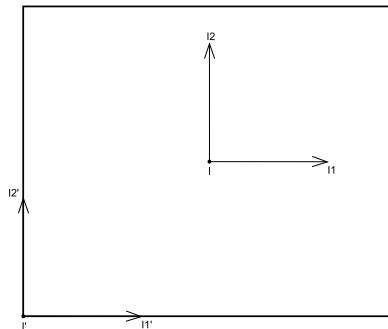


Figure 2.2 – Sténopé - modèle général.

nées du centre de l'image dans le repère  $(I', I_1', I_2')$  et  $(i'_1, i'_2)$  les coordonnées de  $Q$  dans ce repère, alors :

$$\begin{aligned} i'_1 &= \frac{f}{x_3} x_1 + i'_{10} \\ i'_2 &= \frac{f}{x_3} x_2 + i'_{20} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & i'_{10} & 0 \\ 0 & f & i'_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Caméra Charge-Coupled Device

Dans le cas de caméras Charge-Coupled Device (CCD), les coordonnées des points sont exprimées en pixels (au lieu des mètres par exemple) et de plus ces pixels ne sont pas forcément carrés. Si  $k$  est le nombre de pixels par unité de longueur dans la direction  $I1$  et  $l$  le nombre de pixels par unité de longueur dans la direction  $I2$ , l'équation 2.7 devient :

$$\begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kf & 0 & ki'_{10} & 0 \\ 0 & lf & li'_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Caméra projective finie

Dans le cas d'une caméra projective finie, le repère  $(I', I1', I2')$  n'est pas orthogonal (il existe un angle  $\theta$  entre les axes  $I1'$  et  $I2'$ ) (figure 2.3), l'équation 2.8 devient alors :

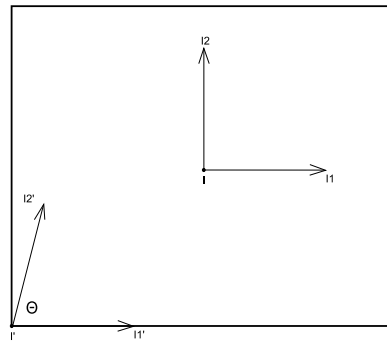


Figure 2.3 – Caméra projective finie.

$$\begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \tan \theta & u_1 & 0 \\ 0 & \beta & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

où  $\alpha = kf$ ,  $\beta = lf$ ,  $u_1 = ki'_{10}$  et  $u_2 = li'_{20}$

### 2.1.4 Paramètres intrinsèques de la caméra

La matrice  $K = \begin{pmatrix} \alpha & \tan \theta & u_1 \\ 0 & \beta & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , appelée matrice de calibration de la caméra, représente les paramètres intrinsèques de celle-ci. Pour une distance focale fixée et une caméra donnée, ces paramètres

sont constants. Dans le cas d'une caméra projective finie, ces paramètres sont au nombre de 5 ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ), dans le cas d'une caméra CCD, ils sont au nombre de 4 ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ) et enfin dans le cas de la caméra sténopée ils sont au nombre de 3 ( $f$ ,  $i'_{10}$ ,  $i'_{20}$ ).

### 2.1.5 Paramètres extrinsèques de la caméra

En général les points de la scène ne sont pas exprimés dans le repère associé à la caméra ( $O, X1, X2, X3$ ), mais dans un autre repère de l'espace ( $W, W1, W2, W3$ ) appelé repère monde (figure 2.4). Soit  $P =$

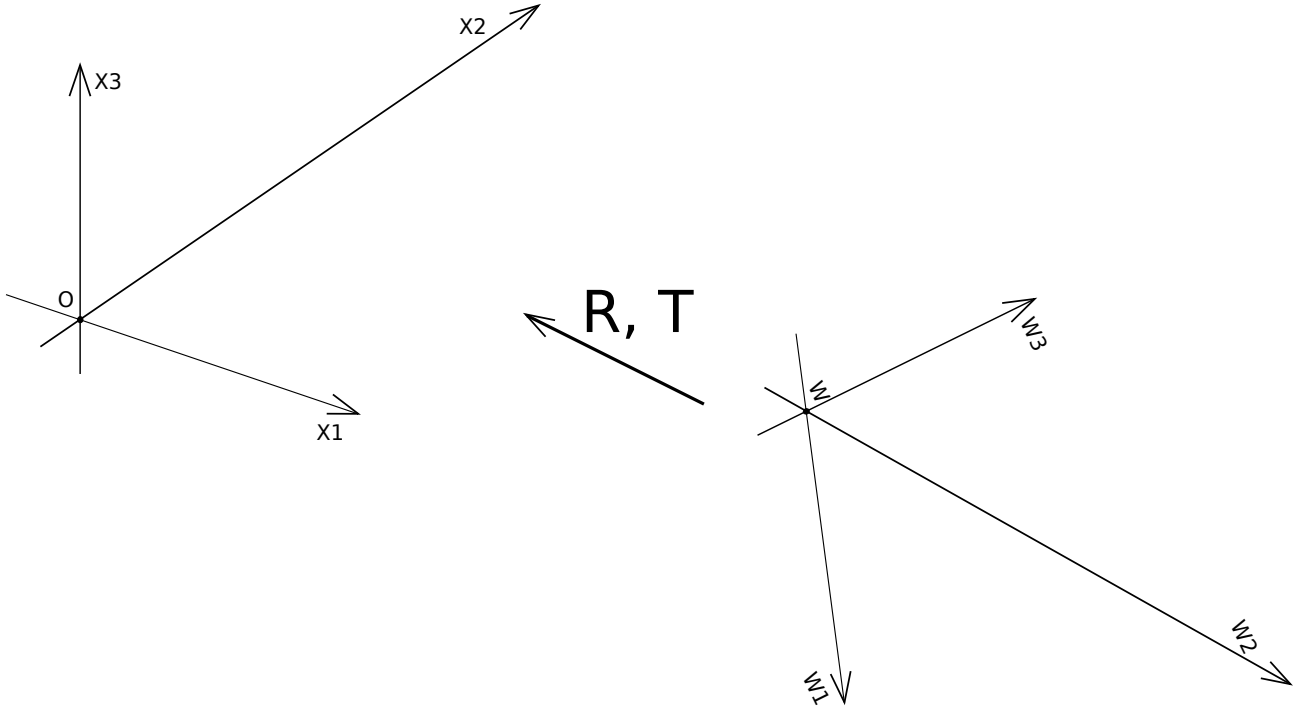


Figure 2.4 – Relation entre le repère associé à la caméra et le repère monde.

$(w_1, w_2, w_3)$  un point de l'espace exprimé dans le repère monde ( $W, W1, W2, W3$ ) et  $P_c = (x_1, x_2, x_3)$  ce même point exprimé dans le repère ( $O, X1, X2, X3$ ) associé à la caméra. Les repères ( $W, W1, W2, W3$ ) et ( $O, X1, X2, X3$ ) sont reliés entre eux par une rotation  $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$  ( ${}^tRR = I$ , où  $I$  est la matrice identité) et une translation  $T = (t_1, t_2, t_3)$ , d'où :

$$P_c = RP + T \quad (2.10)$$

Ce qui donne en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$R$  et  $T$  sont les paramètres extrinsèques de la caméra et ils sont au nombre de 6 (3 angles pour la rotation  $R$  et 3 paramètres pour la translation  $T$ ).

### 2.1.6 Transformation 3-D - 2-D

D'une manière générale, les équations régissant la projection d'un point 3-D de l'espace en un point 2-D de l'image sont :

- pour une caméra sténopée,

$$\begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & i'_{10} & 0 \\ 0 & f & i'_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

- pour une caméra CCD,

$$\begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kf & 0 & ki'_{10} & 0 \\ 0 & lf & li'_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

- pour une caméra projective finie,

$$\begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \tan \theta & u_1 & 0 \\ 0 & \beta & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Dans le cas d'une caméra projective finie, l'équation de transformation possède 11 degrés de liberté (5 paramètres intrinsèques et 6 paramètres extrinsèques), dans le cas d'une caméra CCD, elle en possède 10 (4 paramètres intrinsèques et 6 paramètres extrinsèques) et dans le cas d'une caméra sténopée classique, elle en possède 9 (3 paramètres intrinsèques et 6 paramètres extrinsèques).

### 2.1.7 Transformation 2-D - 3-D

Les équations 2.12, 2.13 et 2.14 sont les équations qui régissent la projection d'un point de l'espace (3 coordonnées) en un point de l'image (2 coordonnées). Une fois les paramètres de la caméra connus (paramètres extrinsèques et intrinsèques), le projeté de n'importe quel point de l'espace sur l'image peut être calculé et ceci quel que soit le type de projection considéré (projection en perspective, projection en perspective faible ou projection orthographique). Mais est-il possible d'effectuer le processus inverse : à partir d'un point de l'image (2 coordonnées), remonter à un point de l'espace (3 coordonnées) ?

Quel que soit le type de caméra (projective finie, CCD, sténopée) et quel que soit le type de projection (perspective, perspective faible, orthographique), la projection d'un point n'est pas unique (tous les points de la droite  $PO$  ont la même projection). Par conséquent, un point 2-D de l'image ne correspond pas à un point 3-D de l'espace mais à une droite. Le passage du monde 3-D au monde 2-D implique la perte de la « profondeur » des objets 3-D. En revanche, si deux images  $I_1$  et  $I_2$  du même objet 3-D sont acquises avec des angles de vue légèrement différents, un point  $Q_1$  de l'image  $I_1$  correspond à une droite  $D_1$  de l'espace et le point  $Q_2$  de l'image  $I_2$  correspondant, à une droite  $D_2$ . Ces deux droites se coupent et permettent donc de récupérer la profondeur de l'objet 3-D. C'est le principe de la stéréoscopie [74] [80] [12].

D'autres approches ne mettant pas en correspondance les points peuvent aussi être adoptées [98] [23]. Elles requièrent toujours néanmoins l'utilisation de plusieurs caméras.

## 2.2 Caractérisation géométrique

### 2.2.1 Géométrie intégrale

La géométrie convexe, fondée sur les fonctionnelles de Minkowski [123], permet de caractériser géométriquement un ensemble convexe dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Il existe exactement  $n + 1$  fonctionnelles de Minkowski, vérifiant certaines propriétés (additivité, continuité, invariance par déplacements, homogénéité, croissance) ; ces mesures forment une base dans  $\mathbb{R}^n$  des mesures vérifiant les mêmes propriétés [65]. Elles sont donc linéairement indépendantes et toute autre fonctionnelle vérifiant ces propriétés est une combinaison linéaire de celles-ci. En deux dimension ( $\mathbb{R}^2$ ), ces fonctionnelles sont l'aire, le périmètre et le nombre d'Euler. La géométrie intégrale [16] [115] [156] a généralisé la géométrie convexe aux unions finies d'ensembles convexes. Ce concept s'applique bien au traitement d'images numériques, puisque l'élément de base d'une image (le pixel en 2-D ou le voxel en 3-D) est un ensemble convexe [121].

### 2.2.2 Fonctionnelles géométriques

Les fonctionnelles géométriques sont des mesures de dimension entière supérieure ou égale à 1. La géométrie intégrale permet de définir plusieurs fonctionnelles géométriques telles que l'aire et le périmètre en deux dimensions ( $\mathbb{R}^2$ ) mais d'autres fonctionnelles peuvent bien sûr être définies comme par exemple la longueur, la largeur, les diamètres des cercles inscrits et circonscrits ou les diamètres de Feret minimum et maximum [57], etc. Ces mesures permettent de caractériser géométriquement un ensemble (ou une image) [168] mais ne suffisent pas à la caractérisation complète de celui-ci car certaines fonctionnelles géométriques de deux ensembles visuellement différents peuvent être identiques.

### 2.2.3 Géométrie différentielle et fractale

La géométrie différentielle [34] [47] [124] [174] est l'application des outils du calcul différentiel à l'étude de la géométrie. En considérant une image 2-D en niveaux de gris comme une surface topographique deux fois dérivable dans un espace à trois dimensions, la courbure peut être calculée en chaque point de l'image. Par exemple, la courbure gaussienne se détermine à partir des dérivées partielles de l'intensité. La géométrie différentielle présente diverses applications en traitement d'image [157] : filtrage [152], réhaussement de contraste, etc. Les mesures définies dans le cadre de la géométrie différentielle se limitent aux ensembles réguliers, c'est-à-dire aux ensembles de frontière lisse (dérivable), voire dérivables par morceaux. La géométrie fractale est donc introduite afin de pallier cette limite. La géométrie fractale [111] est une branche de la géométrie qui s'attèle à la caractérisation mathématiquement des ensembles ayant une forme complexe, très tortueuse ou fragmentée. L'adjectif fractal qualifie un ensemble naturel ou géométrique combinant les caractéristiques suivantes :

- les parties ont la même forme ou structure que le tout. Elles se différencient de ce dernier par l'échelle et peuvent être légèrement déformées.
- la forme est soit extrêmement fragmentée, soit extrêmement irrégulière, et reste inchangée quelle que soit l'échelle d'observation.

La géométrie fractale développe des outils mathématiques pour caractériser ce type d'ensembles dans des espaces non euclidiens. En géométrie euclidienne, les figures ont une dimension entière : 0 pour un point, 1 pour une courbe, 2 pour une surface et 3 pour un volume. En revanche, la dimension d'une fractale peut prendre des valeurs fractionnaires. Il s'agit en fait de la vitesse de croissance de la longueur d'une courbe approximée par des segments de droites, lorsque le nombre de segments augmente. En traitement d'images bio-médicales, la dimension fractale a été utilisée dans le cadre d'études sur le diabète en analysant des images rétinienues [32], quelques maladies du cerveau [176], un cancer du sein [129], etc. La dimension fractale a également été utilisée pour développer des méthodes de traitement d'images, telles que la segmentation [106]. Dans le traitement d'images numériques, le plus petit élément de l'image (le pixel en 2-D) impose une limite à la fractalité, et donc à la modélisation de tels ensembles, dits fractaux.

### 2.2.4 Géométrie stochastique

Partant de la géométrie intégrale et des probabilités géométriques [156], la géométrie stochastique [175] [114] établit le lien entre la géométrie et les processus stochastiques (mouvement brownien [22], chaînes de Markov [112]). Elle permet de modéliser de façon probabiliste des ensembles ou configurations de points ou d'ensembles, en leur associant une loi de probabilité sur l'espace des configurations possibles. Elle consiste à étudier des ensembles de formes aléatoires situés à des positions aléatoires, en supposant que ces ensembles soient fermés tels des unions de boules ou des pavages.

En traitement d'image, la géométrie stochastique est utilisée pour caractériser des microstructures [163], simuler des structures métallographiques [116] ou extraire des lignes de réseaux à partir d'images satellites [93]. Elle permet de développer des méthodes d'identification d'objets, de détection de contours [10] ou de segmentation d'images [49]. De plus, à partir d'un modèle aléatoire, peuvent être extraites les fonctionnelles de Minkowski (section 2.2.1) [63] [164] [6] [192]. Par conséquent, la géométrie stochastique sert à caractériser les espaces vides entre des particules supposées sphériques et dispersées aléatoirement [159] [160], à caractériser des grains de formes arbitraires placés et orientés aléatoirement [19], à caractériser des modèles planaires de points [117].

En traitement d'image, la géométrie stochastique est donc principalement utilisée pour la modélisation. Cependant, des difficultés apparaissent avec la complexité des images à simuler.

## 2.3 Caractérisation morphométrique

### 2.3.1 Morphologie mathématique

La morphologie mathématique est un ensemble de méthodes d'analyses d'image [113] [165] dont le principe est de transformer l'image à analyser au moyen d'un ensemble géométrique de base connu, appelé élément structurant, pour mettre en évidence certaines caractéristiques de l'image. Les outils proposés ont été développés au départ pour traiter des images binaires, représentant une union d'ensembles (morphologie mathématique ensembliste). Leurs utilisations ont ensuite été étendues aux images en niveaux de gris (morphologie mathématique fonctionnelle), puis aux images couleurs [166] [167] [36] [173]. La morphologie mathématique a conduit à de nombreux outils utilisés pour le filtrage d'image, la segmentation d'image [120] [128], la détection de contours, la reconnaissance de forme, l'analyse de texture, etc. La principale difficulté réside dans le choix a priori de l'élément structurant [208]. Des

approches adaptatives peuvent cependant être utilisées [41] [42] [43].

### 2.3.2 Spectre de forme

À l'origine du spectre de forme se trouve le spectre granulométrique, basé sur la distribution de taille [45] ainsi que la morphologie mathématique (section 2.3.1). Le principe du spectre granulométrique consiste à observer la variation d'une mesure (l'aire, par exemple) d'un ensemble obtenu suite à une transformation de morphologie mathématique en fonction de la taille de l'élément structurant [90]. Dans le traitement et l'analyse d'image, ce concept est fréquemment employé [170] [107] [182], par exemple pour la segmentation, la classification de formes et de textures [7] [9] [8] [46] [193] [184] [188]. Il est également utilisé pour développer des opérateurs de filtrage ou des représentations multi-échelles [48].

### 2.3.3 Fonctionnelles morphométriques

Les fonctionnelles morphométriques sont des ratios normalisés de fonctionnelles géométriques. Elles sont comprises entre 0 et 1 et sont invariantes par similitude, *i.e.* translation, rotation et changement d'échelle. Elles servent à évaluer des caractéristiques morphométriques d'un ensemble. Ces caractéristiques sont, entre autres, la compacité, la convexité, la circularité, l'allongement, etc. Pour certaines caractéristiques, différentes définitions sont possibles. En fonction de l'application considérée [5] [35] [59] [68] [92] [146] [180] [187], l'utilisateur choisit celle qui lui convient. Ces fonctionnelles sont déterminées sur des images numériques binaires, un objet étant défini par un ensemble de pixels blancs (ou noirs) et permettent, entre autre, de caractériser la forme des objets présents dans une image et de les classer [24] [29] [145] [179].

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, après quelques rappels sur le processus de formation d'une image 2-D, des outils permettant de caractériser géométriquement et morphométriquement une image ou un objet 2-D ont été exposés. Ils permettent, entre autres, de caractériser la taille mais aussi la forme d'un objet 2-D et peuvent donc être utilisés, par exemple, pour déterminer la distribution granulométrique de particules en suspension portant sur deux dimensions caractéristiques des particules projetées.





## Chapitre 3

# Les méthodes stéréologiques

Dans le chapitre précédent, plusieurs outils permettant de caractériser géométriquement et morphométriquement une image / un objet 2-D ont été présentés. Parmi ces outils, ceux permettant de caractériser la taille mais aussi la forme d'un objet 2-D sont très intéressants car ils peuvent être utilisés pour déterminer une distribution granulométrique de particules projetées. Néanmoins, l'objectif de ce travail de thèse étant de déterminer la taille et la forme d'objets 3-D à partir de leurs projections 2-D, il est nécessaire d'extrapoler les différentes mesures effectuées sur les images 2-D de projection pour accéder à une caractérisation 3-D des objets. Les différentes méthodes permettant cela sont les méthodes stéréologiques.

La stéréologie [185] [150] est un ensemble de méthodes permettant l'évaluation quantitative de structures de dimension  $n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) à partir d'observations faites en dimension  $n$ . Par exemple, à partir d'images de sections planes ou d'images de projections orthographiques d'un objet 3-D, la stéréologie permet d'estimer son volume ou sa surface. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux méthodes stéréologiques « d'unfolding » [130], lesquelles donnent les moyens d'accéder à une distribution de taille 3-D à partir d'une distribution de mesure calculée sur des images de coupes ou de projections.

### 3.1 Stéréologie en coupes

Pour estimer le volume d'un objet 3-D, plusieurs méthodes peuvent être utilisées [40] et en particulier la méthode de Cavalieri [64] [75]. Soient  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) tranches d'épaisseur  $T$  de l'objet 3-D étudié (coupes sériées). Sur la figure 3.1, l'objet 3-D est coupé huit fois, neuf tranches de l'objet sont donc formées. Le volume  $V_i$  de chaque tranche peut être approximé en multipliant l'aire  $A_i$  de la coupe par l'épaisseur  $T$  de la tranche. Ainsi, le volume  $V$  de l'objet 3-D est estimé en sommant les volumes de chaque tranche (équation 3.1).

$$V = \sum_{i=1}^n T \times A_i \quad (3.1)$$

L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle ne fait aucune hypothèse sur l'objet 3-D étudié. Cependant, elle est invasive puisqu'elle requiert de pratiquer des coupes sériées. L'estimation du volume d'un objet 3-D à partir d'images de coupes aléatoires de celui-ci est beaucoup plus complexe.

Pour une sphère de rayon  $R$ , l'objet 2-D résultant d'une coupe est un disque de rayon  $r \leq R$  (figure 3.2) et si  $r \neq R$ , le rayon  $R$  de la sphère et donc son volume ne peuvent pas être estimés. Cette

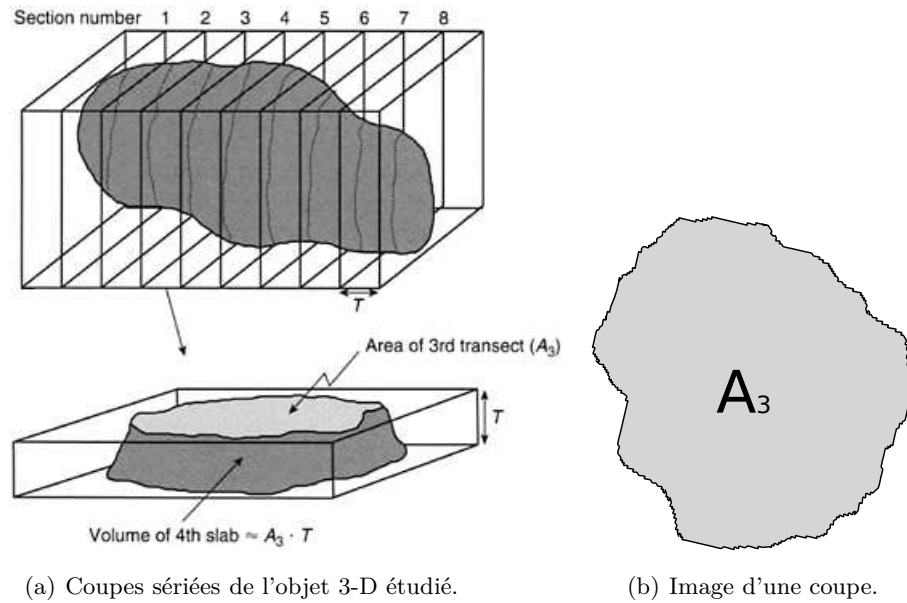


Figure 3.1 – Estimation du volume d'un objet 3-D par la méthode de Cavalieri [75].

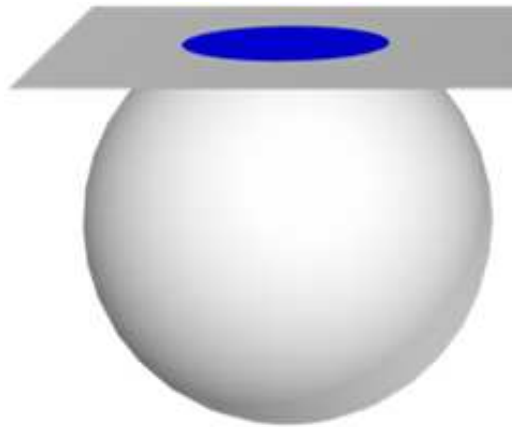


Figure 3.2 – Coupe d'une sphère [78].

difficulté peut être minimisée par l'utilisation de probabilités. En coupant aléatoirement (loi uniforme) une sphère de rayon  $R$ , il est possible de déterminer analytiquement la densité de probabilité  $\phi_R$  des rayons des disques obtenus (équation 3.2).

$$\phi_R(r) = \frac{1}{R} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (r \in [0; R[) \quad (3.2)$$

où  $r$  est le rayon du disque de la coupe.

Lorsque  $r \rightarrow R$ ,  $\phi(r) \rightarrow +\infty$ , la probabilité de faire une coupe passant par le centre de la sphère est la plus élevée. L'introduction de l'équation 3.2 ne permet toujours pas de déterminer de façon certaine le rayon d'une sphère à partir d'une image de coupe aléatoire (loi uniforme) de celle-ci. Elle permet cependant d'affirmer qu'une coupe aléatoire (loi uniforme) d'une sphère de rayon  $R$  a une forte probabilité de produire un disque de rayon  $r$  égal à  $R$ .

Pour un ensemble d'objets sphériques monodisperses de rayon  $R$  distribués aléatoirement (loi uniforme), les rayons  $r_1 < r_2 < \dots < r_m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) des disques d'une image de coupe  $I$  sont tous inférieurs ou égaux à  $R$  et les plus grands rayons ont une forte probabilité d'être égaux à  $R$ .

Pour un ensemble d'objets sphériques polydisperses (homothétiques) de rayons  $R_1 < R_2 < \dots < R_n$  ( $n \in \mathbb{N}$  et  $n > 1$ ) distribué aléatoirement (loi uniforme), les rayons des disques  $r_1 < r_2 < \dots < r_m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) d'une image de coupe  $I$  ne correspondent pas aux rayons des sphères. La distribution de taille des sphères peut cependant être estimée grâce à la méthode itérative de Saltykov [153] [203].

Pour un ensemble d'objets 3-D non sphériques, monodisperses, polydisperses et multidisperses, plusieurs études ont été réalisées.

En utilisant une méthode similaire à celle développée par Saltykov, Sahagian et al. [151] étudient des systèmes d'objets parallélépipédiques et ellipsoïdales d'anisotropies relativement faibles polydisperses et dans une moindre mesure multidisperses. Pour caractériser les objets 2-D résultant d'une coupe de tels systèmes, ils calculent le diamètre de Feret moyen de chaque objet. Jagnow et al. [78] estiment quant à eux la distribution de taille d'objets 3-D non convexe et ceci afin de synthétiser une texture 3-D. Pour ce faire, ils utilisent comme descripteur l'aire. Higgins [73] étudie des systèmes parallélépipédiques polydisperses. Ce dernier utilise comme descripteur la longueur de la boîte englobante.

Barbery [11] et Han et al. [66] s'intéressent plus particulièrement à des objets cylindriques, parallélépipédiques, ellipsoïdales et parallélépipédiques, prismatiques hexagonaux respectivement et caractérisent les images de coupe par des longueurs de corde.

En caractérisant l'objet 2-D résultant d'une coupe d'un objet 3-D par plusieurs descripteurs, il est possible d'améliorer la performance des méthodes d'unfolding et/ou de diminuer le nombre d'hypothèses formulées sur le système étudié.

Pour déterminer les facteurs d'anisotropie d'un objet parallélépipédique à partir d'images de coupes de celui-ci, Morgan et al. [125] développent un algorithme basé sur le calcul de la longueur et de la largeur de l'ellipse s'ajustant au mieux avec l'objet 2-D résultant d'une coupe. Cruz Orive et al. [38] [39] et par la suite Liang et al. [102] étudient des systèmes multidisperses d'ellipsoïdes allongés et aplatis. Pour caractériser les coupes de tels systèmes, ils calculent le diamètre de Feret maximum et le ratio entre le diamètre de Feret maximum et le diamètre de Feret minimum de chaque objet 2-D. Ohser et al. [131] [132] et Mehnert et al. [118] quant à eux, étudient des systèmes polydisperses cubiques et multidisperses polyédriques. Ils utilisent comme descripteur le diamètre de Feret maximum et le nombre de sommets des objets 2-D de la coupe.

## 3.2 Stéréologie projective

Pour estimer le volume d'un objet 3-D à partir de ses projections orthographiques, Underwood [186] a démontré que son volume  $V$ , l'aire de sa surface  $S$  et le Mean Intercept Length (MIL)  $\overline{L}_3$  de  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) droites de l'espace pénétrant aléatoirement (loi uniforme) l'objet 3-D sont reliés par l'équation suivante :

$$\overline{L}_3 = 4 \frac{V}{S} \quad (3.3)$$

Si l'objet 3-D étudié est convexe, la formule de Cauchy [30] peut être utilisée pour exprimer  $S$  en fonction de l'aire projetée moyenne  $\overline{A}'$  de l'objet :

$$S = 4\overline{A}' \quad (3.4)$$

Il est important de noter que l'équation 3.4 n'est valable que pour des objets 3-D convexes (pour des objets 3-D non convexe  $S \geq 4\overline{A}'$ ). Ainsi le volume  $V$  d'un objet 3-D convexe peut être exprimé en

fonction de  $\overline{A'}$  et  $\overline{L_3}$  :

$$V = \overline{A'} \times \overline{L_3} \quad (3.5)$$

L'équation 3.5 est vraie quel que soit l'objet 3-D convexe étudié. Néanmoins,  $L_3$  (Intercept Length) n'est pas une mesure effectuée sur une projection de l'objet 3-D mais une mesure effectuée sectionnellement dans l'espace. Si les facteurs d'anisotropie de l'objet 3-D étudié sont connus,  $\overline{L_3}$  peut être exprimé en fonction de  $\overline{H'}$ , le diamètre de Feret projeté moyen [57]. Pour une sphère par exemple,  $\overline{L_3} = \frac{2}{3}\overline{H'} = \frac{2}{3}H'$  ( $H'$  étant le diamètre de Feret projeté) et par conséquent :

$$V = \frac{2}{3}\overline{H'} \times \overline{A'} = \frac{2}{3}H' \times A' \quad (3.6)$$

Contrairement à l'équation 3.5, l'équation 3.6 ne fait apparaître que des paramètres projetés. Pour estimer le volume  $V$  d'une sphère de rayon  $R$  à partir de ses projections, une seule projection de celle-ci est nécessaire et  $V = \frac{2}{3}H' \times A'$ . De plus, l'objet 2-D résultant est un disque de rayon  $r$  et  $r = R$ .

Pour un ensemble de particules sphériques monodisperses de rayon  $R$ , il est assez aisé de déterminer la distribution de taille des sphères à partir d'une image de projection  $I$  de ce système. En effet, si les disques de l'image  $I$  ne se chevauchent pas, les rayons des disques de l'image  $I$  ont tous un rayon  $r = R$ .

Pour un ensemble de particules sphériques polydisperses (homothétiques) de rayon  $R_1 < R_2 < \dots < R_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il reste assez aisé de déterminer la distribution de taille des sphères à partir d'une image de projection  $I$  de ce système (figure 3.3). Si il n'y a pas d'occlusion, *i.e.* si les « grosses » sphères n'oc-

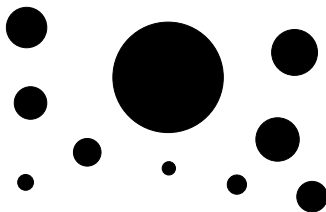


Figure 3.3 – Image de projection d'un ensemble de sphères polydisperses.

cultent pas les « petites », et si les disques de l'image  $I$  ne se chevauchent pas, les rayons des disques de l'image  $I$  ( $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ ) correspondent aux rayons des sphères ( $r_1 = R_1, r_2 = R_2, \dots, r_n = R_n$ ).

Pour des objets 3-D non sphériques, il est plus difficile d'estimer leurs volumes et/ou leurs distributions de taille à partir d'images de projections. En effet, un objet 3-D non sphérique possède plusieurs projections orthographiques. De plus, plusieurs objets 3-D distincts peuvent avoir la même projection orthographique. Par exemple, un disque de rayon  $r$  peut aussi bien être le résultat de la projection orthographique d'une sphère de rayon  $r$  que d'une projection orthographique d'un ellipsoïde allongé de rayon équatorial  $r$  et de rayon polaire  $c > 1$ .

Pour estimer la taille et la forme d'objets 3-D non sphériques à partir d'images de projections, plusieurs approches ont été proposées. Ces approches peuvent être classées en deux catégories selon qu'elles soient basées ou non sur un modèle 3-D.

### 3.2.1 Méthodes sans a priori sur la forme de l'objet 3-D

L'avantage majeur de ces méthodes est qu'elles ne font aucune hypothèse sur la taille et la forme des objets 3-D étudiés. Elles nécessitent cependant de réaliser un « calibrage ». Pour ce faire, une

première distribution granulométrique est déterminée grâce à un tamisage. Cette distribution, dite de référence, est ensuite utilisée pour déterminer les relations d'unfolding, permettant d'extrapoler la distribution de mesure calculée sur les images de projections en la distribution granulométrique réalisée par tamisage. L'objectif de ces méthodes est donc de remonter à la distribution en masse des objets 3-D étudiés à partir d'une distribution de mesure calculée sur des images de projections.

Outal et al. [133] utilisent ce principe pour déterminer la distribution granulométrique de fragments de roches. Ils caractérisent chaque roche projetée par leur aire. D'autres auteurs utilisent aussi l'aire projetée comme descripteur : King [86], Vallebuona et al. [189] ou encore Taylor [177]. King et al. [87] et Lin et al. [103] [104] [105] quant à eux, caractérisent les objets 3-D projetés par une distribution de longueur de corde.

En caractérisant les images de projections par plusieurs descripteurs, la performance des méthodes d'unfolding peut être améliorée. Al-Thyabat et al. [3] [4] utilisent comme descripteurs le diamètre de Feret moyen et le diamètre du disque ayant la même aire que l'objet projeté. Kemeny et al. [83] [82] utilisent le diamètre de Feret maximum et le diamètre de Feret minimum de l'ellipse s'ajustant aux mieux avec l'objet 2-D projeté.

### 3.2.2 Méthodes basées sur un modèle 3-D

Cette seconde catégorie d'approches, s'appuie sur un modèle 3-D de l'objet étudié où la forme est supposée connue a priori. Maerz [108] étudie des roches et suppose qu'il est possible de les modéliser par des sphères. Il utilise comme descripteur le diamètre du disque ayant la même aire que l'objet projeté. Schleifer et al. [162] effectuent la même hypothèse mais décrivent chaque objet projeté par le diamètre du disque inscrit.

Comme précédemment, en caractérisant l'objet 2-D résultant d'une projection d'un objet 3-D par plusieurs descripteurs, il est possible d'améliorer la performance des méthodes d'unfolding et/ou de diminuer le nombre d'hypothèses formulées sur le système étudié. Kempkes et al. [84] et Eggers et al. [54] [53] étudient des cristaux d'acides ascorbique, objets 3-D pouvant être modélisés par des parallélépipèdes rectangles de largeur  $L_1$ , de profondeur  $L_2 = L_1$  et de hauteur  $L_3$ . Les descripteurs utilisés sont les diamètres de Feret maximum et minimum de l'ellipse de même moments quadratiques que l'objet projeté. L'utilisation de deux caméras orthogonales entre elles [85], permet aux auteurs de s'affranchir de l'hypothèse  $L_2 = L_1$ . L'approche de Larsen et al. [97] [95] a été développée dans le but d'estimer la distribution granulométrique de cristaux de glycine, dont la morphologie à l'équilibre est un parallélépipède rectangle surmonté de deux pyramides (figure 3.4). Le principal inconvénient de cette méthode réside dans l'algorithme utilisé pour déterminer les paramètres  $w$ ,  $h$ ,  $t$ . En effet, ce dernier détecte toutes les lignes présentes dans l'image puis groupe les lignes caractéristiques (lignes parallèles, colinéaires et sécantes) entre elles. Par conséquent, l'approche de Larsen ne peut s'appliquer qu'à des objets facettés. Brown et al. et Vickers et al. [190] [20] [21] [191] ont publié une série d'articles où ils déterminent de manière analytique la distribution des aires projetées de plusieurs objets 3-D convexes (cylindre, parallélépipède rectangle, ellipsoïde, etc.) et de manière numérique la distribution conjointe des aires projetées et des périmètres projetés. D'autres études plus théoriques ont également été réalisées [13] [91] [171].

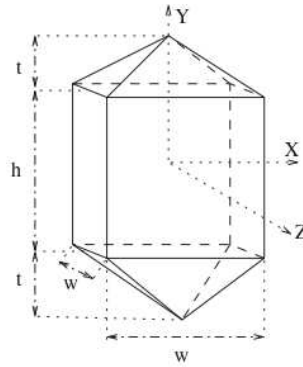


Figure 3.4 – Modèle 3-D de Larsen et al. [97].

### 3.3 Conclusion

Différentes approches stéréologiques permettant d'estimer la taille et la forme d'objets 3-D à partir d'images 2-D de coupes ou de projections ont été présentées dans ce chapitre. Cette étude s'est plus particulièrement axée sur les méthodes d'unfolding, lesquelles donnent les moyens d'accéder à une distribution de taille 3-D à partir d'une distribution de mesure calculée sur des images de coupes ou de projections.

Deux catégories de méthodes ont été exposées. Les premières ne font pas d'hypothèse a priori sur la forme des objets 3-D étudiés et bien qu'elles présentent des avantages certains, elles ne permettent de déterminer qu'une distribution granulométrique 1-D. Les secondes font appel à des modèles 3-D mais se limitent généralement cependant à un modèle spécifique (parallélépipède rectangle, ellipsoïde, etc.) et ne caractérisent les projections de celui-ci que par des fonctionnelles géométriques. Elles permettent d'estimer une distribution granulométrique 1-D/2-D/3-D sous certaines hypothèses liées au modèle.

Afin de tirer avantage de ces deux approches, il semble intéressant de développer des méthodes pouvant s'appliquer à des modèles 3-D de géométrie quelconque tout en limitant le nombre d'hypothèses sur la forme des objets étudiés. Pour cela, les projections 2-D d'un objet 3-D pourraient être caractérisées à la fois par des fonctionnelles morphométriques et géométriques afin d'accéder à une distribution granulométrique 3-D.

---

La première partie de ce manuscrit a présenté un état de l'art sur les approches, méthodes et concepts permettant tout d'abord d'estimer la distribution granulométrique d'objets 3-D en suspension, puis de caractériser géométriquement et morphométriquement des images/objets 2-D et enfin d'inférer la taille et la forme d'objets 3-D à partir d'images 2-D. La prochaine partie est consacrée à l'introduction des différents concepts et outils utilisés dans la partie « Développement ».

## Deuxième partie

# Concepts et outils utiles pour la thèse





# Sommaire de la Deuxième partie

---

<b>4</b>	<b>Le simulateur informatique</b>	<b>31</b>
4.1	Objets 3-D modélisés . . . . .	31
4.2	Projections 2-D d'un objet 3-D . . . . .	32
4.3	Conclusion . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Diagrammes de forme</b>	<b>35</b>
5.1	Fonctionnelles géométriques et morphométriques . . . . .	35
5.2	Les diagrammes de forme . . . . .	36
5.3	Conclusion . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Reconstruction d'une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points du plan</b>	<b>41</b>
6.1	LDA- $\alpha$ -shapes . . . . .	42
6.2	Sélection automatique du paramètre de contrôle $\alpha$ . . . . .	43
6.2.1	Quelle est la forme perçue d'un ensemble de points? . . . . .	44
6.2.2	Le critère proposé . . . . .	45
6.2.3	Pertinence du critère proposé . . . . .	45
6.2.4	Évaluation quantitative de l'algorithme de sélection automatique du paramètre $\alpha$ . . . . .	48
6.3	Conclusion . . . . .	49

---



# Chapitre 4

## Le simulateur informatique

Ce premier chapitre introduit l'outil simulateur informatique qui permet de développer, vérifier et valider les méthodes mises en place au cours de ce travail de thèse. En effet, l'objectif de cette étude étant de mettre en place des méthodes génériques et efficaces permettant d'estimer la taille et la forme d'objets 3-D à partir de leurs projections 2-D, il paraît important de pouvoir, en particulier, vérifier les différentes estimations réalisées. Cet outil informatique permet donc de simuler le processus de projection d'un objet 3-D.

### 4.1 Objets 3-D modélisés

Cinq types d'objets 3-D ont été modélisés (figure 4.1) : ellipsoïde, cylindre à base elliptique, parallélépipède rectangle, bipyramide à base rectangulaire, pyramide à base rectangulaire. Ils sont tous convexes et peuvent être paramétrés soit par trois paramètres dits de taille, notés  $a$  ( $a > 0$ ),  $b$  ( $b > 0$ ) et  $c$  ( $c > 0$ ) respectivement, soit par un paramètre de taille  $a$  ( $b$  ou  $c$ ) et deux paramètres dits de forme, notés  $\alpha_1 = \frac{b}{a}$  et  $\alpha_2 = \frac{c}{a}$ . Bien qu'il eut été possible de modéliser des objets 3-D non convexes, l'étude

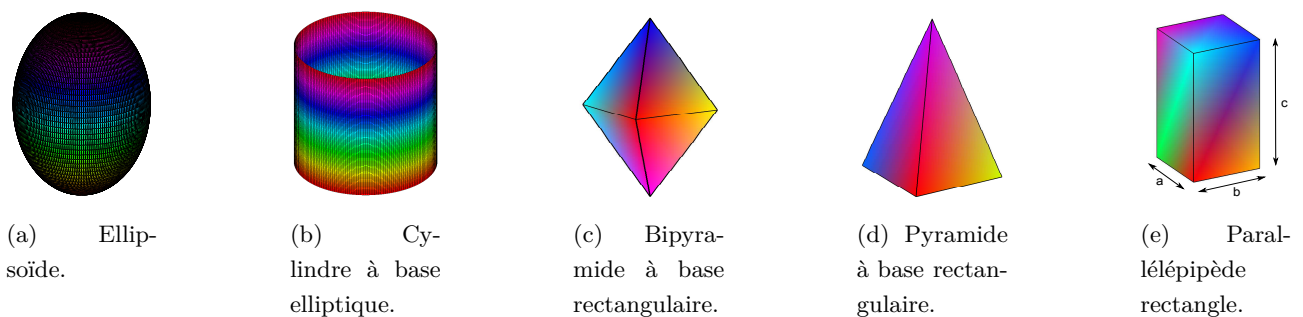


Figure 4.1 – Types d'objets modélisés au sein du simulateur.

réalisée se limitera aux objets 3-D convexes et plus particulièrement aux objets 3-D de type ellipsoïde, cylindre à base elliptique, parallélépipède rectangle, bipyramide à base rectangulaire, pyramide à base rectangulaire. Dans la suite du manuscrit, un objet 3-D convexe de ce type, de paramètres de taille  $a$ ,  $b$  et  $c$  et donc de paramètres de forme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sera noté  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ ,  $CO$  représentant son type (ellipsoïde, cylindre à base elliptique, etc.),  $a$  son premier paramètre de taille et  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ses paramètres de forme. Estimer la taille et la forme d'un objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  signifie donc estimer tout d'abord son type  $CO$ , puis estimer son paramètre de taille  $a$  et ses paramètres de forme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Les méthodes

proposées dans la suite de cet exposé s'attacheront donc à estimer la valeur de ces paramètres à partir de projections 2-D de l'objet 3-D considéré.

## 4.2 Projections 2-D d'un objet 3-D

Considérons un objet 3-D modélisé précédemment au centre d'une large sphère. En pavant la sphère de manière aléatoire selon une loi de probabilité donnée (régulière en utilisant un modèle icosaédrique, respectivement)  $N \in \mathbb{N}^*$  ( $N \in \{10 \times 4^n + 2\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , respectivement) points sont générés à sa surface (figure 4.2). Chaque point peut être vu comme une position particulière de la caméra avec laquelle l'objet au centre de la sphère est observé. À chaque position de la caméra correspond donc une projection particulière de l'objet 3-D. La figure 4.3 montre cinq projections orthographiques aléatoires

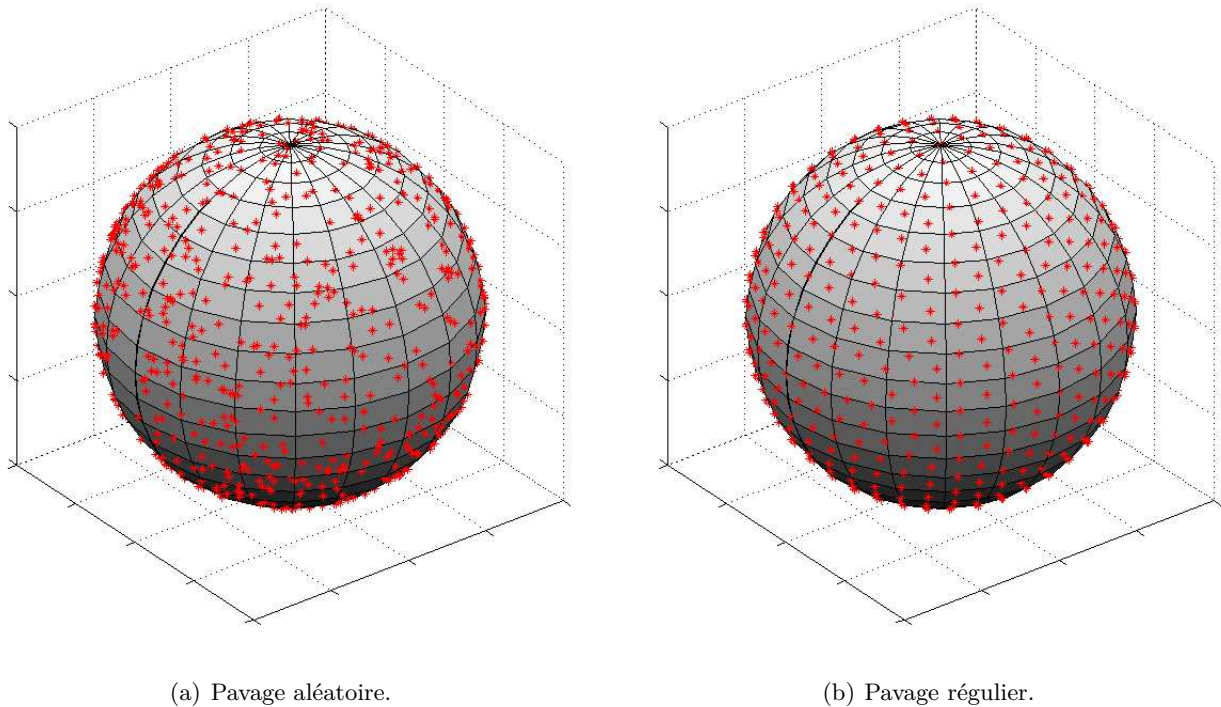


Figure 4.2 – Pavage aléatoire selon une loi uniforme d'une sphère. / Pavage régulier selon un modèle icosaédrique d'une sphère.

selon une loi uniforme d'un cube de côté  $a = 10$ . Excepté pour l'objet de type sphère, il est important de remarquer qu'un objet 3-D possède plusieurs projections orthographiques. De plus, plusieurs objets 3-D distincts peuvent avoir la même projection orthographique. Par exemple, un disque de rayon  $r$  peut aussi bien être le résultat de la projection orthographique d'une sphère de rayon  $r$  que d'une projection orthographique d'un ellipsoïde de révolution allongé de rayon équatorial  $r$  et de rayon polaire  $c > 1$ . Même en se limitant aux projections orthographiques, estimer la taille et la forme d'un objet 3-D à partir de ses projections 2-D est donc assez complexe. C'est pour cette raison, que la projection en perspective ne sera pas considérée. L'étude se limitera à estimer les paramètres d'un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  modélisé précédemment, *i.e.* estimer les paramètres  $CO$ ,  $a$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , à partir de ses projections orthographiques.

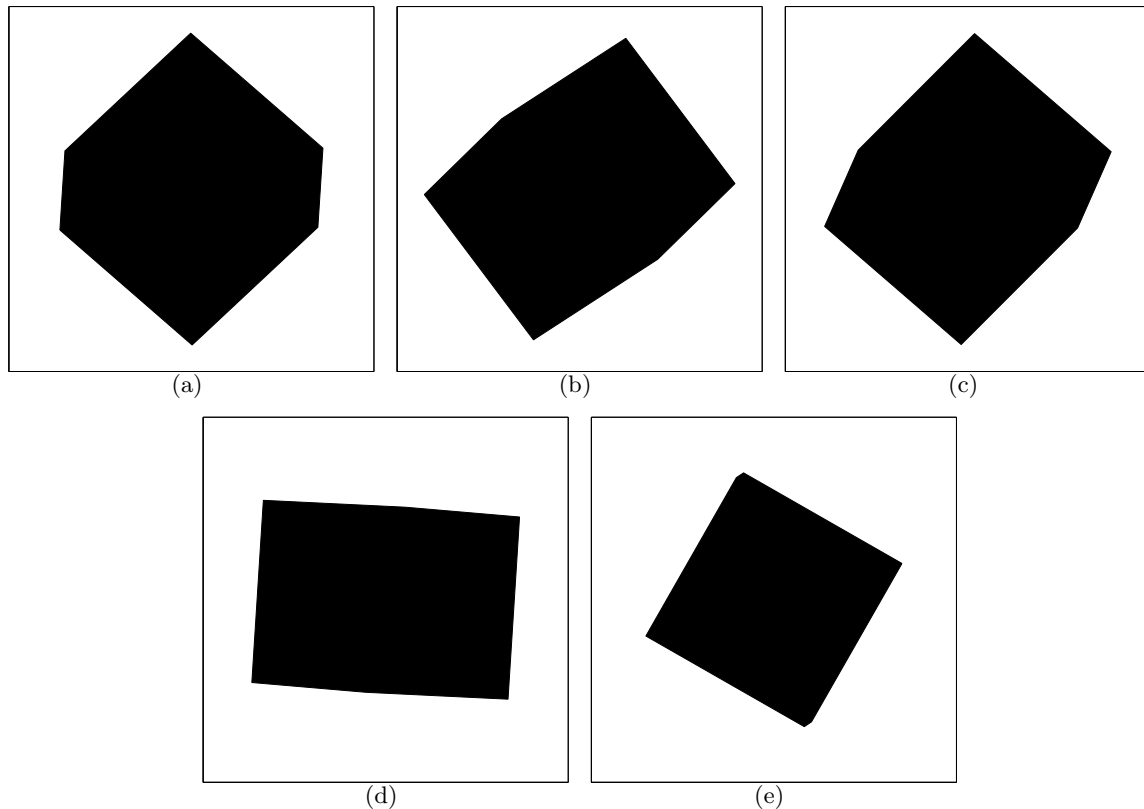


Figure 4.3 – Projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) d'un cube de coté  $a = 10$ .

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'outil simulateur informatique a été présenté. Cet outil permet de simuler le processus de projection d'un objet 3-D. Plus spécifiquement, pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  de type  $CO$ , de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2$ , le simulateur informatique ainsi développé est capable de générer  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoires de celui-ci suivant une loi de probabilité donnée. Estimer la taille et la forme de cet objet 3-D à partir de ses projections orthographiques signifie donc estimer tout d'abord son type  $CO$ , puis estimer son paramètre de taille  $a$  et ses paramètres de forme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Dans la suite du manuscrit, les méthodes proposées s'attacheront à réaliser ces estimations à partir de projections orthographiques générées par le simulateur. En effet, la valeur des paramètres de l'objet 3-D modélisé étant connue, il sera possible de comparer les valeurs estimées aux valeurs réelles.



## Chapitre 5

# Diagrammes de forme

Ce chapitre introduit la notion de diagrammes de forme. Un diagramme de forme est un descripteur de forme 2-D permettant de représenter la morphométrie d'un ensemble 2-D compact dans le plan euclidien.

### 5.1 Fonctionnelles géométriques et morphométriques

En analyse d'image, un ensemble 2-D compact peut être décrit par plusieurs fonctionnelles géométriques. Les plus utilisées sont l'aire et le périmètre, notés respectivement  $A$  et  $P$ , les rayons des cercles inscrits et circonscrits, notés respectivement  $r$  et  $R$ , et les diamètres de Feret minimum et maximum [57], notés respectivement  $\omega$  et  $d$ . La figure 5.1 illustre quelques-unes de ces fonctionnelles géométriques. Ces fonctionnelles géométriques vérifiant certaines inégalités (certaines de ces inégali-

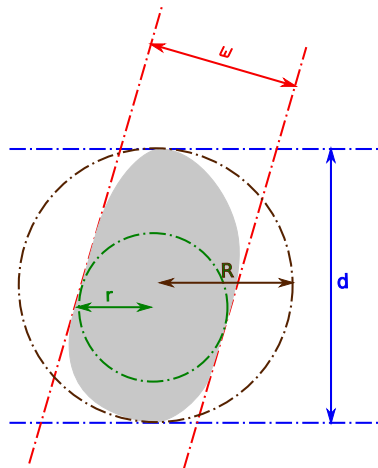


Figure 5.1 – Quelques fonctionnelles géométriques classiques d'un ensemble compact : rayons des cercles inscrits ( $r$ ) et circonscrits ( $R$ ), diamètres de Feret minimum ( $\omega$ ) et maximum ( $d$ ).

tés ne sont vérifiées que pour des ensembles compacts convexes) [147] [148] [149], des fonctionnelles morphométriques qui sont des ratios normalisés des premières peuvent être définies. Le tableau 5.1 synthétise les différentes inégalités géométriques, les différentes fonctionnelles géométriques ainsi que les différentes fonctionnelles morphométriques qu'il est possible de construire. Les fonctionnelles morphométriques ainsi définies (circularité :  $2\pi r / P$ ,  $P / 2\pi R$ ,  $r / R$ ,  $2r / d$ ,  $\omega / 2R$  ; finesse :  $2d / P$ ,  $4R / P$  ;



Geometrical functionals	Geometric inequalities	Morphometrical functionals	Only valid for compact convex sets
$r, R$	$r \leq R$	$r/R$	No
$\omega, R$	$\omega \leq 2R$	$\omega/2R$	No
$A, R$	$A \leq \pi R^2$	$A/\pi R^2$	No
$P, R$	$P \leq 2\pi R$	$P/2\pi R$	Yes
$d, R$	$d \leq 2R$	$d/2R$	No
$r, d$	$2r \leq d$	$2r/d$	No
$\omega, d$	$\omega \leq d$	$\omega/d$	No
$A, d$	$4A \leq \pi d^2$	$4A/\pi d^2$	No
$P, d$	$P \leq \pi d$	$P/\pi d$	Yes
$R, d$	$\sqrt{3}R \leq d$	$\sqrt{3}R/d$	No
$r, P$	$2\pi r \leq P$	$2\pi r/P$	No
$\omega, P$	$\pi\omega \leq P$	$\pi\omega/P$	No
$A, P$	$4\pi A \leq P^2$	$4\pi A/P^2$	No
$d, P$	$2d \leq P$	$2d/P$	No
$R, P$	$4R \leq P$	$4R/P$	No
$r, A$	$\pi r^2 \leq A$	$\pi r^2/A$	No
$\omega, A$	$\omega^2 \leq \sqrt{3}A$	$\omega^2/\sqrt{3}A$	Yes
$r, \omega$	$2r \leq \omega$	$2r/\omega$	No
$\omega, r$	$\omega \leq 3r$	$\omega/3r$	Yes

Tableau 5.1 – Les fonctionnelles géométriques et morphométriques.  $A$ ,  $P$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\omega$  et  $d$  désignent l’aire, le périmètre, les rayons des cercles inscrits et circonscrits, les diamètres de Feret minimum et maximum, respectivement [147] [148] [149].

etc.) sont à valeurs dans  $[0; 1]$  et sont invariantes par similitude, *i.e.* invariantes par translation, rotation et changement d’échelle. À partir de ces fonctionnelles morphométriques, plusieurs diagrammes de forme peuvent être définis.

## 5.2 Les diagrammes de forme

Historiquement, le concept de diagramme de forme a été proposé par Blaschke [14] [15], puis par Santaló [155] pour des ensembles compacts convexes. Par la suite, plusieurs études ont été réalisées [156] [69] [72] [71] [70, 17] et en particulier l’étude de Rivollier et al. [147] [148] [149] qui hiérarchise les différents diagrammes de forme en fonction de leur aptitude à discriminer des ensembles compacts quelconques.

Un diagramme de forme permet de représenter la forme d’un ensemble 2-D compact dans le plan euclidien à partir de deux fonctionnelles morphométriques, *i.e.* à partir de trois fonctionnelles géométriques car les dénominateurs des deux fonctionnelles morphométriques ont la même fonctionnelle géométrique. Soient un triplet des six fonctionnelles géométriques considérées,  $A$ ,  $P$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\omega$ ,  $d$ , et  $(x, y)$ , le couple de fonctionnelles morphométriques associé (tableau 5.2). Le diagramme de forme correspondant  $\mathcal{D}$  est l’application de l’ensemble  $\mathcal{K}(\mathbb{E}^2)$  (l’ensemble des compacts du plan euclidien) dans

$[0, 1]^2$  qui à tout élément  $S$  de  $\mathcal{K}(\mathbb{E}^2)$  associe l'élément  $\mathcal{D}(S) = (x, y)$  de  $[0, 1]^2$ . Formellement, un diagramme de forme est défini comme suit :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \mathcal{K}(\mathbb{E}^2) & \rightarrow [0, 1]^2 \\ S & \mapsto (x, y) \end{cases}$$

Trente et un diagrammes de forme peuvent être définis, notés  $(\mathcal{D}_k)_{k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket}$  respectivement (tableau 5.2). Certaines inégalités géométriques étant seulement vérifiées pour des ensembles compacts convexes, les diagrammes de forme correspondant sont par conséquent seulement définis pour des ensembles compacts convexes. Rivollier et al. [147] [148] [149] ont étudié en détails les trente et un diagrammes de forme qui peuvent être définis et ont conclu que le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$  ( $\omega / d, 4 A / \pi d^2$ ) est celui qui discrimine au mieux deux ensembles compacts convexes : les images des différents ensembles 2-D compacts convexes sont généralement bien dispersées dans le plan  $[0, 1]^2$ . Par conséquent, le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$  est celui qui sera utilisé dans la suite du manuscrit. La figure 5.2 montre une représentation graphique du diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$  : en trait noir est représenté le contour du domaine où se situent les compacts convexes et en couleur les éléments de la famille  $\mathcal{F}$ .

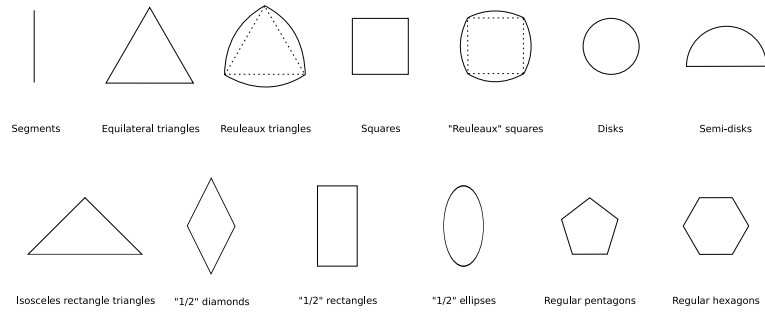
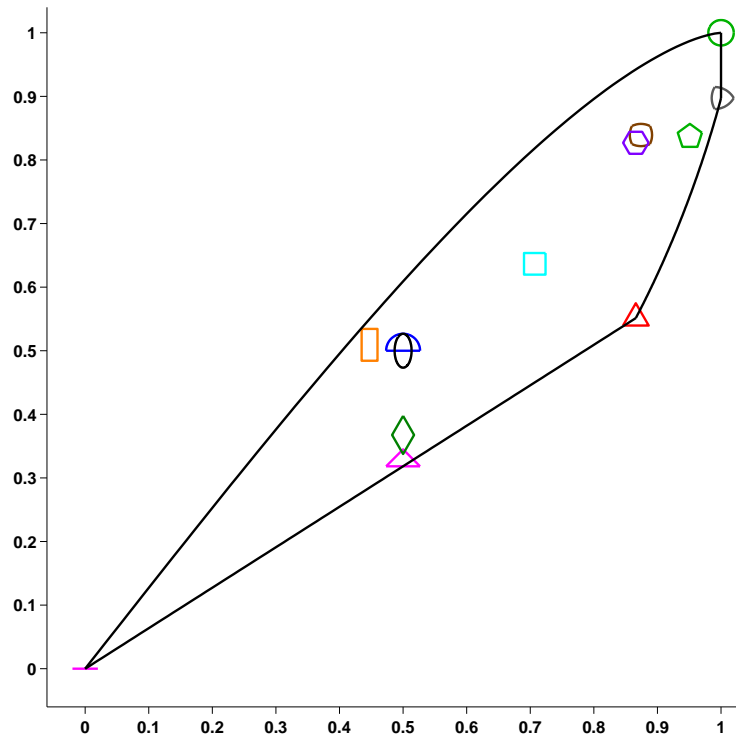
### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, le descripteur de forme 2-D appelé diagramme de forme a été présenté. Il permet, grâce à l'utilisation de deux fonctionnelles morphométriques, de décrire la forme d'un ensemble 2-D compact. Ce descripteur possède plusieurs propriétés intéressantes : il est invariant par translation, rotation et changement d'échelle. Rivollier et al. [147] [148] [149] ont étudié en détail les trente et un diagrammes de forme qui peuvent être définis et ont conclu que le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$  ( $\omega / d, 4 A / \pi d^2$ ) est celui qui permet de discriminer au mieux deux ensembles compacts convexes.

Dans la suite du manuscrit, ce diagramme de forme sera utilisé pour décrire la morphométrie d'une projection 2-D d'un objet 3-D convexe (une projection orthographique d'un objet 3-D convexe étant convexe).

Shape diagrams	Axes coordinates		Only defined for compact convex sets
	$x$	$y$	
$\mathcal{D}_1 : (\omega, r, R)$	$x = \omega / 2R$	$y = r / R$	No
$\mathcal{D}_2 : (\omega, A, R)$	$x = \omega / 2R$	$y = A / \pi R^2$	No
$\mathcal{D}_3 : (r, A, R)$	$x = r / R$	$y = A / \pi R^2$	No
$\mathcal{D}_4 : (A, d, R)$	$x = A / \pi R^2$	$y = d / 2R$	No
$\mathcal{D}_5 : (\omega, d, R)$	$x = \omega / 2R$	$y = d / 2R$	No
$\mathcal{D}_6 : (r, d, R)$	$x = r / R$	$y = d / 2R$	No
$\mathcal{D}_7 : (A, P, R)$	$x = A / \pi R^2$	$y = P / 2\pi R$	Yes
$\mathcal{D}_8 : (\omega, P, R)$	$x = \omega / 2R$	$y = P / 2\pi R$	Yes
$\mathcal{D}_9 : (r, P, R)$	$x = r / R$	$y = P / 2\pi R$	Yes
$\mathcal{D}_{10} : (P, d, R)$	$x = P / 2\pi R$	$y = d / 2R$	Yes
$\mathcal{D}_{11} : (\omega, r, d)$	$x = \omega / d$	$y = 2r / d$	No
$\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$	$x = \omega / d$	$y = 4A / \pi d^2$	No
$\mathcal{D}_{13} : (r, A, d)$	$x = 2r / d$	$y = 4A / \pi d^2$	No
$\mathcal{D}_{14} : (A, R, d)$	$x = 4A / \pi d^2$	$y = \sqrt{3}R / d$	No
$\mathcal{D}_{15} : (\omega, R, d)$	$x = \omega / d$	$y = \sqrt{3}R / d$	No
$\mathcal{D}_{16} : (r, R, d)$	$x = 2r / d$	$y = \sqrt{3}R / d$	No
$\mathcal{D}_{17} : (A, P, d)$	$x = 4A / \pi d^2$	$y = P / \pi d$	Yes
$\mathcal{D}_{18} : (\omega, P, d)$	$x = \omega / d$	$y = P / \pi d$	Yes
$\mathcal{D}_{19} : (r, P, d)$	$x = 2r / d$	$y = P / \pi d$	Yes
$\mathcal{D}_{20} : (P, R, d)$	$x = P / \pi d$	$y = \sqrt{3}R / d$	Yes
$\mathcal{D}_{21} : (\omega, r, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 2\pi r / P$	No
$\mathcal{D}_{22} : (\omega, A, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 4\pi A / P^2$	No
$\mathcal{D}_{23} : (r, A, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 4\pi A / P^2$	No
$\mathcal{D}_{24} : (A, R, P)$	$x = 4\pi A / P^2$	$y = 4R / P$	No
$\mathcal{D}_{25} : (\omega, R, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 4R / P$	No
$\mathcal{D}_{26} : (r, R, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 4R / P$	No
$\mathcal{D}_{27} : (A, d, P)$	$x = 4\pi A / P^2$	$y = 2d / P$	No
$\mathcal{D}_{28} : (\omega, d, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 2d / P$	No
$\mathcal{D}_{29} : (r, d, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 2d / P$	No
$\mathcal{D}_{30} : (d, R, P)$	$x = 2d / P$	$y = 4R / P$	No
$\mathcal{D}_{31} : (\omega, r, A)$	$x = \omega^2 / \sqrt{3}A$	$y = \pi r^2 / A$	Yes

Tableau 5.2 – Les trente et un diagrammes de forme.

(a) Famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles 2-D compacts convexes.(b) Diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$  : en noir, le contour du domaine des compacts convexes et en couleur les éléments de la famille  $\mathcal{F}$ .Figure 5.2 – Représentation de la famille  $\mathcal{F}$  dans le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$ .



## Chapitre 6

# Reconstruction d'une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points du plan

L'objectif de ce chapitre est de présenter un algorithme qui a été mis en place durant cette thèse permettant de déterminer automatiquement la valeur optimale du paramètre de contrôle des méthodes de reconstruction d'une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points du plan telles que les  $\alpha$ -shapes, LDA- $\alpha$ -shapes, etc.

La reconstruction d'une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points est une étape importante dans un grand nombre d'applications touchant des domaines aussi variés que la vision par ordinateur, l'analyse d'image, le clustering ou la modélisation. Tout l'enjeu est de reconstruire une forme échantillonnée à partir de son échantillon seulement, tout en respectant sa topologie. D'un point de vue visuel, cette reconstruction est assez aisée à effectuer. Par exemple, sur la figure 6.1, il est assez facile de reconnaître que l'ensemble de points représente une forme simplement connexe, un chameau, et il est même assez facile de tracer manuellement l'enveloppe de cet ensemble de points. D'un point

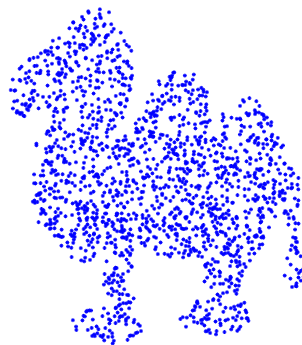


Figure 6.1 – Un ensemble de points du plan représentant un chameau.

de vue informatique, cette reconstruction est beaucoup plus complexe à effectuer, en particulier si la forme à reconstruire est non convexe. Jarvis [79] est le premier à avoir considéré la forme comme une généralisation de l'enveloppe convexe. Quelques années plus tard Edelsbrunner, Kirkpatrick et Seidel [52] ont introduit le concept d' $\alpha$ -shapes qui est une définition mathématique rigoureuse de la notion d'enveloppe convexe généralisée. Plus précisément, la méthode  $\alpha$ -shapes est une filtration de

la triangulation de Delaunay [44] qui dépend de la valeur du paramètre réel  $\alpha$ . Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas de reconstruire une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points non uniformément répartis. Pour pallier cette limite, plusieurs méthodes ont été proposées : les weighted- $\alpha$ -shapes [51], les  $\mathcal{A}$ -shapes [119], les conformal- $\alpha$ -shapes [31] ou encore les LDA- $\alpha$ -shapes [109]. Les méthodes weighted- $\alpha$ -shapes, conformal- $\alpha$ -shapes, LDA- $\alpha$ -shapes sont toutes des méthodes basées sur la filtration de la triangulation de Delaunay qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres de contrôle alors que la méthode  $\mathcal{A}$ -shapes est un sous-graphe de la triangulation de Delaunay qui dépend du paramètre  $\mathcal{A}$  qui est un ensemble de points. Potentiellement, toutes ces méthodes sont capables de reconstruire une forme suffisamment échantillonnée à partir d'un ensemble de points non uniformément répartis. Cependant, la méthode LDA- $\alpha$ -shapes a été privilégiée car :

- elle est très facile à implémenter et efficace du point de vue temps de calcul ;
- elle ne dépend que d'un seul paramètre de contrôle ;
- il a été démontré que la reconstruction est garantie sous certaines conditions d'échantillonnage [33] ;
- elle a été étendue en dimension quelconque [33]. L'algorithme proposée dans ce chapitre pourrait donc lui aussi être étendue à  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 3$ ).

## 6.1 LDA- $\alpha$ -shapes

La méthode LDA- $\alpha$ -shapes (Locally-Density-Adaptive- $\alpha$ -shapes) [109] [33] permet de reconstruire une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points non nécessairement uniformément distribués. Pour cela, elle filtre la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points considéré en fonction des variations locales de densité de l'échantillonnage et de la valeur du paramètre de contrôle  $\alpha \in [0; 1]$ . Soient  $Del(P)$  la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points  $P$  donné (figure 6.2),  $\alpha$  un réel dans  $[0; 1]$  et soient  $D$  et  $D'$  les disques circonscrits aux triangles de Delaunay de sommets  $p, p', p''$  et  $p, p'', p'''$  respectivement.  $D$  est dit LDA- $\alpha$ -empty si le rayon  $r$  du disque  $D$  vérifie :

$$\frac{r_{min}(p)}{r} \leq \alpha \text{ et } \frac{r_{min}(p')}{r} \leq \alpha \text{ et } \frac{r_{min}(p'')}{r} \leq \alpha \quad (6.1)$$

où  $r_{min}(p)$  ( $r_{min}(p')$  et  $r_{min}(p'')$ , respectivement) désigne le rayon du plus petit disque circonscrit aux triangles de Delaunay ayant  $p$  comme sommet ( $p'$  et  $p''$ , respectivement).

Par définition, les disques circonscrits aux triangles de Delaunay sont vides. Si  $D$  et  $D'$  sont LDA- $\alpha$ -empty alors il existe une large zone ( $D \cup D'$ ) sans point à l'intérieur entourée par une zone plus dense. Localement, il y a donc une variation de la densité des points. Par conséquent, la zone  $D \cup D'$  représente probablement un trou et dans ce cas, l'arête commune  $pp''$  aux deux triangles  $D$  et  $D'$  est éliminée de la triangulation de Delaunay. De même, si  $D$  et  $D'$  ne sont pas LDA- $\alpha$ -empty alors localement la densité des points ne varie pas, l'arête commune aux deux triangles  $D$  et  $D'$  est donc aussi éliminée de la triangulation de Delaunay. Enfin, si l'un des deux disques ( $D$  ou  $D'$ ) est LDA- $\alpha$ -empty et l'autre ne l'est pas, l'arête commune aux deux triangles  $D$  et  $D'$  de la triangulation de Delaunay est conservée car la variation locale de la densité des points indique la présence d'un « contour » de la forme à reconstruire.

En fonction de la variation locale de la densité des points et de la valeur du paramètre de contrôle  $\alpha \in [0; 1]$ , une arête de la triangulation de Delaunay est donc supprimée ou non. Par exemple, si  $\alpha = 0$ , le LDA-0-shape correspond à l'enveloppe convexe de l'ensemble de points. En revanche, si

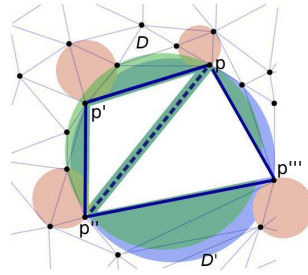


Figure 6.2 – Triangulation de Delaunay d'un ensemble de points.

$\alpha = 1$ , toutes les arêtes de la triangulation de Delaunay sont supprimées, le LDA-1-shape correspond à l'ensemble de points lui-même. Les LDA- $\alpha$ -shapes décrivent une famille monotone (lorsqu'une arête est supprimée, elle ne réapparaît plus) de formes du plan quand  $\alpha$  varie dans  $[0; 1]$  allant de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points à l'ensemble de points lui-même.

La figure 6.3 montre l'influence de la valeur du paramètre  $\alpha$  sur la qualité de la reconstruction de l'ensemble de points « haricot ». Visuellement parlant, une bonne reconstruction serait, par exemple, la forme reconstruite grâce au LDA-0, 26-shape mais certainement pas grâce au LDA-0-shape. Pour garantir une bonne reconstruction, il est donc nécessaire de pouvoir sélectionner de manière automatique le paramètre de contrôle  $\alpha$ .

**Remarque 6.1** *Pour un ensemble de points donné, il est important de noter que les valeurs prises par le paramètre  $\alpha$  peuvent être restreintes à un ensemble fini de valeurs  $\{\alpha_k\}_{k \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  ( $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \alpha_k \in [0; 1]$ ).*

## 6.2 Sélection automatique du paramètre de contrôle $\alpha$

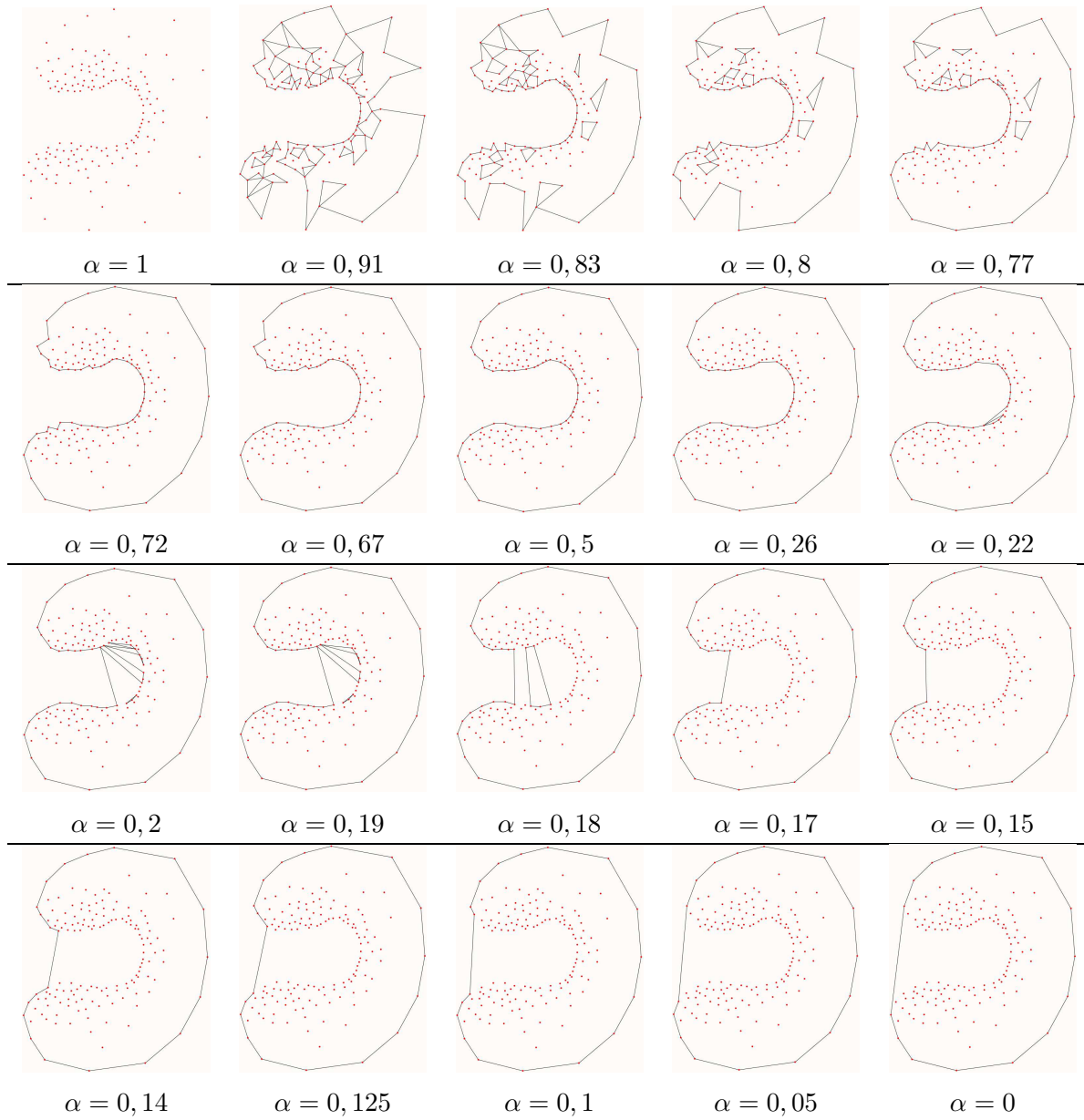
Dans la littérature, très peu d'articles [110] [50] font référence à la sélection automatique du/des paramètres de contrôles des différentes méthodes permettant de reconstruire une forme à partir d'un ensemble de points. Dans les deux articles précédemment cités, la sélection du paramètre de contrôle est basée sur le concept d'arbre couvrant de poids minimal. Le second article définit aussi un critère basé sur la longueur des arêtes de la triangulation de Delaunay. La sélection du paramètre optimal est donc proposée sans aucun lien avec la perception visuelle humaine. Contrairement à ces études, il est proposé dans cette section 6.2 d'estimer la valeur optimale du paramètre de contrôle  $\alpha$  de la méthode LDA- $\alpha$ -shapes en adéquation avec la perception visuelle humaine [194] [198] [199] [200].

Il est supposé dans cette étude que l'ensemble de points considéré n'est pas bruité et représente une forme simplement connexe. Par conséquent, seule l'enveloppe extérieure des LDA- $\alpha$ -shapes est prise en compte (il n'y a pas de trou). Par exemple sur la figure 6.3, les arêtes du LDA-0, 77-shape représentant des trous ne sont pas prises en considération. Sous ces hypothèses, il est donc possible de se limiter aux LDA- $\alpha$ -shapes possédant les propriétés suivantes :

- l'enveloppe extérieure du LDA- $\alpha$ -shape doit contenir tous les points de l'échantillon ;
- l'enveloppe extérieure du LDA- $\alpha$ -shape est composé d'une seule composante connexe.

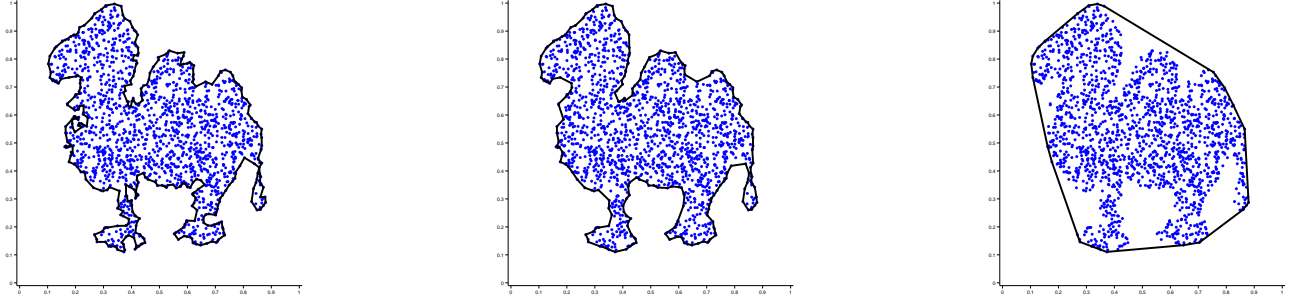
Quelle que soit la valeur de  $\alpha$  appartenant à  $\{\alpha_k\}_{k \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ), il est très facile de vérifier les propriétés précédentes. Ainsi, seulement certaines valeurs de  $\alpha$  ( $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  avec  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont solutions de l'étude.



Figure 6.3 – LDA- $\alpha$ -shapes de l'ensemble de points haricot pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

### 6.2.1 Quelle est la forme perçue d'un ensemble de points ?

La forme perçue d'un ensemble de points est très subjective. Elle est principalement influencée par l'agencement spatial des points et par plusieurs facteurs cognitifs. Néanmoins, l'enveloppe d'un ensemble de points doit être proche des points, mais aussi régulière (une enveloppe tortueuse n'est pas désirée). Ces deux caractéristiques peuvent se traduire mathématiquement par : l'enveloppe des points a une aire minimale et un périmètre minimal. Malheureusement, ces deux objectifs sont contradictoires. En effet, le périmètre de l'enveloppe des points, noté  $P(\alpha)$ , peut seulement être minimisé en maximisant son aire, notée  $A(\alpha)$ , et vice versa. L'enveloppe convexe ( $\alpha = \alpha_n = 0$ ) a une aire maximum et un périmètre minimum tandis que la première enveloppe ( $\alpha = \alpha_1$ ) a une aire minimum et un périmètre maximum. Par conséquent, une enveloppe « raisonnable », *i.e.* visuellement satisfaisante, a une aire « relativement petite » et un périmètre « relativement petit » (figure 6.4).



(a) Enveloppe du LDA- $\alpha_1$ -shape (enveloppe tortueuse).  $A(\alpha_1)=0.34$ ,  $P(\alpha_1)=5.73$ .

(b) Enveloppe du LDA- $\alpha_i$ -shape (enveloppe raisonnable).  $A(\alpha_i)=0.36$ ,  $P(\alpha_i)=4.41$ .

(c) Enveloppe du LDA- $\alpha_n$ -shape (enveloppe convexe).  $A(\alpha_n)=0.50$ ,  $P(\alpha_n)=2.63$ .

Figure 6.4 – Aire et périmètre de plusieurs enveloppes de LDA- $\alpha$ -shapes. En noir, l'enveloppe des LDA- $\alpha$ -shapes.

### 6.2.2 Le critère proposé

Tout d'abord, pour que l'aire et le périmètre de l'enveloppe du LDA- $\alpha$ -shape soient homogènes, une normalisation doit être effectuée. Soient  $\overline{A(\alpha)}$  et  $\overline{P(\alpha)}$  l'aire et le périmètre normalisés de l'enveloppe du LDA- $\alpha$ -shape respectivement :

$$\overline{A(\alpha)} = \frac{A(\alpha) - A(\alpha_1)}{A(\alpha_n = 0) - A(\alpha_1)}, \overline{P(\alpha)} = \frac{P(\alpha) - P(\alpha_n)}{P(\alpha_1) - P(\alpha_n)} \quad (6.2)$$

Ensuite, il est important de noter que si la forme perçue est convexe, l'enveloppe convexe est alors l'enveloppe « raisonnable » recherchée et dans ce cas il suffit de minimiser le périmètre. Par contre, si la forme perçue possède beaucoup de concavités, la première enveloppe ( $\alpha = \alpha_1$ ) est alors l'enveloppe « raisonnable » recherchée et dans ce cas il suffit de minimiser l'aire. Le critère à minimiser dépend donc de trois paramètres : l'aire et le périmètre normalisés de l'enveloppe du LDA- $\alpha$ -shape et la convexité de la forme perçue. Le critère proposé, noté  $APC(\alpha)$ , est défini comme suit :

$$APC(\alpha) = \|((1 - C^6)\overline{A(\alpha)}, C^6\overline{P(\alpha)})\|_2 = \sqrt{((1 - C^6)\overline{A(\alpha)})^2 + (C^6\overline{P(\alpha)})^2} \quad (6.3)$$

où  $C \in [0; 1]$  désigne le ratio de convexité de la forme recherchée. Plus  $C$  est proche de 1 (proche de 0, respectivement) plus (moins, respectivement) la forme perçue est convexe. La valeur inconnue de  $C$  est estimée comme suit :

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A(\alpha_i) / A(0) \quad (6.4)$$

La valeur 6 de la puissance pondérant le ratio de convexité a été déterminée de manière empirique après plusieurs tests. Finalement, la valeur optimale de  $\alpha$ , noté  $\alpha_{opt}$ , est trouvée en minimisant  $APC$  :

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha \in \{\alpha_i\}_{i \in [1, n]}} APC(\alpha) \quad (6.5)$$

### 6.2.3 Pertinence du critère proposé

Pour évaluer la pertinence du critère proposé, des tests ont été réalisés sur des images de la base d'images binaires KIMIA [169], chaque image de cette base représentant une composante simplement

connexe plus ou moins convexe. Tout d'abord, pour une image  $I_i$  ( $i \in \mathbb{N}^*$ ) de la base, les pixels du contour de la composante simplement connexe sont extraits et normalisés dans le carré  $[0; 1] \times [0; 1]$  du plan. Ensuite, le polygone dont les sommets sont les pixels du contour de la composante simplement connexe est calculé. Ce polygone est appelé forme de référence et est noté  $S_{I_i}$ . Enfin,  $S_{I_i}$  est échantillonné par un ensemble de points (plus ou moins dense) en utilisant une loi de distribution uniforme ou une loi de distribution hétérogène où la probabilité est plus grande près de l'axe médian du complémentaire de la forme  $S_{I_i}$ . Cet échantillonnage hétérogène correspond à un échantillonnage plus naturel pour préserver les détails de la forme. Trois densités de points ont été testées : faible = 1000 points par unité d'aire, moyenne = 4500 points par unité d'aire et forte = 20000 points par unité d'aire. La figure 6.5 montre le résultat de ce processus d'échantillonnage pour l'image « camel-15 » de la base KIMIA.

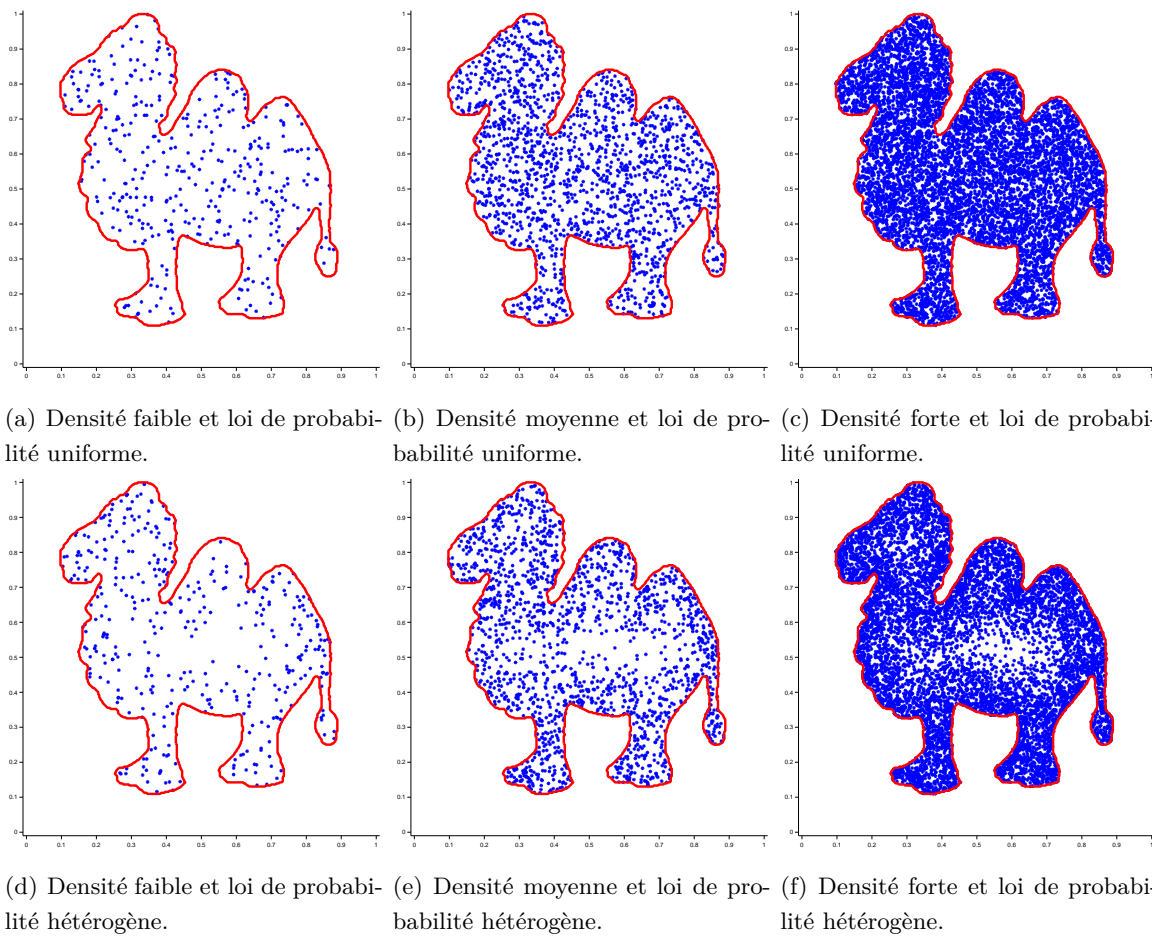


Figure 6.5 – Échantillonnage de la forme « camel-15 » selon trois densités de points (faible, moyenne, forte) et deux lois de probabilités (uniforme, hétérogène). La forme de référence  $S_{\text{camel-15}}$  est en rouge.

À partir d'une forme échantillonnée, la valeur optimale de  $\alpha$ , notée  $\alpha_{optI_i}$ , est calculée en minimisant le critère proposé et est comparée à  $\alpha_{refI_i}$ , la valeur de  $\alpha$  qui minimise l'aire de la différence symétrique, notée  $ASD$ , entre l'enveloppe du LDA- $\alpha$ -shape, notée  $H(\alpha)$ , et  $S_{I_i}$  :

$$\alpha_{refI_i} = \arg \min_{\alpha \in \{\alpha_i\}_{i \in [1, n]}} ASD(H(\alpha), S_{I_i}) \quad (6.6)$$

$H(\alpha_{refI_i})$  est donc la meilleure approximation, parmi les  $H(\alpha)$ , de la forme de référence  $S_{I_i}$  au sens de la différence symétrique. Cette mesure de dissimilarité a été utilisée car elle est en adéquation avec

la perception visuelle humaine. Finalement, l'erreur  $E_{I_i}$  entre  $H(\alpha_{refI_i})$  et  $H(\alpha_{optI_i})$  est quantifiée en calculant l'aire de la différence symétrique normalisée :

$$E_{I_i} = \frac{ASD(H(\alpha_{optI_i}), H(\alpha_{refI_i}))}{A(\alpha_{refI_i})} \quad (6.7)$$

où  $A$  désigne l'opérateur d'aire et  $ASD$  désigne l'aire de la différence symétrique.

Pour obtenir des données statistiques fiables, pour une densité de points donnée et une loi de probabilité donnée, chaque image  $I_i$  de la base est échantillonnée  $m = 1000$  fois et à chaque fois l'erreur  $E_{I_i}$  est calculée. Ainsi, pour quantifier les résultats obtenus, l'erreur moyenne  $\mu_{I_i} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m E_{I_i}^j$

et l'écart-type  $\sigma_{I_i} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (E_{I_i}^j - \mu)^2}$  sont calculés. Le tableau 6.1 synthétise les erreurs moyennes et les écarts-types ainsi calculés pour trois images  $I_1, I_2, I_3$  (figure 6.6) de la base d'images KIMIA.

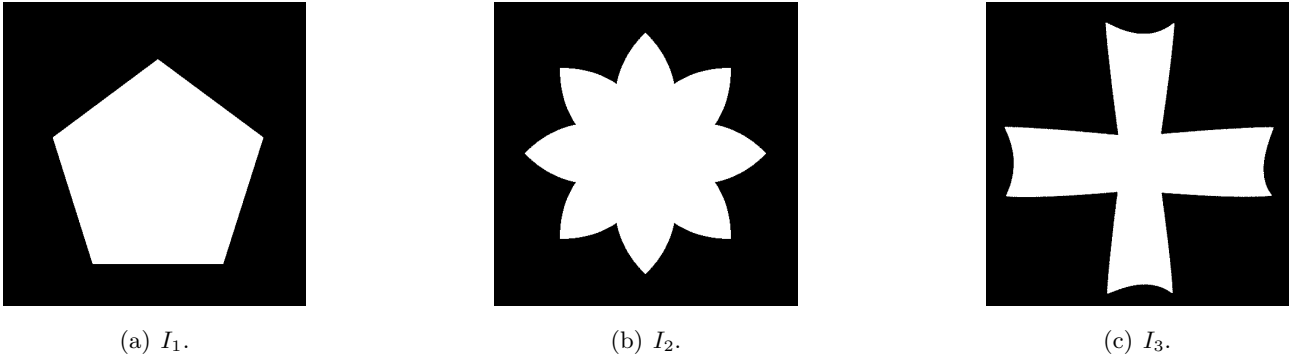


Figure 6.6 – Trois images de la base KIMIA. La forme de référence de chacune de ces images est plus ou moins convexe.

Densité	échantillonnage uniforme			échantillonnage hétérogène		
	faible	moyenne	forte	faible	moyenne	forte
$I_1$ (Convexité = 0.9)	$\mu_{I_1} = 8,47$ $\sigma_{I_1} = 4,55$	$\mu_{I_1} = 2,65$ $\sigma_{I_1} = 0,67$	$\mu_{I_1} = 1,03$ $\sigma_{I_1} = 0,17$	$\mu_{I_1} = 7,62$ $\sigma_{I_1} = 5,32$	$\mu_{I_1} = 2,22$ $\sigma_{I_1} = 0,53$	$\mu_{I_1} = 0,87$ $\sigma_{I_1} = 0,14$
$I_2$ (Convexité = 0.7)	$\mu_{I_2} = 13,57$ $\sigma_{I_2} = 8,02$	$\mu_{I_2} = 3,61$ $\sigma_{I_2} = 2,45$	$\mu_{I_2} = 0,59$ $\sigma_{I_2} = 0,46$	$\mu_{I_2} = 12,21$ $\sigma_{I_2} = 8,89$	$\mu_{I_2} = 2,55$ $\sigma_{I_2} = 1,79$	$\mu_{I_2} = 0,48$ $\sigma_{I_2} = 0,39$
$I_3$ (Convexité = 0.5)	$\mu_{I_3} = 23,75$ $\sigma_{I_3} = 9,30$	$\mu_{I_3} = 10,12$ $\sigma_{I_3} = 4,44$	$\mu_{I_3} = 3,38$ $\sigma_{I_3} = 1,29$	$\mu_{I_3} = 22,79$ $\sigma_{I_3} = 10,61$	$\mu_{I_3} = 8,21$ $\sigma_{I_3} = 4,09$	$\mu_{I_3} = 2,51$ $\sigma_{I_3} = 0,98$

Tableau 6.1 – Évaluation du critère proposé sur trois images plus ou moins convexes. L'erreur moyenne  $\mu_{I_i}$  est en pourcentage et est calculée pour trois densités de points (faible, moyenne, forte) et deux lois de probabilités (uniforme, hétérogène).  $\sigma_{I_i}$  désigne l'écart-type.

Il est important de remarquer que, quelle que soit l'image  $I_i$  considérée ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) et quelle que soit la loi de probabilité considérée, plus la densité de points augmente, plus l'erreur moyenne  $\mu_{I_i}$  est petite. Pour une densité de points forte, quelle que soit la loi de probabilité considérée et quelle que soit

l'image  $I_i$  considérée ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ), l'erreur moyenne est même inférieure à 4%. Ces résultats montrent la pertinence du critère proposé. En effet, que quelle que soit l'image  $I_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ), l'enveloppe du LDA- $\alpha_{optI_i}$ -shape est proche de l'enveloppe du LDA- $\alpha_{refI_i}$ -shape qui est elle même la meilleure approximation de la forme de référence  $S_{I_i}$  au sens de la différence symétrique.

#### 6.2.4 Évaluation quantitative de l'algorithme de sélection automatique du paramètre $\alpha$

Pour évaluer quantitativement l'algorithme de sélection automatique du paramètre  $\alpha$  proposé, un ensemble de  $N = 1400$  images binaires, noté  $\{I_1, \dots, I_{1400}\}$ , de la base d'images KIMIA a été sélectionné, chaque image binaire représentant une composante simplement connexe plus ou moins convexe. Comme expliqué dans la section 6.2.3, pour chaque image binaire de l'ensemble considéré, la forme de référence  $S_{I_i}$  est calculée puis échantillonnée par un ensemble de points (plus ou moins dense) en utilisant une loi de distribution uniforme ou une loi de distribution hétérogène. Comme précédemment, trois densités de points ont été testées : faible = 1000 points par unité d'aire, moyenne = 4500 points par unité d'aire et forte = 20000 points par unité d'aire.

À partir d'une forme échantillonnée, la valeur optimale de  $\alpha$ , notée  $\alpha_{optI_i}$ , est calculée en minimisant le critère proposé et l'enveloppe optimale du LDA- $\alpha_{optI_i}$ -shape, notée  $H(\alpha_{optI_i})$ , est comparée à la forme de référence  $S_{I_i}$  en utilisant comme mesure d'erreur, l'aire de la différence symétrique normalisée (équation 6.8).

$$E_{I_i} = \frac{ASD(H(\alpha_{optI_i}), S_{I_i})}{A(S_{I_i})} \quad (6.8)$$

où  $A$  désigne l'opérateur d'aire et  $ASD$  l'aire de la différence symétrique.

Pour obtenir des données statistiques fiables, pour une densité de points donnée et une loi de probabilité donnée, l'erreur moyenne  $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{I_i}$  et l'écart-type  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_{I_i} - \mu)^2}$  sont calculés. Le tableau 6.2 synthétise les résultats pour les 1400 images binaires considérées.

Densité	échantillonnage uniforme			échantillonnage hétérogène		
	faible	moyenne	forte	faible	moyenne	forte
<i>KIMIA</i>	$\mu = 32, 89$	$\mu = 15, 90$	$\mu = 6, 92$	$\mu = 31, 33$	$\mu = 14, 30$	$\mu = 5, 95$
<i>database</i>	$\sigma = 21, 94$	$\sigma = 14, 15$	$\sigma = 7, 33$	$\sigma = 22, 57$	$\sigma = 15, 61$	$\sigma = 6, 72$

Tableau 6.2 – Évaluation quantitative de l'algorithme de sélection automatique du paramètre  $\alpha$  sur la base d'images KIMIA. L'erreur moyenne  $\mu$  est exprimée en pourcentage et est calculée pour trois densités de points (faible, moyenne, forte) et deux lois de probabilités (uniforme, hétérogène).  $\sigma$  désigne l'écart-type.

Étant donné l'hétérogénéité des formes étudiées, l'algorithme proposé donne des résultats satisfaisants. En effet, quelle que soit la loi d'échantillonnage considérée, pour une densité de points forte, la forme de référence est estimée avec une erreur moyenne inférieure à 7%. De plus, il convient de relativiser cette valeur d'erreur car l'enveloppe  $H(\alpha_{optI_i})$  ( $i \in \llbracket 1, 1400 \rrbracket$ ) est comparée à la forme de référence  $S_{I_i}$  ( $i \in \llbracket 1, 1400 \rrbracket$ ), forme qui peut être reconstruite seulement avec une densité de points infinie. Enfin, pour une densité de points faible, l'erreur peut paraître assez importante, cependant

pour une telle densité, la forme est faiblement échantillonnée : même visuellement, l'enveloppe des points est difficile à estimer.

### 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de la littérature appelée LDA- $\alpha$ -shapes a permis de reconstruire une forme échantillonnée à partir d'un ensemble de points. Cette méthode, contrairement à d'autres méthodes de la littérature, présente plusieurs avantages. Elle permet en particulier de reconstruire une forme à partir d'un ensemble de points non uniformément distribués. Malheureusement, elle dépend d'un paramètre de contrôle appelé  $\alpha$  et la valeur de ce paramètre de contrôle influe grandement sur la qualité de la reconstruction.

C'est pourquoi un algorithme, en adéquation avec la perception visuelle humaine, permettant de calculer automatiquement la valeur optimale de ce paramètre a été élaboré. Cet algorithme est basé sur la minimisation d'un critère quantitatif dépendant de  $\alpha$  faisant intervenir l'aire, le périmètre de l'enveloppe du LDA- $\alpha$ -shape et la convexité de la forme recherchée. Ce critère a tout d'abord été validé, puis évalué quantitativement en utilisant la base d'images binaires KIMIA. Les résultats montrent que l'utilisation conjointe des LDA- $\alpha$ -shapes et de l'algorithme de sélection automatique du paramètre  $\alpha$  permet de reconstruire une forme échantillonnée avec une erreur assez faible : quelle que soit la loi d'échantillonnage considérée, pour une densité de points forte, l'enveloppe d'une forme échantillonnée simplement connexe est estimée avec une erreur moyenne inférieure à 7%.

Enfin, il est important de noter que l'algorithme développé est générique. En effet, il pourrait être utilisé avec d'autres méthodes de reconstruction dépendant d'un seul paramètre de contrôle. Durant cette thèse, il a d'ailleurs été testé avec la méthode de reconstruction  $\alpha$ -shapes et donne des résultats satisfaisants quand les points sont distribués de manière uniforme.

Dans la suite de cette thèse, la méthode LDA- $\alpha$ -shapes ainsi que l'algorithme permettant de calculer automatiquement la valeur optimale du paramètre  $\alpha$  proposé vont être utilisés pour déterminer de manière automatique l'enveloppe d'un ensemble de points non uniformément distribués.

**Remarque 6.2** *L'algorithme qui vient d'être présenté dans ce chapitre a été publié en 2011 dans une conférence internationale à comité de lecture avec proceedings LNCS : « International Conference on Image Analysis and Recognition » (ICIAR). Le lecteur est invité à consulter la référence suivante [140].*

---

La deuxième partie de ce manuscrit a introduit des concepts et outils utilisés par la suite. La prochaine partie est consacrée aux différents développements réalisés durant cette thèse afin d'estimer la taille et la forme d'un objet 3-D à partir de ses projections orthographiques. Elle concerne des travaux de recherche finalisés et en cours de publication [137] [141] [142].



Troisième partie

Développement





## Sommaire de la Troisième partie

<b>7</b>	<b>Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D</b>	<b>55</b>
7.1	Fonction de densité de probabilité des aires projetées . . . . .	55
7.1.1	Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$	56
7.1.2	Détermination de la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$ . . . . .	57
7.1.3	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$ . . . . .	58
7.2	Maximum de vraisemblance de $a$ des fonctions de densité de probabilité des aires projetées	60
7.3	Problème d'optimisation . . . . .	61
7.4	Résultats . . . . .	63
7.4.1	Influence du paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	63
7.4.2	Influence du paramètre de taille $a$ . . . . .	64
7.5	Amélioration de la méthode proposée . . . . .	69
7.5.1	Fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés . . . . .	69
7.5.2	Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$	69
7.5.3	Détermination de la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	71
7.5.4	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	71
7.5.5	Maximum de vraisemblance de $a$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés . . . . .	75
7.5.6	Résultats . . . . .	75
7.6	Conclusion . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Estimation de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D</b>	<b>85</b>
8.1	Le descripteur de forme stéréologique proposé . . . . .	86
8.1.1	Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$	86
8.1.2	Détermination de la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	88
8.1.3	Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	88
8.2	Propriétés du descripteur de forme stéréologique proposé . . . . .	92

8.2.1	Caractérisation géométrique du domaine de définition de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	92
8.2.2	Étude de la robustesse au bruit de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . . . . .	93
8.3	Utilisation du descripteur de forme stéréologique proposé pour estimer le paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	94
8.3.1	Maximum de vraisemblance de $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées . . . . .	94
8.3.2	Problème d'optimisation . . . . .	95
8.3.3	Résultats . . . . .	95
8.4	Conclusion . . . . .	96
<b>9</b>	<b>Estimation de la taille et de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D</b> . . . . .	<b>105</b>
9.1	Maximum de vraisemblance de $a$ et $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité des aires projetées et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées . . . . .	107
9.2	Problème d'optimisation . . . . .	107
9.3	Résultats . . . . .	107
9.3.1	Influence du paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	108
9.3.2	Influence du paramètre de taille $a$ . . . . .	108
9.4	Amélioration de la méthode proposée . . . . .	111
9.4.1	Maximum de vraisemblance de $a$ et $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées . . . . .	111
9.4.2	Résultats . . . . .	111
9.5	Conclusion . . . . .	113
<b>10</b>	<b>Comparaison de la méthode proposée à une méthode de stéréologie classique</b> . . . . .	<b>117</b>
10.1	La méthode de stéréologie projective classique . . . . .	117
10.2	Résultats . . . . .	118
10.2.1	Influence du paramètre de forme $\alpha_2$ . . . . .	119
10.2.2	Influence du paramètre de taille $a$ . . . . .	120
10.3	Conclusion . . . . .	120

---

## Chapitre 7

# Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

Ce chapitre propose d'estimer la « taille » d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D. Plus précisément, ce chapitre propose d'estimer la valeur du paramètre de taille  $a$  d'un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  de type  $CO$ , de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2$ . En effet,  $CO, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant des paramètres de forme, leurs valeurs sont supposées connues dans ce chapitre. Plus spécifiquement, il est supposé que  $CO$  est connu, que  $\alpha_1$  est égal à 1 et que la valeur de  $\alpha_2$  est connue et plus grande que 1. Sous ces hypothèses une méthode basée sur le maximum de vraisemblance de  $a$  des fonctions de densité de probabilité des aires projetées est développée pour estimer la valeur du paramètre de taille inconnue  $a$ .

### 7.1 Fonction de densité de probabilité des aires projetées

Soit  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  un objet 3-D convexe de type  $CO$ , de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2$ . Soit  $A$  la variable aléatoire continue appelée « aire projetée » associée à une projection orthographique de l'objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ . La fonction de densité de probabilité de  $A$  est notée  $F_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ .

Après plusieurs tests numériques, il semble que, quel que soit l'objet  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  considéré, la fonction  $F_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  soit définie sur un ensemble simplement connexe. Dans cette étude l'ensemble de définition de  $F_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  est donc supposé être un intervalle. Formellement,  $F_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  est définie comme suit :

$$F_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2} : \begin{cases} [A_{min,CO,a,\alpha_1,\alpha_2}; A_{max,CO,a,\alpha_1,\alpha_2}] & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ A & \mapsto F_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(A) \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $A_{min,CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  ( $A_{max,CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ , respectivement) représente l'aire projetée minimum (maximum, respectivement) de l'objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ .

Ayant supposé dans ce chapitre 7 que  $\alpha_1$  est égal à 1, les notations suivantes sont adoptées : la fonction de densité de probabilité des aires projetées d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ ,  $F_{CO,a,1,\alpha_2}$ , est notée  $f_{CO,a,\alpha_2}$  et son aire projetée minimum (maximum, respectivement) est notée  $A_{min,CO,a,\alpha_2}$  ( $A_{max,CO,a,\alpha_2}$ , respectivement). Ainsi :

$$f_{CO,a,\alpha_2} : \begin{cases} [A_{min,CO,a,\alpha_2}; A_{max,CO,a,\alpha_2}] & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ A & \mapsto f_{CO,a,\alpha_2}(A) = F_{CO,a,1,\alpha_2}(A) \end{cases} \quad (7.2)$$

Pour des objets 3-D simples comme par exemple des ellipsoïdes de révolution allongés ou des ellipsoïdes de révolution aplatis, déterminer analytiquement la fonction de densité de probabilité des aires projetées [190] [20] [191] [21] est possible. Pour des objets 3-D plus complexes, cela est plus difficile voire impossible. Pour cette raison, et parce que la fonction de densité de probabilité des aires projetées proposée se veut générique, il a été décidé de générer cette fonction de manière numérique à l'aide du simulateur développé au chapitre 4.

Commençons donc tout d'abord par déterminer l'ensemble de définition de  $f_{CO,a,\alpha_2}$ , *i.e.* les bornes  $A_{min,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{max,CO,a,\alpha_2}$ , avant de générer numériquement cette densité de probabilité.

### 7.1.1 Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$

Pour les objets de type ellipsoïde de révolution allongé, cylindre à base circulaire et parallélépipède rectangle à base carrée ( $\alpha_1 = 1$ ), les bornes  $A_{min,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{max,CO,a,\alpha_2}$  sont connues théoriquement, notées  $A_{minTh,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{maxTh,CO,a,\alpha_2}$  respectivement [191]. Le tableau 7.1 montre l'expression de  $A_{minTh,CO,a,\alpha_2}$  ( $A_{maxTh,CO,a,\alpha_2}$ , respectivement) en fonction de  $a$  et  $\alpha_2$  pour ces types d'objets.

$(CO, a, 1, \alpha_2)$	$A_{minTh,CO,a,\alpha_2}$	$A_{maxTh,CO,a,\alpha_2}$
(Ellipsoïde, $a, 1, \alpha_2$ )	$\pi a^2$	$\pi \alpha_2 a^2$
(Cylindre, $a, 1, \alpha_2$ )	$\min(\pi a^2, 2\alpha_2 a^2)$	$a^2 \sqrt{\pi^2 + 4\alpha_2^2}$
(Parallélépipède rectangle, $a, 1, \alpha_2$ )	$\min(a^2, \alpha_2 a^2)$	$a^2 \sqrt{1 + 2\alpha_2^2}$

Tableau 7.1 – Expression des aires projetées minimum et maximum en fonction des paramètres  $a$  et  $\alpha_2$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre et parallélépipède rectangle ( $\alpha_1 = 1$ ) [191].

En ce qui concerne les objets de type bipyramide à base carrée et pyramide à base carrée ( $\alpha_1 = 1$ ), les bornes  $A_{min,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{max,CO,a,\alpha_2}$  ne sont pas connues théoriquement, des conjectures ont donc été réalisées. Soient  $A_{minConj,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{maxConj,CO,a,\alpha_2}$  les expressions conjecturées de  $A_{min,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{max,CO,a,\alpha_2}$  respectivement. Le tableau 7.2 montre les expressions de  $A_{minConj,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{maxConj,CO,a,\alpha_2}$  en fonction de  $a$  et  $\alpha_2$  pour ces types d'objets.

$(CO, a, 1, \alpha_2)$	$A_{minConj,CO,a,\alpha_2}$	$A_{maxConj,CO,a,\alpha_2}$
(Bipyramide, $a, 1, \alpha_2$ )	$\min(\alpha_2 a^2, \frac{\alpha_2 a^2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \alpha_2^2}})$	$\max(a^2, \sqrt{2}\alpha_2 a^2)$
(Pyramide, $a, 1, \alpha_2$ )	$\min(\frac{1}{2}\alpha_2 a^2, \frac{\alpha_2 a^2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \alpha_2^2}})$	$\max(a^2, \frac{1}{2}a^2 \sqrt{1 + 2\alpha_2^2})$

Tableau 7.2 – Expression des aires projetées minimum et maximum en fonction des paramètres  $a$  et  $\alpha_2$  pour les objets de type bipyramide et pyramide. Contrairement aux expressions du tableau 7.1, ces expressions ont été conjecturées et n'ont pas été démontrées analytiquement.

Afin de vérifier ces conjectures, le processus suivant est réalisé. Pour un objet 3-D de type bipyramide ou pyramide, de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 \geq 1$ ,  $N = 1.000.000$  projections aléatoires (loi uniforme) sont générées grâce au simulateur, et pour chaque projection l'aire est calculée. Notons  $\{A_i\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  la famille des aires projetées ainsi générée. La valeur de l'aire projetée minimum (maximum, respectivement) simulée, notée  $A_{minSim,CO,a,\alpha_2} = \min_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} (\{A_i\})$  ( $A_{maxSim,CO,a,\alpha_2} = \max_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} (\{A_i\})$ , respectivement) ainsi générée est comparée à la valeur de l'aire projetée minimum conjecturée  $A_{minConj,CO,a,\alpha_2}$  (maximum conjecturée  $A_{maxConj,CO,a,\alpha_2}$ , respectivement).

Le tableau 7.3 montre le résultat de ce processus pour les objets de type bipyramide et pyramide de paramètres de taille  $a \in \{1, 100\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 50\}$ ,  $\alpha_1 = 1$  (objets 3-D isotropes et anisotropes).

$(CO, a, 1, \alpha_2)$	$A_{minConj,CO,a,\alpha_2}$	$A_{minSim,CO,a,\alpha_2}$	$A_{maxConj,CO,a,\alpha_2}$	$A_{maxSim,CO,a,\alpha_2}$
(Bipyramide, 1, 1, 1)	0, 8165	0, 81667	1, 4142	1, 4142
(Bipyramide, 1, 1, 50)	0, 9999	0, 99993	70, 711	70, 711
(Bipyramide, 100, 1, 1)	8165	8168, 5	14142	14142
(Bipyramide, 100, 1, 50)	9999	9999	$7,0711e + 05$	$7,0711e + 05$
(Pyramide, 1, 1, 1)	0, 5	0, 50063	1	1
(Pyramide, 1, 1, 50)	0, 9999	0, 99992	35, 359	35, 359
(Pyramide, 100, 1, 1)	5000	5001	10000	10000
(Pyramide, 100, 1, 50)	9999	9999, 1	$3,5359e + 05$	$3,5359e + 05$

Tableau 7.3 – Comparaisons des aires projetées minimum (maximum, respectivement) conjecturées aux aires projetées minimum (maximum, respectivement) simulées pour les objets de type bipyramide et pyramide de paramètres de taille  $a \in \{1, 100\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 50\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ).

Au vu de ces résultats, il est possible d'affirmer que les expressions conjecturées des aires projetées minimum et maximum en fonction des paramètres  $a$  et  $\alpha_2$  pour les objets de type bipyramide et pyramide sont justes. En effet, quelle que soit la valeur de  $a$  et  $\alpha_2$  et quel que soit le type d'objet 3-D considéré, les valeurs de  $A_{minConj,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{minSim,CO,a,\alpha_2}$  sont proches ( $A_{maxConj,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{maxSim,CO,a,\alpha_2}$  respectivement) et de plus, les inégalités suivantes sont toujours respectées :

$$A_{minConj,CO,a,\alpha_2} \leq A_{minSim,CO,a,\alpha_2} \text{ et } A_{maxConj,CO,a,\alpha_2} \geq A_{maxSim,CO,a,\alpha_2}.$$

Par la suite, quel que soit le type d'objet 3-D considéré, aucune distinction ne sera faite entre  $A_{minConj,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{minTh,CO,a,\alpha_2}$  ( $A_{maxConj,CO,a,\alpha_2}$  et  $A_{maxTh,CO,a,\alpha_2}$  respectivement). L'aire projetée minimum (maximum, respectivement) d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  est notée  $A_{min,CO,a,\alpha_2}$  ( $A_{max,CO,a,\alpha_2}$ , respectivement).

Le domaine de définition de la fonction  $f_{CO,a,\alpha_2}$  étant maintenant connu, construisons numériquement cette densité de probabilité.

### 7.1.2 Détermination de la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$

Pour construire numériquement la fonction de densité de probabilité des aires projetées d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , le processus suivant est réalisé. Soit  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  un objet 3-D convexe de type  $CO$ , de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \geq 1$ . Grâce au simulateur développé au chapitre 4,  $N$  ( $N = 1.000.000$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet 3-D sont générées et pour chaque projection  $p_i$  appartenant à  $\{p_i\}_{i \in [1, N]}$  l'aire est calculée. À partir de ces  $N$  valeurs d'aires projetées, un histogramme normalisé  $h$  ( $\int_{[A_{min,CO,a,\alpha_2}; A_{max,CO,a,\alpha_2}]} h = 1$ ) est construit en utilisant l'algorithme de Knuth [88] pour déterminer le nombre de classes optimal, noté  $nbClasse$ . Si nécessaire, une interpolation au plus proche voisin est réalisée sur l'intervalle  $[A_{min,CO,a,\alpha_2}; A_{max,CO,a,\alpha_2}]$  afin que quel que soit  $A$  appartenant à  $[A_{min,CO,a,\alpha_2}; A_{max,CO,a,\alpha_2}]$ ,  $h(A) > 0$ . Cette interpolation est possible car le domaine de définition de  $f_{CO,a,\alpha_2}$  a été déterminé précédemment. La fonction de densité de probabilité des aires projetées de l'objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , *i.e.*  $f_{CO,a,\alpha_2}$ , correspond à l'histogramme

$h$  ainsi construit. La figure 7.1 montre les distributions d'aires projetées ainsi générées pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

### 7.1.3 Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $f_{CO,a,\alpha_2}$

Pour valider la construction numérique de la fonction de densité de probabilité des aires projetées d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  et en particulier valider le nombre de projections  $N$  ( $N = 1.000.000$ ) utilisé pour construire  $f_{CO,a,\alpha_2}$ , le calcul suivant est effectué :

1. pour un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  donné, la fonction de densité de probabilité des aires projetées  $f_{CO,a,\alpha_2}$  est générée  $m$  ( $m = 100$ ) fois et le nombre de classes moyen, noté  $nbClasse_{mean} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m nbClasse_i$ , des fonctions de densité de probabilité  $\{f_{CO,a,\alpha_2}^i\}_{i \in [1,m]}$  est calculé.
2.  $N$  ( $N = 1.000.000$ ) projections orthographiques aléatoires de ce même objet 3-D sont générées et pour chaque projection  $p_i$  appartenant à  $\{p_i\}_{i \in [1,N]}$  l'aire est calculée. À partir de ces  $N$  valeurs d'aires projetées, un histogramme normalisé  $h'$  est construit en utilisant  $nbClasse_{mean}$  nombre de classes. Si nécessaire, une interpolation au plus proche voisin est réalisée sur l'intervalle  $[A_{min,CO,a,\alpha_2}; A_{max,CO,a,\alpha_2}]$  afin que quel que soit  $A$  appartenant à  $[A_{min,CO,a,\alpha_2}; A_{max,CO,a,\alpha_2}]$ ,  $h'(A) > 0$ .
3. l'étape précédente est répétée  $m$  ( $m = 100$ ) fois, générant ainsi une famille de fonction de densité de probabilité des aires projetées, notée  $\{h'_{CO,a,\alpha_2}^i\}_{i \in [1,m]}$ .

Il est important de noter que les éléments de la famille  $\{h'_{CO,a,\alpha_2}^i\}_{i \in [1,m]}$  sont tous calculés avec le même nombre de classes  $nbClasse_{mean}$  contrairement aux éléments de la famille  $\{f_{CO,a,\alpha_2}^i\}_{i \in [1,m]}$ . Par conséquent, les éléments de la famille  $\{h'_{CO,a,\alpha_2}^i\}_{i \in [1,m]}$  sont comparables entre eux. C'est pourquoi, pour quantifier la reproductibilité de  $f_{CO,a,\alpha_2}$ , l'erreur relative moyenne, notée  $MVE$  (Mean Validation Error), est calculée entre  $\{h'_{CO,a,\alpha_2}^i\}_{i \in [1,m]}$  et  $h'_{mean} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h'_{CO,a,\alpha_2}^i$  (équation 7.3).

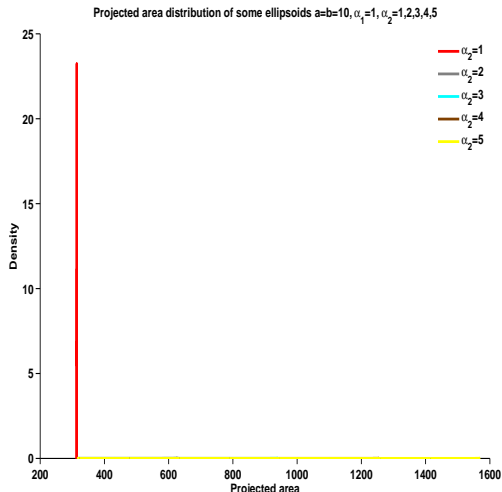
$$MVE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\|h'_{mean} - h'_{CO,a,\alpha_2}^i\|_1}{\|h'_{mean}\|_1} \quad (7.3)$$

où  $\|\cdot\|_1$  désigne la norme  $L_1$ .

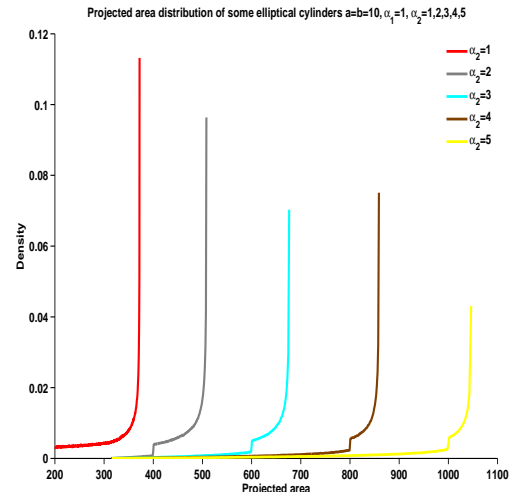
Les tableaux 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 et 7.8 montrent l'erreur  $MVE$  ainsi calculée pour des objets 3-D isotropes et anisotropes, *i.e.* pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètres de taille  $a \in \{1, 100\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 50\}$ .

	Ellipsoïde ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	1,71	1,91	1,67	1,92

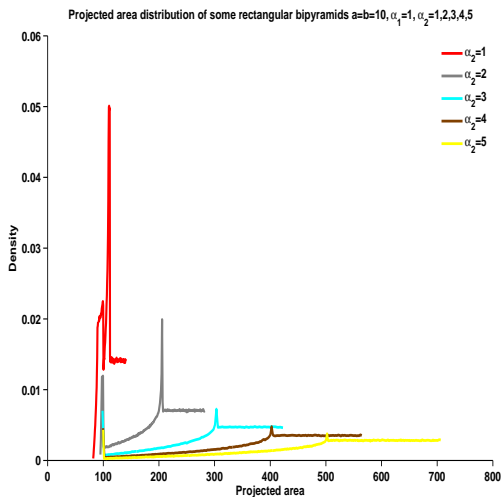
Tableau 7.4 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $f_{CO,a,\alpha_2}$  pour l'objet de type ellipsoïde ( $N = 1.000.000$ ).



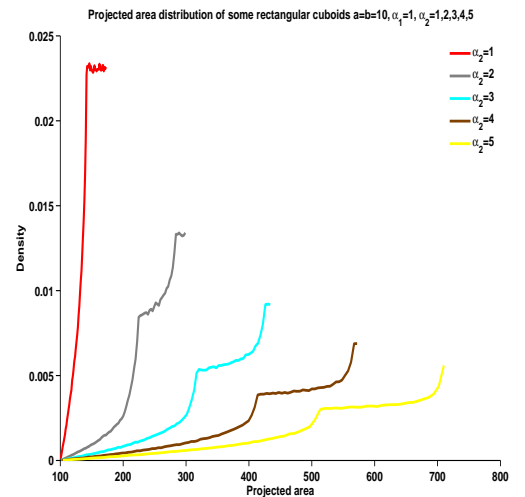
(a) Ellipsoïde.



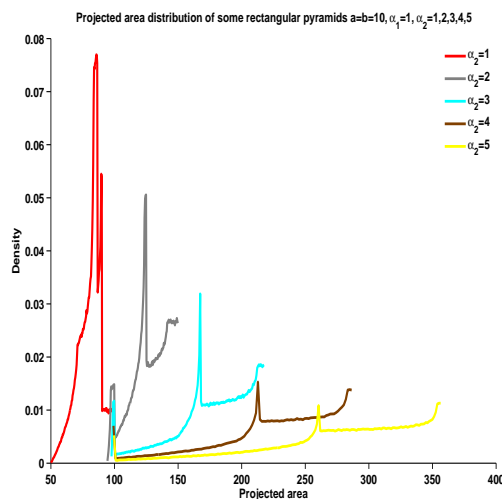
(b) Cylindre.



(c) Bipyramide.



(d) Parallélepède rectangle.



(e) Pyramide.

Figure 7.1 – Densités de probabilité des aires projetées pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .



	Cylindre ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	1,99	2,48	1,96	2,50

Tableau 7.5 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $f_{CO,a,\alpha_2}$  pour l'objet de type cylindre ( $N = 1.000.000$ ).

	Bipyramide ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	0,84	0,54	0,83	0,54

Tableau 7.6 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $f_{CO,a,\alpha_2}$  pour l'objet de type bipyramide ( $N = 1.000.000$ ).

	Parallélépipède rectangle ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	0,56	0,58	0,57	0,57

Tableau 7.7 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $f_{CO,a,\alpha_2}$  pour l'objet de type parallélépipède rectangle ( $N = 1.000.000$ ).

	Pyramide ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	0,87	0,57	0,88	0,57

Tableau 7.8 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $f_{CO,a,\alpha_2}$  pour l'objet de type pyramide ( $N = 1.000.000$ ).

Au vu de ces résultats, il est possible d'affirmer que le nombre de projections  $N$  utilisé pour générer  $f_{CO,a,\alpha_2}$  est suffisant. En effet, dans le pire des cas, *i.e.* pour un objet 3-D convexe de type cylindre, de paramètre de taille  $a = 100$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 50$  ( $\alpha_1 = 1$ ), l'erreur relative moyenne  $MVE$  calculée entre  $\{h'_{\text{Cylindre},100,1,50}^i\}_{i \in \llbracket 1,m \rrbracket}$  et  $h'_{\text{mean}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h'_{\text{Cylindre},100,1,50}^i$  est égale à 2,5%.

## 7.2 Maximum de vraisemblance de $a$ des fonctions de densité de probabilité des aires projetées

Soit  $A$  la variable aléatoire continue « aire projetée » associée à une projection 2-D d'un objet 3-D ( $CO, a, 1, \alpha_2$ ) inconnu. Soient  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) réalisations de  $A$ . Les aires projetées d'un objet 3-D étant indépendantes et identiquement distribuées (iid), la vraisemblance de  $a$  au vu des  $n$

observations  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  est définie comme suit (équation 7.4) :

$$L_{CO, \alpha_2}^1(a) = \prod_{i=1}^n f'_{CO, a, \alpha_2}(A_i) \quad (7.4)$$

où :

$$f'_{CO, a, \alpha_2} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A_i & \mapsto & \begin{cases} f_{CO, a, \alpha_2}(A_i) & \text{si } A_i \in [A_{min, CO, a, \alpha_2}; A_{max, CO, a, \alpha_2}] \\ 0 & \text{si } A_i \notin [A_{min, CO, a, \alpha_2}; A_{max, CO, a, \alpha_2}] \end{cases} \end{cases}$$

et  $f_{CO, a, \alpha_2}$  est la fonction de densité de probabilité des aires projetées définie précédemment. En conséquence, le maximum de vraisemblance de  $a$  est défini par :

$$\hat{a} = \arg \max_{a \in \mathbb{R}_+^*} L_{CO, \alpha_2}^1(a) \quad (7.5)$$

où  $\hat{a}$  désigne la valeur estimée de  $a$ .

### 7.3 Problème d'optimisation

Pour résoudre l'équation 7.5, deux solutions sont envisageables : une méthode de recherche exhaustive ou une méthode d'optimisation [172]. Au cours de cette thèse, la méthode de Nelder-Mead basée sur l'algorithme du simplexe [94] a été testée et bien que les résultats obtenus aient été encourageants, elle n'a pas été retenue. En effet, n'ayant qu'un seul paramètre à optimiser et la convergence vers le maximum global de la fonction de vraisemblance  $L_{CO, \alpha_2}^1$  n'étant pas garantie (aucune propriété de la fonction à optimiser est connue), la méthode de recherche exhaustive a été privilégiée. De plus, au vu des hypothèses faites précédemment (le type de l'objet 3-D ainsi que ses paramètres de forme sont connus), l'espace de recherche du paramètre de taille  $a$  (l'ensemble des candidats) peut être borné.

**Preuve :** Bornes de l'ensemble des candidats.

Soient  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques d'un objet 3-D convexe  $(CO_0, a_0, 1, \alpha_0)$  et  $\{A_{0i}\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  les  $n$  valeurs d'aires de ces projections. Définissons tout d'abord l'ensemble  $C$  des candidats.

$a$  est candidat si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_{0i} \in [A_{min, CO_0, a, \alpha_0}; A_{max, CO_0, a, \alpha_0}]$  si et seulement si

$$L_{CO_0, \alpha_0}^1(a) = \prod_{i=1}^n f'_{CO_0, a, \alpha_0}(A_{0i}) = \prod_{i=1}^n f_{CO_0, a, \alpha_0}(A_{0i}) > 0. \text{ Donc } C = \{a, L_{CO_0, \alpha_0}^1(a) > 0\}.$$

Montrons à présent que l'ensemble  $C$  des candidats est borné. Soit  $a$  appartenant à  $C$ .

$$L_{CO_0, \alpha_0}^1(a) = \prod_{i=1}^n f'_{CO_0, a, \alpha_0}(A_{0i}) > 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{0i} \in [A_{min, CO_0, a, \alpha_0}; A_{max, CO_0, a, \alpha_0}].$$

– Si  $CO_0$  est un ellipsoïde :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \pi a^2 \leq A_{0i} \leq \pi \alpha_0 a^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{A_{0i}}{\pi \alpha_0}} \leq a \leq \sqrt{\frac{A_{0i}}{\pi}}. \text{ Or, } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \pi a_0^2 \leq A_{0i} \leq \pi \alpha_0 a_0^2 \text{ donc } \frac{a_0}{\sqrt{\alpha_0}} \leq a \leq \sqrt{\alpha_0} a_0.$$

Il est important de remarquer que le paramètre de taille  $a$  est uniquement borné par des termes indexés par 0.  $a$  est minoré par  $m_{Eu}(a_0, \alpha_0) = \frac{a_0}{\sqrt{\alpha_0}}$  et majoré par  $M_{Eu}(a_0, \alpha_0) = \sqrt{\alpha_0} a_0$ .

– Si  $CO_0$  est un cylindre :

$$\text{Si } \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2\alpha_0} a_0}{(\pi^2 + 4\alpha_0^2)^{1/4}} \leq a \leq \frac{a_0}{\sqrt{2\alpha_0}} (\pi^2 + 4\alpha_0^2)^{1/4}.$$

$$\text{Si } \alpha_0 > \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{\pi}a_0}{(\pi^2 + 4\alpha_0^2)^{1/4}} \leq a \leq \frac{a_0}{\sqrt{\pi}}(\pi^2 + 4\alpha_0^2)^{1/4}.$$

– Si  $CO_0$  est un parallélépipède rectangle :

$$\text{Si } \alpha_0 \leq 1, \frac{\sqrt{\alpha_0}a_0}{(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}} \leq a \leq \frac{a_0}{\sqrt{\alpha_0}}(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}.$$

$$\text{Si } \alpha_0 > 1, \frac{a_0}{(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}} \leq a \leq a_0(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}.$$

– Si  $CO_0$  est une bipyramide à base carrée :

$$\text{Si } \alpha_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\alpha_0}a_0 \leq a \leq \frac{a_0}{\sqrt{\alpha_0}}.$$

$$\text{Si } \alpha_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{a_0}{(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}} \leq a \leq a_0(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}.$$

– Si  $CO_0$  est une pyramide à base carrée :

$$\text{Si } \alpha_0 \leq \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}a_0 \leq a \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha_0}}a_0.$$

$$\text{Si } \sqrt{\frac{3}{2}} < \alpha_0 \leq \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{\sqrt{\alpha_0}}{(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}}a_0 \leq a \leq \frac{a_0}{\sqrt{\alpha_0}}(1 + 2\alpha_0^2)^{1/4}.$$

$$\text{Si } \alpha_0 > \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{2^{1/4}\sqrt{2\alpha_0}}{\sqrt{1 + 2\alpha_0^2}}a_0 \leq a \leq \frac{1}{2^{1/4}\sqrt{2\alpha_0}}a_0\sqrt{1 + 2\alpha_0^2}.$$

□

Il vient d'être démontré que l'espace de recherche du paramètre de taille  $a$  d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, 1, \alpha_2$ ) de type  $CO$  connu et de paramètre de forme  $\alpha_2 \geq 1$  connu ( $\alpha_1 = 1$ ) est borné et en particulier majoré (l'espace de recherche du paramètre  $a$  est toujours minoré par 0). Notons de plus que, quel que soit le type d'objet 3-D considéré, le majorant de l'espace de recherche, noté  $M_{CO}$ , est une fonction croissante de  $\alpha_2$  (de  $a$ , respectivement), pour  $a$  fixé (pour  $\alpha_2$  fixé, respectivement). Le tableau 7.9 montre les valeurs de  $M_{CO}$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 50$  et le tableau 7.10 montre les valeurs de  $M_{CO}$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille  $a = 15$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ .

$(CO, 10, 1, 50)$	$M_{CO}$
(Ellipsoïde, 10, 1, 50)	70, 711
(Cylindre, 10, 1, 50)	56, 433
(Parallélépipède rectangle, 10, 1, 50)	84, 094
(Bipyramide, 10, 1, 50)	84, 094
(Pyramide, 10, 1, 50)	59, 466

Tableau 7.9 – Valeurs de  $M_{CO}$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 50$ .

Quel que soit le type d'objet 3-D considéré, l'espace de recherche du paramètre de taille  $a$  d'un objet 3-D convexe ( $CO, 10, 1, \alpha_2 \leq 50$ ) est donc majoré par  $a_{max} = 100$ . De même, quel que soit le type d'objet 3-D considéré, l'espace de recherche du paramètre de taille  $a$  d'un objet 3-D convexe ( $CO, a \leq 15, 1, 2$ ) est majoré par  $a_{max} = 100$ .

$(CO, 15, 1, 2)$	$M_{CO}$
(Ellipsoïde, 15, 1, 2)	21, 213
(Cylindre, 15, 1, 2)	19, 086
(Parallélépipède rectangle, 15, 1, 2)	25, 981
(Bipyramide, 15, 1, 2)	25, 981
(Pyramide, 15, 1, 2)	18, 92

Tableau 7.10 – Valeurs de  $M_{CO}$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille  $a = 15$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ .

Par conséquent, afin de valider et d'évaluer la performance de la méthode proposée d'estimation du paramètre  $a$ , les tests sont effectués en utilisant le simulateur développé au chapitre 4 en utilisant des « objets tests ». Ces derniers sont des objets 3-D convexes  $(CO, 10, 1, \alpha_2)$ , de type  $CO$ , de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \leq 50$  et des objets 3-D convexes  $(CO, a, 1, 2)$ , de type  $CO$ , de paramètres de taille  $a \leq 15$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ . Enfin, pour des raisons de temps de calcul, les fonctions de densité de probabilité des aires projetées  $f_{CO,a,\alpha_2}$  sont pré-calculées pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur et pour certaines valeurs de  $\alpha_2$  en discrétisant par pas de 1 le paramètre de taille  $a$  de  $a_{min} = 1$  à  $a_{max} = 100$ . Ainsi, une base de données de fonctions de densité de probabilité  $f_{CO,a,\alpha_2}$  est construite.

## 7.4 Résultats

Afin d'évaluer la performance de la méthode proposée d'estimation du paramètre de taille  $a$ , des tests ont été effectués en utilisant le simulateur. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , le simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet et, à partir de ces  $n$  projections, la méthode exposée dans la section 7.2 estime la valeur du paramètre de taille  $a$ , notée  $\hat{a}$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour chaque  $n$  (notons  $\{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $a$  où  $\hat{a}^i$  représente la  $i$ ème valeur estimée de  $a$ ). Pour quantifier les résultats obtenus, l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne (Absolute Mean Error et Relative Mean Error respectivement) entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées  $\{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ , notée  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement), est calculée pour chaque valeur de  $n$  (équation 7.6 et équation 7.7 respectivement).

$$AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |a - \hat{a}^i| \quad (7.6)$$

$$RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|a - \hat{a}^i|}{a} \quad (7.7)$$

### 7.4.1 Influence du paramètre de forme $\alpha_2$

La figure 7.3 (figure 7.4, respectivement) montre l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Intuitivement, il paraît assez

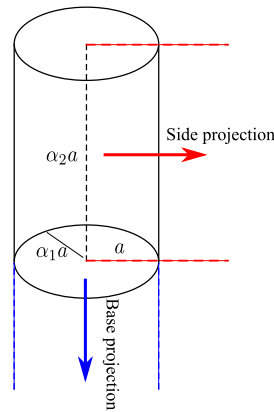


Figure 7.2 – Projection de la base et du côté de l'objet de type cylindre.

logique de penser que plus la quantité d'informations disponibles concernant un objet est importante, plus il est facile d'estimer ses paramètres. En effet, c'est ce qui est constaté sur la figure 7.3 : quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $a$  est précise. De plus, plus l'objet 3-D est anisotrope (plus  $\alpha_2$  est grand), plus il devient difficile d'estimer correctement le paramètre de taille  $a$ .

Néanmoins, pour un objet 3-D de type cylindre, quel que soit le nombre  $n$  de projections, il est plus facile d'estimer  $a$  quand  $\alpha_2 = 2$  que quand  $\alpha_2 = 1$ . En effet, quand  $\alpha_2 = 1$  ( $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ), la projection d'aire projetée minimum correspond à une projection de la base du cylindre et quand  $\alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$ , la projection d'aire projetée minimum correspond à une projection du côté du cylindre (figure 7.2). L'aire projetée minimum ne résulte donc pas de la même projection orthographique. C'est aussi pour cette raison que pour  $n > 1$ , il est plus facile d'estimer  $a$  pour une pyramide de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  qu'une pyramide de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$ .

D'un point de vue relatif (figure 7.4), il est important de noter que, quel que soit l'objet 3-D considéré, seulement deux projections sont nécessaires pour qu'en moyenne  $a$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. De plus, l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées ne varie pas linéairement avec le paramètre de forme  $\alpha_2$ .

#### 7.4.2 Influence du paramètre de taille $a$

La figure 7.5 (figure 7.6, respectivement) montre l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Les figure 7.5 et figure 7.6 montrent, comme précédemment (section 7.4.1), que quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $a$  est précise. En moyenne, quelle que soit la valeur de  $a$  et quel que soit l'objet 3-D considéré, seulement deux projections sont nécessaires pour que  $a$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. En revanche, pour une même valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$ , plus le paramètre de taille  $a$  augmente (plus l'objet 3-D est « gros »), plus il devient difficile d'estimer la valeur de ce dernier.

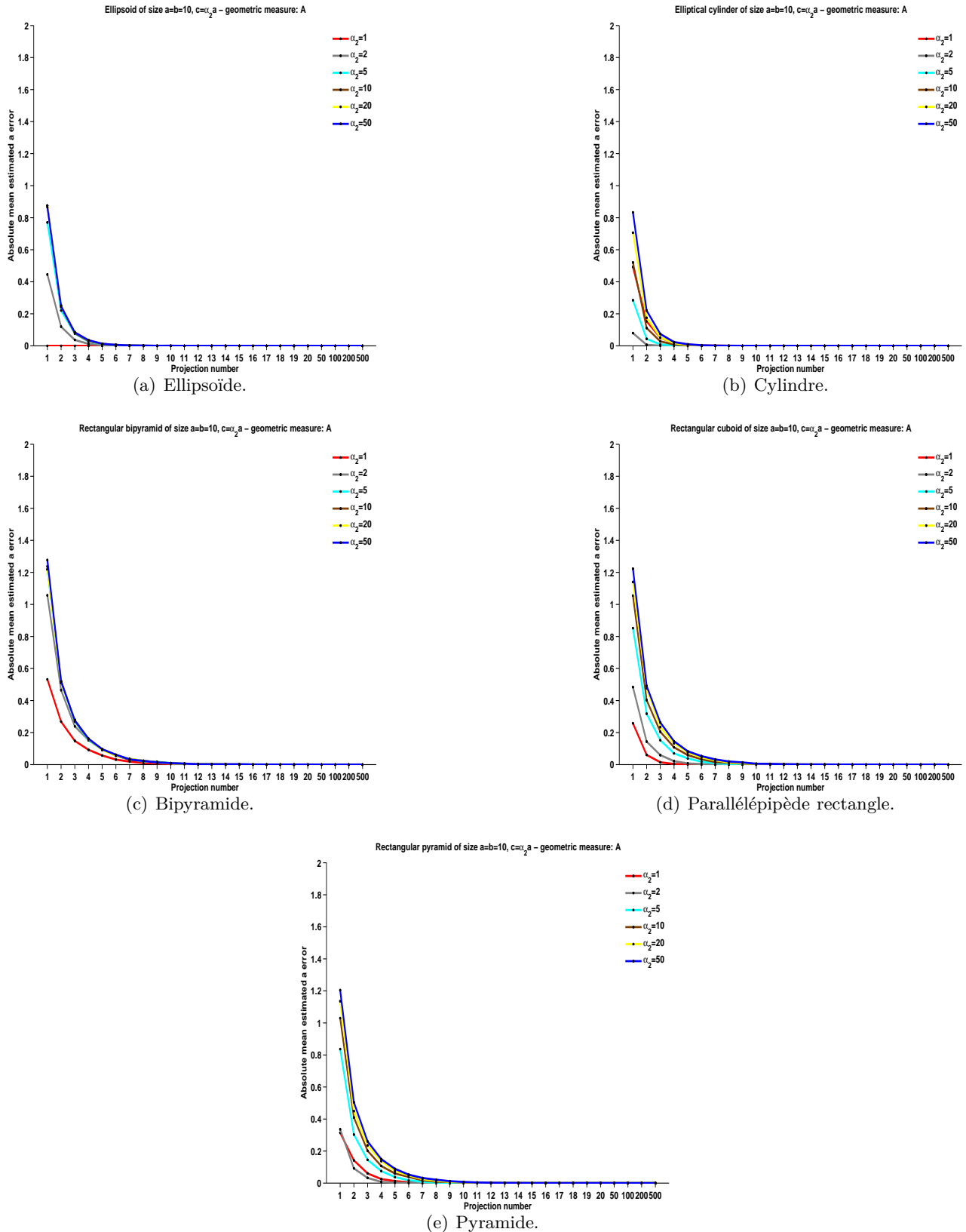


Figure 7.3 – Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ .

## 7. Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

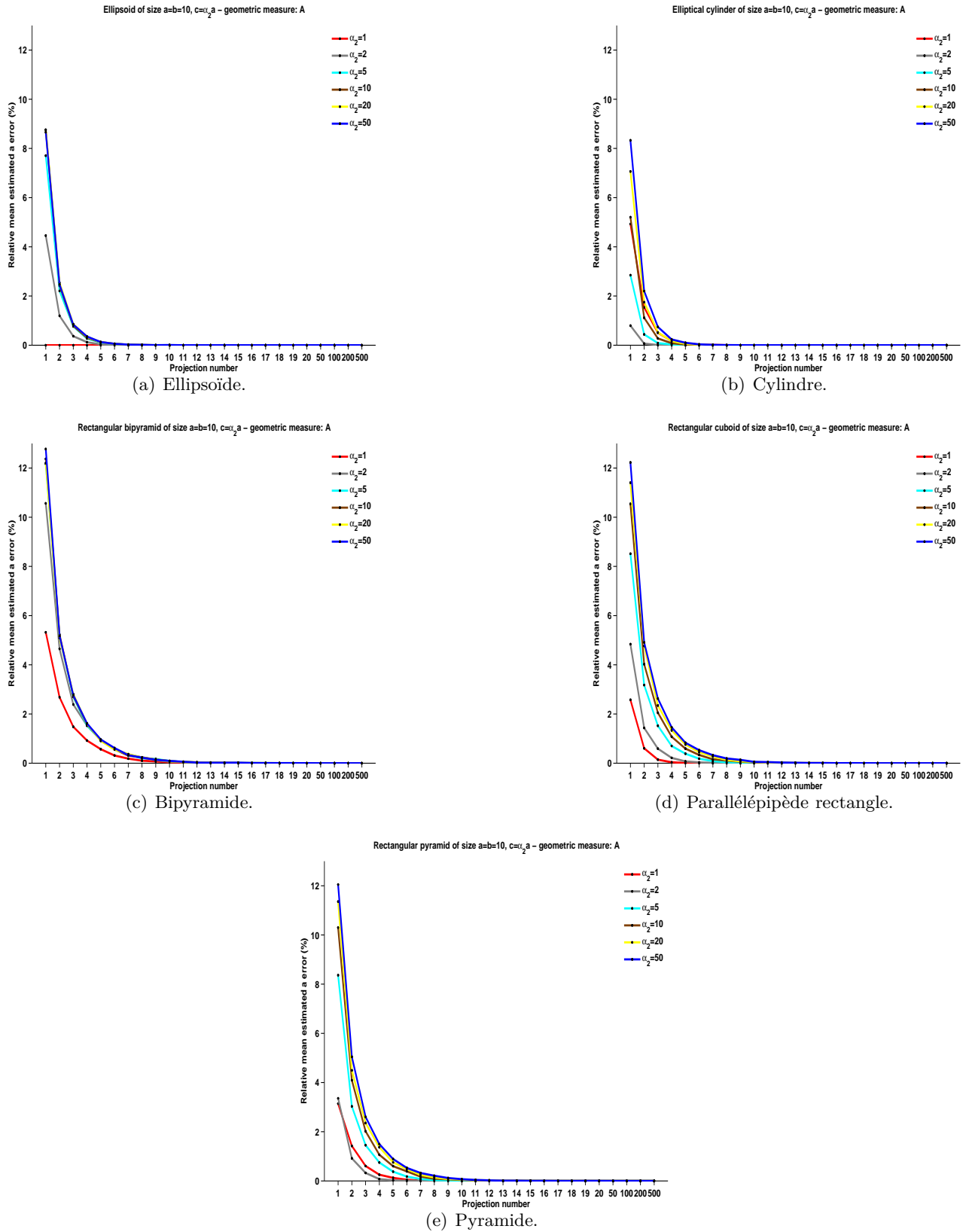


Figure 7.4 – Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ .

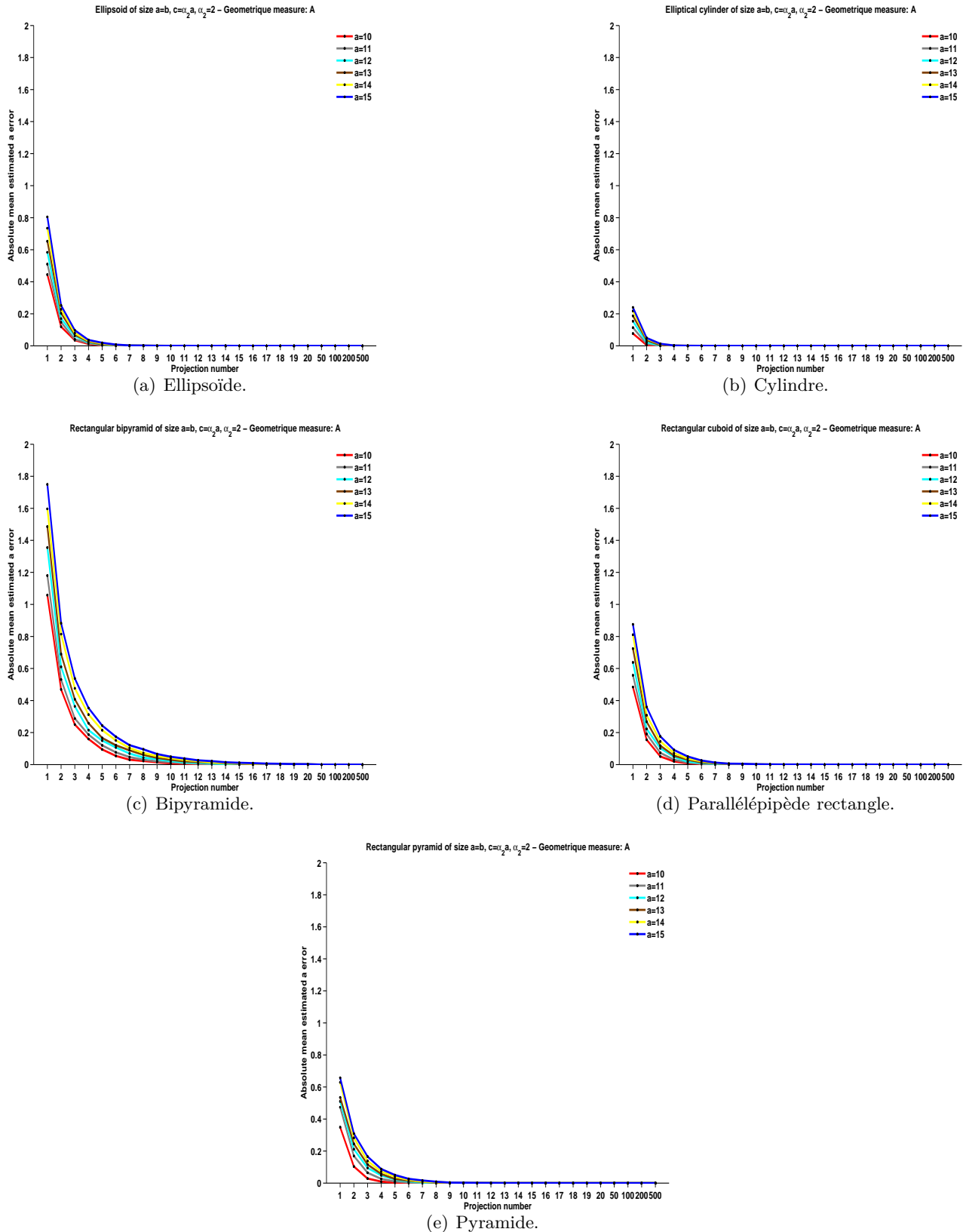


Figure 7.5 – Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .



## 7. Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

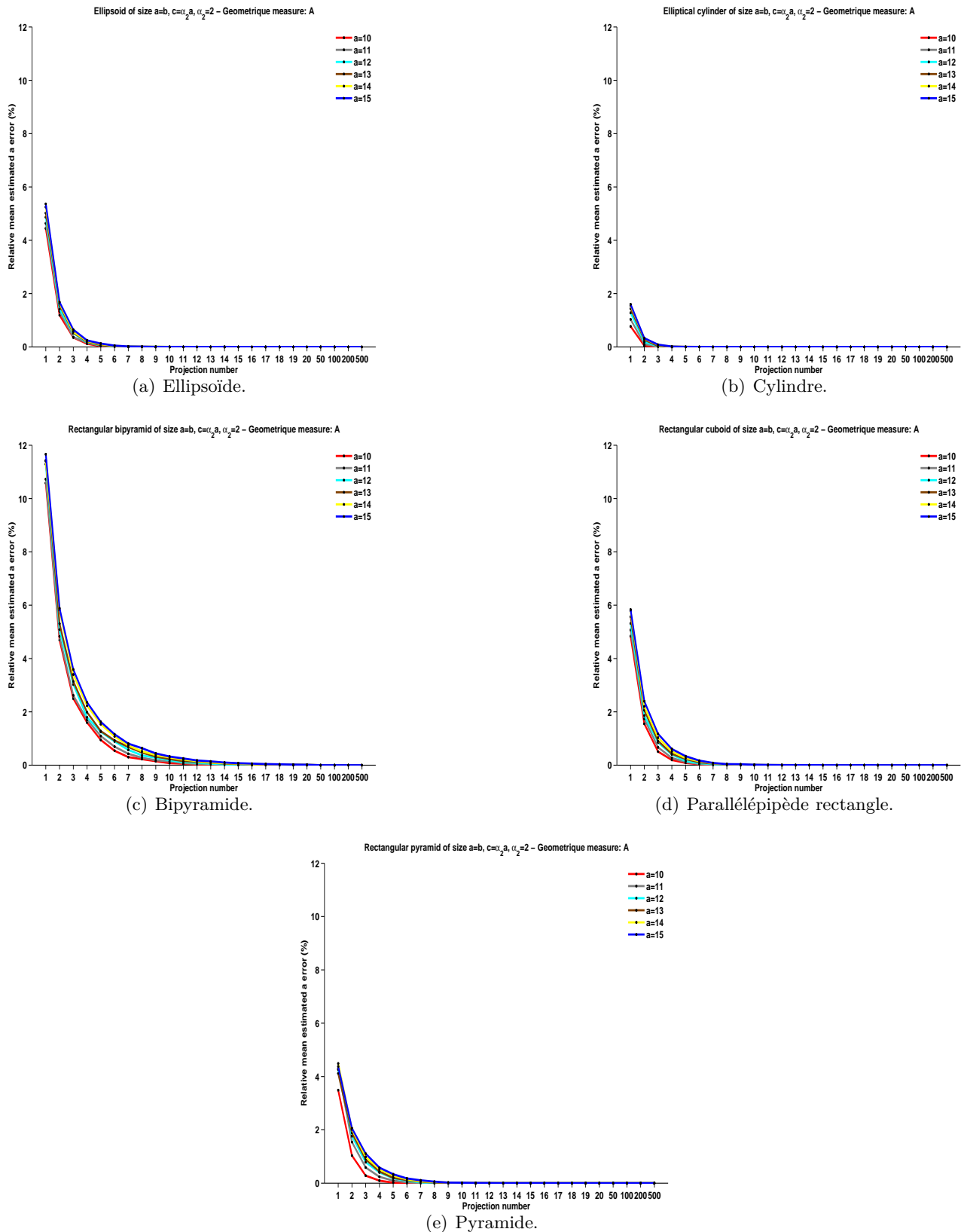


Figure 7.6 – Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

## 7.5 Amélioration de la méthode proposée

Dans cette section, il est proposé d'améliorer la méthode d'estimation du paramètre de taille  $a$  en décrivant une projection 2-D d'un objet 3-D convexe grâce à deux mesures géométriques : l'aire et le périmètre. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, la méthode du maximum de vraisemblance de  $a$  des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés est utilisée pour estimer la valeur du paramètre de taille  $a$ .

### 7.5.1 Fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés

Soit  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  un objet 3-D convexe de type  $CO$ , de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2$  et soit  $\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2} \subset \mathcal{K}(\mathbb{E}^2)$  l'ensemble de ses projections orthographiques (quel que soit  $p$  appartenant à  $\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ ,  $p$  est un ensemble convexe). Soient  $A$  et  $P$  les variables aléatoires continues appelées « aire projetée » et « périmètre projeté » respectivement associées à une projection orthographique de l'objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ . Soit  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  la fonction qui à une projection  $p$  de l'objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  associe le vecteur  $U = (A, P)$ . La fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés de l'objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ , notée  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ , est définie comme la densité de probabilité conjointe de  $A$  et  $P$ . Formellement,  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  et  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  sont définis comme suit :

$$GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2} : \begin{cases} \mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2} & \rightarrow ]0, +\infty[^2 \\ p & \mapsto U = (A, P) \end{cases}$$

$$G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2} : \begin{cases} GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}) & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ U = (A, P) & \mapsto G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(U) \end{cases}$$

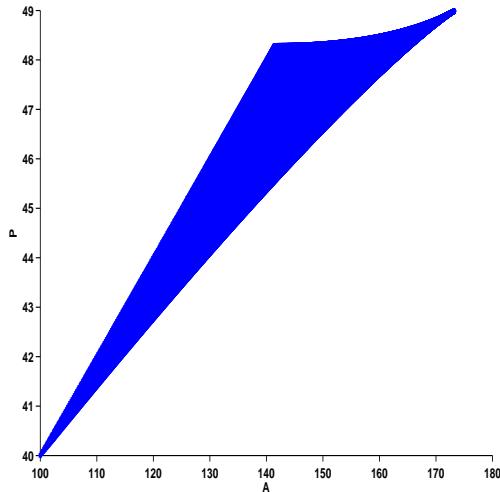
Pour des objets 3-D simples, comme par exemple des sphères, déterminer analytiquement la fonction de densité de probabilité conjointe de  $A$  et  $P$  est possible. Pour des objets 3-D plus complexes, cela est plus difficile voire impossible. Pour cette raison, et parce que la fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés proposée se veut générique, il a été décidé de déterminer cette fonction de manière numérique à l'aide du simulateur développé au chapitre 4.

Commençons donc tout d'abord par déterminer l'ensemble de définition de la fonction de densité de probabilité conjointe de  $A$  et  $P$ , *i.e.*  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})$ , avant de générer numériquement cette densité de probabilité.

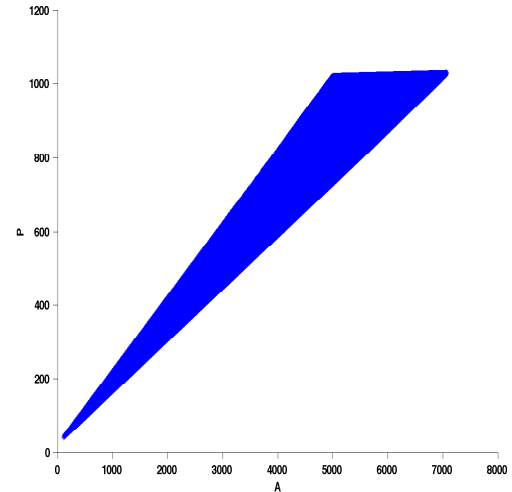
### 7.5.2 Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$

Pour déterminer l'ensemble de définition de  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ , *i.e.*  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})$ , le processus suivant est réalisé. Soit  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  un objet 3-D convexe de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Considérons cet objet au centre d'une large sphère. En pavant la sphère de manière régulière en utilisant un modèle icosaédrique,  $K$  ( $K = 2.621.442$ ) points sont générés à sa surface. Chaque point peut être vu comme une position particulière de la caméra avec laquelle l'objet au centre de la sphère est observé. À chaque position de la caméra correspond donc une projection orthographique particulière de l'objet 3-D (chapitre 4). Ainsi,  $K$  ( $K = 2.621.442$ ) projections orthographiques sont générées et pour chaque projection  $p_i$  appartenant à  $\{p_i\}_{i \in [1, K]}$ ,  $U = (A, P)$  est calculé. La figure 7.7 montre le résultat de ce processus pour deux parallélépipèdes rectangles isotropes ( $a = 10, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

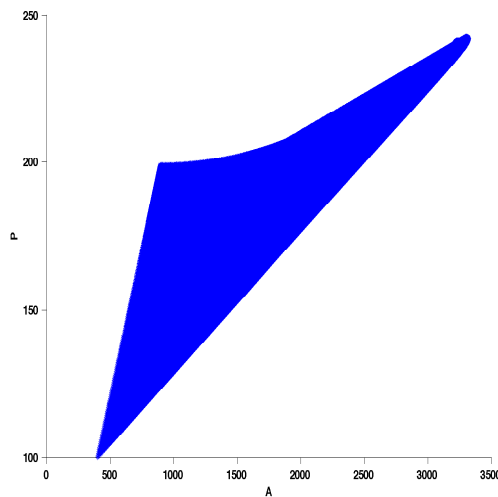
et  $a = 10$ ,  $\alpha_1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 8$ , respectivement) et un parallélépipède rectangle anisotrope ( $a = 10$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 50$ ). Il est important de noter que quel que soit l'objet 3-D considéré, l'ensemble de points



(a)  $GD_{\text{Parallépipède rectangle},10,1,1}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ .



(b)  $GD_{\text{Parallépipède rectangle},10,1,50}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ .



(c)  $GD_{\text{Parallépipède rectangle},10,4,8}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ .

Figure 7.7 –  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$  pour trois parallélépipèdes rectangles : deux parallélépipèdes rectangles isotropes et un parallélépipède rectangle anisotrope ( $K = 2.621.442$ ).

généralisé est très dense, visuellement il n'y a pas de trou, et  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$  tend à former un ensemble non convexe simplement connexe. En conséquence, il est supposé dans cette étude que quel que soit l'objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ ,  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})$  forme un ensemble simplement connexe. L'ensemble de points généralisé étant suffisamment dense, il n'est pas utile d'utiliser la méthode développée au chapitre 6 pour déterminer de manière précise l'enveloppe de l'ensemble de points  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ . Une simple discrétisation d'un plan contenant l'ensemble de points permet de connaître avec précision le domaine de définition de  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ .

Le domaine de définition de la fonction  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  étant maintenant connu, construisons numériquement cette densité de probabilité.

### 7.5.3 Détermination de la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$

Pour construire numériquement la fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés d'un objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ , le processus suivant est réalisé. Soit  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  un objet 3-D convexe de type  $CO$ , de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$ . Grâce au simulateur développé au chapitre 4,  $N$  ( $N = 5.000.000$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet sont générées et pour chaque projection  $p_i$  appartenant à  $\{p_i\}_{i \in [1, N]}$ , l'aire et le périmètre sont calculés. À partir de ces  $N$  valeurs d'aires projetées et de périmètre projetés, un histogramme conjoint normalisé  $h$  ( $\iint_{GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})} h = 1$ ) est construit en utilisant l'algorithme de Knuth [88] pour déterminer le nombre de classes optimal, noté  $nbClasse$ . Si nécessaire, une interpolation au plus proche voisin est réalisée sur le domaine  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})$  afin que quel que soit  $U$  appartenant à  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})$ ,  $h(U) > 0$ . Cette interpolation est possible car le domaine de définition de  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  a été déterminé précédemment. La fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés de l'objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ , *i.e.*  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ , correspond à l'histogramme  $h$  ainsi construit. La figure 7.8 (figure 7.9, respectivement) montre les fonctions  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  ainsi générées pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ( $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 2$ , respectivement).

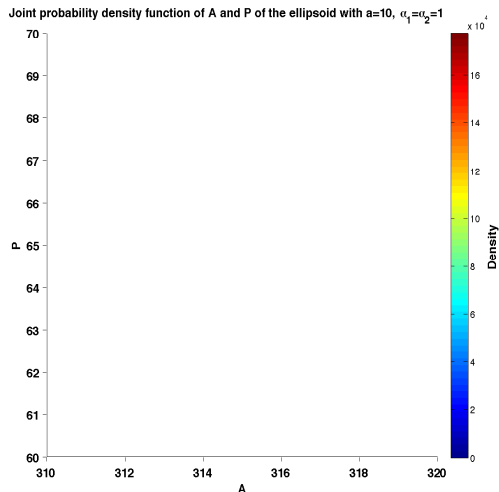
### 7.5.4 Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$

Pour valider la construction numérique de la fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés d'un objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  et en particulier valider le nombre de projections  $N$  ( $N = 5.000.000$ ) utilisé pour construire  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ , le calcul suivant est effectué :

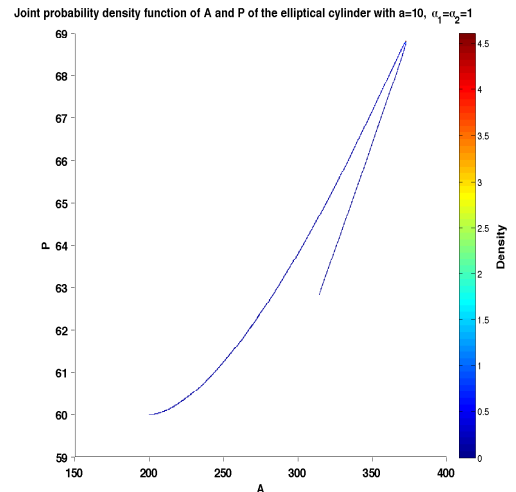
1. pour un objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  donné, la fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  est généré  $m$  ( $m = 100$ ) fois et le nombre de classes moyen, noté  $nbClasse_{mean} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m nbClasse_i$ , des fonctions de densité de probabilité  $\{G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}^i\}_{i \in [1, m]}$  est calculé.
2.  $N$  ( $N = 5.000.000$ ) projections orthographiques aléatoires de ce même objet 3-D sont générées et pour chaque projection  $p_i$  appartenant à  $\{p_i\}_{i \in [1, N]}$ , l'aire et le périmètre sont calculés. À partir de ces  $N$  valeurs d'aires projetées et de périmètres projetés, un histogramme conjoint normalisé  $h'$  ( $\iint_{GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})} h' = 1$ ) est construit en utilisant  $nbClasse_{mean}$  nombre de classes. Si nécessaire, une interpolation au plus proche voisin est réalisée sur le domaine  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})$  afin que quel que soit  $U$  appartenant à  $GD_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2})$ ,  $h'(U) > 0$ .
3. l'étape précédente est répétée  $m$  ( $m = 100$ ) fois, générant ainsi une famille de fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés, notée  $\{h'_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}^i\}_{i \in [1, m]}$ .

Il est important de noter que les éléments de la famille  $\{h'_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}^i\}_{i \in [1, m]}$  sont tous calculés avec le même nombre de classes  $nbClasse_{mean}$  contrairement aux éléments de la famille  $\{G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}^i\}_{i \in [1, m]}$ . Par conséquent, les éléments de la famille  $\{h'_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}^i\}_{i \in [1, m]}$  sont comparables entre eux. C'est pourquoi, pour quantifier la reproductibilité de  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$ , l'erreur relative moyenne, notée  $MVE$  (Mean

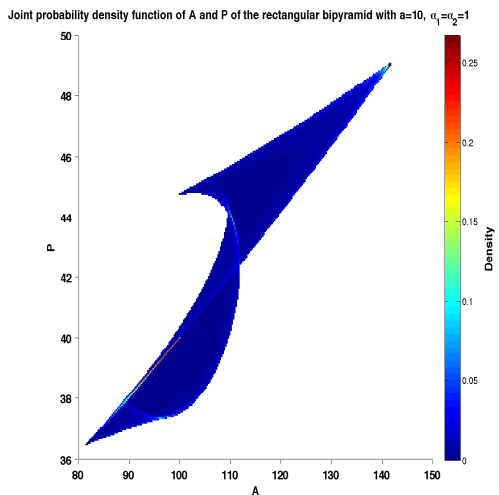
## 7. Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D



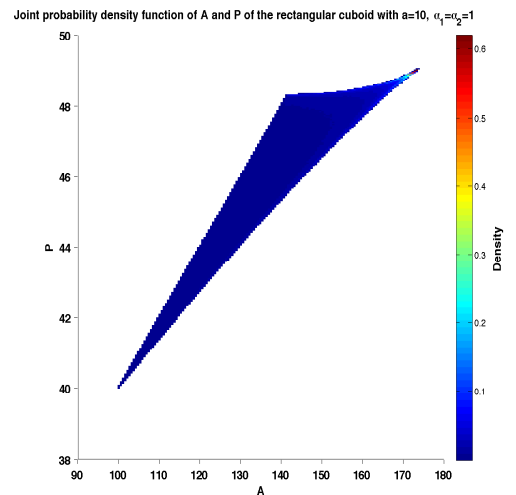
(a) Ellipsoïde.



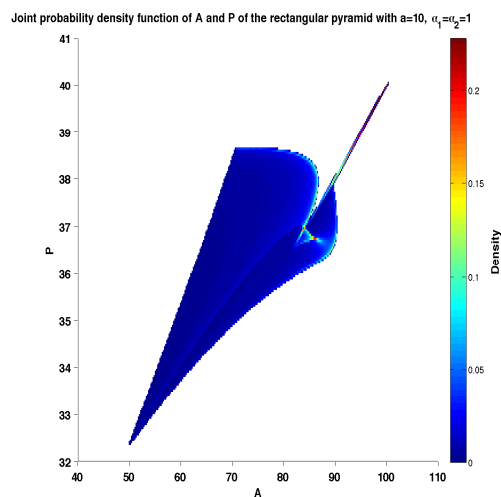
(b) Cylindre.



(c) Bipyramide.

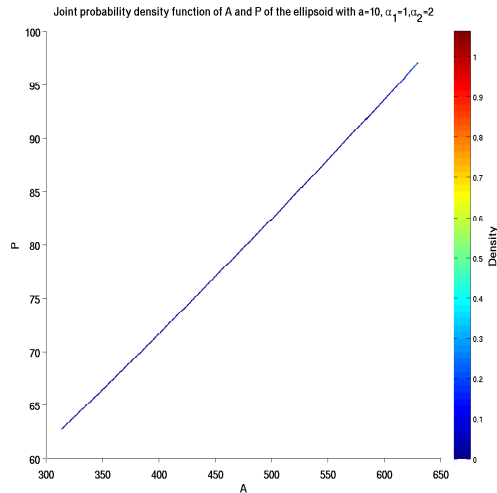


(d) Parallélepède rectangle.

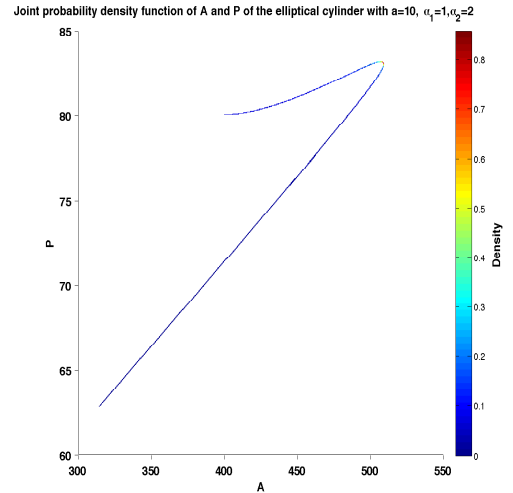


(e) Pyramide.

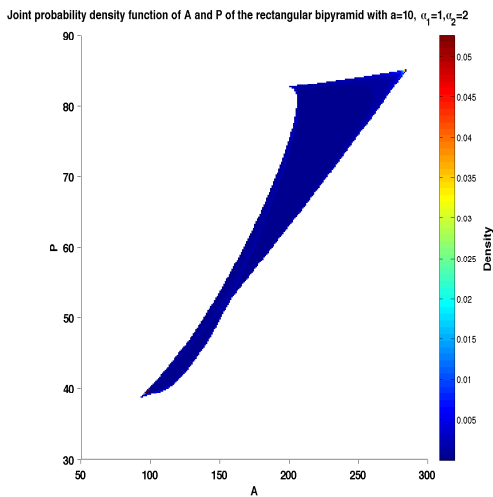
Figure 7.8 – Densités de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ .



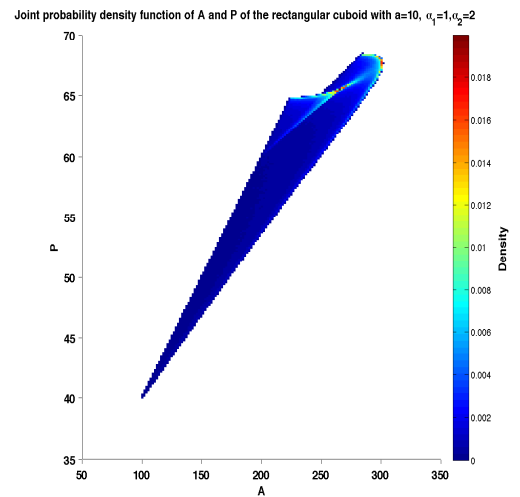
(a) Ellipsoïde.



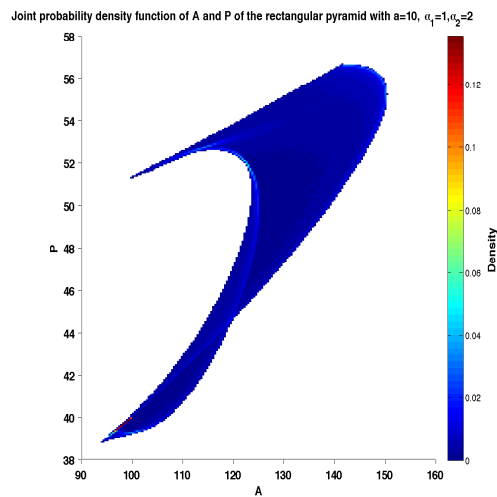
(b) Cylindre.



(c) Bipyramide.



(d) Parallélepède rectangle.



(e) Pyramide.

Figure 7.9 – Densités de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

Validation Error), est calculée entre  $\{h'_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}\}_{i \in [1,m]}$  et  $h'_{mean} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h'_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  (équation 7.8).

$$MVE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\|h'_{mean} - h'_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}\|_1}{\|h'_{mean}\|_1} \quad (7.8)$$

où  $\|\cdot\|_1$  désigne la norme  $L_1$ .

Les tableaux 7.11, 7.12, 7.13, 7.14 et 7.15 montrent l'erreur  $MVE$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètres de taille  $a \in \{1, 100\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 50\}$  (objets 3-D isotropes et anisotropes).

	Ellipsoïde ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	1,75	1,43	1,74	0,74

Tableau 7.11 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  pour l'objet de type ellipsoïde ( $N = 5.000.000$ ).

	Cylindre ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	1,19	0,89	1,16	0,96

Tableau 7.12 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  pour l'objet de type cylindre ( $N = 5.000.000$ ).

	Bipyramide ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	3,17	1,99	3,23	1,99

Tableau 7.13 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  pour l'objet de type bipyramide ( $N = 5.000.000$ ).

	Parallélépipède rectangle ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	2,11	2,59	2,11	2,35

Tableau 7.14 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  pour l'objet de type parallélépipède rectangle ( $N = 5.000.000$ ).

Au vu de ces résultats, il est possible d'affirmer que le nombre de projections  $N$  utilisé pour générer  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  est suffisant. En effet, dans le pire des cas, *i.e.* pour un objet 3-D convexe de type bipyramide, de paramètre de taille  $a = 100$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$  ( $\alpha_1 = 1$ ), l'erreur relative

	Pyramide ( $\alpha_1 = 1$ )			
	$a = 1, \alpha_2 = 1$	$a = 1, \alpha_2 = 50$	$a = 100, \alpha_2 = 1$	$a = 100, \alpha_2 = 50$
$MVE(\%)$	3	2,59	3,1	2,45

Tableau 7.15 – Validation du nombre de projections  $N$  utilisé pour générer numériquement  $G_{CO,a,\alpha_1,\alpha_2}$  pour l'objet de type pyramide ( $N = 5.000.000$ ).

moyenne  $MVE$  calculée entre  $\{h_{\text{Bipyramide},100,1,1}^i\}_{i \in \llbracket 1,m \rrbracket}$  et  $h'_{mean} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h_{\text{Bipyramide},100,1,1}^i$  est égale à 3,23%.

### 7.5.5 Maximum de vraisemblance de $a$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés

Soit  $U = (A, P)$  le vecteur aléatoire continu « aire projetée, périmètre projeté » associé à une projection 2-D d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  inconnu. Soient  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) réalisations de  $U$ . Les aires projetées et les périmètres projetés d'un objet 3-D étant indépendants et identiquement distribués (iid), la vraisemblance de  $a$  au vu des  $n$  observations  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  est définie comme suit (équation 7.9) :

$$L_{CO,\alpha_2}^2(a) = \prod_{i=1}^n G'_{CO,a,1,\alpha_2}(U_i) \quad (7.9)$$

où :

$$G'_{CO,a,1,\alpha_2} : \begin{cases} \mathbb{R}^{\neq} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ U_i & \mapsto & \begin{cases} G_{CO,a,1,\alpha_2}(U_i) & \text{si } U_i \in GD_{CO,a,1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,1,\alpha_2}) \\ 0 & \text{si } U_i \notin GD_{CO,a,1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,a,1,\alpha_2}) \end{cases} \end{cases}$$

et  $G_{CO,a,1,\alpha_2}$  est la fonction de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés définie précédemment.

En conséquence, le maximum de vraisemblance de  $a$  est défini par :

$$\hat{a} = \arg \max_{a \in \mathbb{R}_+^*} L_{CO,\alpha_2}^2(a) \quad (7.10)$$

où  $\hat{a}$  désigne la valeur estimée de  $a$ .

Pour les mêmes raisons que précédemment, une recherche exhaustive est utilisée pour résoudre l'équation 7.10. Pour des raisons de temps de calcul, les fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés  $G_{CO,a,1,\alpha_2}$  sont pré-calculées pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur et pour certaines valeurs de  $\alpha_2$  en discrétisant par pas de 1 le paramètre de taille  $a$  de  $a_{min} = 1$  à  $a_{max} = 100$ . Ainsi, une base de données de fonctions de densité de probabilité  $G_{CO,a,1,\alpha_2}$  est construite.

### 7.5.6 Résultats

Afin d'évaluer la performance de la méthode proposée d'estimation du paramètre de taille  $a$ , des tests ont été effectués en utilisant le simulateur. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , le simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet et, à partir de



ces  $n$  projections, la méthode exposée dans la section 7.5.5 estime la valeur du paramètre de taille  $a$ , notée  $\hat{a}$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour chaque  $n$  (notons  $\{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $a$  où  $\hat{a}^i$  représente la  $i$ ème valeur estimée de  $a$ ). Pour quantifier les résultats obtenus, l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne (Absolute Mean Error et Relative Mean Error respectivement) entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées  $\{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ , notée  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement), est calculée pour chaque valeur de  $n$  (équation 7.11 et équation 7.12 respectivement).

$$AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |a - \hat{a}^i| \quad (7.11)$$

$$RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|a - \hat{a}^i|}{a} \quad (7.12)$$

### Influence du paramètre de forme $\alpha_2$

La figure 7.10 (figure 7.11, respectivement) montre l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Intuitivement, il paraît assez logique de penser que plus la quantité d'informations disponibles concernant un objet est importante, plus il est facile d'estimer ses paramètres. En effet, c'est ce qui est constaté sur la figure 7.10 : quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $a$  est précise. De plus, plus l'objet 3-D est anisotrope (plus  $\alpha_2$  est grand), plus il devient difficile d'estimer correctement le paramètre de taille  $a$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, il est néanmoins plus facile d'estimer la valeur de  $a$  pour une pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  qu'une pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$ .

D'un point de vue relatif (figure 7.11), il est important de noter que, quel que soit l'objet 3-D considéré, seulement une projection est nécessaire pour qu'en moyenne  $a$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. Dans la section 7.4.1 deux projections étaient nécessaires. Ce résultat montre la pertinence d'utiliser une mesure géométrique supplémentaire, *i.e.* le périmètre, pour décrire les projections 2-D d'un objet 3-D. Enfin, l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées ne varie pas linéairement avec le paramètre de forme  $\alpha_2$ .

### Influence du paramètre de taille $a$

La figure 7.12 (figure 7.13, respectivement) montre l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Que ce soit sur la figure 7.12 ou la figure 7.13, il est possible de remarquer comme précédemment que, quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $a$  est précise. En moyenne, quelle que soit la valeur de  $a$  et quel que soit l'objet 3-D considéré, seulement une projection est nécessaire pour que  $a$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. Dans la section 7.4.2 deux projections étaient nécessaires. Ce résultat montre de

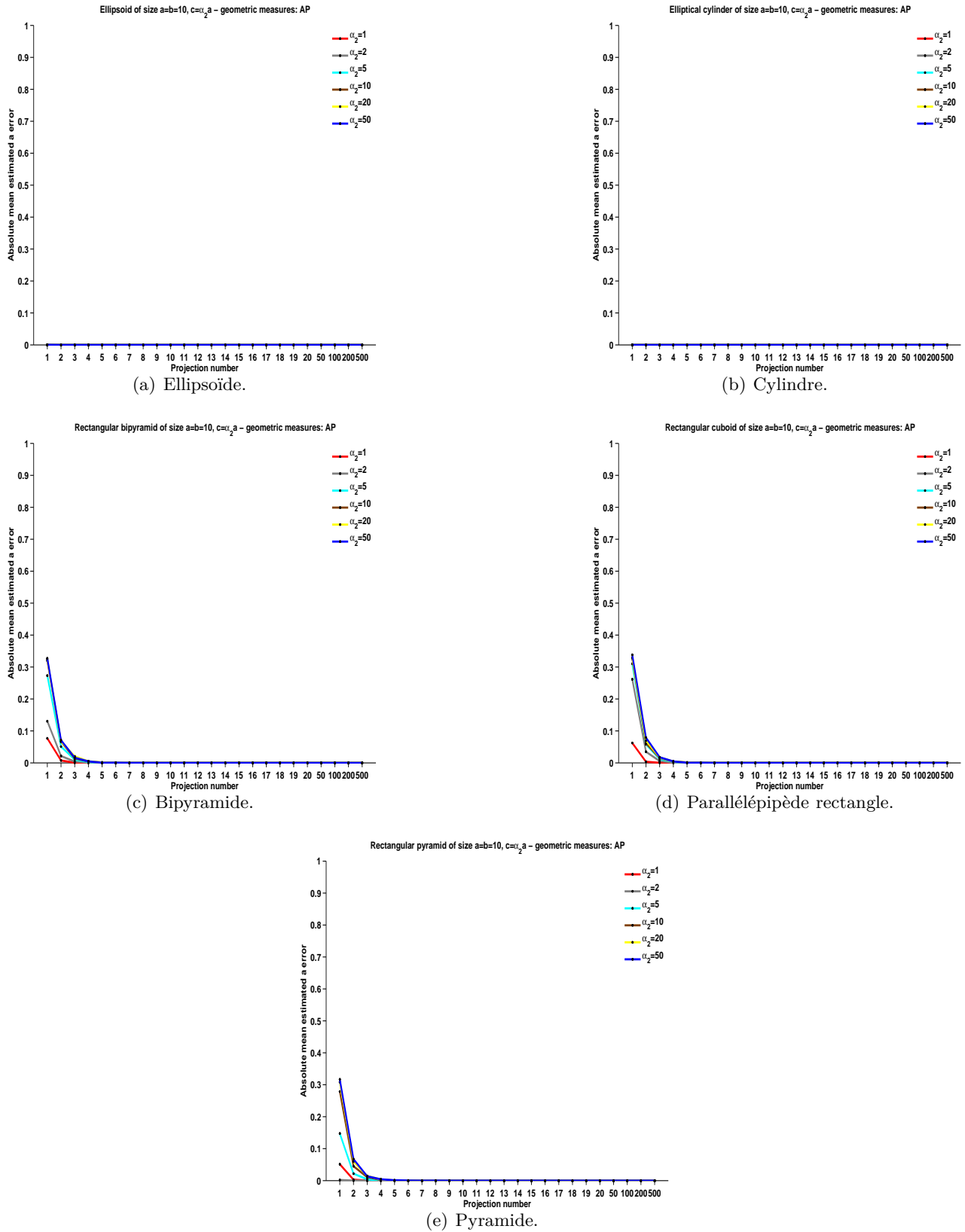


Figure 7.10 – Évolution de l’erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d’objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ .

## 7. Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

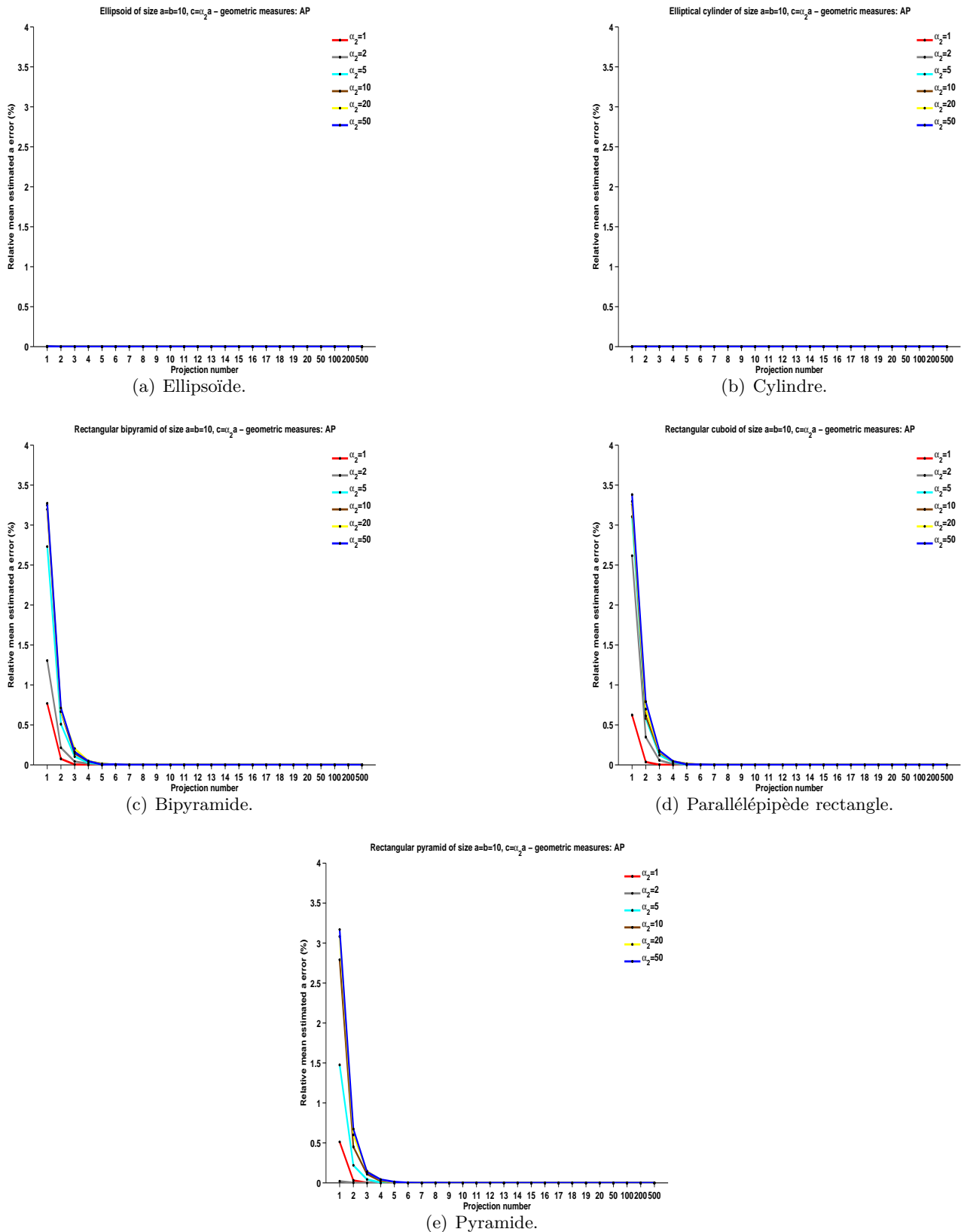


Figure 7.11 – Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ .

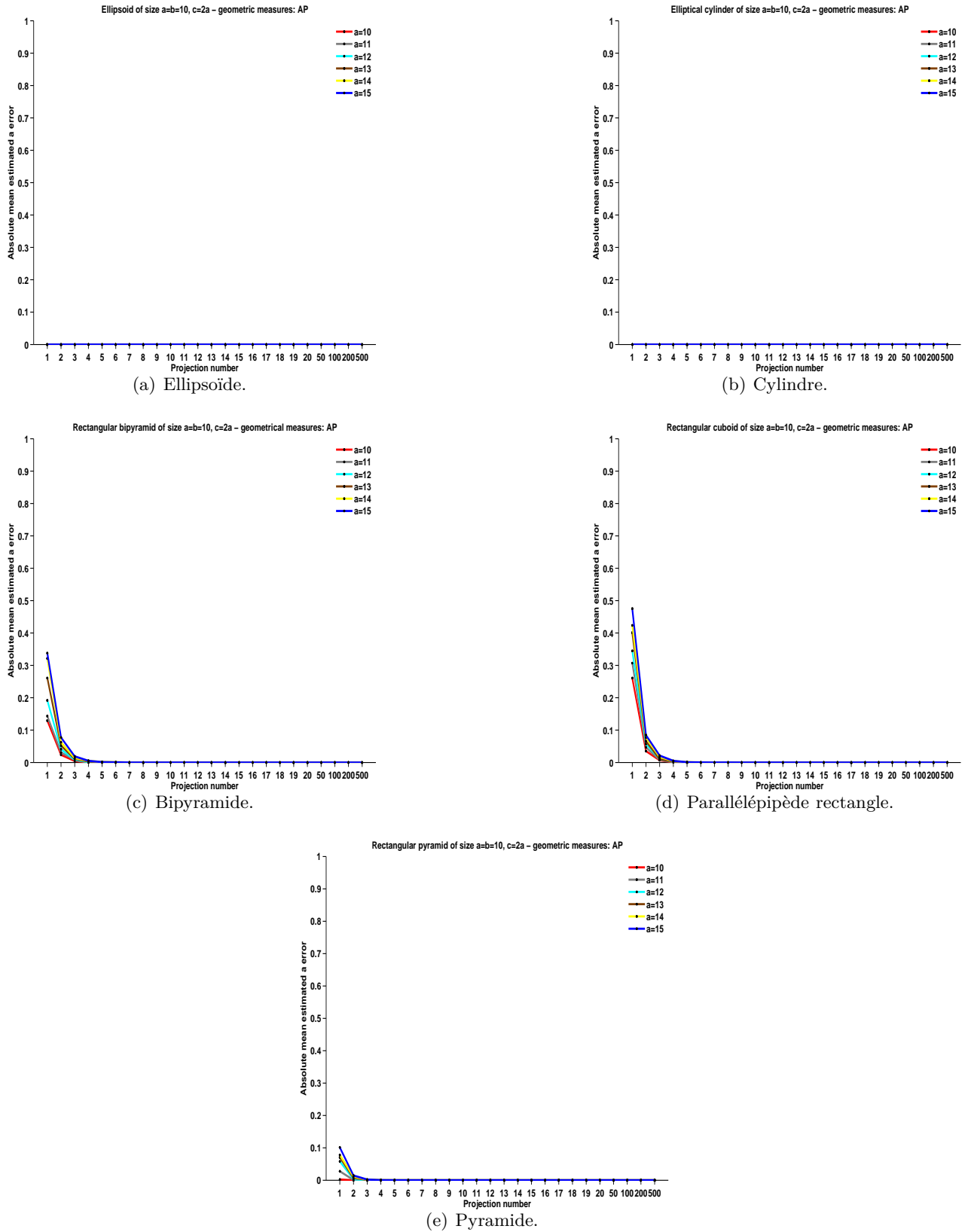


Figure 7.12 – Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

## 7. Estimation de la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

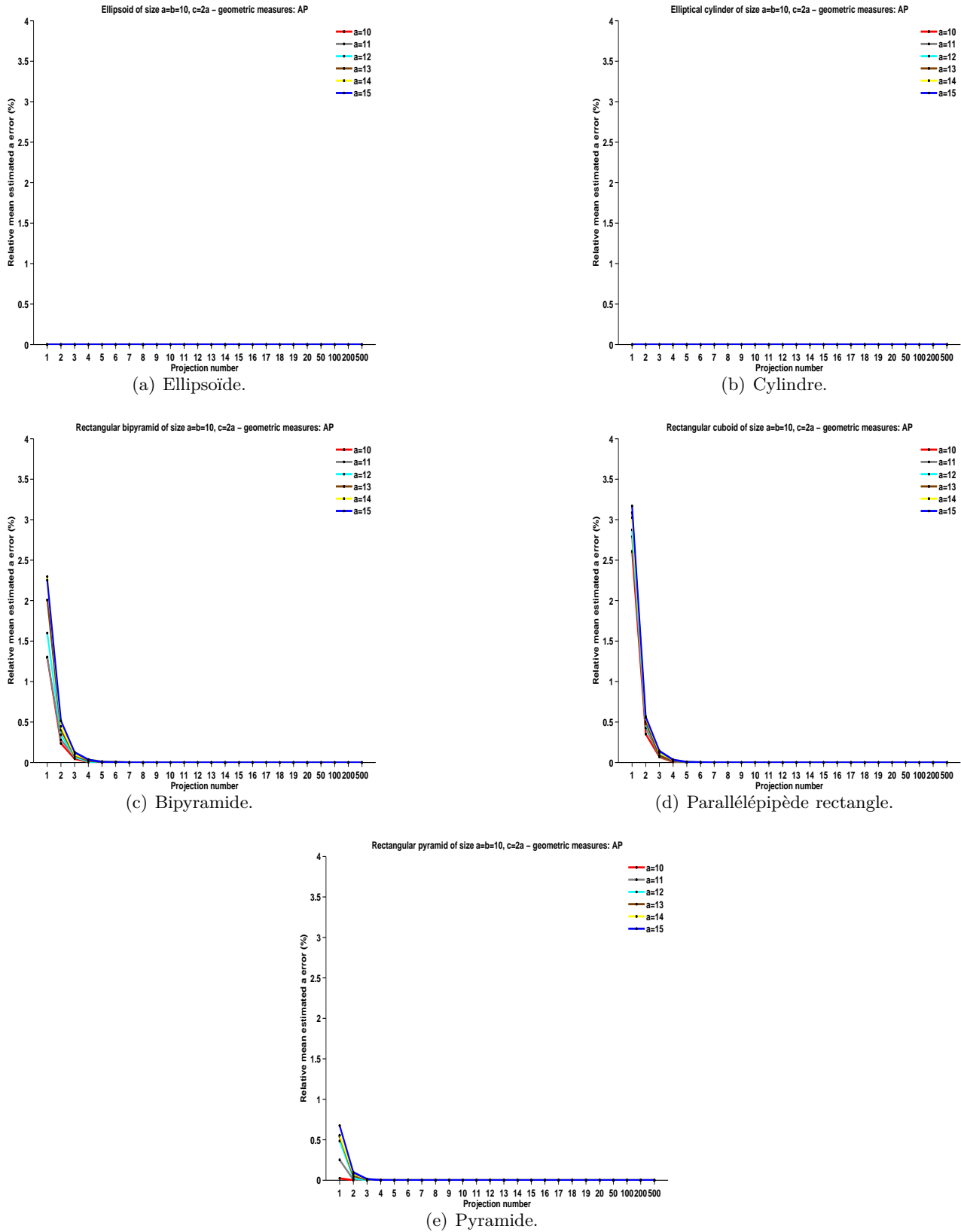


Figure 7.13 – Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

nouveau l'utilité de prendre en compte une mesure géométrique supplémentaire, *i.e.* le périmètre, pour décrire les projections 2-D d'un objet 3-D. En revanche, comme il l'a été constaté dans la section 7.4, pour une même valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$ , plus le paramètre de taille  $a$  augmente (plus l'objet 3-D est « gros »), plus il devient difficile d'estimer la valeur ce dernier.

## 7.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'estimation de la « taille », à partir de ses projections 2-D, d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, 1, \alpha_2 \geq 1$ ) a été réalisée. Plus précisément, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance a été développée afin d'estimer la valeur du paramètre de taille  $a$  d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, 1, \alpha_2 \geq 1$ ) de type  $CO$  connu et de paramètre de forme  $\alpha_2 \geq 1$  connu ( $\alpha_1 = 1$ ). Dans un premier temps, le maximum de vraisemblance de  $a$  des fonctions de densité de probabilité des aires projetées a été utilisé. Dans un second temps, cette méthode a été améliorée en utilisant le maximum de vraisemblance de  $a$  des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés.

Pour valider et évaluer la performance des deux méthodes proposées, des tests ont été réalisés grâce au simulateur sur cinq types d'objets 3-D convexes : ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide, pyramide. Les résultats ont été quantifiés en utilisant comme indicateur l'erreur moyenne (absolue et relative) et montrent que :

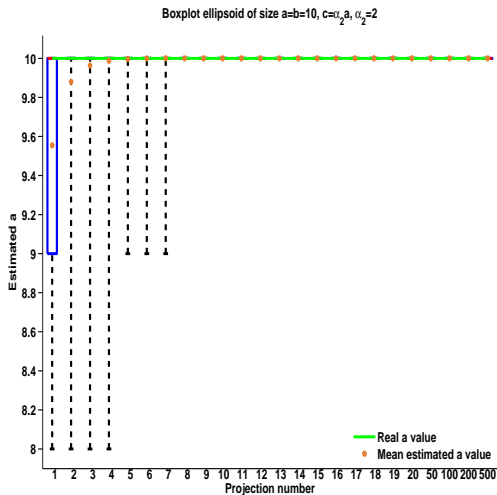
- plus le nombre de vues de l'objet 3-D augmente, plus l'estimation du paramètre  $a$  devient précise ;
- plus l'objet 3-D est anisotrope (plus  $\alpha_2$  est grand), moins bonne est l'estimation de  $a$  ;
- l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées ne varie pas linéairement avec la valeur réelle du paramètre de forme  $\alpha_2$  ;
- plus l'objet 3-D est « gros » (plus  $a$  est grand), plus il est difficile d'estimer  $a$  ;
- l'utilisation d'une mesure géométrique supplémentaire, *i.e.* le périmètre, pour décrire les projections 2-D d'un objet 3-D est pertinente.

Pour construire les fonctions de densité de probabilité des aires projetées, une projection 2-D d'un objet 3-D convexe a été décrite en utilisant comme fonctionnelle géométrique l'aire et pour construire les fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés, une projection 2-D d'un objet 3-D convexe a été décrite en utilisant comme fonctionnelles géométriques l'aire et le périmètre. Ces dernières ont été utilisées car ce sont des mesures fondamentales de la géométrie intégrale permettant de caractériser une image binaire et sont très bien adaptées aux images discrètes. De plus, ces fonctionnelles associées au nombre d'Euler forment une base dans  $\mathbb{R}^2$  des mesures vérifiant les propriétés d'additivité, de continuité, d'invariance par déplacements, d'homogénéité et de croissance (section 2.2.1). Notons que le nombre d'Euler d'une projection 2-D d'un objet 3-D convexe est toujours égale à 1. Enfin, certaines informations étaient disponibles dans la littérature, en particulier les bornes théoriques des fonctions de densité de probabilité des aires projetées pour les objets de type ellipsoïde, cylindre et parallélépipède rectangle [191]. Ces informations ont permis, de plus, de valider le simulateur informatique développé au chapitre 4.

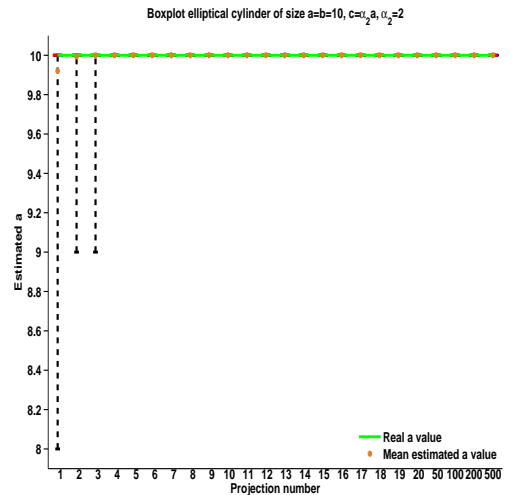
La performance de la méthode proposée a été quantifiée en utilisant comme indicateur l'erreur moyenne (absolue et relative) car cela paraît plus opportun pour l'utilisateur final. En effet, d'un point de vue pratique, ce dernier aimerait savoir quelle est l'erreur commise par la méthode proposée. Cependant, il aurait été possible de quantifier les résultats obtenus par d'autres indicateurs. Une

représentation graphique assez intéressante d'une série statistique s'appelle le diagramme en boîte à moustaches. Il permet premièrement de visualiser les principaux indicateurs de répartition de la série (médiane, quartiles, minimum et maximum) et deuxièmement d'avoir une idée du type de sa distribution (distribution normale, distribution asymétrique). La figure 7.14 montre le diagramme en boîte à moustaches des valeurs estimées de  $a$  par le maximum de vraisemblance des fonctions de densité de probabilité des aires projetées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Il est possible de constater que ces distributions sont assez distinctes. En effet, pour les objets de type ellipsoïde, cylindre et parallélépipède rectangle, la valeur du paramètre de taille  $a$  est toujours sous-estimée contrairement aux objets de type bipyramide et pyramide où la valeur de  $a$  peut aussi bien être sous-estimée que sur-estimée. Ceci peut s'expliquer par le fait que pour une même valeur de  $a$  et pour différentes valeurs de  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 = 1$ ), les fonctions de densité de probabilité des aires projetées des objets de type ellipsoïde, cylindre et parallélépipède rectangle ne se « croisent » pas contrairement aux fonctions de densité de probabilité des aires projetées des objets de type bipyramide et pyramide (figure 7.1).

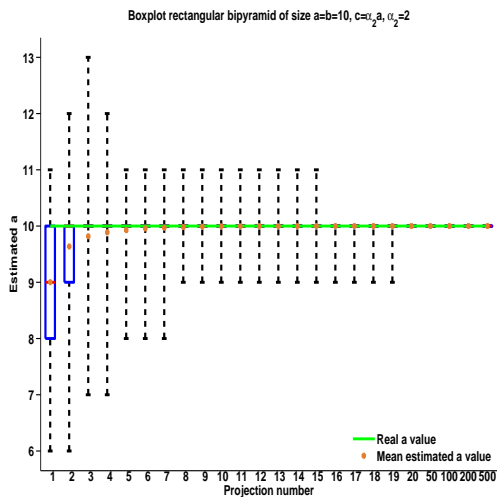
**Remarque 7.1** *La méthode qui vient d'être présentée dans ce chapitre a été publiée en 2010 dans une conférence internationale IEEE à comité de lecture avec proceedings : « IEEE International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications » (IEEE IPTA). Le lecteur est invité à consulter la référence suivante [137].*



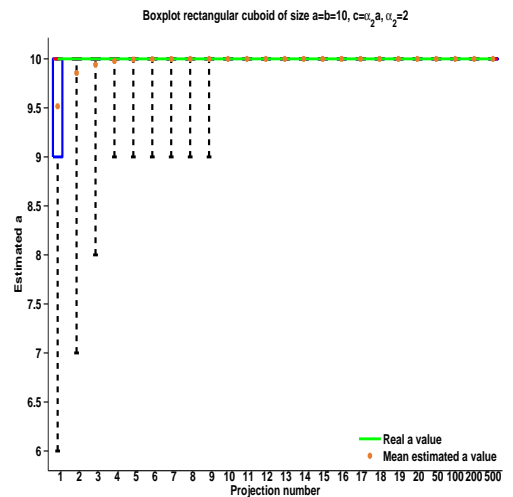
(a) Ellipsoïde.



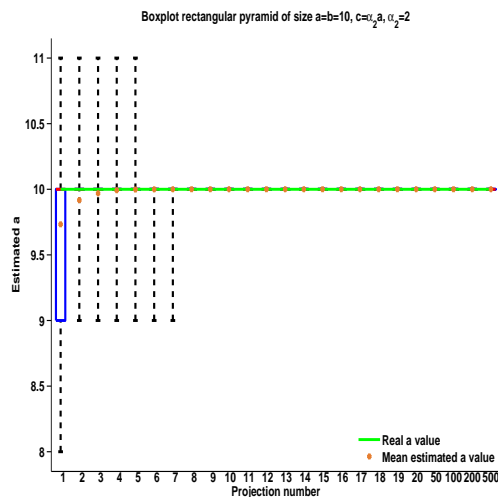
(b) Cylindre.



(c) Bipyramide.



(d) Parallélepède rectangle.



(e) Pyramide.

Figure 7.14 – Boîtes à moustache des valeurs estimées de  $a$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ .





## Chapitre 8

# Estimation de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

Dans le chapitre précédent, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance des fonctions de densité de probabilité des aires projetées ou des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés a été développée pour estimer la « taille » d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D. Dans ce chapitre, il est proposé d'estimer la « forme » d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D. Pour ce faire, un descripteur de forme stéréologique a été développé. Ce descripteur permet de caractériser la forme d'un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  et ceci indépendamment de sa taille, *i.e.* indépendamment du paramètre de taille  $a$ . De plus, il peut être utilisé pour estimer la valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$  d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ . Pour construire ce descripteur stéréologique, il est tout d'abord nécessaire de décrire les multiples projections 2-D d'un objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  puis de fusionner ces différentes descriptions.

Pour décrire une projection 2-D d'un objet 3-D, donc un objet 2-D, des descripteurs de forme 2-D (2-D shape descriptors) sont utilisés. D'après la littérature, ces derniers peuvent être classés en deux catégories [206] : les descripteurs basés sur le contour de l'objet 2-D et les descripteurs basés sur la région de l'objet 2-D.

Les descripteurs de forme basés sur le contour de l'objet 2-D incluent des mesures géométriques simples comme par exemple le périmètre ou des mesures morphométriques comme la compacité. Ils incluent aussi des descripteurs plus complexes comme par exemple des descripteurs basés sur un « code en chaîne » (chain code) [60] [18], des descripteurs de Fourier [205], ou encore des descripteurs basés sur les ondelettes [181]. Le principal inconvénient de ces descripteurs est qu'ils sont généralement sensibles au bruit.

Les descripteurs de forme basés sur la région de l'objet 2-D incluent eux aussi des mesures géométriques simples comme par exemple l'aire ou des mesures topologiques comme le nombre d'Euler ou la taille des concavités de l'objet 2-D (concavity tree matching [55]). Ils incluent aussi des descripteurs statistiques comme les moments de Hu [76], de Zernike ou de Legendre [178]. Contrairement aux descripteurs basés sur le contour de l'objet 2-D, ces descripteurs sont moins sensibles au bruit car ils prennent en compte toute l'information de l'objet 2-D. Cependant, en utilisant l'un de ces descripteurs, il paraît assez difficile de fusionner les différentes descriptions résultant des multiples projections d'un objet 3-D. C'est pourquoi il a été décidé de ne pas utiliser l'un d'entre eux.

Récemment, un nouveau descripteur de forme 2-D, appelé diagramme de forme (chapitre 5), a été

étudié en détails par Rivolier et al. [147] [148] [149]. Ce descripteur permet de décrire la morphométrie d'un ensemble 2-D compact. Il possède plusieurs propriétés intéressantes, il est invariant par translation, rotation et changement d'échelle et contrairement aux descripteurs précédents, il semble assez facile en utilisant ce descripteur de fusionner les différentes descriptions résultant des multiples projections d'un objet 3-D. En effet, un diagramme de forme fait correspondre à un objet 2-D un point dans le plan, les multiples projections d'un objet 3-D sont donc décrites par un ensemble de points. Pour ces raisons, il a été décidé d'utiliser ce descripteur de forme 2-D.

## 8.1 Le descripteur de forme stéréologique proposé

Soit  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  un objet 3-D convexe de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2$  et soit  $\mathcal{P}_{CO, a, \alpha_1, \alpha_2} \subset \mathcal{K}(\mathbb{E}^2)$  l'ensemble de ses projections orthographiques (quel que soit  $p$  appartenant à  $\mathcal{P}_{CO, a, \alpha_1, \alpha_2}$ ,  $p$  est un ensemble convexe). Le descripteur de forme stéréologique proposé est basé sur le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$  ( $\mathcal{D}_{12}$  est le diagramme de forme qui discrimine aux mieux deux ensembles compacts convexes, chapitre 5) et puisque les diagrammes de forme sont invariants par similitudes, le descripteur de forme proposé est aussi invariant par ces transformations. Par conséquent, il est indépendant du paramètre de taille  $a$ . Dans ce chapitre, l'ensemble des projections orthographiques d'un objet 3-D  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  est donc noté  $\mathcal{P}_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$  et un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2$  est noté  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$ . Soit  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$  la restriction du diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$  à  $\mathcal{P}_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$  et soit  $M = (M^1, M^2) = (\omega / d, 4A / \pi d^2)$  le vecteur aléatoire continu appelé « fonctionnelle morphométrique projetée » associé à une projection orthographique de  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$ . Le descripteur de forme stéréologique proposé, noté  $H_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$ , est défini comme la densité de probabilité conjointe de  $M^1$  et  $M^2$ . Formellement,  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$  et  $H_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$  sont définis comme suit :

$$HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2} : \begin{cases} \mathcal{P}_{CO, \alpha_1, \alpha_2} & \rightarrow & [0, 1]^2 \\ p & \mapsto & M = (M^1, M^2) = (\omega / d, 4A / \pi d^2) \end{cases}$$

$$H_{CO, \alpha_1, \alpha_2} : \begin{cases} HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{P}_{CO, \alpha_1, \alpha_2}) & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ M = (M^1, M^2) & \mapsto & H_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(M) \end{cases}$$

Pour des objets 3-D simples comme par exemple des sphères, déterminer analytiquement la fonction de densité de probabilité conjointe de  $M^1 = \omega / d$  et  $M^2 = 4A / \pi d^2$  est possible. Pour des objets 3-D plus complexes, cela est plus difficile voire impossible. Pour cette raison, et parce que le descripteur de forme stéréologique proposé se veut générique, il a été décidé de générer cette fonction de manière numérique à l'aide du simulateur développé au chapitre 4.

Commençons donc tout d'abord par déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $H_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$ , *i.e.*  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{P}_{CO, \alpha_1, \alpha_2})$ , avant de générer numériquement cette densité de probabilité.

### 8.1.1 Détermination de l'ensemble de définition de la densité de probabilité $H_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$

Pour déterminer l'ensemble de définition de  $H_{CO, \alpha_1, \alpha_2}$ , *i.e.*  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{P}_{CO, \alpha_1, \alpha_2})$ , le processus suivant est réalisé. Soit  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$  un objet 3-D convexe de paramètres de forme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Considérons cet objet au centre d'une large sphère. En pavant la sphère de manière régulière, en utilisant un modèle icosaédrique,  $K$  ( $K = 2.621.442$ ) points sont générés à sa surface. Chaque point peut être vu comme une position particulière de la caméra avec laquelle l'objet au centre de la sphère est observé.

À chaque position de la caméra correspond donc une projection orthographique particulière de l'objet 3-D (chapitre 4). Ainsi  $K$  projections orthographiques sont générées (pour des raisons de temps de calcul,  $K = 655.362$  projections sont utilisées pour les objets de type ellipsoïde et cylindre) et pour chaque projection  $p_i$  appartenant à  $\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket}$ ,  $M = (M^1, M^2) = (\omega / d, 4A / \pi d^2)$  est calculé. La figure 8.1 montre le résultat de ce processus pour deux parallélépipèdes rectangles isotropes ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  et  $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 8$ , respectivement) et un parallélépipède rectangle anisotrope ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 50$ ). Il

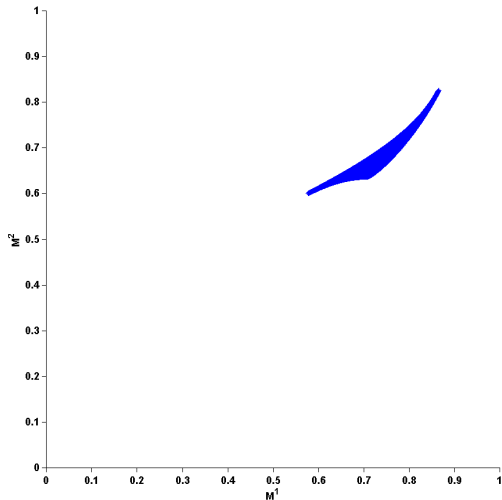
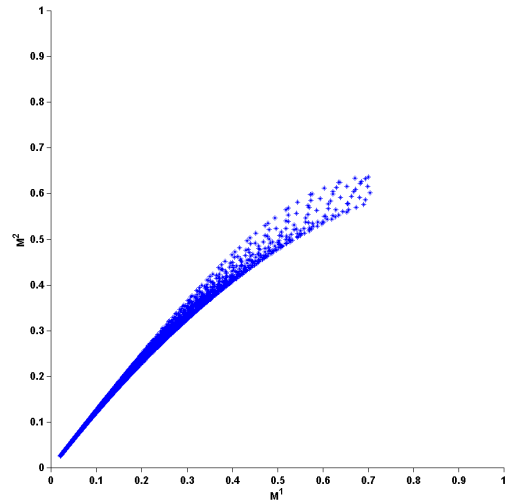
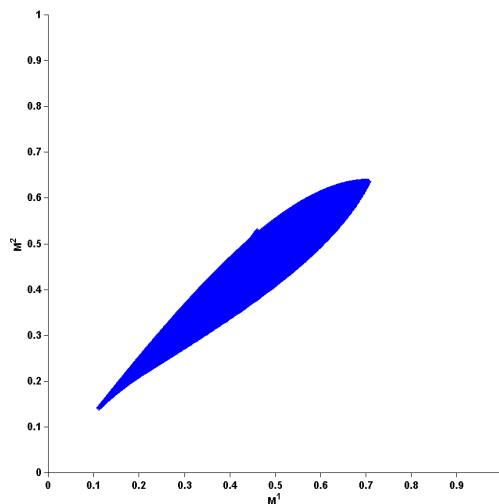
(a)  $HD_{\text{Parallélépipède rectangle}, 1, 1}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$ .(b)  $HD_{\text{Parallélépipède rectangle}, 1, 50}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$ .(c)  $HD_{\text{Parallélépipède rectangle}, 4, 8}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$ .

Figure 8.1 –  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$  pour trois parallélépipèdes rectangles : deux parallélépipèdes rectangles isotropes et un parallélépipède rectangle anisotrope ( $K = 2.621.442$ ).

est important de noter que pour des objets 3-D isotropes, l'ensemble de points généré est très dense, visuellement il n'y a pas de trou, et  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$  tend à former un ensemble non convexe simplement connexe. Pour des objets 3-D anisotropes, l'ensemble de points généré est plus parsemé et n'est pas distribué uniformément. Cependant, si plus de projections  $K$  sont générées, l'ensemble de points devient de plus en plus dense. Par conséquent,  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$  tend aussi à former un ensemble non convexe simplement connexe. En conséquence, il est supposé dans cette étude que quel que soit l'objet 3-D  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$ ,  $HD_{CO, \alpha_1, \alpha_2}(\mathcal{P}_{CO, \alpha_1, \alpha_2})$  forme un ensemble simplement connexe.

Afin de déterminer de manière précise l'enveloppe de l'ensemble de points  $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ , une méthode de la littérature appelée LDA- $\alpha$ -shapes (Locally-Density-Adaptive- $\alpha$ -shapes) [109] [33] a été utilisée. Cette méthode a été choisie car, contrairement à d'autres méthodes classiques comme par exemple les  $\alpha$ -shapes [52], elle permet de traiter des ensembles de points non uniformément répartis comme celui de la figure 8.1(b). Malheureusement, cette méthode dépend du paramètre  $\alpha$  qui régule la tortuosité de l'enveloppe de l'ensemble de points. Afin de sélectionner automatiquement la valeur de ce paramètre  $\alpha$ , un algorithme basé sur la minimisation d'un critère quantitatif a été mise en place [140]. Le lecteur est invité à se référer au chapitre 6 pour avoir une description détaillée de cet algorithme. La figure 8.2 montre l'enveloppe de  $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$ , déterminés grâce à la méthode des LDA- $\alpha$ -shapes et à l'algorithme de sélection automatique du paramètre de contrôle  $\alpha$ , pour les ensembles de points précédents. L'enveloppe de l'ensemble de points  $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,K \rrbracket})$  ayant été déterminée avec soin et le nombre de projections  $K$  étant conséquent, il est possible d'affirmer que cette enveloppe tend vers l'enveloppe de  $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,\alpha_1,\alpha_2})$ , *i.e.* le contour du domaine de définition de  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ .

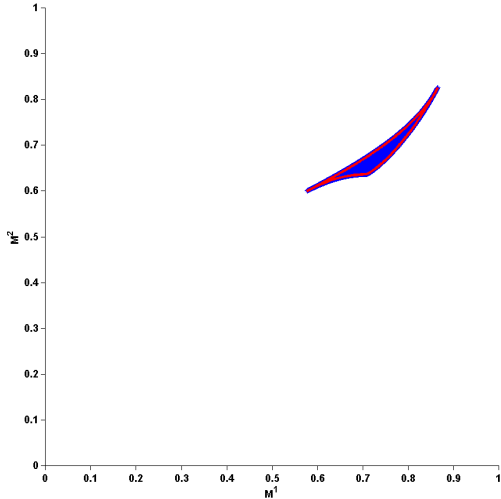
Le domaine de définition de la fonction  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  étant maintenant connu, construisons numériquement cette densité de probabilité.

### 8.1.2 Détermination de la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$

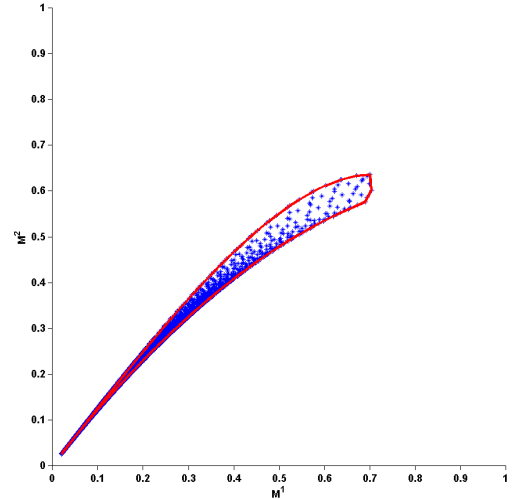
Pour construire numériquement la fonction de densité de probabilité conjointe de  $M^1$  et  $M^2$ , le processus suivant est réalisé. Soit un objet 3-D convexe  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$  de paramètres de forme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Grâce au simulateur développé au chapitre 4,  $N$  ( $N = 10.000.000$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet sont générées et pour chaque projection  $p_i$  appartenant à  $\{p_i\}_{i \in \llbracket 1,N \rrbracket}$ , les fonctionnelles morphométriques  $M^1$  et  $M^2$  sont calculées. À partir de ces  $N$  valeurs de fonctionnelles morphométriques, un histogramme conjoint normalisé  $h$  ( $\iint_{HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,\alpha_1,\alpha_2})} h = 1$ ) est construit en discrétisant  $[0, 1]^2$  avec un pas de  $0.003 \times 0.003$  environ. La valeur de ce pas a été choisi de manière empirique afin d'obtenir un bon compromis entre précision et robustesse de l'histogramme. Si nécessaire, une interpolation est réalisée sur le domaine  $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,\alpha_1,\alpha_2})$  afin que, quelque soit  $M$  appartenant à  $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\mathcal{P}_{CO,\alpha_1,\alpha_2})$ ,  $h(M) > 0$ . Cette interpolation est possible car le domaine de définition de  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  a été déterminé précédemment. La fonction de densité de probabilité conjointe de  $M^1$  et  $M^2$  de l'objet 3-D  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$ , *i.e.*  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ , correspond à l'histogramme  $h$  ainsi construit. La figure 8.3 (figure 8.4, respectivement) montre les fonctions  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  ainsi générées pour les objets de types ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètres de forme  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ( $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 2$ , respectivement).

### 8.1.3 Validation du nombre de projections $N$ utilisé pour générer la densité de probabilité $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$

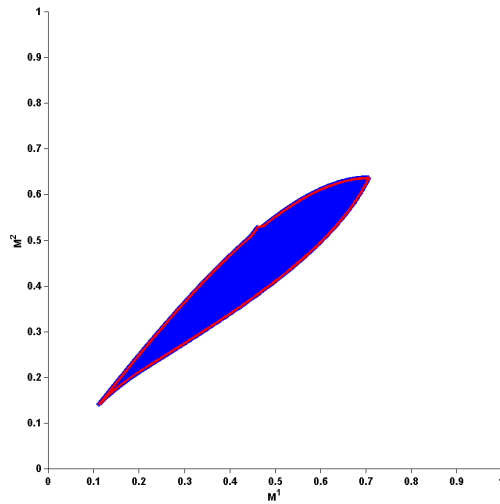
Pour valider la construction numérique de la fonction de densité de probabilité conjointe de  $M^1$  et  $M^2$  d'un objet 3-D  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$  et en particulier valider le nombre de projections  $N$  ( $N = 10.000.000$ ) utilisé pour construire  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ , le calcul suivant est effectué. Pour un objet 3-D  $(CO, \alpha_1, \alpha_2)$ , la fonction de densité de probabilité  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  est générée  $m$  ( $m = 100$ ) fois ( $\{H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}^i\}_{i \in \llbracket 1,m \rrbracket}$ ) et l'erreur relative moyenne, notée  $MVE$  (Mean Validation Error), entre  $H_{mean} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}^i$  et



(a) Enveloppe du LDA- $\alpha_{opt}$ -shapes de  $HD_{\text{Parallépipède rectangle},1,1}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$ .



(b) Enveloppe du LDA- $\alpha_{opt}$ -shapes de  $HD_{\text{Parallépipède rectangle},1,50}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$ .



(c) Enveloppe du LDA- $\alpha_{opt}$ -shapes de  $HD_{\text{Parallépipède rectangle},4,8}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$ .

Figure 8.2 – Enveloppe du LDA- $\alpha_{opt}$ -shapes de  $HD_{CO,\alpha_1,\alpha_2}(\{p_i\}_{i \in \llbracket 1, K \rrbracket})$  pour trois parallépipèdes rectangles : deux parallépipèdes rectangles isotropes et un parallépipède rectangle anisotrope ( $K = 2.621.442$ ).

$\{H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  est calculé (équation 8.1).

$$MVE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\|H_{mean} - H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}^i\|_1}{\|H_{mean}\|_1} \quad (8.1)$$

où  $\|\cdot\|_1$  désigne la norme  $L_1$ .

Le tableau 8.1 montre l'erreur  $MVE$  ainsi calculée pour les objets 3-D convexes isotropes de type ellipsoïde, cylindre, bipyramide, parallépipède rectangle de paramètres de forme  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  et pour les objets 3-D convexes anisotropes de type ellipsoïde, cylindre, bipyramide, parallépipède rectangle et pyramides de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 50$ . Au vu de ces résultats, il est possible d'affirmer que le nombre de projections  $N$  utilisé pour générer  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  est suffisant. En effet, dans le pire des cas, l'erreur  $MVE$  est égale à 1,28%.

## 8. Estimation de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

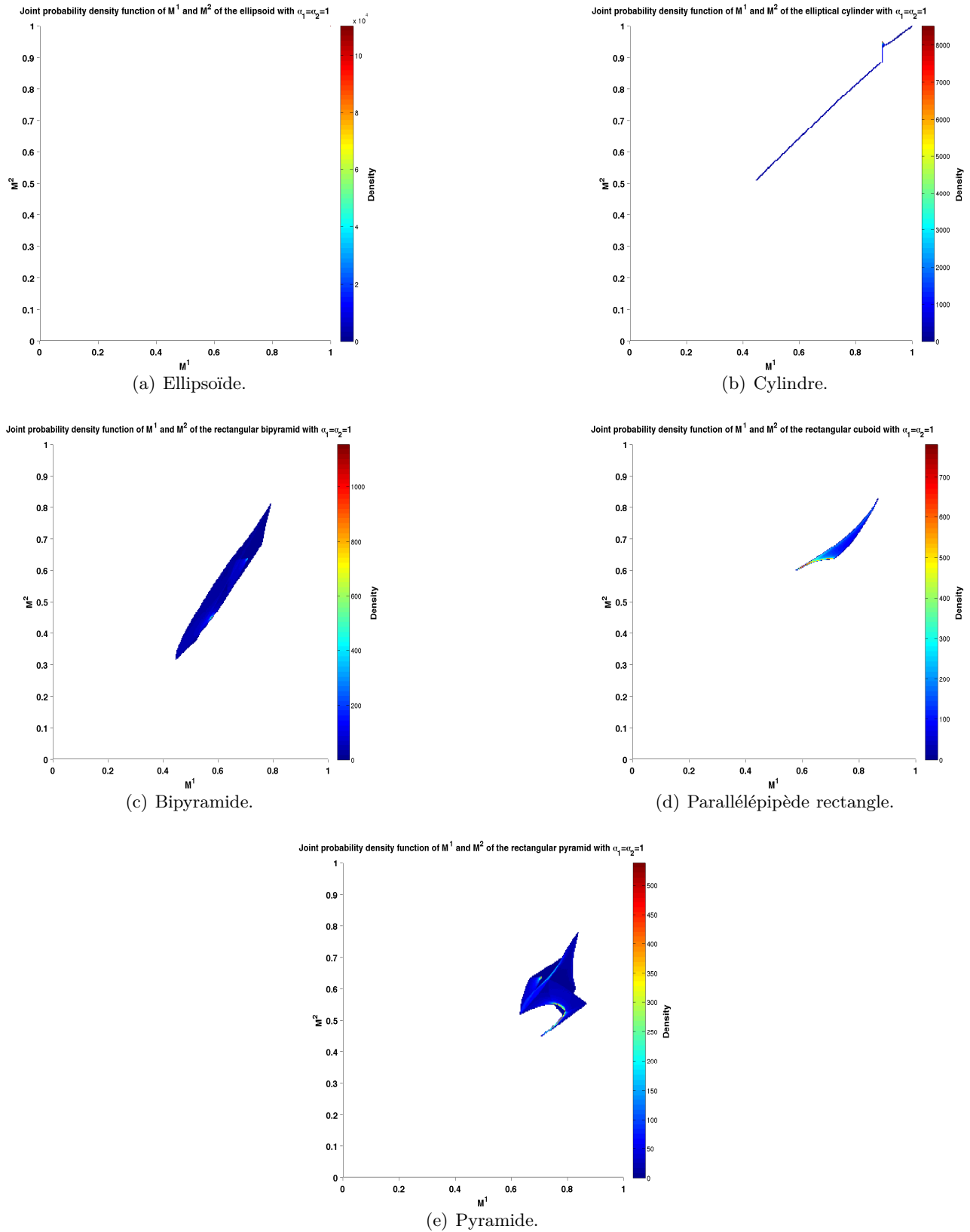
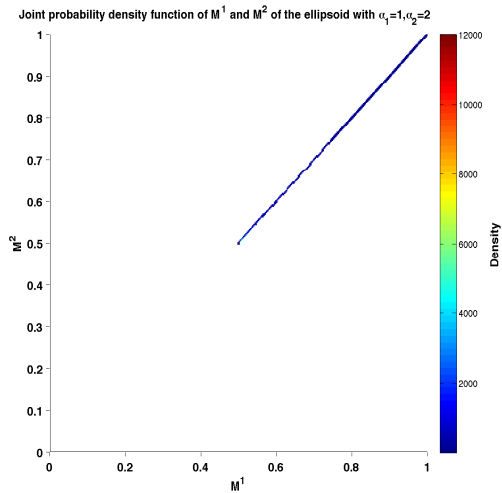
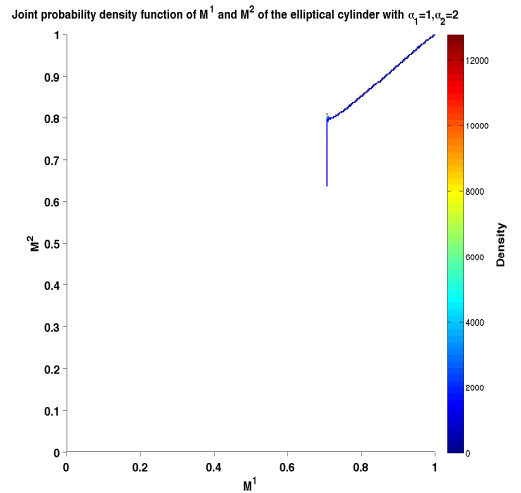


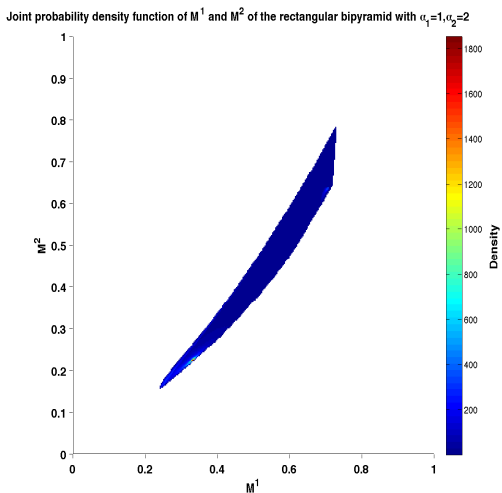
Figure 8.3 – Densités de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ .



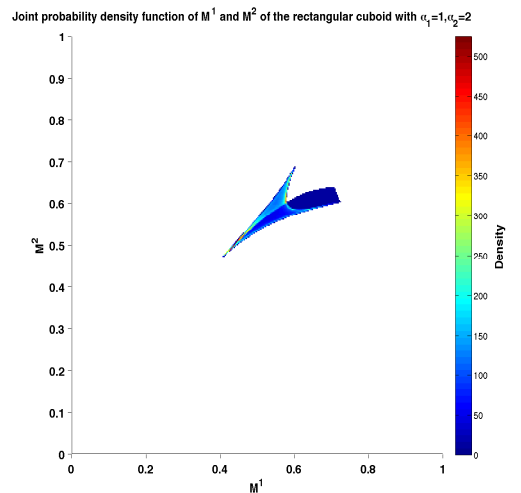
(a) Ellipsoïde.



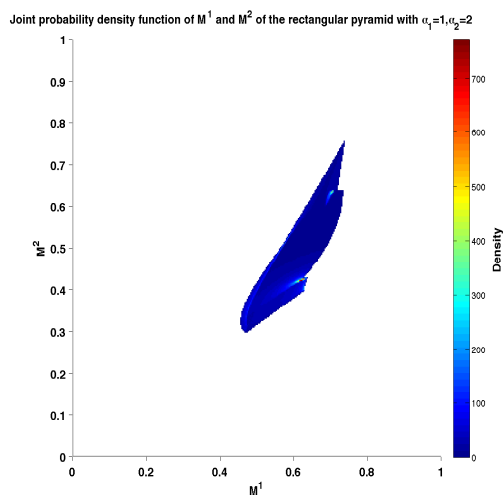
(b) Cylindre.



(c) Bipyramide.



(d) Parallélepède rectangle.



(e) Pyramide.

Figure 8.4 – Densités de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées pour quelques objets implémentés dans le simulateur de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .



	Ellipsoïde ( $\alpha_1 = 1$ )		Cylindre ( $\alpha_1 = 1$ )		Bipyramide ( $\alpha_1 = 1$ )		Parallépipède rec- tangle ( $\alpha_1 = 1$ )		Pyramide ( $\alpha_1 = 1$ )	
	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_2 = 50$	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_2 = 50$	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_2 = 50$	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_2 = 50$	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_2 = 50$
MVE (%)	$\simeq 0$	0.13	0.40	0.21	1.28	0.18	0.64	0.26	1.25	0.28

Tableau 8.1 – Validation du nombre de projections  $N$  ( $N = 10.000.000$ ) utilisé pour générer numériquement  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ . L'erreur  $MVE$  est exprimée en pourcentage.

## 8.2 Propriétés du descripteur de forme stéréologique proposé

Tout d'abord, il est important de remarquer que l'invariance par similitudes, *i.e.* translation, rotation et changement d'échelle, des fonctionnelles morphométriques utilisées pour construire  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  implique l'invariance du descripteur de forme stéréologique proposé par ces mêmes transformations géométriques.

### 8.2.1 Caractérisation géométrique du domaine de définition de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$

Les figures 8.5 et 8.6 montrent l'enveloppe du domaine de définition de  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$  et l'enveloppe du domaine de définition de  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{CO,1,\alpha_2}$  pour ces mêmes types d'objets. Il est important de noter (excepté pour les objets de type pyramide et bipyramide) que les domaines de définition de  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Ellipsoïde},1,\alpha_2}$ ,  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Cylindre},1,\alpha_2}$ ,  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Parallépipède rectangle},1,\alpha_2}$  sont relativement disjoints spatialement. Cette propriété est remarquable, car, par conséquent, il serait possible d'utiliser le descripteur de forme stéréologique proposé pour estimer avec précision le type de forme  $CO$  d'un objet 3-D convexe ( $CO, 1, \alpha_2$ ) à partir de ses projections 2-D. Cette étude n'a cependant pas été réalisée dans la cadre de cette thèse. Pour caractériser géométriquement le domaine de définition de  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$ , son aire et son périmètre sont calculés. La figure 8.7 montre l'évolution de l'aire et du périmètre du domaine de définition de  $H_{CO,1,\alpha_2}$  en fonction de  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ ) pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallépipède rectangle, bipyramide et pyramide. Excepté pour l'objet de type cylindre, il est important de remarquer que l'aire et le périmètre du domaine de définition de  $H_{CO,1,\alpha_2}$  croissent en fonction de  $\alpha_2$ . Pour des « petites valeurs » de  $\alpha_2$ , la monotonie est même stricte. En ce qui concerne l'objet de type cylindre, comme expliqué au chapitre 7, quand  $\alpha_2 = 1$  ( $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ), sa projection « minimum » correspond à une projection de la base du cylindre et quand  $\alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$ , sa projection « minimum » correspond à une projection du côté du cylindre (figure 7.2). La projection « minimum » ne résulte donc pas de la même projection orthographique. C'est pour cette raison, que le périmètre du domaine de définition de  $H_{\text{Cylindre},1,\alpha_2}$  n'est pas monotone en fonction de  $\alpha_2$ , *i.e.* il décroît de  $\alpha_2 = 1$  à  $\alpha_2 = 2$  puis croît.

### 8.2.2 Étude de la robustesse au bruit de $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$

Pour étudier la robustesse au bruit du descripteur de forme stéréologique  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  proposé, le processus suivant est effectué. Soit un objet 3-D convexe (Parallélépipède rectangle,  $1, \alpha_2 \geq 1$ ). Soient  $\{v_i\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  ses  $N = 8$  sommets et  $\{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_1v_4, e_3 = v_1v_5, e_4 = v_2v_3, e_5 = v_2v_6, e_6 = v_3v_4, e_7 = v_3v_7, e_8 = v_4v_8, e_9 = v_5v_6, e_{10} = v_5v_8, e_{11} = v_6v_7, e_{12} = v_7v_8\}$  ses 12 arrêtes. Soit (Parallélépipède rectangle<sub>noisy</sub>,  $\alpha'_1, \alpha'_2$ ) un objet 3-D convexe bruité de type parallélépipède rectangle et de paramètres de forme  $\alpha'_1, \alpha'_2$  déduit de (Parallélépipède rectangle,  $1, \alpha_2$ ). Pour que l'objet bruité reste convexe, (Parallélépipède rectangle<sub>noisy</sub>,  $\alpha'_1, \alpha'_2$ ) est construit à partir de (Parallélépipède rectangle,  $1, \alpha_2$ ) en bougeant aléatoirement (loi uniforme) les arrêtes  $\{e_j\}_{j \in \zeta}$  ( $\zeta = \{1, 6, 9, 12\}$  ou  $\zeta = \{3, 5, 7, 8\}$ ) de (Parallélépipède rectangle,  $1, \alpha_2$ ) dans une direction perpendiculairement à  $e_j$ , l'intensité de la déformation étant proportionnelle à une valeur donnée du rapport signal sur bruit de crête (PSNR : Peak Signal-to-Noise Ratio) (équation 8.2 [25]). La figure 8.8 montre un exemple d'une telle déformation.

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{N \max_{1 \leq i \leq N} (\|v_i\|_2^2)}{\sum_{j=1}^N \|v'_j - v_j\|_2^2} \right) \quad (8.2)$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme  $L_2$  et  $v'_j$  le  $j$ ème nouveau sommet bruité.

Pour une déformation donnée,  $H_{\text{Parallélépipède rectangle}_{noisy, \alpha'_1, \alpha'_2}}$  est calculé et le domaine de définition de  $H_{\text{Parallélépipède rectangle}_{noisy, \alpha'_1, \alpha'_2}}$ , noté  $E_{noisy}$ , est comparé au domaine de définition de  $H_{\text{Parallélépipède rectangle}_{1, \alpha_2}}$ , notée  $E$ , selon l'équation 8.3.

$$NE = \frac{A((E_{noisy} \cup E) \setminus (E_{noisy} \cap E))}{A(CDB)} \quad (8.3)$$

où  $A$  désigne l'opérateur d'aire et  $CDB$  le domaine des convexes (l'image de la fonction  $\mathcal{D}_{12}$  restreint à l'ensemble des objets 2-D convexes) du diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$ .

L'erreur  $NE$  (Noise Error), mesure la dispersion de  $E_{noisy}$  à l'intérieur du domaine des convexes du diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12}$ . Si  $E_{noisy}$  reste « proche » spatialement de  $E$ , l'erreur  $NE$  est faible tandis que si  $E_{noisy}$  « s'étale » spatialement,  $NE$  devient important. Dans le pire des cas  $NE = 1$ .

Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois et l'erreur moyenne  $MNE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m NE_i$  (Mean Noise Error) est calculée. Le tableau 8.2 montre le résultat de ce processus pour des parallélépipèdes rectangles de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10\}$ . Le symbole x présent dans ce tableau signifie que pour une telle valeur de  $PSNR$  et une telle valeur de  $\alpha_2$  la déformation est trop importante, *i.e.* (Parallélépipède rectangle<sub>noisy</sub>,  $\alpha'_1, \alpha'_2$ ) n'est pas toujours convexe. Il est important de remarquer que plus la valeur de  $\alpha_2$  augmente plus le descripteur stéréologique proposé est sensible au bruit. Dans le pire des cas ( $PSNR = 20, \alpha_2 = 5$ ), l'erreur moyenne est égale à 10,91%. Cette erreur peut paraître importante mais pour une telle valeur de  $PSNR$  et pour une telle valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$ , la déformation effectuée devient assez importante. Pour des valeurs de  $PSNR$  plus grandes que 30, l'erreur moyenne est toujours plus petite que 10%.

	Parallélépipède rectangle ( $\alpha_1 = 1$ )			
PSNR	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_2 = 2$	$\alpha_2 = 5$	$\alpha_2 = 10$
20	5,38	6,63	10,91	x
30	2,05	2,18	3,55	7,20
40	0,78	0,73	1,29	2,31
50	0,23	0,26	0,42	0,78
60	0,07	0,08	0,17	0,30

Tableau 8.2 – Robustesse au bruit - Valeurs de l'erreur moyenne  $MNE$  pour l'objet de type parallélépipède rectangle de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10\}$ . Le symbole x signifie que pour une telle valeur de  $PSNR$  et une telle valeur de  $\alpha_2$  la déformation est trop importante, *i.e.* (Parallélépipède rectangle<sub>noisy</sub>,  $\alpha'_1, \alpha'_2$ ) n'est pas toujours convexe.  $MNE$  est exprimé en pourcentage.

### 8.3 Utilisation du descripteur de forme stéréologique proposé pour estimer le paramètre de forme $\alpha_2$

Dans cette section 8.3, le descripteur de forme stéréologique proposé est utilisé pour estimer la valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$  d'un objet 3-D convexe  $(CO, 1, \alpha_2)$  à partir de ses projections orthographiques. Il est supposé que le type  $CO$  de l'objet est connu (ellipsoïde, cylindre, etc.), que le paramètre de forme  $\alpha_1$  est égal à 1 et que le paramètre de forme  $\alpha_2$  est plus grand que 1. Sous ces hypothèses, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance de  $\alpha_2$  des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées est développée pour estimer la valeur du paramètre de forme inconnue  $\alpha_2$ .

#### 8.3.1 Maximum de vraisemblance de $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées

Soit  $M = (M^1, M^2) = (\omega / d, 4A / \pi d^2)$  le vecteur aléatoire continu « fonctionnelles morphométriques projetées » associé à une projection 2-D d'un objet 3-D  $(CO, 1, \alpha_2)$  inconnu.

Soient  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ ,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) réalisations de  $M$ . Les fonctionnelles morphométriques projetées d'un objet 3-D étant indépendantes et identiquement distribuées (iid), la vraisemblance de  $\alpha_2$  au vu des  $n$  observations  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$  est définie comme suit :

$$L_{CO}^3(\alpha_2) = \prod_{i=1}^n H'_{CO, \alpha_2}(M_i) \quad (8.4)$$

où :

$$H'_{CO, \alpha_2} : \begin{cases} \mathbb{R}^{\neq} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ M_i & \mapsto & \begin{cases} H_{CO, 1, \alpha_2}(M_i) & \text{si } M_i \in HD_{CO, 1, \alpha_2}(\mathcal{P}_{CO, 1, \alpha_2}) \\ 0 & \text{si } M_i \notin HD_{CO, 1, \alpha_2}(\mathcal{P}_{CO, 1, \alpha_2}) \end{cases} \end{cases}$$

et  $H_{CO, 1, \alpha_2}$  est la fonction de densité de probabilité des fonctionnelles morphométriques projetées définie précédemment. En conséquence, le maximum de vraisemblance de  $\alpha_2$  est défini par :

$$\hat{\alpha}_2 = \arg \max_{\alpha_2 \in [1; +\infty[} L_{CO}^3(\alpha_2) \quad (8.5)$$

où  $\hat{\alpha}_2$  désigne la valeur estimée de  $\alpha_2$ .

### 8.3.2 Problème d'optimisation

Pour résoudre l'équation 8.5, deux solutions sont envisageables : une méthode de recherche exhaustive ou une méthode d'optimisation [172]. Le principal désavantage des méthodes d'optimisation est que la convergence vers l'extremum global de la fonction à optimiser n'est pas toujours garantie. De plus, seul un paramètre est à optimiser. C'est pourquoi, la méthode de recherche exhaustive a été privilégiée.

Contrairement au paramètre de taille  $a$  (section 7.3), il n'est pas possible de borner théoriquement l'espace de recherche du paramètre de forme  $\alpha_2$ . Cependant, l'objectif applicatif de la méthode proposée étant d'estimer la valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$  de chacune des particules générées lors de processus de cristallisation, il est possible de borner l'espace de recherche de  $\alpha_2$  expérimentalement. Pour ce faire, les vidéos de plusieurs expériences de cristallisation ont donc été étudiées et la valeur maximum du paramètre de forme  $\alpha_2$  a été évaluée à 40. Il a donc été décidé de majorer l'espace de recherche par  $\alpha_{2max} = 50$ . Pour des raisons de temps de calcul, les fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées  $H_{CO,1,\alpha_2}$  sont pré-calculées pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur en discrétisant par pas de 1 le paramètre de forme  $\alpha_2$  de  $\alpha_{2min} = 1$  à  $\alpha_{2max} = 50$ . Ainsi, une base de données de fonctions de densité de probabilité  $H_{CO,1,\alpha_2}$  est construite.

### 8.3.3 Résultats

Afin d'évaluer la performance de la méthode proposée d'estimation du paramètre de forme  $\alpha_2$ , des tests ont été effectués en utilisant le simulateur. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, 1, \alpha_2)$ , de type  $CO$  connu, de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 \geq 1$ , le simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet et, à partir de ces  $n$  projections, la méthode exposée dans la section 8.3.1 estime la valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$ , notée  $\hat{\alpha}_2$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour chaque  $n$  (notons  $\{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $\alpha_2$  où  $\hat{\alpha}_2^i$  représente la  $i$ ème valeur estimée de  $\alpha_2$ ). Pour quantifier les résultats obtenus, l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne (Absolute Mean Error et Relative Mean Error respectivement) entre la valeur réelle de  $\alpha_2$  et les valeurs estimées  $\{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ , notée  $AME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement), est calculée pour chaque valeur de  $n$  (équation 8.6 et équation 8.7 respectivement).

$$AME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\alpha_2 - \hat{\alpha}_2^i| \quad (8.6)$$

$$RME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|\alpha_2 - \hat{\alpha}_2^i|}{\alpha_2} \quad (8.7)$$

La figure 8.9(a) montre la distribution des valeurs estimées  $\{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  en fonction du nombre de projections  $n \in \{1, 2, 5, 10, 50\}$  pour un objet de type parallélépipède rectangle de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 10$ . La figure 8.9(b) montre l'erreur relative moyenne  $RME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n \in \{1, 2, 5, 10, 50\}$  pour ce même objet. Il est important de remarquer que plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $\alpha_2$  est précise. Sur la figure 8.9(a) cela se traduit par le fait que plus  $n$  augmente, plus la distribution est étroite et sur la figure 8.9(b) cela se traduit par le fait que la courbe est strictement décroissante. Pour  $n = 1$  projection,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $2 \leq \hat{\alpha}_2^i \leq 18$  et pour  $n = 50$

projections,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $\hat{\alpha}_2^i = 10$ . En moyenne, seulement deux projections de l'objet 3-D de type parallélépipède rectangle, de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 10$  sont nécessaires pour estimer  $\alpha_2$  avec une erreur inférieure à 10%.

La figure 8.10 (figure 8.11, respectivement) montre l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne entre la valeur réelle de  $\alpha_2$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Il est important de remarquer que, quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $\alpha_2$  est précise. De plus, plus la valeur de  $\alpha_2$  recherchée est grande (plus l'objet 3-D est anisotrope), plus il devient difficile d'estimer correctement sa valeur.

Néanmoins, pour un objet 3-D de type cylindre, quel que soit le nombre  $n$  de projections, il est plus facile d'estimer la valeur de  $\alpha_2$  quand  $\alpha_2 = 2$  que quand  $\alpha_2 = 1$ . En effet, quand  $\alpha_2 = 1$  ( $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ), la projection « minimum » correspond à une projection de la base du cylindre et quand  $\alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$ , la projection « minimum » correspond à une projection du côté du cylindre (figure 7.2). La projection « minimum » ne résulte donc pas de la même projection orthographique. C'est aussi pour cette raison que d'un point de vue relatif, il est plus facile d'estimer  $\alpha_2$  pour une pyramide de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  qu'une pyramide de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$  quand  $n = 1$ .

Enfin, il est important de noter que, quel que soit l'objet 3-D considéré, seulement quatre projections sont nécessaires pour qu'en moyenne  $\alpha_2$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. De plus, l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $\alpha_2$  et les valeurs estimées ne varie pas linéairement avec le paramètre de forme  $\alpha_2$ .

## 8.4 Conclusion

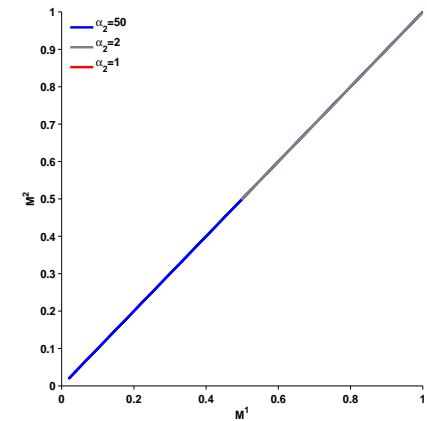
Dans ce chapitre, un nouveau descripteur de forme stéréologique basé sur les diagrammes de forme a été proposé. Ce descripteur permet de caractériser la forme d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, \alpha_1, \alpha_2$ ) et ceci indépendamment de sa taille, *i.e.* indépendamment de la valeur du paramètre de taille  $a$ . Il possède de plus plusieurs propriétés intéressantes, il est invariant par translation, rotation, changement d'échelle et est robuste au bruit.

Ce descripteur a notamment été utilisé pour estimer la « forme » et plus précisément la valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$ , à partir de ses projections 2-D, d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, 1, \alpha_2 \geq 1$ ) de type  $CO$  connu et ceci quelle que soit la valeur du paramètre de taille  $a$ . Plus spécifiquement, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance de  $\alpha_2$  des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées  $M^1 = \omega / d$  et  $M^2 = 4A / \pi d^2$  a été développée. Pour valider et évaluer la performance de cette méthode, des tests ont été réalisés grâce au simulateur sur cinq types d'objets convexes : ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide, pyramide. Les résultats ont été quantifiés en utilisant comme indicateur l'erreur moyenne (absolue et relative) et montrent que :

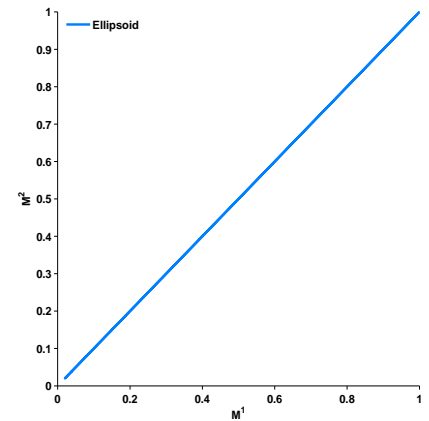
- plus le nombre de vues de l'objet 3-D augmente, plus l'estimation du paramètre  $\alpha_2$  devient précise ;
- plus l'objet 3-D est anisotrope (plus  $\alpha_2$  est grand), plus il est difficile d'estimer  $\alpha_2$  ;
- l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $\alpha_2$  et les valeurs estimées ne varie pas linéairement avec la valeur réelle du paramètre de forme  $\alpha_2$ .

Potentiellement, le descripteur stéréologique proposé permettrait aussi d'estimer les paramètres  $CO$  et  $\alpha_1$  d'un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ , à partir de ses projections 2-D, et ceci quelle que soit la valeur du paramètre de taille  $a$ . Cette étude n'a cependant pas été réalisée dans la cadre de cette thèse.

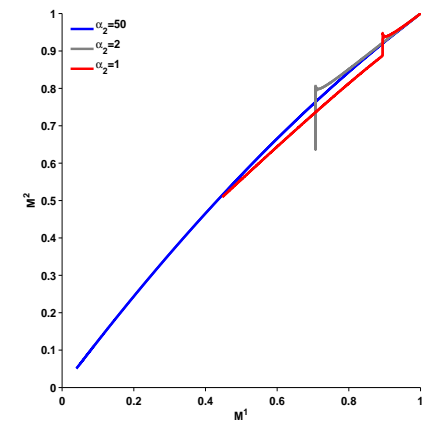
**Remarque 8.1** *La méthode qui vient d'être présentée dans ce chapitre a été soumise pour publication dans la revue internationale « Pattern Recognition » [142].*



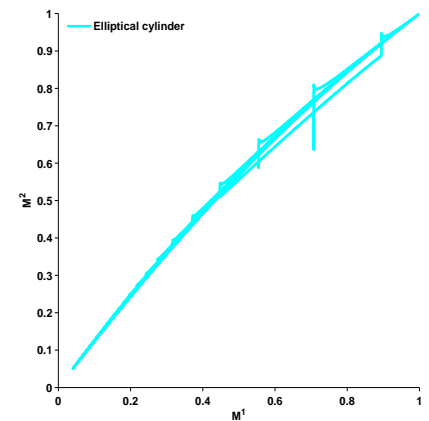
(a) Enveloppe du domaine de définition de  $H_{\text{Ellipsoïde},1,\alpha_2}$  ( $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ ).



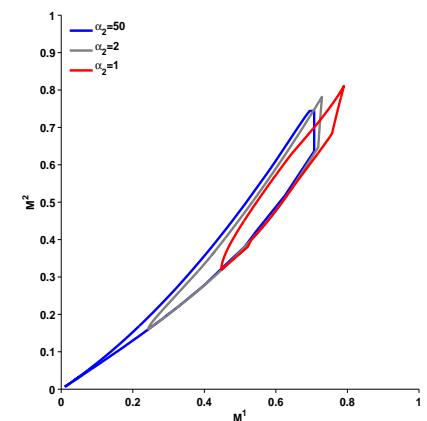
(b) Enveloppe du domaine de définition de  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Ellipsoïde},1,\alpha_2}$ .



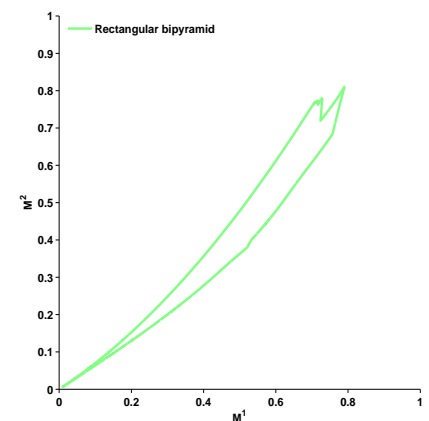
(c) Enveloppe du domaine de définition de  $H_{\text{Cylindre},1,\alpha_2}$  ( $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ ).



(d) Enveloppe du domaine de définition de  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Cylindre},1,\alpha_2}$ .

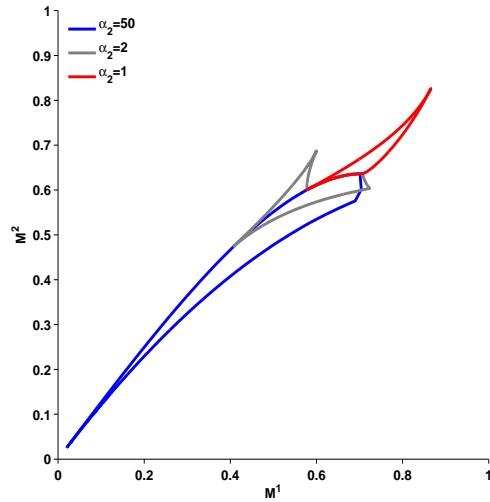


(e) Enveloppe du domaine de définition de  $H_{\text{Bipyramide},1,\alpha_2}$  ( $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ ).

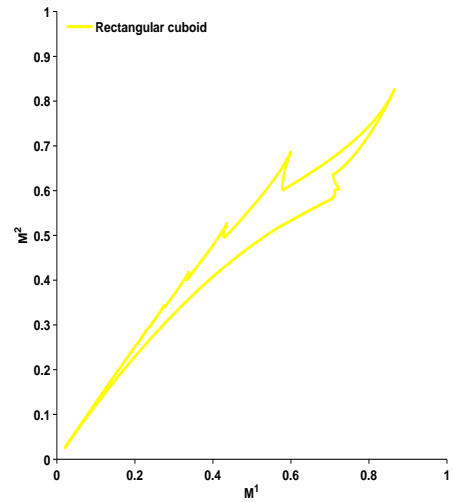


(f) Enveloppe du domaine de définition de  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Bipyramide},1,\alpha_2}$ .

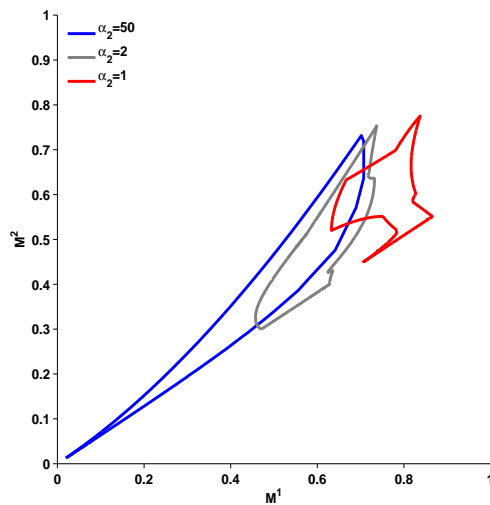
Figure 8.5 – Première colonne : enveloppe du domaine de définition de  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  pour les objets 3-D convexes de type ellipsoïde, cylindre et bipyramide de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ . Deuxième colonne : enveloppe du domaine de définition de l'ensemble des projections orthographiques pour les objets de type ellipsoïde, cylindre et bipyramide de paramètre de forme  $\alpha_1 = 1$ , quelle que soit la valeur de  $\alpha_2 \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ .



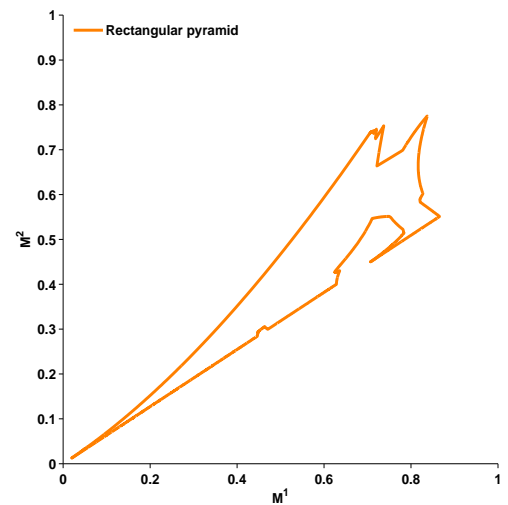
(a) Enveloppe du domaine de définition de  $H_{\text{Parallépipède rectangle},1,\alpha_2}$  ( $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ ).



(b) Enveloppe du domaine de définition de  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Parallépipède rectangle},1,\alpha_2}$ .



(c) Enveloppe du domaine de définition de  $H_{\text{Pyramide},1,\alpha_2}$  ( $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ ).



(d) Enveloppe du domaine de définition de  $\bigcup_{\alpha_2=1}^{50} H_{\text{Pyramide},1,\alpha_2}$ .

Figure 8.6 – Première colonne : enveloppe du domaine de définition de  $H_{CO,\alpha_1,\alpha_2}$  pour les objets 3-D convexes de type parallépipède rectangle et pyramide de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 \in \{1, 2, 50\}$ . Deuxième colonne : enveloppe du domaine de définition de l'ensemble des projections orthographiques pour les objets de type parallépipède rectangle et pyramide de paramètre de forme  $\alpha_1 = 1$ , quelle que soit la valeur de  $\alpha_2 \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ .



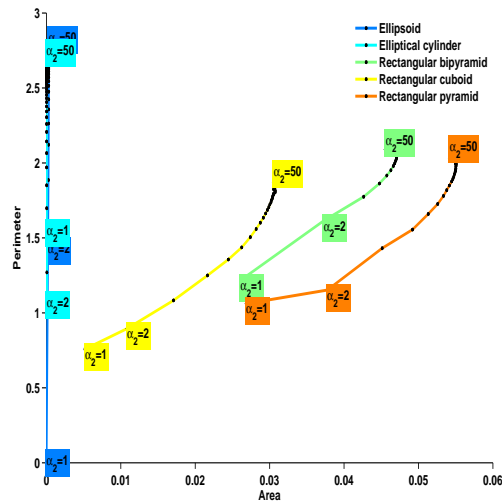
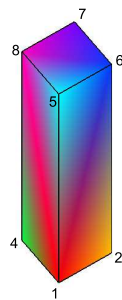
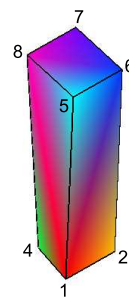


Figure 8.7 – Évolution de l'aire et du périmètre du domaine de définition de  $H_{CO,1,\alpha_2}$  en fonction de  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ ) pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur.

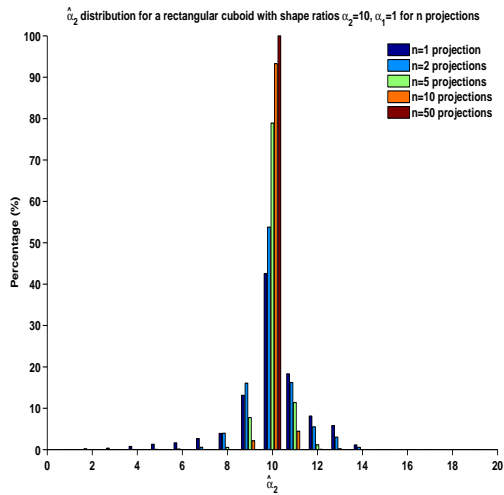


(a) Parallélépipède rectangle parfait de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 5$ .

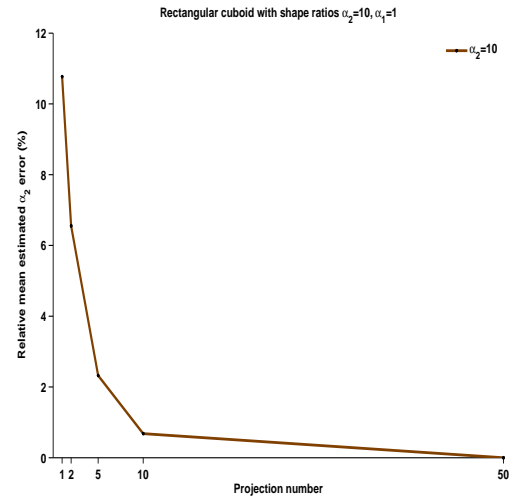


(b) Exemple de parallélépipède rectangle bruité déduit du parallélépipède rectangle parfait de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 5$  ( $PSNR = 20$ ).

Figure 8.8 – Exemple de déformation.



(a) Distribution des valeurs estimées de  $\alpha_2$ ,  $\{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  ( $m = 10.000$ ).



(b) Erreur relative moyenne  $RME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $m = 10.000$ ).

Figure 8.9 – Distributions des valeurs estimées de  $\alpha_2$  et évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n(\alpha_2, \{\hat{\alpha}_2^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n \in \{1, 2, 5, 10, 50\}$  pour l'objet de type parallélépipède rectangle de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 10$ .

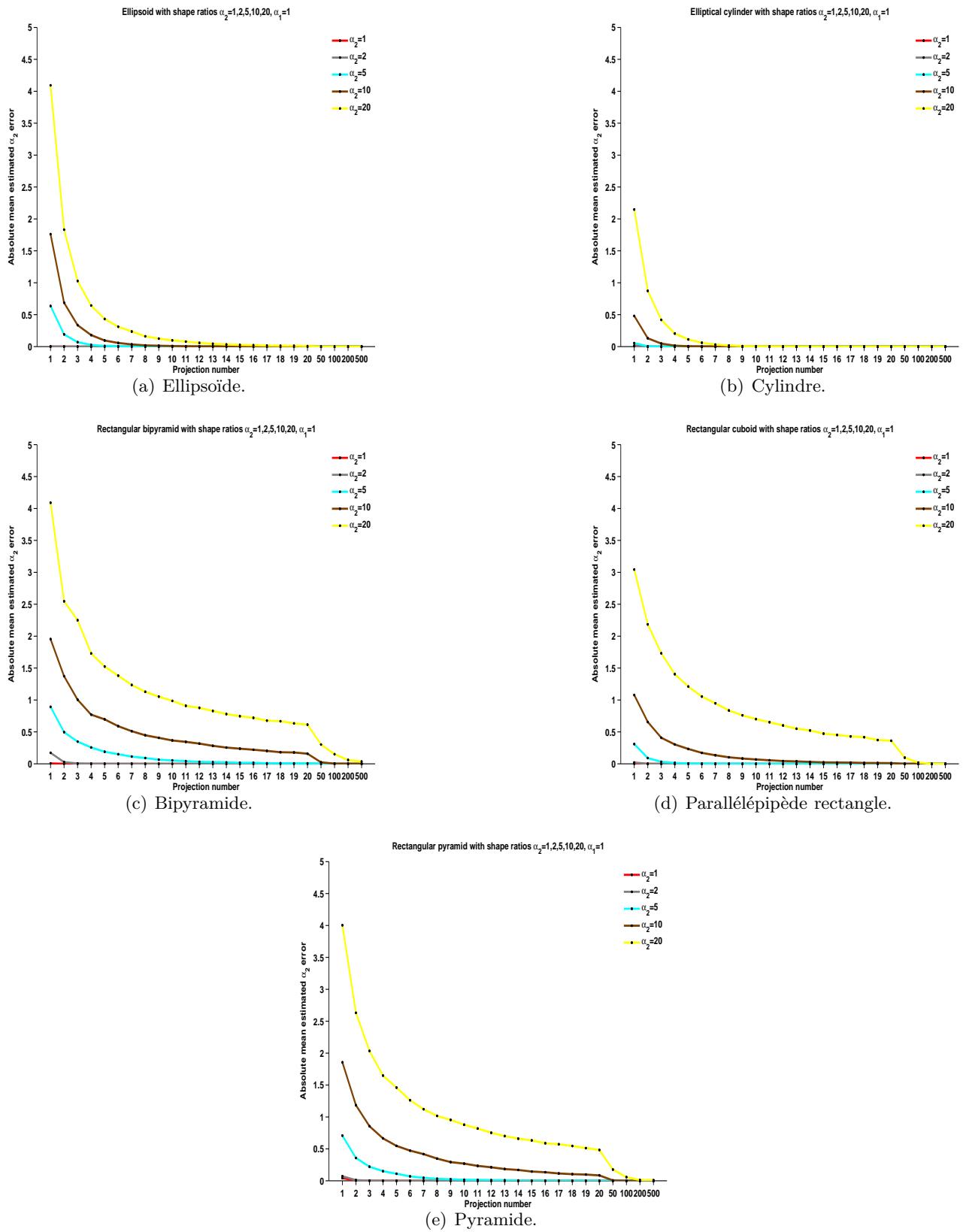


Figure 8.10 – Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $\alpha_2$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ).

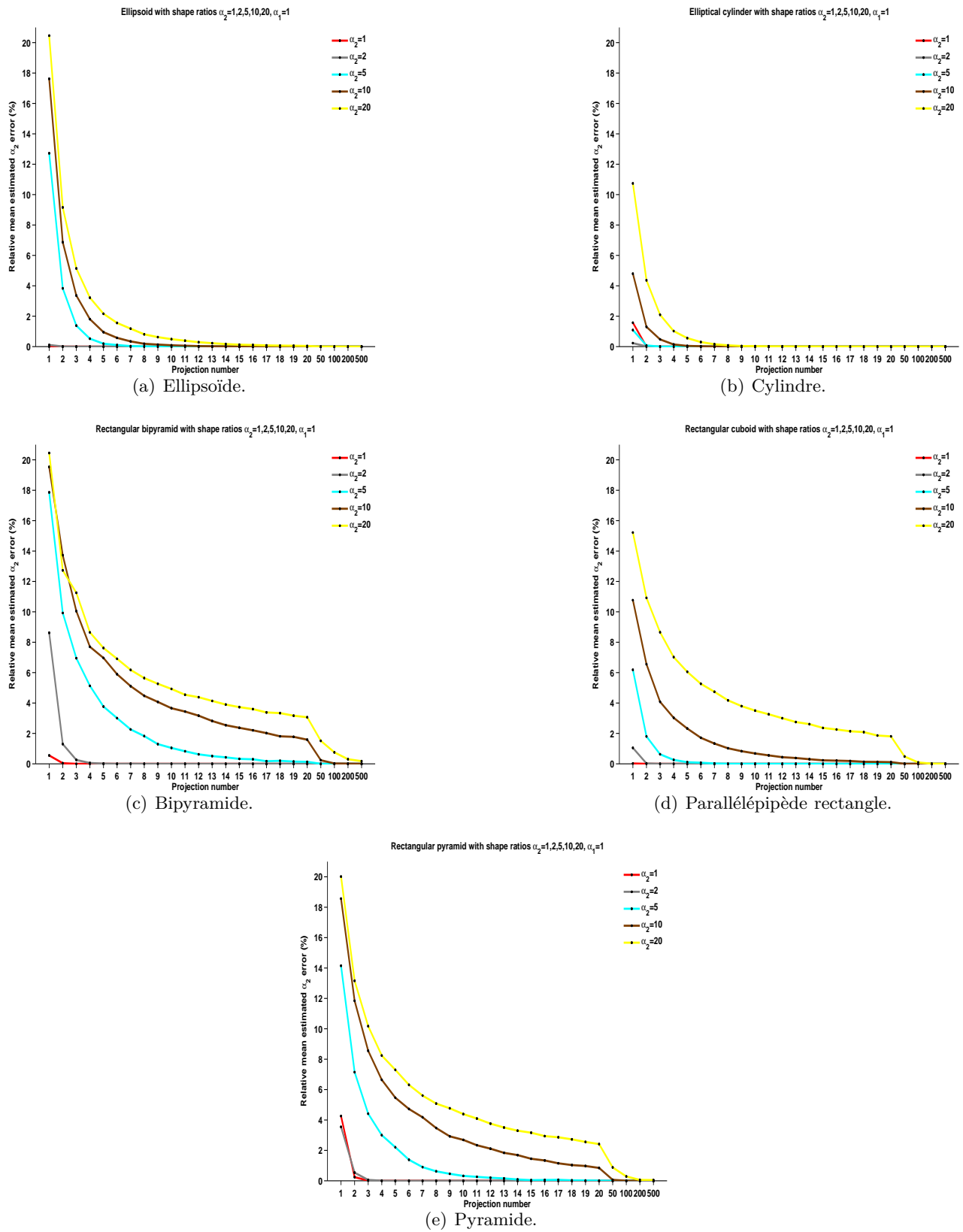


Figure 8.11 – Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $\alpha_2$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ).



## Chapitre 9

# Estimation de la taille et de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D

Dans le chapitre 7, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance des fonctions de densité de probabilité des aires projetées ou des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés a été développée pour estimer, à partir de ses projections 2-D, le paramètre de taille inconnue  $a$  d'un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  de type  $CO$  connu, de paramètre de forme  $\alpha_1$  égale à 1 et de paramètre de forme  $\alpha_2$  connu et plus grand que 1. Dans le chapitre 8, un nouveau descripteur de forme stéréologique a été proposé et ce descripteur a été utilisé pour estimer, à partir de ses projections 2-D, le paramètre de forme inconnu  $\alpha_2$  d'un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  de type  $CO$  connu, de paramètre de forme  $\alpha_1$  égal à 1 et ceci quelle que soit la valeur du paramètre de taille  $a$ . Dans les chapitres précédents, les estimations de la taille et de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D ont donc été décorrélées.

Dans ce chapitre, il est proposé de réaliser conjointement ces estimations. Il est toujours supposé que le type  $CO$  (ellipsoïde, cylindre, etc.) de l'objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  est connu, que le paramètre de forme  $\alpha_1$  est égal à 1 et que le paramètre de forme  $\alpha_2$  est plus grand que 1.

Pour ce faire, il est possible, par exemple, d'utiliser la méthode vue au chapitre 7 en ne supposant plus que la valeur de  $\alpha_2$  soit connue (équation 9.1).

$$L_{CO}^1(a, \alpha_2) = \prod_{i=1}^n f'_{CO, a, \alpha_2}(A_i) \quad (9.1)$$

où :

$$f'_{CO, a, \alpha_2} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A_i & \mapsto & \begin{cases} f_{CO, a, \alpha_2}(A_i) & \text{si } A_i \in [A_{min, CO, a, \alpha_2}; A_{max, CO, a, \alpha_2}] \\ 0 & \text{si } A_i \notin [A_{min, CO, a, \alpha_2}; A_{max, CO, a, \alpha_2}] \end{cases} \end{cases}$$

et  $f_{CO, a, \alpha_2}$  est la fonction de densité de probabilité des aires projetées définie au chapitre 7.

En conséquence, le maximum de vraisemblance du couple  $(a, \alpha_2)$  est définie par :

$$(\hat{a}, \hat{\alpha}_2) = \underset{(a, \alpha_2) \in ]0; +\infty[ \times ]1; +\infty[}{\arg \max} L_{CO}^1(a, \alpha_2) \quad (9.2)$$

où  $(\hat{a}, \hat{\alpha}_2)$  désigne la valeur estimée du couple  $(a, \alpha_2)$ .

Pour évaluer la performance de cette méthode d'estimation du couple  $(a, \alpha_2)$ , des tests ont été effectués en utilisant le simulateur. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , le simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections aléatoires (loi uniforme) de cet objet et à partir de ces  $n$  projections, la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$  est estimée grâce à l'équation 9.2. Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour chaque  $n$ . Notons  $\{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $(a, \alpha_2)$  où  $\hat{a}^i$  ( $\hat{\alpha}_2^i$ , respectivement) représente la  $i$ ème valeur estimée de  $a$  ( $\alpha_2$ , respectivement). Pour quantifier les résultats obtenus, l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  (Relative Mean Error), est calculée pour chaque valeur de  $n$  de la façon suivante (équation 9.3) :

$$RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{|a - \hat{a}^i|}{a} + \frac{|\alpha_2 - \hat{\alpha}_2^i|}{\alpha_2} \right) \quad (9.3)$$

Il a été décidé de quantifier les résultats obtenus en sommant les erreurs relatives entre  $a$ ,  $\hat{a}^i$  et  $\alpha_2$ ,  $\hat{\alpha}_2^i$ , et non pas en calculant l'erreur relative moyenne entre le couple  $(a, \alpha_2)$  et  $(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)$  par exemple, car les paramètres  $a$  et  $\alpha_2$  ne sont pas homogènes entre eux. En effet,  $a$  représente une longueur qui peut être exprimée en mètre par exemple alors que  $\alpha_2$  est un ratio de longueur, donc sans unité. La figure 9.1 montre l'erreur  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour l'objet 3-D de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Intuitivement, il paraît assez logique de penser que plus

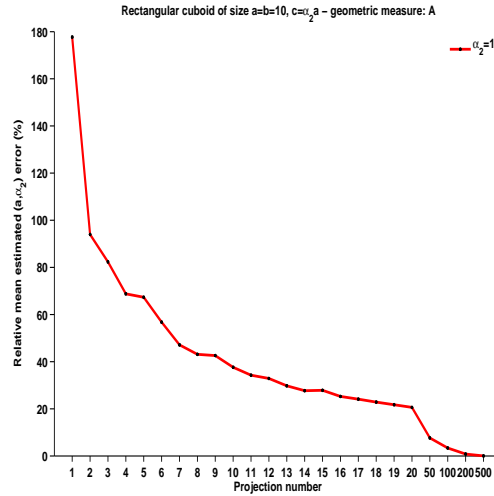


Figure 9.1 – Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour l'objet de type parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

la quantité d'informations disponibles concernant un objet est importante, plus il est facile d'estimer ses paramètres. En effet, c'est ce qui est constaté sur la figure 9.1 : plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $(a, \alpha_2)$  est précise. Cependant, il est important de remarquer que les valeurs de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  sont très élevées. En effet, plus de 50 projections sont nécessaires pour qu'en moyenne  $(a, \alpha_2)$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10% et ceci pour un objet 3-D de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$  (il a été montré dans la section 7.4 que l'erreur moyenne augmente avec l'anisotropie de l'objet 3-D). Bien que la méthode vue au chapitre 7 permette d'estimer la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ , les valeurs de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  sont trop

importantes. C'est pourquoi, il a été décidé de développer une autre méthode plus performante basée sur le maximum de vraisemblance de  $a$  et  $\alpha_2$  des fonctions de densité de probabilité des aires projetées et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées.

## 9.1 Maximum de vraisemblance de $a$ et $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité des aires projetées et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées

Soient  $A$  la variable aléatoire continue « aire projetée » et  $M = (M^1, M^2) = (\omega / d, 4A / \pi d^2)$  le vecteur aléatoire continu « fonctionnelles morphométriques projetées » associé à une projection 2-D d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  inconnu. Soient  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques de  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  et soient  $(A_1, M_1), (A_2, M_2), \dots, (A_n, M_n)$ , les  $n$  observations correspondantes. La vraisemblance du paramètre de taille  $a$  et du paramètre de forme  $\alpha_2$  au vu de ces  $n$  observations est définie comme suit :

$$L_{CO}(a, \alpha_2) = L_{CO}^3(\alpha_2) \frac{L_{CO, \alpha_2}^1(a)}{\int_{R_+^*} L_{CO, \alpha_2}^1(v) dv} \quad (9.4)$$

où  $L_{CO}^3(\alpha_2)$  est la vraisemblance de  $\alpha_2$  au vu des  $n$  réalisations  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$  et  $\frac{L_{CO, \alpha_2}^1(a)}{\int_{R_+^*} L_{CO, \alpha_2}^1(v) dv}$  est la vraisemblance de  $a$  sachant  $\alpha_2$  au vu des  $n$  réalisations  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ .

Le maximum de vraisemblance du paramètre de taille  $a$  et du paramètre de forme  $\alpha_2$  est donc défini par :

$$(\hat{a}, \hat{\alpha}_2) = \arg \max_{(a, \alpha_2) \in ]0; +\infty[ \times ]1; +\infty[} L_{CO}(a, \alpha_2) \quad (9.5)$$

où  $(\hat{a}, \hat{\alpha}_2)$  désigne la valeur estimée du couple  $(a, \alpha_2)$ .

## 9.2 Problème d'optimisation

Comme expliqué dans les chapitres précédents, pour résoudre l'équation 9.5, deux solutions sont envisageables : une méthode de recherche exhaustive ou une méthode d'optimisation [172]. Le principal inconvénient des méthodes d'optimisation est que la convergence vers l'extremum global n'est pas toujours garantie. C'est pour cette raison que la méthode de recherche exhaustive a été privilégiée. Pour des raisons de temps de calcul, les fonctions de densité de probabilité  $f_{CO, a, \alpha_2}$  et  $H_{CO, 1, \alpha_2}$  sont pré-calculées pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur en discrétisant par pas de 1 le paramètre de forme  $\alpha_2$  de  $\alpha_{2min} = 1$  à  $\alpha_{2max} = 50$  et en discrétisant par pas de 1 le paramètre de taille  $a$  de  $a_{min} = 1$  à  $a_{max} = 100$ . Ainsi, une base de données de fonctions de densité de probabilité  $f_{CO, a, \alpha_2}$  et  $H_{CO, 1, \alpha_2}$  est construite.

## 9.3 Résultats

Afin d'évaluer la performance de la méthode proposée d'estimation de la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ , des tests ont été effectués en utilisant le simulateur. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , le



simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet et, à partir de ces  $n$  projections, la méthode exposée dans la section 9.1 estime la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour chaque  $n$ . Notons  $\{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $(a, \alpha_2)$  où  $\hat{a}^i$  ( $\hat{\alpha}_2^i$ , respectivement) représente la  $i$ ème valeur estimée de  $a$  ( $\alpha_2$ , respectivement). Pour quantifier les résultats obtenus, l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  (Relative Mean Error), est calculée pour chaque valeur de  $n$  de la façon suivante (équation 9.6) :

$$RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{|a - \hat{a}^i|}{a} + \frac{|\alpha_2 - \hat{\alpha}_2^i|}{\alpha_2} \right) \quad (9.6)$$

### 9.3.1 Influence du paramètre de forme $\alpha_2$

La figure 9.2 montre l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Intuitivement, il paraît assez logique de penser que plus la quantité d'informations disponibles concernant un objet est importante, plus il est facile d'estimer ses paramètres. En effet, c'est ce qui est constaté sur la figure 9.2 : quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $(a, \alpha_2)$  est précise. De plus, plus l'objet 3-D est anisotrope (plus  $\alpha_2$  est grand), plus il devient difficile d'estimer correctement le couple  $(a, \alpha_2)$ .

Pour les mêmes raisons que précédemment (chapitre 7), il est néanmoins plus facile d'estimer la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$  pour un (une, respectivement) cylindre (pyramide, respectivement) de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  qu'un (une, respectivement) cylindre (pyramide, respectivement) de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$ .

Enfin, il est important de noter que, quel que soit l'objet 3-D considéré, sept projections sont nécessaires pour qu'en moyenne le couple  $(a, \alpha_2)$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. De plus, l'erreur relative moyenne ne varie pas linéairement avec le paramètre de forme  $\alpha_2$ .

### 9.3.2 Influence du paramètre de taille $a$

La figure 9.3 montre l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Comme précédemment (section 9.3.1), il est possible de remarquer que, quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation du couple  $(a, \alpha_2)$  est précise. En moyenne, seulement deux projections sont nécessaires pour que le couple  $(a, \alpha_2)$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. En revanche, pour une même valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$  et quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le paramètre de taille  $a$  augmente (plus l'objet 3-D est « gros »), plus il devient difficile d'estimer la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ .

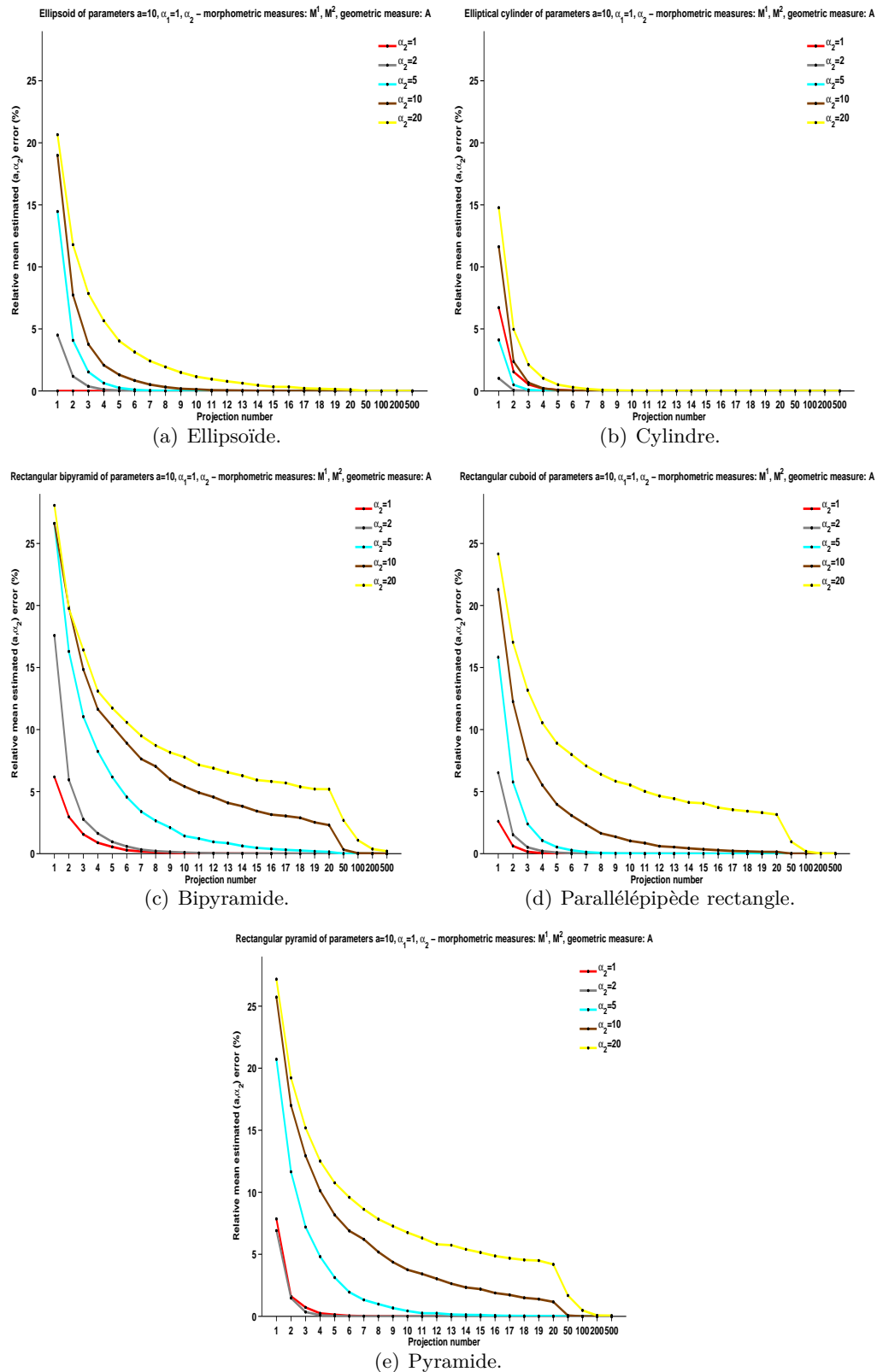


Figure 9.2 – Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in [1, m]})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ .

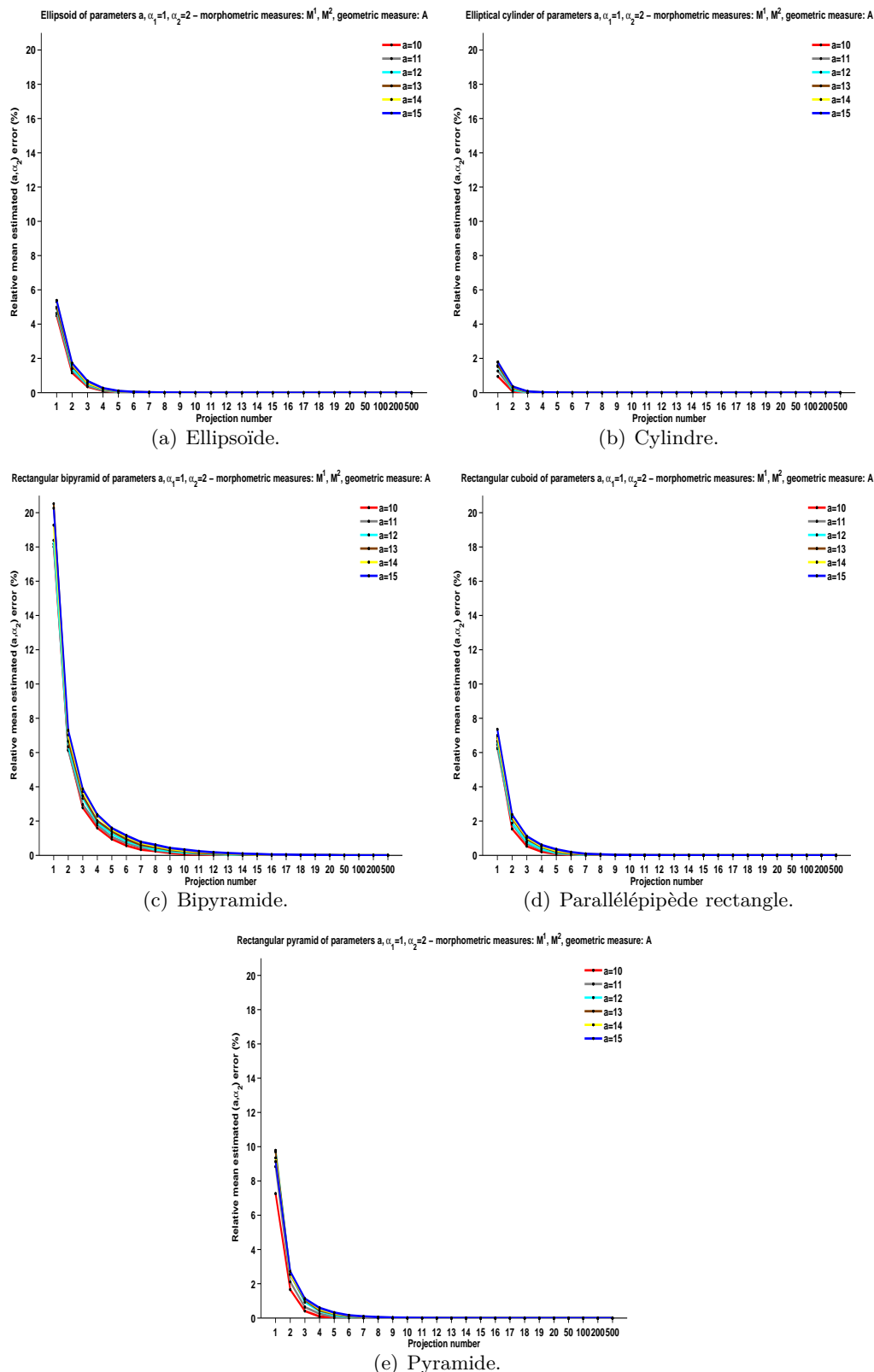


Figure 9.3 – Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in [1, m]})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

## 9.4 Amélioration de la méthode proposée

Dans cette section, il est proposé d'améliorer la méthode d'estimation du couple  $(a, \alpha_2)$  en décrivant une projection 2-D d'un objet 3-D convexe grâce à deux mesures géométriques, l'aire et le périmètre, et deux mesures morphométriques,  $M^1$  et  $M^2$ . Sous les mêmes hypothèses que précédemment, la méthode du maximum de vraisemblance de  $a$  et  $\alpha_2$  des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées est utilisée pour estimer la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ .

### 9.4.1 Maximum de vraisemblance de $a$ et $\alpha_2$ des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées

Soient  $U = (A, P)$  le vecteur aléatoire continu « aire projetée, périmètre projeté » et  $M = (M^1, M^2) = (\omega/d, 4A/\pi d^2)$  le vecteur aléatoire continu « fonctionnelles morphométriques projetées » associé à une projection 2-D d'un objet 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  inconnu. Soient  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoire (loi uniforme) de  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  et soient  $(U_1, M_1), (U_2, M_2), \dots, (U_n, M_n)$ , les  $n$  observations correspondantes. La vraisemblance du paramètre de taille  $a$  et du paramètre de forme  $\alpha_2$  au vu de ces  $n$  observations est définie comme suit :

$$L'_{CO}(a, \alpha_2) = L^3_{CO}(\alpha_2) \frac{L^2_{CO, \alpha_2}(a)}{\int_{R_+^*} L^2_{CO, \alpha_2}(v) dv} \quad (9.7)$$

où  $L^3_{CO}(\alpha_2)$  est la vraisemblance de  $\alpha_2$  au vu des  $n$  réalisations  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$  et  $\frac{L^2_{CO, \alpha_2}(a)}{\int_{R_+^*} L^2_{CO, \alpha_2}(v) dv}$  est la vraisemblance de  $a$  sachant  $\alpha_2$  au vu des  $n$  réalisations  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ .

Le maximum de vraisemblance du paramètre de taille  $a$  et du paramètre de forme  $\alpha_2$  est donc défini par :

$$(\hat{a}, \hat{\alpha}_2) = \arg \max_{(a, \alpha_2) \in ]0; +\infty[ \times ]1; +\infty[} L'_{CO}(a, \alpha_2) \quad (9.8)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, une recherche exhaustive est utilisée pour résoudre l'équation 9.8. Pour des raison de temps de calcul, les fonctions de densité de probabilité  $G_{CO, a, 1, \alpha_2}$  et  $H_{CO, 1, \alpha_2}$  sont pré-calculées pour les différents types d'objets implémentés dans le simulateur en discrétisant par pas de 1 le paramètre de forme  $\alpha_2$  de  $\alpha_{2min} = 1$  à  $\alpha_{2max} = 50$  et en discrétisant par pas de 1 le paramètre de taille  $a$  de  $a_{min} = 1$  à  $a_{max} = 100$ . Ainsi, une base de données de fonctions de densité de probabilité  $G_{CO, a, 1, \alpha_2}$  et  $H_{CO, 1, \alpha_2}$  est construite.

### 9.4.2 Résultats

Afin d'évaluer la performance de la méthode proposée d'estimation de la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ , des tests ont été effectués en utilisant le simulateur. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , le simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet et, à partir de ces  $n$  projections, la méthode exposée dans la section 9.4.1 estime la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour

chaque  $n$ . Notons  $\{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $(a, \alpha_2)$  où  $\hat{a}^i$  ( $\hat{\alpha}_2^i$ , respectivement) représente la  $i$ ème valeur estimée de  $a$  ( $\alpha_2$ , respectivement). Pour quantifier les résultats obtenus, l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  (Relative Mean Error), est calculée pour chaque valeur de  $n$  de la façon suivante (équation 9.9) :

$$RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m \frac{|a - \hat{a}^i|}{a} + \frac{|\alpha_2 - \hat{\alpha}_2^i|}{\alpha_2} \right) \quad (9.9)$$

### Influence du paramètre de forme $\alpha_2$

La figure 9.4 montre l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Pour des raisons de temps de calculs, les résultats concernant les objets de type ellipsoïde et cylindre n'ont pas été générés. Intuitivement, il paraît assez logique de penser que plus la quantité d'informations

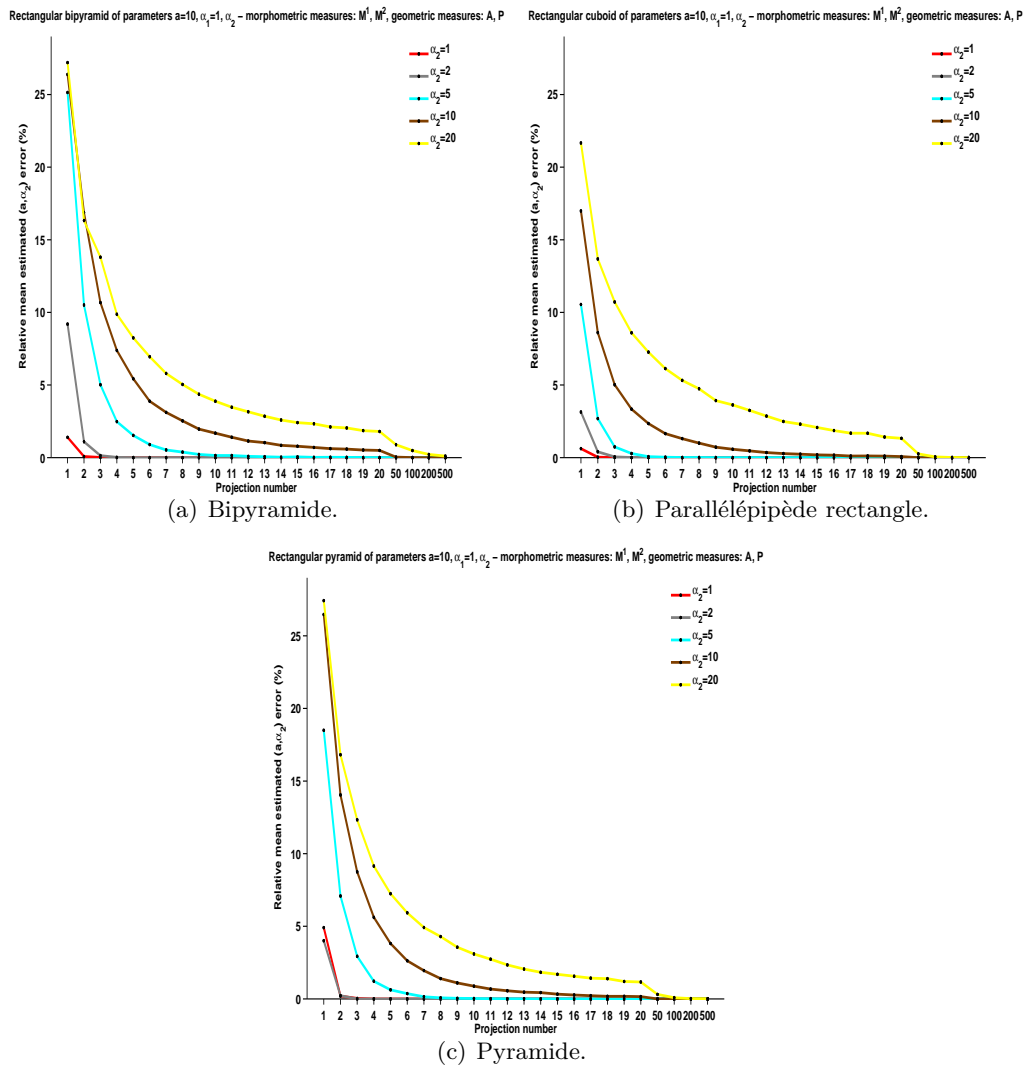


Figure 9.4 – Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ .

disponibles concernant un objet est importante, plus il est facile d'estimer ses paramètres. En effet, c'est ce qui est constaté sur la figure 9.4. Quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation de  $(a, \alpha_2)$  est précise. De plus, plus l'objet 3-D est anisotrope (plus  $\alpha_2$  est grand), plus il devient difficile d'estimer correctement le couple  $(a, \alpha_2)$ .

Pour les mêmes raisons que précédemment (chapitre 7), il est néanmoins plus facile d'estimer la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$  pour une pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  qu'une pyramide de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$ .

De plus, il est important de noter que, quel que soit l'objet 3-D considéré, seulement quatre projections sont nécessaires pour qu'en moyenne le couple  $(a, \alpha_2)$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. Comparé aux résultats de la section 9.3.1, environ deux fois moins de projections sont nécessaires pour qu'en moyenne le couple  $(a, \alpha_2)$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. Ce résultat montre la pertinence d'utiliser une mesure géométrique supplémentaire, *i.e.* le périmètre, pour décrire les projections 2-D d'un objet 3-D.

Enfin, l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ne varie pas linéairement avec le paramètre de forme  $\alpha_2$ .

### Influence du paramètre de taille $a$

La figure 9.5 montre l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide, de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Pour des raisons de temps de calculs, les résultats concernant les objets de type ellipsoïde et cylindre n'ont pas été générés. Comme précédemment, il est possible de remarquer que, quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le nombre de projections  $n$  augmente (plus la quantité d'informations disponibles est importante), plus l'estimation du couple  $(a, \alpha_2)$  est précise. En moyenne, quel que soit l'objet 3-D considéré, seulement une projection est nécessaire pour que le couple  $(a, \alpha_2)$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. Ce résultat est à comparer aux résultats de la section 9.3.2 où deux projections étaient nécessaires pour qu'en moyenne le couple  $(a, \alpha_2)$  soit estimé avec une erreur inférieure à 10%. Il montre de nouveau la pertinence d'utiliser une mesure géométrique supplémentaire, *i.e.* le périmètre, pour décrire les projections 2-D d'un objet 3-D.

En revanche, pour une même valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$  et quel que soit l'objet 3-D considéré, plus le paramètre de taille  $a$  augmente (plus l'objet 3-D est « gros »), plus il devient difficile d'estimer la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$ .

## 9.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'estimation de la « taille » et de la « forme », à partir de ses projections 2-D, d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, 1, \alpha_2 \geq 1$ ) a été réalisée. Plus précisément, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance a été développée afin d'estimer, à partir de ses projections 2-D, la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$  d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, 1, \alpha_2 \geq 1$ ) de type  $CO$  connu. Dans un premier temps, le maximum de vraisemblance de  $a$  et  $\alpha_2$  des fonctions de densité de probabilité des aires projetées et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées a été utilisée. Dans un second temps, cette méthode a été améliorée en utilisant le maximum de vraisemblance de

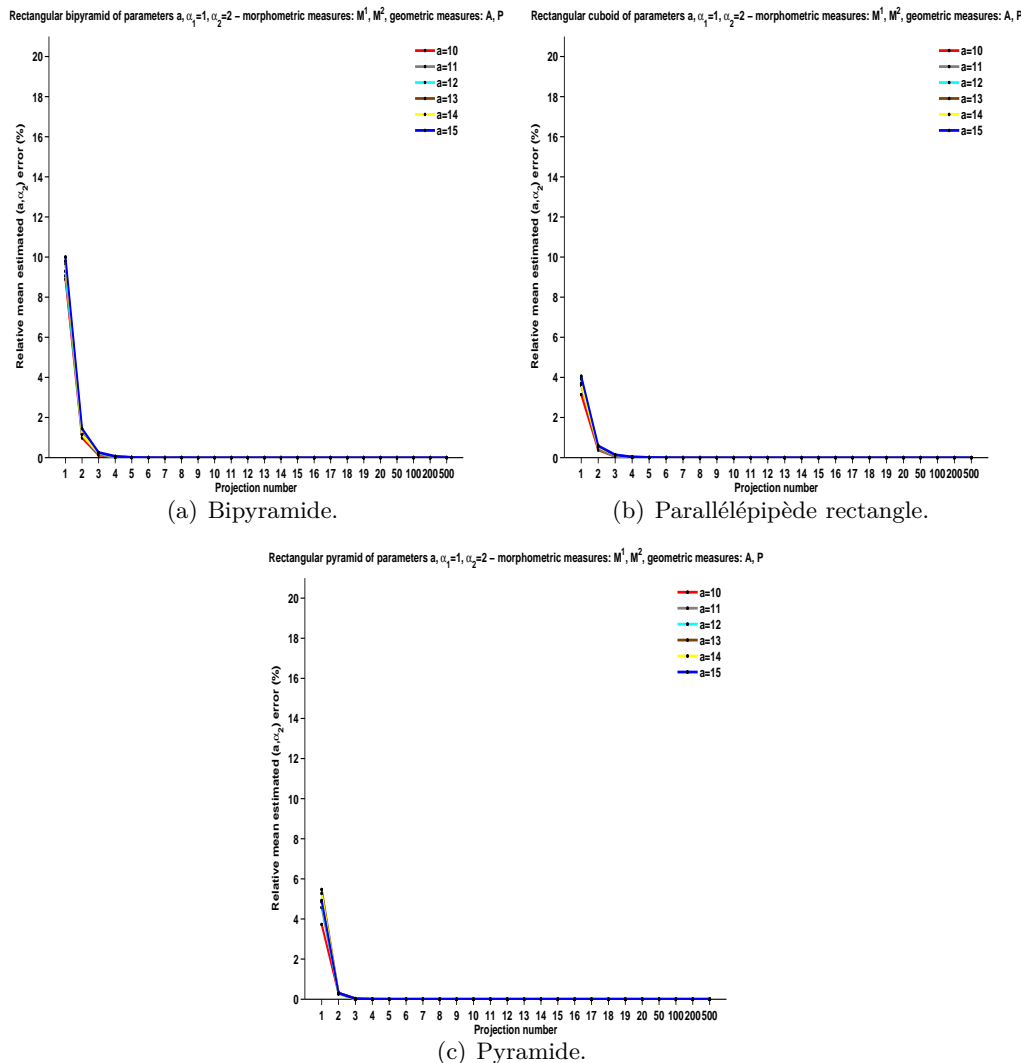


Figure 9.5 – Évolution de l'erreur relative moyenne  $RME_n((a, \alpha_2), \{(\hat{a}^i, \hat{\alpha}_2^i)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type parallélépipède rectangle, bipyramide et pyramide de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

$a$  et  $\alpha_2$  des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés et des fonctions de densité de probabilité conjointe des fonctionnelles morphométriques projetées.

Pour valider et évaluer la performance des deux méthodes proposées, des tests ont été réalisés grâce au simulateur sur cinq types d'objets convexes : ellipsoïde, cylindre, parallélépipède rectangle, bipyramide, pyramide. Les résultats ont été quantifiés en utilisant comme indicateur l'erreur relative moyenne et montrent que :

- plus le nombre de vues de l'objet 3-D augmente, plus l'estimation du couple  $(a, \alpha_2)$  devient précise ;
- plus l'objet 3-D est anisotrope (plus  $\alpha_2$  est grand), moins bonne est l'estimation de  $(a, \alpha_2)$  ;
- l'erreur relative moyenne ne varie pas linéairement avec la valeur réelle du paramètre de forme  $\alpha_2$  ;
- plus l'objet 3-D est « gros » (plus  $a$  est grand), plus il est difficile d'estimer  $(a, \alpha_2)$  ;
- l'utilisation d'une mesure géométrique supplémentaire, *i.e.* le périmètre, pour décrire les projec-

tions 2-D d'un objet 3-D est pertinente.

**Remarque 9.1** *La méthode qui vient d'être présentée dans ce chapitre est en seconde révision dans la revue internationale « Journal of Microscopy » [141].*





## Chapitre 10

# Comparaison de la méthode proposée à une méthode de stéréologie classique

Dans ce chapitre, la méthode d'estimation de la taille et de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D qui a été mise en place dans les chapitres précédents (chapitre 7, chapitre 8 et chapitre 9) est comparée à une méthode de stéréologie projective classique. Il est toujours supposé que le type  $CO$  (ellipsoïde, cylindre, etc.) d'un objet 3-D convexe ( $CO, a, 1, \alpha_2$ ) est connu, que le paramètre de forme  $\alpha_1$  est égal à 1 et que le paramètre de forme  $\alpha_2$  est plus grand que 1.

### 10.1 La méthode de stéréologie projective classique

En stéréologie projective classique, le volume  $V$  d'un objet 3-D convexe peut être estimé grâce à la relation suivante [185] [186] :

$$V = \overline{L}_3 \times \overline{A'} \quad (10.1)$$

où  $\overline{L}_3$  désigne le Mean Intercept Length (MIL) de  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) droites de l'espace pénétrant aléatoirement (loi uniforme) l'objet 3-D convexe et  $\overline{A'}$  désigne l'aire projetée moyenne.

L'avantage majeur de cette relation est qu'elle ne fait aucune hypothèse sur l'objet 3-D convexe étudié. Cependant, il est important de noter que  $L_3$  (Intercept Length) n'est pas une mesure effectuée sur une projection de l'objet 3-D mais une mesure effectuée sectionnellement dans l'espace. Sans plus d'hypothèses sur l'objet 3-D convexe, il n'est pas possible d'exprimer  $L_3$  en fonction de paramètres projetés. En revanche, si le type et les paramètres de forme de l'objet 3-D sont connus,  $\overline{L}_3$  peut être exprimé en fonction de  $\overline{H'}$ , le diamètre de Feret projeté moyen [57]. Par exemple, pour une sphère ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ ),  $\overline{L}_3 = \frac{2}{3}\overline{H'}$  et par conséquent :

$$V = \frac{2}{3}\overline{H'} \times \overline{A'} \quad (10.2)$$

Contrairement à l'équation 10.1, l'équation 10.2 ne fait apparaître que des paramètres projetés. En supposant que le type et les paramètres de forme d'un objet 3-D convexe soient connus, il est donc possible d'utiliser la méthode de stéréologie projective classique pour estimer son volume à partir de ses projections 2-D.

Sous les hypothèses précédentes, il est important de remarquer que le volume estimé  $V$  peut être exprimé en fonction d'un paramètre de taille de l'objet 3-D convexe. Par exemple, pour une sphère de

rayon  $r$  :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\overline{H'} \times \overline{A'} \Leftrightarrow r = \left(\frac{1}{2\pi}\overline{H'} \times \overline{A'}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (10.3)$$

La méthode de stéréologie classique permet donc aussi d'estimer la taille d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D. Par conséquent, la méthode proposée d'estimation de la taille d'un objet 3-D convexe (section 7.2) peut être comparée à la méthode stéréologique classique.

Pour un objet de type cylindre, de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\overline{L}_3 = \frac{4\alpha_2}{\pi + (1 + \pi)\alpha_2 + \alpha_2^2}\overline{H'}$  et par conséquent :

$$V = \pi\alpha_2 a^3 = \frac{4\alpha_2}{\pi + (1 + \pi)\alpha_2 + \alpha_2^2}\overline{H'} \times \overline{A'} \Leftrightarrow a = \left(\frac{4}{\pi^2 + \pi(1 + \pi)\alpha_2 + \pi\alpha_2^2}\overline{H'} \times \overline{A'}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (10.4)$$

Pour un objet de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\overline{L}_3 = \frac{2\alpha_2}{1 + \frac{5}{2}\alpha_2 + \alpha_2^2}\overline{H'}$  et par conséquent :

$$V = \alpha_2 a^3 = \frac{2\alpha_2}{1 + \frac{5}{2}\alpha_2 + \alpha_2^2}\overline{H'} \times \overline{A'} \Leftrightarrow a = \left(\frac{2}{1 + \frac{5}{2}\alpha_2 + \alpha_2^2}\overline{H'} \times \overline{A'}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (10.5)$$

N'ayant trouvé aucune référence bibliographique permettant d'exprimer  $\overline{L}_3$  en fonction de  $\overline{H'}$  pour les autres objets 3-D  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  implémentés dans le simulateur, les tests de comparaisons entre la méthode proposée d'estimation du paramètre de taille  $a$  (section 7.2) et la méthode de stéréologie classique seront effectués seulement sur des objets 3-D convexes  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  de type cylindre et parallélépipède rectangle.

## 10.2 Résultats

Comme cela a été expliqué dans la section 10.1, afin de comparer la méthode proposée à la méthode de stéréologie projective classique, il est nécessaire de supposer connu le type  $CO$  et le paramètre de forme  $\alpha_2$  d'un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ . Par conséquent, seul le paramètre de taille  $a$  reste à estimer. Pour évaluer la performance des deux méthodes d'estimation du paramètre de taille  $a$ , des tests ont été réalisés en utilisant le simulateur. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$ , de type  $CO$  connu, de paramètre de taille  $a$ , de paramètres de forme  $\alpha_1$  égal à 1 et  $\alpha_2$  connu et plus grand que 1, le simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections orthographiques aléatoires (loi uniforme) de cet objet et, à partir de ces  $n$  projections, la valeur de  $a$  est estimée grâce à la méthode proposée dans la section 7.2, noté  $\hat{a}$ , et grâce à la méthode de stéréologie projective classique exposée dans la section 10.1, noté  $\hat{a}_s$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour chaque  $n$ . Notons  $\{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $a$  par la méthode proposée, où  $\hat{a}^i$  représente la  $i$ ème valeur estimée de  $a$  par cette méthode, et  $\{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des valeurs estimées de  $a$  par la méthode de stéréologie projective classique, où  $\hat{a}_s^i$  représente la  $i$ ème valeur estimée de  $a$  par cette méthode. Pour quantifier les résultats obtenus avec la méthode proposée, l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne (Absolute Mean Error et Relative Mean Error respectivement) entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées  $\{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ , notée  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement), est calculée pour chaque valeur de  $n$  (équation 10.6 et équation 10.7 respectivement). De même, pour quantifier les résultats obtenus avec la méthode stéréologique classique, l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne (Absolute Mean Error et Relative Mean Error respectivement) entre la valeur

réelle de  $a$  et les valeurs estimées  $\{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ , notée  $AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement), est calculée pour chaque valeur de  $n$  (équation 10.8 et équation 10.9 respectivement).

$$AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |a - \hat{a}^i| \quad (10.6)$$

$$RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|a - \hat{a}^i|}{a} \quad (10.7)$$

$$AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |a - \hat{a}_s^i| \quad (10.8)$$

$$RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|a - \hat{a}_s^i|}{a} \quad (10.9)$$

### 10.2.1 Influence du paramètre de forme $\alpha_2$

La figure 10.1 (figure 10.2, respectivement) montre l'erreur absolue (relative, respectivement) moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type cylindre et parallépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Les courbes en trait plein représentent l'erreur  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement) en fonction du nombre de projections  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent l'erreur  $AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement) en fonction du nombre de projections  $n$ . Que ce soit sur la figure 10.1 ou la figure 10.2, il est possible de

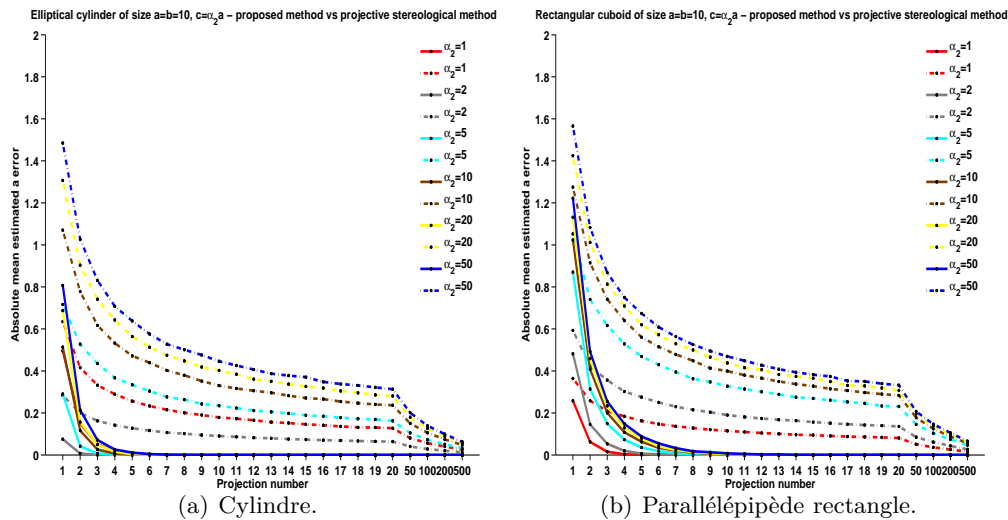


Figure 10.1 – Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d'objets de type cylindre et parallépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . Les courbes en trait plein représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ .

constater que la méthode proposée converge plus rapidement que la méthode stéréologique classique vers la valeur réelle du paramètre de taille  $a$ . De plus, quel que soit le nombre de projections  $n$  considéré et quel que soit l'objet 3-D considéré, l'estimation de  $a$  est plus précise en utilisant la méthode proposée.

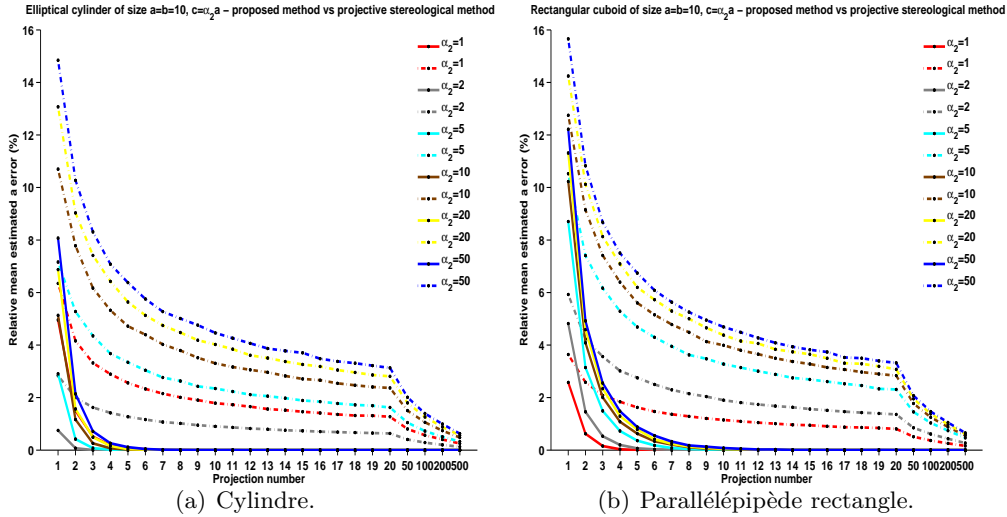


Figure 10.2 – Évolution de l’erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d’objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ . Les courbes en trait plein représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ .

### 10.2.2 Influence du paramètre de taille $a$

La figure 10.3 (figure 10.4, respectivement) montre l’erreur absolue (relative, respectivement) moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  ( $\alpha_1 = 1$ ). Les courbes en trait plein représentent l’erreur  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement) en fonction du nombre de projections  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent l’erreur  $AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  ( $RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$ , respectivement) en fonction du nombre de projections  $n$ . Que ce soit sur la figure 10.3 ou la figure 10.4, il est possible de constater que la méthode proposée converge plus rapidement que la méthode stéréologique classique vers la valeur réelle du paramètre de taille  $a$ . De plus, excepté pour les objets 3-D convexe (Parallélépipède rectangle, 14, 1, 2), (Parallélépipède rectangle, 15, 1, 2) et pour  $n = 1$  projection, l’estimation de  $a$  est plus précise en utilisant la méthode proposée.

**Remarque 10.1** Contrairement à la méthode proposée, la « taille » de l’objet 3-D n’influe pas sur la précision de la méthode stéréologique classique.

## 10.3 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode proposée a été comparée à une méthode de stéréologie projective classique. Pour ce faire, il a fallu supposer connu le type  $CO$  et les paramètres de forme  $\alpha_1, \alpha_2$  d’un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$ . Sous ces hypothèses, le paramètre de taille  $a$  a donc été estimé par la méthode proposée dans la section 7.2 et par la méthode de stéréologie projective classique.

Pour comparer la performance des deux méthodes, des tests ont été réalisés grâce au simulateur sur deux types d’objets convexes : cylindre, parallélépipède rectangle. Les résultats ont été quantifiés

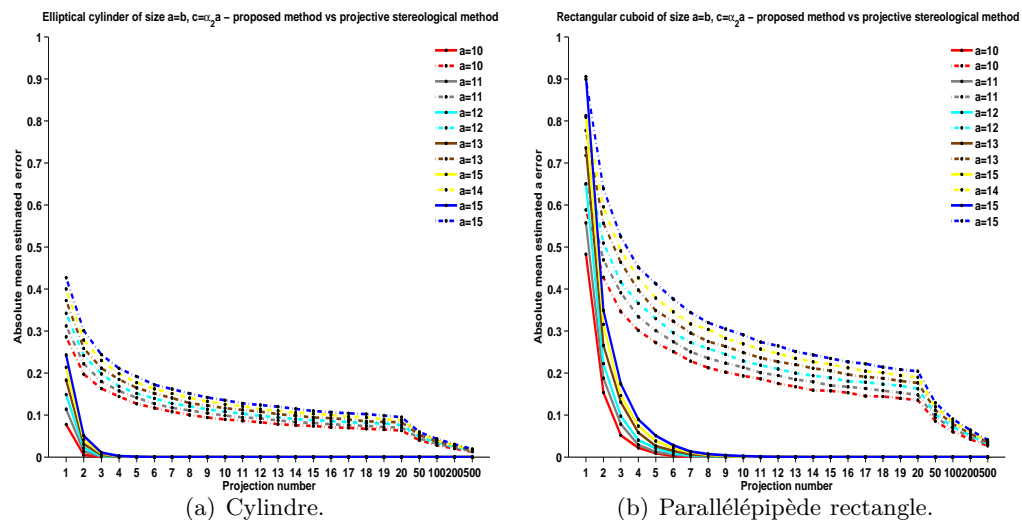


Figure 10.3 – Évolution de l'erreur absolue moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d'objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . Les courbes en trait plein représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $AME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ .

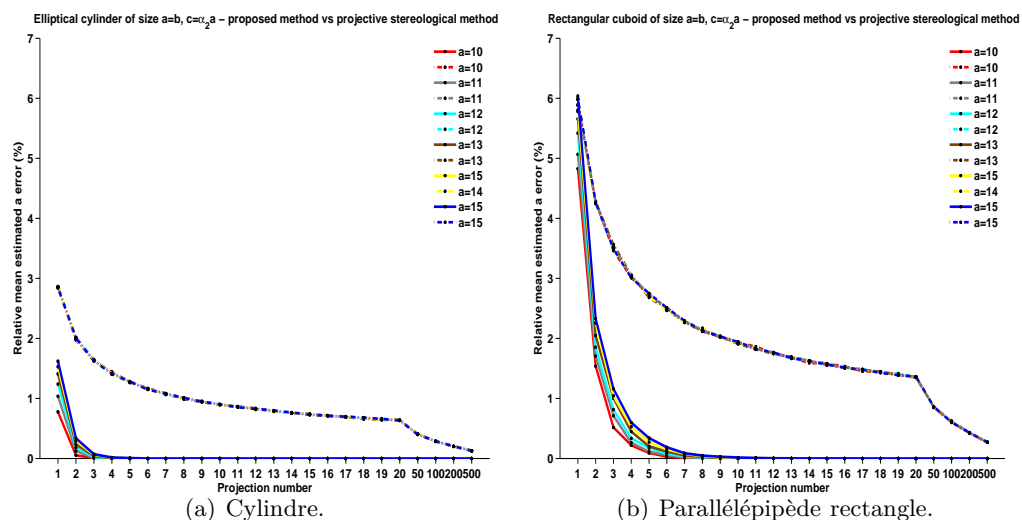


Figure 10.4 – Évolution de l'erreur relative moyenne entre la valeur réelle de  $a$  et les valeurs estimées en fonction du nombre de projections  $n$  pour les d'objets de type cylindre et parallélépipède rectangle de paramètres de taille  $a \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ . Les courbes en trait plein représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$  et les courbes en trait discontinu représentent  $RME_n(a, \{\hat{a}_s^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  en fonction de  $n$ .

en utilisant comme indicateur l'erreur moyenne (absolue et relative) et montrent que :

- pour une valeur fixée du paramètre de taille  $a$ , quelle que soit la valeur du paramètre de forme  $\alpha_2$  et quel que soit le nombre de projections  $n$ , l'estimation de  $a$  est plus précise en utilisant la méthode proposée ;
- pour une valeur fixée du paramètre de forme  $\alpha_2$ , excepté pour les objets 3-D (Parallélépipède rectangle, 14, 1,

(Parallélépipède rectangle, 15, 1, 2) et pour  $n = 1$  projection, quelle que soit la valeur réelle de  $a$  et quel que soit le nombre de projections  $n$ , l'estimation de  $a$  est plus précise en utilisant la méthode proposée ;

- pour  $n = 1$  projection et pour les objets (Parallélépipède rectangle, 14, 1, 2), (Parallélépipède rectangle, 15, 1, 2), la méthode stéréologique classique estime plus précisément le paramètre de taille  $a$ .

Ce dernier résultat est à relativiser car tout d'abord pour estimer la valeur du paramètre  $a$ , la méthode stéréologique utilise deux mesures géométriques, l'aire projetée et le diamètre de Feret moyen projeté, alors que la méthode d'estimation du paramètre  $a$  (section 7.2) utilise seulement une mesure géométrique, l'aire projetée. Or, il a été vu dans la section 7.5 qu'il est possible d'améliorer la méthode proposée en utilisant deux mesures géométriques : l'aire projetée et le périmètre projeté. Ensuite, si le paramètre de forme  $\alpha_2$  n'est pas supposé connu, il est toujours possible d'utiliser la méthode proposée pour estimer conjointement  $a$  et  $\alpha_2$  et dans ce cas, trois (quatre, respectivement) fonctionnelles sont prises en compte :  $A$ ,  $M^1 = \omega / d$ ,  $M^2 = 4A / \pi d^2$  ( $A$ ,  $P$ ,  $M^1$ ,  $M^2$ , respectivement). En effet, contrairement à la méthode de stéréologie classique, la méthode proposée permet d'estimer à la fois la « taille » et la « forme » d'un objet 3-D convexe, à partir de ses projections 2-D (chapitre 9). Il n'est donc pas forcément nécessaire de formuler d'hypothèse sur le paramètre de forme  $\alpha_2$ , ce qui est un avantage remarquable.

---

La troisième partie de ce manuscrit a introduit et validée à partir de données simulées une méthode, appelée Stereological Size and Shape Estimator (*3SE*) par la suite, d'estimation de la taille et de la forme d'un objet 3-D convexe à partir de ses projections 2-D. Cette étude théorique ayant été initiée par un problème pharmaceutique pratique, *i.e.* le contrôle de la distribution de taille de particules générées durant un processus de cristallisation, la prochaine partie de cette thèse est consacrée à cette application.

Quatrième partie

Application aux processus de  
cristallisation





## Sommaire de la Quatrième partie

---

<b>11 Problématique pharmaceutique</b>	<b>127</b>
11.1 Dispositif expérimental . . . . .	127
11.2 Détermination de la distribution granulométrique de particules d'oxalate d'ammonium	128
11.2.1 Comparaison de la méthode <i>3SE</i> avec une méthode d'estimation de taille et de forme dite 2-D . . . . .	129
11.2.2 Comparaison de la méthode proposée avec le compteur Coulter . . . . .	132
11.3 Conclusion . . . . .	133

---



# Chapitre 11

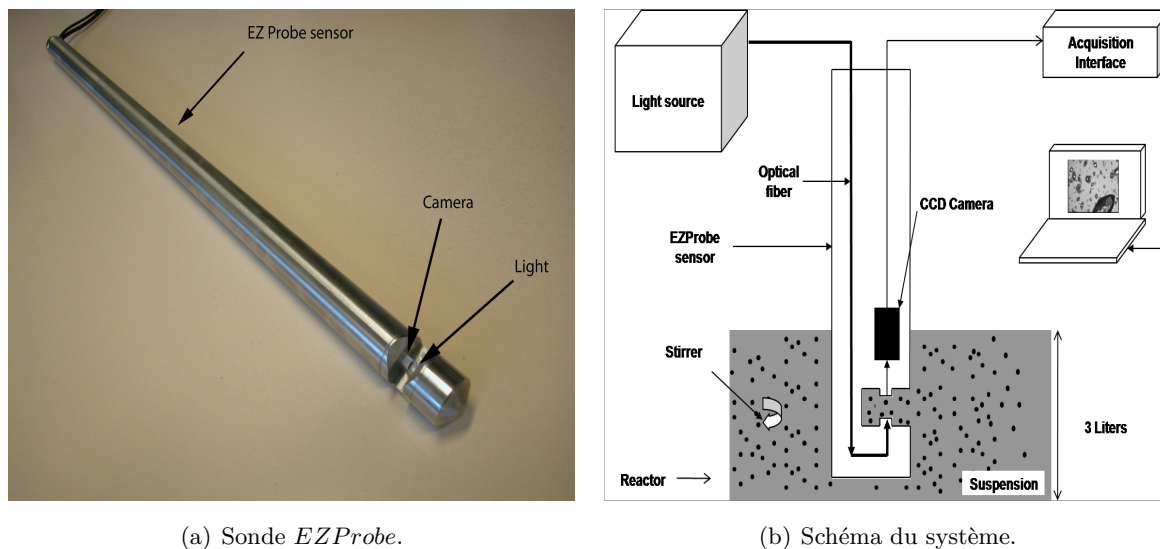
## Problématique pharmaceutique

Ce chapitre propose d'apporter une réponse à la problématique pharmaceutique initiale, *i.e.* déterminer la distribution granulométrique 3-D au cours du temps, à partir d'images 2-D de projections, des particules se formant lors d'un processus de cristallisation en solution. La cristallisation en solution est un processus physique permettant de récupérer sous forme solide un produit, appelé le soluté, dissous dans un liquide, appelé le solvant, la solution étant l'ensemble soluté - solvant. Ce processus est composé de deux étapes : la nucléation et la croissance des particules. La nucléation correspond à la naissance de particules stables alors que la croissance correspond à l'incorporation de molécules de soluté à la phase solide. La nucléation et la croissance étant des mécanismes complexes et concomitants, il en résulte la coexistence à un instant  $t$  de particules de différentes tailles et de différents facteurs d'anisotropie, ce qui rend la détermination de la distribution granulométrique assez difficile.

### 11.1 Dispositif expérimental

Des expériences de cristallisation par refroidissement de type batch ont été réalisées dans un réacteur double enveloppé d'une capacité 3 litres hautement instrumenté. Ce réacteur est équipé d'un agitateur (Mixell TT, vitesse d'agitation 250 tours par minute), de contre-pales et de capteurs en ligne *in situ* : la sonde *ATR – FTIR* (Attenuated Total Reflection Fourier Transform InfraRed) et la sonde *EZProbe*. Une source de lumière acheminée par un faisceau de fibre optique illumine en lumière transmise une caméra *CCD* (vitesse d'acquisition de 25 images par secondes, résolution spatiale de  $4\mu\text{m}^2$  par pixel carré, champ d'analyse de  $1,3\text{mm} \times 1\text{mm}$ , images de dimension  $640 \times 480$  pixels codées sur 8 bits) qui filme en temps réel un volume restreint ( $1,3\text{mm} \times 1\text{mm} \times 1\text{mm}$ ) de la suspension. Un boîtier d'acquisition récupère le flux vidéo, le compresse si nécessaire et envoie les données à un ordinateur afin de les stocker. La figure 11.1 montre un schéma de ce système (la sonde *ATR – FTIR* n'est pas représentée). La sonde *ATR – FTIR* permet de mesurer en temps réel l'évolution de la phase liquide et la sonde *EZProbe*, décrit précédemment, permet de visualiser en temps réel l'évolution de la taille et de la forme des particules en suspension. Plus précisément, cette dernière permet d'acquérir des séquences vidéos de projections 2-D de particules 3-D. Il est important de noter que :

- la suspension est homogénéisée par agitation, les particules observées grâce à la sonde *EZProbe* sont de ce fait supposées représentatives du milieu ;
- compte tenu de la vitesse d'acquisition (25 images par secondes), la même particule peut être visualisée sur plusieurs images successives.

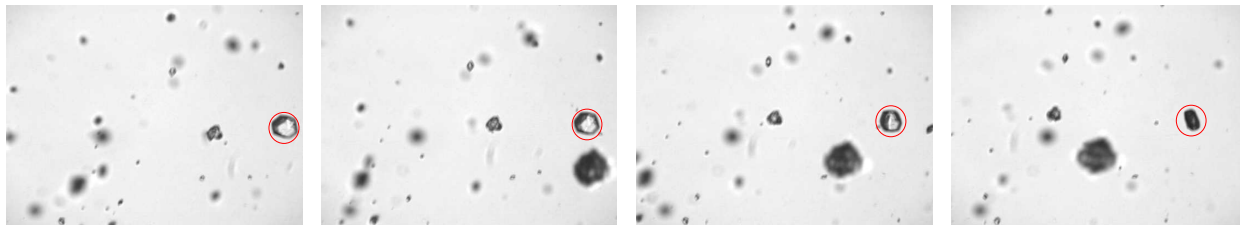


(a) Sonde *EZProbe*.

(b) Schéma du système.

Figure 11.1 – Système expérimental.

La figure 11.2 illustre ce dernier propos (particule entourée en rouge). De plus, notons que cette particule tourne sur elle-même. Une même particule peut donc être vue sur plusieurs images successives et si tel est le cas, elle prend une orientation aléatoire dans l'espace entre deux images consécutives. Par la suite, l'hypothèse selon laquelle les particules s'orientent aléatoirement suivant une loi uniforme d'une image à l'autre est formulée.



(a) Image d'acide citrique à l'instant  $t$ .

(b) Image d'acide citrique à l'instant  $t + 0,04$  secondes.

(c) Image d'acide citrique à l'instant  $t + 0,08$  secondes.

(d) Image d'acide citrique à l'instant  $t + 0,12$  secondes.

Figure 11.2 – Images de particules d'acide citrique. Entouré en rouge, la même particule sur quatre images successives.

**Remarque 11.1** Dans le cas où les particules ne s'orienteraient pas aléatoirement suivant une loi uniforme d'une image à l'autre (elles prendraient une orientation privilégiée par exemple), il serait tout de même possible d'utiliser la méthode 3SE. Cependant pour avoir des résultats plus fiables, il serait préférable de prendre en compte cet aspect dans le calcul des différentes densités de probabilité (chapitre 7, chapitre 8).

## 11.2 Détermination de la distribution granulométrique de particules d'oxalate d'ammonium

Dans cette section, il est proposé d'appliquer la méthode 3SE à l'estimation de distributions de taille de particules d'oxalate d'ammonium. En effet, comme constaté sur la figure 11.3, une particule

d'oxalate d'ammonium peut être modélisée, en première approximation, par un objet de type parallélépipède rectangle [122] [154] de longueur  $a$ , de largeur  $b = a$  ( $\alpha_1 = \frac{b}{a} = 1$ ) et de hauteur  $c = \alpha_2 a$  avec  $\alpha_2$  plus grand que 1. Une particule d'oxalate d'ammonium peut donc être modélisée par un objet 3-D convexe  $(CO, a, \alpha_1, \alpha_2)$  de type  $CO$  connu, de paramètre de taille  $a$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \geq 1$ . Les hypothèses réalisées dans les chapitres précédents sont donc vérifiées. Par conséquent, la méthode  $3SE$  (section 9.1) peut être appliquée pour estimer la taille et la forme de ces particules.

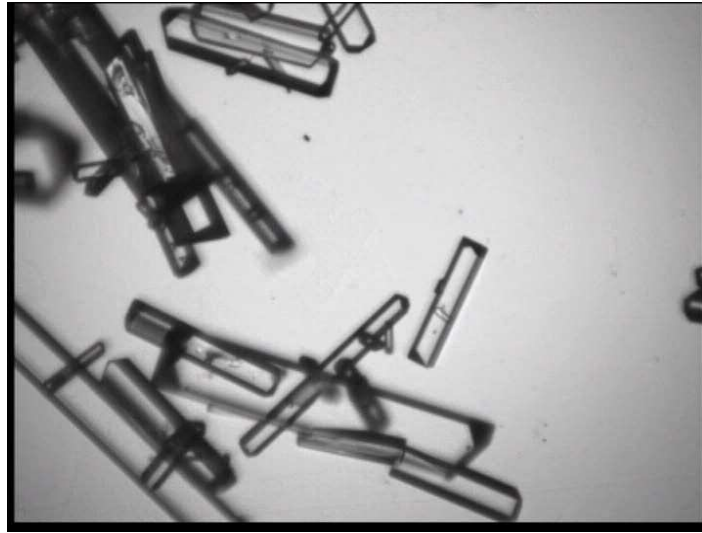


Figure 11.3 – Image 2-D en niveaux de gris de particules d'oxalate d'ammonium prise par la sonde *EZProbe* durant un processus de cristallisation.

Pour pouvoir appliquer la méthode  $3SE$  proposée sur une séquence vidéo acquise par la sonde *EZProbe*, plusieurs étapes doivent être réalisées au préalable. Premièrement, chaque particule doit être identifiée (étape de segmentation [143] [144] [139] [2] [1]) et deuxièmement un tracking vidéo [204] doit être réalisé afin de détecter les différentes vues, s'il y en a, d'une même particule. Bien ces différentes étapes puissent être réalisées de manière automatique (la figure 11.4 montre une image de particules d'oxalate d'ammonium segmentée de manière automatique grâce à l'algorithme de Ahmad et al. [2]), elles sont réalisées manuellement afin de ne pas biaiser les résultats.

Une fois ces deux étapes réalisées, la méthode  $3SE$  est appliquée à la séquence vidéo considérée et la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$  de chaque particule est estimée. La distribution de taille des particules d'oxalate d'ammonium, notée  $PSD_{3D}$ , en est déduite.

### 11.2.1 Comparaison de la méthode $3SE$ avec une méthode d'estimation de taille et de forme dite 2-D

Afin de comparer la méthode  $3SE$  avec une autre méthode d'analyse d'image d'estimation de taille et de forme [61], méthode dite 2-D, utilisant les mêmes données que la méthode  $3SE$ , le processus suivant est réalisé. Soit  $S$  une séquence vidéo acquise par la sonde *EZProbe*. Pour chaque particule d'oxalate d'ammonium de  $S$  segmentée manuellement, le rectangle 2-D de longueur  $L$  et de largeur  $l$  présentant la même aire et le même périmètre que la particule projetée est calculé. En supposant que chaque particule d'oxalate d'ammonium peut être modélisée par un parallélépipède rectangle de hauteur  $L$ , de longueur  $l$  et de largeur  $l$ , la distribution de taille des particules d'oxalate d'ammonium

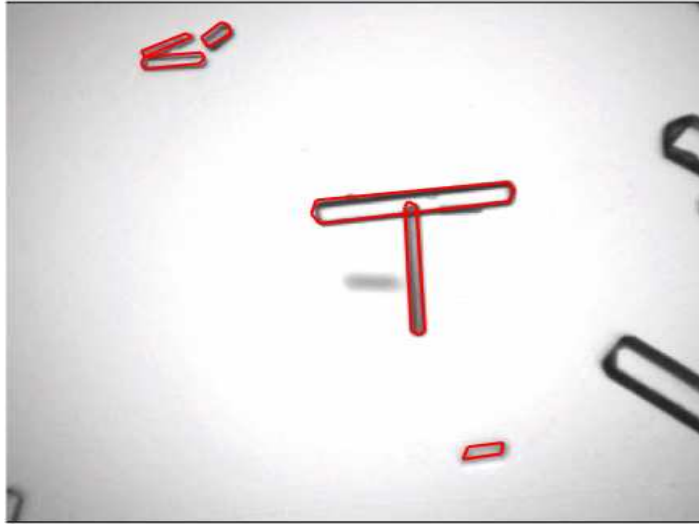


Figure 11.4 – Image de particules d’oxalate d’ammonium segmentée grâce à l’algorithme [2].

en est déduite, notée  $PSD_{2D}$ .

La figure 11.5 montre six distributions granulométriques en volume de particules d’oxalate d’ammonium (nombre de particules en fonction du volume). Trois ont été calculées grâce à la méthode  $3SE$  (figures 11.5(b), 11.5(d), 11.5(f)) et trois grâce à la méthode 2-D (figures 11.5(a), 11.5(c), 11.5(e)). Ces distributions ont été calculées à partir d’une séquence vidéo acquise par la sonde  $EZProbe$  à trois instants différents de l’expérience de cristallisation considérée. Chaque distribution a été calculée sur un intervalle de temps d’environ  $\Delta t = 2$  secondes, *i.e.* 50 images (les différentes distributions de taille ont été calculées sur un tel intervalle de temps car les étapes de tracking et de segmentation nécessaire à l’application de la méthode  $3SE$  ne sont pas encore automatisées). Si  $t_0$  désigne le moment où les particules d’oxalate d’ammonium commencent à se former, *i.e.* la nucléation, les deux premières distributions de taille (figures 11.5(a), 11.5(b)) ont été calculées sur l’intervalle  $t_0 + 1 \pm \frac{\Delta t}{2}$  minutes (38 particules ont été analysées), les deux deuxièmes (figures 11.5(e), 11.5(f)) sur l’intervalle  $t_0 + 10 \pm \frac{\Delta t}{2}$  minutes (144 particules ont été analysées) et les deux troisièmes (figures 11.5(c), 11.5(d)) sur l’intervalle  $t_0 + 15 \pm \frac{\Delta t}{2}$  minutes environ (351 particules ont été analysées).

Il est important de remarquer que les deux méthodes utilisées pour calculer les distributions de taille des particules d’oxalate d’ammonium donnent bien des résultats en adéquation avec le processus même de cristallisation, *i.e.* le volume des particules croît au cours du temps.

Pour quantifier plus précisément l’erreur en volume des deux méthodes, la simulation suivante est réalisée. Pour un objet 3-D convexe  $(CO, 10, 1, \alpha_2)$  de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$ , de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \geq 1$  et de volume  $V_{real} = a \times a \times \alpha_2 a$ , le simulateur génère  $n = 1$  projection orthographique aléatoire (loi uniforme) de cet objet (la méthode 2-D ne prend pas en compte le fait que la même particule puisse être vue sur plusieurs images successives) et à partir de cette projection, son volume est estimé grâce à la méthode 2-D, noté  $\hat{V}_{2D}$ , et grâce à la méthode  $3SE$ , noté  $\hat{V}_{3SE}$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois. Notons  $\{\hat{V}_{2D}^i\}_{i \in [1, m]}$  la famille des volumes estimés par la méthode 2-D où  $\hat{V}_{2D}^i$  représente le  $i$ ème volume estimé et  $\{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in [1, m]}$  la famille des volumes estimés par la méthode  $3SE$  où  $\hat{V}_{3SE}^i$  représente le  $i$ ème volume estimé. Pour quantifier les résultats obtenus, l’erreur relative moyenne (Relative Mean Error) entre la volume réel  $V_{real}$  et les volumes estimés par chacune des

deux méthodes, notée  $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{2D}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  et  $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  respectivement, est calculée (équation 11.1 et équation 11.2).

$$RME(V_{real}, \{\hat{V}_{2D}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|V_{real} - \hat{V}_{2D}^i|}{V_{real}} \quad (11.1)$$

$$RME(V_{real}, \{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|V_{real} - \hat{V}_{3SE}^i|}{V_{real}} \quad (11.2)$$

La figure 11.6 montre le résultat de cette simulation pour des objets 3-D de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . Il est important de noter que par rapport à la méthode 2-D, la méthode 3SE estime de façon plus précise le volume réel d'un objet 3-D  $(CO, 10, 1, \alpha_2)$  et ceci quelle que soit la valeur de  $\alpha_2$ . Ce résultat confirme la nécessité de prendre en compte l'aspect 3-D d'une particule lorsque seules ses vues projetées sont accessibles. De plus, la méthode 2-D ne prenant pas en compte le fait que le même objet 3-D puisse être vu sur plusieurs images de projections successives, les volumes  $\{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  ont été estimés à partir d'une seule projection orthographique aléatoire (loi uniforme) de l'objet 3-D considéré. Par conséquent, l'erreur relative  $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  doit être minimisée car si plusieurs projections du même objet 3-D sont disponibles, l'erreur  $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket})$  serait moins importante.

Sur la figure 11.5, il est aussi possible de remarquer que la méthode 2-D a tendance à estimer des volumes plus importants que la méthode 3SE. Pour mieux comprendre ce résultat, les simulations suivantes sont réalisées.

Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a$ , de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \geq 1$  et de volume  $V_{real} = a \times a \times \alpha_2 a$ , le simulateur génère une projection aléatoire (loi uniforme) de cet objet et à partir de cette projection, son volume est estimé grâce à la méthode 2-D, noté  $\hat{V}_{2D}$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois. Notons  $\{\hat{V}_{2D}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des volumes estimés où  $\hat{V}_{2D}^i$  représente le  $i$ ème volume estimé. Pour quantifier les résultats obtenus, le cardinal de l'ensemble des volumes estimés qui sur-estime le volume réel de l'objet, noté  $Card(V_{2D+})$ , est calculé ainsi que le cardinal de l'ensemble des volumes estimés qui sous-estime le volume réel de l'objet, noté  $Card(V_{2D-})$  et le cardinal de l'ensemble des volumes estimés qui estime exactement le volume réel de l'objet, noté  $Card(V_{2D=})$  (équation 11.3).

Pour un objet 3-D convexe  $(CO, a, 1, \alpha_2)$  de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a$ , de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \geq 1$  et de volume  $V_{real} = a \times a \times \alpha_2 a$ , le simulateur génère  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) projections aléatoires (loi uniforme) de cet objet et à partir de ces  $n$  projections, son volume est estimé grâce à la méthode 3SE, noté  $\hat{V}_{3SE}$ . Pour obtenir des données statistiques fiables, ce processus est répété  $m$  ( $m = 10.000$ ) fois pour chaque  $n$ . Notons  $\{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  la famille des volumes estimés où  $\hat{V}_{3SE}^i$  représente le  $i$ ème volume estimé. Pour quantifier les résultats obtenus, le cardinal de l'ensemble des volumes estimés qui sur-estime le volume réel de l'objet, noté  $Card_n(V_{3SE+})$ , est calculé ainsi que le cardinal de l'ensemble des volumes estimés qui sous-estime le volume réel de l'objet, noté  $Card_n(V_{3SE-})$  et le cardinal de l'ensemble des volumes estimés qui estime exactement le



volume réel de l'objet, noté  $Card_n(V_{3SE=})$ , et ceci pour chaque valeur de  $n$  (équation 11.4).

$$\begin{aligned}
 Card(V_{2D+}) &= Card\{\hat{V}_{2D}^i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \hat{V}_{2D}^i > V_{real}\} \\
 Card(V_{2D-}) &= Card\{\hat{V}_{2D}^i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \hat{V}_{2D}^i < V_{real}\} \\
 Card(V_{2D=}) &= Card\{\hat{V}_{2D}^i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \hat{V}_{2D}^i = V_{real}\}
 \end{aligned} \tag{11.3}$$

$$\begin{aligned}
 Card_n(V_{3SE+}) &= Card\{\hat{V}_{3SE}^i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \hat{V}_{3SE}^i > V_{real}\} \\
 Card_n(V_{3SE-}) &= Card\{\hat{V}_{3SE}^i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \hat{V}_{3SE}^i < V_{real}\} \\
 Card_n(V_{3SE=}) &= Card\{\hat{V}_{3SE}^i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \hat{V}_{3SE}^i = V_{real}\}
 \end{aligned} \tag{11.4}$$

Les figures 11.7 et 11.8 montrent le résultat de ces simulations pour des objets 3-D de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ .

Il est possible de remarquer que, quelle que soit la valeur de  $\alpha_2$  considérée, la méthode d'estimation 2-D ne sous-estime jamais le volume réel de l'objet 3-D correspondant mais le sur-estime la plupart du temps. Dans le meilleur des cas étudiés ( $\alpha_2 = 20$ ), le volume réel de l'objet 3-D est sur-estimé 80% du temps. En revanche, la méthode 3SE peut très bien sur-estimer comme sous-estimer le volume réel de l'objet 3-D considéré.

Ce résultat confirme encore la nécessité de prendre en compte l'aspect 3-D d'une particule quand seulement ses vues projetées sont accessibles.

### 11.2.2 Comparaison de la méthode proposée avec le compteur Coulter

Afin de comparer la méthode 3SE avec une méthode de mesure 3-D, le compteur Coulter est utilisé. Le compteur Coulter est un appareil d'analyse hors ligne (chapitre 1) qui permet de mesurer la distribution en volume d'un échantillon de particules. La taille mesurée par cet appareil représente approximativement le volume d'une particule, ce volume étant ramené au diamètre de la sphère équivalente en volume. La taille mesurée par la méthode 3SE est la valeur du couple  $(a, \alpha_2)$  de chaque particule. Cependant, en calculant le volume de chaque particule et en ramenant ce volume au diamètre de la sphère équivalente en volume, il est possible de comparer les distributions granulométriques mesurées par le compteur Coulter aux distributions granulométriques estimées par la méthode 3SE.

Considérons une expérience de cristallisation. Pour mesurer la distribution de taille des particules grâce à la méthode compteur Coulter au début du processus de cristallisation, un prélèvement de la solution est réalisé à cet instant et analysé en utilisant un tube dont le diamètre d'ouverture est de  $1.000\mu m$ . Cette taille d'ouverture permet uniquement de déterminer la taille de particules allant de  $30\mu m$  à  $600\mu m$ . Ceci est une limitation intrinsèque de cette méthode d'analyse.

Pour déterminer la distribution de taille des particules grâce à la méthode 3SE au même instant, environ 100 images (4 secondes) représentant le début du processus de cristallisation sont analysées. Bien que la méthode 3SE permette de calculer la taille de particules inférieure à  $30\mu m$  et supérieure à  $600\mu m$ , la distribution de taille des particules d'oxalate d'ammonium a été calculée sur le même intervalle que le compteur Coulter, *i.e.*  $[30\mu m; 600\mu m]$ , par souci de comparaison.

La figure 11.9 montre les distributions de taille des particules d'oxalate d'ammonium ainsi calculées grâce à la méthode compteur Coulter et la méthode 3SE. Il est important de remarquer que les deux distributions de taille sont similaires. Ce résultat est important car la méthode 3SE et la méthode compteur Coulter sont toutes deux des méthodes « 3-D », les distributions estimées par ces

deux méthodes doivent donc être similaires. Cependant, il est important de noter que, contrairement à la méthode compteur Coulter, la méthode *3SE* permet aussi d'accéder à la forme des particules (facteurs d'anisotropie), ce qui est un avantage considérable.

### 11.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'application de la méthode *3SE* à des images de particules projetées a permis d'apporter une réponse à la problématique pharmaceutique initiale, *i.e.* déterminer la distribution granulométrique 3-D de particules générées durant un processus de cristallisation en solution. Les distributions calculées par cette méthode ont été comparées à celles calculées par une méthode d'analyse d'image 2-D [61] et à celles calculées grâce au compteur Coulter.

Les résultats ont montré que la méthode *3SE* estime plus précisément la distribution de taille de particules d'oxalate d'ammonium que la méthode 2-D. En effet, même à partir d'une seule projection d'un objet 3-D (Parallélépipède rectangle,  $10, 1, \alpha_2 \leq 20$ ), l'erreur relative moyenne entre le volume réel et les volumes estimés par la méthode *3SE* est moins élevée que l'erreur relative moyenne entre le volume réel et les volumes estimés par la méthode 2-D. De plus, cette dernière sur-estime la plus part du temps le volume réel des objets 3-D (Parallélépipède rectangle,  $10, 1, \alpha_2 \leq 20$ ) contrairement à la méthode *3SE*.

Enfin, les résultats ont montré que les distributions de taille calculées grâce à la méthode *3SE* sont comparables aux distributions de taille calculées grâce à la méthode de mesure 3-D compteur Coulter. Ce résultat est important car la méthode *3SE* et la méthode compteur Coulter sont toutes deux des méthodes « 3-D », les distributions de taille estimées par ces deux méthodes doivent donc être similaires. Cependant, il est important de noter que, contrairement à la méthode compteur Coulter, la méthode *3SE* permet aussi d'accéder à la forme des particules (facteurs d'anisotropie), ce qui est un avantage considérable.

---

La quatrième partie de ce manuscrit a apportée une réponse à la problématique pharmaceutique pratique initiale : le contrôle de la distribution de taille de particules générées durant un processus de cristallisation. La prochaine partie conclut ce travail de thèse.

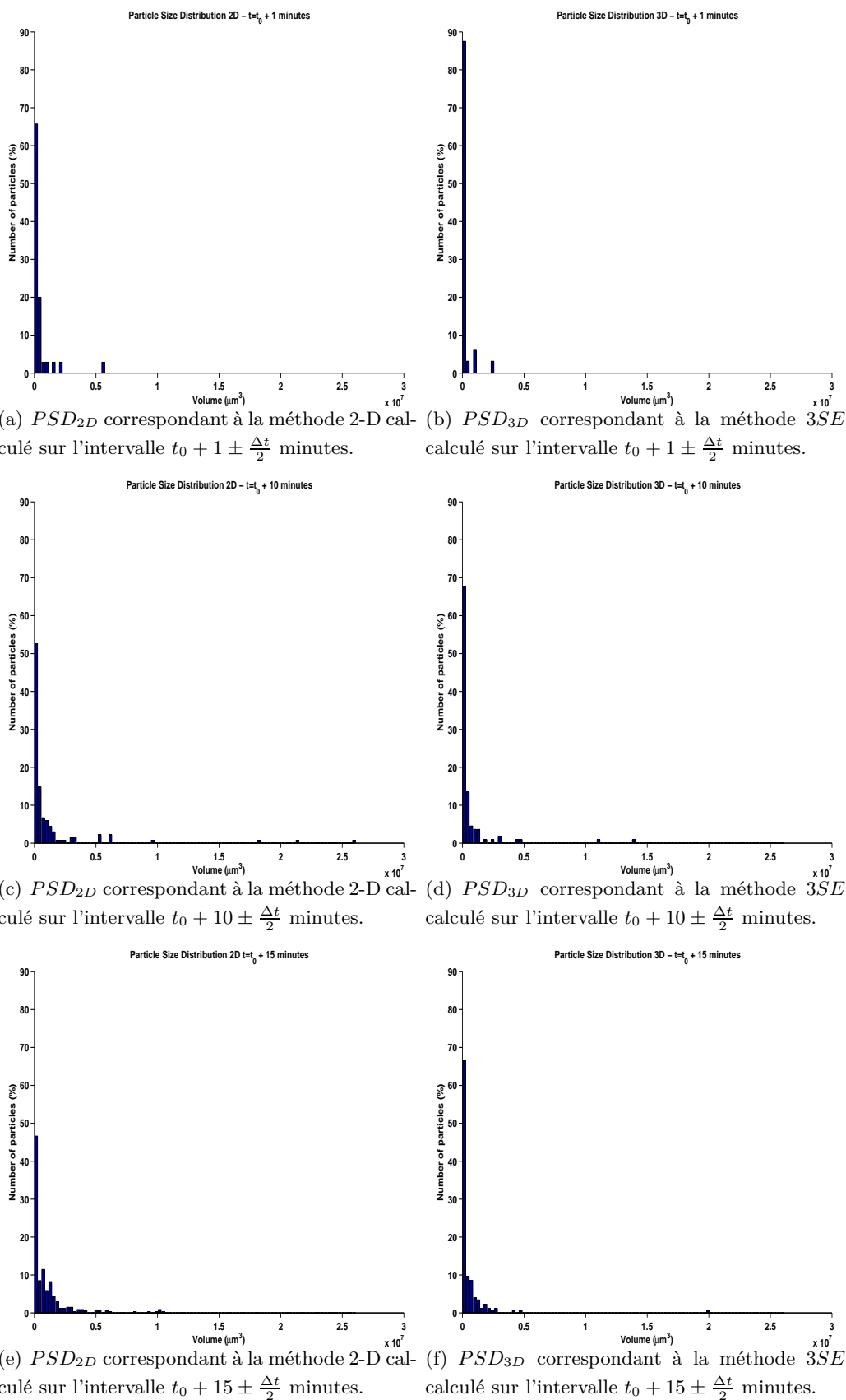


Figure 11.5 – Distributions de taille des particules d'oxalate d'ammonium calculées à trois instants différents de l'expérience de cristallisation étudiée et par deux méthodes différentes ( $t_0$  désigne le début de la nucléation,  $\Delta t = 2/60$  minutes).

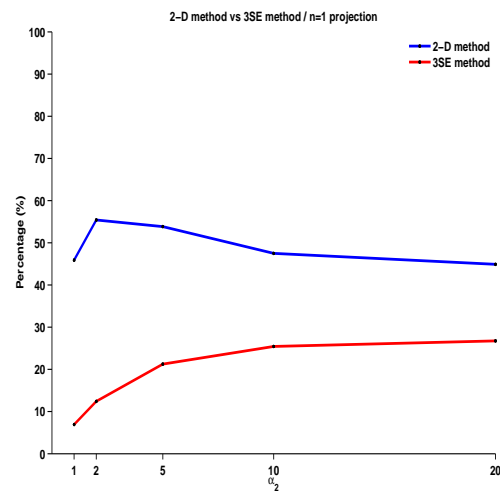


Figure 11.6 – Évolution de l’erreur relative moyenne entre le volume réel et les volumes estimés en fonction du paramètre de forme  $\alpha_2$  ( $n = 1$  projection). Les objets 3-D étudiés sont de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . En bleu, l’erreur  $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{2D}^i\}_{i \in [1, m]})$  en fonction de  $\alpha_2$ . En rouge, l’erreur  $RME(V_{real}, \{\hat{V}_{3SE}^i\}_{i \in [1, m]})$  en fonction de  $\alpha_2$ .

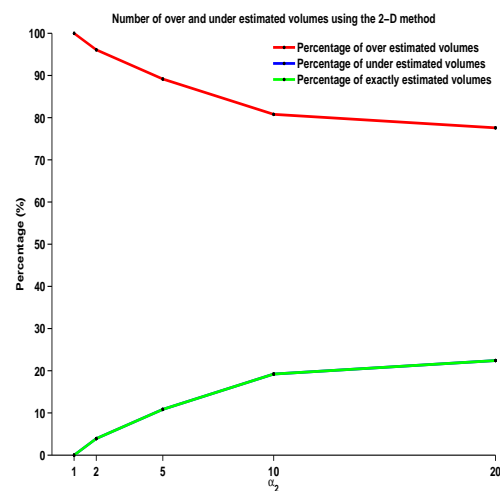
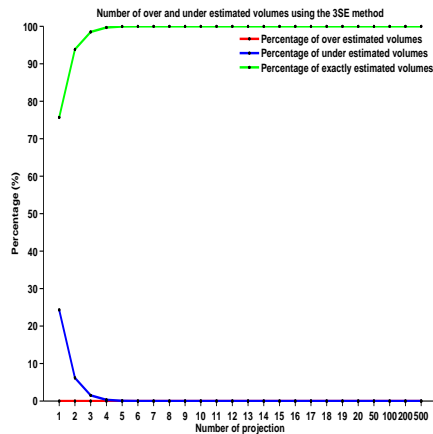
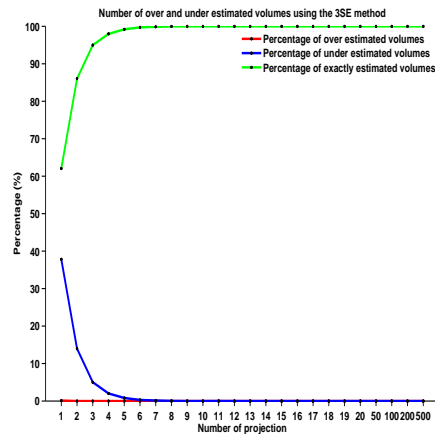


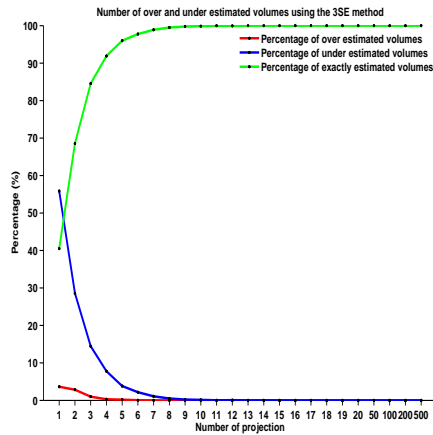
Figure 11.7 – Évolution du nombre normalisé (%) de volumes sous-estimés (courbe bleue), sur-estimés (courbe rouge) et estimés exactement (courbe verte) grâce à la méthode 2-D en fonction du paramètre de forme  $\alpha_2$ . Les objets 3-D étudiés sont de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . D’un point de vue statistique, la méthode 2-D n’estime « jamais » correctement le volume d’un objet 3-D de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , car la projection formant un carré de coté  $a = 10$  est très peu probable.



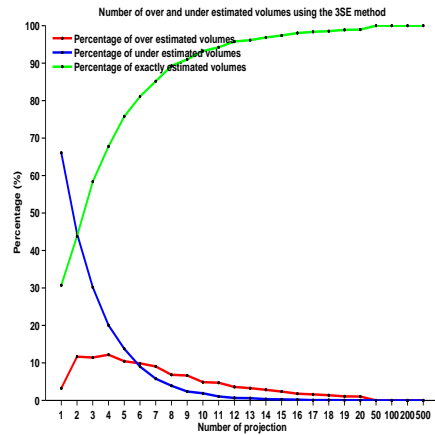
(a) Parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 1$  ( $\alpha_1 = 1$ ).



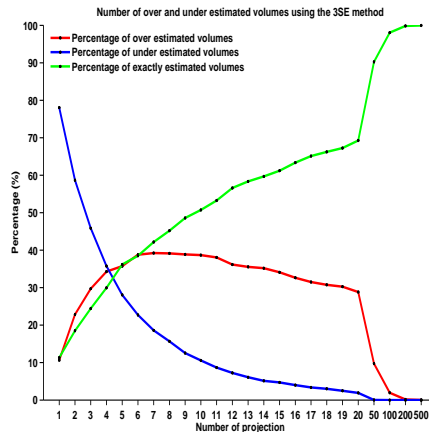
(b) Parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 2$  ( $\alpha_1 = 1$ ).



(c) Parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 5$  ( $\alpha_1 = 1$ ).



(d) Parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 10$  ( $\alpha_1 = 1$ ).



(e) Parallélépipède rectangle de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètre de forme  $\alpha_2 = 20$  ( $\alpha_1 = 1$ ).

Figure 11.8 – Évolution du nombre normalisé (%) de volumes sous-estimés (courbes bleues), sur-estimés (courbes rouges) et estimés exactement (courbes vertes) grâce à la méthode 3SE en fonction du nombre de projection  $n$ . Les objets 3-D étudiés sont de type parallélépipède rectangle, de paramètre de taille  $a = 10$  et de paramètres de forme  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ .

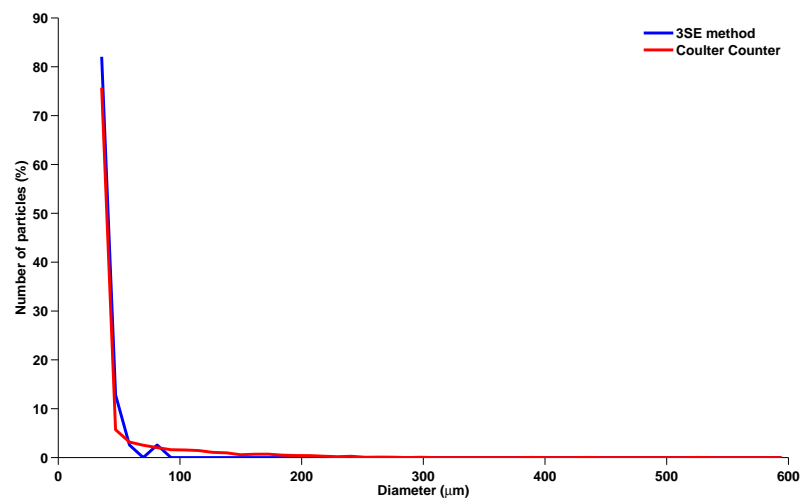


Figure 11.9 – Distributions de taille des particules d’oxalate d’ammonium au début du processus de cristallisation. En bleu, la distribution de taille calculée grâce à la méthode *3SE*. En rouge, la distribution de taille calculée grâce au compteur Coulter.



## Cinquième partie

# Conclusion et perspectives





## Sommaire de la Cinquième partie

---

<b>12 Conclusion</b>	<b>143</b>
12.1 Conclusion générale . . . . .	143
12.2 Publications et communications . . . . .	144
12.2.1 Journaux à comité de lecture . . . . .	144
12.2.2 Conférences internationales à comité de lecture avec proceedings . . . . .	144
12.2.3 Conférences nationales à comité de lecture avec proceedings . . . . .	144
12.2.4 Autres communications . . . . .	145
<b>13 Perspectives</b>	<b>147</b>
13.1 Perspectives pratiques . . . . .	147
13.2 Perspectives théoriques . . . . .	147
<b>Références bibliographiques</b>	<b>149</b>

---



# Chapitre 12

## Conclusion

### 12.1 Conclusion générale

Au vu de la problématique pharmaceutique initiatrice, consistant en l'amélioration de la qualité d'un produit de cristallisation par la détermination de sa granulométrie au cours du temps, une étude bibliographique a été réalisée et a permis de cibler précisément les méthodes permettant de déterminer la distribution granulométrique d'un ensemble d'objets 3-D en suspension. D'après cette étude, il s'est avéré que les méthodes d'analyse d'image étaient les plus prometteuses car elles permettaient non seulement de déterminer la taille mais aussi la forme des objets projetés. L'état de l'art proposé s'est donc naturellement orienté vers les outils permettant de caractériser géométriquement et morphométriquement des images/objets 2-D puis vers les méthodes stéréologiques et plus précisément vers les approches stéréologiques « d'unfolding », lesquelles donnent les moyens d'accéder à la distribution de taille d'objets 3-D à partir d'une distribution de mesure calculée sur des images de coupes ou de projections.

Bien que le problème initial ait été d'ordre pratique, des contributions théoriques, génériques, originales et efficaces ont été apportées. Tout d'abord (chapitre 7), une étude a été réalisée afin de déterminer la « taille » de certains objets 3-D convexes à partir de leurs projections 2-D. Pour cela, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance des fonctions de densité de probabilité des aires projetées ou des fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés a été développée. Ensuite un descripteur de forme stéréologique a été proposé (chapitre 8) et ses propriétés ont été étudiées. Ce descripteur basé sur un diagramme de forme (chapitre 5) a permis de caractériser la « forme » d'un objet 3-D et ceci indépendamment de sa « taille ». Il a été construit grâce à deux fonctionnelles morphométriques qui sont des ratios normalisés de trois fonctionnelles géométriques : l'aire projetée, le diamètre de Feret minimum et le diamètre de Feret maximum projetés. Ce descripteur de forme stéréologique a été utilisé pour déterminer les paramètres de forme (l'anisotropie) des objets 3-D considérés. Enfin, une combinaison des deux études réalisées précédemment (chapitre 9) a rendu possible l'estimation à la fois de la « taille » et de la « forme » des objets 3-D étudiés. Cette méthode, baptisée « Stereological Size and Shape Estimator (3SE) », caractérise les objets projetés par une fonctionnelle géométrique et deux fonctionnelles morphométriques ( $A$ ,  $M^1 = \omega / d$ ,  $M^2 = 4A / \pi d^2$ ) ou deux fonctionnelles géométriques et deux fonctionnelles morphométriques ( $A$ ,  $P$ ,  $M^1$ ,  $M^2$ ). Elle a été validée grâce à des simulations et a de plus été comparée à une méthode de stéréologie projective classique (chapitre 10). Contrairement à cette dernière, la méthode 3SE pro-

posée permet en particulier d'estimer l'anisotropie des objets 3-D étudiés, ce qui est un avantage remarquable.

Cette thèse a apporté une réponse à la problématique pharmaceutique initiale (chapitre 11). L'estimation de distributions granumétriques de particules d'oxalate d'ammonium a été réalisée. Ces distributions ont été comparées à celles calculées par une méthode d'analyse d'image dite 2-D [61] et à celles mesurées grâce au compteur Coulter. L'oxalate d'ammonium a été choisi pour appliquer les contributions théoriques de ce travail mais la méthode *3SE* pourrait bien sûr être utilisée pour analyser d'autres particules.

## 12.2 Publications et communications

### 12.2.1 Journaux à comité de lecture

B. Presles, J. Debayle, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Novel image analysis method for in situ monitoring the particle size distribution of batch crystallization processes. *Journal of Electronic Imaging*, 19(3):031207, 2010. Special Section on Quality Control by Artificial Vision

B. Presles, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Size and shape estimation of 3-D convex objects from their 2-D projections: application to crystallization processes. *Journal of Microscopy*, 2011. Under second revision

B. Presles, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Stereological shape diagram based descriptor: 3-D convex objects morphological recognition from 2-D projections. *Pattern Recognition*, 2011. Submitted

O. Ahmad, J. Debayle, N. Gherras, B. Presles, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Quantification of overlapping polygonal-shaped particles based on a new segmentation method of in situ images during crystallization. *Journal of Electronic Imaging*, 2011. Submitted

### 12.2.2 Conférences internationales à comité de lecture avec proceedings

B. Presles, J. Debayle, A. Rivoire, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Monitoring the particle size distribution using image analysis during batch crystallization processes. In *9th International Conference on Quality Control by Artificial Vision (QCAV)*, Wels, Austria, 2009

B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Volume estimation of 3D particles with known convex shapes from its projected areas. In *2nd International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications (IPTA)*, pages 399–404, Paris, France, 2010

B. Presles, J. Debayle, Y. Maillot, and J. C. Pinoli. Automatic recognition of 2D shapes from a set of points. In *Image Analysis and Recognition*, volume 6753 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 183–192. Springer Berlin / Heidelberg, 2011

O. Ahmad, J. Debayle, N. Gherras, B. Presles, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Recognizing overlapped particles during a crystallization process from in situ video images for measuring their size distributions. In *10th International Conference on Quality Control by Artificial Vision (QCAV)*, volume 8000, page 800005, Saint-Étienne, France, 2011

### 12.2.3 Conférences nationales à comité de lecture avec proceedings

B. Presles, J. Debayle, A. Rivoire, J. C. Pinoli, and G. F evotte. In situ particle size measurements during crystallization processes using image analysis. In *12th Conference of Soci et  Française de Génie des Procédés (SFGP)*, Marseille, France, 2009. Keynote Conference

B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, J. C. Pinoli, and G. F evotte. Caractérisation géométrique de particules lors de leurs cristallisations en solution par analyse d'image *in situ*. In *6th Conference of Cristallisation et Précipitation Industrielles (CRISTAL 6)*, Marseille, France, 2010

#### 12.2.4 Autres communications

B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, G. F evotte, and J. C. Pinoli. Caractérisation 3D de particules par stéréologie projective. Journées Rhône-Alpes de quantim trie cellulaire, 2010

B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, G. F evotte, and J. C. Pinoli. Volume estimation of 3D crystals by projective stereology. Seminar of the International Society for Stereology (ISS), 2010

B. Presles. Caractérisation géométrique et morphologique 3D par analyse d'images 2D de particules lors d'un processus de cristallisation. Journée de la recherche de l' cole Doctorale Sciences Ingénierie Santé (EDSIS), 2010



# Chapitre 13

## Perspectives

### 13.1 Perspectives pratiques

Tout d'abord, il serait judicieux de développer un logiciel de type commercial ou convivial. Pour cela, il faudrait tout d'abord automatiser le processus de segmentation et de tracking nécessaire à l'utilisation de la méthode  $3SE$  développée.

Ensuite, pour réduire les temps de calculs et en particulier celui nécessaire à la création de la base de données des différentes fonctions de densités de probabilités, *i.e.* les fonctions de densité de probabilité des aires projetées, les fonctions de densité de probabilité conjointe des aires projetées et des périmètres projetés, les fonctions de densité de probabilité des fonctionnelles morphométriques projetées, il serait intéressant de migrer technologiquement la solution développée en MATLAB vers une solution General-Purpose Processing on Graphics Processing Units (GPGPU). Un travail préliminaire a d'ailleurs été réalisé dans ce sens lors de cette thèse et donne des résultats encourageants.

### 13.2 Perspectives théoriques

Pour améliorer l'exactitude des distributions de taille calculées avec la méthode  $3SE$ , il serait intéressant de prendre en compte, d'un point de vue statistique, le fait que le champ d'analyse de la caméra est limité [54]. En effet, un des défauts intrinsèques des méthodes d'analyse d'image est qu'elles ne permettent pas d'estimer la taille de particules supérieur aux dimensions de l'image.

L'étude pourrait également s'étendre à d'autres types d'objets 3-D et en particulier à des objets 3-D non convexes. Pour décrire les projections de ces derniers, les mêmes fonctionnelles géométriques et morphométriques que celle de la méthode  $3SE$  (l'aire projetée, le périmètre projeté,  $M^1$ ,  $M^2$ ) pourraient bien sûr toujours être utilisées. Cependant, d'après Rivollier et al. [147] [148] [149], il serait plus judicieux de recourir au diagramme de forme  $\mathcal{D}_{24}$  et donc aux fonctionnelles morphométriques  $\frac{4\pi A}{P^2}$ ,  $\frac{4R}{P}$ . En effet, d'après leur étude, le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{24}$  est celui qui permet de discriminer aux mieux deux ensembles compacts non convexes. De plus, l'ajout de fonctionnelles topologiques tels que le nombre d'Euler paraît opportun : l'objet 2-D résultant de la projection d'un objet 3-D non convexe n'est pas forcément simplement connexe.

Un autre travail pourrait aussi être envisagé afin de déterminer les fonctionnelles géométriques, morphométriques et topologiques les plus pertinentes. En effet, plus le nombre de celles-ci augmente, plus l'estimation de la taille et de la forme d'un objet 3-D à partir de ses projections 2-D devient précise



mais plus les temps de calcul augmentent. Certaines fonctionnelles sont donc très probablement plus discriminantes que d'autres. Une étude préliminaire a d'ailleurs été réalisée, et par exemple, pour un nombre de projections « faible », l'aire projetée par rapport au périmètre projeté permet de déterminer de manière plus précise la « taille » des objets 3-D convexes étudiées dans ce manuscrit. Une recherche plus approfondie serait nécessaire pour pouvoir hiérarchiser les différentes fonctionnelles en fonction de leurs pertinences respectives.

# Références bibliographiques

(avec indication des pages où elles sont citées)

- [1] O. Ahmad, J. Debayle, N. Gherras, B. Presles, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Quantification of overlapping polygonal-shaped particles based on a new segmentation method of in situ images during crystallization. *Journal of Electronic Imaging*, 2011. Submitted. 129
- [2] O. Ahmad, J. Debayle, N. Gherras, B. Presles, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Recognizing overlapped particles during a crystallization process from in situ video images for measuring their size distributions. In *10th International Conference on Quality Control by Artificial Vision (QCAV)*, volume 8000, page 800005, Saint-Étienne, France, 2011. ix, 129, 130
- [3] S. Al-Thyabat and N. J. Miles. An improved estimation of size distribution from particle profile measurements. *Powder Technology*, 166(3) :152–160, 2006. 25
- [4] S. Al-Thyabat, N. J. Miles, and T. S. Koh. Estimation of the size distribution of particles moving on a conveyor belt. *Minerals Engineering*, 20(1) :72–83, 2007. 25
- [5] A. L. Amaral and E. C. Ferreira. Activated sludge monitoring of a wastewater treatment plant using image analysis and partial least squares regression. In *9th International Conference on Chemometrics in Analytical Chemistry (CAC)*, volume 544, pages 246–253, 2005. 19
- [6] L. Ambrosio, A. Colesanti, and E. Villa. Outer minkowski content for some classes of closed sets and applications to stochastic geometry. *Mathematische Annalen*, 342(4) :727–748, 2008. 18
- [7] J. Angulo, T. Nguyen-Khoa, Z. A. Massy, T. Drüeke, and J. Serra. Morphological quantification of aortic calcification from low magnification images. *Image Analysis and Stereology*, 22(2) :81–89, 2003. 19
- [8] A. Asano. Texture analysis using morphological pattern spectrum and optimization of structuring elements. In *10th International Conference on Image Analysis and Processing (ICIAP), ICIAP '99*, pages 209–214, Washington, DC, USA, 1999. 19
- [9] G. Ayala and J. Domingo. Spatial size distributions : Applications to shape and texture analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(12) :1430–1442, 2001. 19
- [10] A. J. Baddeley and M. N. M. van Lieshout. Object recognition using markov spatial processes. In *11th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, volume 2, pages 136–139, 1992. 18
- [11] G. Barbery. Determination of particle size distribution from measurements on sections. *Powder Technology*, 9(5-6) :231–240, 1974. 23
- [12] A. Belhaoua, S. Kohler, and E. Hirsch. Error evaluation in a stereovision-based 3D reconstruction system. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, 2010(1) :539836, 2010. 16

- [13] U. Betke and P. McMullen. Estimating the sizes of convex bodies from projections. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-27(3) :525–538, 1983. 25
- [14] W. Blaschke. Konvexe bereiche gegebener konstanter breite und kleinsten inhalts. *Mathematische Annalen*, 76(4) :504–513, 1915. 36
- [15] W. Blaschke. Eine frage über konvexe körper. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 25 :121–125, 1917. 36
- [16] W. Blaschke. *Vorlesungen über integralgeometrie*, volume 1. VEB, Berlin, 1955. 17
- [17] K. Böröczky Jr., M. A. Hernández Cifre, and G. Salinas. Optimizing area and perimeter of convex sets for fixed circumradius and inradius. *Monatshefte für Mathematik*, 138(2) :95–110, 2003. 36
- [18] E. Bribiesca and A. Guzmán. Shape detection and shape similarity measurement for two-dimensional regions. In *4th International Joint Conference on Pattern Recognition*, pages 608–612, 1978. 85
- [19] U. Brodatzki and K. Mecke. Simulating stochastic geometries : morphology of overlapping grains. *Computer Physics Communications*, 147(1) :218–221, 2002. 18
- [20] D. J. Brown and G. T. Vickers. The use of projected area distribution functions in particle shape measurement. *Powder Technology*, 98(3) :250–257, 1998. 25, 56
- [21] D. J. Brown, G. T. Vickers, A. P. Collier, and G. K. Reynolds. Measurement of the size, shape and orientation of convex bodies. *Chemical Engineering Science*, 60(1) :289–292, 2005. 25, 56
- [22] R. Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants, and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, 4 :161–173, 1828. 18
- [23] B. Bujak and M. Bottlinger. Three-dimensional measurement of particle shape. *Particle & Particle Systems Characterization*, 25(4) :293–297, 2008. 17
- [24] K. Bunte and S. R. Abt. Sampling surface and subsurface particle-size distributions in wadable gravel-and cobble-bed streams for analyses in sediment transport, hydraulics, and streambed monitoring. Technical report, General Technical Report RMRS-GTR-74, 2001. 19
- [25] S. Cai and X. Shen. Octree-based robust watermarking for 3D model. *Journal of Multimedia*, 6(1) :83–90, 2011. 93
- [26] J. Calderon de Anda, X. Z. Wang, X. Lai, and K. J. Roberts. Classifying organic crystals via in-process image analysis and the use of monitoring charts to follow polymorphic and morphological changes. *Journal of Process Control*, 15(7) :785–797, 2005. 9
- [27] J. Calderon de Anda, X. Z. Wang, X. Lai, K. J. Roberts, K. H. Jennings, M. J. Wilkinson, D. Watson, and D. Roberts. Real-time product morphology monitoring in crystallization using imaging technique. *AIChE Journal*, 51(5) :1406–1414, 2005. 9
- [28] J. Calderon de Anda, X. Z. Wang, and K. J. Roberts. Multi-scale segmentation image analysis for the in-process monitoring of particle shape with batch crystallisers. *Chemical Engineering Science*, 60(4) :1053–1065, 2005. 9
- [29] R. M. Carter and Y. Yan. Measurement of particle shape using digital imaging techniques. *Journal of Physics : Conference Series*, 15(1) :177–182, 2005. 19

- 
- [30] A. L. Cauchy. *Œuvres complètes : sér., t. 1. mémoires extraits du journal de l'école polytechnique*. Œuvres complètes. Gauthier-Villars, 1908. 23
- [31] F. Cazals, J. Giesen, M. Pauly, and A. Zomorodian. Conformal alpha shapes. In *Symposium on Point Based Graphics*, pages 55–61, 2005. 42
- [32] S. C. Cheng and Y. M. Huang. A novel approach to diagnose diabetes based on the fractal characteristics of retinal images. *Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 7(3) :163–170, 2003. 18
- [33] N. Chevallier and Y. Maillot. Boundary of a non-uniform point cloud for reconstruction : extended abstract. In *27th annual ACM symposium on Computational geometry*, SoCG '11, pages 510–518, New York, NY, USA, 2011. 42, 88
- [34] A. C. Clairaut. *Eléments de géométrie*. David Fils, 1741. 17
- [35] M. W. Clark. Quantitative shape analysis : a review. *Mathematical Geology*, 13(4) :303–320, 1981. 19
- [36] M. Coster and J. L. Chermant. *Précis d'analyse d'images*. Editions du CNRS, 1985. 18
- [37] G. Crawley, M. Cournil, and D. Di Benedetto. Size analysis of fine particle suspensions by spectral turbidimetry : potential and limits. *Powder Technology*, 91(3) :197–208, 1997. 8
- [38] L. M. Cruz-Orive. Particle size-shape distributions : The general spheroid problem. i. mathematical model. *Journal of Microscopy*, 107(3) :235–253, 1976. 23
- [39] L. M. Cruz-Orive. Particle size-shape distributions : the general spheroid problem. II. stochastic model and practical guide. *Journal of Microscopy*, 112(2) :153–167, 1978. 23
- [40] L. M. Cruz-Orive. Stereology of single objects. *Journal of Microscopy*, 186 :93–107, 1997. 21
- [41] J. Debayle and J. C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Image Processing - Part I : Introduction and theoretical aspects. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(2) :245–266, 2006. 19
- [42] J. Debayle and J. C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Image Processing - Part II : Practical application examples. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(2) :267–284, 2006. 19
- [43] J. Debayle and J. C. Pinoli. Theory and applications of general adaptive neighborhood image processing. In *Advances in Imaging and Electron Physics*, volume 167, chapter 2, pages 121–183. Elsevier, 2011. 19
- [44] B. N. Delaunay. Sur la sphère vide. *Bulletin of Academy of Sciences of the USSR*, (6) :793–800, 1934. 42
- [45] P. Delfiner. A generalization of the concept of size. *Journal of Microscopy*, 95(2) :203–216, 1972. 19
- [46] M. E. Díaz, G. Alaya, R. Sebastian, and L. Martínez-Costa. Granulometric analysis of corneal endothelium specular images by using a germ-grain model. *Computers in Biology And Medicine*, 37(3) :364–375, 2007. 19
- [47] M. P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976. 17
- [48] A. Doulamis, N. Doulamis, and P. Maragos. Generalized multiscale connected operators with applications to granulometric image analysis. In *International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 3, pages 684–687, 2001. 19

- [49] S. Drot, X. Descombes, H. Le Men, and J. Zerubia. Object point processes for image segmentation. In *16th International Conference on Pattern Recognition*, volume 2, pages 913–916, 2002. 18
- [50] M. Duckham, L. Kulik, M. Worboys, and A. Galton. Efficient generation of simple polygons for characterizing the shape of a set of points in the plane. *Pattern Recognition*, 41(10) :3224–3236, 2008. 43
- [51] H. Edelsbrunner. Weighted alpha shapes. Technical report, Champaign, IL, USA, 1992. 42
- [52] H. Edelsbrunner, D. Kirkpatrick, and R. Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(4) :551–559, 1983. 41, 88
- [53] J. Eggers, M. Kempkes, J. Cornel, M. Mazzotti, I. Koschinski, and E. Verdurand. Monitoring size and shape during cooling crystallization of ascorbic acid. *Chemical Engineering Science*, 64(1) :163–171, 2009. 25
- [54] J. Eggers, M. Kempkes, and M. Mazzotti. Measurement of size and shape distributions of particles through image analysis. *Chemical Engineering Science*, 63(22) :5513–5521, 2008. 25, 147
- [55] O. El Badawy and M. Kamel. Matching concavity trees. In *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, volume 3138 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 556–564. Springer Berlin / Heidelberg, 2004. 85
- [56] O. Faugeras. *Three-Dimensional computer vision (artificial intelligence)*. The MIT Press, 1993. 11
- [57] L. R. Feret. La grosseur des grains des matières pulvérulentes. *Premières Communications de la Nouvelle Association Internationale pour l'Essai des Matériaux, Groupe D*, pages 428–436, 1930. 17, 24, 35, 117
- [58] D. A. Forsyth and J. Ponce. *Computer vision : a modern approach*. Prentice Hall, us edition, 2002. 11
- [59] P. Francus. *Image analysis, sediments and paleoenvironmental reconstructions*, chapter Image measurements. Kluwer academic publishers, 2004. 19
- [60] H. Freeman and L. S. Davis. A corner-finding algorithm for chain-coded curves. *IEEE Transactions on Computers*, C-26(3) :297–303, 1977. 85
- [61] N. Gherras and G. Févotte. Comparison between approaches for the experimental determination of metastable zone width : a case study of the batch cooling crystallization of ammonium oxalate in water. *Journal of Crystal Growth*, 342(1) :88–98, 2012. 129, 133, 144
- [62] F. Gruy and M. Cournil. On-line determination of aggregate size and morphology in suspensions. *Particle & Particle Systems Characterization*, 21(3) :197–204, 2004. 8
- [63] R. Guderlei, S. Klenk, J. Mayer, V. Schmidt, and E. Spodarev. Algorithms for the computation of the minkowski functionals of deterministic and random polyconvex sets. *Image and Vision Computing*, 25(4) :464–474, 2007. 18
- [64] H. J. G. Gundersen and E. B. Jensen. The efficiency of systematic sampling in stereology and its prediction. *Journal of Microscopy*, 147(3) :229–263, 1987. 21
- [65] H. Hadwiger. *Vorlesungen über inhalt, oberfläche und isoperimetrie*. Springer-Verlag, 1957. 17

- [66] J. H. Han and D. Y. Kim. Determination of three-dimensional grain size distribution by linear intercept measurement. *Acta Materialia*, 46(6) :2021–2028, 1998. 23
- [67] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2 edition, 2004. 11
- [68] R. Heilbronner and N. Keulen. Grain size and grain shape analysis of fault rocks. *Tectonophysics*, 427(1-4) :199–216, 2006. 19
- [69] M. A. Hernández Cifre. Is there a planar convex set with given width, diameter, and inradius? *The American Mathematical Monthly*, 107(10) :893–900, 2000. 36
- [70] M. A. Hernández Cifre. Optimizing the perimeter and the area of convex sets with fixed diameter and circumradius. *Archiv der Mathematik*, 79(2) :147–157, 2002. 36
- [71] M. A. Hernández Cifre, G. Salinas, and S. Segura Gomis. Complete systems of inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2(1-10) :1–12, 2001. 36
- [72] M. A. Hernández Cifre and S. Segura Gomis. The missing boundaries of the santaló diagrams for the cases  $(d, \omega, r)$  and  $(\omega, r, r)$ . *Discrete & Computational Geometry*, 23(3) :381–388, 2000. 36
- [73] M. D. Higgins. Measurement of crystal size distributions. *American Mineralogist*, 85(9) :1105–1116, 2000. 23
- [74] R. Horaud and O. Monga. *Vision par ordinateur : outils fondamentaux*. Traité des Nouvelles Technologies, série informatique. Hermès, 2 edition, 1995. 16
- [75] C. V. Howard and M. G. Reed. *Unbiased Stereology : Three-dimensional Measurement in Microscopy*. Advanced methods. Garland Science, 2 edition, 2005. v, 21, 22
- [76] M. K. Hu. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Transactions on Information Theory*, 8(2) :179–187, 1962. 85
- [77] E. J. Hukkanen and R. D. Braatz. Measurement of particle size distribution in suspension polymerization using in situ laser backscattering. *Sensors and Actuators B : Chemical*, 96(1) :451–459, 2003. 8
- [78] R. Jagnow, J. Dorsey, and H. Rushmeier. Stereological techniques for solid textures. *ACM Transactions on Graphics*, 23(3) :329–335, 2004. v, 22, 23
- [79] R. A. Jarvis. Computing the shape hull of points in the plane. In *Computing Society Conference on Pattern Recognition and Image Processing*, pages 231–241, 1977. 41
- [80] G. Kamberova and R. Bajcsy. Precision in 3-D points reconstructed from stereo. Technical report, University of Pennsylvania, Department of Computer & Information Science, 1997. 16
- [81] C. M. Keck and R. H. Müller. Size analysis of submicron particles by laser diffractometry - 90% of the published measurements are false. *International Journal of Pharmaceutics*, 355(1-2) :150–163, 2008. 8
- [82] J. M. Kemeny. Practical technique for determining the size distribution of blasted benches, waste dumps and heap leach sites. *Mining Engineering*, 46(11) :1281–1284, 1994. 25
- [83] J. M. Kemeny, A. Devgan, R. M. Hagaman, and X. Wu. Analysis of rock fragmentation using digital image processing. *Journal of Geotechnical Engineering*, 119(7) :1144–1160, 1993. 25
- [84] M. Kempkes, J. Eggers, and M. Mazzotti. Measurement of particle size and shape by FBRM and in situ microscopy. *Chemical Engineering Science*, 63(19) :4656–4675, 2008. 25

- [85] M. Kempkes, T. Vetter, and M. Mazzotti. Measurement of 3D particle size distributions by stereoscopic imaging. *Chemical Engineering Science*, 65(4) :1362–1373, 2010. 25
- [86] R. P. King. Determination of the distribution of size of irregularly shaped particles from measurements on sections or projected areas. *Powder Technology*, 32(1) :87–100, 1982. 25
- [87] R. P. King. Measurement of particle size distribution by image analyser. *Powder Technology*, 39(2) :279–289, 1984. 25
- [88] K. H. Knuth. Optimal data-based binning for histograms. *ArXiv Physics e-prints*, 2006. 57, 71
- [89] P. D. Komar and B. Cui. The analysis of grain-size measurements by sieving and settling-tube techniques. *Journal of Sedimentary Research*, 54(2) :603–614, 1984. 5
- [90] A. Kosir and J. Tasic. Pattern spectrum of binary image. In *4th International Conference on Signal Processing (ICSP)*, volume 2, pages 974–977, 1998. 19
- [91] A. V. Kuz'minykh. Recovery of a convex body from the set of its projections. *Siberian Mathematical Journal*, 25(2) :284–288, 1984. 25
- [92] M. J. Labouré, I. Fillère, M. Jourlin, and J. M. Becker. Geometric shape recognition and classification. *Microscopy Microanalysis Microstructures*, 7(5-6) :447–451, 1996. 19
- [93] C. Lacoste, X. Descombes, J. Zerubia, and N. Baghdadi. A bayesian geometric model for line network extraction from satellite images. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2004. 18
- [94] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization*, 9(1) :112–147, 1998. 61
- [95] P. A. Larsen. *Computer Vision and Statistical Estimation Tools for In Situ, Imaging-based Monitoring of Particulate Populations*. PhD thesis, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI, USA, 2007. 25
- [96] P. A. Larsen, J. B. Rawlings, and N. J. Ferrier. An algorithm for analyzing noisy, in situ images of high-aspect-ratio crystals to monitor particle size distribution. *Chemical Engineering Science*, 61(16) :5236–5248, 2006. 9
- [97] P. A. Larsen, J. B. Rawlings, and N. J. Ferrier. Model-based object recognition to measure crystal size and shape distributions from in situ video images. *Chemical Engineering Science*, 62(5) :1430–1441, 2007. v, 25, 26
- [98] A. Laurentini. How far 3D shapes can be understood from 2D silhouettes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2) :188–195, 1995. 17
- [99] M. Li and D. Wilkinson. Determination of non-spherical particle size distribution from chord length measurements. Part 1 : Theoretical analysis. *Chemical Engineering Science*, 60(12) :3251–3265, 2005. 8
- [100] M. Li, D. Wilkinson, and K. Patchigolla. Determination of non-spherical particle size distribution from chord length measurements. Part 2 : Experimental validation. *Chemical Engineering Science*, 60(18) :4992–5003, 2005. 8
- [101] R. F. Li, G. B. Thomson, G. White, X. Z. Wang, J. Calderon de Anda, and K. J. Roberts. Integration of crystal morphology modeling and on-line shape measurement. *AIChE Journal*, 52(6) :2297–2305, 2006. 9

- [102] W. Liang and M. P. Enright. Estimating the probabilistic size and shape distributions of 3D anomalies from sectioning measurements using the stereological unfolding approach. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 134(5), 2012. 23
- [103] C. L. Lin and J. D. Miller. Development of a PC, image-based, on-line particle-size analyzer. *Minerals & Metallurgical Processing*, 10(3) :29–35, 1993. 25
- [104] C. L. Lin, Y. K. Yen, and J. D. Miller. Evaluation of a PC image-based on-line coarse particle size analyzer. *Emerging Computer Techniques For The Minerals Industry*, pages 201–210, 1993. 25
- [105] C. L. Lin, Y. K. Yen, and J. D. Miller. Plant-site evaluations of the OPSA system for on-line particle size measurement from moving belt conveyors. *Minerals Engineering*, 13(8-9) :897–909, 2000. 25
- [106] Y. Liu and Y. Li. Image feature extraction and segmentation using fractal dimension. In *International Conference on Information, Communications and Signal Processing*, volume 2, pages 975–979, 1997. 18
- [107] C. L. Luengo Hendriks, G. M. P. van Kempen, and L. J. van Vliet. Improving the accuracy of isotropic granulometries. *Pattern Recognition Letters*, 28(7) :865–872, 2007. 19
- [108] N. H. Maerz. Reconstructing 3-D block size distributions from 2-D measurements on sections. In *FRAGBLAST 5th Workshop on Measurement of Blast Fragmentation*, pages 39–43, Montreal, Quebec, Canada, 1996. 25
- [109] Y. Maillot, B. Adam, and M. Melkemi. Shape reconstruction from unorganized set of points. In *Image Analysis and Recognition*, volume 6111 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 274–283. Springer Berlin / Heidelberg, 2010. 42, 88
- [110] D. P. Mandal and C. A. Murthy. Selection of alpha for alpha-hull in  $r^2$ . *Pattern Recognition*, 30(10) :1759–1767, 1997. 43
- [111] B. Mandelbrot. *Les objets fractals - forme, hasard et dimension*. Flammarion, 1975. 17
- [112] A. A. Markov. Rasprostranenie zakona bol'shikh chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga. *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete*, 15 :135–156, 1906. 18
- [113] G. Matheron. *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson et Cie, 1967. 18
- [114] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley & Sons Inc, 1975. 18
- [115] K. R. Mecke. Integral geometry in statistical physics. *International journal of modern physics. B*, 12(9) :861–899, 1998. 17
- [116] K. R. Mecke and D. Stoyan. *Statistical physics and spatial statistics*. Springer, 2000. 18
- [117] K. R. Mecke and D. Stoyan. Morphological characterization of point patterns. *Biometrical Journal*, 47(4) :473–488, 2005. 18
- [118] K. Mehnert, J. Ohser, and P. Klimanek. Testing stereological methods for the estimation of spatial size distributions by means of computer-simulated grain structures. *Materials Science and Engineering : A*, 246(1-2) :207–212, 1998. 23
- [119] M. Melkemi. A-shapes of a finite point set. In *30th annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '97, pages 367–369, New York, NY, USA, 1997. 42



- [120] F. Meyer and S. Beucher. Morphological segmentation. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 1(1) :21–46, 1990. 18
- [121] K. Michielsen and H. De Raedt. Integral-geometry morphological image analysis. *Physics Reports*, 347 :461–538, 2001. 17
- [122] E. Mielniczek-Brzóska and K. Sangwal. Study of the growth morphology of ammonium oxalate monohydrate crystals obtained from aqueous solutions. *Crystal Research and Technology*, 30(6) :807–811, 1995. 129
- [123] H. Minkowski. Volumen und oberfläche. *Mathematische Annalen*, 57(4) :447–495, 1903. 17
- [124] G. Monge. *Géométrie descriptive*. Baudouin, 1799. 17
- [125] D. J. Morgan and D. A. Jerram. On estimating crystal shape for crystal size distribution analysis. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 154(1-2) :1–7, 2006. 23
- [126] P. Mougin, A. Thomas, D. Wilkinson, G. White, K. J. Roberts, N. Herrmann, R. Jack, and R. Tweedie. On-line monitoring of a crystallization process. *AIChE Journal*, 49(2) :373–378, 2003. 9
- [127] P. Mougin, D. Wilkinson, K. J. Roberts, R. Jack, and P. Kippax. Sensitivity of particle sizing by ultrasonic attenuation spectroscopy to material properties. *Powder Technology*, 134(3) :243–248, 2003. 9
- [128] L. Najman. *Morphologie mathématique : de la segmentation à l’analyse multivoque*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 1994. 18
- [129] T. M. Nguyen and R. M. Rangayyan. Shape analysis of breast masses in mammograms via the fractal dimension. In *27th Annual International Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 3210–3213, 2005. 18
- [130] W. L. Nicholson and K. R. Merckx. Unfolding particle size distributions. *Technometrics*, 11(4) :707–723, 1969. 21
- [131] J. Ohser and F. Mücklich. Stereology for some classes of polyhedrons. *Advances in Applied Probability*, 27(2) :384–396, 1995. 23
- [132] J. Ohser and M. Nippe. Stereology of cubic particles : various estimators for the size distribution. *Journal of Microscopy*, 187(1) :22–30, 1997. 23
- [133] S. Outal, D. Jeulin, and J. Schleifer. A new method for estimating the 3D-size-distribution-curve of fragmented rocks out of 2D images. *Image Analysis & Stereology*, 27(2) :97–105, 2008. 25
- [134] B. Presles. Caractérisation géométrique et morphologique 3D par analyse d’images 2D de particules lors d’un processus de cristallisation. Journée de la recherche de l’École Doctorale Sciences Ingénierie Santé (EDSIS), 2010.
- [135] B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Caractérisation 3D de particules par stéréologie projective. Journées Rhône-Alpes de quantimétrie cellulaire, 2010.
- [136] B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Volume estimation of 3D crystals by projective stereology. Seminar of the International Society for Stereology (ISS), 2010.
- [137] B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Volume estimation of 3D particles with known convex shapes from its projected areas. In *2nd International Conference*

- on *Image Processing Theory, Tools and Applications (IPTA)*, pages 399–404, Paris, France, 2010. 49, 82
- [138] B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, J. C. Pinoli, and G. Févotte. Caractérisation géométrique de particules lors de leurs cristallisations en solution par analyse d’image *in situ*. In *6th Conference of Crystallisation et Précipitation Industrielles (CRISTAL 6)*, Marseille, France, 2010.
- [139] B. Presles, J. Debayle, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Novel image analysis method for in situ monitoring the particle size distribution of batch crystallization processes. *Journal of Electronic Imaging*, 19(3) :031207, 2010. Special Section on Quality Control by Artificial Vision. xiii, 129
- [140] B. Presles, J. Debayle, Y. Maillot, and J. C. Pinoli. Automatic recognition of 2D shapes from a set of points. In *Image Analysis and Recognition*, volume 6753 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 183–192. Springer Berlin / Heidelberg, 2011. 49, 88
- [141] B. Presles, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Size and shape estimation of 3-D convex objects from their 2-D projections : application to crystallization processes. *Journal of Microscopy*, 2011. Under second revision. 49, 115
- [142] B. Presles, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Stereological shape diagram based descriptor : 3-D convex objects morphological recognition from 2-D projections. *Pattern Recognition*, 2011. Submitted. 49, 97
- [143] B. Presles, J. Debayle, A. Rivoire, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Monitoring the particle size distribution using image analysis during batch crystallization processes. In *9th International Conference on Quality Control by Artificial Vision (QCAV)*, Wels, Austria, 2009. xiii, 129
- [144] B. Presles, J. Debayle, A. Rivoire, J. C. Pinoli, and G. Févotte. In situ particle size measurements during crystallization processes using image analysis. In *12th Conference of Société Française de Génie des Procédés (SFGP)*, Marseille, France, 2009. Keynote Conference. xiii, 129
- [145] C. M. Riley, W. I. Rose, and G. J. S. Bluth. Quantitative shape measurements of distal volcanic ash. *Journal of Geophysical Research*, 108(B10) :2504+, 2003. 19
- [146] S. Rivollier. Analyse spectrale morphologique adaptative d’images. Master’s thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2006. 19
- [147] S. Rivollier, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex sets. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2) :Article 3, 1–27, 2010. xi, 35, 36, 37, 86, 147
- [148] S. Rivollier, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2) :Article 4, 1–21, 2010. xi, 35, 36, 37, 86, 147
- [149] S. Rivollier, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2) :Article 5, 1–18, 2010. xi, 35, 36, 37, 86, 147
- [150] J. C. Russ and R. T. Dehoff. *Practical Stereology*. Kluwer Academic/Plenum, 2nd edition, 2000. 21
- [151] D. L. Sahagian and A. A. Proussevitch. 3D particle size distributions from 2D observations : stereology for natural applications. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 84(3-4) :173–196, 1998. 23

- [152] P. Saint-Marc and M. Richetin. Filtrage structurel d'images grises par analyse des courbures principales des surfaces associées. *Traitement du signal*, 4(5) :411–427, 1987. 17
- [153] S. A. Saltykov. The determination of the size distribution of particles in an opaque material from a measurement of the size distribution of their sections. In *2nd International Congress for Stereology*, pages 163–173, Chicago, USA, 1967. 23
- [154] K. Sangwal, A. Zdyb, D. Chocyk, and E. Mielniczek-Brzóska. Effect of supersaturation and temperature on the growth morphology of ammonium oxalate monohydrate crystals obtained from aqueous solutions. *Crystal Research and Technology*, 31(3) :267–273, 1996. 129
- [155] L. A. Santaló. Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana. *Mathematicae Notae*, 17 :82–104, 1961. 36
- [156] L. A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004. 17, 18, 36
- [157] G. Sapiro. *Geometric partial differential equations and image analysis*. Cambridge University Press, 2001. 17
- [158] D. Sarkar, X. T. Doan, Z. Ying, and R. Srinivasan. In situ particle size estimation for crystallization processes by multivariate image analysis. *Chemical Engineering Science*, 64(1) :9–19, 2009. 9
- [159] S. Sastry, D. S. Corti, P. G. Debenedetti, and F. H. Stillinger. Statistical geometry of particle packings. I. algorithm for exact determination of connectivity, volume, and surface areas of void space in monodisperse and polydisperse sphere packings. *Physical Review E*, 56(5) :5524–5532, 1997. 18
- [160] S. Sastry, P. G. Debenedetti, and F. H. Stillinger. Statistical geometry of particle packings. II. "weak spots" in liquids. *Physical Review E*, 56(5) :5533–5543, 1997. 18
- [161] S. Schetrite and C. Frances. Utilisation de la spectroscopie acoustique pour la caractérisation de suspensions denses. In *11th Conference of Société Française de Génie des Procédés (SFGP)*, Saint-Étienne, France, 2007. 5
- [162] J. Schleifer and B. Tessier. Fragmentation assessment using the FragScan system : Quality of a blast. *Fragblast : International Journal for Blasting and Fragmentation*, 6(3-4) :321–331, 2002. 25
- [163] J. Schmähling. Statistical characterization of technical surface microstructure. Technical report, University of Heidelberg, 2006. 18
- [164] R. Schneider. Integral geometric tools for stochastic geometry. In *Stochastic Geometry*, volume 1892 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 119–184. Springer Berlin / Heidelberg, 2007. 18
- [165] J. Serra. *Introduction à la morphologie mathématique*. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fascicule n° 3, 1969. 18
- [166] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology*, volume 1. Academic Press, 1984. 18
- [167] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology*, volume 2. Academic Press, 1988. 18
- [168] G. J. A. Sevink. Mathematical description of nanostructures with minkowski functionals. In *Nanostructured Soft Matter*, NanoScience and Technology, pages 269–299. Springer Netherlands, 2007. 17

- 
- [169] D. Sharvit, J. Chan, H. Tek, and B. B. Kimia. Symmetry-based indexing of image databases. In *IEEE Workshop on Content-Based Access of Image and Video Libraries*, pages 56–62, Santa Barbara, CA, USA, 1998. 45
- [170] K. Sivakumar and J. I. Goutsias. Discrete morphological size distributions and densities : estimation techniques and applications. *Journal of Electronic Imaging*, 6(1) :31–53, 1997. 19
- [171] C. G. Small. Reconstructing convex bodies from random projected images. *The Canadian Journal of Statistics*, 19(4) :341–347, 1991. 25
- [172] J. Snyman. *Practical Mathematical Optimization : An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms*. Applied Optimization. Springer, 2005. 61, 95, 107
- [173] P. Soille. *Morphological image analysis : principles and applications*. Springer-Verlag, New York, Inc., 2 edition, 2003. 18
- [174] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish, 3rd edition, 1999. 17
- [175] D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. Wiley, 2nd edition, 1996. 18
- [176] M. Tang and H. N. Wang. Feature analysis of brain MRI images based on fractal dimension. In *27th Annual International Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 3245–3248, Shanghai, 2005. 18
- [177] M. Taylor. Using multiple 2D projections to characterize 3D irregular particles. Technical report, Graniterock, 2004. 25
- [178] C. H. Teh and R. T. Chin. On image analysis by the methods of moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(4) :496–513, 1988. 85
- [179] K. Teknomo, G. P. Gerilla, and K. Hokao. Cellular urban descriptors of lowland urban model. In *International Symposium of Lowland Technology*, pages 297–302, Bangkok, 2004. 19
- [180] G. Thibault, C. Devic, B. Fertil, J. Sequeira, and J. L. Mari. Indices de formes : de la 2D vers la 3D. application au classement de noyaux de cellules. In *20èmes journées de l'Association Française d'Informatique Graphique (AFIG)*, pages 17–24, Marne la vallée, France, 2007. 19
- [181] Q. M. Tieng and W. W. Boles. Recognition of 2D object contours using the wavelet transform zero-crossing representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(8) :910–916, 1997. 85
- [182] E. Trettel and R. A. Lotufo. The size-intensity diagram : a gray-scale granulometric analysis tool. In *9th Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens (SIBGRAPI)*, pages 259–264, Caxambu, Brazil, 1996. 19
- [183] E. Trucco and A. Verri. *Introductory techniques for 3-D computer vision*. Prentice Hall, 1998. 11
- [184] C. S. Tzafestas and P. Maragos. Shape connectivity : multiscale analysis and application to generalized granulometries. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 17(2) :109–129, 2002. 19
- [185] E. E. Underwood. *Quantitative stereology*. Addison-Wesley, 1970. 21, 117

- [186] E. E. Underwood. The stereology of projected images. *Journal of Microscopy*, 95(1) :25–44, 1972. 23, 117
- [187] A. Ung. *Cartographie de la pollution atmosphérique en milieu urbain à l'aide de données multi-sources*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 2003. 19
- [188] E. R. Urbach, J. B. T. M. Roerdink, and M. H. F. Wilkinson. Connected shape-size pattern spectra for rotation and scale-invariant classification of gray-scale images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(2) :272–285, 2007. 19
- [189] G. Vallebuona, K. Arbuero, and A. Casali. A procedure to estimate weight particle distributions from area measurements. *Minerals Engineering*, 16(4) :323–329, 2003. 25
- [190] G. T. Vickers. The projected areas of ellipsoids and cylinders. *Powder Technology*, 86(2) :195–200, 1996. 25, 56
- [191] G. T. Vickers and D. J. Brown. The distribution of projected area and perimeter of convex, solid particles. In *Royal Society of London Series A*, volume 457, pages 283–306, 2001. xi, 25, 56, 81
- [192] E. Villa. Specific area and mean surface density of inhomogeneous boolean models. In *10th European Congress of Stereology and Image Analysis*, 2009. 18
- [193] L. Vincent and E. R. Dougherty. Morphological segmentation for textures and particles. In *Digital Image Processing Methods*, chapter 2, pages 43–102. Marcel-Dekker, New York, 1994. 19
- [194] C. von Ehrenfels. über gestaltqualitäten. *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 14 :242–292, 1890. 43
- [195] J. Wan, C. Y. Ma, and X. Z. Wang. A method for analyzing on-line video images of crystallization at high-solid concentrations. *Particuology*, 6(1) :9–15, 2008. 9
- [196] X. Z. Wang, J. Calderon de Anda, and K. J. Roberts. Real-time measurement of the growth rates of individual crystal facets using imaging and image analysis : A feasibility study on needle-shaped crystals of l-glutamic acid. *Chemical Engineering Research and Design*, 85(7) :921–927, 2007. 9
- [197] X. Z. Wang, J. Calderon de Anda, K. J. Roberts, R. F. Li, G. B. Thomson, and G. White. Advances in on-line monitoring and control of the morphological and polymorphic forms of organic crystals grown from solution. *KONA : Powders and Particle*, (23) :69–85, 2005. 9
- [198] M. Wertheimer. Untersuchungen zur lehre von der gestalt. I. *Psychological Research*, 1(1) :47–58, 1922. 43
- [199] M. Wertheimer. Untersuchungen zur lehre von der gestalt. II. *Psychological Research*, 4(1) :301–350, 1923. 43
- [200] M. Wertheimer. *A sourcebook of Gestalt Psychology*, chapter Laws of Organization in Perceptual Forms (partial translation), pages 71–88. Hartcourt, B., 1938. 43
- [201] J. Worlitschek, T. Hocker, and M. Mazzotti. Restoration of PSD from chord length distribution data using the method of projections onto convex sets. *Particle & Particle Systems Characterization*, 22(2) :81–98, 2005. 8
- [202] R. Xu and O. A. Di Guida. Comparison of sizing small particles using different technologies. *Powder Technology*, 132(2-3) :145–153, 2003. 5

- [203] Y. H. Xu and H. C. Pitot. An improved stereologic method for three-dimensional estimation of particle size distribution from observations in two dimensions and its application. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 72(1) :1–20, 2003. 23
- [204] A. Yilmaz, O. Javed, and M. Shah. Object tracking : A survey. *ACM Computing Surveys*, 38(4) :1–45, 2006. 129
- [205] D. Zhang and G. Lu. A comparative study on shape retrieval using fourier descriptors with different shape signatures. In *International Conference on Intelligent Multimedia and Distance Education (ICIMADE01)*, pages 1–9, Fargo, ND, USA, 2001. 85
- [206] D. Zhang and G. Lu. Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*, 37(1) :1–19, 2004. 85
- [207] Y. Zhou, X. T. Doan, and R. Srinivasan. Real-time imaging and product quality characterization for control of particulate processes. In *16th European Symposium on Computer Aided Process Engineering and 9th International Symposium on Process Systems Engineering*, volume 21 of *Computer Aided Chemical Engineering*, pages 775–780. Elsevier, 2006. 9
- [208] Y. Zhou, R. Srinivasan, and S. Lakshminarayanan. Critical evaluation of image processing approaches for real-time crystal size measurements. *Computers & Chemical Engineering*, 33(5) :1022–1035, 2009. 9, 18



Benoît PRESLES

**3-D GEOMETRICAL AND MORPHOMETRICAL CHARACTERIZATION FROM  
2-D IMAGES OF DYNAMIC DISTRIBUTIONS OF ANISOTROPIC CONVEX  
PARTICLES**

**Application to crystallization processes.**

**Speciality:** Image, Vision, Signal

**Keywords:** Crystallization; Geometrical functional; Maximum likelihood; Minkowski; Morphometrical functional; Probability density function; Projective stereology; Shape diagram.

**Abstract:** Solution crystallization processes are widely used in the process industry and notably in the pharmaceutical industry as separation and purification operations and are expected to produce solids with desirable properties. The properties concerning more particularly the size and the shape of crystals are known to have a considerable impact on the final quality of products (*i.e.* bioavailability, stability during storage, ease of processing, etc.). Hence, it is of main importance to be able to determine in real time the granulometry of the crystals in order to modify, if necessary, the operative parameters of the crystallization process to get the expected crystal geometry (shape, size of the particles, etc.).

By using an *in situ* camera, it is possible to visualize in real time the particles crystallizing in the suspension. More specifically, the camera enables to acquire video sequences of two-dimensional (2-D) projections of three-dimensional (3-D) particles. The projection of a 3-D object on a 2-D plane necessarily involves a loss of information. Moreover, several distinct 3-D objects can have the same 2-D projection. Determining the size and the shape of a 3-D object from its 2-D projections is therefore not easy. This is the main goal of this PhD work: to set up efficient and generic methods allowing to characterize geometrically and morphometrically 3-D objects from their 2-D projections.

First of all, a method based on the maximum likelihood estimation of the probability density functions of projected geometrical measurements (area, perimeter) has been developed to estimate the "size" of 3-D convex objects. Then, a stereological shape descriptor based on shape diagrams has been proposed and his properties have been studied. It enables to characterize the "shape" of a 3-D convex object independently of its "size" and has notably been used to estimate the value of the anisotropy factors (shape ratios) of the 3-D convex objects. At last, a combination of the two previous studies has allowed to estimate both the "size" and the "shape" of the 3-D convex objects. This method called "Stereological Size and Shape Estimator" (*3SE*) has been validated using simulated data and has moreover been compared to a classical projective stereological method.

The proposed *3SE* method has provided an answer to the initial pharmaceutical problematic, *i.e.* determining the granulometry (shape and size) of particles being produced during a crystallization process. More particularly, the method has been used to estimate size distributions of ammonium oxalate particles crystallizing in water. These distributions have been compared to those calculated by a 2-D image processing method and the ones measured by the Coulter counter.



# ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

NNT : 2011 EMSE 0632

Benoît PRESLES

## CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE ET MORPHOMÉTRIQUE 3-D PAR ANALYSE D'IMAGES 2-D DE DISTRIBUTIONS DYNAMIQUES DE PARTICULES CONVEXES ANISOTROPES

**Application aux processus de cristallisation.**

**Spécialité :** Image, Vision, Signal

**Mots-clefs :** Cristallisation, Densité de probabilité, Diagramme de forme, Fonctionnelle géométrique, Fonctionnelle morphométrique, Maximum de vraisemblance, Minkowski, Stéréologie projective.

**Résumé :** La cristallisation en solution est un procédé largement utilisé dans l'industrie et notamment dans l'industrie pharmaceutique comme opération de séparation et de purification qui a pour but de produire des solides avec des propriétés spécifiques. Les propriétés concernant plus particulièrement la taille et la forme des cristaux sont connues pour avoir un impact considérable sur la qualité finale des produits. C'est pourquoi, il est primordial d'être capable de déterminer en temps réel la distribution granulométrique des cristaux en formation, pour pouvoir, si besoin est, modifier les paramètres opératoires permettant d'obtenir la géométrie cristalline désirée (forme, taille des particules, etc.).

En utilisant une caméra *in situ*, il est possible de visualiser en temps réel les particules présentes dans la suspension. Plus précisément, la caméra permet l'acquisition de séquences vidéos en deux dimensions (2-D) de projections de particules en trois dimensions (3-D). La projection d'un objet 3-D sur un plan 2-D entraîne nécessairement une perte d'informations. De plus, plusieurs objets 3-D distincts peuvent avoir la même projection 2-D. Déterminer la taille et la forme d'un objet 3-D à partir d'une ou plusieurs de ses projections 2-D n'est donc pas aisé. C'est tout l'enjeu de ce travail de thèse : mettre en place des méthodes génériques et efficaces permettant de caractériser géométriquement et morphométriquement des objets 3-D à partir de leurs projections 2-D.

Tout d'abord, une méthode basée sur le maximum de vraisemblance des fonctions de densité de probabilité de mesures géométriques projetées (aire, périmètre) a été développée afin de déterminer la « taille » d'objets 3-D convexes. Ensuite, un descripteur de forme stéréologique basé sur les diagrammes de forme a été proposé et ses propriétés ont été étudiées. Il permet de caractériser la « forme » d'un objet 3-D convexe indépendamment de sa « taille » et a notamment été utilisé afin de déterminer les facteurs d'anisotropie des objets 3-D convexes considérés. Enfin, une combinaison des deux études réalisées précédemment a permis d'estimer à la fois la « taille » et la « forme » des objets 3-D convexes. Cette méthode baptisée « Stereological Size and Shape Estimator » (3SE) a été validée grâce à des simulations et a, de plus, été comparée à une méthode de stéréologie projective classique.

La méthode 3SE proposée a permis d'apporter une réponse à la problématique pharmaceutique initiale : déterminer la distribution granulométrique (taille et forme) au cours du temps de particules se formant lors d'un processus de cristallisation. Plus particulièrement, elle a été utilisée pour estimer des distributions de taille de particules d'oxalate d'ammonium. Ces distributions ont été comparées à celles calculées par une méthode d'analyse d'image dite 2-D et à celles mesurées grâce au compteur Coulter.