



HAL
open science

Inégalités de Landau-Kolmogorov dans des espaces de Sobolev

Lamia Abbas

► **To cite this version:**

Lamia Abbas. Inégalités de Landau-Kolmogorov dans des espaces de Sobolev. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Rouen, 2012. Français. NNT : 2012ISAM0013 . tel-00776349

HAL Id: tel-00776349

<https://theses.hal.science/tel-00776349>

Submitted on 15 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen

Discipline : Mathématiques appliquées

Spécialité : Analyse numérique

présentée par

LAMIA ABBAS

Sujet :

INÉGALITÉS DE LANDAU-KOLMOGOROV DANS DES ESPACES DE
SOBOLEV.

Soutenue le 18 juillet 2012

Composition du Jury :

Bernhard BECKERMANN	Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille,
Claude BREZINSKI	Professeur émérite, Université de Lille 1,
Annie CUYT	Professeur Universiteit Antwerpen,
André DRAUX	Professeur émérite à l'INSA de Rouen, Directeur de thèse,
Bernard GLEYSE	Maitre de conférence à l'INSA de Rouen,
Christian GOUT	Professeur à l'INSA de Rouen,

Thèse préparée à l'INSA de Rouen
Laboratoire de Mathématiques de l'INSA, EA 3226.

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse Professeur André DRAUX, pour m'avoir conseillée, encouragée et soutenue tout au long de la thèse avec patience et disponibilité, et pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Christian Gout, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse de doctorat, pour l'intérêt et le soutien chaleureux et indéfectible dont il a toujours fait preuve.

Mes plus sincères remerciements vont également aux Professeurs Annie CUYT et Claude BREZINSKI, qui ont accepté de juger ce travail et d'en être rapporteurs, ainsi qu'au Professeur Bernhard BECKERMANN et au Docteur Bernard GLEYSE pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier l'ancien directeur du LMI, Professeur Witold RESPONDEK, et le directeur du département Génie Mathématiques, Professeur Erik LENGART, pour leur accueil. Les sept années que j'ai passé à l'INSA de Rouen entre ces deux structures ont été riches en enseignements, aussi bien sur le plan scientifique que humain.

Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontré au Laboratoire de Mathématique de L'INSA de Rouen. Merci pour votre support et vos encouragements. Je pense particulièrement à Bruno et Rachida qui ont pris le temps d'écouter mon exposé et m'ont donné de précieux conseils, Carole qui m'a toujours encouragé et écouter, Omar et Thierry que je n'ai cessé d'embêter avec mes soucis informatiques et autres, Jean-Guy, Arnaud et Adel pour leur gentillesse et leur amitié. Je ne saurais terminer sans remercier Brigitte et Sandra dont la contribution au bon déroulement de mon travail est non négligeable.

Je remercie aussi tous mes amis, doctorants ou stagiaire du LMI : Benoit, Khaled, Mohamed, André, Imed, Nga, Son, Manh, Mamadou, Florentina, Niu ..., mes amis doc-

torants du Coria : Driss, Ouissem, Memdouh, Zakaria, Said, Lisa, Cherifa, Dounia ...
Merci pour les bons (ou moins bons) moments partagés, grâce à vous tous le chemin
semblait moins long et moins épineux.

Je remercie infiniment Malika Idrissi qui fut présente à mes côtés depuis mon pre-
mier jour à Rouen, et mes amies khadidja et Amel qui ont eu la patience de me supporter.

Merci enfin à ma famille, pour son soutien et ses encouragements. Cette thèse aboutis-
sment de longues années d'études, je la dois beaucoup à tous les membres de ma famille.
Il m'est impossible de trouver les mots pour dire à quel point je leur suis reconnaissante
et combien je les aime. Cette thèse leur ai dédiée.

Table des matières

Remerciements	1
Notations	5
Introduction	7
1 Inégalités polynomiales	11
1.1 Rappels	11
1.1.1 Les polynômes orthogonaux standards	11
1.1.2 Les polynômes orthogonaux classiques	13
1.2 Inégalités polynomiales	15
1.2.1 Les inégalités de Markov-Bernstein	15
1.2.2 Les inégalités de Landau-Kolmogorov	19
2 Inégalités à une variable	27
2.1 Préliminaires	27
2.2 Cas de $N + 1$ Normes ($I^0 = \emptyset$)	37
2.3 Cas général : r normes parmi N	46
2.3.1 Propriétés générales	46
2.3.2 Inégalités faisant intervenir $r + 1$ normes, $r \geq 2$ pair	56
2.3.3 Inégalités faisant intervenir $r + 1$ normes, r impair, $3 \leq r \leq N$	65
2.4 Les constantes dans le cas $N = 5$	75
2.5 Exemples d'application des inégalités de Landau-Kolmogorov	80
2.6 Problèmes ouverts	83
3 Inégalités en plusieurs variables	87
3.1 Préliminaires	87
3.2 Inégalités de Markov-Bernstein	96
3.3 Inégalités de Landau-Kolmogorov dans le cas Hermite et Laguerre-Sonin	100
3.3.1 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $p \in \mathcal{Q}_r$	105
3.3.2 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $p \in \mathcal{P}_{ r }$	115
3.3.3 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov dans $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, \nu \leq N)$, avec $N = 2$	134
3.4 Inégalités de type Landau-Kolmogorov dans le cas Jacobi	139

3.4.1	Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $p \in \mathcal{Q}_r$	139
3.5	Problèmes ouverts	151
3.5.1	Les inégalités de Markov-Bernstein dans le cas non homogène . . .	151
3.5.2	Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $N > 2$ dans le cas Hermite et Laguerre-Sonin	153
3.5.3	La mesure de Jacobi	158
3.5.4	Autres problèmes	158
Bibliographie		162

Notations

- $(a)_j$ est le symbole du Pochhammer défini par : $(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1)$.
 - $L^2(\Omega, \mu)$, l'espace de Hilbert des fonctions réelles de carré intégrable sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ pour la mesure de Borel μ positive sur Ω .
 - $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|$.
 - $\|f\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.
 - En une variable
 - \mathcal{P} : l'espace vectoriel des polynômes réels à une variable.
 - \mathcal{P}_n : l'espace vectoriel des polynômes réels à une variable de degré au plus égal à n .
 - $f^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de f .
 - En s variables
 - Pour tout élément $n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$, $|n| = \sum_{j=1}^s n_j$.
 - \mathcal{P}^s est l'espace des polynômes réels à s variables.
- Pour $r = (r_1, \dots, r_s) \in \mathbb{N}^s$,
- $\mathcal{P}_{|r|}$ est l'espace des polynômes réels à s variables de degré total au plus $|r|$.
 - \mathcal{Q}_r est l'espace vectoriel des polynômes réels à s variables de degré au plus égal à r_j par rapport à la variable x_j , $j = 1, \dots, s$.
 - pour $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s)$ de \mathbb{N}^s

$$\partial^\nu p = \frac{\partial^{|\nu|} p}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_s^{\nu_s}}.$$

Introduction

Dans la théorie de l'approximation les inégalités dans les espaces de Sobolev sont d'une grande importance, notamment pour certaines démonstrations ou pour des méthodes de calcul variationnel. L'une des inégalités les plus importantes est celle de Poincaré :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ un domaine borné dans, au moins, une direction. on définit les espaces de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \mid u^{(m)} \in L^2(\Omega; \mu_m), m = 0, 1 \right\}, \quad (1)$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma} = 0 \right\}, \quad (2)$$

où Γ est la frontière de Ω .

Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de la géométrie de Ω , telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{j=1}^s \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autres inégalités importantes font intervenir des polynômes et leur dérivées. Les plus célèbres sont celles de Markov-Bernstein. Elles connaissent un énorme intérêt depuis plus d'un siècle et des généralisations sont constamment proposées. Une seconde famille d'inégalités polynomiales concernent les inégalités de Landau-Kolmogorov qui font intervenir plus d'une norme et peuvent être étendues à des fonctions d'espaces de Sobolev.

Ce sont ces dernières inégalités qui nous ont le plus intéressé pour ce travail. Comme nous allons le développer dans la partie suivante, plusieurs auteurs les ont étudiées depuis presque un siècle, mais beaucoup de problèmes demeurent sans solution. Dans cette thèse nous nous sommes intéressés uniquement aux inégalités en norme L^2 qui sont très utiles mais aussi très difficiles à étudier. Pour cette raison nous avons commencé par chercher les polynômes extrémaux liés aux inégalités faisant intervenir les normes utilisées par Milovanović [6] et Dimitrov [7]-[8] qui semblaient assez simples et étroitement liées aux cas d'Hermite. Nous avons étudié des inégalités faisant intervenir un nombre quelconque de normes de dérivées, c'est-à-dire des inégalités de la forme :

$$\|p\|_{L^2(\Omega, \mu_0)}^2 + \sum_{i \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_i \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega, \mu_i)}^2 \geq \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i) \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega, \mu_i)}^2, \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad (3)$$

où $I^+ = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i > 0\}$, $I^- = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i < 0\}$, I^+ et $I^- \subset \{1, 2, \dots, N-1\}$ avec $N \geq 2$ et $\lambda_N > 0$.

La démarche utilisée consiste à étudier la positivité d'une certaine forme bilinéaire. Les bases de ce travail sont dans [15] et [16] où Draux et El Hami caractérisent les domaines où cette forme bilinéaire est positive pour les mesures qui nous intéressent, car c'est la frontière de ces domaines qui nous donne les meilleures constantes λ_i . Néanmoins leur étude est assez générale et ne dit pas comment on fait pour trouver le domaine exact, ni à quelles règles obéissent les ensembles d'entiers I^+ et I^- qui donnent la forme générale de nos inégalités.

Dans ce mémoire de thèse nous allons essayer de répondre à ces questions. Il se compose de trois chapitres :

Chapitre 1. Dans le premier chapitre nous rappelons les définitions et les propriétés habituelles des suites de polynômes orthogonaux, ce qui nous permet d'introduire nos notations. Ensuite, nous faisons une synthèse des résultats les plus importants concernant les inégalités polynomiales.

Nous commençons par les inégalités de Markov-Bernstein en une et plusieurs variables, en privilégiant celles qui font intervenir la norme L^2 pour les mesures qui nous intéressent. On termine ce chapitre par une grande partie consacrée aux inégalités de Landau-Kolmogorov qui sont l'objet de la quasi totalité de cette thèse. Là aussi, nous nous focalisons sur les inégalités en norme L^2 . Toutes les inégalités de type Landau-Kolmogorov citées sont en une variable, car nous n'avons pas trouvé de références qui les généralisent aux polynômes en plusieurs variables.

Cette synthèse est faite en respectant l'enchaînement historique pour montrer l'intérêt grandissant aux inégalités polynomiales, en particulier après la traduction des articles originaux ([36], [38] et [10] pour les inégalités de Markov-Bernstein et [33] et [27] pour les inégalités de Landau-Kolmogorov).

Chapitre 2. Le deuxième chapitre est consacré aux inégalités de type Landau-Kolmogorov en norme L^2 pour les polynômes en une seule variable réelle. Les mesures utilisées sont celles d'Hermite, de Laguerre-Sonin et de Jacobi mais en considérant des normes qui rendent ces deux derniers cas étroitement liés à celui d'Hermite et donc leur étude est très similaire.

Nous commençons ce chapitre par montrer quelques propriétés nécessaires à nos développements et rappeler les résultats importants de [15] et [16] qui permettent de caractériser le domaine \bar{D} où une certaine forme bilinéaire est positive. Il est obtenu par l'intersection d'hyperplans \mathcal{H}_i . Cette partie permet aussi de comprendre nos choix pour la méthode et les mesures utilisées. Nous avons commencé notre étude par le cas particulier où $I^0 = \emptyset$, i.e. le cas où les normes de toutes les dérivées jusqu'à l'ordre N

sont présentes ($N + 1$ normes). Nous proposons deux démonstrations pour le Théorème 2.2.1 qui donne le signe des composantes des points d'intersection des hyperplans \mathcal{H}_i , nous montrons un deuxième théorème qui avec le premier nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir des points sur la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$.

Ensuite, nous considérons le cas général où on prend r normes parmi celles des N dérivées d'un polynôme. Nous montrerons les propriétés sur lesquelles sont basés tous les résultats de ce chapitre. Pour définir la frontière du domaine $\bar{\mathcal{D}}$, nous distinguerons deux cas selon la parité de r . Pour chaque cas nous étudierons un exemple en détail. Pour $r = 2$ nous comparons nos résultats avec ceux déjà connus dans la littérature (par exemple les inégalités de Bojanov et Varma [12] et celles de Agarwal et Milovanović [6]). Nous donnons les meilleures constantes pour toutes les inégalités possibles quand $N = 5$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin. Nous proposons également un exemple d'application de ces inégalités dans l'étude de la V-ellipticité d'une forme bilinéaire. Pour clore cette partie, nous dressons une liste, non exhaustive, des problèmes liés à ces inégalités qui restent ouverts.

Chapitre 3. Le dernier chapitre est dédié aux inégalités de Markov-Bernstein et Landau-Kolmogorov faisant intervenir des polynômes de plusieurs variables. Nous utiliserons pour cela le produit tensoriel des espaces L^2 en une variable et nous considérons uniquement le cas $N = 2$.

Nous commençons par définir nos notations et démontrer quelques propriétés équivalentes à celles connues en une variable. Nous nous intéressons dans un premier lieu aux inégalités de Markov-Bernstein, dont les meilleures constantes demeurent inconnues outre le cas très simple de la mesure d'Hermite et ce malgré leur simplicité, du moins pour les normes considérées. Au départ, nous avons cru pouvoir nous inspirer de ce qui a été fait en une variable pour étendre ces inégalités mais la démarche s'est avérée complètement différente et les constantes dépendent de l'espace vectoriel considéré.

Dans le cas des mesures d'Hermite et Laguerre-Sonin nous donnons la frontière exacte du domaine $\bar{\mathcal{D}}$ ce qui nous permet d'étendre les inégalités à toutes les fonctions d'un certain espace de Sobolev en montrant que la suite des polynômes orthogonaux est totale dans cet espace. Pour le cas de la mesure de Jacobi, c'était plus compliqué et nous n'avons pu résoudre le problème que pour les polynômes de degré fixé par rapport à chaque variable ce qui ne nous permet pas d'avoir $\bar{\mathcal{D}}$ et donc l'inégalité pour des fonctions. Nous terminons cette partie par quelques résultats partiels qui peuvent orienter de futures recherches.

Chapitre 1

Inégalités polynomiales

1.1 Rappels

1.1.1 Les polynômes orthogonaux standards

Soit $L^2(\Omega, \mu)$, l'espace de Hilbert des fonctions réelles de carré intégrable sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ pour la mesure de Borel μ positive sur Ω .

Définition 1.1.1 On définit c , forme linéaire sur $L^2(\Omega, \mu)$ à valeur dans \mathbb{R} par :

$$c(f) = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \quad \forall f \in L^2(\Omega, \mu) \quad (1.1)$$

Définition 1.1.2 On a les définitions suivantes :

- i) La forme c est dite quasi-définie sur son support $\Omega \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si, $c(p(x)) \neq 0$ pour tout polynôme réel $p(x)$ non négatif sur Ω et non identiquement nul sur Ω .
- ii) La forme c est dite définie positive sur son support $\Omega \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si, $c(p(x)) > 0$ pour tout polynôme réel $p(x)$ non négatif sur Ω et non identiquement nul sur Ω .

Définition 1.1.3 [13] La suite de polynômes $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ est orthogonale par rapport à la forme linéaire c , si elle satisfait les conditions suivantes $\forall n, m \in \mathbb{N}$

1. $P_n(x)$ est un polynôme de degré n .
2. $c(P_n(x)P_m(x)) = 0$ si $n \neq m$.
3. $c(P_n^2(x)) \neq 0$.

On choisit de normaliser le coefficient de tête que l'on prendra égal à 1.

Nous donnons brièvement les propriétés générales satisfaites par une suite de polynômes orthogonaux que l'on peut trouver dans [13] ou [53].

Théorème 1.1.4 Relation de récurrence à trois termes

Soit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux unitaires associée à la forme linéaire c définie comme dans (1.1). Alors $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad \forall n > 0 \quad (1.2)$$

avec : $P_{-1}(x) = 0$ et $P_0(x) = 1$.

Si c est quasi définie, alors $\gamma_n \neq 0$, et si c est définie positive, alors $\gamma_n > 0$.

La réciproque a été démontrée par Favard en 1935

Théorème 1.1.5 Théorème de Favard-Shohat

Soient $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ deux suites arbitraires de réels et soit $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ la famille de polynômes définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (x - \beta_n)P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), & \forall n > 0, \\ P_{-1}(x) &= 0, & P_0(x) = 1. \end{aligned}$$

Alors, il existe une forme linéaire $c : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par ses moments $c_i = c(x^i)$ unique dès que l'on fixe $c_0 \neq 0$. Cette forme est telle que $c(P_n(x)P_m(x)) = 0$ si $n \neq m$, c'est-à-dire, les polynômes $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ sont orthogonaux par rapport à c .

Si $c(1) = \gamma_0 \neq 0$, alors c est quasi-définie, et elle est définie positive si $\gamma_n > 0$.

Définition 1.1.6 Le noyau reproduisant associé à la suite $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$, de polynômes orthogonaux par rapport à une forme linéaire c , est le polynôme à deux variables $K_n(x, y)$, défini par :

$$K_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \frac{P_i(x)P_i(y)}{c(P_i^2(x))} \quad (1.3)$$

Proposition 1.1.7 Propriété de reproduction du noyau

Pour tout polynôme $p \in \mathcal{P}_n$, le noyau reproduisant $K_n(x, y)$ associé à la suite $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$, de polynômes orthogonaux par rapport à la forme c , vérifie la propriété suivante :

$$c(K_n(x, y)p(x)) = p(y) \quad (1.4)$$

Proposition 1.1.8 Identité de Christoffel-Darboux

Le noyau reproduisant $K_n(x, y)$ associé à la suite de polynômes orthogonaux unitaires $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ vérifie l'identité suivante :

$$(x - y)K_n(x, y) = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{c(P_n^2(x))} \quad (1.5)$$

Corollaire 1.1.9 La forme confluyente

La forme confluyente de la relation de Christoffel-Darboux est :

$$K_n(x, y) = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{c(P_n^2(x))} \quad (1.6)$$

Si la forme c est définie positive, alors on peut décrire le comportement des racines du $n^{\text{ème}}$ polynôme orthogonal $P_n(x)$.

Théorème 1.1.10 Propriété d'entrelacement des racines

Si c est définie positive, alors les racines du $n^{\text{ème}}$ polynôme orthogonal sont toutes réelles, distinctes et localisées à l'intérieur de Ω , le support de c .

En plus, les racines de $P_n(x)$ sont séparées par celles de $P_{n-1}(x)$.

1.1.2 Les polynômes orthogonaux classiques

Les familles des polynômes orthogonaux les plus étudiées dans la littérature sont celles des "classiques". Ils sont "classiques" car leurs dérivées sont orthogonales par rapport à la même famille de mesure.

Nous résumons dans le tableau suivant les propriétés des polynômes orthogonaux classiques qui nous intéressent. Nous donnons les notations habituelles que nous allons respecter tout au long de ce travail, leur support Ω , l'expression des mesures et les restrictions qu'il peut y avoir [4].

Nom	Hermite	Laguerre-Sonin	Jacobi
$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^\alpha(x)$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$
Ω	$] -\infty, +\infty[$	$[0, +\infty[$	$[-1, 1]$
$\mu(x)$	e^{-x^2}	$x^\alpha e^{-x}$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
Restriction		$\alpha > -1$	$\alpha, \beta > -1$

Tableau 1

Proposition 1.1.11 Équation de Pearson

Soit $\mu(x)$ une mesure de Borel positive et Ω son support. Si $\mu(x)$ est classique, alors elle satisfait l'équation différentielle suivante :

$$D(\Phi\mu) = \Psi\mu \tag{1.7}$$

où D est l'opérateur différentiel, Φ est un polynôme de degré ≤ 2 et Ψ est un polynôme de degré 1.

Dans le tableau suivant nous donnons l'expression de ces polynômes dans le cas des mesures d'Hermite, de Laguerre-Sonin et de Jacobi [4].

Nom	Hermite	Laguerre-Sonin	Jacobi
$\Phi(x)$	1	x	$1 - x^2$
$\Psi(x)$	$-2x$	$(\alpha + 1) - x$	$(\beta - \alpha) - (\alpha + \beta + 2)x$

Tableau 2

La notion d'orthogonalité a été affaiblie en la notion de quasi-orthogonalité par Shohat [51] et celle de pseudo-orthogonalité par Dupuy [21] (pour plus de détails voir [45]).

Définition 1.1.12 Soit c le produit scalaire habituel dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega; \mu)$. Soient $R_n(x)$ et $R_m(x)$ deux polynômes à coefficients réels de degrés respectifs n et m .

On définit les trois notions suivantes :

- $R_n(x)$ et $R_m(x)$ sont quasi-orthogonaux si $c(R_m, R_n) = 0 \quad |n - m| > 1$,
- $R_n(x)$ et $R_m(x)$ sont quasi-orthogonaux d'ordre k si $c(R_m, R_n) = 0 \quad |n - m| > k$,
- $R_n(x)$ et $R_m(x)$ sont pseudo-orthogonaux si $c(R_m, R_n) = 0 \quad |n - m| \neq 2$ et $|n - m| \neq 0$.

Ces notions permettent de définir de nouvelles familles qui généralisent les familles classiques et qui satisfont des propriétés de quasi ou pseudo orthogonalité. Ces familles forment des bases qui peuvent être plus intéressantes que celles des polynômes orthogonaux classiques dans certains cas.

D'autres auteurs se sont intéressés à classer les polynômes. Nous citons principalement P. Maroni [40] qui parle des polynômes de classe s .

1.2 Inégalités polynomiales

Les inégalités faisant intervenir un polynôme et ses dérivées constituent un outil fondamental dans la théorie de l'approximation. En effet, plusieurs démonstrations sont basées sur ce genre d'inégalités et les problèmes extrémaux qui leurs sont liés. Ceci explique l'intérêt que l'on porte à ces questions depuis plus d'un siècle.

Les plus célèbres inégalités polynomiales sont celles de Markov-Bernstein, qui ont connu une effervescence particulière ce dernier siècle et elles continuent à susciter l'intérêt de plusieurs mathématiciens qui proposent à chaque fois de nouvelles généralisations, sans oublier le grand nombre de problèmes intéressants et importants qui restent toujours non résolus.

Il existe un autre type d'inégalités polynomiales aussi intéressantes que celles de Markov-Bernstein. Il s'agit des analogues polynomiaux des inégalités de type Landau-Kolmogorov, qui débouchent elles aussi sur des problèmes importants et leurs applications sont diverses. D'où l'intérêt que leurs portent beaucoup d'auteurs.

Nous allons faire une synthèse des résultats les plus importants concernant ces deux familles d'inégalités. Nous porterons un intérêt particulier à celles qui font intervenir la norme L^2 pour les mesures qui nous intéressent.

1.2.1 Les inégalités de Markov-Bernstein

Une inégalité de Markov-Bernstein est définie par

$$\|p^{(k)}\| \leq M_{n,k} \|p\|, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad (1.8)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathcal{P}_n et $M_{n,k}$ est une constante qui dépend de n et k . La plus petite valeur possible de $M_{n,k}$ est appelée la constante de Markov-Bernstein.

Pour trouver l'origine de ces inégalités, il faut remonter au 19^{ème} siècle quand le très célèbre chimiste russe Mendeleïev se posait des questions sur le comportement de ses courbes [41]. Son problème se traduit mathématiquement par :

Si $p(x)$ est un polynôme quadratique arbitraire défini sur l'intervalle $[a, b]$ tel que

$$\max_{a \leq x \leq b} p(x) - \min_{a \leq x \leq b} p(x) = L,$$

alors quelle largeur pourrait avoir $p'(x)$, la dérivée de $p(x)$, sur $[a, b]$?

En 1889, Andrei Markov traite le problème dans son article "On a question by D. I. Mendeleïev" [36], et donne l'inégalité 1.8 pour $k = 1$:

$$\|p'\|_{L^\infty([-1,1])} \leq n^2 \|p\|_{L^\infty([-1,1])}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$$

$M_n = n^2$ est la plus petite constante, l'égalité est atteinte pour $p = cT_n$, où $c \in \mathbb{R}$ et T_n est le polynôme de Chebyshev de première espèce de degré n .

Vladimir Markov, le jeune frère d'Andrei, étend ce résultat à des ordres de dérivation plus élevés et publie en 1892 [38] l'inégalité suivante :

$$\|p^{(k)}\|_{L^\infty([-1,1])} \leq \frac{1}{(2k-1)!} \prod_{i=0}^{k-1} (n^2 - i^2) \|p\|_{L^\infty([-1,1])}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

C'est S. N. Bernstein qui découvre et popularise les articles des Markov en 1912 [10] et démontre l'inégalité pour la norme du maximum sur le disque unité du plan complexe, $\|p\| = \max_{|z| \leq 1} |p(z)|$. Il trouve :

$$\|p'\| \leq n\|p\|, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n.$$

L'égalité est atteinte pour $p(z) = cz^n$, où $c \in \mathbb{R}$.

En 1916, Bernstein organise une traduction en allemand de la preuve de V. Markov, mais il faut attendre 1961 [24] pour avoir un exposé en anglais de cette preuve et 2002 pour avoir la traduction de l'article de A. Markov concernant le cas $k = 1$. La barrière de la langue, a rendu les articles des Markov parmi les plus cités et les moins lus (ceci est aussi le cas des problèmes de Landau-kolmogorov qui ont été abordés initialement par des russes).

Les inégalités de Markov-Bernstein ont suscité un grand engouement chez les mathématiciens et en particulier les spécialistes de la théorie de l'approximation, une douzaine de preuves différentes ont été proposées [48] et des centaines de généralisations, dans plusieurs sens, sont faites (voir [43] pour plus de développements).

Nous nous limitons à donner les plus importants résultats sur les inégalités qui font intervenir la norme L^2 pour les mesures auxquelles nous nous sommes intéressés dans ce travail :

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega, \mu)} \leq M_{n,k} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$$

Pour $k = 1$ nous avons les résultats suivants pour les mesures d'Hermite, de Laguerre et de Legendre :

- En 1944, E. Schmidt [46] montre que pour $\mu(x) = e^{-x^2}$ et $\Omega = \mathbb{R}$, $M_n = \sqrt{2n}$. Les polynômes extrémaux sont de la forme cH_n , où c est une constante réelle et H_n est le polynôme orthogonal d'Hermite de degré n .
- En 1960, P. Turán [54] montre que pour $\mu(x) = e^{-x}$ et $\Omega = [0, +\infty[$, $M_n = \frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{4n+2})}$. Les polynômes extrémaux sont de la forme

$$p(x) = c \sum_{j=1}^n \sin \frac{j\pi}{2n+1} L_j(x)$$

où c est une constante réelle et les L_j sont les polynômes orthogonaux de Laguerre de degré j .

- Pour $\mu(x) = 1$ et $\Omega = [-1, 1]$, la meilleure constante demeure inconnue mais E. Schmidt dans [46] décrit son comportement asymptotique $M_n \sim \frac{(2n+3)^2}{4\pi}$.

Guessab et Milovanović [23] donnent les meilleures constantes pour un k quelconque mais pour des normes particulières dans le cas des mesure de Laguerre-Sonin et Jacobi :

Théorème 1.2.1 $\forall p \in \mathcal{P}_n$ nous avons les inégalités suivantes :

Pour la mesure d'Hermite [49],

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega, \mu)} \leq 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}.$$

Pour la mesure de Laguerre-Sonin,

$$\|\phi(x)^{\frac{k}{2}} p^{(k)}\|_{L^2(\Omega, \mu)} \leq \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}.$$

Pour la mesure de Jacobi,

$$\|\phi(x)^{\frac{k}{2}} p^{(k)}\|_{L^2(\Omega, \mu)} \leq \sqrt{\frac{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + k + 1)}{(n-k)! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}.$$

L'égalité est à chaque fois atteinte pour $p = cP_n$, $c \in \mathbb{R}$, et P_n est le polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure μ

Les mesures μ et les ensembles Ω sont ceux donnés dans le Tableau 1 et les polynômes $\phi(x)$ sont dans le Tableau 2

Dans le cas général, les constantes de Markov-Bernstein pour la norme L^2 sont toujours inconnues. Quelques auteurs ont essayé de les estimer pour certaines mesures classiques : Laguerre-Sonin, Gengenbauer, Legendre, Jacobi Pour plus de détail nous invitons le lecteur à consulter, par exemple, [19], [14], [17], [43] . . .

Cette famille d'inégalités a aussi été étudiée pour les polynômes en plusieurs variables, mais la plupart des résultats concernent la norme infinie, car, comme pour les inégalités en une variable, il est très difficile de les étudier en norme L^q .

Wilhelmsen [56] donne une estimation de la meilleure constante pour la norme infinie sur un ensemble K convexe

$$M_n(K) \leq \frac{2n^2}{r_K}$$

où n est le degré total du polynôme à plusieurs variables considéré. r_K est le poids de l'ensemble K défini par le rayon de la plus grande boule contenue dans K .

Kellogg [30] considère quant à lui le cas particulier où K est une boule. Dans [43], on trouve une généralisation de ces inégalités toujours pour la norme du maximum sur un cube de \mathbb{R}^s

Théorème 1.2.2 *Si $\Omega = [a, b]^s$ alors, pour $\alpha \in \mathbb{N}^s$, on a :*

$$\|p^\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left\{ \frac{2}{a-b} (r)^2 \right\}^{|\alpha|} \|p\|_{L^\infty(\Omega)},$$

où r est le degré total de p .

A. Kroó, commence en 2009 [31] a étudier les inégalités de Markov-Bernstein pour les normes L^q , $1 \leq q < \infty$. Il donne une estimation de type Wilhelmsen de la meilleure constante de Markov-Bernstein pour l'inégalité :

$$\|\partial p\|_{L^q(K)} \leq M_{n,q}(K) \|p\|_{L^q(K)}.$$

où K est un ensemble compact et $|\partial p|$ est la norme euclidienne du gradient du polynôme p

$$|\partial p| = \left(\sum_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.2.3 *Soit K un corps convexe de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ et $1 \leq q < \infty$ alors*

$$M_{n,q}(K) \leq c \frac{d^{d+7} \ln d}{r_K} n^2,$$

où r_K est le poids de K et n est le degré total de p .

Au cours de cette année (2012), A. Kroó et J. Szabados ont consacré un article [32] à l'étude de la constante exacte dans le cas de la norme L^2 pour certaines mesures classiques, notamment celle d'Hermite et de Laguerre-Sonin.

Théorème 1.2.4 *Soit $K = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = \prod_{j=1}^d e^{-x_j^2}$, alors pour les polynômes de degré total n nous avons*

$$M_n = \sqrt{2n}.$$

Les polynômes extrémaux sont :

$$p(x) = \sum_{|k|=n} c_k \prod_{j=1}^d H_{k_j}(x_j)$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, $|k| = \sum_{j=1}^d k_j$ et les H_{k_j} sont les polynômes orthogonaux d'Hermite en une variable x_j de degré k_j .

Théorème 1.2.5 Soit $K = [0, +\infty[^d$, $\mu(x) = \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j} e^{-x_j}$, alors pour les polynômes de degré total n nous avons

$$M_n \leq \frac{n}{\sqrt{1 + \min_{1 \leq j \leq d} \alpha_j}}.$$

Une partie de ce travail est consacrée aux inégalités de Markov-Bernstein en plusieurs variables pour ces mêmes mesures et, aussi, pour la mesure de Jacobi. Nous retrouverons la même constante pour la mesure d'Hermite et nous la donnons pour les deux autres mesures, mais en considérant des cas très liés à celui d'Hermite.

Les inégalités de Markov-Bernstein en une variable jouent un rôle très important dans la résolution des équations différentielles ordinaires. Celles en plusieurs variables sont susceptibles de jouer un rôle similaire dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

1.2.2 Les inégalités de Landau-Kolmogorov

En mathématique, les inégalités de Landau-Kolmogorov sont la famille suivante d'inégalités entre plusieurs dérivées d'une fonction f définie sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$

$$\|f^{(m)}\| \leq K \|f\|^{\frac{1-m}{n}} \|f^{(n)}\|^{\frac{m}{n}} \text{ pour } 1 \leq m < n \quad (1.9)$$

où $f^{(j)}$ est la $j^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f suffisamment dérivable et K est une constante dépendant de m et n . $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel considéré.

L'inégalité fut initialement montrée en 1913 par Edmund Landau [33] pour $m = 1$ et $n = 2$.

Théorème 1.2.6 Si $f \in C^2([0, 1])$ est telle que

$$\|f\|_{L^\infty([0,1])} = 1, \quad \|f''\|_{L^\infty([0,1])} = 4,$$

alors

$$\|f'\|_{L^\infty([0,1])} \leq 4.$$

Un an après, Hadamard [25] montre un résultat analogue pour la norme infinie sur \mathbb{R} . Puis, Landau montre ce nouveau résultat :

Théorème 1.2.7 Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ est telle que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1, \quad \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 8,$$

alors

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 4.$$

Entre 1937 et 1939, Shilov [50] étend ces résultats pour $n \leq 4$, $m < n$ et il conjecture que les fonctions extrémales dans le cas général seraient des splines d'Euler.

Théorème 1.2.8 *Si $f \in C^3(\mathbb{R})$ est telle que*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1, \quad \|f'''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 24,$$

alors

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 3, \quad \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 12.$$

Théorème 1.2.9 *Si $f \in C^4(\mathbb{R})$ est telle que*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1, \quad \|f^{(iv)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{384}{5},$$

alors

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{16}{5}, \quad \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{48}{5}, \quad \|f'''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{192}{5}.$$

L'intérêt pour ce problème commence réellement en 1939 quand Andrey Kolmogorov publie son remarquable article [27] dans lequel il résout le problème de Landau pour tous les choix possibles des ordres de dérivation pour la norme infinie sur la droite réelle. Ainsi les meilleures constantes sont déterminées et il confirme la conjecture de Shilov sur les fonctions extrémales.

$$\|f^{(m)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K(m, n) \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{1-m}{n}} \|f^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{m}{n}}, \quad \text{pour } 1 \leq m < n. \quad (1.10)$$

$K(m, n)$ est la meilleure constante dépendant de m et n . Elle est donnée en fonction des coefficients de Favard

$$K(m, n) = a_{n-m} a_n^{-1 + \frac{k}{n}}, \quad a_p = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^i}{2i+1} \right]^{p+1}.$$

Comme pour les inégalités de Markov-Bernstein, il a fallu attendre 1962 pour avoir une traduction [28] de l'article de Kolmogorov.

En 1972 I. J. Schoenberg et A. Caravetta établissent dans [47] une version analogue au théorème de Kolmogorov pour la norme infinie sur la demi-droite réelle. Ils donnent également un algorithme pour déterminer les meilleures constantes $K(m, n)$ qui sont toutes des nombres algébriques.

D'autres généralisations de ces inégalités ont été faites pour d'autres normes :

$$\|f^{(m)}\|_{L^q(\Omega)} \leq K(m, n) \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f^{(n)}\|_{L^r(\Omega)}^{1-\alpha} \text{ pour } 1 \leq m < n. \quad (1.11)$$

Chacune des trois normes peut être différente des autres, et Ω est une partie quelconque de \mathbb{R} .

Stein dans [52] le fait, le premier, pour $p = q = r = 1$ et pour $p = q = r$ et $1 \leq p \leq \infty$. Il montre que les inégalités peuvent être déduites de celles en norme L_∞ avec des constantes majorées par celles de ces dernières.

N. P. Kupcov s'intéresse dans [29] aux inégalités de Kolmogorov en norme L^2 sur $[0, +\infty[$ et démontre le résultat suivant

$$\|f^{(m)}\|_{L^2([0, \infty[)} \leq \frac{1}{\gamma_{mn}} \left[\|f\|_{L^2([0, \infty[)}^2 \|f^{(n)}\|_{L^2([0, \infty[)}^2 \right] \text{ pour } 1 \leq m < n$$

pour f dans $L^2([0, \infty[)$ ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n .

Les constantes γ_{mn} ne sont pas données explicitement pour tout n et tout k , mais il donne quelques propriétés et les valeurs des premières

$$\begin{aligned} \gamma_{21} &= 1 \\ \gamma_{31} &= \gamma_{32} = \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} \\ \gamma_{41} &= \gamma_{43} = \text{la plus petite racine positive de} \\ &\quad \gamma^8 - 6\gamma^4 - 8\gamma^2 + 1 = 0 \\ \gamma_{42} &= \text{la plus petite racine positive de} \\ &\quad \gamma^4 - 2\gamma^2 - 4\gamma + 1 = 0 \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Dans le livre "*Inequalities*" [26], dont certaines parties sont disponibles en consultation sur internet, Hardy, Littlewood et Pólya établissent des inégalités semblables en norme L^2 . Mais les constantes de Kolmogorov sont inconnues dans le cas général.

Les inégalités de Markov-Bernstein ont motivé certains auteurs à chercher des analogues polynomiaux aux inégalités de Landau-Kolmogorov. Le premier à s'être penché sur le problème pour des polynômes de degré fixé, est Varma qui donne en 1987 [55] les inégalités suivantes pour la norme L^2 dans le cas de la mesure d'Hermite

Théorème 1.2.10 $\forall p \in \mathcal{P}_n$ nous avons

$$\|p'\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 \leq \frac{1}{2(2n-1)} \|p''\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 + \frac{2n^2}{2n-1} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2, \quad (1.12)$$

$$\|p'\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 \leq \frac{1}{4(3n^2-6n+2)} \|p'''\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 + \frac{2n^2(2n-3)}{3n^2-6n+2} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2, \quad (1.13)$$

$$\|p''\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 \leq \frac{(2n-1)}{2(3n^2-6n+2)} \|p'''\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 + \frac{4n^2(n-1)^2}{3n^2-6n+2} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2. \quad (1.14)$$

Ces trois inégalités deviennent des égalités si et seulement si $p(x) = cH_n(x)$, où c est une constante arbitraire et $H_n(x)$ est le polynôme orthogonal d'Hermite de degré n .

Varma donne trois inégalités supplémentaires :

Théorème 1.2.11 $\forall p \in \mathcal{P}_n$ nous avons

$$\begin{aligned} \|p'\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 &\leq \frac{n^2(4n^3 - 9n^2 + 10n - 1)}{(2n-1)(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|p\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \\ &+ \frac{1}{16(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|p^{(4)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \|p''\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 &\leq \frac{2n^2(n-1)^2(2n-5)}{(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|p\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \\ &+ \frac{1}{16(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|p^{(4)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\|p'''\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \leq A_n \|p\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 + B_n \|p^{(4)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2, \quad (1.17)$$

avec

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4n^2(n-1)^2(n-2)^2(4n^3 - 18n^2 + 24n - 11)}{(2n-1)(3n^2 - 12n + 11)(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)}, \\ B_n &= \frac{(n-1)^2(n-2)^2 + 4(2n-1)(2n-3)(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)}{8(2n-1)(3n^2 - 12n + 11)(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)}. \end{aligned}$$

Dans l'article de Varma à la place de la norme $\|p^{(4)}\|$ de l'inégalité (1.15), il y avait la norme $\|p^{(v)}\|$ mais les hypothèses du théorème nous ont poussé à mettre un (4) à la place du (v). Malheureusement, ces trois inégalités ((1.15)-(1.17)) sont fausses. Pour le voir il suffit de prendre $p(x) = H_n(x)$, le polynôme unitaire d'Hermite dont la norme est donnée dans le Tableau 3.

L'inégalité (1.15) donne

$$\begin{aligned} \frac{n^2(4n^3 - 9n^2 + 10n - 1)}{(2n-1)(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|H_n\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 &+ \frac{1}{16(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|H_n^{(4)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \\ - \|H_n'\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 &= -\frac{\sqrt{\pi}n^3(n^3 - 9n^2 + 12n - 5)(n-1)!}{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)(n^2 - 3n + 1)}, \end{aligned}$$

qui est positive si $n \leq 7$ et négative $\forall n \geq 8$.

L'inégalité (1.16) donne

$$\begin{aligned} \frac{2n^2(n-1)^2(2n-5)}{(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|H_n\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 &+ \frac{1}{16(2n^3 - 9n^2 + 11n - 3)} \|H_n^{(4)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \\ - \|H_n''\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 &= -\frac{\sqrt{\pi}(n-3)_4(4n-3)n!}{2^n(2n-3)(n^2 - 3n + 1)}, \end{aligned}$$

qui est négative $\forall n \geq 4$.

L'inégalité (1.17) donne

$$\begin{aligned} A_n \|H_n\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 &+ B_n \|H_n^{(4)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 - \|H_n'''\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}n(n-1)^2(n-2)^2(8n^3 - 29n^2 + 24n - 9)n!}{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)(n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 12n + 11)}, \end{aligned}$$

qui est négative $\forall n \geq 3$.

En 1996, Bojanov et Varma [12] montrent l'inégalité suivante toujours pour la norme L^2 dans le cas de la mesure d'Hermite.

Théorème 1.2.12 *Soit j , m et n des entiers arbitraires tels que $0 < j < m \leq n$, alors $\forall p \in \mathcal{P}_n$ nous avons l'inégalité suivante*

$$\|p^{(j)}\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 \leq A \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 + \{2^j \binom{n}{j} j! - A 2^m \binom{n}{m} m!\} \|p\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 \quad (1.18)$$

avec

$$A \leq \frac{j}{m 2^{m-j}} \frac{1}{(n-m+1)_{m-j}}$$

et $\binom{n}{j} = \frac{(n-j+1)_j}{j!}$.

(1.18) devient une égalité si $p(x) = cH_n(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

Le mathématicien serbe G. V. Milovanović a consacré une grande partie de ses travaux aux inégalités polynomiales, les problèmes extrémaux qui leur sont liés et l'utilisation des polynômes orthogonaux. Dans le livre "*Topics in polynomials : extremal problems, inequalities, zeros*" [43] qu'il a écrit avec D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, on trouve une grande bibliographie et un recensement des résultats les plus importants sur les inégalités polynomiales, mais la partie qui parle de celles de Landau-Kolmogorov est très limitée. Plus récemment, il a publié des articles consacrés essentiellement aux inégalités polynomiales.

Dans [6] il cite un travail non publié qui date de 1987 [42] dans lequel il considère le problème extrémal général suivant :

pour k , m et λ fixés, tels que $1 \leq k < m \leq n$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, déterminer la meilleure constante C_n telle que

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 \leq C_n \left(\lambda \|p\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 + (1-\lambda) \|p^{(m)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 \right), \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$$

où μ est une mesure non-négative sur \mathbb{R} .

Une méthode est proposée pour calculer la meilleure constante C_n , en cherchant les valeurs propres d'une certaine matrice. Dans le cas de la mesure d'Hermite cette constante est explicitée :

$$C_n = \frac{2n}{\lambda + 4n(n-1)(1-\lambda)}, \quad \text{avec} \left(\frac{4n^2}{1+4n^2} \leq \lambda \leq 1 \right)$$

Un peu plus tard, en 1991, Agarwal et Milovanović [6] montrent l'inégalité suivante en utilisant l'équation différentielle satisfaite par les polynômes orthogonaux classiques : $\forall p \in \mathcal{P}_n$,

$$(2\lambda_n + \Psi'(0)) \|\sqrt{\Phi(x)} p'\|_{L^2(\Omega; \mu)}^2 \leq \lambda_n^2 \|p\|_{L^2(\Omega; \mu)}^2 + \|\Phi(x) p''\|_{L^2(\Omega; \mu)}^2 \quad (1.19)$$

où μ est l'une des trois mesures classiques données dans le Tableau 1, $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont les polynômes donnés dans le Tableau 2 et $\lambda_n = n\xi_n^{(1)}$, les $\xi_n^{(k)}$ sont donnés dans le Tableau 3.

Dimitar K. Dimitrov s'intéresse lui aussi à ce genre d'inégalités. Dans un premier article [7], il montre avec Alves un résultat plus général pour la mesure d'Hermite :

Théorème 1.2.13 *Soit j, m et n des entiers arbitraires tels que $0 < j < m \leq n$, A et B des constantes positives. Alors $\forall p \in \mathcal{P}_n$, nous avons*

(i) Si

$$\frac{A}{B} \leq 2^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} \frac{j}{m-j},$$

alors

$$\|p^{(j)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 \leq \frac{A\|p^{(m)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 + B\|p\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2}{A2^{m-j}(n-j)![(n-m)!]^{-1} + B2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}}.$$

L'égalité est atteinte si $p = cH_n$, $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Si

$$\frac{2^{-m}}{(m+1)!} \frac{j}{m-j} < \frac{A}{B} < 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)},$$

alors

$$\|p^{(j)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 \leq \frac{A\|p^{(m)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 + B\|p\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2}{A2^{m-j}(m-j)! + B2^{-j}(m-j)!(m!)^{-1}}.$$

L'égalité est atteinte si $p = cH_m$, $c \in \mathbb{R}$.

(iii) Si

$$\frac{A}{B} > 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)},$$

alors

$$\|p^{(j)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 \leq \frac{A\|p^{(m)}\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 + B\|p\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2}{B2^{-j}(m-j-1)![(m-1)!]^{-1}}.$$

L'égalité est atteinte si $p = cH_{m-1}$, $c \in \mathbb{R}$.

(iv) Si

$$\frac{A}{B} = 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)},$$

alors les inégalités des cas (ii) et (iii) coïncident et sont satisfaites toutes les deux.

L'égalité est atteinte pour toute combinaison linéaire de H_m et H_{m-1} .

L'inégalité de Bojanov et Varma est une conséquence directe de (i).

Dans l'article on donne également une caractérisation complète du cas particulier où $m = 2$ et $j = 1$.

Dans un second papier paru en 2004, De Andrade, Dimitrov et De Sousa [8] étendent les inégalités précédentes aux cas des mesures de Laguerre-Sonin et Jacobi

Théorème 1.2.14 Soient j , m et n des entiers arbitraires tels que $0 < j < m \leq n$ et D une constante positive. $\forall p \in \mathcal{P}_n$ nous avons

(i) Si $D \leq S_{n-1}$, alors

$$\|p^{(j)}\|_{L^2(\Omega, \mu_j)}^2 \leq \frac{1}{D\theta_n + \mu_n} \left\{ D\|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega, \mu_m)}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega, \mu_0)}^2 \right\}.$$

L'égalité est atteinte si $p = cL_n^{(\alpha)}$ pour la mesure de Laguerre-Sonin et si $p = cP_n^{(\alpha, \beta)}$ dans le cas de la mesure de Jacobi, $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $S_m < D < S_{m-1}$, alors

$$\|p^{(j)}\|_{L^2(\Omega, \mu_j)}^2 \leq \frac{1}{D\theta_m + \mu_m} \left\{ D\|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega, \mu_m)}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega, \mu_0)}^2 \right\}.$$

L'égalité est atteinte si $p = cL_m^{(\alpha)}$ pour la mesure de Laguerre-Sonin et si $p = cP_m^{(\alpha, \beta)}$ dans le cas de la mesure de Jacobi, $c \in \mathbb{R}$.

(iii) Si $D > S_{m-1}$, alors

$$\|p^{(j)}\|_{L^2(\Omega, \mu_j)}^2 \leq \frac{1}{\mu_{m-1}} \left\{ D\|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega, \mu_m)}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega, \mu_0)}^2 \right\}.$$

L'égalité est atteinte si $p = cL_{m-1}^{(\alpha)}$ pour la mesure de Laguerre-Sonin et si $p = cP_{m-1}^{(\alpha, \beta)}$ dans le cas de la mesure de Jacobi, $c \in \mathbb{R}$.

(iv) Si $D = S_{m-1}$, alors les inégalités des cas (ii) et (iii) coïncident et sont satisfaites toutes les deux. L'égalité est atteinte pour toute combinaison linéaire des polynômes extrémaux de chacune des deux inégalités.

Les expressions des constantes S_k , θ_k et μ_k sont données dans l'article. Les mesures μ_k sont celles pour lesquelles les dérivées des polynômes orthogonaux par rapport à μ_0 sont orthogonales, elles sont données dans le Tableau 3. Ce choix de mesures permet de les traiter de façon analogue au cas de la mesure d'Hermite.

D'autre part, pour $m = 2$ et $k = 1$, comme on va le montrer dans le chapitre suivant (Propriété 2.1.5), ces inégalités sont équivalentes à celles données par Milovanović et Agarwal (1.19).

En 2009, Emad Az-Zo'bi [9] donne une nouvelle généralisation de l'inégalité de Bojanov et Varma (1.18) pour des fonctions.

Théorème 1.2.15 Soient k et r deux entiers arbitraires tels que $0 < k < r$. Soit f une fonction suffisamment dérivable, alors nous avons l'inégalité suivante pour la mesure d'Hermite :

$$\|f^{(k)}\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 \leq A\|f^{(r)}\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2 + B\|f\|_{L^2(\Omega, \mu)}^2.$$

Il donne la plus petite valeur possible pour B quand A est fixée positive.

Nous remarquons que tous les analogues polynomiaux des inégalités de type Landau-Kolmogorov trouvés dans la littérature sont donnés pour des polynômes d'un degré fixé. Or certaines inégalités sont vraies quel que soit le degré. En effet, Draux et El Hami ont montré qu'il existe un domaine convexe où ces inégalités sont vraies pour tous les polynômes de \mathcal{P} . Donc il suffit de déterminer ce domaine. Ceci nous permettra d'étendre ces inégalités aux fonctions d'un espace de Sobolev. Ainsi nous montrerons que les inégalités de Varma (1.15), (1.15) et (1.15) et celles de Milovanović et Agarwal (1.19) correspondent à un point sur la frontière de ce domaine et sont donc vraies $\forall p \in \mathcal{P}$.

Chapitre 2

Inégalités en une variable

Ce chapitre est consacré aux inégalités de type Landau-Kolmogorov en norme L^2 . Les mesures utilisées sont celles d'Hermite, de Laguerre-Sonin et de Jacobi.

2.1 Préliminaires

Soit $L^2(\Omega, \mu_m)$, $m = 0, \dots, N$, l'espace de Hilbert des fonctions réelles de carré intégrable sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ pour la mesure de Borel μ_m positive sur Ω . Le produit scalaire sur cet espace est défini par :

$$(f, g)_{L^2(\Omega; \mu_m)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu_m(x), \quad \forall f, g \in L^2(\Omega; \mu_m) \quad (2.1)$$

et la norme est :

$$\|f\|_{L^2(\Omega; \mu_m)} = ((f, f)_{L^2(\Omega; \mu_m)})^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'espace de Sobolev $H^N(\Omega; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N)$ par

$$H^N(\Omega; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N) = \left\{ f \mid f^{(m)} \in L^2(\Omega; \mu_m), m = 0, \dots, N \right\},$$

où les dérivées $f^{(m)}$ d'ordre m sont prises au sens des distributions. Le produit scalaire classique sur cet espace est donné par :

$$(f, g)_{H^N(\Omega; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N)} = \sum_{m=0}^N (f^{(m)}, g^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)}, \quad \forall f, g \in H^N(\Omega; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N)$$

et la norme correspondante est :

$$\|f\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)} = ((f, f)_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)})^{\frac{1}{2}}.$$

Notons λ l'élément de \mathbb{R}^N de composantes λ_m , $m = 1, \dots, N$.

Maintenant on considère la forme bilinéaire symétrique a_{λ} :

$$a_{\lambda} : H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N) \times H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$a_\lambda(f, g) = (f, g)_{L^2(\Omega; \mu_0)} + \sum_{i=1}^N \lambda_m (f^{(m)}, g^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)}, \quad \forall f \text{ et } g \in H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N) \quad (2.2)$$

où λ_m , $m = 1, \dots, N$, sont N réels fixés tels que $\lambda_N \neq 0$.

Nous cherchons le domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ où la forme bilinéaire a est définie positive

$$\mathcal{D} = \{ \lambda \in \mathbb{R}^N \mid a(p, p) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} - \{0\} \}$$

On notera \mathcal{D}_n le domaine de \mathbb{R}^N tel que

$$\mathcal{D}_n = \{ \lambda \in \mathbb{R}^N \mid a(p, p) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n - \{0\} \}.$$

On notera $\bar{\mathcal{D}}$ et $\bar{\mathcal{D}}_n$ les domaines de \mathbb{R}^N tels que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}} &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^N \mid a(p, p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \}, \\ \bar{\mathcal{D}}_n &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^N \mid a(p, p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n \}. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 *Naturellement, tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tel que $\lambda_m > 0$ pour $m = 1, \dots, N$, est un point de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}_n). En d'autres termes l'orthant positif est inclus dans \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}_n).*

Propriété 2.1.2 *\mathcal{D}_n , $\bar{\mathcal{D}}_n$, \mathcal{D} et $\bar{\mathcal{D}}$ sont des domaines convexes.*

Démonstration.

Soient a_μ et a_ν deux formes bilinéaires définies par (2.2) telles que μ et ν appartiennent à \mathcal{D}_n (resp. $\bar{\mathcal{D}}_n$, \mathcal{D} , $\bar{\mathcal{D}}$).

Soit $\theta \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} a_{\theta\mu+(1-\theta)\nu}(p, p) &= \sum_{i=0}^N (\theta\mu_m + (1-\theta)\nu_m)(p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} \\ &= \theta \sum_{i=0}^N \mu_m(p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} + (1-\theta) \sum_{i=0}^N \nu_m(p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} \\ &= \theta a_\mu(p, p) + (1-\theta) a_\nu(p, p). \end{aligned}$$

Donc, si a_μ et a_ν sont définies positives, $a_{\alpha\mu+(1-\alpha)\nu}$ l'est aussi.

□

Soit I l'ensemble d'entiers $\{1, 2, \dots, N-1\}$. On note par I^0 , I^+ , I^- les sous-ensembles de I tels que $\lambda_m = 0 \forall m \in I^0$, $\lambda_m > 0 \forall m \in I^+$ et $\lambda_m < 0, \forall m \in I^-$. Naturellement $I = I^- \cup I^0 \cup I^+$.

Maintenant nous faisons l'hypothèse (\mathcal{H}) suivante

Hypothèse (\mathcal{H})

Soit $N > 2$. Pour un λ_N fixé positif, il existe $\hat{\lambda} \in \mathcal{D}$ (resp. \mathcal{D}_n) de composantes $\hat{\lambda}_m$, $m = 1, \dots, N$, tel que l'ensemble I^- est non vide et $\hat{\lambda}_N = \lambda_N$.

Remarque 2.1.3 λ_N est fixé positif dans l'hypothèse (\mathcal{H}) car dans [15] et [16] il a été établi que le domaine \mathcal{D} est tel que $\lambda_N > 0$ (Propriété 2.1.13).

Propriété 2.1.4 Dans [15] et [16] Draux et El Hami ont montré que l'hypothèse (\mathcal{H}) est satisfaite dans les cas suivants

1. $\mu_0 = \dots = \mu_N = \mu$ est la mesure d'Hermite.

$$(f, g)_{L^2(\Omega; \mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx.$$

2. μ_0 est la mesure de Laguerre-Sonin.

$$(f, g)_{L^2(\Omega; \mu_0)} = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx \text{ avec } \alpha > -1,$$

$$(f^{(m)}, g^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} = \int_0^{+\infty} f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)x^{\alpha+m} e^{-x} dx \text{ pour } m = 1, \dots, N.$$

3. μ_0 est la mesure de Jacobi.

$$(f, g)_{L^2(\Omega; \mu_0)} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \text{ avec } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1,$$

$$(f^{(m)}, g^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} = \int_{-1}^1 f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m} dx \text{ pour } m = 1, \dots, N.$$

4. $\mu_0 = \dots = \mu_N = \mu$ est la mesure de Laguerre-Sonin.

5. $\mu_0 = \dots = \mu_N = \mu$ est la mesure de Jacobi.

Propriété 2.1.5

$$(f, g)_{L^2(\Omega; \mu_m)} = (\Phi(x)^m f, g)_{L^2(\Omega; \mu_0)} \quad \forall f, g \in L^2(\Omega; \mu_m) \quad (2.3)$$

où $\Phi(x)$ est le polynôme donné dans le Tableau 2

Démonstration.

La propriété est évidente dans le cas de la mesure d'Hermite ($\mu_m = \mu_0$ et $\Phi(x) = 1$).

Dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin, $\Phi(x) = x$ et donc

$$\begin{aligned} (f, g)_{L^2(\Omega; \mu_m)} &= \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^{\alpha+m} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^m f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx \\ &= (\Phi(x)^m f, g)_{L^2(\Omega; \mu_0)}. \end{aligned}$$

Dans le cas de la mesure de Jacobi, $\Phi(x) = 1 - x^2$ et donc

$$\begin{aligned} (f, g)_{L^2(\Omega; \mu_m)} &= \int_0^{+\infty} f(x)g(x)(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (1-x^2)^m f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &= (\Phi(x)^m f, g)_{L^2(\Omega; \mu_0)}. \end{aligned}$$

□

A partir du point $\hat{\lambda}$ de l'hypothèse (\mathcal{H}) , on peut générer d'autres points dans le domaine \mathcal{D} .

Propriété 2.1.6 *Soit $\hat{\lambda} \in \mathcal{D}$ un point vérifiant l'hypothèse (\mathcal{H}) . Alors tous les points $\lambda \in \mathbb{R}^N$ de composantes λ_m , $m = 1, \dots, N$, telles que $\lambda_m - \hat{\lambda}_m > 0$, pour $m = 1, \dots, N$, appartiennent à \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}_n). Tous les points $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tels que $\lambda_m - \hat{\lambda}_m \geq 0$, pour $m = 1, \dots, N$, appartiennent à $\bar{\mathcal{D}}$ (resp. $\bar{\mathcal{D}}_n$).*

Démonstration.

Si $\lambda_m - \hat{\lambda}_m > 0$ pour $m = 1, \dots, N$, alors le point $\lambda - \hat{\lambda} \in \mathcal{D}$ (remarque 2.1.1) et donc $a_{\lambda - \hat{\lambda}}(p, p) > 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} - \{0\}$.

D'autre part $\hat{\lambda} \in \mathcal{D}$ donc $a_{\hat{\lambda}}(p, p) > 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} - \{0\}$.

Or $a_\lambda = a_{\lambda - \hat{\lambda}} + a_{\hat{\lambda}}$, d'où le résultat. La démonstration est identique pour les autres domaines.

□

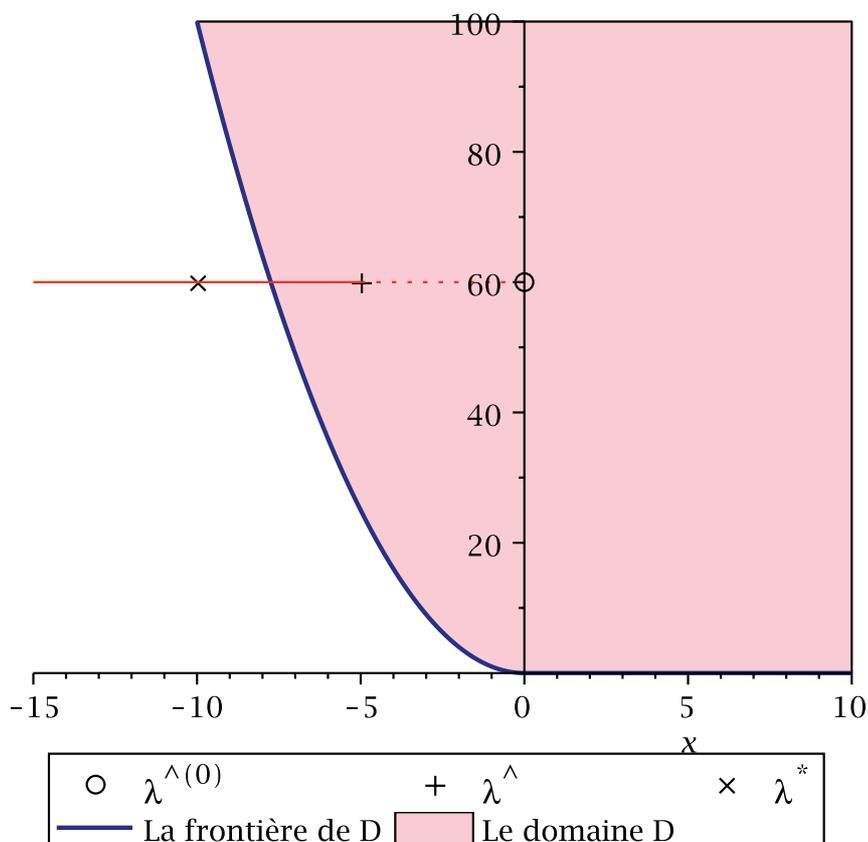
Soit $\hat{\lambda}$ un point de \mathcal{D} comme dans l'hypothèse \mathcal{H} auquel on associe le point $\hat{\lambda}^{(0)}$ de \mathbb{R}^N dont les composantes $\hat{\lambda}_m^{(0)}$, $m = 1, \dots, N$, sont

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_m^{(0)} &= \hat{\lambda}_m & \text{si } m \in I^+ \cup \{N\}, \\ \hat{\lambda}_m^{(0)} &= 0 & \text{si } m \in I^- \cup I^0. \end{aligned}$$

Évidemment, $\hat{\lambda}^{(0)}$ appartient à \mathcal{D} , ainsi que tous les points de l'intervalle $[\hat{\lambda}, \hat{\lambda}^{(0)}]$ (voir la figure 2.1).

On définit le point $\lambda^* \in \mathbb{R}^N$ par $\lambda^* = \theta \hat{\lambda} + (1 - \theta) \hat{\lambda}^{(0)}$ avec $\theta \geq 1$. Ce point appartient à la demi-droite sur $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}^{(0)})$ qui commence en $\hat{\lambda}$. Les composantes d'un tel point sont :

$$\begin{aligned} \lambda_m^* &= 0 & \text{si } m \in I^0 \\ \lambda_m^* &= \hat{\lambda}_m & \text{si } m \in I^+ \cup \{N\} \\ \lambda_m^* &= \theta \hat{\lambda}_m & \text{si } m \in I^- \end{aligned}$$

FIGURE 2.1 – les points λ^* sur la demi-droite sur $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}^{(0)})$.

Propriété 2.1.7 Les points λ^* qui sont dans $\bar{\mathcal{D}}$, sont à une distance finie de $\hat{\lambda}^{(0)}$ (la distance étant définie par la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N : $\|\lambda\|_2 = (\sum_{m=1}^N \lambda_m^2)^{\frac{1}{2}}$).

Démonstration.

Il suffit de montrer que pour avoir $\lambda^* \in \bar{\mathcal{D}}$, il faut que le θ qui le définit, soit fini. Nous avons

$$a_{\lambda^*}(p, p) = a_{\hat{\lambda}^{(0)}}(p, p) + \theta(a_{\hat{\lambda}}(p, p) - a_{\hat{\lambda}^{(0)}}(p, p)).$$

En utilisant la définition de $\hat{\lambda}^{(0)}$ on trouve

$$a_{\lambda^*}(p, p) = a_{\hat{\lambda}^{(0)}}(p, p) + \theta \sum_{m \in I^-} \hat{\lambda}_m(p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)}.$$

$\hat{\lambda}^{(0)} \in \mathcal{D}$ i.e. $0 < a_{\hat{\lambda}^{(0)}}(p, p) < +\infty$.

Si $\theta = 1$, alors $a_{\lambda^*}(p, p) = a_{\hat{\lambda}}(p, p) > 0$ car $\hat{\lambda} \in \mathcal{D}$.

D'autre part, pour $m \in I^-$ les $\hat{\lambda}_m$ sont négatifs, donc, $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} a_{\lambda^*}(p, p) = -\infty$.

Alors, il existe $\theta^* < +\infty$ tel que $a_{\lambda^*}(p, p) = 0$.

Pour $\lambda^* = \theta \hat{\lambda} + (1 - \theta) \hat{\lambda}^{(0)}$ et $\theta \in [1, \theta^*[$, $a_{\lambda^*}(p, p) > 0$, $\forall p \in \mathcal{P} - \{0\}$.

□

Pour la suite des préliminaires on désigne par λ^* le point de \mathbb{R}^N défini par :

$$\lambda^* = \theta \hat{\lambda} + (1 - \theta) \hat{\lambda}^{(0)}, \quad \theta \in [1, \theta^*]$$

Ces points sont dans $\bar{\mathcal{D}}$, donc pour tout λ^* , nous avons $a_{\lambda^*}(p, p) \geq 0$, $\forall p \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire

$$(p, p)_{L^2(\Omega; \mu_0)} + \sum_{m \in I^-} \lambda_m^* (p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} + \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_m^* (p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} \geq 0.$$

Ceci nous donne immédiatement une inégalité de type Landau-Kolmogorov.

Théorème 2.1.8 Inégalité de type Landau-Kolmogorov

$\forall p \in \mathcal{P}$ on a

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_m^* \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \geq \sum_{m \in I^-} (-\lambda_m^*) \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2. \quad (2.4)$$

On remarque qu'à chaque point λ^* de $\bar{\mathcal{D}}$ tel que $I^- \neq \emptyset$, correspond une inégalité de type Landau-Kolmogorov différente.

Une application intéressante des inégalités de type Landau-Kolmogorov (2.4) est liée à la coercivité de certaines formes bilinéaires a_ρ sur l'espace \mathcal{P} .

En utilisant les mêmes ensembles d'entiers I^0 , I^+ et I^- que dans l'inégalité (2.4), on définit la forme bilinéaire $a_\rho : H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N) \times H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a_\rho(f, g) = (f, g)_{L^2(\Omega; \mu_0)} + \sum_{m \in I^0 \cup I^+ \cup \{N\}} \rho_m (f^{(m)}, g^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)}, \quad (2.5)$$

$\forall f, g \in H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$, avec $\rho_m > 0$, $\forall m \in I^0 \cup I^+ \cup \{N\}$.

Théorème 2.1.9 Si (2.4) est satisfaite, alors il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, $\forall p \in \mathcal{P}$, on ait

$$a_\rho(p, p) \geq \kappa \|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}^2.$$

Démonstration.

On ajoute aux deux membres de l'inégalité (2.4) la quantité suivante :

$$\min_{j \in I^-} |\lambda_j^*| \sum_{i \in I^0 \cup I^+ \cup \{0, N\}} \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega; \mu_i)}^2.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
(1 + \min_{j \in I^-} |\lambda_j^*|) \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 &+ \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} (\lambda_m^* + \min_{j \in I^-} |\lambda_j^*|) \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \\
&+ \min_{j \in I^-} |\lambda_j^*| \sum_{m \in I^0} \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \geq \\
\sum_{m \in I^-} |\lambda_m^*| \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 &+ \min_{j \in I^-} |\lambda_j^*| \sum_{i \in I^0 \cup I^+ \cup \{0, N\}} \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega; \mu_i)}^2.
\end{aligned}$$

Une borne supérieure de la partie gauche de l'inégalité obtenue, qui fait apparaître l'expression de $a_\rho(p, p)$, est

$$\max \left(1 + \min_{j \in I^-} |\lambda_j^*|, \max_{m \in I^+ \cup \{N\}} \left(\frac{\lambda_m^* + \min_{j \in I^-} |\lambda_j^*|}{\rho_m} \right), \max_{m \in I^0} \left(\frac{\min_{j \in I^-} |\lambda_j^*|}{\rho_m} \right) \right) a_\rho(p, p) = \hat{C} a_\rho(p, p).$$

Une borne inférieure de la partie droite de l'inégalité obtenue est

$$\min_{j \in I^-} |\lambda_j^*| \|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}^2.$$

Donc $\kappa = \frac{\min_{j \in I^-} |\lambda_j^*|}{\hat{C}}$.

□

Corollaire 2.1.10 $(a_\rho(p, p))^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$ équivalente à la norme $\|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}$.

Démonstration.

À partir du théorème précédent 2.1.9, $\exists \kappa > 0$ telle que $a_\rho(p, p) \geq \kappa \|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}^2$.
Donc il reste à montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$a_\rho(p, p) \leq M \|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}^2.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
a_\rho(p, p) &= \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^0 \cup I^+ \cup \{N\}} \rho_m \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \\
&\leq \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^0 \cup I^+ \cup \{N\}} \rho_m \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 + \sum_{m \in I^-} \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \\
&\leq \max(1, \max_{m \in I^0 \cup I^+ \cup \{N\}} \rho_m) \|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}^2.
\end{aligned}$$

Donc $M = \max(1, \max_{m \in I^0 \cup I^+ \cup \{N\}} \rho_m)$.

□

Si $I^0 = \emptyset$, alors le Théorème 2.1.9 nous donne le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.11 *Si (2.4) est satisfaite et $I^0 = \emptyset$, alors il existe une constante $\hat{\kappa} > 0$ telle que, $\forall p \in \mathcal{P}$*

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_m^* \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \geq \hat{\kappa} \|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}^2. \quad (2.6)$$

Démonstration.

Il suffit de prendre $\rho_m = \lambda_m^*$, $\forall m \in I^+ \cup \{N\}$, dans le Théorème 2.1.9. Alors il existe une constante $\hat{\kappa} > 0$ telle que, $\forall p \in \mathcal{P}$

$$a_\rho(p, p) = \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_m^* \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \geq \hat{\kappa} \|p\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}^2.$$

□

La forme bilinéaire a_λ définie par (2.2) est un produit scalaire sur $H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N) \times H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$ quand $\lambda \in \mathcal{D}$. Alors, on peut définir la suite des polynômes unitaires de Sobolev $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonaux par rapport à ce produit scalaire. Cette suite forme une base de \mathcal{P} . Les propriétés précédentes sont satisfaites pour tout polynôme $p \in \mathcal{P}$, donc, elles sont aussi satisfaites pour tout les polynômes S_n , $n \in \mathbb{N}$ et inversement. De plus, si la suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$, alors une propriété satisfaite par tous les S_n , est aussi satisfaite par toute fonction $f \in H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$. Dans [15] et [16] Draux et El Hami ont montré que la suite des polynômes de Sobolev $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$ pour les cinq mesures de la propriété 2.1.4.

Les résultats précédents permettent de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.1.12 *Le problème variationnel suivant a une solution unique $u \in H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$:*

$$a_\rho(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N),$$

où a_ρ est la forme bilinéaire définie par (2.5) et L est une forme linéaire continue sur $H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$.

Démonstration.

L'existence et l'unicité de la solution sont une conséquence du Théorème de Lax-Milgram (voir [18] p.1217). En effet, a_ρ est continue sur $H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N) \times H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$:

$$|a_\rho(u, v)| \leq \max_{m \in I^0 \cup I^+ \cup \{N\}} |\rho_m| \|u\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)} \|v\|_{H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)}.$$

Et on a déjà montré qu'elle est coercive. D'où le résultat.

□

La suite de ce chapitre sera consacrée aux trois premières mesures citées dans la propriété 2.1.4. Ces cas sont étroitement liés : dans le cas de la mesure d'Hermite les dérivées des polynômes orthogonaux sont orthogonales par rapport à la même mesure.

Dans les deux autres cas si μ_0 est la mesure associée aux polynômes orthogonaux, alors les dérivées d'ordre m de ces polynômes sont orthogonales par rapport à la mesure μ_m . Cette propriété rend leur étude simple et très similaire. Nous nous intéressons à la positivité de la forme bilinéaire a définie comme dans (2.2)

$$a(f, g) = \sum_{i=0}^N \lambda_m(f^{(m)}, g^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)}, \quad \forall f \text{ et } g \in H^N(\Omega; \mu_0, \dots, \mu_N)$$

lorsque μ_0, \dots, μ_N correspondent aux trois cas cités ci-dessus.

Nous rappelons dans le tableau suivant certains éléments correspondants aux cas Hermite, Laguerre-Sonin et Jacobi.

Nom	Hermite	Laguerre-Sonin	Jacobi
Ω	$] -\infty, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$] -1, 1[$
μ_0	e^{-x^2}	$x^\alpha e^{-x}$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$
μ_m	μ_0	$x^m \mu_0$	$(1-x)^m \mu_0$
$\frac{k_n^{(m)}}{((n-m+1)_m)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}(n-m)!}{2^{n-m}}$	$(n-m)! \Gamma(n+\alpha+1)$	$2^{\delta_n} (n-m)! \frac{\Gamma(\alpha_n) \Gamma(\beta_n) \Gamma(\delta_n - n + m)}{\delta_n (\Gamma(\delta_n))^2}$ avec $\alpha_n = \alpha + n + 1$ $\beta_n = \beta + n + 1$ $\delta_n = \alpha_n + \beta_n - 1$
$C_n^{(m)} = \frac{k_n^{(m)}}{k_n^{(0)}}$	$2^m (n-m+1)_m$	$(n-m+1)_m$	$(n-m+1)_m (n+\alpha+\beta+1)_m$
$\xi_n^{(m)}$	2^m	1	$(n+\alpha+\beta+1)_m$
Restrictions		$\alpha > -1$	$\alpha > -1, \beta > -1$

Tableau 3

où Γ est la fonction Gamma.

Pour avoir les expressions des coefficients $C_n^{(m)} = \frac{k_n^{(m)}}{k_n^{(0)}}$, on utilise les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (H_n(x))' &= nH_{n-1}(x), \\ (L_n^\alpha(x))' &= nL_{n-1}^{\alpha+1}(x), \\ (P_n^{\alpha, \beta}(x))' &= nP_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x). \end{aligned}$$

Propriété 2.1.13 [15]

- i. $a(P_n, P_i) = 0 \forall i \neq n$, alors $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de polynômes de Sobolev unitaires orthogonaux par rapport à a .
- ii. $a(P_n, P_n) = k_n^{(0)} (1 + \sum_{m=1}^N C_n^{(m)} \lambda_m)$, avec la convention $C_n^{(m)} = 0$, si $n - m + 1 \leq 0$ pour un indice m , en d'autres termes cet indice n'existe pas dans la somme.

iii. Soient \mathcal{O}_i , $i \geq 1$, les demi-espaces de \mathbb{R}^N définis par

$$\mathcal{O}_i = \{\lambda \in \mathbb{R}^N \mid 1 + \sum_{m=1}^N C_i^{(m)} \lambda_m > 0\}.$$

Alors $\mathcal{D} = \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{O}_i$.

iv. Si $N \geq 2$, chaque demi-espace \mathcal{O}_i contribue à réduire le domaine \mathcal{D} dans lequel a est définie positive, c'est-à-dire \mathcal{D} est inclus dans $\bigcap_{j \geq 1, j \neq i} \mathcal{O}_j$ strictement, ou encore

$$\exists \lambda \in \bigcap_{j \geq 1, j \neq i} \mathcal{O}_j \text{ et } \lambda \notin \mathcal{D}.$$

v. \mathcal{D} est tel que $\lambda_N > 0$.

vi. Soient \mathcal{H}_i , $i \geq 1$, les hyperplans de \mathbb{R}^N définis par :

$$\mathcal{H}_i = \{\lambda \in \mathbb{R}^N \mid 1 + \sum_{m=1}^N C_i^{(m)} \lambda_m = 0\}.$$

Alors, $N + 1$ hyperplans différents \mathcal{H}_i n'ont aucun point commun.

vii. Soit E le domaine de \mathbb{R}^N défini par :

$$E = \{\lambda \in \mathbb{R}^N \mid \lambda_m \geq 0, m = 1, \dots, N\}.$$

Alors $\mathcal{D} \setminus E \neq \emptyset$.

Cette propriété permet de caractériser \mathcal{D} , le domaine de positivité de la forme bilinéaire a_λ . Mais elle ne donne aucune information sur le signe ou la valeur des constantes qui interviennent dans les inégalités de type Landau-Kolmogorov. Toute la suite de ce travail sera consacrée à l'étude des points de la frontière de ce domaine qui est une surface polyédrale pour les trois mesures qui nous intéressent. Nous nous intéresserons en particulier aux points extrémaux de cette surface, et grâce à la convexité du domaine et à la Propriété 2.1.6 nous pourrions générer les autres points.

2.2 Cas de $N + 1$ Normes ($I^0 = \emptyset$)

Pour trouver des points sur la frontière de \bar{D} , nous nous sommes intéressés aux points d'intersection de N hyperplans \mathcal{H}_i différents, leurs propriétés et les conditions pour qu'ils appartiennent au domaine de positivité. Les coordonnées de ces points sont les constantes qui donnent les inégalités de type Landau-kolmogorov dans le cas où $I = I^+ \cup I^-$.

Théorème 2.2.1 *Soit $A_{\ell_1, \dots, \ell_N}$ le point obtenu par l'intersection de N hyperplans différents \mathcal{H}_{ℓ_i} , $i = 1, \dots, N$, $\ell_i \in \mathbb{N}$ et $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_N$. Soient λ_j , $j = 1, \dots, N$ les coordonnées d'un tel point. Alors le signe de $\lambda_j = (-1)^j$, $j = 1, \dots, N$.*

Nous proposons deux démonstrations différentes : dans la première, on utilise les propriétés des différences finies mais malheureusement elle ne s'applique que si $\ell_1 \geq N$. Pour la seconde on résout par la méthode de Cramer le système linéaire qui donne les coordonnées du point $A_{\ell_1, \dots, \ell_N}$.

Démonstration A

La forme particulière des $C_i^{(m)}$ nous a poussé à utiliser les propriétés analytiques des différences finies. Malheureusement, même si cette démonstration semble séduisante, elle s'applique uniquement quand $\ell_1 \geq N$. Notons que numériquement nous avons observé cette alternance de signe tout le temps. D'ailleurs la seconde démonstration le prouve.

Les coordonnées du point d'intersection de N hyperplans \mathcal{H}_{ℓ_i} , $i = 1, \dots, N$, $\ell_i \in \mathbb{N}$, doivent satisfaire l'équation de chacun d'entre eux, c'est-à-dire :

$$1 + \sum_{m=1}^N C_{\ell_i}^{(m)} \lambda_m = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

ou encore :

$$\sum_{m=0}^N C_{\ell_i}^{(m)} \lambda_m = 0 \quad \text{avec } \lambda_0 = 1, \quad i = 1, \dots, N$$

i) Cas Hermite et Laguerre-Sonin.

À cause de l'expression des coefficients $C_i^{(m)} = 2^{\varepsilon m} (n - m + 1)_m$, $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite et $\varepsilon = 0$ dans le cas Laguerre-Sonin, ces équations peuvent être considérées comme l'expression d'un polynôme écrit dans la base de Newton associée aux points d'interpolation entiers $x_i = i$, $i = 0, 1, \dots, N$, et pris ensuite pour $x = \ell_i$, $i = 1, \dots, N$. On définit les polynômes de Newton par

$$N_0(x) = 1, \quad N_m(x) = N_{m-1}(x)(x - x_m), \quad \forall m \geq 1 \quad (2.8)$$

Un polynôme de degré N dans cette base s'écrit :

$$p(x) = \sum_{m=0}^N \beta_m N_m(x). \quad (2.9)$$

Alors le système (2.7) peut être considéré comme un polynôme $p(x)$ de degré N tel que $p(\ell_i) = 0$, $i = 1, \dots, N$, avec

$$\beta_m = 2^{\varepsilon m} \lambda_m, \quad m = 0, \dots, N.$$

$\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite et $\varepsilon = 0$ dans le cas de Laguerre-Sonin.

Les ℓ_i , $i = 1, \dots, N$ sont les N racines de $p(x)$, donc $p(x)$ s'écrit aussi comme :

$$p(x) = C \prod_{i=1}^N (x - \ell_i) \quad (2.10)$$

Pour trouver la constante C , on calcule $p(0)$ à partir des deux expressions de $p(x)$.

(2.9) donne : $p(0) = \beta_0 = 1$ et (2.10) donne : $p(0) = C(-1)^N \prod_{i=1}^N \ell_i$. Donc $C = \frac{(-1)^N}{\prod_{i=1}^N \ell_i}$.

Alors

$$\begin{aligned} p(x) &= (-1)^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - \ell_i)}{\prod_{i=1}^N \ell_i} = \frac{\prod_{i=1}^N (\ell_i - x)}{\prod_{i=1}^N \ell_i} \quad (2.11) \\ &= \sum_{m=0}^N 2^{\varepsilon m} \lambda_m N_m(x) = \sum_{m=0}^N \beta_m N_m(x). \end{aligned}$$

Les $\beta_m = p[x_0, \dots, x_m]$ sont aussi les différences divisées d'ordre m basées sur les points $x_i = \ell_i$, $i = 0, \dots, m$.

Nous rappelons le résultat suivant :

Théorème 2.2.2 Si $f \in C^k[a, b]$ et x_i , $i = 0, \dots, k$ sont $k + 1$ nombres distincts dans $[a, b]$, alors $\exists \xi \in]a, b[$ tel que $\frac{f^{(k)}(\xi)}{(k)!} = f[x_0, \dots, x_k]$.

Dans notre cas on obtient :

$$\beta_k = p[x_0, \dots, x_k] = \frac{p^{(k)}(\xi_k)}{(k)!} \quad \text{avec } \xi_k \in]\min_{0 \leq i \leq k} x_i, \max_{0 \leq i \leq k} x_i[=]x_0, x_k[.$$

Pour $\ell_1 > N - 1$ et $x < \ell_1$ on a $\ell_i - x > 0 \forall i = 1, \dots, N$. Donc $p^{(j)}(x)$ a le signe de $(-1)^j$ pour $x < \ell_1$ et $j = 0, \dots, N - 1$. Or $\xi_k < x_k < x_N = N \leq \ell_1$. D'où le signe des β_k .

□

i) Cas Jacobi.

Dans le cas de la mesure de Jacobi, nous faisons le changement de variable suivant :

$\hat{\ell}_i = \ell_i + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$. Alors $C_{\ell_i}^{(m)}$ se transforme en $\hat{C}_{\hat{\ell}_i}^{(m)} = \prod_{j=1}^m (\hat{\ell}_i^2 - (\frac{\alpha+\beta+1}{2} + j - 1)^2)$ et le système (2.7) devient

$$1 + \sum_{m=1}^N \hat{C}_{\hat{\ell}_i}^{(m)} \lambda_m = 0 \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.12)$$

Ce système peut être considéré comme l'expression d'un polynôme écrit dans la base de Newton associée aux points d'interpolation $x_i = (\frac{\alpha+\beta+1}{2} + j - 1)^2$, $i = 0, 1, \dots, N$, et pris ensuite pour $x = \hat{\ell}_i^2$, $i = 1, \dots, N$.

Les polynômes de Newton sont définis de la même façon que dans (2.8).

Alors le système (2.12) peut être considéré comme un polynôme $p(x)$ de degré N écrit dans la base de Newton, tel que $p(\hat{\ell}_i^2) = 0$, $i = 1, \dots, N$, avec

$$\beta_m = \lambda_m, \quad m = 0, \dots, N.$$

Les $\hat{\ell}_i^2$, $i = 1, \dots, N$, sont les N racines de $p(x)$. Donc $p(x)$ s'écrit aussi comme :

$$p(x) = C \prod_{i=1}^N (x - \hat{\ell}_i^2). \quad (2.13)$$

On calcule la constante C de la même manière que précédemment, on trouve $C = \frac{(-1)^N}{\prod_{i=1}^N \hat{\ell}_i^2}$.

Alors

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\prod_{i=1}^N (\hat{\ell}_i^2 - x)}{\prod_{i=1}^N \hat{\ell}_i^2} \\ &= \sum_{m=0}^N \lambda_m N_m(x) = \sum_{m=0}^N \beta_m N_m(x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les $\beta_m = p[x_0, \dots, x_m]$ sont les différences divisées d'ordre m basées sur les points x_i , $i = 0, \dots, m$. En utilisant le théorème 2.2.2, nous obtenons

$$\beta_k = p[x_0, \dots, x_k] = \frac{p^{(k)}(\xi_k)}{(k)!} \quad \text{avec } \xi_k \in]\min_{0 \leq i \leq k} x_i, \max_{0 \leq i \leq k} x_i[=]x_0, x_k[.$$

Pour $x < \hat{\ell}_1^2$ on a $\hat{\ell}_i^2 - x > 0$, $\forall i = 1, \dots, N$. Donc $p^{(j)}(x)$ a le signe de $(-1)^j$ pour $x < \hat{\ell}_1^2$ et $j = 0, \dots, N - 1$. Or $\xi_k < x_k < x_N = (N - 1 + \frac{\alpha+\beta+1}{2})^2 \leq \hat{\ell}_1^2 = (\ell_1 + \frac{\alpha+\beta+1}{2})^2$ si $\ell_1 > N - 1$. D'où le signe de β_m .

□

Démonstration B. *Résolution du système linéaire*

Pour cette deuxième démonstration, nous allons calculer directement les coordonnées de $A_{\ell_1, \dots, \ell_N}$, le point d'intersection de N hyperplans différents \mathcal{H}_{ℓ_i} , $i = 1, \dots, N$, $\ell_i \in \mathbb{N}$.

$$A_{\ell_1, \dots, \ell_N} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathcal{H}_{\ell_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Donc il vérifie l'équation de chaque hyperplan :

$$1 + \sum_{m=1}^N C_{\ell_i}^{(m)} \lambda_m = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Par conséquent ses coordonnées λ_j , $j = 1, \dots, N$, sont la solution du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} C_{\ell_1}^{(1)} & C_{\ell_1}^{(2)} & \dots & C_{\ell_1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_N}^{(1)} & C_{\ell_N}^{(2)} & \dots & C_{\ell_N}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule les λ_j par la méthode de Cramer.

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(j-1)} & -1 & C_{\ell_1}^{(j+1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(N)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_N}^{(1)} & \dots & C_{\ell_N}^{(j-1)} & -1 & C_{\ell_N}^{(j+1)} & \dots & C_{\ell_N}^{(N)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(N)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_N}^{(1)} & \dots & C_{\ell_N}^{(N)} \end{vmatrix}} \\ &= (-1)^j \frac{\begin{vmatrix} 1 & C_{\ell_1}^{(1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(j-1)} & C_{\ell_1}^{(j+1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(N)} \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & C_{\ell_N}^{(1)} & \dots & C_{\ell_N}^{(j-1)} & C_{\ell_N}^{(j+1)} & \dots & C_{\ell_N}^{(N)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(N)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_N}^{(1)} & \dots & C_{\ell_N}^{(N)} \end{vmatrix}} \tag{2.15} \\ &= (-1)^j \frac{Q_{j,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)}{Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N)}. \end{aligned}$$

Les $C_n^{(m)}$ sont donnés dans le Tableau 3.

Dans le cas de la mesure d'Hermite ou de Laguerre-Sonin (resp. de Jacobi) $Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N)$ et $Q_{j,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)$ pour $j < N$ sont des polynômes de N variables ℓ_i , $i = 1, \dots, N$, de degré au plus N (resp. $2N$) par rapport à chaque variable ℓ_i , $i = 1, \dots, N-1$, et de

degré N (resp. $2N$) par rapport à la variable ℓ_N . Pour $Q_{N,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)$ on doit changer la référence au degré N (resp. $2N$) en $N - 1$ (reps. $2(N - 1)$).

$Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N)$ se calcule facilement par récurrence. En effet, c'est un polynôme de degré N (resp. $2N$) par rapport à ℓ_N . Dans le cas d'Hermite ou de Laguerre-Sonin, $0; \ell_j, j = 1, \dots, N - 1$, sont ses N racines et dans le cas Jacobi $0; \ell_j, j = 1, \dots, N - 1; -\alpha - \beta - 1; -\ell_j - \alpha - \beta - 1, j = 1, \dots, N - 1$, sont ses $2N$ racines. Le coefficient de tête est $Q_{N-1}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1})$.

Alors, dans le cas d'Hermite et Laguerre-Sonin :

$$Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N) = \xi_N^{\binom{N(N+1)}{2}} \prod_{j=1}^N \ell_j \prod_{1 \leq s < r \leq N} (\ell_r - \ell_s). \quad (2.16)$$

Dans le cas de Jacobi :

$$Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N) = \prod_{j=1}^N \ell_j (\ell_j + \alpha + \beta + 1) \prod_{1 \leq s < r \leq N} (\ell_r - \ell_s) (\ell_r + \ell_s + \alpha + \beta + 1). \quad (2.17)$$

Ainsi, $Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N) > 0$ dans les trois cas.

De la même façon on calcule $Q_{N,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)$.

Dans le cas d'Hermite et de Laguerre-Sonin

$$Q_{N,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) = \xi_N^{\binom{N(N+1)}{2}} \prod_{1 \leq s < r \leq N} (\ell_r - \ell_s). \quad (2.18)$$

Dans le cas de Jacobi

$$Q_{N,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) = \prod_{1 \leq s < r \leq N} (\ell_r - \ell_s) (\ell_r + \ell_s + \alpha + \beta + 1). \quad (2.19)$$

$Q_{N,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) > 0$ dans les trois cas.

Maintenant nous allons montrer par récurrence que $Q_{j,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) > 0, \forall j < N$. Nous séparons les cas de la mesure d'Hermite et de Laguerre-Sonin du cas de la mesure de Jacobi.

i) Cas Hermite et Laguerre-Sonin.

Supposons que tout déterminant $Q_{m,k}(\ell_1, \dots, \ell_k) > 0, \forall \ell_i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_k, \forall m = 1, \dots, k$ et $\forall k = 1, \dots, N - 1$.

Cette propriété est évidente pour $Q_{1,2}(\ell_1, \ell_2)$ et $Q_{2,2}(\ell_1, \ell_2)$.

Montrons que $Q_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) > 0, \forall \ell_i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{N-1} < \ell_N$ et $\forall m = 1, \dots, N - 1$.

Nous développons $Q_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)$ par rapport à sa dernière ligne, puis nous l'exprimons dans la base canonique $(\ell_N)^j, j = 0, \dots, N$.

$$Q_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) = \sum_{j=0}^N \ell_N^j E_{m,j}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1}). \quad (2.20)$$

Le coefficient de tête est

$$E_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1}) = \xi_N^{(N)} Q_{m,N-1}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1}).$$

À cause de l'hypothèse de récurrence $Q_{m,N-1}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1})$ est positif.

Nous avons la relation suivante : $C_{\ell_i}^{(m)} = C_{\ell_i}^{(1)} C_{\ell_i-1}^{(m-1)}$.

Si $m = 1$, le terme constant se calcule de la même manière que (2.16). On trouve :

$$E_{1,0}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1}) = (-1)^{N-1} \xi_{N-1}^{\binom{(N+2)(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} \ell_i(\ell_i - 1) \prod_{1 \leq s < r \leq N-1} (\ell_r - \ell_s).$$

Il est nul si $\ell_1 = 1$ et il a le signe de $(-1)^{N-1}$ si $\ell_1 > 1$.

Si $m > 1$, alors le terme constant est

$$E_{m,0}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1}) = (-1)^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} C_{\ell_i}^{(1)} Q_{m-1,N-1}(\ell_1 - 1, \dots, \ell_{N-1} - 1).$$

Si $\ell_1 \geq 2$, alors $Q_{m-1,N-1}(\ell_1 - 1, \dots, \ell_{N-1} - 1) > 0$ en appliquant l'hypothèse de récurrence.

Si $\ell_1 = 1$, alors le déterminant $Q_{m-1,N-1}(\ell_1 - 1, \dots, \ell_{N-1} - 1)$ a sa première ligne $(1, 0, \dots, 0)$ et donc

$$Q_{m-1,N-1}(\ell_1 - 1, \dots, \ell_{N-1} - 1) = \prod_{i=2}^{N-1} C_{\ell_i-1}^{(1)} Q_{m-2,N-2}(\ell_2 - 2, \dots, \ell_{N-1} - 2).$$

Par récurrence, on en déduit que $\forall m = 1, \dots, N$ et $\forall \ell_i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_N$, le terme constant dans (2.20) est nul ou a le signe de $(-1)^{N-1}$.

Par conséquent, le polynôme de degré N , $Q_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)$ considéré comme polynôme de la variable ℓ_N a un produit de racines donné par $(-1)^N \frac{E_{m,0}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1})}{E_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_{N-1})}$. Il est non positif.

Or $Q_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)$ a $N - 1$ racines positives évidentes : $\ell_i, i = 1, \dots, N - 1$, la dernière racine est forcément non positive. Donc $Q_{m,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) > 0, \forall \ell_N > \ell_{N-1}$ et le signe de $\lambda_j, j = 1, \dots, N$ est celui de $(-1)^j$.

ii) Cas Jacobi.

Dans ce cas il sera plus commode de changer les ℓ_i en $\hat{\ell}_i$, avec $\hat{\ell}_i = \ell_i + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}$. Les coefficients $C_{\ell_i}^{(m)} = (\ell_i - m + 1)_m (\ell_i + \alpha + \beta + 1)_m$ deviennent

$$C_{\ell_i}^{(m)} = \hat{C}_{\hat{\ell}_i}^{(m)}(\alpha, \beta) = \prod_{j=1}^m (\hat{\ell}_i^2 - (\frac{\alpha + \beta + 1}{2} + j - 1)^2).$$

On pose

$$\begin{aligned} Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N) &= \hat{Q}_N(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2), \\ Q_{j,N}(\ell_1, \dots, \ell_N) &= \hat{Q}_{j,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2). \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda_j = (-1)^j \frac{\hat{Q}_{j,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2)}{\hat{Q}_N(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2)}. \quad (2.21)$$

Supposons que tout déterminant $\hat{Q}_{m,k}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2) > 0$, $\forall l_i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_k$, $\forall m = 1, \dots, k$, $\forall k = 1, \dots, N-1$ et $\forall \alpha > -1, \forall \beta > -1$.

La propriété est évidente pour $\hat{Q}_{0,2}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \hat{\ell}_2^2)$ et $\hat{Q}_{1,2}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \hat{\ell}_2^2)$.

Montrons que $\hat{Q}_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2) > 0$, $\forall l_i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{N-1} < l_N$, $\forall m = 1, \dots, N-1$ et $\forall \alpha > -1, \forall \beta > -1$.

Nous développons le déterminant $\hat{Q}_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2)$ par rapport à sa dernière ligne, et nous l'exprimons dans la base canonique $(\hat{\ell}_N^2)^j$, $j = 0, \dots, N$.

$$\hat{Q}_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2) = \sum_{j=0}^N (\hat{\ell}_N^2)^j \hat{E}_{m,j}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2) \quad (2.22)$$

Nous avons la relation suivante $\hat{C}_{\hat{\ell}_i}^{(m)}(\alpha, \beta) = \hat{C}_{\hat{\ell}_i}^{(1)}(\alpha, \beta) \hat{C}_{\hat{\ell}_i}^{(m-1)}(\alpha + 1, \beta + 1)$.

Le coefficient de tête est

$$\hat{E}_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2) = \hat{Q}_{m,N-1}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2).$$

À cause de l'hypothèse de récurrence il est positif.

Si $m = 1$, le terme constant $\hat{E}_{1,0}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2)$ est

$$(-1)^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\hat{\ell}_i^2 - \left(\frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 \right) \left(\hat{\ell}_i^2 - \left(\frac{\alpha + \beta + 1}{2} + 1 \right)^2 \right) \prod_{1 \leq s < r \leq N-1} (\hat{\ell}_r^2 - \hat{\ell}_s^2).$$

Il vaut 0 si $\ell_1 = 1$ et il a le signe de $(-1)^{N-1}$ si $\ell_1 > 1$.

Si $m > 1$, alors le terme constant est

$$\hat{E}_{m,0}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2) = (-1)^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\hat{\ell}_i^2 - \left(\frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2 \right) \hat{Q}_{m-1,N-1}(\alpha + 1, \beta + 1, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2).$$

Si $\ell_1 \geq 2$, alors $\hat{Q}_{m-1,N-1}(\alpha + 1, \beta + 1, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2) > 0$, en appliquant l'hypothèse de récurrence.

Si $\ell_1 = 1$, alors le déterminant $\hat{Q}_{m-1,N-1}(\alpha + 1, \beta + 1, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2)$ a sa première ligne $(1, 0, \dots, 0)$ et donc il devient

$$\prod_{i=2}^{N-1} \left(\hat{\ell}_i^2 - \left(\frac{\alpha + \beta + 1}{2} + 1 \right)^2 \right) \hat{Q}_{m-2,N-2}(\alpha + 2, \beta + 2, \hat{\ell}_2^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2)$$

qui est un cas précédent. Alors, $\forall m = 1, \dots, N$ et $\forall \ell_i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_N$, le terme constant de (2.22) est nul ou a le signe de $(-1)^{N-1}$.

Toujours à cause de l'hypothèse de récurrence $\hat{Q}_{m,N-1}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2)$ est positive. Donc le polynôme $\hat{Q}_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2)$, considéré comme un polynôme de degré N de la variable $X = \hat{\ell}_N^2$ a un produit de racines donné par $(-1)^N \frac{E_{m,0}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2)}{E_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2)}$. Il est non positif.

Or $\hat{Q}_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_{N-1}^2, X)$ a $N - 1$ racines positives évidentes : $\hat{\ell}_i^2, i = 1, \dots, N - 1$, donc la dernière racine est non positive, elle correspond à un ℓ_N complexe. Alors $\hat{Q}_{m,N}(\alpha, \beta, \hat{\ell}_1^2, \dots, \hat{\ell}_N^2) > 0 \forall \ell_N > \ell_{N-1}$ et le signe de $\lambda_j, j = 1, \dots, N$ est celui de $(-1)^j$.

□

Propriété 2.2.3 *Dans les cas d'Hermite et de Laguerre-Sonin*

$$\lambda_N = (-1)^N \frac{1}{\xi_N^{(N)}} \frac{1}{\prod_{j=1}^N \ell_j}. \quad (2.23)$$

Dans le cas de Jacobi

$$\lambda_N = \frac{(-1)^N}{\prod_{j=1}^N \ell_j (\ell_j + \alpha + \beta + 1)}. \quad (2.24)$$

Démonstration.

Par la méthode de Cramer

$$\lambda_N = \frac{Q_{N,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)}{Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N)}.$$

Il suffit de remplacer $Q_{N,N}(\ell_1, \dots, \ell_N)$ et $Q_N(\ell_1, \dots, \ell_N)$ par (2.16) et (2.18) dans le cas Hermite et Laguerre-Sonin, et par (2.17) et (2.19) dans le cas Jacobi.

□

Maintenant nous donnons quelques conditions nécessaires pour que $A_{\ell_1, \dots, \ell_N}$ soit dans $\bar{\mathcal{D}}$.

Propriété 2.2.4 *Si N est impair, alors $A_{\ell_1, \dots, \ell_N}$ n'appartient pas à $\bar{\mathcal{D}}$.*

Démonstration.

$$\text{signe de } (\lambda_N) = (-1)^N < 0.$$

Or λ_N doit être positif si $A_{\ell_1, \dots, \ell_N}$ est dans $\bar{\mathcal{D}}$ (voir Propriété 2.1.13).

□

Théorème 2.2.5 *Soit $A_{\ell_1, \dots, \ell_N}$ le point obtenu par l'intersection de N hyperplans différents $\mathcal{H}_{\ell_i}, i = 1, \dots, N, \ell_i \in \mathbb{N}$ et $0 < \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_N$. Dans le cas où N est pair, ce point appartient à $\bar{\mathcal{D}}$ si et seulement si*

$$\ell_{2i} = \ell_{2i-1} + 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

Démonstration.

Dans la propriété 2.1.13, $\bar{\mathcal{D}}$ est défini par $\mathcal{D} = \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{O}_i$, donc un point $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$

appartient à $\bar{\mathcal{D}}$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{O}_m, \forall m \geq 1$, c'est-à-dire si $1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j C_m^{(j)} \geq 0$,

$\forall m \geq 1$.

Soit $Q_N(x)$ le polynôme défini par :

$$Q_N(x) = \sum_{j=1}^N \xi_N^{(j)} (x - j + 1)_j \lambda_j \quad \text{dans le cas Hermite et Laguerre-Sonin.}$$

$$Q_N(x) = \sum_{j=1}^N (x - j + 1)_j (x + \alpha + \beta + 1)_j \lambda_j \quad \text{dans le cas Jacobi.}$$

$$\text{Alors } A_{\ell_1, \dots, \ell_N} \in \bar{\mathcal{D}} \iff Q_N(m) \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

C'est-à-dire, le polynôme $Q_N(x)$ doit être positif pour tout entier positif.

Dans le cas d'Hermite et de Laguerre-Sonin, le polynôme $Q_N(x)$ est de degré N et le coefficient de x^N est $\xi_N^{(N)} \lambda_N$. Dans le cas de Jacobi, il est de degré $2N$ et le coefficient de x^{2N} est λ_N .

Or $A_{\ell_1, \dots, \ell_N} \in \mathcal{H}_{\ell_i}, i = 1, \dots, N$. Donc $Q_N(\ell_i) = 0, i = 1, \dots, N$. Dans le cas Jacobi on a aussi $Q_N(-\ell_i - \alpha - \beta - 1) = 0, i = 1, \dots, N$, mais $-\ell_i - \alpha - \beta - 1 < 0$.

Alors, dans les deux cas, les seules racines positives du polynôme $Q_N(x)$ sont les $\ell_i, i = 1, \dots, N$ et son terme de tête est positif si N est pair. Par conséquent, $Q_N(x) < 0$ si $\ell_{2i-1} < x < \ell_{2i}$. Donc pour que le polynôme $Q_N(x)$ reste positif pour tout entier $m, m \geq 1$, il faut qu'il n'y ait pas d'entier dans l'intervalle $]\ell_{2i-1}, \ell_{2i}[$, i.e on doit avoir $\ell_{2i} = \ell_{2i-1} + 1, \forall i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, \frac{N}{2}$.

□

Comme on l'a déjà précisé, ces démonstrations ne concernent que le cas particulier où $I^0 = \emptyset$. Donc avant d'aller plus loin dans l'étude des domaines de positivité, on propose de généraliser ces propriétés dans le cas où on prend un nombre quelconque de normes parmi les N .

2.3 Cas général : r normes parmi N

2.3.1 Propriétés générales

Le but de cette partie est de chercher des points $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ sur la frontière du domaine de positivité \bar{D} . Nous nous intéressons plus particulièrement aux points extrêmes de cette frontière qui sont obtenus en utilisant l'intersection d'hyperplans \mathcal{H}_i et d'hyperplans $\lambda_j = 0$ de telle sorte que le nombre total d'hyperplans utilisés soit égal à N . Les coordonnées λ_m du point obtenu de cette intersection nous donnent les coefficients d'une inégalité de Landau-Kolmogorov (2.4). Nous allons aussi donner des informations précises sur les ensembles d'entiers I^0 , I^+ et I^- qui donnent la forme générale des inégalités.

Le lemme suivant donne le signe de certains déterminants qui seront rencontrés dans le calcul des λ_m

Lemme 2.3.1 *Soit r un entier fixé, $r \geq 2$.*

Soient ℓ_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_r$.

Soient q_i , $i = 1, \dots, r-1$, $r-1$ entiers tels que $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_{r-1}$.

Soit $D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{pmatrix}$ le déterminant défini par :

$$D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{r-1})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_{r-1})} \end{vmatrix}.$$

i) *Si $\ell_i \geq q_{i-1}$, $\forall i = 2, \dots, r$, alors $D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{pmatrix} > 0$.*

ii) *S'il existe $j \in \mathbb{N}$, $2 \leq j \leq r$, tel que, $\ell_j < q_{j-1}$, alors $D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{pmatrix} = 0$.*

Démonstration.

Commençons par montrer le **ii**). Comme les ℓ_i et les q_i sont ordonnés, s'il existe un entier j , $2 \leq j \leq r$, tel que, $\ell_j < q_{j-1}$ alors $\ell_i < q_k$, $\forall i = 1, \dots, j$ et $\forall k = j-1, \dots, r$. Donc $c_{\ell_i}^{(q_k)} = 0$, $\forall i = 1, \dots, j$ et $k = j-1, \dots, r$.

Dans ce cas, les j premières lignes de $D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{pmatrix}$ sont :

$$1 \quad C_{\ell_i}^{(q_1)} \quad \dots \quad C_{\ell_i}^{(q_{j-2})} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, j.$$

Le déterminant est nul car ces j lignes ne sont pas indépendantes.

Pour montrer le **i**), nous allons faire une démonstration par récurrence sur la taille d du

déterminant.

Cette propriété est trivialement vraie pour $d = 2$. En effet,

$$D \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ p_1 & \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_{e_1}^{(p_1)} \\ 1 & C_{e_2}^{(p_1)} \end{vmatrix} = C_{e_2}^{(p_1)} - C_{e_1}^{(p_1)} > 0 \quad \text{dès que } e_2 > e_1 \text{ et } e_2 > p_1.$$

On suppose la propriété vérifiée pour tout déterminant de taille $d \leq r - 1$, $\forall e_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$, tels que $1 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_d$, et $\forall p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d - 1$, tels que $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{d-1}$, qui satisfont la condition $e_i \geq p_{i-1}$, $\forall i = 1, \dots, d$:

$$D \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_d \\ p_1 & \dots & p_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_{e_1}^{(p_1)} & \dots & C_{e_1}^{(p_{d-1})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{e_d}^{(p_1)} & \dots & C_{e_d}^{(p_{d-1})} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.25)$$

D'après cette hypothèse de récurrence, $D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_{r-2} \end{pmatrix} > 0$. Donc les $r - 1$ points

de coordonnées $(C_{\ell_i}^{(q_1)}, \dots, C_{\ell_i}^{(q_{r-2})})$, pour $i = 1, \dots, r - 1$, ne sont pas dans le même hyperplan de \mathbb{R}^{r-2} , et forment donc un $(r - 1)$ -simplexe de \mathbb{R}^{r-1} . On peut alors définir l'hyperplan de \mathbb{R}^{r-1} qui passe par les $r - 1$ points de coordonnées $(C_{\ell_i}^{(q_1)}, \dots, C_{\ell_i}^{(q_{r-1})})$, pour $i = 1, \dots, r - 1$, par l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{r-1})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{\ell_{r-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{r-1})} \\ 1 & X_{q_1} & \dots & X_{q_{r-1}} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

On définit $x_i(t)$, pour $i = 1, \dots, r - 2$, par

$$x_i(t) = C_t^{(q_i)}$$

et on définit $f(t)$ par

$$f(t) = C_t^{(q_{r-1})}.$$

Rappelons que $C_n^{(m)} = 0$, si $n - m + 1 \leq 0$.

Pour $r = 2$, $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 5$, l'hyperplan (2.26) est la droite bleue de la figure 2.3 et $f(t)$ est représentée par la courbe rouge.

Les $x_i(t)$, $i = 1, \dots, r - 2$, sont des fonctions convexes en fonction de t . En effet, ce sont des fonctions polynomiales dont les racines respectives sont les q_i premiers entiers, or, d'après la définition des $C_n^{(m)}$, ces fonctions sont nulles pour $t < q_i - 1$ qui est la plus grande racine, donc elles sont convexes.

Pour les mêmes raisons $f(t)$ est une fonction convexe de t . Elle est aussi strictement convexe en fonction de $x_i(t)$, $i = 1, \dots, r - 2$, quand $t > q_{r-1} - 1$ ($\forall \alpha > -1$ et $\beta > -1$

dans le cas Jacobi).

L'hyperplan, défini par (2.26), peut être considéré comme l'hyperplan passant par $(r-1)$ points $(C_{\ell_i}^{(q_1)}, \dots, C_{\ell_i}^{(q_{r-1})})$, $i = 1, \dots, r-1$, situés sur le graphe de $f(t)$ (voir la figure 2.3).

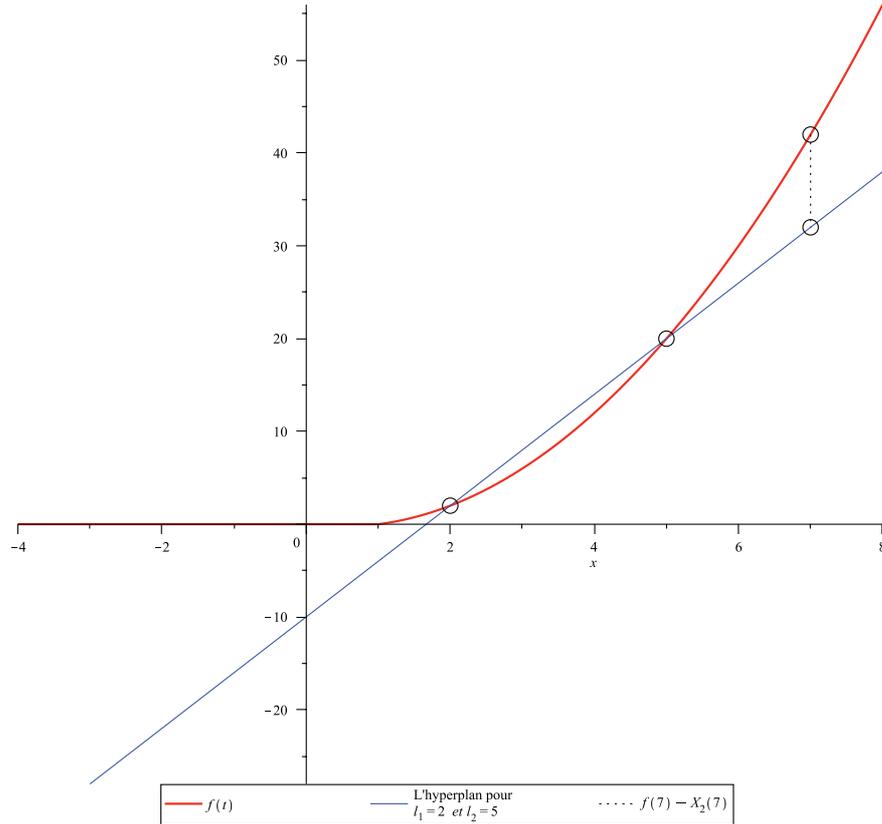


FIGURE 2.2 – La fonction convexe $f(t)$.

On prend $X_{q_j} = C_{\ell_r}^{(q_j)}$ pour $j = 1, \dots, r-2$, avec $\ell_r > \ell_{r-1}$ et $\ell_r \geq q_{r-1}$. À ces X_{q_j} , $j = 1, \dots, r-2$, correspond un $X_{q_{r-1}}(\ell_r)$ tel que le point de coordonnées $(X_{q_1}, \dots, X_{q_{r-2}}, X_{q_{r-1}}(\ell_r))$, soit dans l'hyperplan (2.26). Alors on peut écrire :

$$D \begin{pmatrix} \ell_1 & , \dots , & \ell_r \\ q_1 & , \dots , & q_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{r-2})} & C_{\ell_1}^{(q_{r-1})} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & C_{\ell_{r-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{r-2})} & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{r-1})} \\ 1 & X_{q_1} & \dots & X_{q_{r-2}} & C_{\ell_r}^{(q_{r-1})} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{r-2})} & C_{\ell_1}^{(q_{r-1})} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & C_{\ell_{r-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{r-2})} & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{r-1})} \\ 1 & X_{q_1} & \dots & X_{q_{r-2}} & X_{q_{r-1}}(\ell_r) \end{vmatrix}.$$

En développant les deux déterminants par rapport à leurs dernière ligne on trouve

$$D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{pmatrix} = (C_{\ell_r}^{(q_{r-1})} - X_{r-1}(\ell_r)) D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_{r-2} \end{pmatrix}$$

Comme $f(t)$ est strictement convexe pour $t > q_{r-1} - 1$ et que chaque $x_j(\ell_r) > C_{\ell_i}^{(q_j)}$, pour $i = 1, \dots, r-1$, et $j = 1, \dots, r-2$, alors $X_{r-1}(\ell_r) < C_{\ell_r}^{(q_{r-1})}$.

Donc $D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ q_1 & \dots & q_{r-1} \end{pmatrix} > 0$.

□

À partir de ce Lemme on en déduit la positivité d'autres types de déterminants.

Corollaire 2.3.2 *Soit r un entier fixé, $r \geq 2$.*

Soient ℓ_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_r$.

Soient q_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r$.

Si $\ell_i \geq q_i$, $i = 1, \dots, r$, alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

est positif.

Démonstration.

Dans le cas des mesures d'Hermitte et de Laguerre-Sonin nous avons $C_{\ell_i}^{(q_j)} = C_{\ell_i}^{(q_1)} C_{\ell_i - q_1}^{(q_j - q_1)}$, donc le déterminant (2.27) donne :

$$\prod_{i=1}^r C_{\ell_i}^{(q_1)} D \begin{pmatrix} \ell_1 - q_1 & \dots & \ell_r - q_1 \\ q_2 - q_1 & \dots & q_r - q_1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas de la mesure de Jacobi nous avons $C_{\ell_i}^{(q_j)}(\alpha, \beta) = C_{\ell_i}^{(q_1)}(\alpha, \beta) C_{\ell_i - q_1}^{(q_j - q_1)}(\alpha, \beta)$ et donc le déterminant (2.27) donne :

$$\prod_{i=1}^r C_{\ell_i}^{(q_1)}(\alpha, \beta) D^{\alpha + q_1, \beta + q_1} \begin{pmatrix} \ell_1 - q_1 & \dots & \ell_r - q_1 \\ q_2 - q_1 & \dots & q_r - q_1 \end{pmatrix}.$$

On pose $e_i = \ell_i - q_1$ et $p_i = q_{i-1} + q_1$, pour $i = 1, \dots, r$.

On a $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_r$, $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r$ et $\ell_i \geq q_i$, $i = 1, \dots, r$,

alors $0 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_r$ et $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_r$.

Or $e_i = \ell_i - q_1 \geq q_i - q_1 = p_{i-1}$, $i = 2, \dots, r$. Donc le Lemme 2.3.1 s'applique et le déterminant 2.27 est positif pour les trois cas de mesure.

□

Maintenant nous allons donner une propriété qui concerne le signe des coordonnées non nulles λ_m d'un point obtenu par l'intersection d'un ensemble de r hyperplans \mathcal{H}_i et un ensemble de $N - r$ hyperplans $\lambda_j = 0$.

Théorème 2.3.3 *Soit r un entier fixé, $r \geq 2$.*

Soient ℓ_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_r$.

Soient q_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r$.

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{q_1} \\ \vdots \\ \lambda_{q_r} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

- i) *Si $\ell_i \geq q_i$, $\forall i = 1, \dots, r$, alors le système linéaire (2.28) a une solution unique, et $\text{signe}(\lambda_{q_j}) = (-1)^j$, pour $j = 1, \dots, r$.*
- ii) *S'il existe i , $1 \leq i \leq r$, tel que $\ell_i < q_i$, alors le système linéaire (2.28) n'a pas de solution.*

Démonstration.

i) D'après le Corollaire 2.3.2, le déterminant du système linéaire (2.28) est positif. Donc il admet une solution unique.

Pour obtenir le signe de chaque λ_{q_j} , il suffit de les calculer par la méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} \lambda_{q_j} &= \frac{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{j-1})} & -1 & C_{\ell_1}^{(q_{j+1})} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_{j-1})} & -1 & C_{\ell_r}^{(q_{j+1})} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix}} \\ &= (-1)^j \frac{\begin{vmatrix} 1 & C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{j-1})} & C_{\ell_1}^{(q_{j+1})} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_{j-1})} & C_{\ell_r}^{(q_{j+1})} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix}}, \end{aligned}$$

$\forall j = 1, \dots, r$, avec la convention : si $j = r$, alors la dernière colonne aura des exposants (q_{r-1}) .

On pose $p_i = q_i$, pour $i = 1, \dots, j-1$, et $p_i = q_{i+1}$, pour $i = j, \dots, r-1$. Alors

$$\lambda_{q_j} = (-1)^j \frac{D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_r \\ p_1 & \dots & p_{r-1} \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix}}. \quad (2.29)$$

Le dénominateur de λ_{q_j} est positif (voir le corollaire 2.3.2). Montrons que le numérateur l'est aussi.

Si $i = 1, \dots, j-1$, alors $p_{i-1} = q_{i-1}$ et $\ell_i \geq q_i > q_{i-1}$, donc $\ell_i \geq p_{i-1}$.

Si $i = j, \dots, r-1$, alors $p_{i-1} = q_i$ et $\ell_i \geq q_i$, donc $\ell_i \geq p_{i-1}$.

Alors, d'après le Lemme 2.3.1, le numérateur est aussi positif, d'où le résultat sur le signe des λ_{q_j} .

ii) Soit i le premier entier, $1 \leq i \leq r$, pour lequel $\ell_i < q_i$, i.e. $\ell_j \geq q_j, \forall j = 1, \dots, i-1$.

Comme les ℓ_j et les q_k sont ordonnés alors $\ell_j > q_k$ pour $j = 1, \dots, i$ et $k = i, \dots, r-1$.

Et donc les i premières lignes de la matrice du système (2.28) sont :

$$\begin{pmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{i-1})} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_i}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_i}^{(q_{i-1})} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le Corollaire 2.3.2, $\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{i-1})} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_{i-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{i-1}}^{(q_{i-1})} \end{vmatrix} > 0$.

En utilisant le Lemme 2.3.1, le déterminant $D \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_i \\ q_1 & \dots & q_{i-1} \end{pmatrix} > 0$, car $\ell_i > \ell_{i-1} \geq$

q_{i-1} .

Par conséquent, le vecteur $(-1, \dots, -1)^T$, second membre du système linéaire (2.28) ne peut pas appartenir à l'espace vectoriel engendré par les colonnes de sa matrice. Donc le système n'a pas de solution.

□

Désormais on pose $q_r = N$.

Le système linéaire (2.28) peut être considéré comme le système donnant les coordonnées du point d'intersection de r hyperplans \mathcal{H}_{ℓ_i} , $i = 1, \dots, r$, avec $N - r$ hyperplans $\lambda_j = 0$, $1 \leq j \leq N$, et $j \neq q_i$, $i = 1, \dots, r$.

Pour $\ell_i \geq q_i, \forall i = 1, \dots, r$, ce système a une solution unique qui est un point de \mathbb{R}^N de composantes λ_j , $j = 1, \dots, N$, avec $\lambda_j = 0, \forall j \neq q_i$ pour $i = 1, \dots, r$.

Propriété 2.3.4 *Si r est impair, alors ce point n'appartient pas à $\bar{\mathcal{D}}$.*

Démonstration.

D'après le Théorème 2.3.3

$$\text{signe de } (\lambda_N) = \text{signe de } (\lambda_{q_r}) = (-1)^r < 0.$$

Or λ_N doit être positive pour que le point λ soit dans $\bar{\mathcal{D}}$ (voir la propriété 2.1.13).

□

Propriété 2.3.5 *Le point A de \mathbb{R}^N de coordonnées $\lambda_i, i = 1, \dots, N$, où $\lambda_{q_i}, i = 1, \dots, r$, sont la solution de (2.28) et $\lambda_j = 0, \forall j \neq q_i$ pour $i = 1, \dots, r$, n'appartient pas à un autre hyperplan $\mathcal{H}_s, \forall s \neq \ell_i, i = 1, \dots, r$.*

Démonstration.

Le système linéaire

$$\begin{pmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \cdots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \cdots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \\ C_s^{(q_1)} & \cdots & C_s^{(q_r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{q_1} \\ \vdots \\ \lambda_{q_r} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

n'a pas de solution.

En effet, si on effectue des permutations sur la suite $\{\ell_1, \dots, \ell_r, s\}$ pour obtenir une suite $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{r+1}\}$ telle que $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{r+1}$. Alors le vecteur $(1, \dots, 1)^T$ de \mathbb{R}^{r+1} et la matrice de (2.30) nous donnent une matrice dont le déterminant est $D \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_{r+1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$. D'après le Lemme 2.3.1, ce déterminant est soit positif, soit nul.

S'il est positif, alors (2.30) n'a pas de solution. S'il est nul, alors il existe $j, 2 \leq j \leq r+1$, tel que $\sigma_j < q_{j-1}$. Par conséquent, le système (2.30) n'a pas de solution d'après le point ii) du Théorème 2.3.3.

□

Dans le cas où r est pair, la suite $\{\ell_1, \dots, \ell_r\}$ doit satisfaire certaines conditions pour que le point solution du système linéaire (2.28) soit dans $\bar{\mathcal{D}}$.

Théorème 2.3.6 *Si r est pair, le point A de \mathbb{R}^N dont les composantes $\lambda_{q_i}, i = 1, \dots, r$, sont la solution de (2.28) et $\lambda_j = 0, \forall j \neq q_i$ pour $i = 1, \dots, r$, appartient à $\bar{\mathcal{D}}$ si et seulement si*

$$\ell_{2i} = \ell_{2i-1} + 1, \quad \forall i = 1, \dots, \frac{r}{2}.$$

Démonstration.

D'après la propriété 2.1.13, un point $A = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ appartient à $\bar{\mathcal{D}}$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{O}_s, \forall s \geq 1$, c'est-à-dire si $1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j C_s^{(j)} \geq 0, \forall s \geq 1$. Dans notre cas, ceci revient à

$$\text{montrer que } 1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{q_j} C_s^{(q_j)} \geq 0, \forall s \geq 1.$$

Les λ_{q_j} , $j = 1, \dots, r$, solution du système linéaire (2.28) peuvent être considérés comme les coefficients de X_{q_j} dans le rapport de déterminants suivant

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & X_{q_1} & \dots & X_{q_r} \\ 1 & C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix}}. \quad (2.31)$$

En effet, en développant le numérateur par rapport à la première ligne on retrouve l'expression donnée par (2.29).

Si (2.31) est nul, on obtient l'hyperplan qui passe par les r points de coordonnées $(C_{\ell_i}^{(q_1)}, \dots, C_{\ell_i}^{(q_r)})$, $i = 1, \dots, r$, c'est-à-dire l'hyperplan d'équation :

$$1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{q_j} X_{q_j} = 0.$$

Maintenant, on veut montrer que $1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{q_j} C_s^{(q_j)} > 0$, $\forall s \neq \ell_i$ pour $i = 1, \dots, r$, soit encore :

$$\begin{vmatrix} 1 & C_s^{(q_1)} & \dots & C_s^{(q_r)} \\ 1 & C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & C_{\ell_r}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_r}^{(q_r)} \end{vmatrix} > 0, \quad \forall s \neq \ell_i \text{ pour } i = 1, \dots, r. \quad (2.32)$$

On permute la suite d'entiers $\{s, \ell_1, \dots, \ell_r\}$ pour obtenir la suite $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{r+1}\}$ telle que $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{r+1}$. Donc (2.32) = $(-1)^j D \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_{r+1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$, où j est le nombre

de permutations

Si $j = 0$, alors $\sigma_1 = s$ et $\sigma_i = \ell_{i-1} \geq q_{i-1}$, $i = 2, \dots, r$.

Si $j > 0$, alors $\ell_j < s < \ell_{j+1}$ donc $\sigma_i = \ell_i \geq q_i > q_{i-1}$, $i = 1, \dots, j$, $\sigma_{j+1} = s > \ell_j \geq q_j$ et $\sigma_i = \ell_{i-1} \geq q_{i-1}$, $i = j+1, \dots, r$.

Alors les conditions du Lemme 2.3.1 sont satisfaites et le déterminant $D \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_{r+1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$

est positif.

Donc le signe de (2.32) est donné par $(-1)^j$. Il est positif si le nombre de permutations j est pair, $\forall s \neq \ell_i$, $i = 1, \dots, r$, ce qui revient à prendre

$$\ell_{2i} = \ell_{2i-1} + 1, \quad \forall i = 1, \dots, \frac{r}{2}.$$

□

Dans la propriété suivante, nous allons étudier le comportement asymptotique des deux dernières composantes non-nulles du point A (i.e $\lambda_{q_{r-1}}$ et λ_{q_r}).

Propriété 2.3.7 *Soit r un entier fixé, $r \geq 2$.*

Soient q_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r \leq N$.

Soit λ un point de \mathbb{R}^N dont les composantes $\lambda_j = 0$, $\forall j \neq q_i$ pour $i = 1, \dots, r$.

i) *Soit \mathcal{H}_i un hyperplan quelconque d'équation*

$$1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{q_j} C_i^{(q_j)} = 0.$$

Alors tout point $\lambda \in \mathcal{H}_i$ est tel que λ_{q_r} tend vers 0 quand i tend vers l'infini.

ii) *Soient \mathcal{H}_i et \mathcal{H}_{i-1} deux hyperplans quelconques d'équations*

$$1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{q_j} C_i^{(q_j)} = 0.$$

$$1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{q_j} C_{i-1}^{(q_j)} = 0.$$

Alors tout point $\lambda \in \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i-1}$ est tel que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{q_r} = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{q_{r-1}} = 0.$$

Démonstration.

i) Cette propriété est déjà connue pour $q_r = N$, mais il est intéressant de refaire la démonstration car on utilise la même technique pour le ii).

Un point $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tel que $\lambda_j = 0$, $\forall j \neq q_i$ pour $i = 1, \dots, r$ et λ_{q_m} fixés pour $m = 1, \dots, r-1$, appartient à un hyperplan \mathcal{H}_i s'il vérifie son équation : $1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{q_j} C_i^{(q_j)} = 0$.

Donc en divisant par le coefficient de λ_{q_r} on trouve :

$$\frac{1}{C_i^{(q_r)}} + \sum_{m=1}^{r-1} \lambda_{q_m} \frac{C_i^{(q_m)}}{C_i^{(q_r)}} + \lambda_{q_r} = 0 \quad (2.33)$$

avec

$$\frac{C_i^{(q_m)}}{C_i^{(q_r)}} = \frac{1}{\xi_i^{(q_r - q_m)} (i - q_r + 1)_{q_r - q_m}} \quad \text{pour } m = 1, \dots, r-1.$$

Alors $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{C_i^{(q_r)}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{C_i^{(q_m)}}{C_i^{(q_r)}} = 0$, $m = 1, \dots, r-1$. Par conséquent, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{q_r} = 0$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tel que $\lambda_j = 0$, $\forall j \neq q_i$ pour $i = 1, \dots, r$ et λ_{q_m} fixés pour $m = 1, \dots, r-2$.

Si $\lambda \in \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i-1}$, alors, en utilisant la même technique que pour **i**), nous obtenons deux équations (2.33) pour les indices i et $i - 1$, leur différence donne

$$\frac{C_i^{(q_r)} - C_{i-1}^{(q_r)}}{C_{i-1}^{(q_r)} C_i^{(q_r)}} + \sum_{m=1}^{r-1} \frac{C_i^{(q_r)} C_{i-1}^{(q_m)} - C_{i-1}^{(q_r)} C_i^{(q_m)}}{C_{i-1}^{(q_r)} C_i^{(q_r)}} \lambda_{q_m} = 0.$$

Nous divisons cette équation par le coefficient de $\lambda_{q_{r-1}}$.

$$\frac{C_i^{(q_r)} - C_{i-1}^{(q_r)}}{C_i^{(q_r)} C_{i-1}^{(q_{r-1})} - C_{i-1}^{(q_r)} C_i^{(q_{r-1})}} + \sum_{m=1}^{r-2} \frac{C_i^{(q_r)} C_{\ell_{r-1}}^{(q_m)} - C_{i-1}^{(q_r)} C_i^{(q_m)}}{C_i^{(q_r)} C_{i-1}^{(q_{r-1})} - C_{i-1}^{(q_r)} C_{\ell_r}^{(q_{r-1})}} \lambda_{q_m} + \lambda_{q_{r-1}} = 0.$$

Soit A le coefficient $\frac{C_i^{(q_r)} - C_{i-1}^{(q_r)}}{C_i^{(q_r)} C_{i-1}^{(q_{r-1})} - C_{i-1}^{(q_r)} C_i^{(q_{r-1})}}$ et soit B_m le coefficient $\frac{C_i^{(q_r)} C_{\ell_{r-1}}^{(q_m)} - C_{i-1}^{(q_r)} C_i^{(q_m)}}{C_i^{(q_r)} C_{i-1}^{(q_{r-1})} - C_{i-1}^{(q_r)} C_{\ell_r}^{(q_{r-1})}}$, pour $m = 1, \dots, r - 2$. Donc

$$A = \frac{q_r}{\xi_{i-1}^{(q_{r-1})} (q_r - q_{r-1}) (i - q_{r-1} + 1)_{q_{r-1}}},$$

$$B_m = \frac{q_r - q_m}{q_r - q_{r-1}} \frac{1}{(i - q_{r-1} + 1)_{q_{r-1} - q_m}} \frac{1}{\xi_{i-1+q_m}^{(q_{r-1} - q_m)}}, \quad j = 1, \dots, r - 2.$$

Quand i tend vers l'infini, $\lim_{i \rightarrow \infty} A = \lim_{i \rightarrow \infty} B_m = 0$.

Par conséquent, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{q_{r-1}} = 0$.

□

Propriété 2.3.8 Soit r un entier pair fixé, $r \geq 2$.

Soit A le point de \mathbb{R}^N appartenant à $\bar{\mathcal{D}}$, dont les composantes λ_{q_i} , $i = 1, \dots, r$, sont la solution de (2.28) et $\lambda_j = 0$, $\forall j \neq q_i$ pour $i = 1, \dots, r$.

Alors $\lim_{\ell_r \rightarrow \infty} \lambda_{q_r} = \lim_{\ell_r \rightarrow \infty} \lambda_{q_{r-1}} = 0$.

Démonstration.

Comme r est pair et A , solution de (2.28), est dans $\bar{\mathcal{D}}$, alors à partir du Théorème 2.3.6 on a $\ell_r = \ell_{r-1} + 1$,

Donc, à partir de la Propriété 2.3.7 ($i = \ell_r$), on en déduit que les limites sont nulles.

□

Remarque 2.3.9 Sous les hypothèses du Corollaire 2.3.2, ce résultat est satisfait pour tout ensemble d'hyperplans \mathcal{H}_{ℓ_j} , $j = 1, \dots, r$, r pair, tels que $\ell_{2i} = \ell_{2i-1} + 1$, $\forall i = 1, \dots, \frac{r}{2}$, et ℓ_{2i} fixés pour $i = 1, \dots, \frac{r}{2} - 1$.

Dans la partie suivante nous allons définir la frontière du domaine de positivité pour pouvoir écrire les différentes inégalités de type Landau-Kolmogorov. Nous distinguerons deux cas : r pair et r impair. Dans chaque cas nous détaillerons un exemple ($r = 2$ et $r = 3$).

2.3.2 Inégalités faisant intervenir $r + 1$ normes, $r \geq 2$ pair

Dans cette partie nous voulons donner des inégalités de type Landau-Kolmogorov faisant intervenir $r + 1$ normes, r pair.

Soit $r \geq 2$ un entier pair.

Soient q_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r = N$.

Soient ℓ_i , $i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_r$, vérifiant les conditions suivantes : $\ell_i \geq q_i$, $\forall i = 1, \dots, r$ et $\ell_{2i} = \ell_{2i-1} + 1$, $\forall i = 1, \dots, \frac{r}{2}$.

Soit $A = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, le point d'intersection des hyperplans \mathcal{H}_{ℓ_i} , $i = 1, \dots, r$, et des hyperplans $(\lambda_j = 0)$, $\forall j \neq q_i$, $i = 1, \dots, r$.

Nous obtenons immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 2.3.10 *Au point A , défini ci-dessus, correspond l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante pour tout polynôme $p \in \mathcal{P}$:*

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_m \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \geq \sum_{m \in I^-} |\lambda_m| \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 \quad (2.34)$$

ou encore :

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_m \|\Phi(x)^{\frac{m}{2}} p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 \geq \sum_{m \in I^-} |\lambda_m| \|\Phi(x)^{\frac{m}{2}} p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 \quad (2.35)$$

avec $I^+ = \{q_{2j}, j = 1, \dots, \frac{r}{2} - 1\}$ et $I^- = \{q_{2j+1}, j = 0, \dots, \frac{r}{2} - 1\}$.

Démonstration.

Les ℓ_i , $i = 1, \dots, r$, et les q_i , $i = 1, \dots, r$, satisfont les hypothèses du Théorème 2.3.3. Alors le point A appartient à $\bar{\mathcal{D}}$, domaine de positivité de a , c'est-à-dire

$$a_A(p, p) = \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i} \|p^{(q_i)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_i})}^2 \geq 0$$

De plus, les coordonnées non nulles de A sont données par le système linéaire (2.28). Alors signe $\lambda_{q_i} = (-1)^i$, $i = 1, \dots, r$, (voir le Théorème 2.3.3 i) et $\lambda_{q_r} = \lambda_N > 0$. D'où les ensembles d'entiers I^- , I^+ et I^0 :

$$\begin{cases} I^- = \{q_{2j+1}, j = 0, \dots, \frac{r}{2} - 1\}, \\ I^+ = \{q_{2j}, j = 1, \dots, \frac{r}{2} - 1\}, \\ I^0 = \{m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq N, m \neq q_i \text{ pour } i = 1, \dots, r\}. \end{cases}$$

Ce qui donne l'inégalité (2.34).

L'inégalité (2.35) est une conséquence de la Propriété 2.1.5. En effet

$$\begin{aligned} \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_m)}^2 &= (p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_m)} = (\Phi(x)^m p^{(m)}, p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_0)} \\ &= (\Phi(x)^{\frac{m}{2}} p^{(m)}, \Phi(x)^{\frac{m}{2}} p^{(m)})_{L^2(\Omega; \mu_0)} = \|\Phi(x)^{\frac{m}{2}} p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2. \end{aligned}$$

□

À partir de ces points A nous allons définir une partie de la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$ de façon plus précise.

Soit \mathcal{V}_s la variété linéaire de dimension $r-2$ obtenue par $\mathcal{V}_s = (\mathcal{H}_s \cap \mathcal{H}_{s+1}) \bigcap_{m \in I^0} (\lambda_m = 0)$.

À cause du Théorème 2.3.6, un point A^s de $\bar{\mathcal{D}}$ qui appartient à l'hyperplan \mathcal{H}_s , est soit dans \mathcal{V}_s , soit dans \mathcal{V}_{s-1} . Alors, sur chaque hyperplan \mathcal{H}_s , on a deux ensembles de points $A^s \in \bar{\mathcal{D}}$.

Le premier ensemble de points est défini par $\bigcup_{J_s \subset \mathbb{N}^*} ((\bigcap_{i \in J_s} \mathcal{V}_i) \cap \mathcal{V}_s)$ où J_s est un ensemble d'entiers tel que :

- $\text{card } J_s = \frac{r}{2} - 1$,
- tout $i \in J_s$ est tel que $i + 1 < s$ ou $i > s + 1$,
- $\forall i, j \in J_s, |i - j| \geq 2$.

Le second ensemble de points est donné par $\bigcup_{J_s^* \subset \mathbb{N}^*} ((\bigcap_{i \in J_s^*} \mathcal{V}_i) \cap \mathcal{V}_{s-1})$ où J_s^* est un ensemble d'entiers tel que

- $\text{card } J_s^* = \frac{r}{2} - 1$,
- tout $i \in J_s^*$ est tel que $i + 1 < s - 1$ ou $i > s$,
- $\forall i, j \in J_s^*, |i - j| \geq 2$.

Théorème 2.3.11 *Tous les $(r-1)$ -simplexes obtenus par r points A^s sont sur la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. Chacun des points A^s appartient à $\bar{\mathcal{D}}$ qui est un domaine convexe. Alors le $(r-1)$ -simplexe formé par ces points appartient à $\bar{\mathcal{D}}$. Mais il est aussi dans \mathcal{H}_s , donc il appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$.

□

Remarque 2.3.12 *Un sous-ensemble de r points A^s pris uniquement dans l'un des deux ensembles définis précédemment n'est pas un $(r-1)$ -simplexe. En effet, dans ce cas les r points seront dans la même variété linéaire de dimension $r-2$.*

Mais tout sous-ensemble de r points A^s contenant au moins un point de chacun de ces deux ensembles est un $(r-1)$ -simplexe, car ils sont dans deux variétés linéaires de dimension $r-2$ différentes mais dans le même hyperplan \mathcal{H}_s qui est de dimension $r-1$. Donc pour former un $(r-1)$ -simplexe à partir des points A^s , il faut prendre au moins un point dans chacune des deux variétés linéaires \mathcal{V}_s et \mathcal{V}_{s+1} .

Corollaire 2.3.13 *Tout point, pris dans n'importe lequel des $(r - 1)$ -simplexes définis précédemment, nous donne une inégalité de type Landau-Kolmogorov similaire à (2.34) (ou(2.35)).*

Démonstration. Un point de la frontière appartient forcément à un $(r - 1)$ -simplexe formé par r points A^s qui ont le même signe de composantes. Donc les inégalités de type Landau-Kolmogorov correspondantes seront similaires à (2.34).

□

La collection de ces simplexes nous donne une partie de la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{H}_s . Chaque point de ce domaine donne une inégalité de type Landau-Kolmogorov. Les non triviales sont celles qui correspondent à un point dans $\bar{\mathcal{D}} - E$, où E est l'orthant positif de \mathbb{R}^N .

Inégalités faisant intervenir 3 normes

Dans cette partie nous donnons toutes les inégalités de type Landau-Kolmogorov faisant intervenir trois normes. Certaines sont déjà connues dans la littérature (voir le premier Chapitre). Nous allons les comparer avec les nôtres et nous ajoutons des résultats sur les meilleures inégalités.

Soit k un entier fixé tel que $1 \leq k \leq N - 1$. On considère le cas où $\lambda_m = 0$, $m = 1, \dots, N - 1$, $m \neq k$, i.e. $r = 2$, $q_1 = k$ et $q_2 = N$. Les ensembles de points introduits au début de cette section, sont réduits à un point donné par l'intersection de deux hyperplans consécutifs \mathcal{H}_i et \mathcal{H}_{i+1} avec les hyperplans $\lambda_m = 0$, $m = 1, \dots, N - 1$, $m \neq k$. Donc l'étude se fera uniquement dans le plan de coordonnées (λ_k, λ_N) .

Si $i < k$ alors $\mathcal{H}_i \cap (\lambda_k, \lambda_N) = \emptyset$, et si $i \geq k$ l'intersection de chaque hyperplan \mathcal{H}_i avec le plan de coordonnées (λ_k, λ_N) est une droite dans ce plan. Par souci de simplicité nous continuerons à désigner ces droites par \mathcal{H}_i .

Soit A_i le point du plan (λ_k, λ_N) donné par $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1}$. Ses coordonnées sont :

$$\begin{aligned} A_i &= (\lambda_k(A_i), \lambda_N(A_i)) \\ &= \left(\frac{C_i^{(N)} - C_{i+1}^{(N)}}{C_i^{(k)} C_{i+1}^{(N)} - C_i^{(N)} C_{i+1}^{(k)}}, \frac{C_{i+1}^{(k)} - C_i^{(k)}}{C_i^{(k)} C_{i+1}^{(N)} - C_i^{(N)} C_{i+1}^{(k)}} \right). \end{aligned}$$

Remarque 2.3.14 :

$\lambda_k(A_i) < 0$ et $\lambda_N(A_i) > 0$ pour les trois mesures.

De plus, $A_i \in \bar{\mathcal{D}}$ alors

$$\begin{aligned} a_{A_i}(P_j, P_j) &= 0 \text{ pour } j = i \text{ et } i + 1, \\ &> 0 \text{ Pour tout autre entier positif,} \end{aligned}$$

où P_j est le polynôme orthogonal de degré j par rapport à la mesure μ_0 .

Par conséquent, nous obtenons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov :

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega;\mu_k)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_k(A_i)} \|p\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2 - \frac{\lambda_N(A_i)}{\lambda_k(A_i)} \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega;\mu_N)}^2, \forall p \in \mathcal{P}. \quad (2.36)$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $p = c_1 P_i + c_2 P_{i+1}$ où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

Remarque 2.3.15 (2.36) correspond au cas (iv) du Théorème 1.2.13 (le Théorème 1 dans [7]).

Remarque 2.3.16 À chaque point A_i de la frontière de \bar{D} correspond une inégalité (2.36) satisfaite $\forall p \in \mathcal{P}$.

Nous explicitons les coordonnées du point A_i pour les trois mesures

$$A_i = \left(\frac{-N}{(N-k)(i-k+2)_k \xi_i^{(k)}}, \frac{k}{(N-k)(i-N+2)_N \xi_i^{(N)}} \right). \quad (2.37)$$

Ainsi, $\forall p \in \mathcal{P}$,

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega;\mu_k)}^2 \leq \frac{(N-k)\xi_i^{(k)}(i-k+2)_k}{N} \|p\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2 + \frac{k}{N} \frac{1}{\xi_{i+k}^{(N-k)}} \frac{1}{(i-N+2)_{N-k}} \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega;\mu_N)}^2.$$

Le segment $[A_{i-1}A_i]$ est une partie de la frontière de \bar{D} . Alors tout point $M = (\lambda_k(M), \lambda_N(M))$ défini par $M = \rho A_{i-1} + (1-\rho)A_i$, avec $\rho \in [0, 1]$, nous donne une inégalité de type Landau-Kolmogorov, $\forall p \in \mathcal{P}$,

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega;\mu_k)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_k(M)} \|p\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2 - \frac{\lambda_N(M)}{\lambda_k(M)} \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega;\mu_N)}^2. \quad (2.38)$$

Si $\rho \in]0, 1[$, l'égalité est atteinte si et seulement si $p = cP_i$, où c est une constante réelle arbitraire.

Les coordonnées du point M sont données par

$$M = \left(\frac{-N(i-k+1+k\rho\frac{\xi_{2i}^{(1)}}{\xi_{i-1}^{(1)}})}{(N-k)\xi_i^{(k)}(i-k+1)_{k+1}}, \frac{k(i-N+1+N\rho\frac{\xi_{2i}^{(1)}}{\xi_{i-1}^{(1)}})}{(N-k)\xi_i^{(N)}(i-N+1)_{N+1}} \right)$$

et donc l'inégalité (2.38) devient

$$\begin{aligned} \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega;\mu_k)}^2 &\leq \frac{(N-k)\xi_i^{(k)}(i-k+1)_{k+1}}{N(i-k+1+k\rho\frac{\xi_{2i}^{(1)}}{\xi_{i-1}^{(1)}})} \|p\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2 \\ &+ \frac{k(i-N+1+N\rho\frac{\xi_{2i}^{(1)}}{\xi_{i-1}^{(1)}})}{N(i-k+1+k\rho\frac{\xi_{2i}^{(1)}}{\xi_{i-1}^{(1)}})} \frac{\|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega;\mu_N)}^2}{\xi_{i+k}^{(N-k)}(i-N+1)_{N-k}}. \end{aligned}$$

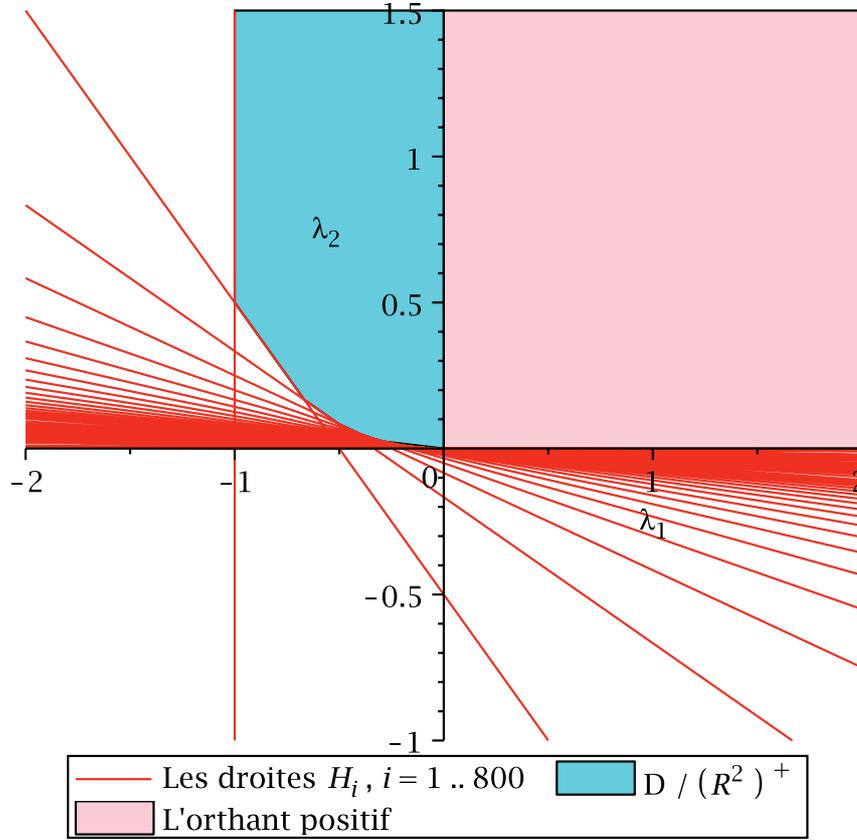


FIGURE 2.3 – Le domaine de positivité dans le cas de la mesure Laguerre-Sonin pour $k = 1$ et $N = 2$.

Remarque 2.3.17 :

Pour les trois mesures, si $k = 1$ et $N = 2$ l'inégalité (2.38) correspond à l'inégalité (1.19) pour un point M du segment $[A_{i-1}A_i]$. En effet, en utilisant la Propriété 2.1.5, l'inégalité (1.19) devient

$$(2n\xi_n^{(1)} + \Psi'(0))\|p'\|_{L^2(\Omega;\mu_1)}^2 \leq (n\xi_n^{(1)})^2\|p\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2 + \|p''\|_{L^2(\Omega;\mu_2)}^2.$$

Par identification on trouve

$$\rho = \frac{\xi_{n-1}^{(1)}}{2n\xi_n^{(1)}\xi_{2n}^{(1)}} \left(2n\xi_n^{(1)} + (n+1)\Psi'(0) \right).$$

Dans le cas de la mesure d'Hermite (inégalité (1.12)) et Laguerre-Sonin $\rho = \frac{n-1}{2n} < 1$.

Dans le cas de la mesure de Jacobi $\rho = \frac{(2n+\alpha+\beta+2)(n+\alpha+\beta)(n-1)}{2n(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)} < 1$.

Pour la mesure d'Hermite :

Si $k = 1$ et $N = 3$, l'inégalité (2.38) correspond à l'inégalité de Varma (1.13) pour le point M du segment $[A_{i-1}A_i]$ obtenu avec $\rho = \frac{(3n-2)(n-2)}{3n(2n-3)} < 1$.

Si $k = 2$ et $N = 3$, l'inégalité (2.38) correspond à l'inégalité de Varma (1.14) pour le point M du segment $[A_{i-1}A_i]$ obtenu avec $\rho = \frac{(3n-1)(n-2)}{6n(n-1)} < 1$.

Les points M qui donnent toutes ces inégalités, sont sur la frontière du domaine de positivité $\bar{\mathcal{D}}$. Donc ces inégalités sont vérifiées $\forall p \in \mathcal{P}$ et non pas uniquement sur \mathcal{P}_n .

Tous les points B du plan (λ_k, λ_N) tels que $B \in \mathcal{D} \setminus E$ donnent des inégalités de type Landau-Kolmogorov $\forall p \in \mathcal{P}$. Mais l'égalité n'est atteinte que pour le polynôme nul.

On peut définir ces points par : $\lambda_N(B) = \lambda_N(M)$, $\lambda_k(M) < \lambda_k(B) < 0$ et $\lambda_j(B) = 0$ si $j \neq k$ et $j \neq N$, où M est un point de la frontière de $\mathcal{D} \setminus E$.

Inégalités pour $p \in \mathcal{P}_n$

Les inégalités données jusqu'à présent sont vraies $\forall p \in \mathcal{P}$. Mais si on s'intéresse uniquement à celles qui sont satisfaites juste pour les polynômes de degré au plus n , il faut considérer le domaine $\mathcal{D}_n = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$. Sa frontière est limitée par les droites \mathcal{H}_i , $i = 1, \dots, n$, dans le plan de (λ_k, λ_N) . La dernière droite \mathcal{H}_n coupe l'axe $(\lambda_N = 0)$ au point $B_n = (-\frac{1}{C_n^{(k)}}, 0)$ et l'axe $(\lambda_k = 0)$ au point $F_n = (0, -\frac{1}{C_n^{(N)}})$ (voir la figure 2.4). Ces deux points appartiennent à $\bar{\mathcal{D}}$ ainsi que toute la demi-droite sur \mathcal{H}_n , commençant au point A_{n-1} vers $(-\infty, \infty)$.

Soit M un point du segment $[A_{n-1}B_n]$. Ses coordonnées sont données par :

$$\begin{aligned} M &= \rho A_{n-1} + (1 - \rho) B_n = (\lambda_k(M), \lambda_N(M)) \\ &= \left(\frac{\rho C_n^{(N)} (C_{n-1}^{(k)} - C_n^{(k)}) - (C_{n-1}^{(k)} C_n^{(N)} - C_{n-1}^{(N)} C_n^{(k)})}{C_n^{(k)} (C_{n-1}^{(k)} C_n^{(N)} - C_{n-1}^{(N)} C_n^{(k)})}, \frac{\rho (C_n^{(k)} - C_{n-1}^{(k)})}{C_{n-1}^{(k)} C_n^{(N)} - C_{n-1}^{(N)} C_n^{(k)}} \right) \\ &= \left(\frac{-(N-k) - k\rho \frac{\xi_{n+N-1}^{(1)}}{\xi_{n-1}^{(1)}}}{(N-k)\xi_n^{(k)}(n-k+1)_k}, \frac{k\rho}{(N-k)\xi_{n-1}^{(N)}(n-N+1)_N} \right) \end{aligned}$$

avec $\rho \in [0, 1]$.

Donc $\forall p \in \mathcal{P}_n$, nous avons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante

$$\begin{aligned} \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2 &\leq \frac{(N-k)\xi_n^{(k)}(n-k+1)_k}{N-k+k\rho \frac{\xi_{n+N-1}^{(1)}}{\xi_{n-1}^{(1)}}} \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 \\ &+ \frac{k\rho \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2}{\xi_{n+k}^{(N-k)} \left((N-k) \frac{\xi_{n-1}^{(1)}}{\xi_{n+N-1}^{(1)}} + k\rho \right) (n-N+1)_{N-k}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Remarque 2.3.18 Dans le cas où μ_0 est la mesure d'Hermite, (2.39) est l'inégalité (1.18) du Théorème 1.2.12 (donnée par Bojanov et Varma dans [12]).

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2 \leq A \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2 + \{2^k(n-k+1)_k - A2^N(n-N+1)_N\} \|p\|_{L^2(\Omega;\mu_0)}^2,$$

$\forall A, A \leq \frac{k}{N2^{N-k}(n-N+1)_{N-k}}$. Nous avons la relation suivante entre ρ et A .

$$\rho = \frac{N-k}{k} \left(\frac{A2^{N-k}(n-N+1)_{N-k}}{1 - A2^{N-k}(n-N+1)_{N-k}} \right).$$

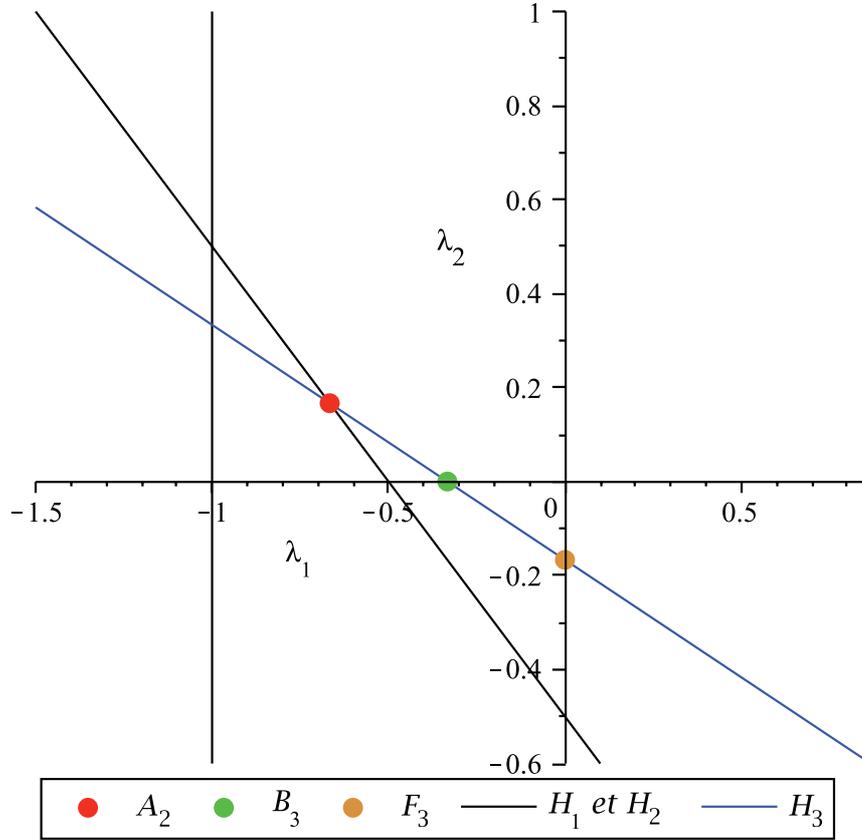


FIGURE 2.4 – \mathcal{D}_3 dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin.

Soit M le point défini par

$$\begin{aligned} M &= \rho B_n + (1 - \rho) F_n \\ &= -\frac{\rho}{C_n^{(k)}} + \frac{1 - \rho}{C_n^{(N)}}. \end{aligned}$$

Pour $\rho \in]0, 1[$ ce point appartient au segment $]B_n, F_n[$. De plus $\lambda_k(M) < 0$ et $\lambda_N(M) < 0$. Alors, $\forall p \in \mathcal{P}_n$, nous avons une nouvelle inégalité de type Landau-Kolmogorov

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 \geq \frac{\rho}{C_n^{(k)}} \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2 + \frac{1-\rho}{C_n^{(N)}} \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2. \quad (2.40)$$

L'égalité est atteinte pour cP_n , $c \in \mathbb{R}$.

Pour $\rho < 0$, le point M appartient à la demi-droite $]F_n, (-\infty, \infty[$ sur \mathcal{H}_n . De plus $\lambda_k(M) > 0$ et $\lambda_N(M) < 0$. Alors nous avons encore une autre inégalité de type Landau-Kolmogorov

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 - \frac{\rho}{C_n^{(k)}} \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2 \geq \frac{1-\rho}{C_n^{(N)}} \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n. \quad (2.41)$$

Quand $\rho = 0$ ou $\rho = 1$, les inégalités (2.40) et (2.41) sont réduites aux inégalités de Markov-Bernstein suivantes :

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 &\geq \frac{1}{C_n^{(N)}} \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2, \\ \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 &\geq \frac{1}{C_n^{(k)}} \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.19 Les inégalités (2.39), (2.40) et (2.41) ne sont pas satisfaites pour n'importe quel polynôme de degré au moins égal à $n + 1$.

Pour terminer cette partie dédiée aux inégalités faisant intervenir seulement deux dérivées, nous cherchons le meilleur point M sur le segment $[A_{i-1}A_i]$ qui minimise la partie droite de l'inégalité (2.38) quand p est fixé de degré au plus i .

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 2.3.20 Pour les trois cas de mesures nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_k(A_{i-1}) &< \lambda_k(A_i) < 0, \\ \lambda_N(A_{i-1}) &> \lambda_N(A_i) > 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Ces résultats sont une conséquence directe de la relation (2.37) qui donne les coordonnées du point A_i pour les trois cas de mesures.

□

Théorème 2.3.21 Le meilleur point M sur le segment $[A_{i-1}A_i]$ qui minimise la partie droite de l'inégalité (2.38) pour tout polynôme fixé $p \in \mathcal{P}_i$, est le point A_{i-1} .

Démonstration. Soit $M \in [A_{i-1}A_i]$ alors $M = \rho(A_{i-1} - A_i) + A_i$, avec $\rho \in [0, 1]$.

On note par $g(\rho)$ la partie droite de (2.38). Alors

$$g(\rho) = \frac{\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2}{\rho(\lambda_k(A_i) - \lambda_k(A_{i-1})) - \lambda_k(A_i)} - \frac{\rho(\lambda_N(A_i) - \lambda_N(A_{i-1})) - \lambda_N(A_i)}{\rho(\lambda_k(A_i) - \lambda_k(A_{i-1})) - \lambda_k(A_i)} \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2.$$

Dans la base des polynômes orthogonaux un polynôme p de \mathcal{P}_i s'écrit comme

$$p = \sum_{j=0}^i a_j P_j,$$

alors

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 &= \sum_{j=0}^i a_j^2 k_j^{(0)} \quad \text{et} \\ \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2 &= \sum_{j=N}^i a_j^2 k_j^{(N)} = \sum_{j=N}^i a_j^2 C_j^{(N)} k_j^{(0)}. \end{aligned}$$

Donc, la dérivée de $g(\rho)$ est

$$\begin{aligned} g'(\rho) &= \frac{1}{(\rho(\lambda_k(A_i) - \lambda_k(A_{i-1})) - \lambda_k(A_i))^2} \left(\sum_{j=N}^i a_j^2 k_j^{(0)} (\lambda_k(A_{i-1}) - \lambda_k(A_i)) \right. \\ &\quad \left. + C_j^{(N)} (\lambda_N(A_i) \lambda_k(A_{i-1}) - \lambda_k(A_i) \lambda_N(A_{i-1})) - (\lambda_k(A_i) - \lambda_k(A_{i-1})) \sum_{j=0}^{N-1} a_j^2 k_j^{(0)} \right). \end{aligned}$$

A partir du Lemme 2.3.20, $-(\lambda_k(A_i) - \lambda_k(A_{i-1})) < 0$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lambda_k(A_{i-1}) - \lambda_k(A_i) &+ C_j^{(N)} (\lambda_N(A_i) \lambda_k(A_{i-1}) - \lambda_k(A_i) \lambda_N(A_{i-1})) \\ &= -\frac{\xi_{2i}^{(1)}}{\xi_{i-1}^{(k+1)}} \frac{Nk}{(N-k)} \frac{1}{(i-k+1)_{k+1}} \left(1 - \frac{(j-N+1)_N \xi_j^{(N)}}{(i-N+1)_N \xi_i^{(N)}} \right). \end{aligned}$$

Cette quantité est négative pour les trois mesures. Donc $g'(\rho) < 0$ et $g(\rho)$ est une fonction décroissante sur $[0, 1]$. Son minimum est atteint pour $\rho = 1$. Il correspond au point A_{i-1} .

□

Corollaire 2.3.22 *Pour les trois cas de mesures, la meilleure inégalité de type Landau-Kolmogorov pour $p \in \mathcal{P}_i$ sur le segment $[A_{i-1}A_i]$ est*

$$\|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2 \leq \frac{\xi_{i-1}^{(k)}}{N} (N-k)(i-k+1)_k \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \frac{1}{\xi_{k+i-1}^{(N-k)}} \frac{k}{N} \frac{\|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2}{(i-N+1)_{N-k}}.$$

2.3.3 Inégalités faisant intervenir $r + 1$ normes, r impair, $3 \leq r \leq N$

Dans cette partie nous souhaitons donner des inégalités de type Landau-Kolmogorov faisant intervenir $r + 1$ normes, r impair. Dans ce cas nous ne pouvons plus définir le domaine de positivité $\bar{\mathcal{D}}$ de la même façon que précédemment car les points A donnés par l'intersection de r hyperplans \mathcal{H}_{ℓ_i} , pour $i = 1, \dots, r$ et les hyperplans $\lambda_m = 0$, $\forall m \neq q_i$, pour $i = 1, \dots, r$, n'appartiennent plus à $\bar{\mathcal{D}}$ (voir la Propriété 2.3.4).

Soit r un entier impair tel que $3 \leq r \leq N$.

Soient $q_i, i = 1, \dots, r$, r entiers tels que $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r = N$. Soient $\ell_i, i = 1, \dots, r-1$, $r-1$ entiers tels que $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{r-1}$, avec $\ell_{2i} = \ell_{2i-1} + 1$, $\forall i = 1, \dots, [\frac{r}{2}]$, où $[\frac{r}{2}]$ est la partie entière de $\frac{r}{2}$. On suppose que $\ell_i \geq q_i, \forall i = 1, \dots, r-1$.

Soit $V \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ la variété linéaire de dimension 1, obtenue par l'intersection de

$r-1$ hyperplans \mathcal{H}_{ℓ_i} , pour $i = 1, \dots, r-1$, et $N-r$ hyperplans $(\lambda_m = 0), \forall m \neq q_i$, pour $i = 1, \dots, r$.

Soit $B \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ le point obtenu par $(\lambda_N = 0) \cap V \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$. Ce point

appartient à $\bar{\mathcal{D}}$. En effet, comme $\lambda_N = 0$, B est le point d'intersection d'un nombre pair, $r-1$, d'hyperplans \mathcal{H}_{ℓ_i} , pour $i = 1, \dots, r-1$, et $N-r+1$ hyperplans $(\lambda_m = 0), \forall m \neq q_i$, pour $i = 1, \dots, r-1$. Il correspond au cas étudié dans la section précédente.

Soit $A \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} & j \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ le point obtenu par $\mathcal{H}_j \cap V \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$, avec $j \neq \ell_i$,

$\forall i = 1, \dots, r-1$. Les coordonnées de ce point sont la solution du système (2.28). Donc, d'après le Théorème 2.3.3, si $j > \ell_{r-1}$, alors A existe si et seulement si $j \geq q_r$. Si $\ell_{2i-2} < j < \ell_{2i-1}$, alors A existe si et seulement si $j \geq q_{2i-1}$. On suppose que ces conditions sont satisfaites. Évidemment le point A n'appartient pas à $\bar{\mathcal{D}}$, car $\lambda_N(A) < 0$ (voir la Propriété 2.3.4).

Maintenant on va montrer que les points M sur la variété linéaire $V \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$

tels que $\lambda_N(M) > 0$, appartiennent à $\bar{\mathcal{D}}$.

Théorème 2.3.23 *Soit M le point obtenu par*

$$M = (1 - \rho)A \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} & j \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix} + \rho B \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix} \quad \text{pour } \rho \geq 1. \quad (2.42)$$

Si $\ell_i \geq q_i, \forall i = 1, \dots, r-1$, et $j \geq q_r$ si $j > \ell_{r-1}$ ou $j \geq q_{2i-1}$ si $\ell_{2i-2} < j < \ell_{2i-1}$. Alors M appartient à $\bar{\mathcal{D}}, \forall \rho \geq 1$.

Démonstration.

Soient $\lambda_{q_i}(M), i = 1, \dots, r$, les composantes de M dans le plan $(\lambda_m = 0), \forall m \neq q_i$, pour

$i = 1, \dots, r-1$. Alors

$$\lambda_{q_i}(M) = (1 - \rho)\lambda_{q_i}(A) + \rho\lambda_{q_i}(B) \quad i = 1, \dots, r.$$

Montrer que $M \in \bar{\mathcal{D}}$, revient à montrer que $M \in \bar{\mathcal{O}}_s, \forall s \geq 1$.

i) $s = j$

Le point $B \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ de la variété linéaire $V \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ appartient à $\bar{\mathcal{D}}$.

Mais cette variété n'est pas dans \mathcal{H}_j , alors $1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(B)C_j^{(q_i)} > 0$.

Le point $A \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1}, & j \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ appartient à \mathcal{H}_j , alors $1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(A)C_j^{(q_i)} = 0$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(M)C_j^{(q_i)} &= 1 + \sum_{i=1}^r ((1 - \rho)\lambda_{q_i}(A) + \rho\lambda_{q_i}(B))C_j^{(q_i)} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(A)C_j^{(q_i)} - \rho(1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(A)C_j^{(q_i)}) + \rho(1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(B)C_j^{(q_i)}) \\ &= \rho(1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(B)C_j^{(q_i)}) > 0. \end{aligned}$$

Donc M appartient à \mathcal{O}_j .

ii) $s \neq \ell_i, i = 1, \dots, r-1$ et $s \neq j$

Soit $g(\rho) = 1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(M)C_s^{(q_i)}$.

Pour $\rho = 1, M = B \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix} \in \bar{\mathcal{D}}$ donc $g(\rho) > 0, \forall s \neq \ell_i, i = 1, \dots, r-1$.

Supposons que, pour un $s \neq \ell_i, i = 1, \dots, r-1$ et $s \neq j$, il existe $\hat{\rho} \in \mathbb{R}, 1 \leq \hat{\rho} < +\infty$ tel que

$$\hat{M} = (1 - \hat{\rho})A \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1}, & j \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix} + \hat{\rho}B \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_s.$$

Alors $1 + \sum_{i=1}^r \lambda_{q_i}(\hat{M})C_s^{(q_i)} = 0$.

$\hat{M} \in \mathcal{H}_s$ et $\hat{M} \in V \begin{pmatrix} \ell_1 & , \dots , & \ell_{r-1} \\ q_1 & , \dots , & q_r \end{pmatrix}$, Donc \hat{M} est solution du système linéaire suivant

$$\begin{cases} 1 + \sum_{\nu=1}^r \lambda_{q_\nu}(\hat{M}) C_{\ell_i}^{(q_\nu)} = 0, & i = 1, \dots, r-1, \\ 1 + \sum_{\nu=1}^r \lambda_{q_\nu}(\hat{M}) C_s^{(q_\nu)} = 0. \end{cases}$$

Or $\lambda_{q_r}(\hat{M}) = (1 - \hat{\rho})\lambda_{q_r}(A) = (1 - \hat{\rho})\lambda_N(A) > 0$, ce qui est impossible car, d'après le Théorème 2.3.3, signe de $\lambda_{q_r}(\hat{M})$ est $(-1)^r = -1$ (\hat{M} étant le point d'intersection de r hyperplans, et r impair).

Donc $\forall s \neq \ell_i, i = 1, \dots, r-1$ et $s \neq j, g(\rho)$ ne s'annule pas et garde le même signe positif. C'est-à-dire M reste dans le demi-espace positif délimité par \mathcal{H}_s .

iii) $s = \ell_i, i = 1, \dots, r-1$

M appartient aux hyperplans $\mathcal{H}_{\ell_i}, i = 1, \dots, r-1$. Alors il est dans la frontière de $\bar{\mathcal{D}}, \forall \rho \geq 1$.

□

Maintenant, nous donnons une propriété sur la variation de signe des $\lambda_{q_i}(M), i = 1, \dots, r-1$.

Théorème 2.3.24 $\forall i = 1, \dots, r-1, \lambda_{q_i}(M)$ changent de signe quand ρ varie de 1 à l'infini.

Démonstration.

Soit M un point donné par (2.42) alors

$$\lambda_{q_i}(M) = \lambda_{q_i}(A) + \rho(\lambda_{q_i}(B) - \lambda_{q_i}(A)) \quad \text{pour } i=1, \dots, r$$

Les coordonnées du point A sont la solution du système

$$\begin{cases} 1 + \sum_{t=1}^r \lambda_{q_t}(A) C_{\ell_i}^{(q_t)} = 0, & i = 1, \dots, r-1, \\ 1 + \sum_{t=1}^r \lambda_{q_t}(A) C_j^{(q_t)} = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Et celles de B sont solution du système

$$1 + \sum_{t=1}^r \lambda_{q_t}(B) C_{\ell_i}^{(q_t)} = 0, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad (2.44)$$

$B \in \bar{\mathcal{D}}$, alors $B \in \mathcal{O}_j$ car $j \neq \ell_i, i = 1, \dots, r-1$, c'est-à-dire :

$$1 + \sum_{t=1}^r \lambda_{q_t}(B) C_j^{(q_t)} = Z_j > 0, \quad (2.45)$$

où Z_j est une constante réelle positive.

La différence entre (2.43) et l'ensemble de relations (2.44)-(2.45) donne le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^r \lambda_{q_t} C_{\ell_i}^{(q_t)} = 0 & i = 1, \dots, r-1, \\ \sum_{t=1}^r \lambda_{q_t} C_j^{(q_t)} = Z_j, \end{cases} \quad (2.46)$$

où $\lambda_{q_t} = \lambda_{q_t}(B) - \lambda_{q_t}(A)$, $t = 1, \dots, r$.

On calcule par la méthode de Cramer les λ_{q_t} , $t = 1, \dots, r$, solution du système (2.46). Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_{r-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_r)} \\ C_j^{(q_1)} & \dots & C_j^{(q_r)} \end{vmatrix}.$$

Si $j > \ell_{r-1}$, alors on a $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{r-1} < j$, $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r$. De plus $\ell_i \geq q_i$, $\forall i = 1, \dots, r-1$ et $j \geq q_r$. Donc le déterminant est positif d'après le Corollaire 2.3.2.

Si $\ell_{2i-2} < j < \ell_{2i-1}$, alors, pour réordonner les lignes, il faut faire un nombre pair de permutations. De plus, $\ell_i \geq q_i$, $\forall i = 1, \dots, r-1$ et $j \geq q_{2i-1}$. Donc le Corollaire 2.3.2 s'applique aussi dans ce cas et le déterminant du système est positif.

Alors, le signe des λ_{q_t} , $t = 1, \dots, r$ est le même que celui du numérateur de la méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{t-1})} & 0 & C_{\ell_1}^{(q_{t+1})} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_{r-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{t-1})} & 0 & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{t+1})} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_r)} \\ C_j^{(q_1)} & \dots & C_j^{(q_{t-1})} & Z_j & C_j^{(q_{t+1})} & \dots & C_j^{(q_r)} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{t+r} Z_j \begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{t-1})} & C_{\ell_1}^{(q_{t+1})} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_{r-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{t-1})} & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{t+1})} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_r)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement et en utilisant le Corollaire 2.3.2, ce déterminant est aussi positif. Donc le signe de λ_{q_t} est $(-1)^{t+r} = (-1)^{t+1}$ car r est impair.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \text{signe } \lambda_{q_t}(A) &= \text{signe } \lambda_{q_t}(B) = (-1)^t, \quad t = 1, \dots, r-1, \\ \lambda_{q_r}(A) &< 0. \end{aligned}$$

Les $\ell_t, t = 1, \dots, r-1$ et les $q_t, t \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, r\}$, vérifient les conditions du Théorème 2.3.3. Donc le signe du numérateur est $(-1)^{r+\nu}(-1)^i$.

Le signe de $\lambda_{q_i}(M^{(\nu)})$ est donné par $\frac{(-1)^{r+\nu+i}}{(-1)^{r+\nu}} = (-1)^i$.

Si $i > \nu$, le numérateur est

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} C_{\ell_1}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_\nu)} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_{i-1})} & -1 & C_{\ell_1}^{(q_{i+1})} & \dots & C_{\ell_1}^{(q_r)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell_{r-1}}^{(q_1)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_\nu)} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{i-1})} & -1 & C_{\ell_{r-1}}^{(q_{i+1})} & \dots & C_{\ell_{r-1}}^{(q_r)} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{r+\nu}(-1)^{i-1} D \left(\begin{array}{c} \ell_1, \dots, \ell_{r-1} \\ q_1, \dots, q_{\nu-1}, q_{\nu+1}, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_r \end{array} \right). \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons le signe du numérateur est $(-1)^{r+\nu}(-1)^{i-1}$.

Donc le signe de $\lambda_{q_i}(M^{(\nu)})$ est donné par $\frac{(-1)^{r+\nu+i-1}}{(-1)^{r+\nu}} = (-1)^{i-1}$.

□

Grâce à ce résultat nous allons déterminer l'ordre dans lequel les coordonnées d'un point M changent de signe.

Corollaire 2.3.26 *Les composantes $\lambda_{q_i}(M)$ changent de signe l'une après l'autre en commençant par $\lambda_{q_{r-1}}(M)$.*

Démonstration.

Pour $\rho = 1$ le point M défini par (2.42) correspond à B et le signe $\lambda_{q_i}(B) = (-1)^i$, $i = 1, \dots, r-1$. Or d'après le Théorème 2.3.25 qui donne le signe des coordonnées de $M^{(\nu)}$, on a signe $\lambda_{q_i}(M^{(\nu)}) = (-1)^i = \text{signe } \lambda_{q_i}(B)$ si $i < \nu$, et signe $\lambda_{q_i}(M^{(\nu)}) = (-1)^{i-1} = -\text{signe } \lambda_{q_i}(B)$ si $i > \nu$. C'est-à-dire pour $\rho = \rho^{(\nu)}$, le signe des $\nu-1$ premières coordonnées n'a pas encore changé, alors que celui des autres a déjà changé. D'où l'ordre donné dans l'énoncé du corollaire.

□

Corollaire 2.3.27 $1 < \rho^{(r-1)} < \rho^{(r-2)} < \dots < \rho^{(1)}$.

Démonstration.

Nous savons déjà que chaque composante change de signe quand ρ varie de 1 à l'infini. Le Corollaire 2.3.26 donne l'ordre dans lequel ce changement de signe se fait. D'où l'ordre des valeurs $\rho^{(\nu)}$ du paramètre ρ qui annulent $\lambda_{q_\nu}(M)$, $\nu = 1, \dots, r-1$.

□

Remarque 2.3.28 *Les Théorèmes 2.3.23, 2.3.25 et les deux Corollaires 2.3.26 et 2.3.27 sont indépendants du choix de j pour obtenir $A \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_{r-1} & j \\ q_1 & \dots & q_r \end{pmatrix}$.*

Comme $r - 1$ composantes $\lambda_{q_i}(M)$, $i = 1, \dots, r - 1$, changent de signe l'une après l'autre pour ρ croissant de 1 à l'infini, nous avons $2r - 1$ différentes inégalités de type Landau-Kolmogorov. En effet nous avons une inégalité de type Landau-Kolmogorov pour chaque choix de M dans $]M^{(\nu+1)}, M^{(\nu)}[$, ou $M = M^{(\nu)}$.

Nous donnons les différents ensembles d'entiers I^0 , I^+ et I^- dans les trois cas. Nous avons $\rho^{(\nu+1)} < \rho^{(\nu)}$, alors :

sur $]M^{(\nu+1)}, M^{(\nu)}[$, nous avons :

$$\begin{cases} I^0 = \{m, 1 \leq m \leq N - 1 | m \neq q_i, i = 1, \dots, r\}, \\ I^+ = \left\{ q_{2i}, i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \right\} \cup \left\{ q_{2i+1}, i = \left\lfloor \frac{\nu+1}{2} \right\rfloor, \dots, \frac{r-3}{2} \right\}, \\ I^- = \left\{ q_{2i-1}, i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{\nu+1}{2} \right\rfloor \right\} \cup \left\{ q_{2i}, i = \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor + 1, \dots, \frac{r-1}{2} \right\}, \end{cases}$$

et sur $M^{(\nu)}$, nous avons :

$$\begin{cases} I^0 = \{m, 1 \leq m \leq N - 1 | m \neq q_i, i = 1, \dots, r\} \cup \{q_\nu\}, \\ I^+ = \left\{ q_{2i}, i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{\nu-1}{2} \right\rfloor \right\} \cup \left\{ q_{2i+1}, i = \left\lfloor \frac{\nu+1}{2} \right\rfloor, \dots, \frac{r-3}{2} \right\}, \\ I^- = \left\{ q_{2i-1}, i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \right\} \cup \left\{ q_{2i}, i = \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor + 1, \dots, \frac{r-1}{2} \right\}. \end{cases}$$

Ainsi, les inégalités de type Landau-Kolmogorov suivantes sont satisfaites, $\forall p \in \mathcal{P}$,

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{i \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_i \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega; \mu_i)}^2 \geq \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i) \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega; \mu_i)}^2.$$

ou encore

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \sum_{m \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_m \|\Phi(x)^{\frac{m}{2}} p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 \geq \sum_{m \in I^-} |\lambda_m| \|\Phi(x)^{\frac{m}{2}} p^{(m)}\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2.$$

À partir des propriétés précédentes on peut spécifier la structure de la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$. Il suffit d'utiliser les différents $(r - 1)$ -simplexes du Théorème 2.3.11 et de définir la variété linéaire de dimension 1 à partir des hyperplans qui donnent les sommets de ces simplexes comme au début de cette section. Tous les points dans l'enveloppe convexe des $(r - 1)$ -simplexes et de la partie de la variété linéaire de dimension 1 pour laquelle $\lambda_N \geq 0$ sont sur la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$.

Maintenant nous allons détailler le cas particulier où $r = 3$.

Inégalités faisant intervenir 4 normes ($r = 3$)

Soient k et ℓ deux entiers fixés tels que $1 \leq k < \ell \leq N - 1$. On considère le cas où $\lambda_m = 0$, $m = 1, \dots, N - 1$, $m \neq k$ et $m \neq \ell$. L'étude de la frontière du domaine de positivité se réduit dans ce cas à l'étude de l'intersection de chaque plan \mathcal{H}_i avec le plan de coordonnées $(\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_N)$. Si $i < k$, alors $\mathcal{H}_i \cap (\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_N) = \emptyset$. Si $i \geq k$, l'intersection de chaque hyperplan \mathcal{H}_i avec le plan de coordonnées $(\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_N)$ est un plan de dimension 2 dans ce plan. Par souci de simplicité on continuera à noter ces plans par \mathcal{H}_i , $i \geq k$.

Nous appliquerons les théorèmes précédents pour $r = 3$ (voir la figure 2.5).

La variété linéaire V_i est une droite dans le plan de coordonnées $(\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_N)$ donnée par l'intersection de deux hyperplans consécutifs \mathcal{H}_i et \mathcal{H}_{i+1} .

$\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1} \cap (\lambda_N = 0)$ est un point B_i dans le plan $(\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_N)$ qui appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$.

$\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1} \cap \mathcal{H}_j$ est un point A_{ij} dans le plan $(\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_N)$ qui n'appartient pas à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$, mais il va nous permettre de définir la partie de la variété V_i dans $\bar{\mathcal{D}}$.

Tout point $M_i(\rho) = \rho B_i + (1 - \rho)A_{ij}$, $\rho > 1$, c'est-à-dire un point appartenant à la demi-droite $(B_i A_{ij})$, tel que $\lambda_N > 0$, appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$.

Les coordonnées de ces points dans le plan $(\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_N)$ sont :

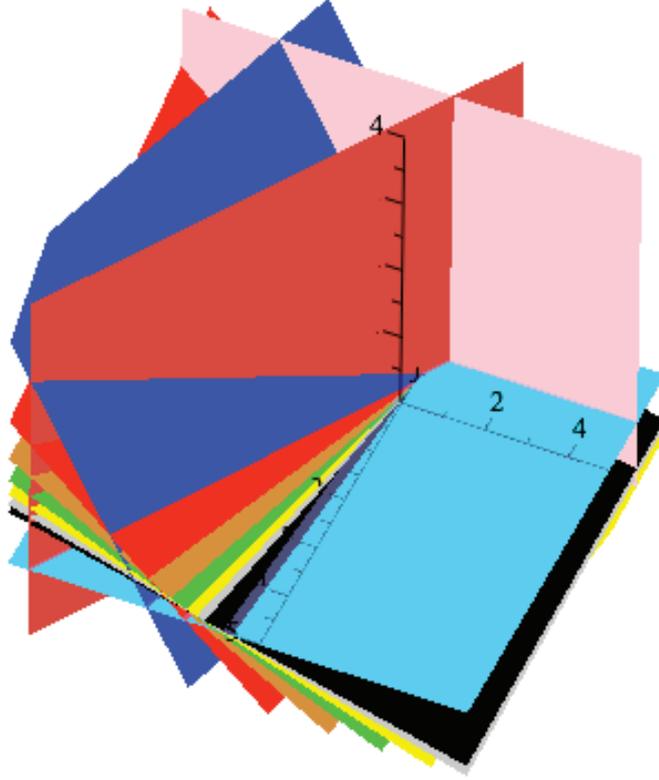
$$\begin{aligned} B_i &= (\lambda_k(B_i), \lambda_\ell(B_i), 0), \\ A_{ij} &= (\lambda_k(A_{ij}), \lambda_\ell(A_{ij}), \lambda_N(A_{ij})), \\ M_i &= (\lambda_k(M_i), \lambda_\ell(M_i), \lambda_N(M_i)). \end{aligned}$$

Les inégalités de type Landau-Kolmogorov qui correspondent au point B_i , sont celles vues dans la partie précédente (3 normes).

Au point A_{ij} ne correspond aucune inégalité de type Landau-Kolmogorov, car il n'appartient pas au domaine $\bar{\mathcal{D}}$.

À tout point M_i correspond une inégalité de type Landau-kolmogorov. Comme on l'a déjà vu dans le Corollaire 2.3.26, $\lambda_k(M_i)$ et $\lambda_\ell(M_i)$ changent de signe, donc on a 3 formes différentes d'inégalités de type Landau-Kolmogorov.

La Figure 2.5 est une représentation du domaine $\bar{\mathcal{D}}$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin. Le plan en bleu clair correspond au plan $(\lambda_N = 0)$, il constitue la base de la frontières. L'intersection des différents hyperplans \mathcal{H}_i avec $(\lambda_N = 0)$ donne la frontière du cas $r = 2$ (voir la Figure 2.3). Les parties délimitées par les intersections de 3 hyperplan consécutifs et le segment correspondant sur la base forment les différentes facette de la frontière du domaine de positivité.

FIGURE 2.5 – Le domaine $\bar{\mathcal{D}}$ pour $N = 3$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin.

Soient ρ^1 et ρ^2 tels que

$$M_i(\rho^1) = (0, \lambda_\ell(M_i(\rho^1)), \lambda_N(M_i(\rho^1))) = A_i \text{ quand } r = 2 \text{ dans le plan } (\lambda_\ell, \lambda_N).$$

$$M_i(\rho^2) = (\lambda_k(M_i(\rho^2)), 0, \lambda_N(M_i(\rho^2))) = A_i \text{ quand } r = 2 \text{ dans le plan } (\lambda_k, \lambda_N).$$

Comme $\rho^1 > \rho^2$, on retrouve les inégalités de type Landau-Kolmogorov suivantes :

1. $1 < \rho < \rho^2$, ce qui correspond à la zone 1 dans la Figure 2.6

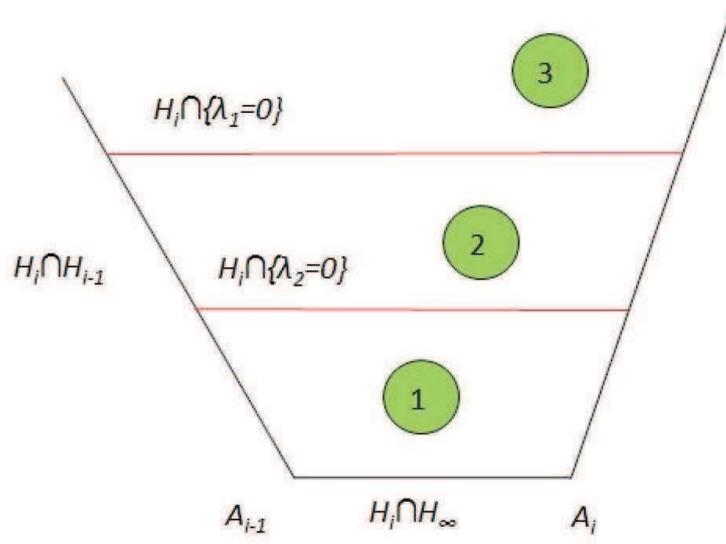
$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_\ell \|p^{(\ell)}\|_{L^2(\Omega; \mu_\ell)}^2 + \lambda_N \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2 \geq -\lambda_k \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2. \quad (2.47)$$

2. $\rho^2 < \rho < \rho^1$, ce qui correspond à la zone 2 dans la Figure 2.6

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_N \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2 \geq -\lambda_k \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2 - \lambda_\ell \|p^{(\ell)}\|_{L^2(\Omega; \mu_\ell)}^2. \quad (2.48)$$

3. $\rho^1 < \rho$, ce qui correspond à la zone 3 dans la Figure 2.6

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_k \|p^{(k)}\|_{L^2(\Omega; \mu_k)}^2 + \lambda_N \|p^{(N)}\|_{L^2(\Omega; \mu_N)}^2 \geq -\lambda_\ell \|p^{(\ell)}\|_{L^2(\Omega; \mu_\ell)}^2. \quad (2.49)$$

FIGURE 2.6 – Les trois zones d’une facette de \bar{D} pour $N = 3$.

2.4 Les constantes dans le cas $N = 5$

Pour $N = 5$ nous allons énumérer toutes les inégalités de type Landau-Kolmogorov possibles. Pour cela nous donnons à chaque fois l'expression des λ_i et la composition des ensembles I^+ , I^- et I^0 . Nous avons choisi pour cet exemple de considérer la mesure de Laguerre-Sonin, car les expressions des constantes sont plus simples que dans les autres cas.

Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $r = 2$ et $N = 5$

Pour tout point $M = (\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \rho A_i + (1 - \rho)A_{i-1}$ avec $\rho \in [0, 1]$, nous avons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante

$$\|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{q_1}} \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_{q_2}}{\lambda_{q_1}} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2.$$

Les coordonnées d'un point $A_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1}$ et les ensembles d'entiers sont donnés dans le tableau suivant

$\lambda_{q_1}(A_i)$	$-\frac{5}{4(i+1)}$	$-\frac{5}{3i(i+1)}$	$-\frac{5}{2i(i-1)(i+1)}$	$-\frac{5}{(i-1)(i-2)(i+1)}$
$\lambda_{q_2}(A_i)$	$\frac{1}{4i(i-3)(i-2)(i-1)i(i+1)}$	$\frac{2}{3i(i-3)(i-2)(i-1)i(i+1)}$	$\frac{3}{2i(i-3)(i-2)(i-1)i(i+1)}$	$\frac{4}{i(i-3)(i-2)(i-1)i(i+1)}$
I^+	5	5	5	5
I^-	1	2	3	4
I^0	2, 3, 4	1, 3, 4	1, 2, 4	1, 2, 3

Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $r = 3$ et $N = 5$

Pour tout point $M = (\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}, \lambda_{q_3}) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \rho B_i + (1 - \rho)A_i$, avec $\rho \geq 1$, nous avons une des trois inégalités de type Landau-Kolmogorov suivantes

1. Si $1 < \rho < \rho^2$

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_2} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 + \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2 \geq -\lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2.$$

2. Si $\rho^2 < \rho < \rho^1$

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2 \geq -\lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 - \lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2.$$

3. Si $\rho^1 < \rho$

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 + \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2 \geq -\lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2.$$

Les coordonnées des points $A_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1} \cap \mathcal{H}_{i+2}$ et $B_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1} \cap (\lambda_{q_3} = 0)$, la composition des ensembles d'entiers et les valeurs de ρ^1 et ρ^2 sont donnés pour tous les choix possibles de q_1 , q_2 et q_3 dans les tableaux suivants :

	B_i	A_i	M^2	M^1
λ_{q_1}	$-\frac{2}{i+1}$	$-\frac{5}{2(i+2)}$	$-\frac{5}{4(i+1)}$	0
λ_{q_2}	$\frac{1}{i(i+1)}$	$\frac{5}{3(i^2+3i+2)}$	0	$-\frac{5}{3i(i+1)}$
λ_{q_3}	0	$-\frac{1}{6i(i^4-5i^2+4)}$	$\frac{1}{4i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$	$\frac{2}{3i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$
I^+	2	2	5	5
I^-	1	1, 5	1	2
I^0	3, 4, 5	3, 4	2, 3, 4	1, 3, 4
ρ	1	0	$\rho^2 = \frac{5}{2} \frac{i}{i-3}$	$\rho^1 = \frac{5(i+1)}{i-3}$

$$(q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 5)$$

	B_i	A_i	M^2	M^1
λ_{q_1}	$-\frac{3}{2(i+1)}$	$-\frac{15}{8(i+2)}$	$-\frac{5}{4(i+1)}$	0
λ_{q_2}	$\frac{1}{2i(i^2-1)}$	$\frac{5}{4i(i^2+3i+2)}$	0	$-\frac{5}{2i(i^2-1)}$
λ_{q_3}	0	$-\frac{3}{8i(i^4-5i^2+4)}$	$\frac{1}{4i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$	$\frac{3}{2i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$
I^+	3	3	5	5
I^-	1	1, 5	1	3
I^0	2, 4, 5	2, 4	2, 3, 4	1, 2, 4
ρ	1	0	$\rho^2 = \frac{5}{3} \frac{i-1}{i-3}$	$\rho^1 = \frac{5(i+1)}{i-3}$

$$(q_1 = 1, q_2 = 3, q_3 = 5)$$

	B_i	A_i	M^2	M^1
λ_{q_1}	$-\frac{4}{3(i+1)}$	$-\frac{5}{3(i+2)}$	$-\frac{5}{4(i+1)}$	0
λ_{q_2}	$\frac{1}{3i(i^3-i-2i^2+2)}$	$\frac{5}{3i(i^3-i+2i^2-2)}$	0	$-\frac{5}{i(i^3-i-2i^2+2)}$
λ_{q_3}	0	$-\frac{1}{i(i^4-5i^2+4)}$	$\frac{1}{4i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$	$\frac{4}{i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$
I^+	4	4	5	5
I^-	1	1, 5	1	4
I^0	2, 3, 5	2, 3	2, 3, 4	1, 2, 3
ρ	1	0	$\rho^2 = \frac{5}{4} \frac{i-2}{i-3}$	$\rho^1 = \frac{5(i+1)}{i-3}$

$$(q_1 = 1, q_2 = 4, q_3 = 5)$$

	B_i	A_i	M^2	M^1
λ_{q_1}	$-\frac{3}{i(i+1)}$	$-\frac{5}{i^2+3i+2}$	$-\frac{5}{3i(i+1)}$	0
λ_{q_2}	$\frac{2}{i(i^2-1)}$	$\frac{5}{i(i^2+3i+2)}$	0	$-\frac{5}{2i(i^2-1)}$
λ_{q_3}	0	$-\frac{1}{i(i^4-5i^2+4)}$	$\frac{2}{3i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$	$\frac{3}{2i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$
I^+	3	3	5	5
I^-	2	2, 5	2	3
I^0	1, 4, 5	1, 4	1, 2, 4	1, 2, 4
ρ	1	0	$\rho^2 = \frac{5}{3} \frac{i-1}{i-3}$	$\rho^1 = \frac{5}{2} \frac{i}{i-3}$

$$(q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5)$$

	B_i	A_i	M^2	M^1
λ_{q_1}	$-\frac{2}{i(i+1)}$	$-\frac{10}{3(i^2+3i+2)}$	$-\frac{5}{3i(i+1)}$	0
λ_{q_2}	$\frac{1}{i(i^3-i-2i^2+2)}$	$\frac{5}{i(i^3-i+2i^2-2)}$	0	$-\frac{5}{i(i^3-i-2i^2+2)}$
λ_{q_3}	0	$-\frac{8}{3i(i^4-5i^2+4)}$	$\frac{2}{3i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$	$\frac{4}{i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$
I^+	4	4	5	5
I^-	2	2, 5	2	4
I^0	1, 3, 5	1, 3	1, 3, 4	1, 2, 3
ρ	1	0	$\rho^2 = \frac{5}{4} \frac{i-2}{i-3}$	$\rho^1 = \frac{5}{2} \frac{i}{i-3}$

$$(q_1 = 2, q_2 = 4, q_3 = 5)$$

	B_i	A_i	M^2	M^1
λ_{q_1}	$-\frac{4}{i(i^2-1)}$	$-\frac{10}{i(i^2+3i+2)}$	$-\frac{5}{2i(i^2-1)}$	0
λ_{q_2}	$\frac{3}{i(i^3-i-2i^2+2)}$	$\frac{15}{i(i^3-i+2i^2-2)}$	0	$-\frac{5}{i(i^3-i-2i^2+2)}$
λ_{q_3}	0	$-\frac{6}{i(i^4-5i^2+4)}$	$\frac{3}{2i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$	$\frac{4}{i(i^4+5i^2-5i^3+5i-6)}$
I^+	4	4	5	5
I^-	3	3, 5	3	4
I^0	1, 2, 5	1, 2	1, 2, 4	1, 2, 3
ρ	1	0	$\rho^2 = \frac{5}{4} \frac{i-2}{i-3}$	$\rho^1 = \frac{5}{3} \frac{i-1}{i-3}$

$$(q_1 = 3, q_2 = 4, q_3 = 5)$$

Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $r = 4$ et $N = 5$

Pour tout point $M = (\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}, \lambda_{q_3}, \lambda_{q_4}) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \rho A_i + (1 - \rho)A_{i-1}$ avec $\rho \in [0, 1]$, nous avons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante :

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2 + \lambda_{q_4} \|p^{(q_4)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_4})}^2 \geq -\lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 - \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2.$$

Les coordonnées d'un point $A_{i,j} = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1} \cap \mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_{j+1}$ et la composition des ensembles d'entiers sont données pour tous les choix possibles de q_1, q_2, q_3 et q_4 .

λ_{q_1}	$-\frac{4i^2-15i+7ji-1-15j+4j^2}{2(i+1)(j+1)(j+i-4)}$
λ_{q_2}	$\frac{i^3+4ji^2-6i^2-18ji+11i+4j^2i+11j-6-6j^2+j^3}{ij(i+1)(j+1)(j+i-4)}$
λ_{q_3}	$-\frac{3i^2+4ji-15i-15j+18+3j^2}{2ij(i+1)(j+1)(j+i-4)}$
λ_{q_4}	$\frac{1}{2ij(i+1)(j+1)(j+i-4)}$

$$I^+ = \{2, 5\} \quad I^- = \{1, 3\} \quad I^0 = \{4\}$$

$$(q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 5)$$

λ_{q_1}	$-\frac{2(2+11i+i^3-8i^2+11j+4ji^2-14ji+4j^2i-8j^2+j^3)}{(i+1)(j+1)(j^2-9j+4ji+i^2-9i+14)}$
λ_{q_2}	$-\frac{12-28i-28j-8i^3+23j^2+23i^2+i^4-8j^3+j^4+62ji-32ji^2+4ji^3-32j^2i+10j^2i^2+4j^3i}{ij(i+1)(j+1)(j^2-9j+4ji+i^2-9i+14)}$
λ_{q_3}	$-\frac{3i^2+4ji-15i-15j+18+3j^2}{ij(i+1)(j+1)(j^2-9j+4ji+i^2-9i+14)}$
λ_{q_4}	$-\frac{2(i+j-2)}{ij(i+1)(j+1)(j^2-9j+4ji+i^2-9i+14)}$

$$I^+ = \{2, 5\} \quad I^- = \{1, 4\} \quad I^0 = \{3\}$$

$$(q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 4, q_4 = 5)$$

λ_{q_1}	$-\frac{3j^2-5j+4ji-5i+3i^2-2}{2(j+1)(i+1)(i+j-2)}$
λ_{q_2}	$-\frac{12-28i-28j-8i^3+23j^2+23i^2+i^4-8j^3+j^4+62ji-32ji^2+4ji^3-32j^2i+10j^2i^2+4j^3i}{2ij(j+1)(i+1)(i+j-2)}$
λ_{q_3}	$-\frac{i^3+4ji^2-6i^2-18ji+11i+4j^2i+11j-6-6j^2+j^3}{ij(j+1)(i+1)(i+j-2)}$
λ_{q_4}	$-\frac{i^2-3i+4ji+j^2-3j+2}{2ij(j+1)(i+1)(i+j-2)}$

$$I^+ = \{3, 5\} \quad I^- = \{1, 4\} \quad I^0 = \{2\}$$

$$(q_1 = 1, q_2 = 3, q_3 = 4, q_4 = 5)$$

λ_{q_1}	$-\frac{3j^2-5j+4ji-5i+3i^2-2}{ij(i+1)(j+1)}$
λ_{q_2}	$\frac{2(2+11i+i^3-8i^2+11j+4ji^2-14ji+4j^2i-8j^2+j^3)}{(j-1)(i-1)ij(i+1)(j+1)}$
λ_{q_3}	$-\frac{4i^2-15i+7ji-1-15j+4j^2}{(j-1)(i-1)ij(i+1)(j+1)}$
λ_{q_4}	$\frac{2(i+j)}{(j-1)(i-1)ij(i+1)(j+1)}$

$$I^+ = \{3, 5\} \quad I^- = \{2, 4\} \quad I^0 = \{1\}$$

$$(q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 4, q_4 = 5)$$

Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $r = 5$ et $N = 5$

Dans le cas où les cinq normes sont présentes, si on définit la frontière du domaine de positivité avec le point d'intersection de 5 hyperplans \mathcal{H}_j , les expressions des constantes deviennent très complexes. Pour contourner ce problème, nous donnerons les différentes inégalités de type Landau-Kolmogorov en utilisant les points $M^{(\nu)}$ qui sont tels que $\lambda_{q_\nu} = 0$. En effet, les coordonnées de ces points correspondent à celles déjà données dans la partie $r = 4$.

Pour chaque point M , nous avons une des cinq inégalités de type Landau-Kolmogorov suivantes :

1. Si $M = \rho B_{i,j} + (1 - \rho)M^{(4)}$ et $\rho \in [0, 1]$ alors

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2 + \lambda_{q_4} \|p^{(q_4)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_4})}^2 + \lambda_{q_5} \|p^{(q_5)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_5})}^2 \geq$$

$$- \lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 - \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2.$$

2. Si $M = \rho M^{(4)} + (1 - \rho)M^{(3)}$ et $\rho \in [0, 1]$ alors

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2 + \lambda_{q_5} \|p^{(q_5)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_5})}^2 \geq$$

$$- \lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 - \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2 - \lambda_{q_4} \|p^{(q_4)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_4})}^2.$$

3. Si $M = \rho M^{(3)} + (1 - \rho)M^{(2)}$ et $\rho \in [0, 1]$ alors

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2 + \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2 + \lambda_{q_5} \|p^{(q_5)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_5})}^2 \geq$$

$$- \lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 - \lambda_{q_4} \|p^{(q_4)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_4})}^2.$$

4. Si $M = \rho M^{(2)} + (1 - \rho)M^{(1)}$ et $\rho \in [0, 1]$ alors

$$\|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 + \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2 + \lambda_{q_5} \|p^{(q_5)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_5})}^2 \geq$$

$$- \lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 - \lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2 - \lambda_{q_4} \|p^{(q_4)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_4})}^2.$$

5. Si $M = \rho M^2 + (1 - \rho)M^1$ et $\rho \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 &+ \lambda_{q_1} \|p^{(q_1)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_1})}^2 + \lambda_{q_3} \|p^{(q_3)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_3})}^2 + \lambda_{q_5} \|p^{(q_5)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_5})}^2 \geq \\ &- \lambda_{q_2} \|p^{(q_2)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_2})}^2 - \lambda_{q_4} \|p^{(q_4)}\|_{L^2(\Omega; \mu_{q_4})}^2. \end{aligned}$$

Les coordonnées d'un point $B_{i,j} = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1} \cap \mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_{j+1} \cap (\lambda_{q_5} = 0)$ sont données par :

λ_{q_1}	$-\frac{2(i+j)}{(i+1)(j+1)}$
λ_{q_2}	$\frac{i^2 - 3i + 4j + j^2 - 3j + 2}{ij(i+1)(j+1)}$
λ_{q_3}	$-\frac{2(i+j-2)}{ij(i+1)(j+1)}$
λ_{q_4}	$\frac{1}{ij(i+1)(j+1)}$
λ_{q_5}	0
I^+	2, 4
I^-	1, 3
I^0	5
ρ	1

Le point $M^{(4)}$ correspond au point A pour $(q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 5)$ du cas $r = 4$.

Le point $M^{(3)}$ correspond au point A pour $(q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 4, q_4 = 5)$ du cas $r = 4$.

Le point $M^{(2)}$ correspond au point A pour $(q_1 = 1, q_2 = 3, q_3 = 4, q_4 = 5)$ du cas $r = 4$.

Le point $M^{(1)}$ correspond au point A pour $(q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 4, q_4 = 5)$ du cas $r = 4$.

2.5 Exemples d'application des inégalités de Landau-Kolmogorov

Dans cette partie nous détaillons un exemple d'application de ces inégalités polynomiales, qui restent vraies pour toute fonction de l'espace de Sobolev associé à la mesure considérée.

Les exemples traités ne correspondent pas à des problèmes existants, ils sont construits dans le seul but d'illustrer l'intérêt de ce genre d'inégalités. D'autre part, rappelons que les mesures étudiées sont très particulières et leur application est très restreinte par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit le problème différentiel suivant :

$$(P) \begin{cases} u^{(4)} + u = f & \forall x \in \Omega =]-1, 1[, \\ u^{(3)}(-1) = u^{(3)}(1) = 0, \\ u^{(2)}(-1) = u^{(2)}(1) = 0. \end{cases}$$

Soit l'espace de Sobolev $H^2(\Omega) = \{v | v^{(m)} \in L^2(\Omega), m = 0, \dots, 2\}$. Le produit scalaire dans cet espace est :

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u^{(1)}, v^{(1)})_{L^2(\Omega)} + (u^{(2)}, v^{(2)})_{L^2(\Omega)}.$$

Soit $v \in H^2(\Omega)$ quelconque. On multiplie les deux parties de l'équation précédente par v , puis on intègre sur le domaine Ω . On obtient la formulation variationnelle suivante (après deux intégrations par partie) :

$$(PV) \quad \int_{\Omega} u^{(2)} v^{(2)} dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

On cherche une solution u au problème variationnel $a(u, v) = L(v)$, $v \in H^2(\Omega)$ qui est aussi une solution faible au problème initial (P).

$$a(u, v) = (u^{(2)}, v^{(2)})_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

i *continuité de a*

$$|a(u, v)| \leq |(u^{(2)}, v^{(2)})_{L^2(\Omega)}| + |(u, v)_{L^2(\Omega)}|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u^{(2)}\|_{L^2(\Omega)} \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u^{(2)}\|_{L^2(\Omega)} \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)} + \|u^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} \|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire classique,

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Donc $a(u, v)$ est continue.

ii H^2 -ellipticité de a

$\exists \alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^2(\Omega)}^2$

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On utilise l'inégalité de Landau-Kolmogorov suivante :

$$\|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_2 \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2}{-\lambda_1}. \quad (2.50)$$

Cette inégalité est vraie $\forall v \in H^2(\Omega)$. Donc :

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_2 \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2}{-\lambda_1} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{-\lambda_1}\right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_1}\right) \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \max\left(1 + \frac{1}{-\lambda_1}, 1 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_1}\right) (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &= \frac{1}{\alpha} a(u, v) \end{aligned}$$

Alors $\exists \alpha = \frac{1}{\max(1 + \frac{1}{-\lambda_1}, 1 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_1})}$ tel que $a(u, v) \geq \alpha \|v\|_{H^2(\Omega)}^2$. Par conséquent, a est H^2 -elliptique.

Si $L(v) = \int_{\Omega} f v$ est continue, le Théorème de Lax-Milgram s'applique et le problème variationnel (PV) admet une solution unique.

Remarque 2.5.1 Dans cet exemple nous avons considéré la mesure de Lebesgue, donc l'inégalité de type Landau-Kolmogorov 2.50 est aussi pour cette mesure. Mais malheureusement dans notre étude nous n'avons pas pu obtenir le domaine qui nous donne les constantes de cette inégalité.

Remarque 2.5.2 Si $\Omega =]-a, b[$ borné, on peut toujours se ramener à $] -1, 1[$ par un changement de variable.

Nous donnons d'autres exemples de formes bilinéaires H^2 -elliptiques.

Exemple 1

$$a(u, v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$\exists \alpha > 0$ tel que $a(u, v) \geq \alpha \|v\|_{H^3(\Omega)}^2$.

On utilise l'inégalité de Landau-Kolmogorov suivante :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_3 \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq -\lambda_2 \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Cette inégalité est vraie $\forall v \in H^3(\Omega)$ Donc :

$$\begin{aligned} |\lambda_2| \|v\|_{H^3(\Omega)}^2 &= |\lambda_2| (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq (1 + |\lambda_2|) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda_2| \|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda_3 + |\lambda_2|) \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \max((1 + |\lambda_2|), |\lambda_2|, (\lambda_3 + |\lambda_2|)) a(u, v). \end{aligned}$$

Alors $\exists \alpha = \frac{|\lambda_2|}{\max((1+|\lambda_2|), |\lambda_2|, (\lambda_3+|\lambda_2|))}$ telle que $a(u, v) \geq \alpha \|v\|_{H^3(\Omega)}^2$. Donc $a(u, v)$ est H^3 -elliptique.

Exemple 2

$$a(u, v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$\exists \alpha > 0$ tel que $a(u, v) \geq \alpha \|v\|_{H^3(\Omega)}^2$.

On utilise l'inégalité de Landau-Kolmogorov suivante :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_3 \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq -\lambda_1 \|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda_2 \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Cette inégalité est vraie $\forall v \in H^3(\Omega)$. Donc :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_3 \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|) (\|v^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

En ajoutant

$$\min(|\lambda_1|, |\lambda_2|) (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

aux deux cotés de l'inégalité on trouve :

$$\begin{aligned} (1 + \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda_3 + \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)) \|v^{(3)}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \|v\|_{H^3(\Omega)}^2 \\ \max((1 + \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)), (\lambda_3 + \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|))) a(u, v) &\geq \min(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \|v\|_{H^3(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc $\exists \alpha = \frac{\min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)}{\max((1+\min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)), (\lambda_3+\min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)))}$ tel que $a(u, v) \geq \alpha \|v\|_{H^3(\Omega)}^2$. Alors $a(u, v)$ est H^3 -elliptique.

2.6 Problèmes ouverts

À l'issue de cette première partie, certains problèmes demeurent encore non-résolus et indiquent de possibles directions de recherche pour l'avenir. En effet, nous savons que l'hypothèse (\mathcal{H}) est satisfaite pour au moins cinq cas de mesures (voir [15] et [16]), mais nous n'étions capable de définir le domaine de positivité, et donc de donner les constantes des inégalités de Landau-Kolmogorov, que pour le cas de la mesure d'Hermite et ceux qui lui sont étroitement liés, c'est-à-dire les cas où on change de mesure selon l'ordre de dérivation considéré pour avoir l'orthogonalité des dérivées des polynômes orthogonaux par rapport à la mesure initiale. Donc le problème reste ouvert dans le cas où $\mu_0 = \dots = \mu_N = \mu$, μ est la mesure de Laguerre-Sonin ou celle de Jacobi.

L'intérêt de résoudre ces problèmes réside dans le fait que la mesure de Lebesgue qui est la mesure la plus utilisée est un cas particulier de celle de Jacobi ($\alpha = \beta = 0$).

Nous donnons un petit aperçu de résultats qui constituent une base importante pour étudier ces deux cas.

Pour illustrer ce problème nous détaillons le cas, relativement simple, où $N = 2$. Toutes les bases théoriques sont dans [16].

Soit la forme bilinéaire a_λ définie par :

$$a(f, g) = (f, g)_{L^2(\Omega; \mu)} + \lambda_1 (f', g')_{L^2(\Omega; \mu)} + \lambda_2 (f'', g'')_{L^2(\Omega; \mu)}, \quad \forall f \text{ et } g \in L^2(\Omega; \mu)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu &= x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \quad \Omega = [0, \infty[\quad \text{dans le cas Laguerre-Sonin,} \\ \mu &= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \alpha > -1, \beta > -1 \quad \Omega = [-1, 1] \quad \text{dans le cas Jacobi.} \end{aligned}$$

Rappelons qu'on s'intéresse toujours aux différents domaines de positivité de a

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_n &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \mid a(p, p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n \}, \\ \bar{\mathcal{D}} &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \mid a(p, p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \}. \end{aligned}$$

$\{R_i\}_{i \geq 0}$ est la base des polynômes quasi-orthogonaux d'ordre 2 par rapport à la mesure μ . Dans cette base un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ s'écrit comme

$$p = \sum_{i=0}^n y_i R_i = Y^T \hat{R}_n$$

avec $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0 \dots n$, $Y^T = (y_0, \dots, y_n)$ et $\hat{R}_n^T = (R_0, \dots, R_n)$.

Ceci nous permet de donner l'écriture matricielle de $a(p, p)$, pour $p \in \mathcal{P}_n$

$$a(p, p) = Y^T (K_n^{(0)} + \lambda_1 K_n^{(1)} + \lambda_2 K_n^{(2)}) Y = Y^T A_n Y$$

où $K_n^{(\nu)}(i, j) = (R_i^{(\nu)}, R_j^{(\nu)})_{L^2(\Omega; \mu)}$, $\nu = 0, 1, 2$.

Les matrices $K_n^{(\nu)}$ sont symétriques. Et pour ce choix de base, $K_n^{(2)}$ est diagonale, $K_n^{(1)}$ est tridiagonale (resp. à cinq diagonales) et $K_n^{(0)}$ est à cinq diagonales (resp. à neuf diagonales) dans le cas de Laguerre-Sonin (resp. dans le cas de Jacobi).

$a(p, p) \geq 0$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$ si et seulement si la matrice A_n est positive, i.e. si toutes ses valeurs propres sont positives.

Soit $Q_n(\lambda_1, \lambda_2)$ le déterminant de A_n . $Q_n(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique dans \mathbb{R}^2 . On note par $F_n(\lambda_1, \lambda_2)$ la nappe correspondant à la plus grande racine de Q_n . Alors $\bar{\mathcal{D}}_n$ est donné par :

$$\bar{\mathcal{D}}_n = \{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \mid F_n(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \}.$$

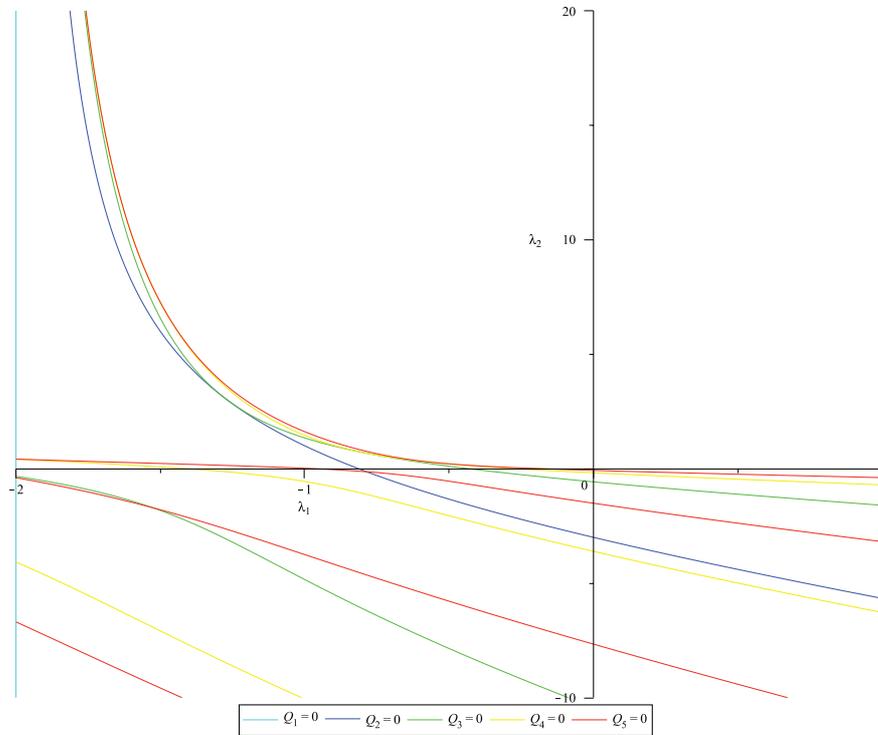


FIGURE 2.7 – \mathcal{D}_5 dans le cas Laguerre-Sonin pour $\alpha = 1$

Dans la figure 2.7, nous observons l'entrelacement des racines de Q_n et celles de Q_{n-1} . Cette propriété est déjà démontrée. Nous observons aussi que les nappes $F_n(\lambda_1, \lambda_2)$ s'empilent et que $F_n(\lambda_1, \lambda_2)$ touche $F_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2)$ en quelques points. Ceci a été vérifié numériquement pour les premières nappes mais aucune démonstration n'a été faite dans le cas général pour avoir le nombre exact de points de contact.

Problème 1

Quelle est la limite de $F_n(\lambda_1, \lambda_2)$ quand n tend vers ∞ ?

Cette branche limite donne la frontière du domaine de positivité

$$\bar{\mathcal{D}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \right\}.$$

Mais il est impossible de donner de façon formelle les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à 5, et donc de donner l'équation des nappes $F_n(\lambda_1, \lambda_2)$ au delà de $n = 4$. Ceci nous suggère de s'orienter dans un premier temps vers la recherche d'une majoration de $F_\infty(\lambda_1, \lambda_2)$.

Nous avons tenté de trouver des points dans la partie $\bar{\mathcal{D}} \setminus (\mathbb{R}^2)^+$ en localisant la plus petite des valeurs propres de A_n à l'aide des disques de Gershgorin, mais nous n'avons pas obtenu de bons résultats, juste une majoration grossière de λ_2 dans le cas particulier où $-1 < \alpha \leq 0$ pour la mesure de Laguerre-Sonin.

Problème 2

Caractériser les $F_n(\lambda_1, \lambda_2)$ et trouver $F_\infty(\lambda_1, \lambda_2)$ dans le cas Jacobi.

Problème 3 Considérer le cas général où on prend r normes parmi N pour ces deux cas de mesures.

Chapitre 3

Inégalités en plusieurs variables

3.1 Préliminaires

Soit $x = (x_1, \dots, x_s)$ un point de \mathbb{R}^s , $s \geq 2$.

Pour tout élément $n = (n_1, \dots, n_s)$ de \mathbb{N}^s , on note par $|n|$ la somme de ses composantes.

$$|n| = \sum_{j=1}^s n_j.$$

Si on est amené à comparer deux éléments $u = (u_1, \dots, u_s)$ et $v = (v_1, \dots, v_s)$ de \mathbb{N}^s ou \mathbb{R}^s , on utilisera les inégalités classiques : $u < v$ (resp. $u \leq v$) $\Leftrightarrow u_j < v_j$ (resp. $u_j \leq v_j$), $j = 1, \dots, s$.

Soit $i = (i_1, \dots, i_s)$ un élément de \mathbb{N}^s . Soit $L^2(\Omega; \mu_{i_j, j})$, $j = 1, \dots, s$, l'espace de Hilbert des fonctions réelles de carré intégrable en la variable x_j sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$. $\mu_{i_j, j}$ est une mesure de Borel positive supportée sur Ω .

Le produit scalaire sur cet espace est défini par :

$$(f(x_j), g(x_j))_{L^2(\Omega; \mu_{i_j, j})} = \int_{\Omega} f(x_j)g(x_j)d\mu_{i_j, j}(x_j), \quad \forall f, g \in L^2(\Omega; \mu_{i_j, j}),$$

et la norme est

$$\|f\|_{L^2(\Omega; \mu_{i_j, j})} = ((f, f)_{L^2(\Omega; \mu_{i_j, j})})^{\frac{1}{2}}.$$

À partir des différentes mesures $\mu_{i_j, j}$, on définit la mesure μ_i par le produit tensoriel

$$\mu_i = \prod_{j=1}^s \mu_{i_j, j}.$$

L'élément $(0, \dots, 0)$ de \mathbb{N}^s sera noté simplement 0. Alors $\mu_0 = \prod_{j=1}^s \mu_{0, j}$.

Comme on s'intéresse particulièrement aux cas d'Hermite, de Laguerre-Sonin et de Jacobi, on rappelle l'expression des mesures pour ces trois cas (Voir le Tableau 3).

– Dans le cas de la mesure d’Hermite,

$$\mu_{i_j,j} = \mu_{0,j} = e^{-x_j^2}, \quad \forall i_j \in \mathbb{N} \text{ et } \forall j = 1, \dots, s.$$

– Dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin,

$$\begin{aligned} \mu_{0,j} &= x_j^{\alpha_j} e^{-x_j}, \quad j = 1, \dots, s, \text{ avec } \alpha_j > -1. \\ \mu_{i_j,j} &= \mu_{0,j} x_j^{i_j} = x_j^{\alpha_j + i_j} e^{-x_j}, \quad j = 1, \dots, s, \text{ et } \forall i_j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

On posera $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$

– Dans le cas de la mesure de Jacobi,

$$\begin{aligned} \mu_{0,j} &= (1 - x_j)^{\alpha_j} (1 + x_j)^{\beta_j}, \quad j = 1, \dots, s, \text{ avec } \alpha_j > -1 \text{ et } \beta_j > -1. \\ \mu_{i_j,j} &= \mu_{0,j} (1 - x_j^2)^{i_j} = (1 - x_j)^{\alpha_j + i_j} (1 + x_j)^{\beta_j + i_j}, \quad j = 1, \dots, s, \text{ et } \forall i_j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

On posera $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$.

Maintenant on définit les espaces classiques de polynômes à plusieurs variables.

Définition 3.1.1 Soit $r = (r_1, \dots, r_s)$ un élément de \mathbb{N}^s . $|r| = \sum_{j=1}^s r_j$.

\mathcal{P}^s est l’espace des polynômes réels à s variables.

$\mathcal{P}_{|r|}$ est l’espace des polynômes réels à s variables de degré total au plus égal à $|r|$. Sa dimension est $\binom{|r| + s}{|r|}$.

$\Pi_{|r|}$ est l’espace des polynômes réels à s variables de degré total égal à $|r|$. Sa dimension est $\binom{|r| + s - 1}{|r|}$.

\mathcal{Q}_r est l’espace vectoriel des polynômes réels à s variables de degré au plus égal à r_j par rapport à la variable x_j , $j = 1, \dots, s$.

$$\mathcal{Q}_r = \mathcal{P}_{r_1} \otimes \mathcal{P}_{r_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{P}_{r_s}$$

où \mathcal{P}_{r_j} est l’espace vectoriel des polynômes réels à une variable x_j de degré au plus égal à r_j . La base canonique de \mathcal{Q}_r est $\{x^m\}_{0 \leq m_j \leq r_j, 1 \leq j \leq s}$, avec $m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s$. Sa

dimension est $\prod_{j=1}^s (r_j + 1)$.

Sans perte de généralité on peut supposer que $r_j \geq 1, \forall j = 1, \dots, s$ pour \mathcal{Q}_r . En effet, si une des composantes r_j est nulle, l’espace \mathbb{R}^s peut être réduit à \mathbb{R}^{s-1} . Et quand on cherche des inégalités dans $\mathcal{P}_{|r|}$, on suppose que $|r| \geq 1$, car sinon toutes les dérivées seront nulles.

Pour produire les suites des polynômes orthogonaux à plusieurs variables par rapport aux mesures qui nous intéressent, on commence par rappeler la définition de l’orthogonalité donnée par Dunkl et XU. [20].

Définition 3.1.2 Soit P un polynôme unitaire de $\mathcal{P}_{|r|}$. On dit que P est un polynôme orthogonal par rapport à une forme linéaire c si et seulement si

$$c(P, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_{|r-1|}.$$

En fixant le degré total, on a la garantie que P est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur. Mais plusieurs polynômes du même degré total avec des degrés partiels différents peuvent vérifier cette condition. En fait, la dimension de l'ensemble de ces polynômes orthogonaux de degré total $|r|$ est égale à la dimension de $\Pi_{|r|}$. Cette multiplicité constitue une difficulté majeure dans l'étude des polynômes à plusieurs variables, car il n'y a pas de choix naturel d'un ordre total dans \mathbb{N}^s , même si on peut proposer quelques ordres totaux (par exemple l'ordre lexicographique) mais rien ne justifie la préférence d'un choix par rapport à un autre.

Nous donnons une autre définition de l'orthogonalité formelle qui concerne les polynômes de degré fixé par rapport à chaque variable.

Définition 3.1.3 Soit P_r , $r = (r_1, \dots, r_s) \in \mathbb{N}^s$, un polynôme unitaire de \mathcal{Q}_r . P_r sera orthogonal formel par rapport à une forme linéaire c définie par produit tensoriel $c = \prod_{j=1}^s c^{(j)}$ si et seulement si

$$c(x^m P_r) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^s \quad \text{tel que } 0 \leq m_j \leq r_j \text{ pour } j = 1, \dots, s \text{ et } |m| < |r|.$$

En écrivant P_r dans la base canonique,

$$P_r = \sum_{\substack{0 \leq n_j \leq r_j \\ j = 1, \dots, s}} a_n x^n, \quad n = (n_1, \dots, n_s) \quad \text{avec } a_r = 1,$$

on obtient le système linéaire suivant

$$\sum_{\substack{0 \leq n_j \leq r_j \\ j = 1, \dots, s}} a_n c(x^{n+m}) = 0 \quad (3.1)$$

pour $0 \leq m_j \leq r_j$ avec $j = 1, \dots, s$ et $|m| < |r|$.

La matrice M_r du système linéaire (3.1) dont les inconnues sont les a_n pour $|n| < |r|$ conditionne l'existence et l'unicité de P_r .

Théorème 3.1.4 [20] Le polynôme orthogonal unitaire P_r existe et est unique si et seulement si M_r est inversible.

Lemme 3.1.5 Si $P_{n_j}(x_j)$ est le polynôme orthogonal unitaire de degré n_j par rapport à $c^{(j)}$, $j = 1, \dots, s$, alors l'ensemble $\left\{ \prod_{j=1}^s P_{n_j}(x_j) \right\}_{\substack{0 \leq n_j \leq r_j \\ 1 \leq j \leq s}}$ est une base de \mathcal{Q}_r .

Démonstration.

On vérifie aisément que le cardinal de cet ensemble est $\prod_{j=1}^s (r_j + 1)$ qui est la dimension de \mathcal{Q}_r .

On suppose qu'il existe des $b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{\substack{0 \leq n_j \leq r_j \\ j = 1, \dots, s \\ |n| < |r|}} b_n P_n(x) = 0, \text{ alors } \forall m \in \mathbb{N}^s, \quad \sum_{\substack{0 \leq n_j \leq r_j \\ j = 1, \dots, s \\ |n| < |r|}} b_n c(x^m P_n(x)) = 0.$$

En prenant successivement $|m| = 0$ on trouve $b_0 = 0$, puis les différents m tels que $|m| = 1$ on trouve $b_m = 0$, et ainsi de suite pour $|m| = 2, \dots, |r|$. Alors les éléments de cet ensemble de polynômes forment une famille libre et donc une base. □

Théorème 3.1.6 $P_r = \prod_{j=1}^s P_{r_j}(x_j)$ où $P_{r_j}(x_j)$ est le polynôme orthogonal unitaire de degré r_j par rapport à la forme linéaire $c^{(j)}$.

Démonstration.

P_r satisfait les conditions (3.1). Donc si M_r est inversible, P_r est de la forme proposée à cause de l'unicité.

Si on suppose que les formes linéaires $c^{(j)}$ sont quasi-définies, $j = 1, \dots, s$, les polynômes unitaires, orthogonaux par rapport à chaque $c^{(j)}$, existent et sont uniques. On dispose donc d'une nouvelle base de \mathcal{Q}_r : $\left\{ \prod_{j=1}^s P_{n_j}(x_j) \right\}_{\substack{0 \leq n_j \leq r_j \\ 1 \leq j \leq s}}$ (Lemme 3.1.5).

Si P_r^* est le polynôme orthogonal unitaire de degré r , alors en l'exprimant dans cette base on obtient :

$$P_r^* = \sum_{\substack{0 \leq n_j \leq r_j \\ j = 1, \dots, s \\ |n| < |r|}} a_n P_n(x) \quad \text{avec } a_r = 1.$$

En utilisant la même technique que pour montrer l'indépendance des $P_n(x)$, on montre que $a_n = 0$ pour $|n| = 0$, ensuite que tous les a_n pour $|n| = 1$ sont nuls, ... Il ne restera que a_r .

Conclusion : Si toutes les formes linéaires $c^{(j)}$ sont quasi-définies, alors $P_r^* = P_r = \prod_{j=1}^s P_{r_j}(x_j)$. □

Si les $c^{(j)}$ sont quasi-définies pour $j = 1, \dots, s$, les polynômes $P_{r_j}(x_j)$ satisferont une relation de récurrence à trois termes

$$P_{r_j}(x_j) = (x_j + B_{r_j,j})P_{r_j-1}(x_j) - C_{r_j,j}P_{r_j-1}(x_j)$$

avec $P_{r_0} = 1$ et $P_{r_{-1}} = 0$.

On en déduit que tout polynôme $P_r(x)$ satisfait une relation de récurrence à $2^s + 1$ termes que l'on peut écrire sous forme tensorielle

$$P_r(x) = \prod_{j=1}^s [(x_j + B_{r_j,j})P_{r_j-1}(x_j) - C_{r_j,j}P_{r_j-1}(x_j)]$$

avec $P_0 = 1$ et $P_\ell = 0$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^s$ tel que $\ell_i = -1$ ou 0 et $|\ell| \leq -1$. (voir le livre de Dunkl et Xu [20]).

Soit p un polynôme de $\mathcal{P}_{|r|}$ ou de \mathcal{Q}_r . Soit $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s)$ un élément de \mathbb{N}^s . On notera par $\partial^\nu p$ la dérivée partielle suivante de p :

$$\partial^\nu p = \frac{\partial^{|\nu|} p}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_s^{\nu_s}}.$$

Si $P_{\ell_j}^{(\nu_j)}(x_j)$ est la dérivée d'ordre ν_j de $P_{\ell_j}(x_j)$. On note par $k_{\ell_j}^{(\nu_j)}$ la norme carrée suivante :

$$k_{\ell_j}^{(\nu_j)} = (P_{\ell_j}^{(\nu_j)}(x_j), P_{\ell_j}^{(\nu_j)}(x_j))_{L^2(\Omega; \mu_{\nu_j, j})}$$

et par $k_\ell^{(\nu)}$ la norme carrée tensorielle

$$k_\ell^{(\nu)} = \prod_{j=1}^s k_{\ell_j}^{(\nu_j)}.$$

Bien sûr $k_\ell^{(\nu)} = 0$ s'il existe au moins un j tel que $\ell_j < \nu_j$.

On rappelle les $k_{\ell_j}^{(\nu_j)}$ pour les trois mesures qui nous intéressent (voir [13]).

– Dans le cas Hermite,

$$k_{\ell_j}^{(\nu_j)} = \frac{\sqrt{\pi}(\ell_j)!}{2^{\ell_j - \nu_j}} (\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu_j}.$$

– Dans le cas Laguerre-Sonin,

$$k_{\ell_j}^{(\nu_j)} = (\ell_j)! \Gamma(\ell_j + \alpha_j + 1) (\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu_j},$$

où Γ est la fonction Gamma.

– Dans le cas Jacobi,

$$k_{\ell_j}^{(\nu_j)} = \frac{2^{\delta_{\ell_j, j}} (\ell_j)! \Gamma(\alpha_{\ell_j, j}) \Gamma(\beta_{\ell_j, j}) \Gamma(\delta_{\ell_j, j} - \ell_j + \nu_j)}{\delta_{\ell_j, j} (\Gamma(\delta_{\ell_j, j}))^2} (\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu_j}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell_j, j} &= \alpha_j + \ell_j + 1, \\ \beta_{\ell_j, j} &= \beta_j + \ell_j + 1, \\ \delta_{\ell_j, j} &= \alpha_{\ell_j, j} + \beta_{\ell_j, j} - 1. \end{aligned}$$

Toutes ces normes satisfont le rapport suivant (Voir Tableau 3)

$$C_{\ell_j}^{(\nu_j)} = \frac{k_{\ell_j}^{(\nu_j)}}{k_{\ell_j}^{(0)}} = \xi_{\ell_j}^{(\nu_j)} (\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu_j}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_{\ell_j}^{(\nu_j)} &= 2^{\nu_j} \text{ dans le cas Hermite,} \\ &= 1 \text{ dans le cas Laguerre-Sonin,} \\ &= (\ell_j + \alpha_j + \beta_j + 1)_{\nu_j} \text{ dans le cas Jacobi.} \end{aligned}$$

Il sera plus commode d'écrire

$$\begin{aligned} C_{\ell}^{(\nu)} &= \prod_{j=1}^s C_{\ell_j}^{(\nu_j)} = \prod_{j=1}^s \frac{k_{\ell_j}^{(\nu_j)}}{k_{\ell_j}^{(0)}} \\ &= \frac{k_{\ell}^{(\nu)}}{k_{\ell}^{(0)}} = \xi_{\ell}^{(\nu)} (\ell - \nu + 1)_{\nu} \end{aligned}$$

où $\xi_{\ell}^{(\nu)} = \prod_{j=1}^s \xi_{\ell_j}^{(\nu_j)}$ et $(\ell - \nu + 1)_{\nu} = \prod_{j=1}^s (\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu_j}$.

Remarque 3.1.7 Si $(\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu_j} = 0$ (i.e pour $\nu_j \geq 1$ et $(\ell_j - \nu_j + 1) \leq 0$), alors $(\ell - \nu + 1)_{\nu} = 0$ et aussi $C_{\ell}^{(\nu)} = 0$. Mais par souci de simplicité de l'écriture de toutes les relations, on gardera tous les indices, même ceux pour lesquels $C_{\ell}^{(\nu)} = 0$.

On donne $C_{\ell}^{(\nu)}$ pour les différentes mesures.

$$\begin{aligned} C_{\ell}^{(\nu)} &= 2^{|\nu|} (\ell - \nu + 1)_{\nu} \text{ dans le cas Hermite,} \\ &= (\ell - \nu + 1)_{\nu} \text{ dans le cas Laguerre-Sonin,} \\ &= (\ell + \alpha + \beta + 1)_{\nu} (\ell - \nu + 1)_{\nu} \text{ dans le cas Jacobi,} \end{aligned}$$

avec $(\ell + \alpha + \beta + 1)_{\nu} = \prod_{j=1}^s (\ell_j + \alpha_j + \beta_j + 1)_{\nu_j}$.

Remarque 3.1.8 Comme il n'y a qu'une seule différence entre les cas Hermite et Laguerre-Sonin, il sera plus pratique d'avoir une notation unique,

$$C_{\ell}^{(\nu)} = 2^{\varepsilon|\nu|} (\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu}$$

avec $\varepsilon = 1$ dans le cas Hermite et $\varepsilon = 0$ dans le cas Laguerre-Sonin.

Comme dans le chapitre précédent, le meilleur outil pour étudier les différents types d'inégalités est l'utilisation d'une forme bilinéaire a_λ définie pour les fonctions d'un espace de Sobolev.

Soit $H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N)$, l'espace de Sobolev défini par

$$H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N) = \{f \mid \partial^\nu f \in L^2(\Omega^s; \mu_\nu), \forall |\nu| \leq N\}$$

avec

$$L^2(\Omega^s; \mu_\nu) = L^2(\Omega; \mu_{\nu_1,1}) \otimes \dots \otimes L^2(\Omega; \mu_{\nu_s,s}).$$

Le produit scalaire sur cet espace est donné par

$$(f, g)_{H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N)} = \sum_{|\nu| \leq N} (\partial^\nu f, \partial^\nu g)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}, \quad (3.2)$$

et la norme correspondante est

$$\|f\|_{H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N)} = ((f, f)_{H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N)})^{\frac{1}{2}}.$$

On définit la fonctionnelle bilinéaire a_λ

$$a_\lambda : H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N) \times H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N) \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$a_\lambda(f, g) = \sum_{|\nu| \leq N} \lambda_\nu (\partial^\nu f, \partial^\nu g)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}, \quad \forall f, g \in H^N(\Omega^s; \mu_\nu, |\nu| \leq N). \quad (3.3)$$

Les λ_ν sont $\eta = \binom{N+s}{s}$ nombres réels fixés tels que $\lambda_0 = 1$ et $\exists \nu$ tel que $|\nu| = N$ et $\lambda_\nu \neq 0$. λ est le vecteur de $\mathbb{R}^{\eta-1}$ de composantes $\lambda_\nu, |\nu| > 0$.

Proposition 3.1.9 $a_\lambda(P_r, P_\ell) = 0, \forall r \neq \ell$, où les P_r sont les polynômes orthogonaux unitaires classiques.

Démonstration.

$$a_\lambda(P_r, P_\ell) = \sum_{|\nu| \leq N} \lambda_\nu (\partial^\nu P_r, \partial^\nu P_\ell)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}.$$

Mais les dérivées des polynômes orthogonaux classiques sont aussi orthogonales par rapport à la même famille de mesures. Donc, pour les trois cas considérés, si P_r est orthogonal par rapport à μ_0 , $\partial^\nu P_r$ est orthogonal par rapport à μ_ν . Par conséquent, $(\partial^\nu P_r, \partial^\nu P_\ell)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} = 0$ si $r \neq \ell$ et les P_r sont aussi les polynômes orthogonaux unitaires par rapport à la forme bilinéaire a_λ .

□

Maintenant nous définissons quelques domaines de $\mathbb{R}^{\eta-1}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^{\eta-1} \mid a_\lambda(p, p) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}^s - \{0\} \}, \\ \mathcal{D}_r &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^{\eta-1} \mid a_\lambda(p, p) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{Q}_r - \{0\} \}, \\ \mathcal{D}^*_{|r|} &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^{\eta-1} \mid a_\lambda(p, p) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_{|r|} - \{0\} \}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

On notera par $\bar{\mathcal{D}}$, $\bar{\mathcal{D}}_r$ et $\bar{\mathcal{D}}^*_{|r|}$ les domaines de $\mathbb{R}^{\eta-1}$ tels que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}} &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^{\eta-1} \mid a_\lambda(p, p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}^s \}, \\ \bar{\mathcal{D}}_r &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^{\eta-1} \mid a_\lambda(p, p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{Q}_r \}, \\ \bar{\mathcal{D}}^*_{|r|} &= \{ \lambda \in \mathbb{R}^{\eta-1} \mid a_\lambda(p, p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_{|r|} \}. \end{aligned}$$

Propriété 3.1.10 *Tous les domaines \mathcal{D} , \mathcal{D}_r , $\mathcal{D}^*_{|r|}$, $\bar{\mathcal{D}}$, $\bar{\mathcal{D}}_r$ et $\bar{\mathcal{D}}^*_{|r|}$ sont des domaines convexes.*

Démonstration.

Soient λ et λ^* deux points de l'un de ces domaines, et soient a_λ et a_{λ^*} les formes bilinéaires correspondantes définies par (3.3).

Pour tout $\theta \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} a_{\theta\lambda+(1-\theta)\lambda^*}(p, p) &= \sum_{|\nu| \leq N} (\theta\lambda_\nu + (1-\theta)\lambda^*_\nu) (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} \\ &= \theta \sum_{|\nu| \leq N} \lambda_\nu (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} + (1-\theta) \sum_{|\nu| \leq N} \lambda^*_\nu (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} \\ &= \theta a_\lambda(p, p) + (1-\theta) a_{\lambda^*}(p, p). \end{aligned}$$

Si a_λ et a_{λ^*} sont positives (resp. non négatives), alors $a_{\theta\lambda+(1-\theta)\lambda^*}$ est aussi positive (resp. non négative).

□

Quand $N = 1$, les λ obtenus dans les domaines précédents nous donneront des inégalités de Markov-Bernstein.

Quand $N \geq 2$, les λ obtenus dans les domaines précédents nous donneront les différentes inégalités de type Landau-Kolmogorov.

On peut obtenir ces domaines à partir des polynômes orthogonaux unitaires P_ℓ . En effet, nous avons la propriété évidente suivante :

Théorème 3.1.11

$$\begin{aligned} a_\lambda(p, p) &> 0, \quad \forall p \in \mathcal{Q}_r - \{0\} \quad (\text{resp. } \forall p \in \mathcal{P}_{|r|} - \{0\}) \\ &\Leftrightarrow a_\lambda(P_\ell(x), P_\ell(x)) > 0, \quad \forall \ell \leq r \quad (\text{resp. } \forall |\ell| \leq |r|). \end{aligned}$$

Démonstration.

⇒ évidente.

⇐ Si p est exprimé dans la base des polynômes orthogonaux unitaires $P_\ell(x)$, alors

$$p(x) = \sum \beta_\ell P_\ell(x).$$

Donc $a_\lambda(p, p) = \sum \beta_\ell^2 a_\lambda(P_\ell(x), P_\ell(x)) > 0$.

Ces sommes sont prises pour tous les ℓ tels que $0 \leq \ell_j \leq r_j, \forall j = 1, \dots, s$, si $p \in \mathcal{Q}_r$, ou tels que $|\ell| \leq |r|$ si $p \in \mathcal{P}_{|r|}$.

□

$a_\lambda(P_r, P_r) = 0$ est alors l'hyperplan \mathcal{H}_r de $\mathbb{R}^{\eta-1}$ qui a pour équation :

$$1 + \sum_{0 < |\nu| \leq N} \lambda_\nu C_r^{(\nu)} = 0.$$

Tous les hyperplans \mathcal{H}_r coupent $\mathbb{R}^{\eta-1}$ en deux demi-espaces l'un correspond à $a_\lambda(P_r, P_r) > 0$ et l'autre à $a_\lambda(P_r, P_r) < 0$. On notera par \mathcal{O}_r le demi-espace positif. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_r &= \bigcap_{\ell \leq r} \mathcal{O}_\ell, \\ \mathcal{D}^*_{|r|} &= \bigcap_{|\ell| \leq |r|} \mathcal{O}_\ell, \\ \mathcal{D} &= \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}^s} \mathcal{O}_\ell. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.12 A cause de l'expression des $k_\ell^{(\nu)} = \prod_{j=1}^s k_{\ell_j}^{(\nu_j)}$, les hyperplans \mathcal{H}_r ne dépendent que des valeurs des r_j et non pas de leur ordre.

L'étude de la positivité de la fonctionnelle bilinéaire dans le cas général s'est avérée très compliquée. Pour cette raison, nous avons décidé de nous intéresser uniquement au cas homogène, c'est-à-dire, au cas où tous les λ_ν sont égaux pour un $|\nu|$ fixé.

Nous commencerons par le cas simple des inégalités de Markov-Bernstein. Ensuite, nous donnerons les résultats pour les inégalités de types Landau-Kolmogorov pour $N = 2$. Nous séparerons les cas des mesures d'Hermite et de Laguerre-Sonin du cas de la mesure de Jacobi.

3.2 Inégalités de Markov-Bernstein

Cette partie est consacrée au cas $N = 1$.

On cherche le plus petit $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lequel $a_\lambda(p, p) \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{Q}_r$ (resp. $\mathcal{P}_{|r|}$).

$$a_\lambda(p, p) = (p, p)_{L^2(\Omega^s; \mu_0)} + \lambda \sum_{|\nu|=1} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}$$

En utilisant le résultat du théorème 3.1.11, notre recherche se réduit à l'étude de la positivité de

$$a_\lambda(P_\ell, P_\ell) = (P_\ell, P_\ell)_{L^2(\Omega^s; \mu_0)} + \lambda \sum_{|\nu|=1} (\partial^\nu P_\ell, \partial^\nu P_\ell)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}, \quad \forall \ell \leq r \quad (\text{resp. } |\ell| \leq |r|)$$

Or

$$\begin{aligned} a_\lambda(P_\ell, P_\ell) &= k_\ell^{(0)} + \lambda \sum_{|\nu|=1} k_\ell^{(\nu)} \\ &= k_\ell^{(0)} \left(1 + \lambda \sum_{|\nu|=1} \frac{k_\ell^{(\nu)}}{k_\ell^{(0)}} \right) \\ &= k_\ell^{(0)} \left(1 + \lambda \sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$a_\lambda(P_\ell, P_\ell) \geq 0 \quad \text{si} \quad \lambda \geq -\frac{1}{\sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)}}.$$

Les inégalités de Markov-Bernstein sont obtenues pour un choix de λ correspondant à

$$\lambda = -\frac{1}{\max_{|\nu|=1} \left(\sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)} \right)}.$$

Le maximum dans cette relation est pris pour tous les choix possibles de $\ell \leq r$ (resp. $|\ell| \leq |r|$) ce qui correspond à tous les choix possibles de $P_\ell \in \mathcal{Q}_r$ (resp. $\mathcal{P}_{|r|}$).

Théorème 3.2.1 *Pour les mesures d'Hermite et de Laguerre-Sonin nous avons l'inégalité de Markov-Bernstein suivante, $\forall p \in \mathcal{Q}_r$ (resp. $\mathcal{P}_{|r|}$)*

$$\left(\sum_{|\nu|=1} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2^\varepsilon |r|}} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}. \quad (3.5)$$

avec $\varepsilon = 0$ dans le cas Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si $p = cP_r$, $\forall c \in \mathbb{R}$, quand $p \in \mathcal{Q}_r$.

Mais, si $p \in \mathcal{P}_{|r|}$, alors l'inégalité devient une égalité si et seulement si $p = \sum_{|\ell|=|r|} c_\ell P_\ell$,

$\forall c_\ell \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

Nous cherchons le maximum de $\sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)}$.

Les seules possibilités pour avoir $|\nu| = 1$ sont de prendre un seul $\nu_j = 1$, $1 \leq j \leq s$ et tous les autres nuls, alors

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)} &= \sum_{|\nu|=1} 2^{\varepsilon|\nu|} (\ell - \nu + 1)_\nu \\ &= 2^\varepsilon \sum_{|\nu|=1} \prod_{j=1}^s (\ell_j - \nu_j + 1)_{\nu_j} \\ &= 2^\varepsilon \sum_{j=1}^s \ell_j = 2^\varepsilon |\ell|. \end{aligned}$$

Par conséquent, le maximum est égal à $2^\varepsilon |r|$. D'où l'inégalité de Markov-Bernstein $\forall p \in \mathcal{Q}_r$ (resp. $\mathcal{P}_{|r|}$)

$$\left(\sum_{|\nu|=1} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2^\varepsilon |r|}} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $p = cP_r$, $\forall c \in \mathbb{R}$, car le maximum de $\sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)}$

correspond à $\sum_{|\nu|=1} C_r^{(\nu)}$ pour un unique r et donc un unique P_r dans l'espace \mathcal{Q}_r . Un

tel polynôme est appelé *un polynôme extrémal*. Bien évidemment, les seuls polynômes extrémaux intéressants sont ceux pour lesquels $c \neq 0$.

Dans l'espace $\mathcal{P}_{|r|}$, nous avons $\binom{|r| + s - 1}{|r|}$ différents éléments de \mathbb{N}^s pour un $|r|$ donné qui donnent autant de polynômes dans $\mathcal{P}_{|r|}$ du même degré total mais de degrés partiels différents. Alors, les polynômes extrémaux sont toutes les combinaisons linéaires possibles de ces polynômes orthogonaux.

$$p = \sum_{|\ell|=|r|} c_\ell P_\ell, \quad \forall c_\ell \in \mathbb{R}.$$

Les seuls intéressants sont ceux pour lesquels au moins une des constantes c_ℓ est différente de 0.

□

Remarque 3.2.2 La constante de Markov-Bernstein vient d'être donnée par Kroó et Szabados dans le cas de la mesure d'Hermite [32].

Théorème 3.2.3 Pour la mesure de Jacobi nous avons les inégalités de Markov-Bernstein suivantes :

i)

$$\forall p \in \mathcal{Q}_r, \quad \left(\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}}{\left(\sum_{j=1}^s r_j (r_j + \alpha_j + \beta_j + 1) \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.6)$$

Les polynômes extrémaux sont cP_r , $\forall c \in \mathbb{R}$.

ii)

$$\forall p \in \mathcal{P}_{|r|}, \quad \left(\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}}{\left(|r|(|r| + \max_{1 \leq j \leq s} (\alpha_j + \beta_j) + 1) \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.7)$$

Les polynômes extrémaux sont donnés par les combinaisons linéaires suivantes

$$p = \sum_{|\ell|=|r|} c_\ell P_\ell, \quad \forall c_\ell \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

Encore une fois, on doit trouver le maximum de $\sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)}$

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)} &= \sum_{|\nu|=1} (\ell + \alpha + \beta + 1)_\nu (\ell - \nu + 1)_\nu \\ &= \sum_{j=1}^s (\ell_j + \alpha_j + \beta_j + 1) \ell_j. \end{aligned}$$

Soit γ_j la somme $\alpha_j + \beta_j$, pour $j = 1, \dots, s$.

Nous cherchons le maximum de $\sigma(\ell, \gamma) = \sum_{j=1}^s (\ell_j + \gamma_j + 1) \ell_j$, sous les contraintes suivantes

i) $\ell \leq r$ si $p \in \mathcal{Q}_r$,

ii) $|\ell| \leq |r|$ si $p \in \mathcal{P}_{|r|}$.

Le maximum est évident dans le premier cas. Il est atteint pour $\ell = r$. Donc

$$\max_{\ell \leq r} \sigma(\ell, \gamma) = \sigma(r, \gamma) = \sum_{j=1}^s (r_j + \gamma_j + 1) r_j.$$

Dans le second cas, le maximum est atteint pour $\ell_i = |r|$, avec i , $1 \leq i \leq s$, tel que $\gamma_i = \max_{1 \leq j \leq s} \gamma_j$.

Alors $\max_{|\ell| \leq r} \sigma(\ell, \gamma) = |r|(|r| + \max_{1 \leq j \leq s} \gamma_j + 1)$.

Pour prouver que cette expression correspond bien au maximum, montrons que la différence suivante est non négative

$$\begin{aligned}
& |r|(|r| + 1 + \max_{1 \leq j \leq s} \gamma_j) - \sum_{j=1}^s (\ell_j + \gamma_j) \ell_j, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^s \quad \text{avec } |\ell| \leq |r| \\
&= |r|(|r| + 2 + \max_{1 \leq j \leq s} \gamma_j) - |r| - \sum_{j=1}^s \ell_j^2 - \sum_{j=1}^s (2 + \gamma_j) \ell_j + |\ell| \\
&\geq |r|(|r| + 2 + \max_{1 \leq j \leq s} \gamma_j) - |r| - |\ell|^2 - (2 + \max_{1 \leq j \leq s} \gamma_j) \sum_{j=1}^s \ell_j + |\ell| \\
&= (|r| - |\ell|)(|r| + |\ell| + 1 + \max_{1 \leq j \leq s} \gamma_j) \geq 0,
\end{aligned}$$

car $|r| \geq 1$ et $\gamma_j = \alpha_j + \beta_j > -2$.

D'où les deux inégalités de Markov-Bernstein.

Les polynômes extrémaux sont trouvés de la même façon que précédemment.

□

Remarque 3.2.4 *D'après la propriété 2.1.5 nous pouvons écrire les inégalités (3.5)-(3.7) sous la forme suivante :*

– Dans le cas Hermite et Laguerre-Sonin, $\forall p \in \mathcal{Q}_r$ (resp. $\mathcal{P}_{|r|}$),

$$\left(\sum_{j=1}^s \| x_j^{(1-\varepsilon)/2} \partial^{\nu(j)} p \|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^\varepsilon |r|}} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}.$$

$\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite, $\varepsilon = 0$ dans le cas de Laguerre-Sonin.

– Dans le cas Jacobi

$$\forall p \in \mathcal{Q}_r, \quad \left(\sum_{j=1}^s \| (1 - x_j^2)^{1/2} \partial^{\nu(j)} p \|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}}{\left(\sum_{j=1}^s r_j (r_j + \alpha_j + \beta_j + 1) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\forall p \in \mathcal{P}_{|r|}, \quad \left(\sum_{j=1}^s \| (1 - x_j^2)^{1/2} \partial^{\nu(j)} p \|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}}{\left(|r|(|r| + \max_{1 \leq j \leq s} (\alpha_j + \beta_j) + 1) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$\nu(j) = (\nu(j)_1, \dots, \nu(j)_s) \in \mathbb{N}^s$, est tel que $\nu_j = 1$ et $\nu_i = 0$, $\forall i \neq j$.

3.3 Inégalités de Landau-Kolmogorov dans le cas Hermite et Laguerre-Sonin

Dans cette partie nous prenons $N = 2$ et nous considérons uniquement les cas Hermite et Laguerre-Sonin. En effet, le cas Jacobi ne correspond pas aux résultats qui sont communs aux mesures d'Hermite et de Laguerre-Sonin.

En outre, nous allons faire deux études différentes quand $p \in \mathcal{Q}_r$ ou quand $p \in \mathcal{P}_{|r|}$. Ce dernier cas nous permet de donner exactement le domaine \bar{D} en prenant la limite de $\bar{D}_{|r|}^*$. Nous montrerons que la frontière des différents domaines de positivité de a_λ est constituée par des suites de droites et leurs points d'intersection qui jouent un rôle important dans l'obtention des constantes des inégalités de type Landau-Kolmogorov.

Pour $N = 2$ l'expression de la forme bilinéaire a_λ est :

$$a_\lambda(p, p) = (p, p)_{L^2(\Omega^s; \mu_0)} + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}$$

Comme nous allons utiliser le Théorème 3.1.11, nous commençons par donner l'expression de $a_\lambda(P_\ell, P_\ell)$ pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_s)$ un élément de \mathbb{N}^s .

$$\begin{aligned} a_\lambda(P_\ell, P_\ell) &= \|P_\ell\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu P_\ell\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu P_\ell\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \\ &= k_\ell^{(0)} + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} k_\ell^{(\nu)} + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} k_\ell^{(\nu)}. \\ &= k_\ell^{(0)} \left(1 + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)} + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} C_\ell^{(\nu)} \right). \\ &= k_\ell^{(0)} \left(1 + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} \xi_\ell^{(\nu)}(\ell + \nu + 1)_\nu + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} \xi_\ell^{(\nu)}(\ell + \nu + 1)_\nu \right). \end{aligned}$$

Pour avoir $|\nu| = 1$, il faut prendre $\nu_j = 1$, pour un $1 \leq j \leq s$, et $\nu_i = 0$ si $i \neq j$. Alors :

$$\sum_{|\nu|=1} \xi_\ell^{(\nu)}(\ell - \nu + 1)_\nu = 2^\varepsilon \sum_{j=1}^s \ell_j = 2^\varepsilon |\ell|.$$

Pour avoir $|\nu| = 2$, on peut soit prendre $\nu_j = 2$ pour un $1 \leq j \leq s$ et $\nu_i = 0$ si $i \neq j$, soit prendre $\nu_i = 1, \nu_j = 1$ pour $1 \leq i < j \leq s$ et $\nu_k = 0$ si $k \neq i$ et $k \neq j$. Alors :

$$\sum_{|\nu|=2} \xi_\ell^{(\nu)}(\ell - \nu + 1)_\nu = 2^{2\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^s \ell_j(\ell_j - 1) + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j \right). \quad (3.8)$$

avec $\varepsilon = 0$ dans le cas Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

On note par $\varphi(\ell)$ la quantité $\varphi(\ell) = \sum_{j=1}^s \ell_j(\ell_j - 1) + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j$.

Propriété 3.3.1 *Pour tout polynôme p de \mathcal{Q}_r on a*

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)}. \\ \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} 2^\varepsilon k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 |\rho|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 = \sum_{\rho \leq r} 2^{2\varepsilon} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 \varphi(\rho). \quad (3.10)$$

Démonstration.

Soit p un polynôme de \mathcal{Q}_r . Alors p peut être exprimé dans la base des polynômes orthogonaux unitaires P_ρ , $\rho \leq r$.

$$p = \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho P_\rho.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)}. \\ \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{|\nu|=1} \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(\nu)} \\ &= \sum_{\rho \leq r} 2^\varepsilon k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 |\rho|. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{|\nu|=2} \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(\nu)} \\ &= \sum_{\rho \leq r} \sum_{|\nu|=2} \beta_\rho^2 k_\rho^{(\nu)} \\ &= \sum_{\rho \leq r} 2^{2\varepsilon} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 \varphi(\rho). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.2 *Pour simplifier les notations et alléger les expressions, toutes les normes $k_\rho^{(\nu)}$ sont prises en compte même celles qui sont nulles (quand il existe au moins un ρ_j tel que $\rho_j < \nu_j$). C'est la raison pour laquelle on peut garder la somme de tous les ρ tels que $\rho \leq r$ dans (3.10).*

$a_\lambda(P_\ell, P_\ell) = 0$ correspond à une droite \mathcal{H}_ℓ ,

$$\mathcal{H}_\ell = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2^\varepsilon |\ell| \lambda_1 + 2^{2\varepsilon} \varphi(\ell) \lambda_2 = 0\}.$$

Remarque 3.3.3 Si $|\ell| = 1$, alors toutes les droites \mathcal{H}_ℓ se réduisent à une seule droite $\mathcal{H}_1 : 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 = 0$.

Remarque 3.3.4 Toutes les droites \mathcal{H}_ℓ telles que $|\ell|$ est fixé, passent par le même point $(\lambda_1 = -\frac{1}{2^\varepsilon |\ell|}, \lambda_2 = 0)$.

Lemme 3.3.5 Dans une famille de droites \mathcal{H}_ℓ pour $|\ell|$ fixé, seulement deux sont intéressantes :

$$\begin{aligned} 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \max_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell) &= 0, \\ 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \min_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell) &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration.

Si $|\ell|$ est fixé, alors toutes les droites \mathcal{H}_ℓ , passent par le même point, et donc, elles sont comprises dans l'espace du plan (λ_1, λ_2) délimité par ces deux droites qui correspondent à la pente minimale et la pente maximale. Elles sont les seules qui contribuent à la restriction du domaine de positivité de la forme bilinéaire a_λ .

□

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Lemme 3.3.6 Pour $|\ell|$ fixé, les demi-espaces ouverts positifs \mathcal{O}_ℓ donnent un espace ouvert positif $\bigcap \mathcal{O}_\ell$, dont la frontière est donnée par deux demi-droites. L'une d'elles correspond à la droite ayant la plus petite pente dans la partie $\lambda_1 \leq -\frac{1}{2^\varepsilon |\ell|}$. L'autre correspond à la droite ayant la plus grande pente dans la partie $\lambda_1 \geq -\frac{1}{2^\varepsilon |\ell|}$.

Nous transformons $\varphi(\ell)$ afin de simplifier l'étude de ces droites.

$$\begin{aligned} \varphi(\ell) &= \sum_{j=1}^s \ell_j (\ell_j - 1) + \sum_{1 \leq i < j < s} \ell_i \ell_j \\ &= \sum_{j=1}^s \ell_j^2 - |\ell| + \sum_{i \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j. \\ \varphi(\ell) + \sum_{i \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j &= \sum_{j=1}^s \ell_j^2 + 2 \sum_{i \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j - |\ell| \\ &= \left(\sum_{j=1}^s \ell_j \right)^2 - |\ell| = |\ell|^2 - |\ell|. \end{aligned}$$

La somme des deux relations donne

$$\varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^s \ell_j^2 + |\ell|^2 - 2|\ell| \right). \quad (3.11)$$

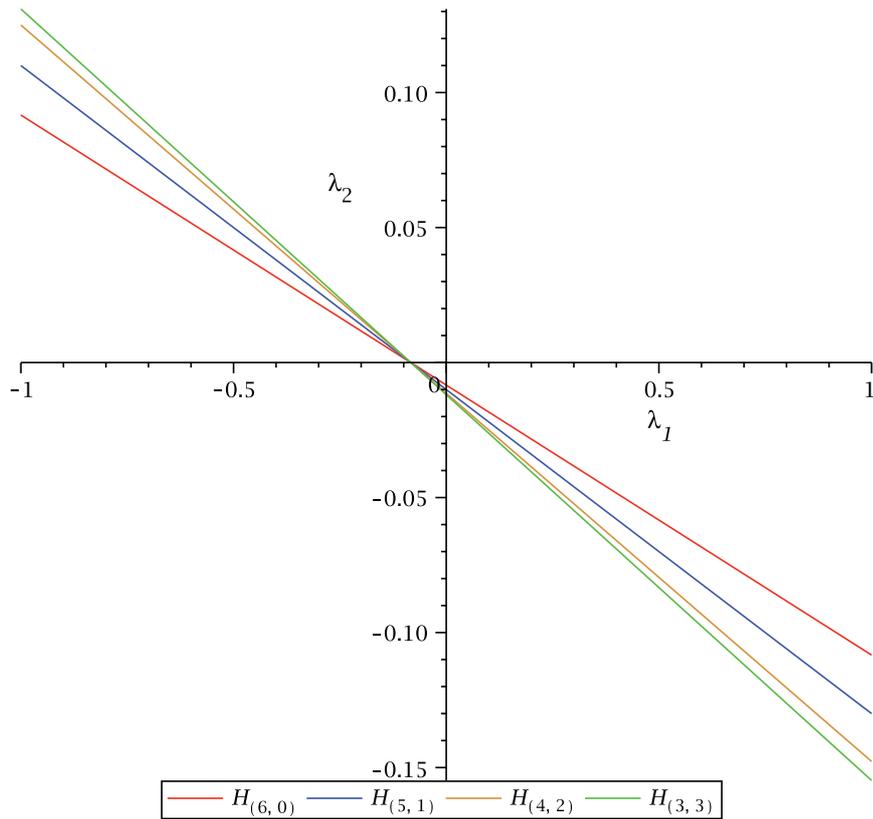


FIGURE 3.1 – Les droites $\mathcal{H}_{(j_1, j_2)}$ telles que $j_1 + j_2 = 6$ pour $N = 2$ et $s = 2$.

La figure 3.1 représente les droites \mathcal{H}_ℓ telles que $|\ell| = 6$ et $s = 2$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin. Toutes ces droites passent par le même point et sont comprises entre $\mathcal{H}_{(6,0)}$ (en rouge) et $\mathcal{H}_{(3,3)}$ (en vert).

Propriété 3.3.7 Soient ρ et τ deux éléments de \mathbb{N}^s . Si $\rho > \tau$ alors

- i) $\varphi(\rho) > \varphi(\tau)$.
- ii) $|\tau|\varphi(\rho) > |\rho|\varphi(\tau)$.

Démonstration.

i) En remplaçant $\varphi(\rho)$ et $\varphi(\tau)$ par (3.11) on trouve

$$\varphi(\rho) - \varphi(\tau) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^s (\rho_j^2 - \tau_j^2) + (|\rho| - |\tau|)(|\rho| + |\tau| - 2) \right),$$

qui est une quantité positive.

ii) $|\tau|\varphi(\rho) - |\rho|\varphi(\tau) = \frac{1}{2}(|\tau| \sum_{j=1}^s \rho_j^2 - |\rho| \sum_{j=1}^s \tau_j^2 + |\tau||\rho|(|\rho| - |\tau|))$.

Étant donné que $\sum_{j=1}^s \rho_j^2 > \sum_{j=1}^s \tau_j \rho_j$ et que $\sum_{j=1}^s \tau_j^2 < \sum_{j=1}^s \rho_j \tau_j$, on obtient

$$|\tau|\varphi(\rho) - |\rho|\varphi(\tau) \geq \frac{1}{2}(|\rho| - |\tau|) \left(|\tau||\rho| - \sum_{j=1}^s \rho_j \tau_j \right).$$

Mais $|\tau||\rho| - \sum_{j=1}^s \rho_j \tau_j = \left(\sum_{j=1}^s \tau_j \right) \left(\sum_{j=1}^s \rho_j \right) - \sum_{j=1}^s \rho_j \tau_j = \sum_{i \neq j} \rho_i \tau_j > 0$.

□

3.3.1 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $p \in \mathcal{Q}_r$

On cherche les $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $a_\lambda(p, p) \geq 0$, $\forall p \in \mathcal{Q}_r$.

$$a_\lambda(p, p) = (p, p)_{L^2(\Omega^s; \mu_0)} + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}.$$

Nous nous intéressons aux droites \mathcal{H}_ℓ quand $\ell \leq r$, c'est-à-dire quand $0 \leq \ell_j \leq r_j$, pour $j = 1, \dots, s$.

Dans l'espace des polynômes réels \mathcal{Q}_r , on a une unique droite \mathcal{H}_r , mais on a au plus s différentes droites \mathcal{H}_ℓ telles que $|\ell| = |r| - 1$ et $0 \leq \ell \leq r$. Elles passent toutes par le point $(-\frac{1}{2^\varepsilon(|r|-1)}, 0)$. Leur pente est $-\frac{|\ell|}{2^\varepsilon \varphi(\ell)}$.

En utilisant les Lemmes 3.3.5 et 3.3.6, les seules droites qui interviennent dans la limitation de l'espace ouvert $\bigcap_{|\ell|=|r|-1} \mathcal{O}_\ell$, sont celles qui ont la plus petite et la plus grande pente.

Soit \mathcal{L} le sous-ensemble de \mathbb{N}^s défini par :

$$\mathcal{L} = \{\ell \in \mathbb{N}^s \mid \ell \leq r \text{ et } |\ell| = |r| - 1\},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L} = \{\ell \in \mathbb{N}^s \mid \ell_i = r_i - 1, \quad 1 \leq i \leq s, \text{ et } \ell_j = r_j, \quad j \neq i\}.$$

Alors, pour $\ell \in \mathcal{L}$, nous pouvons exprimer $\varphi(\ell)$ en fonction de r .

$$\begin{aligned} \varphi(\ell) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^s r_j^2 + (r_i - 1)^2 + (|r| - 1)(|r| - 3) \right) \\ &= \varphi(r) - r_i - |r| + 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \min_{\ell \in \mathcal{L}} \varphi(\ell) &= \varphi(r) - |r| + 2 - \max_{1 \leq i \leq s} r_i, \\ \max_{\ell \in \mathcal{L}} \varphi(\ell) &= \varphi(r) - |r| + 2 - \min_{1 \leq i \leq s} r_i. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.8 Soit Δ la quantité $\Delta = |r| + \max_{1 \leq i \leq s} r_i - 2$.

Quand $|r| \geq 2$, alors $\varphi(r) - |r|\Delta < 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \varphi(r) - |r|\Delta &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (r_j^2 - |r|^2 + 2|r| - 2|r| \max_{1 \leq i \leq s} r_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s r_j (r_j - |r| + 2 - 2 \max_{1 \leq i \leq s} r_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s r_j \left((r_j - \max_{1 \leq i \leq s} r_i) + (2 - |r|) - \max_{1 \leq i \leq s} r_i \right). \end{aligned}$$

Quand $|r| \geq 2$, cette dernière expression est négative.

□

Soit ℓ^* un élément de \mathcal{L} qui réalise le minimum de $\varphi(\ell)$.

Maintenant on considère le point B_{ℓ^*} obtenu par l'intersection de \mathcal{H}_r et \mathcal{H}_{ℓ^*} quand $|r| \geq 2$.

La propriété suivante nous donne les coordonnées d'un tel point.

Propriété 3.3.9 *Quand $|r| \geq 2$, les coordonnées de B_{ℓ^*} sont*

$$\lambda_1(B_{\ell^*}) = \frac{\Delta}{2^\varepsilon(\varphi(r) - |r|\Delta)} < 0, \quad (3.12)$$

$$\lambda_2(B_{\ell^*}) = -\frac{1}{2^{2\varepsilon}(\varphi(r) - |r|\Delta)} > 0. \quad (3.13)$$

$\varepsilon = 0$ dans le cas de Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

Démonstration.

Comme B_{ℓ^*} est le point d'intersection des deux droites \mathcal{H}_r et \mathcal{H}_{ℓ^*} , il vérifie leurs équations, donc ses coordonnées sont immédiatement obtenues en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 1 + 2^\varepsilon \lambda_1(B_{\ell^*})|r| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2(B_{\ell^*})\varphi(r) = 0, \\ 1 + 2^\varepsilon \lambda_1(B_{\ell^*})|\ell^*| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2(B_{\ell^*})\varphi(\ell^*) = 0. \end{cases}$$

Or $|\ell^*| = |r| - 1$ et $\varphi(\ell^*) = \varphi(r) - |r| - \max_{1 \leq i \leq s} r_i + 2 = \varphi(r) - \Delta$. Alors le système qui donne (3.12) et (3.13) est le suivant :

$$\begin{cases} 1 + 2^\varepsilon \lambda_1(B_{\ell^*})|r| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2(B_{\ell^*})\varphi(r) = 0, \\ 1 + 2^\varepsilon \lambda_1(B_{\ell^*})(|r| - 1) + 2^{2\varepsilon} \lambda_2(B_{\ell^*})(\varphi(r) - \Delta) = 0. \end{cases}$$

De plus $\Delta > 0$ et $\varphi(r) - |r|\Delta < 0$ (Lemme 3.3.8). D'où le signe des coordonnées.

□

Maintenant on montre que B_{ℓ^*} appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

Théorème 3.3.10 *Le point B_{ℓ^*} , obtenu par l'intersection des droites \mathcal{H}_r et \mathcal{H}_{ℓ^*} , appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.*

Démonstration.

B_{ℓ^*} appartient à $\bar{\mathcal{D}}_r$ si et seulement si il appartient à tous les demi-espaces ouverts positif \mathcal{O}_ρ pour tout $\rho \in \mathbb{N}^s$ tel que $\rho \leq r$. Soit encore si

$$1 + 2^\varepsilon \lambda_1(B_{\ell^*})|\rho| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2(B_{\ell^*})\varphi(\rho) \geq 0, \quad \forall \rho \leq r. \quad (3.14)$$

Évidemment (3.14) est égale à 0 quand $\rho = r$ et quand $\rho = \ell^*$, car B_{ℓ^*} appartient aux deux droites \mathcal{H}_r et \mathcal{H}_{ℓ^*} .

De plus, \mathcal{H}_{ℓ^*} est la droite qui a la plus petite pente parmi toutes les droites \mathcal{H}_ℓ quand

3.3. INÉGALITÉS DE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS HERMITE ET LAGUERRE-SONIN 107

$\ell \in \mathcal{L}$. Alors (3.14) est aussi satisfaite pour tout $\ell \in \mathcal{L}$.

Donc, il nous reste à montrer (3.14) pour tous les ρ tels que $|\rho| \leq |r| - 2$ et $\rho \leq r$.

En remplaçant $\lambda_1(B_{\ell^*})$ et $\lambda_2(B_{\ell^*})$ par (3.12) et (3.13), (3.14) devient :

$$\frac{\varphi(r) - \varphi(\rho) - (|r| - |\rho|)\Delta}{\varphi(r) - |r|\Delta}.$$

Le signe du dénominateur est donné dans le Lemme 3.3.8. Il est négatif.

Nous remplaçons $\varphi(r)$, $\varphi(\rho)$ et Δ par leurs expressions dans le numérateur

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(\rho) - (|r| - |\rho|)\Delta &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^s (r_j^2 - \rho_j^2) - (|r| - |\rho|)(|r| - |\rho| - 2 + 2 \max_{1 \leq i \leq s} r_i) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (r_j - \rho_j) \left((r_j - \max_{1 \leq i \leq s} r_i) + (\rho_j - \max_{1 \leq i \leq s} r_i) + (|\rho| - (|r| - 2)) \right). \end{aligned}$$

Cette quantité est aussi négative. Donc le quotient est bien positif.

Finalement, comme $B_{\ell^*} \in \mathcal{H}_r$, alors il appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

□

A partir du précédent Théorème, on en déduit immédiatement, les inégalités de type Landau-Kolmogorov correspondantes ainsi que les polynômes extrémaux.

Corollaire 3.3.11 $\forall p \in \mathcal{Q}_r$, Nous avons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante :

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1(B_{\ell^*})} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2(B_{\ell^*})}{\lambda_1(B_{\ell^*})} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2.$$

$\varepsilon = 0$ dans le cas de Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

L'égalité est atteinte si et seulement si

$$p = cP_r + \sum_{\ell \in \mathcal{L}^*} c_\ell P_\ell.$$

où $\mathcal{L}^* = \{\ell \in \mathcal{L} \mid \varphi(\ell) = \varphi(\ell^*)\}$. c et les c_ℓ appartiennent à \mathbb{R} .

Évidemment les polynômes extrémaux intéressants sont ceux correspondant à un choix de coefficients non tous nuls.

Maintenant on veut montrer que la partie de \mathcal{H}_r , commençant à partir du point B_{ℓ^*} au point $(\infty, -\infty)$, appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$. Comme conséquence, nous obtiendrons trois formes d'inégalités de type Landau-Kolmogorov correspondant à trois parties sur cette demi-droite de \mathcal{H}_r : $\left[B_{\ell^*}, \left(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0\right) \right]$, $\left[\left(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}\right) \right]$ et $\left[\left(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}\right), (\infty, -\infty) \right]$.

Commençons par montrer que le point $\left(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}\right)$ appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

Propriété 3.3.12 *Le point $(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})$ appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.*

Démonstration.

Il faut montrer que ce point appartient à tous les demi-espaces \mathcal{O}_ρ pour tout $\rho \leq r$ et $|\rho| < |r|$, c'est-à-dire que l'équation de la droite \mathcal{H}_ρ correspondante est non négative. En remplaçant les coordonnées de ce point dans l'équation de \mathcal{H}_ρ on obtient

$$1 - \frac{\varphi(\rho)}{\varphi(r)} = \frac{\varphi(r) - \varphi(\rho)}{\varphi(r)}.$$

Or $\varphi(r) - \varphi(\rho) > 0$ (voir la Propriété 3.3.7)

De plus ce point se trouve sur \mathcal{H}_r , donc on en déduit qu'il appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$. □

Corollaire 3.3.13 *Tous les points de l'intervalle $[B_{\ell^*}, (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})]$ appartiennent à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.*

Démonstration.

B_{ℓ^*} et le point $(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})$ appartiennent à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$. Or $\bar{\mathcal{D}}_r$ est un domaine convexe. Alors tous les points de l'intervalle $[B_{\ell^*}, (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})]$ appartiennent à $\bar{\mathcal{D}}_r$. Mais ils sont tous sur \mathcal{H}_r . Donc, ils appartiennent à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$. □

A partir du Corollaire précédent on peut en déduire deux inégalités de type Landau-Kolmogorov, et sur les points $(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)$ et $(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})$ on obtient deux inégalités de Markov-Bernstein.

Corollaire 3.3.14 $\forall p \in \mathcal{Q}_r$,

i) *Si $M \in]B_{\ell^*}, (-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)[$, l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante est satisfaite :*

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1(M)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2(M)}{\lambda_1(M)} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.15)$$

ii) *Si $M \in](-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0), (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})[$, l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante est satisfaite :*

$$\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \geq -\lambda_1(M) \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 - \lambda_2(M) \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.16)$$

Dans ces deux cas les inégalités deviennent des égalités si et seulement si $p = cP_r$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

iii) En $(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)$, on obtient l'inégalité de Markov-Bernstein (3.5) :

$$\left(\sum_{|\nu|=1} (\partial^\nu p, \partial^\nu p)_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2^\varepsilon|r|} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}.$$

iv) En $(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})$, l'inégalité de Markov-Bernstein suivante est satisfaite :

$$\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \geq \frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2.$$

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si $p = cP_r$, $c \in \mathbb{R}$.

$\varepsilon = 0$ dans le cas de Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

On termine l'étude de la demi-droite $[B_{\ell^*}, (\infty, -\infty[$ sur \mathcal{H}_r , en montrant que tout point $M \in](0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}), (\infty, -\infty[$ appartient aussi à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

Propriété 3.3.15 Tout point M sur \mathcal{H}_r défini par $M = \theta(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0) + (1-\theta)(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})$, $\forall \theta < 0$, appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

Démonstration.

Pour montrer que $M \in \bar{\mathcal{D}}_r$, il suffit de montrer que $1 + 2^\varepsilon\lambda_1(M)|\rho| + 2^{2\varepsilon}\lambda_2(M)\varphi(\rho) > 0$, $\forall \rho \leq r$, avec $|\rho| < |r|$.

Les coordonnées d'un tel point sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) &= -\frac{\theta}{2^\varepsilon|r|}, \\ \lambda_2(M) &= -\frac{1-\theta}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de \mathcal{H}_ρ on trouve :

$$1 + \theta \frac{|\rho|}{|r|} + (\theta - 1) \frac{\varphi(\rho)}{\varphi(r)}.$$

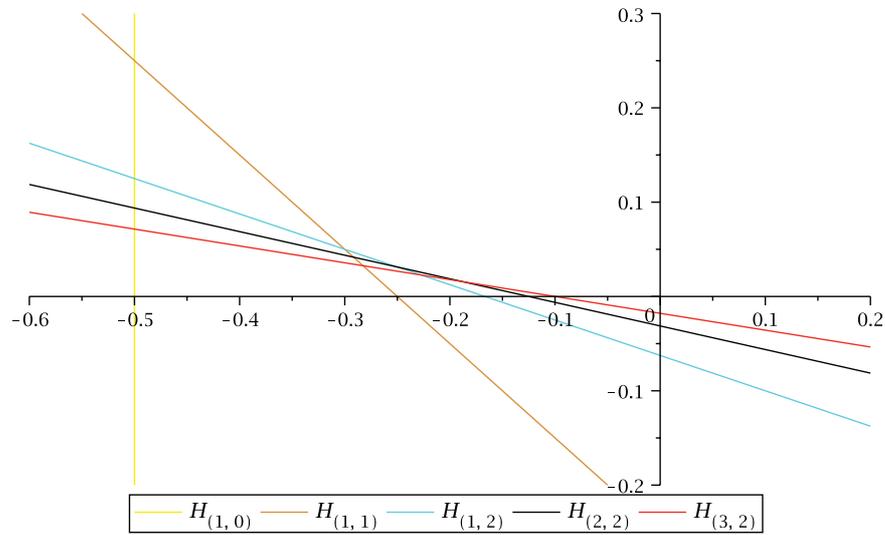
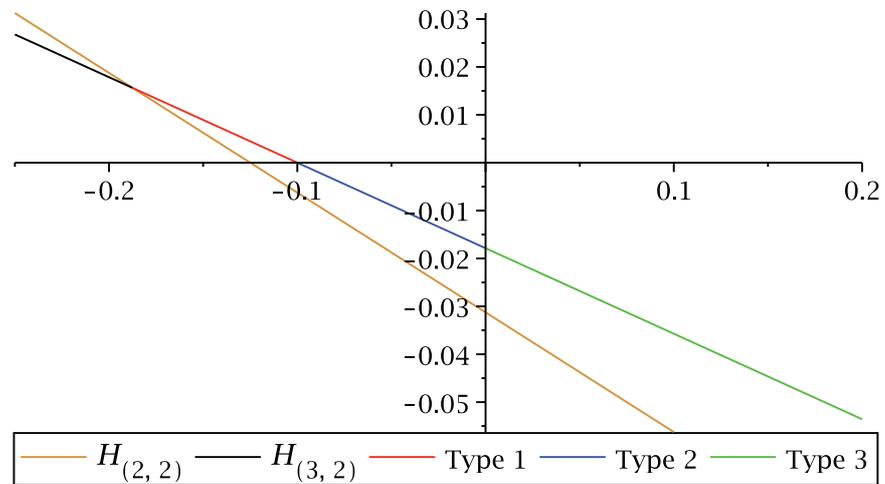
Ainsi nous devons donner le signe de

$$\frac{|r|(\varphi(r) - \varphi(\rho)) - \theta(|\rho|\varphi(r) - |r|\varphi(\rho))}{|r|\varphi(r)}.$$

$\varphi(r) - \varphi(\rho)$ et $|\rho|\varphi(r) - |r|\varphi(\rho)$ sont positives d'après la Propriété 3.3.7.

Donc le numérateur est positif car $\theta < 0$. De plus $M \in \mathcal{H}_r$, alors il appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

□

FIGURE 3.2 – le domaine $\bar{\mathcal{D}}_{(3,2)}$ pour $N = 2$ et $s = 2$.FIGURE 3.3 – les zones des différents types d'inégalités de Landau-Kolmogorov sur la droite $\mathcal{H}_{(3,2)}$.

Dans la Figure 3.2, nous avons le domaine $\bar{\mathcal{D}}_r$, pour $r = (3, 2)$, $N = 2$ et $s = 2$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin. Il est délimité par $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_{(3,2)}$ (en rouge) et pour $|\ell| = |r| - 1 = 4$, la droite qui intervient est $\mathcal{H}_{|\ell^*|} = \mathcal{H}_{(2,2)}$ (en noir). Dans la Figure 3.3, nous montrons les différentes parties de la demi-droite $[B_{\ell^*}, (\infty, -\infty[$ sur $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_{(3,2)}$. Les points de chacune de ces trois parties (rouge, bleue et verte) nous donnent une égalité

de type Landau-Kolmogorov différente.

Tout point $M \in](0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}, (\infty, -\infty)[$ nous donne une nouvelle inégalité de type Landau-Kolmogorov.

Corollaire 3.3.16 *Pour tout point $M \in](0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}, (\infty, -\infty)[$ sur \mathcal{H}_r et tout $p \in \mathcal{Q}_r$, on a l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante :*

$$\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_2(M)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_1(M)}{\lambda_2(M)} \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.17)$$

$\varepsilon = 0$ dans le cas de Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si $p = cP_r, \forall c \in \mathbb{R}$.

Dans les Corollaires 3.3.14 et 3.3.16 nous avons donné les différentes inégalités de type Landau-Kolmogorov pour les points appartenant aux différentes parties de la demi droite $[B_{\ell^*}, (\infty, -\infty)[$ sur \mathcal{H}_r .

Nous terminons cette partie consacrée aux inégalités dans \mathcal{Q}_r en donnant les meilleures inégalités dans le sens de minimiser la partie droite de l'inégalité (3.15) sur $[B_r, (-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)]$ et de l'inégalité (3.17) sur la demi droite $[(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}, (\infty, -\infty)[$ ou de maximiser celle de (3.16) sur l'intervalle $[(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0), (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})]$ pour tout polynôme fixé $p \in \mathcal{Q}_r$.

Théorème 3.3.17 *Le meilleur point M sur l'intervalle $[B_{\ell^*}, (-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)]$ qui minimise la partie droite de l'inégalité (3.15) pour n'importe quel polynôme fixé $p \in \mathcal{Q}_r$ est le point B_{ℓ^*} .*

Démonstration.

Soit M un point de l'intervalle $[B_r, (-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)]$, $M = \theta B_r + (1 - \theta)(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)$, avec $\theta \in [0, 1]$.

Les coordonnées d'un tel point sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) &= -\frac{1}{2^\varepsilon|r|} + \theta \left(\lambda_1(B_{\ell^*}) + \frac{1}{2^\varepsilon|r|} \right), \\ \lambda_2(M) &= \theta \lambda_2(B_{\ell^*}). \end{aligned}$$

avec $\theta \in [0, 1]$.

Soit $G(\theta)$ la partie droite de (3.15). Sa dérivée est

$$\begin{aligned} G'(\theta) &= \frac{1}{(\lambda_1(M))^2} \left(\left(\lambda_1(B_{\ell^*}) + \frac{1}{2^\varepsilon|r|} \right) \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 + \frac{\lambda_2(B_{\ell^*})}{2^\varepsilon|r|} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \right) \\ &= \frac{\hat{G}}{(\lambda_1(M))^2}. \end{aligned}$$

En utilisant les coordonnées (3.12) et (3.13) du point B_{ℓ^*} , on obtient

$$\begin{aligned}\hat{G} &= \frac{1}{2^{3\varepsilon}(\varphi(r) - |r|\Delta)|r|} \left(2^{2\varepsilon}\varphi(r)\|p\|_{L^2(\Omega^s;\mu_0)}^2 - \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s;\mu_2)}^2 \right) \\ &= \frac{G^*}{2^{3\varepsilon}(\varphi(r) - |r|\Delta)|r|}.\end{aligned}$$

Rappelons que $\Delta = |r| + \max_{1 \leq i \leq s} r_i - 2$.

On sait déjà que $\varphi(r) - |r|\Delta < 0$ (voir le Lemme 3.3.8), donc il nous reste à déterminer le signe de G^* .

Soit p un polynôme de \mathcal{Q}_r . Alors, en utilisant la Propriété 3.3.1,

$$\begin{aligned}\|p\|_{L^2(\Omega^s;\mu_0)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)}. \\ \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s;\mu_\nu)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} 2^{2\varepsilon} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 \varphi(\rho).\end{aligned}$$

Donc $G^* = 2^{2\varepsilon} \sum_{\rho \leq r} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 (\varphi(r) - \varphi(\rho))$ qui est positif, car $\varphi(r) - \varphi(\rho) \geq 0$ si $\rho \leq r$ (voir la Propriété 3.3.7).

Alors $G' < 0$ et $G(\theta)$ est une fonction strictement décroissante par rapport à $\theta \in [0, 1]$. Le minimum est atteint pour $\theta = 1$, c'est-à-dire quand $M = B_{\ell^*}$.

□

Théorème 3.3.18 *Le meilleur point M sur l'intervalle $[(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0), (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})]$ qui maximise la partie droite de l'inégalité (3.16), pour tout polynôme fixé $p \in \mathcal{Q}_r$, est le point $(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)$.*

Dans ce cas l'inégalité de type Landau-Kolmogorov tend vers l'inégalité de Markov-Bernstein (3.5) quand M tend vers $(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)$.

Démonstration.

Les coordonnées d'un point M de l'intervalle $[(-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0), (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)})]$ sont :

$$\lambda_1(M) = -\frac{\theta}{2^\varepsilon|r|}, \quad (3.18)$$

$$\lambda_2(M) = \frac{\theta - 1}{2^{2\varepsilon}\varphi(r)}. \quad (3.19)$$

avec $\theta \in [0, 1]$.

On note par $G(\theta)$ la partie droite de (3.16). Sa dérivée est

$$\begin{aligned}G'(\theta) &= \frac{1}{2^{2\varepsilon}|r|\varphi(r)} \left(2^\varepsilon\varphi(r) \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s;\mu_\nu)}^2 - |r| \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s;\mu_\nu)}^2 \right) \\ &= \frac{G^*}{2^{2\varepsilon}|r|\varphi(r)}.\end{aligned}$$

Soit $p = \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho P_\rho$ un polynôme de \mathcal{Q}_r alors, en utilisant la Propriété 3.3.1,

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} 2^\varepsilon k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 |\rho|. \\ \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} 2^{2\varepsilon} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 \varphi(\rho). \end{aligned}$$

D'où

$$G^* = 2^{2\varepsilon} \sum_{\rho \leq r} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 (|\rho| \varphi(r) - |r| \varphi(\rho)).$$

Or nous avons déjà montré dans la Propriété 3.3.7 que $|\rho| \varphi(r) - |r| \varphi(\rho) > 0$ quand $\rho \leq r$ et $|\rho| < |r|$. Pour $|\rho| = |r|$, la seule possibilité est que $\rho = r$. Alors $|\rho| \varphi(r) - |r| \varphi(\rho) = 0$. Donc $G^* > 0$ et $G(\theta)$ est une fonction strictement croissante en fonction de $\theta \in [0, 1]$. Par conséquent le meilleur point M est $(-\frac{1}{2^\varepsilon |r|}, 0)$. Mais, dans ce cas, on obtient l'inégalité de Markov-Bernstein (3.5).

□

Théorème 3.3.19 *Le meilleur point M sur la demi droite $[(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon} \varphi(r)}), (\infty, -\infty)[$ de \mathcal{H}_r qui minimise la partie droite de l'inégalité (3.17), pour tout polynôme fixé $p \in \mathcal{Q}_r$, est le point $(\infty, -\infty)$.*

Dans ce cas l'inégalité de type Landau-Kolmogorov tend vers l'inégalité de Markov-Bernstein suivante :

$$\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq \frac{2^\varepsilon \varphi(r)}{|r|} \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.20)$$

Démonstration.

Soit M le point dont les coordonnées sont données par (3.18) et (3.19). Quand $\theta \leq 0$, ce point appartient à la demi-droite $[(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon} \varphi(r)}), (\infty, -\infty)[$.

Encore une fois, on note par $G(\theta)$ la partie droite de (3.17). Sa dérivée est

$$\begin{aligned} G'(\theta) &= \frac{1}{2^{3\varepsilon} |r| \varphi(r) (\lambda_2(M))^2} \left(2|r| \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \right) \\ &= \frac{G^*}{2^{3\varepsilon} |r| \varphi(r) (\lambda_2(M))^2}. \end{aligned}$$

En utilisant la Propriété 3.3.1 on obtient

$$G^* = 2^\varepsilon \sum_{\rho \leq r} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 (|r| - |\rho|).$$

Comme $\rho \leq r$, alors $|\rho| \leq |r|$ et donc $G^* \geq 0$.

$G(\theta)$ est une fonction croissante par rapport à $\theta \leq 0$. Son minimum est atteint au point

$(\infty, -\infty)$ de la droite \mathcal{H}_r . Dans ce cas on doit donner la limite de l'inégalité de type Landau-Kolmogorov quand θ tend vers $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\lambda_2(M)} \right) &= 0 \quad \text{et} \\ \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \left(-\frac{\lambda_1(M)}{\lambda_2(M)} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\theta}{\theta - 1} \frac{2^\varepsilon \varphi(r)}{|r|} = \frac{2^\varepsilon \varphi(r)}{|r|}. \end{aligned}$$

Ainsi, la limite de l'inégalité de type Landau-Kolmogorov est l'inégalité de Markov-Bernstein (3.20). □

Remarque 3.3.20 *Comme dans la Remarque 3.2.4, on peut transformer toutes les inégalités (3.15)-(3.17) pour faire intervenir uniquement la norme $\| \cdot \|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}$.*

Nous devons remplacer $\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2$ par

$$\sum_{j=1}^s \|x_j^{(1-\varepsilon)/2} \partial^{\nu(j)} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2$$

où $\nu(j) = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s$ est tel que $\nu_j = 1$ et $\nu_i = 0, \forall i \neq j$,

et remplacer $\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2$ par

$$\sum_{j=1}^s \|x_j^{1-\varepsilon} \partial^{\hat{\nu}(j)} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \|(x_i x_j)^{(1-\varepsilon)/2} \partial^{\nu(i,j)} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2$$

où $\hat{\nu}(j) = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_s) \in \mathbb{N}^s$ et $\nu(i, j) = (\nu_1^, \dots, \nu_s^*) \in \mathbb{N}^s$. $\hat{\nu}(j)$ est tel que $\hat{\nu}_j = 2$ et $\hat{\nu}_i = 0, \forall i \neq j$. $\nu(i, j)$ est tel que $\nu_i^* = \nu_j^* = 1$ ($i < j$) et $\nu_m^* = 0, \forall m \neq i, j$.*

$\varepsilon = 0$ dans le cas Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

Pour conclure cette section, nous pouvons dire que les meilleurs cas décrits dans les Théorèmes 3.3.18 et 3.3.19 ont un intérêt très limité, car une inégalité de type Landau-Kolmogorov est réduite à une inégalité de Markov-Bernstein. Par ailleurs, l'étude développée dans la section suivante va montrer que le domaine dans lequel les inégalités de type Landau-Kolmogorov (3.16) et (3.17) sont satisfaites, n'est pas inclus dans $\bar{\mathcal{D}}$.

3.3.2 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $p \in \mathcal{P}_{|r|}$.

Dans ce cas nous considérons les familles de droites \mathcal{H}_ℓ pour des $|\ell|$ successifs. Comme on l'a déjà vu, quand $|\ell|$ est fixé, toutes les droites $\mathcal{H}_\ell : 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \varphi(\ell) = 0$ passent par le même point $(-\frac{1}{2^\varepsilon |\ell|}, 0)$. Dans une telle famille de droites, seulement deux droites \mathcal{H}_ℓ sont intéressantes (Lemme 3.3.5) :

$$\begin{aligned} 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \max_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell) &= 0, \\ 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \min_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell) &= 0. \end{aligned}$$

En effet, toutes les autres droites sont comprises dans l'espace du plan (λ_1, λ_2) délimité par ces deux droites, et donc elles ne contribuent pas dans la définition du domaine de positivité de la fonctionnelle bilinéaire a (voir la Figure 3.1).

Nous commençons par chercher les éléments $\ell \in \mathbb{N}^s$ pour lesquels le minimum et le maximum de $\varphi(\ell)$ sont atteints et donner la valeur de ces extrémums.

Théorème 3.3.21 *Pour $|\ell|$ fixé, le minimum de $\varphi(\ell)$ est égal à*

$$\min_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(|\ell|^2 - |\ell| + 2|\ell| \left[\frac{|\ell|}{s} \right] - s \left[\frac{|\ell|}{s} \right] - s \left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 \right) \quad (3.21)$$

où $[\cdot]$ est la partie entière.

Il est atteint pour les points de \mathbb{N}^s tels que $s(1 - \delta)$ composantes d'un tel point soient égales à $\frac{|\ell|}{s} - \delta$ et les $s\delta$ autres composantes soient égales à $\frac{|\ell|}{s} + 1 - \delta$, avec $\delta = \frac{|\ell|}{s} - \left[\frac{|\ell|}{s} \right]$.

Démonstration.

On doit minimiser $\varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^s \ell_j^2 + |\ell|^2 - 2|\ell| \right)$ sous la contrainte $\sum_{j=1}^s \ell_j - |\ell| = 0$, pour un $|\ell|$ donné.

Nous commençons cette minimisation par donner un $\ell \in \mathbb{R}^s$ en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \ell_j} - \tau = 0, & \text{pour } j = 1, \dots, s, \quad (\tau \in \mathbb{R}), \\ \sum_{j=1}^s \ell_j - |\ell| = 0. \end{cases}$$

Or $\frac{\partial \varphi}{\partial \ell_j} = \ell_j$. Alors $\ell_j = \tau$, pour $j = 1, \dots, s$. D'autre part, la contrainte $\sum_{j=1}^s \ell_j - |\ell| = 0$

donne $s\tau - |\ell| = 0$. Donc on obtient une solution rationnelle $\ell_j = \tau = \frac{|\ell|}{s}$, $j = 1, \dots, s$.

A partir de cette solution rationnelle nous cherchons la solution entière de notre problème de minimisation.

Si $\frac{|\ell|}{s} \in \mathbb{N}$, le minimum est atteint pour le point $\ell \in \mathbb{N}^s$ tel que $\ell_j = \frac{|\ell|}{s}$, $j = 1, \dots, s$.

Si $\frac{|\ell|}{s} \notin \mathbb{N}$, montrons que le minimum de $\varphi(\ell)$ est atteint pour tout $\ell^* \in \mathbb{N}^s$ tel que $\ell_j^* = \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor$ ou $\ell_j^* = \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor + 1$, $j = 1, \dots, s$, soit encore, $\ell_j^* = \frac{|\ell|}{s} - \delta$ ou $\ell_j^* = \frac{|\ell|}{s} + 1 - \delta$, $j = 1, \dots, s$, avec $\delta = \frac{|\ell|}{s} - \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor$. Dans le cas où cette propriété est vraie, pour trouver le nombre n^- de composantes $\ell_j^* < \frac{|\ell|}{s}$ et le nombre $n^+ = s - n^-$ de composantes $\ell_j^* > \frac{|\ell|}{s}$, il suffit d'utiliser la contrainte $\sum_{j=1}^s \ell_j^* - |\ell| = 0$. Alors $n^-(\frac{|\ell|}{s} - \delta) + (s - n^-)(\frac{|\ell|}{s} + 1 - \delta) - |\ell| = 0$.

Donc $n^- = s(1 - \delta)$ et $n^+ = s\delta$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s \ell_j^{*2} &= s(1 - \delta) \left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 + s\delta \left(\left[\frac{|\ell|}{s} \right] + 1 \right)^2 \\ &= s \left(\left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 + 2\delta \left[\frac{|\ell|}{s} \right] + \delta \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi la valeur de ce $\varphi(\ell^*)$ est

$$\varphi(\ell^*) = \frac{1}{2} \left(|\ell|^2 - 2|\ell| + s \left(\left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 + 2\delta \left[\frac{|\ell|}{s} \right] + \delta \right) \right).$$

Maintenant nous vérifions que cette valeur est bien le minimum de $\varphi(\ell)$ dans le domaine $[0, |\ell|]^s$ pour un choix entier des ℓ_j et sous la contrainte $\sum_{j=1}^s \ell_j = |\ell|$ fixé. Pour cela on montre que, pour tout autre choix de ℓ dans ce domaine, la valeur de $\varphi(\ell)$ est supérieure ou égale à $\varphi(\ell^*)$.

Soit $\ell \in [0, |\ell|]^s \cap \mathbb{N}^s$ tel que $\sum_{j=1}^s \ell_j = |\ell|$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les i premiers ℓ_j , $j = 1, \dots, i$, sont supérieurs ou égaux à $\left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor + 1$.

$$\ell_j = \gamma_j + \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor + 1, \quad j = 1, \dots, i, \quad \text{avec } \gamma_j \in \mathbb{N}.$$

Alors, les $(s - i)$ ℓ_j suivant, $j = i + 1, \dots, s$, sont inférieurs ou égaux à $\left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor$.

$$\ell_j + \gamma_j = \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor, \quad j = i + 1, \dots, s, \quad \text{avec } \gamma_j \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum_{j=1}^s \ell_j = |\ell|$, alors

$$|\ell| = \sum_{j=1}^i \left(\gamma_j + \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor + 1 \right) + \sum_{j=i+1}^s \left(\left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor - \gamma_j \right).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^i \gamma_j - \sum_{j=i+1}^s \gamma_j = |\ell| - i - s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor. \quad (3.23)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s \ell_j^2 &= \sum_{j=1}^i \left(\gamma_j + \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor + 1 \right)^2 + \sum_{j=i+1}^s \left(\left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor - \gamma_j \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^i (\gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j^2 + 2i \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor + s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor^2 + 2 \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor \left(\sum_{j=1}^i \gamma_j - \sum_{j=i+1}^s \gamma_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^i (\gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j^2 + 2i \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor + s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor^2 + 2 \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor \left(|\ell| - i - s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor \right) \quad \text{en utilisant (3.23)} \\ &= \sum_{j=1}^i (\gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j^2 + 2|\ell| \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor - s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comme $\varphi(\ell) - \varphi(\ell^*) = \sum_{j=1}^s \ell_j^2 - \sum_{j=1}^s \ell_j^{2*}$, alors il suffit de comparer cette dernière expression à (3.22).

$$(3.24) - (3.22) = \sum_{j=1}^i (\gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j^2 + 2|\ell| \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor - s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor^2 - s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor^2 - 2s\delta \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor - s\delta. \quad (3.25)$$

A partir de la définition de δ , nous avons

$$s\delta = |\ell| - s \left\lfloor \frac{|\ell|}{s} \right\rfloor. \quad (3.26)$$

Alors (3.25) donne

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^i (\gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j^2 + 2|\ell| \left[\frac{|\ell|}{s} \right] - 2s \left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 - \left(1 + 2 \left[\frac{|\ell|}{s} \right] \right) \left(|\ell| - s \left[\frac{|\ell|}{s} \right] \right) \\
= & \sum_{j=1}^i (\gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j^2 - |\ell| + s \left[\frac{|\ell|}{s} \right] \\
= & \sum_{j=1}^i (\gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j^2 - i - \sum_{j=1}^i \gamma_j + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j \quad \text{en utilisant (3.23).} \\
= & \sum_{j=1}^i ((\gamma_j + 1)^2 - (\gamma_j + 1)) + \sum_{j=i+1}^s (\gamma_j^2 - \gamma_j) \\
= & \sum_{j=1}^i \gamma_j(\gamma_j + 1) + \sum_{j=i+1}^s \gamma_j(\gamma_j + 1) \\
= & \sum_{j=1}^s \gamma_j(\gamma_j + 1).
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est non négative. Elle est nulle si et seulement si tous les γ_j sont nuls. A partir de (3.23) et (3.26), on trouve que, dans ce cas, $i = s\delta$.

Pour retrouver (3.20) il suffit de remplacer $s\delta$ par (3.26) dans l'expression de $\varphi(\ell)$.

$$\begin{aligned}
\min_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell) &= \frac{1}{2} \left(|\ell|^2 - 2|\ell| + s \left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 + 2s\delta \left[\frac{|\ell|}{s} \right] + s\delta \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(|\ell|^2 - 2|\ell| + s \left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 + \left(1 + 2 \left[\frac{|\ell|}{s} \right] \right) \left(|\ell| - s \left[\frac{|\ell|}{s} \right] \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(|\ell|^2 - |\ell| + 2|\ell| \left[\frac{|\ell|}{s} \right] - s \left[\frac{|\ell|}{s} \right] - s \left[\frac{|\ell|}{s} \right]^2 \right).
\end{aligned}$$

Le minimum est atteint pour tous les points de \mathbb{N}^s qui ont $s(1 - \delta)$ composantes égales à $\frac{|\ell|}{s} - \delta$ et les autres $s\delta$ composantes égales à $\frac{|\ell|}{s} + 1 - \delta$.

□

Maintenant nous donnons le maximum de $\varphi(\ell)$ sous la contrainte $\sum_{j=1}^s \ell_j = |\ell|$.

Théorème 3.3.22 *Le maximum de $\varphi(\ell)$ sous la contrainte $\sum_{j=1}^s \ell_j = |\ell|$ est $|\ell|(|\ell| - 1)$. Il est atteint en tout point $\ell \in \mathbb{N}^s$ tel que $\ell_j = |\ell|$ pour un j donné, $1 \leq j \leq s$. Évidemment les autres composantes seront nulles.*

Démonstration.

$$\varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^s \ell_j^2 + |\ell|^2 - 2|\ell| \right)$$

et

$$\sum_{j=1}^s \ell_j^2 \leq \left(\sum_{j=1}^s \ell_j \right)^2 = |\ell|^2.$$

Donc $\varphi(\ell)$ atteint son maximum, sous la contrainte $\sum_{j=1}^s \ell_j = |\ell|$, quand un ℓ_j est égal à $|\ell|$ et les autres sont nuls.

En remplaçant par un de ces points dans l'expression de $\varphi(\ell)$, on trouve $\max_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell) = |\ell|(|\ell| - 1)$.

□

Pour tout $|\ell|$ fixé, soit ℓ^* un point de \mathbb{N}^s pour lequel $\varphi(\ell^*) = \min_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell)$ et soit $\hat{\ell}$ un point de \mathbb{N}^s pour lequel $\varphi(\hat{\ell}) = \max_{|\ell| \text{ fixé}} \varphi(\ell)$.

Soit $\mathcal{M}_{|\ell|}^*$ (resp. $\hat{\mathcal{M}}_{|\ell|}$) l'ensemble de tous les points de \mathbb{N}^s pour lesquels le minimum (resp. le maximum) est atteint.

$$\mathcal{M}_{|\ell|}^* = \{ \ell \in \mathbb{N}^s, |\ell| \text{ fixé} \mid \varphi(\ell) = \varphi(\ell^*) \}, \quad (3.27)$$

$$\hat{\mathcal{M}}_{|\ell|} = \{ \ell \in \mathbb{N}^s, |\ell| \text{ fixé} \mid \varphi(\ell) = \varphi(\hat{\ell}) \}. \quad (3.28)$$

Pour $|\ell|$ fixé, les éléments de chacun de ces deux ensembles $\mathcal{M}_{|\ell|}^*$ et $\hat{\mathcal{M}}_{|\ell|}$ ont les mêmes composantes mais avec un ordre différents. Alors, comme nous l'avons déjà mentionné dans les préliminaires (Remarque 3.1.12), à tous les éléments $\ell^* \in \mathcal{M}_{|\ell|}^*$ correspond une droite $\mathcal{H}_{|\ell|}^*$ et à tous les éléments $\hat{\ell} \in \hat{\mathcal{M}}_{|\ell|}$ correspond une droite $\hat{\mathcal{H}}_{|\ell|}$. Leurs équations sont données par :

$$\mathcal{H}_{|\ell|}^* : 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell^*| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \varphi(\ell^*) = 0,$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{|\ell|} : 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\hat{\ell}| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \varphi(\hat{\ell}) = 0.$$

Bien sûr $|\ell^*| = |\hat{\ell}| = |\ell|$.

Le point commun à ces deux droites est : $(-\frac{1}{2^\varepsilon |\ell|}, 0)$.

La pente de $\hat{\mathcal{H}}_{|\ell|}$ est $-\frac{|\ell^*|}{2^\varepsilon \varphi(\ell^*)}$, et la pente de $\mathcal{H}_{|\ell|}^*$ est $-\frac{|\hat{\ell}|}{2^\varepsilon \varphi(\hat{\ell})}$. Elles sont toutes les deux négatives et la pente de $\hat{\mathcal{H}}_{|\ell|}$ est supérieure à celle de $\mathcal{H}_{|\ell|}^*$.

Soit $A_{|\ell^*|-1}$ le point obtenu par l'intersection de $\mathcal{H}_{|\ell|}^*$ et $\hat{\mathcal{H}}_{|\ell|-1}$, $\hat{\mathcal{H}}_{|\ell|-1}$ étant la droite pour laquelle $\varphi(\ell)$ atteint son minimum pour tout $\ell \in \mathcal{M}_{|\ell|-1}^*$.

Il est évident que nous devons prendre $|\ell^*| \geq 2$.

Nous allons prouver que $A_{|\ell^*|-1}$ appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_{|\ell^*|}^*$ (reps. $\bar{\mathcal{D}}$).
Pour un $|\ell^*|$ donné nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{|\ell}^* &: 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell^*| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = 0, \\ \mathcal{H}_{|\ell|-1}^* &: 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 (|\ell^*| - 1) + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \min_{|\ell|=|\ell^*|-1} \varphi(\ell) = 0.\end{aligned}$$

À partir des équations de ces deux droites nous obtenons les coordonnées du point $A_{|\ell^*|-1}$:

$$\lambda_1 = \frac{\min_{|\ell|=|\ell^*|-1} \varphi(\ell) - \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell)}{2^\varepsilon \left((|\ell^*| - 1) \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) - |\ell^*| \min_{|\ell|=|\ell^*|-1} \varphi(\ell) \right)}, \quad (3.29)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2^{2\varepsilon} \left((|\ell^*| - 1) \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) - |\ell^*| \min_{|\ell|=|\ell^*|-1} \varphi(\ell) \right)}. \quad (3.30)$$

Dans la propriété suivante nous donnons une expression plus précise de ces coordonnées.

Propriété 3.3.23 :

i) Si $\left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil = \frac{|\ell^*|}{s}$, alors

$$\lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) = -\frac{1}{2^{\varepsilon-1} |\ell^*|} < 0, \quad (3.31)$$

$$\lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) = \frac{1}{2^{2\varepsilon-1} |\ell^*| \left(|\ell^*| \frac{s+1}{s} - 2 \right)} > 0. \quad (3.32)$$

ii) Si $\left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil = \left\lceil \frac{|\ell^*|-1}{s} \right\rceil$, alors

$$\lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) = \frac{1 - |\ell^*| - \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil}{2^{\varepsilon-1} \left(|\ell^*| (|\ell^*| - 1) + s \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil + 1 \right) \right)} < 0, \quad (3.33)$$

$$\lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) = \frac{1}{2^{2\varepsilon-1} \left(|\ell^*| (|\ell^*| - 1) + s \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil + 1 \right) \right)} > 0. \quad (3.34)$$

Démonstration.

i) Si $\left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil = \frac{|\ell^*|}{s}$, alors $\left\lceil \frac{|\ell^*|-1}{s} \right\rceil = \frac{|\ell^*|}{s} - 1$. Dans ce cas

$$\min_{|\ell|=|\ell^*|-1} \varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(|\ell^*|^2 - 4|\ell^*| + 4 + \frac{|\ell^*|^2}{s} - 2 \frac{|\ell^*|}{s} \right), \quad (3.35)$$

$$\min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(|\ell^*|^2 - 2|\ell^*| + \frac{|\ell^*|^2}{s} \right). \quad (3.36)$$

3.3. INÉGALITÉS DE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS HERMITE ET LAGUERRE-SONIN 121

En remplaçant le minimum dans (3.29) et (3.30) par (3.35) et (3.36), on obtient (3.31) et (3.32).

Par ailleurs $|\ell^*|^{\frac{s+1}{s}} - 2 > 0$ dès que $|\ell^*| \geq 2$.

ii) Si $\left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil = \left\lceil \frac{|\ell^*|-1}{s} \right\rceil$, alors

$$\min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(|\ell^*|^2 - |\ell^*| + 2|\ell^*| \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil - s \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil - s \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil^2 \right), \quad (3.37)$$

$$\min_{|\ell|=|\ell^*|-1} \varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(|\ell^*|^2 - 3|\ell^*| + 2 + 2(|\ell^*| - 1) \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil - s \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil - s \left\lceil \frac{|\ell^*|}{s} \right\rceil^2 \right). \quad (3.38)$$

En remplaçant le minimum dans (3.29) et (3.30) par (3.37) et (3.38), on obtient (3.33) et (3.34).

Les dénominateurs de λ_1 et λ_2 sont positifs. Le numérateur de λ_1 est négatif. D'où le résultat.

□

Remarque 3.3.24 *Ces coordonnées tendent vers zéro quand $|\ell^*|$ tend vers l'infini.*

Pour montrer que $A_{|\ell|-1}$ appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$, on commence par montrer qu'il est dans celle de $\bar{\mathcal{D}}_{|\ell^*|}^*$. Pour cela on montre quelques propriétés géométriques concernant les différentes droites \mathcal{H}_ℓ qui vont nous permettre de définir la frontière des domaines qui nous intéressent.

Propriété 3.3.25 *La pente de $\mathcal{H}_{|\ell}^*$ est plus grande que celle de $\mathcal{H}_{|\ell|-1}^*$.*

Démonstration.

Les pentes des deux droites sont négatives. De plus, le point $(-\frac{1}{2^\varepsilon|\ell|}, 0) \in \mathcal{H}_{|\ell}^*$ et le point $(-\frac{1}{2^\varepsilon(|\ell|-1)}, 0) \in \mathcal{H}_{|\ell|-1}^*$. Or $-\frac{1}{2^\varepsilon|\ell|} < -\frac{1}{2^\varepsilon(|\ell|-1)}$. Mais le signe des coordonnées du point commun $A_{|\ell^*|-1}$ ($\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$) nous permet de positionner chaque droite par rapport à l'autre (voir la Figure 3.4) et donc on peut en déduire que la pente de $\mathcal{H}_{|\ell}^*$ est plus grande que celle de $\mathcal{H}_{|\ell|-1}^*$.

□

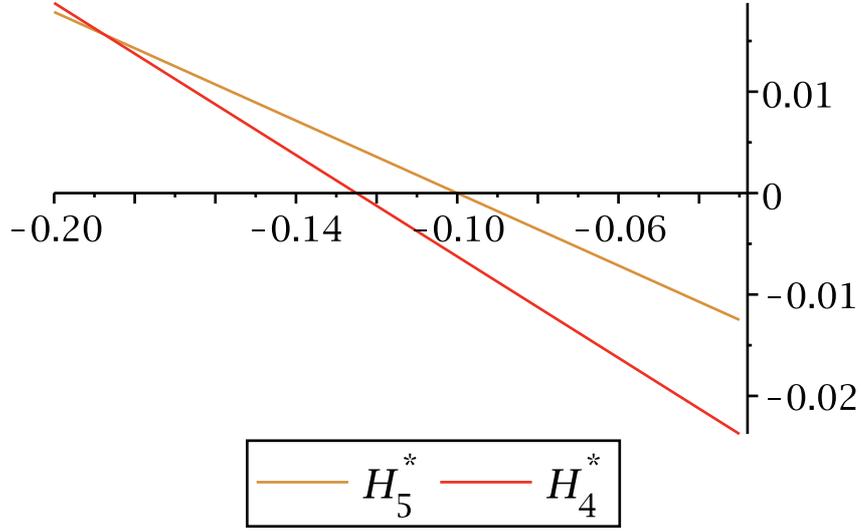


FIGURE 3.4 – Position de \mathcal{H}_4^* par rapport à \mathcal{H}_5^* pour $s = 2$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin.

Propriété 3.3.26 *Nous avons*

$$\lambda_1(A_{|\ell^*|-2}) < \lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) < 0, \quad (3.39)$$

$$\lambda_2(A_{|\ell^*|-2}) > \lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) > 0. \quad (3.40)$$

Démonstration.

Le signe des coordonnées est une conséquence évidente de la Propriété 3.3.25.

Les deux points $A_{|\ell^*|-1}$ et $A_{|\ell^*|-2}$ appartiennent à la droite $\mathcal{H}_{|\ell^*|-1}^*$ qui a une pente négative. Il suffit alors de prouver l'une des deux propriétés pour avoir l'autre. On choisit de montrer la (3.40).

Les dénominateurs de $\lambda_2(A_{|\ell^*|-2})$ et $\lambda_2(A_{|\ell^*|-1})$ sont positifs. Par conséquent il ne nous reste à vérifier que le signe du numérateur de $\lambda_2(A_{|\ell^*|-2}) - \lambda_2(A_{|\ell^*|-1})$, lequel est égal à

$$\min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) + \min_{|\ell|=|\ell^*|-2} \varphi(\ell) - 2 \min_{|\ell|=|\ell^*|-1} \varphi(\ell). \quad (3.41)$$

Nous considérons les cas suivants :

i) Pour $s \geq 2$, si $\left\lfloor \frac{|\ell^*|}{s} \right\rfloor = \frac{|\ell^*|}{s}$, alors

$$\left\lfloor \frac{|\ell^*| - 1}{s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|\ell^*| - 2}{s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|\ell^*|}{s} \right\rfloor - 1.$$

En utilisant les différentes expressions de $\min \varphi(\ell)$ données par (3.21) on obtient :
(3.41) = 1 > 0.

3.3. INÉGALITÉS DE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS HERMITE ET LAGUERRE-SONIN123

ii) Pour $s \geq 2$, si $\left\lfloor \frac{|\ell^*|-1}{s} \right\rfloor = \frac{|\ell^*|-1}{s}$, alors

$$\left\lfloor \frac{|\ell^*|}{s} \right\rfloor = \frac{|\ell^*|-1}{s} \quad \text{et} \quad \left\lfloor \frac{|\ell^*|-2}{s} \right\rfloor = \frac{|\ell^*|-1}{s} - 1.$$

Dans ce cas (3.41) = 2 > 0.

iii) Pour $s > 2$, si $\left\lfloor \frac{|\ell^*|}{s} \right\rfloor \neq \frac{|\ell^*|}{s}$ et $\left\lfloor \frac{|\ell^*|-1}{s} \right\rfloor \neq \frac{|\ell^*|-1}{s}$, alors

$$\left\lfloor \frac{|\ell^*|}{s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|\ell^*|-1}{s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|\ell^*|-2}{s} \right\rfloor.$$

Donc (3.41) = 2 > 0.

□

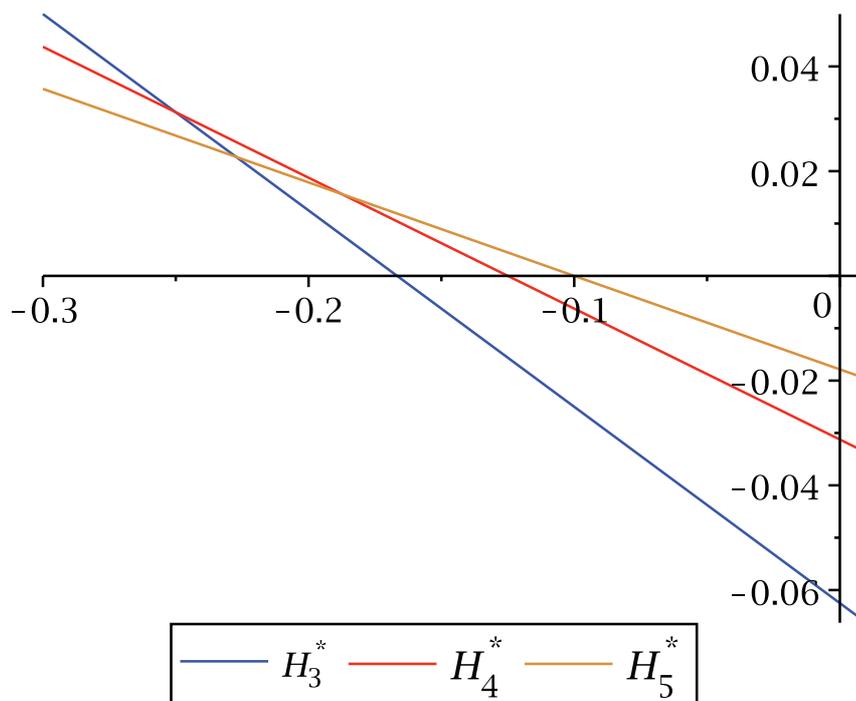


FIGURE 3.5 – Ordonnancement des points d'intersection des $\mathcal{H}^*_{|\ell^*|}$, $|\ell| = 3, 4, 5$, pour $s = 2$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin .

Évidemment ce résultat sera également satisfait pour tous les couples de points $A_{|\rho^*|-1}$ et $A_{|\rho^*|}$ avec $|\rho^*| \geq 2$. Donc nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_1(A_1) &< \lambda_1(A_2) < \dots < \lambda_1(A_{|\ell^*|-2}) < \lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) < 0, \\ \lambda_2(A_1) &< \lambda_2(A_2) < \dots < \lambda_2(A_{|\ell^*|-2}) > \lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) > 0. \end{aligned}$$

Maintenant nous allons donner le domaine $\bar{\mathcal{D}}_{|\ell^*|}^*$.

Théorème 3.3.27 $\bar{\mathcal{D}}_{|\ell^*|}^*$ est le domaine convexe bordé par la frontière suivante :

- i) La demi-droite $[A_1, (-\frac{1}{2^\varepsilon}, \infty[$ sur $\mathcal{H}_1^* : 1 + 2^\varepsilon \lambda_1$,
- ii) Les segments $[A_{|\rho^*|-1}, A_{|\rho^*}|]$ successifs pour $2 \leq |\rho^*| \leq |\ell^*| - 1$,
- iii) Le segment $[A_{|\ell^*|-1}, (-\frac{1}{2^\varepsilon |\ell^*|}, 0)]$,
- iv) La demi-droite $[(-\frac{1}{2^\varepsilon |\ell^*|}, 0), (\infty, -\infty[$ sur $\hat{\mathcal{H}}_{|\hat{\ell}|}$.

Démonstration.

Le premier point A_1 appartient à la droite $\mathcal{H}_1 : 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 = 0$ qui a une pente infinie.

Un couple de points $A_{|\rho^*|-1}, A_{|\rho^*}|$ appartient à la droite $\mathcal{H}_{|\rho^*|}^*$ et donc le segment $[A_{|\rho^*|-1}, A_{|\rho^*}|]$ est aussi sur cette droite.

De plus, la pente négative des droites $\mathcal{H}_{|\rho^*|}^*$ est croissante en fonction de $|\rho^*|$ et la pente de la droite $\hat{\mathcal{H}}_{|\hat{\ell}|}$ est supérieure à celle de $\mathcal{H}_{|\ell^*|}^*$.

Donc le domaine, défini dans le théorème, est convexe (voir la Figure 3.6).

Par construction, a_λ est non négative pour tout point de ce domaine, $\forall p \in \mathcal{P}_{|\ell^*|}$, car nous n'avons retenu que les droites \mathcal{H}_ρ qui interviennent dans la restriction du domaine de positivité et l'enveloppe convexe de toutes ces droites donne le domaine où a_λ est non négative ($\cap \mathcal{O}_\rho$).

□

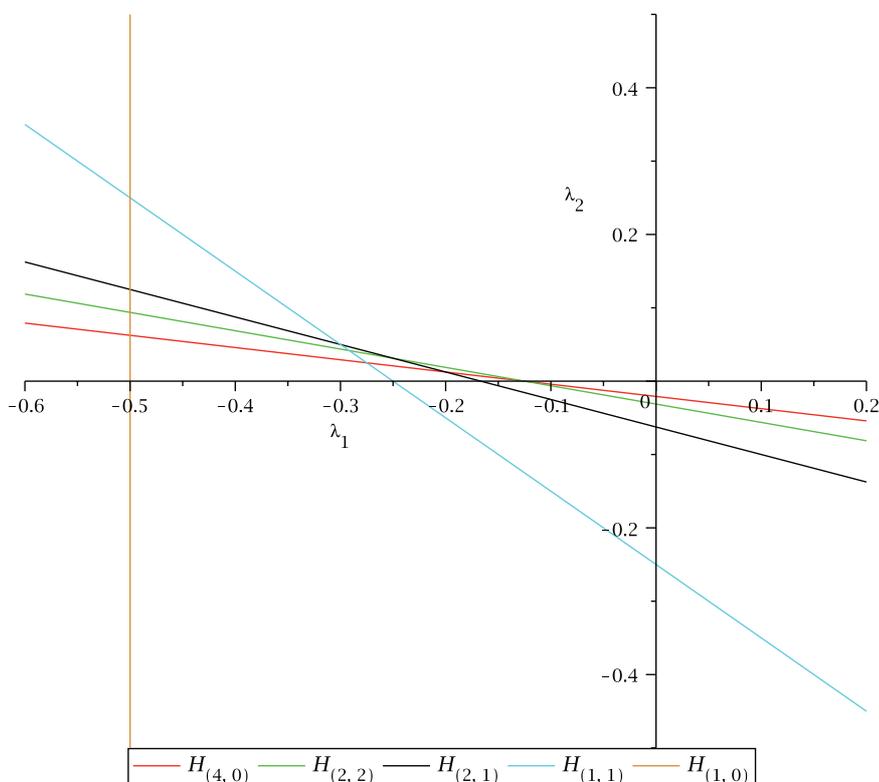


FIGURE 3.6 – Le domaine \bar{D}_4^* pour $N = 2$ et $s = 2$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin .

Dans cette figure, nous avons représenté uniquement les droites qui interviennent dans la restriction du domaine de positivité \bar{D}_4^* , c'est-à-dire $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{(1,0)}$, $\mathcal{H}_2^* = \mathcal{H}_{(1,1)}$, $\mathcal{H}_3^* = \mathcal{H}_{(2,1)}$, $\mathcal{H}_4^* = \mathcal{H}_{(2,2)}$ et $\hat{\mathcal{H}}_4 = \mathcal{H}_{(0,4)}$,

Corollaire 3.3.28 *Tout point $A_{|\rho^*|}$, avec $1 \leq |\rho^*| \leq |\ell^*| - 1$, appartient à $\bar{D}_{|\ell^*|}^*$.*

Théorème 3.3.29 *Si $|\hat{\ell}| = |\ell^*|$ tend vers l'infini, alors la limite de $\mathcal{H}^*_{|\ell^*|}$ (resp. $\hat{\mathcal{H}}_{|\hat{\ell}|}$) est la droite $\lambda_2 = 0$.*

Démonstration.

La pente négative de $\hat{\mathcal{H}}_{|\hat{\ell}|}$ est plus grande que la pente négative de $\mathcal{H}^*_{|\ell^*|}$. Donc il suffit de montrer le résultat pour $\mathcal{H}^*_{|\ell^*|}$.

L'équation de $\mathcal{H}^*_{|\ell^*|}$ est

$$\mathcal{H}^*_{|\ell^*|} : 1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell^*| + 2^{2\varepsilon} \lambda_2 \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = 0$$

ou encore

$$\mathcal{H}^*_{|\ell^*|} : \lambda_2 = -\frac{1}{2^{2\varepsilon} \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell)} \left(1 + 2^\varepsilon \lambda_1 |\ell^*| \right)$$

avec $\min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = \frac{1}{2} \left(|\ell^*|^2 - |\ell^*| + 2|\ell^*| \left[\frac{|\ell^*|}{s} \right] - s \left[\frac{|\ell^*|}{s} \right] - s \left[\frac{|\ell^*|}{s} \right]^2 \right)$.
 $\left[\frac{|\ell^*|}{s} \right] \sim \frac{|\ell^*|}{s}$ au voisinage de l'infini. En effet,

$$\frac{|\ell^*|}{s} \leq \left[\frac{|\ell^*|}{s} \right] \leq \frac{|\ell^*|}{s} + 1 \quad \text{donc}$$

$$1 \leq \lim_{|\ell^*| \rightarrow -\infty} \frac{\left[\frac{|\ell^*|}{s} \right]}{\frac{|\ell^*|}{s}} \leq 1 + \lim_{|\ell^*| \rightarrow -\infty} \frac{s}{|\ell^*|} = 1.$$

Un équivalent à la pente est

$$-\frac{2^{1-\varepsilon} |\ell^*|}{\left(1 + \frac{2}{s} - \frac{1}{s}\right) |\ell^*|^2} = -\frac{2^{1-\varepsilon} s}{s+1} \frac{1}{|\ell^*|}.$$

Alors la limite de la pente est $\lim_{|\ell^*| \rightarrow -\infty} -\frac{2^{1-\varepsilon} s}{s+1} \frac{1}{|\ell^*|} = 0$.

Un équivalent de l'ordonnée à l'origine est

$$\frac{2^{1-2\varepsilon}}{\left(1 + \frac{2}{s} - \frac{1}{s}\right) |\ell^*|^2} = \frac{2^{1-\varepsilon} s}{s+1} \frac{1}{|\ell^*|^2}.$$

Alors la limite de l'ordonnée à l'origine est $\lim_{|\ell^*| \rightarrow -\infty} \frac{2^{1-2\varepsilon} s}{s+1} \frac{1}{|\ell^*|^2} = 0$.

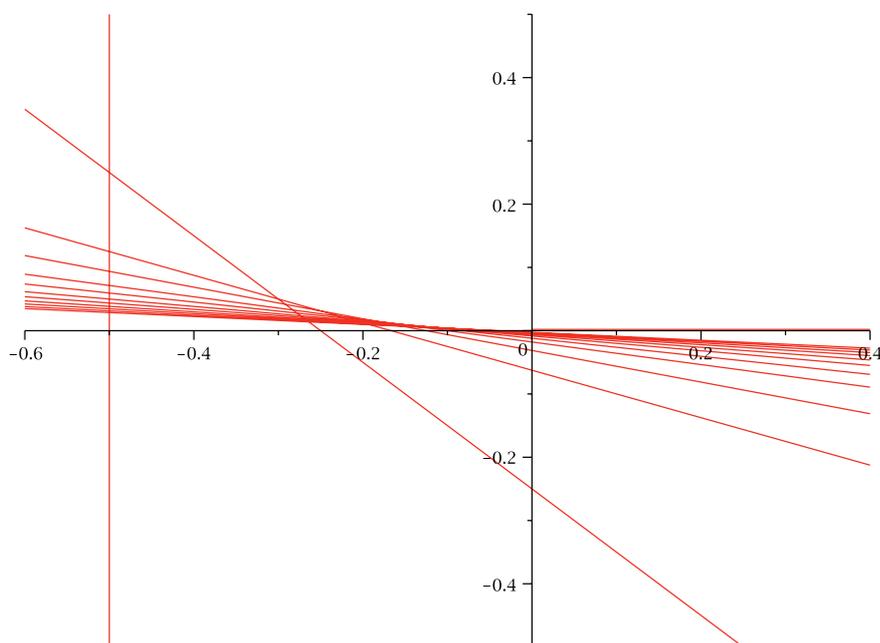
Donc $\lim_{|\ell^*| \rightarrow -\infty} \mathcal{H}^*_{|\ell^*|} = (\lambda_2 = 0)$.

□

Par ailleurs, les coordonnées du point $A_{|\ell^*|-1}$ tendent vers zéro quand $|\ell^*|$ tend vers l'infini. Alors nous pouvons donner le domaine $\bar{\mathcal{D}}$.

Théorème 3.3.30 $\bar{\mathcal{D}}$ est le domaine convexe délimité par :

- i) La demi-droite $[A_1, (-\frac{1}{2^\varepsilon}, \infty)[$ sur \mathcal{H}_1^* ,
- ii) Les segments successifs $[A_{|\rho^*|-1}, A_{|\rho^*}|]$ pour $|\rho^*| \leq 2$,
- iii) La demi-droite $[(0, 0), (0, \infty)[$ sur l'axe $\lambda_2 = 0$.


 FIGURE 3.7 – Le domaine de positivité $\bar{\mathcal{D}}$ pour $N = 2$ et $s = 2$ dans le cas Laguerre-Sonin.

Dans la Figure 3.7, nous avons représenté le domaine de positivité dans le cas $s = 2$ pour la mesure de Laguerre-Sonin. Nous avons retenu uniquement les droites \mathcal{H}_ℓ qui interviennent dans la restriction du domaine de positivité, c'est-à-dire \mathcal{H}_1 et les $\mathcal{H}_{|\ell|}^*$, $|\ell| \geq 2$.

Maintenant que $\bar{\mathcal{D}}_{|\ell^*|}^*$ et $\bar{\mathcal{D}}$, domaines de positivité de a_λ , sont connus, nous pouvons donner les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour tout polynôme $p \in \mathcal{P}_{|r|}$ (resp. $p \in \mathcal{P}^s$). On rappelle que les coordonnées du point $A_{|\ell^*|-1}$ sont données dans la Propriété (3.3.25).

Théorème 3.3.31 $\forall p \in \mathcal{P}_{|r|}$

i) $\forall M \in [A_{|\ell^*|-2}, A_{|\ell^*|-1}]$ avec $3 \leq |\ell^*| \leq r$, et $\forall M \in [A_{|r|-1}, (-\frac{1}{2^\varepsilon|r|}, 0)[$, on a :

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1(M)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2(M)}{\lambda_1(M)} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.42)$$

ii) $\forall M \in \hat{\mathcal{H}}_{|\hat{r}|}$ tel que $M \in](-\frac{1}{2^\varepsilon|\hat{r}|}, 0), (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon\varphi(\hat{r})})[$, on a :

$$\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \geq -\lambda_1(M) \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 - \lambda_2(M) \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.43)$$

iii) $\forall M \in \hat{\mathcal{H}}_{|\hat{r}|}$ avec $\lambda_1(M) > 0$, on a :

$$\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_2(M)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_1(M)}{\lambda_2(M)} \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.44)$$

iv) En $(-\frac{1}{2^\varepsilon|\hat{r}|}, 0)$, on a l'inégalité de Markov-Bernstein :

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq 2^\varepsilon |\hat{r}| \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2. \quad (3.45)$$

v) En $(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(\hat{r})})$, on a l'inégalité de Markov-Bernstein :

$$\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq 2^{2\varepsilon} \varphi(\hat{r}) \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2. \quad (3.46)$$

Nous pouvons donner les polynômes extrémaux dans chaque cas. Pour les obtenir nous devons déterminer la droite $\mathcal{H}^*_{|\ell|}$ ou $\hat{\mathcal{H}}_{|\ell|}$ sur laquelle se trouve le point M . Ces droites sont satisfaites uniquement par quelques polynômes orthogonaux unitaires. En outre, les mêmes polynômes rendent les équations des autres droites positives. Donc une combinaison linéaire de ces polynômes est un polynôme extrémal. On rappelle que les ensembles $\mathcal{M}^*_{|\ell^*|}$ et $\hat{\mathcal{M}}_{|\hat{r}|}$ sont donnés par (3.27) et (3.28).

Théorème 3.3.32 :

i) Si $M \in]A_{|\ell^*|-2}, A_{|\ell^*|-1}[$, les polynômes extrémaux de (3.42) sont

$$p = \sum_{\rho \in \mathcal{M}^*_{|\ell^*|-1}} c_\rho P_\rho.$$

ii) En $A_{|\ell^*|-1}$, les polynômes extrémaux de (3.42) sont

$$p = \sum_{\rho \in \mathcal{M}^*_{|\ell^*|-1}} c_\rho P_\rho + \sum_{\rho \in \mathcal{M}^*_{|\ell^*|}} c_\rho P_\rho.$$

iii) Si $M \in]A_{|\hat{r}|-1}, (-\frac{1}{2^\varepsilon|\hat{r}|}, 0)[$, les polynômes extrémaux de (3.42) sont

$$p = \sum_{\rho \in \mathcal{M}^*_{|\hat{r}|}} c_\rho P_\rho.$$

iv) Si $M \in \hat{\mathcal{H}}_{|\hat{r}|}$ avec $\lambda_2(M) < 0$, les polynômes extrémaux de (3.43), (3.44) et (3.46) sont

$$p = \sum_{\rho \in \hat{\mathcal{M}}_{|\hat{r}|}} c_\rho P_\rho.$$

v) Si $M = (-\frac{1}{2^{\varepsilon|r|}}, 0)$, les polynômes extrémaux de (3.45) sont

$$p = \sum_{\rho \in \mathcal{M}_{|r|}^*} c_{\rho} P_{\rho} + \sum_{\rho \in \hat{\mathcal{M}}_{|r|}} c_{\rho} P_{\rho}.$$

Dans le cas du domaine $\bar{\mathcal{D}}$ nous avons une forme unique d'inégalités de type Landau-Kolmogorov, satisfaite pour tous les polynômes.

Théorème 3.3.33 *Si $M \in [A_{|\ell^*|-1}, A_{|\ell^*|}]$, avec $|\ell^*| \geq 2$, nous avons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante, $\forall p \in \mathcal{P}^s$,*

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^{\nu} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_{\nu})}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1(M)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2(M)}{\lambda_1(M)} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^{\nu} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_{\nu})}^2. \quad (3.47)$$

Si $M \in]A_{|\ell^*|-1}, A_{|\ell^*}|[$, (3.47) devient une égalité si et seulement si

$$p = \sum_{\rho \in \mathcal{M}_{|\ell^*}^*} c_{\rho} P_{\rho}.$$

Si $M = A_{|\ell^*|-1}$, (3.47) devient une égalité si et seulement si

$$p = \sum_{\rho \in \mathcal{M}_{|\ell^*}^* \cup \mathcal{M}_{|\ell^*|-1}^*} c_{\rho} P_{\rho}.$$

Remarque 3.3.34 *Soit \mathbb{R}_+ l'ensemble des réels non négatifs. Alors :*

Pour tout point M dans le domaine $\mathcal{D}_r^ \setminus (\mathbb{R}_+)^2$, nous avons des inégalités de type Landau-Kolmogorov. Leur forme dépend des signes de $\lambda_1(M)$ et $\lambda_2(M)$. Au moins l'un de ces signes est négatif. Si une des coordonnées de M est nulle, alors nous obtenons une inégalité de Markov-Bernstein. L'égalité n'est pas toujours atteinte.*

Pour tout point M dans le domaine $\bar{\mathcal{D}} \setminus (\mathbb{R}_+)^2$, nous avons une forme unique d'inégalité de type Landau-Kolmogorov : celle donnée par (3.47). Dans ce cas $\lambda_1(M) < 0$. L'égalité est atteinte si et seulement si M appartient à la frontière de ce domaine. Les polynômes extrémaux sont ceux donnés dans le Théorème 3.3.33.

Maintenant nous souhaitons résoudre le problème du meilleur point M sur le segment $[A_{|\ell^*|-1}, A_{|\ell^*|}]$. Pour l'obtenir nous minimisons la partie droite de l'inégalité (3.42) pour tout polynôme fixé p appartenant à l'espace \mathcal{Q}_{ℓ^*} , $\ell^* = (\ell_1^*, \dots, \ell_s^*)$ étant un élément de $\mathcal{M}_{|\ell^*}^*$. Ce problème de meilleur point est résolu uniquement pour cet espace de polynômes.

Théorème 3.3.35 *Le meilleur point M sur $[A_{|\ell^*|-1}, A_{|\ell^*|}]$ qui minimise la partie droite de l'inégalité (3.42) pour tout $p \in \mathcal{Q}_{\ell^*}$ est $A_{|\ell^*|-1}$.*

Démonstration.

Soit M le point de coordonnées

$$\begin{aligned}\lambda_1(M) &= \lambda_1(A_{|\ell^*|}) + \theta(\lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|})), \\ \lambda_2(M) &= \lambda_2(A_{|\ell^*|}) + \theta(\lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_2(A_{|\ell^*|})),\end{aligned}$$

pour $\theta \in [0, 1]$

On note par $G(\theta)$ la partie droite de (3.42). Sa dérivée est

$$\begin{aligned}G'(\theta) &= \frac{\lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|})}{(\lambda_1(M))^2} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \\ &\quad - \frac{\lambda_2(A_{|\ell^*|-1})\lambda_1(A_{|\ell^*|}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|-1})\lambda_2(A_{|\ell^*|})}{(\lambda_1(M))^2} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \\ &= \frac{\hat{G}}{(\lambda_1(M))^2}.\end{aligned}$$

Comme $A_{|\ell^*|-1}$ et $A_{|\ell^*|}$ se trouvent sur $\mathcal{H}^*_{|\ell^*|}$, leurs coordonnées vérifient l'équation de cette droite

$$1 + 2^\varepsilon |\ell^*| \lambda_1(A_{|\ell^*|}) + 2^{2\varepsilon} \lambda_2(A_{|\ell^*|}) \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = 0, \quad (3.48)$$

$$1 + 2^\varepsilon |\ell^*| \lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) + 2^{2\varepsilon} \lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = 0. \quad (3.49)$$

La différence de ces deux relations donne :

$$2^\varepsilon |\ell^*| (\lambda_1(A_{|\ell^*|}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|-1})) + 2^{2\varepsilon} (\lambda_2(A_{|\ell^*|}) - \lambda_2(A_{|\ell^*|-1})) \min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = 0. \quad (3.50)$$

Pour $\ell^* \in \mathcal{M}^*_{|\ell^*|}$ on a $\min_{|\ell|=|\ell^*|} \varphi(\ell) = \varphi(\ell^*)$.

On multiplie (3.48) par $\lambda_2(A_{|\ell^*|-1})$ et (3.49) par $\lambda_2(A_{|\ell^*|})$ et on fait la différence des deux nouvelles relations. Nous obtenons

$$2^\varepsilon |\ell^*| (\lambda_1(A_{|\ell^*|})\lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|-1})\lambda_2(A_{|\ell^*|})) + \lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_2(A_{|\ell^*|}) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\lambda_1(A_{|\ell^*|})\lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|-1})\lambda_2(A_{|\ell^*|}) &= -\frac{1}{2^\varepsilon |\ell^*|} (\lambda_2(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_2(A_{|\ell^*|})) \\ &= \frac{\lambda_1(A_{|\ell^*|-1}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|})}{2^{2\varepsilon} \varphi(\ell^*)} \quad \text{en utilisant (3.50).}\end{aligned} \quad (3.51)$$

Nous utilisons cette dernière relation (3.51) pour transformer l'expression de \hat{G} .

$$\begin{aligned}\hat{G} &= \frac{\lambda_1(A_{|\ell^*|}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|-1})}{2^{2\varepsilon} \varphi(\ell^*)} \left(-2^{2\varepsilon} \varphi(\ell^*) \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 + \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \right) \\ &= \frac{\lambda_1(A_{|\ell^*|}) - \lambda_1(A_{|\ell^*|-1})}{2^{2\varepsilon} \varphi(\ell^*)} G^*.\end{aligned}$$

3.3. INÉGALITÉS DE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS HERMITE ET LAGUERRE-SONIN 131

Dans la Propriété 3.3.26, nous avons montré que $\lambda_1(A_{|\ell^*|}) > \lambda_1(A_{|\ell^*|-1})$. Donc le facteur de G^* est positif.

Soit p un polynôme de \mathcal{Q}_{ℓ^*} . Alors, en utilisant la Propriété 3.3.1,

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^2(\Omega; \mu_0)}^2 &= \sum_{\rho \leq \ell^*} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)}, \\ \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{\rho \leq \ell^*} 2^{2\varepsilon} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 \varphi(\rho). \end{aligned}$$

Par conséquent, $G^* = \sum_{\rho \leq \ell^*} 2^{2\varepsilon} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 (\varphi(\rho) - \varphi(\ell^*))$.

Or, si $\rho \leq \ell^*$, alors $\varphi(\rho) - \varphi(\ell^*) \leq 0$ (voir la Propriété 3.3.7).

Donc $G'(\theta) < 0$ et $G(\theta)$ est une fonction décroissante. Son minimum est atteint pour $\theta = 1$, ce qui correspond au point $A_{|\ell^*|-1}$.

□

Le problème du meilleur point M peut aussi être traité pour les autres formes d'inégalités de type Landau-Kolmogorov obtenues précédemment.

Théorème 3.3.36 *Soit r^* un élément de \mathbb{N}^s tel que $\varphi(r^*) = \min_{|r| \text{ fixé}} \varphi(r)$.*

Le meilleur point M sur le segment $[A_{|r^|-1}, (-\frac{1}{2\varepsilon|r^*|}, 0)[$ qui minimise la partie droite des inégalités (3.42) pour tout $p \in \mathcal{Q}_{r^*}$, est le point $A_{|r^*|-1}$.*

Démonstration.

Soit M un point de $[A_{|r^*|-1}, (-\frac{1}{2\varepsilon|r^*|}, 0)[$, ses coordonnées sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) &= -\frac{1}{2\varepsilon|r^*|} + \theta \left(\lambda_2(A_{|r^*|-1}) + \frac{1}{2\varepsilon|r^*|} \right), \\ \lambda_2(M) &= \theta \lambda_2(A_{|r^*|-1}), \end{aligned}$$

avec $\theta \in]0, 1]$.

On note par $G(\theta)$ la partie droite de (3.42). On retrouve la même expression que dans la démonstration précédente (Théorème 3.3.35). Alors

$$\begin{aligned} G'(\theta) &= \frac{\hat{G}}{(\lambda_1(M))^2}, \\ \hat{G} &= \frac{\lambda_1((-\frac{1}{2\varepsilon|r^*|}, 0)) - \lambda_1(A_{|r^*|-1})}{2^{2\varepsilon} \varphi(r^*)} G^*, \\ G^* &= \sum_{\rho \leq r^*} 2^{2\varepsilon} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 (\varphi(\rho) - \varphi(r^*)). \end{aligned}$$

En utilisant la Propriété 3.3.7, $\varphi(\rho) - \varphi(r^*) \leq 0$.

Les deux points, $A_{|r^*|-1}$ et $(-\frac{1}{2\varepsilon|r^*|}, 0)$, appartiennent à la même droite de pente négative

$\mathcal{H}_{r^*}^*$ et $\lambda_2(A_{|r^*|-1}) > 0$, alors, $\lambda_1((-\frac{1}{2\varepsilon|r^*|}, 0)) - \lambda_1(A_{|r^*|-1}) > 0$.

Donc $G'(\theta) < 0$ et $G(\theta)$ est encore une fonction décroissante. Son minimum est atteint pour $\theta = 1$, c'est-à-dire au point $A_{|r^*|-1}$.

□

Théorème 3.3.37 Soit \hat{r} un élément de \mathbb{N}^s tel que $\varphi(\hat{r}) = \max_{|r| \text{ fixé}} \varphi(r)$.

Le meilleur point M sur le segment $[(-\frac{1}{2\varepsilon|\hat{r}|}, 0), (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(\hat{r})})]$ qui maximise la partie droite de (3.43) pour tout polynôme $p \in \mathcal{Q}_{\hat{r}}$ fixé, est le point $(-\frac{1}{2\varepsilon|\hat{r}|}, 0)$.

Démonstration.

Il suffit de prendre $r = \hat{r}$ dans le Théorème 3.3.18.

□

Théorème 3.3.38 Le meilleur point M sur la demi-droite $[(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon}\varphi(\hat{r})}), (\infty, -\infty)[$ supportée sur $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{r}}$, qui minimise la partie droite de (3.44) pour tout polynôme $p \in \mathcal{Q}_{\hat{r}}$ fixé, est le point $(\infty, -\infty)$.

Dans ce cas l'inégalité de type Landau-Kolmogorov tend vers l'inégalité de Markov-Bernstein suivante :

$$\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq \frac{2^\varepsilon \varphi(\hat{r})}{|r|} \sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.52)$$

Démonstration.

Il suffit de prendre $r = \hat{r}$ dans le Théorème 3.3.19.

□

Les précédents Théorèmes 3.3.35-3.3.38 peuvent être étendus à un ensemble de différents espaces \mathcal{Q} . En effet, dans le cas des Théorèmes 3.3.35 et 3.3.36, la droite $\mathcal{H}_{|\ell^*|}$ correspond à tous les polynômes P_ℓ pour $\ell \in \mathcal{M}_{|\ell^*|}^*$ et dans le cas des Théorèmes 3.3.37 et 3.3.38, la droite $\hat{\mathcal{H}}_{|r|}$ correspond à tous les polynômes P_ℓ pour $\ell \in \hat{\mathcal{M}}_{|r|}$. Par conséquent les résultats concernant le meilleur point M obtenus dans les théorèmes précédents restent vrais pour tout polynôme $p \in \bigcup_{\ell \in \mathcal{M}_{|\ell^*|}^*} \mathcal{Q}_\ell$ dans les deux premiers théorèmes et pour tout $p \in \bigcup_{\ell \in \hat{\mathcal{M}}_{|r|}} \mathcal{Q}_\ell$ dans les deux autres.

Théorème 3.3.39 Pour tout polynôme $p \in \bigcup_{\ell \in \mathcal{M}_{|\ell^*|}^*} \mathcal{Q}_\ell$ fixé, nous avons :

- Le meilleur point M sur $[A_{|\ell^*|-1}, A_{|\ell^*|}]$ qui minimise la partie droite de l'inégalité (3.42), est le point $A_{|\ell^*|-1}$.
- Le meilleur point M sur le segment $[A_{|r^*|-1}, (-\frac{1}{2\varepsilon|r^*|}, 0)[$ qui minimise la partie droite des inégalités (3.42), est le point $A_{|r^*|-1}$.

Théorème 3.3.40 *Pour tout $p \in \bigcup_{\ell \in \hat{\mathcal{M}}_{|r|}} \mathcal{Q}_\ell$ fixé nous avons :*

- *Le meilleur point M sur le segment $[(-\frac{1}{2^\varepsilon |r^*|}, 0), (0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon} \varphi(\hat{r})})]$ qui maximise la partie droite de l'inégalité (3.43), est le point $(-\frac{1}{2^\varepsilon |r^*|}, 0)$.*
- *Le meilleur point M sur la demi-droite $[(0, -\frac{1}{2^{2\varepsilon} \varphi(\hat{r})}), (\infty, -\infty)[$, supportée sur $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{r}}$, qui minimise la partie droite de l'inégalité (3.44), est le point $(\infty, -\infty)$.*

Démonstration.

$p \in \bigcup_{\ell \in \mathcal{M}_{|\ell^*|}^*} \mathcal{Q}_\ell$ (resp. $p \in \bigcup_{\ell \in \hat{\mathcal{M}}_{|r|}} \mathcal{Q}_\ell$). Alors $\exists \tilde{\ell} \in \mathcal{M}_{|\ell^*|}^*$ (resp. $\in \hat{\mathcal{M}}_{|r|}$) tel que $p \in \mathcal{Q}_{\tilde{\ell}}$.

Donc, en utilisant les Théorèmes 3.3.35-3.3.38, les meilleurs points, dans chaque cas, restent les mêmes puisque leur coordonnées ne dépendent que de $|\ell| = |\tilde{\ell}|$.

□

3.3.3 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov dans $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$, avec $N = 2$

Le but de cette section est d'étendre les inégalités de type Landau-Kolmogorov, satisfaites pour tout point du domaine $\mathcal{D} \setminus (\mathbb{R}_+)^2$, pour tout polynôme $p \in \mathcal{P}^s$, à toutes les fonctions f de $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$. Pour cela, il suffit de montrer que la suite des polynômes orthogonaux unitaires $\{P_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^s}$ par rapport à a_λ est totale dans $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$ pour le produit scalaire a_λ . En effet, si tel est le cas, cette suite formera alors une base hilbertienne orthonormale de $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$. Ce résultat sera démontré pour tout $N \geq 2$ pour la mesure d'Hermite, de Laguerre-Sonin et celle de Jacobi.

Soit \mathcal{D} le domaine défini par (3.4) pour $N \geq 2$.

Si λ est choisi dans $\bar{\mathcal{D}}$, la forme bilinéaire symétrique a_λ est définie positive sur $\mathcal{P}^s \times \mathcal{P}^s$. Donc elle est un produit scalaire sur $\mathcal{P}^s \times \mathcal{P}^s$, et il existe une suite de polynômes orthogonaux $\{P_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^s}$ par rapport à a_λ . Cette suite, appelée suite des polynômes orthogonaux unitaires de Sobolev, est, en fait, la suite des polynômes unitaires d'Hermite, de Laguerre-Sonin ou de Jacobi à s variables définis dans les préliminaires.

Nous allons montrer que la suite $\{P_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^s}$ est totale dans $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$. Commençons par rappeler la définition d'une suite totale.

Définition 3.3.41 Une suite $\{w_i\}_{i \geq 0}$ est dite totale (complète) dans un espace de Hilbert $E(\hat{\Omega})$, ($\hat{\Omega}$ ensemble ouvert de \mathbb{R}^s) muni d'un produit scalaire, noté par (\cdot, \cdot) si, pour $f \in E(\hat{\Omega})$, $(f, w_i) = 0, \forall i \geq 0$, alors $f = 0$.

Ceci est équivalent à dire, que pour tout $f \in E(\hat{\Omega})$, il existe une suite $\{\hat{w}_i\}_{i \geq 0}$ ($\hat{w}_i = \sum_{j=0}^i b_{j,i} w_j$) telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} (\hat{w}_i - f, \hat{w}_i - f) = 0$ (voir [18]).

Alors, $\forall f \in E(\hat{\Omega})$, il existe une suite $\{f_i\}_{i \geq 0}$ telle que, $f = \sum_{i \geq 0} f_i w_i$.

L'espace $L^2(\Omega, \mu_{\nu_j, j})$, muni du produit scalaire (2.1), est un espace de Hilbert séparable. Alors $L^2(\Omega, \mu_\nu)$, qui est le produit tensoriel d'espaces de Hilbert séparables, et l'espace de Sobolev $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$, muni du produit scalaire (3.2), sont aussi des espaces de Hilbert séparables.

On sait déjà (voir [13]) que les suites des polynômes orthogonaux d'Hermite, de Laguerre-Sonin et de Jacobi $\{P_i\}_{i \geq 0}$ à une variable, sont totales dans l'espace $L^2(\Omega, \mu_0)$. Les dérivées de ces polynômes $\frac{d^j}{dx^j} P_i$ sont aussi des polynômes orthogonaux de la même famille. Alors les suites $\left\{ \frac{d^{\nu_j}}{dx_j^{\nu_j}} P_{\ell_j}(x_j) \right\}_{\ell_j \geq \nu_j}$, $j = 1, \dots, s$, sont totales dans l'espace $L^2(\Omega, \mu_{\nu_j, j})$. Donc, la suite produit $\{\partial^\nu P_\ell(x)\}_{\ell \geq \nu}$, est aussi totale dans $L^2(\Omega^s, \mu_\nu)$.

Maintenant on montre le théorème suivant.

Théorème 3.3.42 Si $\lambda \in \bar{\mathcal{D}}$, alors pour $N \geq 2$

- i) La forme bilinéaire symétrique a_λ est définie positive sur $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N) \times H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$. Donc a_λ est un produit scalaire sur $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N) \times H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$.
- ii) La suite des polynômes orthogonaux unitaires $\{P_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^s}$ est totale dans $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$ pour le produit scalaire a_λ .

Démonstration.

On commence par montrer que la suite $\{P_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^s}$ est totale dans $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$ pour le produit scalaire classique (3.2) défini sur $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N) \times H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$. Soit $f \in H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$. Alors, pour tout $1 \leq |\nu| \leq N$, $\partial^\nu f \in L^2(\Omega^s, \mu_\nu)$. D'autre part la suite $\{\partial^\nu P_\ell(x)\}_{\ell \geq \nu}$ est totale dans cet espace $L^2(\Omega^s, \mu_\nu)$. Alors

$$\partial^\nu f = \sum_{\ell \geq \nu} f_\ell^{(\nu)} \partial^\nu P_\ell(x) \quad \text{avec } f_\ell^{(\nu)} \in \mathbb{R}, \quad (3.53)$$

et

$$\begin{aligned} \|\partial^\nu f\|_{L^2(\Omega^s, \mu_\nu)}^2 &= \sum_{\ell \geq \nu} (f_\ell^{(\nu)})^2 \|\partial^\nu P_\ell(x)\|_{L^2(\Omega^s, \mu_\nu)}^2 \\ &= \sum_{\ell \geq \nu} (f_\ell^{(\nu)})^2 k_\ell^{(\nu)} < +\infty. \end{aligned}$$

Notons par ν^{*j} , $j = 1, \dots, s$, les éléments de \mathbb{N}^s associés à ν tels que

$$\begin{aligned} \nu_j^{*j} &= \nu_j - 1, \\ \nu_i^{*j} &= \nu_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega^s)$, $F^{(\nu^{*j})} = \sum_{\ell \geq \nu} f_\ell^{(\nu)} \partial^{\nu^{*j}} P_\ell(x)$ est une primitive de la dérivée $\partial^\nu f$ par rapport à la variable x_j .

La primitive $F^{(\nu^{*j})}$ appartient à $L^2(\Omega^s, \mu_{\nu^{*j}})$. En effet,

$$\|F^{(\nu^{*j})}\|_{L^2(\Omega^s, \mu_{\nu^{*j}})}^2 = \sum_{\ell \geq \nu} (f_\ell^{(\nu)})^2 \|\partial^{\nu^{*j}} P_\ell(x)\|_{L^2(\Omega^s, \mu_{\nu^{*j}})}^2. \quad (3.54)$$

Or

$$\begin{aligned} \|\partial^{\nu^{*j}} P_\ell(x)\|_{L^2(\Omega^s, \mu_{\nu^{*j}})}^2 &= k_\ell^{(\nu^{*j})} \\ &= k_\ell^{(0)} \xi_\ell^{(\nu^{*j})} (\ell - \nu^{*j} + 1)_{\nu^{*j}} \\ &= k_\ell^{(0)} \xi_\ell^{(\nu)} (\ell - \nu + 1)_\nu \frac{\xi_\ell^{(\nu^{*j})}}{\xi_\ell^{(\nu)}} \frac{1}{(\ell_j - \nu_j + 1)} \\ &= k_\ell^{(\nu)} \frac{\xi_\ell^{(\nu^{*j})}}{\xi_\ell^{(\nu)}} \frac{1}{(\ell_j - \nu_j + 1)}. \end{aligned}$$

Dans le cas des mesures d'Hermite et de Laguerre-Sonin, nous avons :

$$\|\partial^{\nu^*j} P_\ell(x)\|_{L^2(\Omega^s; \mu_{\nu^*j})}^2 = k_\ell^{(\nu)} \frac{1}{2^\varepsilon (\ell_j - \nu_j + 1)} \leq k_\ell^{(\nu)}.$$

Dans le cas de la mesure de Jacobi, nous avons :

$$\|\partial^{\nu^*j} P_\ell(x)\|_{L^2(\Omega^s; \mu_{\nu^*j})}^2 = k_\ell^{(\nu)} \frac{1}{(\ell_j + \nu_j + \gamma_j)(\ell_j - \nu_j + 1)} \leq \frac{1}{2 + \gamma_j} k_\ell^{(\nu)}.$$

Ainsi, dans le cas d'Hermite et de Laguerre-Sonin,

$$\|\partial^{\nu^*j} \hat{f}\|_{L^2(\Omega^s; \mu_{\nu^*j})}^2 \leq \sum_{\ell \geq \nu} \hat{f}_\ell^2 k_\ell^{(\nu)} < +\infty,$$

et dans le cas Jacobi,

$$\|\partial^{\nu^*j} \hat{f}\|_{L^2(\Omega^s; \mu_{\nu^*j})}^2 \leq \frac{1}{2 + \gamma_j} \sum_{\ell \geq \nu} \hat{f}_\ell^2 k_\ell^{(\nu)} < +\infty.$$

D'autre part $|\nu^*j| < |\nu| \leq N$. Alors $\partial^{\nu^*j} f$ est aussi une primitive de $\partial^\nu f$ et elle appartient à $L^2(\Omega^s, \mu_{\nu^*j})$. Donc elle s'écrit de façon unique comme $\sum_{\ell \geq \nu^*j} f_\ell^{(\nu^*j)} \partial^{\nu^*j} P_\ell(x)$ avec $f_\ell^{(\nu^*j)} \in \mathbb{R}$.

La différence $\partial^{\nu^*j} f - F^{(\nu^*j)}$ de ces deux primitives de $\partial^\nu f$ par rapport à x_j est une constante de cette variable, i.e. $\partial^{\nu^*j} \hat{f} - F^{(\nu^*j)} = h(x^{*j})$, avec $x^{*j} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^{s-1}$. Comme ces deux primitives sont dans $L^2(\Omega^s, \mu_{\nu^*j})$, alors $h(x^{*j})$ est aussi dans $L^2(\Omega^s, \mu_{\nu^*j})$ et donc on peut l'écrire de façon unique comme $\sum_{\ell \geq \nu^*j} h_\ell \partial^{\nu^*j} P_\ell(x)$, $h_\ell \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\sum_{\ell \geq \nu} f_\ell^{(\nu)} \partial^{\nu^*j} P_\ell(x) - \sum_{\ell \geq \nu^*j} f_\ell^{(\nu^*j)} \partial^{\nu^*j} P_\ell(x) = \sum_{\ell \geq \nu^*j} h_\ell \partial^{\nu^*j} P_\ell(x).$$

Mais, comme h ne dépend pas de la variable x_j , alors $h_\ell = 0$ si $\ell_j - \nu_j^*j > 0$. Ainsi, $f_\ell^{(\nu)} = f_\ell^{(\nu^*j)}$, $\forall \ell \geq \nu$ et $f_\ell^{(\nu^*j)} = h_\ell$, pour $\ell_i \geq \nu_i$, $i = 1, \dots, s$, $i \neq j$ et $\ell_j = \nu_j - 1$.

Donc, pour $f \in H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$, il existe une suite \hat{P}_ρ^* avec $\hat{P}_\rho^* = \sum_{\ell \leq \rho} f_\ell^{(\nu)} P_\ell$, telle que

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \|\partial^{\nu^*j} \hat{P}_\rho^* - \partial^{\nu^*j} f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_{\nu^*j})} = 0.$$

Cette propriété est satisfaite pour $j = 1, \dots, s$.

Alors, pour $f \in H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$, il existe une suite \hat{P}_ρ , avec $\hat{P}_\rho = \sum_{\ell \leq \rho} f_\ell P_\ell$, telle que, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^s$, $|\nu| \leq N$, on ait :

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \|\partial^\nu \hat{P}_\rho - \partial^\nu f\|_{L^2(\Omega^s, \mu_\nu)} = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\nu \leq \ell \leq \rho} f_\ell \partial^\nu P_\ell(x) - \sum_{\nu \leq \ell} f_\ell^{(\nu)} \partial^\nu P_\ell(x) \right\|_{L^2(\Omega^s, \mu_\nu)} = 0,$$

puisque, $f_\ell = f_\ell^{(\nu)}$ pour $\ell \geq \nu$.

Par conséquent,

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \|\hat{P}_\rho - f\|_{H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)} = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \sum_{|\nu| \leq N} \|\partial^\nu \hat{P}_\rho - \partial^\nu f\|_{L^2(\Omega^s, \mu_\nu)} = 0. \quad (3.55)$$

Donc on en déduit que $\{P_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^s}$ est totale dans $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$ pour le produit scalaire (3.2).

Pour montrer que la forme bilinéaire symétrique a_λ est un produit scalaire sur $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N) \times H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$, il faut montrer que a_λ est définie positive sur cet espace, c'est-à-dire $a_\lambda(f, f) > 0$, $\forall f \in H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N) - \{0\}$.

a_λ est continue sur $H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N) \times H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)$. En effet,

$$|a_\lambda(f, g)| \leq \max_{1 \leq m \leq N} |\lambda_m| \|f\|_{H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)} \|g\|_{H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)}, \quad \forall f, g \in H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N).$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} a_\lambda(\hat{P}_\rho - f, \hat{P}_\rho - f) &= \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^s \lambda_m \sum_{|\nu|=m} \|\partial^\nu \hat{P}_\rho - \partial^\nu f\|_{L^2(\Omega^s, \mu_\nu)} \\ &\leq \max_{1 \leq m \leq N} |\lambda_m| \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \sum_{|\nu| \leq N} \|\partial^\nu \hat{P}_\rho - \partial^\nu f\|_{L^2(\Omega^s, \mu_\nu)} \\ &\leq \max_{1 \leq m \leq N} |\lambda_m| \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \|\hat{P}_\rho - f\|_{H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)} = 0 \quad \text{en utilisant (3.55)}. \end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} |a_\lambda(\hat{P}_\rho - f, f)| \leq \max_{1 \leq m \leq N} |\lambda_m| \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \|\hat{P}_\rho - f\|_{H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)} \|f\|_{H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N)} = 0.$$

Donc

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} |a_\lambda(\hat{P}_\rho, \hat{P}_\rho) - a_\lambda(f, f)| = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} |a_\lambda(\hat{P}_\rho - f, \hat{P}_\rho - f) + 2a_\lambda(\hat{P}_\rho - f, f)| = 0.$$

En conséquence, $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} a_\lambda(\hat{P}_\rho, \hat{P}_\rho) = a_\lambda(f, f)$.

Mais a_λ est définie positive sur \mathcal{P}^s . Alors

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} a_\lambda(\hat{P}_\rho, \hat{P}_\rho) = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \sum_{\ell \leq \rho} f_\ell^2 a_\lambda(P_\ell, P_\ell) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^s} f_\ell^2 a_\lambda(P_\ell, P_\ell) > 0,$$

et

$$a_\lambda(f, f) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^s} f_\ell^2 a_\lambda(P_\ell, P_\ell) > 0, \quad \forall f \in H^N(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq N).$$

D'où les résultats *i)* et *ii)*.

□

Dans la section 3.3.2, quand $N = 2$ pour les mesures d'Hermite et de Laguerre-Sonin, nous avons montré comment construire le domaine $\bar{\mathcal{D}}$ (Théorème 3.3.30) et nous avons donné les inégalités de type Landau-Kolmogorov (3.47) satisfaites dans le domaine $\mathcal{D} \setminus (\mathbb{R}_+)^s$ (voir le Théorème 3.3.33).

D'où les propriétés évidentes.

Corollaire 3.3.43 *Quand $N = 2$, si $\lambda \in \bar{\mathcal{D}}$, les suites des polynômes orthogonaux d'Hermite ou Laguerre-Sonin sont des bases hilbertiennes de $H^2(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq 2)$.*

Corollaire 3.3.44 *Quand $N = 2$, si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D} \setminus (\mathbb{R}_+)^s$, alors $\forall f \in H^2(\Omega^s, \mu_\nu, |\nu| \leq 2)$, nous avons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante*

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1} \|f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2.$$

Remarque 3.3.45 *En utilisant la Propriété 2.1.5, on peut transformer cette inégalité pour ne faire intervenir que la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}$.*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s \|x_j^{(1-\varepsilon)/2} \partial^{\nu(j)} f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 &\leq -\frac{1}{\lambda_1} \|f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{j=1}^s \|x_j^{1-\varepsilon} \partial^{\hat{\nu}(j)} f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \\ &\quad - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{1 \leq i < j \leq s} \|(x_i x_j)^{(1-\varepsilon)/2} \partial^{\nu(i,j)} f\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \end{aligned}$$

où $\nu(j) = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s$ est tel que $\nu_j = 1$ et $\nu_i = 0, \forall i \neq j$, $\hat{\nu}(j) = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_s) \in \mathbb{N}^s$ est tel que $\hat{\nu}_j = 2$ et $\hat{\nu}_i = 0, \forall i \neq j$ et $\nu(i, j) = (\nu_1^*, \dots, \nu_s^*) \in \mathbb{N}^s$ est tel que $\nu_i^* = \nu_j^* = 1$ ($i < j$) et $\nu_m^* = 0, \forall m \neq i, j$.

$\varepsilon = 0$ dans le cas Laguerre-Sonin et $\varepsilon = 1$ dans le cas d'Hermite.

3.4 Inégalités de type Landau-Kolmogorov dans le cas Jacobi

Les méthodes utilisées dans cette partie sont suffisamment différentes de celles utilisées dans les cas précédents pour ne pas les présenter ensemble. En plus, pour la mesure de Jacobi on n'a pas réussi à aller plus loin que les inégalités pour $p \in \mathcal{Q}_r$. Dans ce cas, les droites \mathcal{H}_ℓ pour $|\ell|$ fixé, ne passent plus par un même point, ce qui complique la définition du domaine de positivité de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

3.4.1 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $p \in \mathcal{Q}_r$

Comme dans les cas précédents, nous allons utiliser le Théorème 3.1.11 pour définir quelques points appartenant à la frontière de \mathcal{D}_r . Nous commençons par donner l'expression de $a_\lambda(P_\ell^{(\alpha,\beta)}(x), P_\ell^{(\alpha,\beta)}(x))$ quand $\ell \leq r$.

$$\begin{aligned} a(P_\ell^{(\alpha,\beta)}, P_\ell^{(\alpha,\beta)}) &= \left\| P_\ell^{(\alpha,\beta)} \right\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} \left\| \partial^\nu P_\ell^{(\alpha,\beta)} \right\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} \left\| \partial^\nu P_\ell^{(\alpha,\beta)} \right\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \\ &= k_\ell^{(0)} + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} k_\ell^{(\nu)} + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} k_\ell^{(\nu)}. \\ &= k_\ell^{(0)} \left(1 + \lambda_1 \sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)} + \lambda_2 \sum_{|\nu|=2} C_\ell^{(\nu)} \right). \end{aligned}$$

Par souci de simplicité on pose

$$\begin{aligned} \varphi_1(\ell) &= \sum_{|\nu|=1} C_\ell^{(\nu)} = \sum_{j=1}^s \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) \\ \varphi_2(\ell) &= \sum_{|\nu|=2} C_\ell^{(\nu)} = \sum_{j=1}^s \ell_j (\ell_j - 1) (\ell_j + \gamma_j + 1) (\ell_j + \gamma_j + 2) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j (\ell_i + \gamma_i + 1) (\ell_j + \gamma_j + 1) \end{aligned}$$

où $\gamma_j = \alpha_j + \beta_j$, $j = 1, \dots, s$.

Alors $a_\lambda(P_\ell^{(\alpha,\beta)}, P_\ell^{(\alpha,\beta)}) = 0$ correspond à la droite \mathcal{H}_ℓ .

$$\mathcal{H}_\ell = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + \lambda_1 \varphi_1(\ell) + \lambda_2 \varphi_2(\ell) = 0\}.$$

$a_\lambda(P_\ell^{(\alpha,\beta)}, P_\ell^{(\alpha,\beta)}) > 0$ correspond au demi-espace ouvert positif \mathcal{O}_ℓ .

$$\mathcal{O}_\ell = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + \lambda_1 \varphi_1(\ell) + \lambda_2 \varphi_2(\ell) > 0\}.$$

Et, comme nous l'avons mentionné dans les préliminaires, $\mathcal{D}_r = \bigcap_{\ell \leq r} \mathcal{O}_\ell$.

Rappelons que \mathcal{D}_r (resp. $\bar{\mathcal{D}}_r$) est un domaine convexe.

Propriété 3.4.1 *Si $\ell \leq r$ avec $\ell \neq r$, alors*

$$\begin{aligned}\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell) &> 0, \\ \varphi_2(r) - \varphi_2(\ell) &> 0.\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell) &= \sum_{j=1}^s \left(r_j(r_j + \gamma_j + 1) - \ell_j(\ell_j + \gamma_j + 1) \right) \\ &= \sum_{j=1}^s \left(r_j^2 - \ell_j^2 + (\gamma_j + 1)(r_j - \ell_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^s (r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1).\end{aligned}$$

Or $\gamma_j = \alpha_j + \beta_j > -2$ et $r_j \geq 1$. Donc $r_j + \ell_j + \gamma_j + 1 > 0$. De plus, $\ell \leq r$. Donc $\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell) \geq 0$. Mais $\ell \neq r$, donc il existe au moins un r_i , $1 \leq i \leq s$, tel que $\ell_i < r_i$. Donc $\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell) > 0$.

$$\begin{aligned}\varphi_2(r) - \varphi_2(\ell) &= \sum_{j=1}^s \left(r_j(r_j - 1)(r_j + \gamma_j + 1)(r_j + \gamma_j + 2) - \ell_j(\ell_j - 1)(\ell_j + \gamma_j + 1)(\ell_j + \gamma_j + 2) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \left(r_i r_j (r_i + \gamma_i + 1)(r_j + \gamma_j + 1) - \ell_i \ell_j (\ell_i + \gamma_i + 1)(\ell_j + \gamma_j + 1) \right) \\ &= \sum_{j=1}^s c_j + \sum_{1 \leq i < j \leq s} d_{ij}.\end{aligned}$$

Dans la première somme :

Si $\ell_j = 0$ ou $\ell_j = 1$, alors $c_j = r_j(r_j - 1)(r_j + \gamma_j + 1)(r_j + \gamma_j + 2) > 0$.

Si $\ell_j \geq 2$, alors

$$\begin{aligned}r_j &\geq \ell_j &&\geq 1, \\ r_j - 1 &\geq \ell_j - 1 &&\geq 1, \\ r_j + \gamma_j + 1 &\geq \ell_j + \gamma_j + 1 &&\geq 1, \\ r_j + \gamma_j + 2 &\geq \ell_j + \gamma_j + 2 &&\geq 1.\end{aligned}$$

Donc $c_j \geq 0$.

Dans la deuxième somme :

Si $\ell_j = 0$ ou $\ell_i = 0$, alors $d_{ij} = r_j r_i (r_j + \gamma_j + 1)(r_i + \gamma_i + 1) > 0$.

3.4. INÉGALITÉS DE TYPE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS JACOBI 141

Si $\ell_j \ell_i \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} r_j &\geq \ell_j && \geq 1, \\ r_i &\geq \ell_i && \geq 1, \\ r_j + \gamma_j + 1 &\geq \ell_j + \gamma_j + 1 && \geq 1, \\ r_i + \gamma_i + 1 &\geq \ell_i + \gamma_i + 1 && \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $d_{ij} \geq 0$.

Mais $\ell \neq r$, alors il existe au moins un indice j tel que $r_j > \ell_j$. D'où la positivité stricte de $\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell)$.

□

Maintenant, nous donnons une autre expression de $\varphi_2(\ell)$.

Propriété 3.4.2

$$\begin{aligned} \varphi_2(\ell) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^s \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \ell_j^2 (\ell_j + \gamma_j + 1)^2 - \sum_{j=1}^s (2 + \gamma_j) \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) \\ &= \frac{1}{2} (\varphi_1(\ell))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \ell_j^2 (\ell_j + \gamma_j + 1)^2 - 2\varphi_1(\ell) - \sum_{j=1}^s \gamma_j \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \varphi_2(\ell) &= \sum_{j=1}^s \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) (\ell_j - 1) (\ell_j + \gamma_j + 1 + 1) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j (\ell_i + \gamma_i + 1) (\ell_j + \gamma_j + 1) \\ &= \sum_{j=1}^s \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) \left(\ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) - (\ell_j + \gamma_j + 1) + \ell_j - 1 \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j (\ell_i + \gamma_i + 1) (\ell_j + \gamma_j + 1) \\ &= \sum_{j=1}^s \ell_j^2 (\ell_j + \gamma_j + 1)^2 - \sum_{j=1}^s (2 + \gamma_j) \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j (\ell_i + \gamma_i + 1) (\ell_j + \gamma_j + 1). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\ell) &+ \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j (\ell_i + \gamma_i + 1)(\ell_j + \gamma_j + 1) \\
&= \sum_{j=1}^s \ell_j^2 (\ell_j + \gamma_j + 1)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq s} \ell_i \ell_j (\ell_i + \gamma_i + 1)(\ell_j + \gamma_j + 1) \\
&- \sum_{j=1}^s (2 + \gamma_j) \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) \\
&= \left(\sum_{j=1}^s \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1) \right)^2 - \sum_{j=1}^s (2 + \gamma_j) \ell_j (\ell_j + \gamma_j + 1). \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Le résultat est obtenu en additionnant (3.57) et (3.58).

□

Propriété 3.4.3 *Le point $A = (-\frac{1}{\varphi_1(r)}, 0)$ appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.*

Démonstration.

$\mathcal{D}_r = \bigcap_{\ell \leq r} \mathcal{O}_\ell$, alors, pour montrer que le point A appartient à ce domaine, il faut montrer que $A \in \mathcal{O}_\ell, \forall \ell \leq r$, \mathcal{O}_ℓ est le demi espace positif défini par

$$1 + \lambda_1 \varphi_1(\ell) + \lambda_2 \varphi_2(\ell) > 0.$$

Or $1 + \lambda_1(A) \varphi_1(\ell) = \frac{\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell)}{\varphi_1(r)}$ et, d'après la Propriété 3.4.1, $\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell) > 0$ pour $\ell \leq r$ et $\ell \neq r$. Si $\ell = r$, alors $A \in \mathcal{H}_r$. Par conséquent A appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

□

On note par B_ℓ le point obtenu par l'intersection de \mathcal{H}_r et \mathcal{H}_ℓ , avec $\ell \leq r$ et $\ell \neq r$. Les coordonnées d'un tel point sont :

$$\lambda_1(B_\ell) = -\frac{\varphi_2(r) - \varphi_2(\ell)}{\varphi_2(r)\varphi_1(\ell) - \varphi_2(\ell)\varphi_1(r)}, \tag{3.59}$$

$$\lambda_2(B_\ell) = \frac{\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell)}{\varphi_2(r)\varphi_1(\ell) - \varphi_2(\ell)\varphi_1(r)}. \tag{3.60}$$

Nous souhaitons montrer que, pour $\ell \leq r$ et $|\ell| = |r| - 1$, un des points B_ℓ appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$. Nous commençons par donner le signe des coordonnées de ces points.

Théorème 3.4.4 $\lambda_1(B_\ell) < 0$ et $\lambda_2(B_\ell) > 0$ pour $\ell \leq r$ avec $|\ell| = |r| - 1$.

Démonstration.

Si $\ell \leq r$ avec $|\ell| = |r| - 1$, alors il existe un indice $i, 1 \leq i \leq s$, pour lequel $\ell_i = r_i - 1$ et

3.4. INÉGALITÉS DE TYPE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS JACOBI143

$\ell_j = r_j, \forall j \neq i$.

$\varphi_1(\ell)$ et $\varphi_2(\ell)$ peuvent être exprimées en fonction de $\varphi_1(r)$ et $\varphi_2(r)$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(\ell) &= \varphi_1(r) - (2r_i + \gamma_i), \\ \varphi_2(\ell) &= \varphi_2(r) - (2r_i + \gamma_i)(\varphi_1(r) + (r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1)).\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \varphi_1(r) - \varphi_1(\ell), \\ \Delta_2 &= \varphi_2(r) - \varphi_2(\ell).\end{aligned}$$

À partir de la Propriété 3.4.1, $\Delta_1 > 0$ et $\Delta_2 > 0$.

Montrons que le dénominateur commun de $\lambda_1(B_\ell)$ et $\lambda_2(B_\ell)$ est positif.

$$\begin{aligned}\varphi_2(r)\varphi_1(\ell) - \varphi_2(\ell)\varphi_1(r) &= \varphi_2(r)\varphi_1(\ell) - \varphi_2(r)\varphi_1(r) + \varphi_2(r)\varphi_1(r) - \varphi_2(\ell)\varphi_1(r) \\ &= \varphi_2(r)(\varphi_1(\ell) - \varphi_1(r)) - \varphi_1(r)(\varphi_2(\ell) - \varphi_2(r)) \\ &= \varphi_1(r)\Delta_2 - \varphi_2(r)\Delta_1.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \varphi_2(r) - \varphi_2(\ell) \\ &= (2r_i + \gamma_i)(\varphi_1(r) + (r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1)),\end{aligned}$$

et

$$\Delta_1 = \varphi_1(r) - \varphi_1(\ell) = 2r_i + \gamma_i.$$

Donc

$$\Delta_2 = \Delta_1(\varphi_1(r) + (r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1)). \quad (3.61)$$

Alors,

$$\begin{aligned}\varphi_1(r)\Delta_2 - \varphi_2(r)\Delta_1 &= \varphi_1(r)\left(\Delta_1(\varphi_1(r) + (r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1))\right) - \varphi_2(r)\Delta_1 \\ &= \Delta_1\left(\varphi_1(r)(\varphi_1(r) + r_i^2 - r_i + r_i\gamma_i - 2\gamma_i - 2) - \varphi_2(r)\right).\end{aligned}$$

On remplace $\varphi_2(r)$ par (3.61). Nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_1(r)\Delta_2 - \varphi_2(r)\Delta_1 &= \Delta_1 \left(\varphi_1(r)(\varphi_1(r) + r_i^2 - r_i + r_i\gamma_i - 2\gamma_i - 2) - (\varphi_1(r))^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s r_j^2(r_j + \gamma_j + 1)^2 + 2\varphi_1(r) + \sum_{j=1}^s \gamma_j r_j(r_j + \gamma_j + 1) \right) \\ &= \Delta_1 \left(\frac{1}{2}(\varphi_1(r))^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s r_j^2(r_j + \gamma_j + 1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(r)(r_i^2 - r_i + r_i\gamma_i - 2\gamma_i) + \sum_{j=1}^s \gamma_j r_j(r_j + \gamma_j + 1) \right) \quad (3.62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Delta_1 \sum_{j=1}^s r_j(r_j + \gamma_j + 1) \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq j}^s r_m(r_m + \gamma_m + 1) \right. \\ &\quad \left. + (r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1) + 2 + \gamma_j \right). \quad (3.63) \end{aligned}$$

Si $r_i \geq 2$, alors la relation (3.63) est positive.

Si $r_i = 1$, alors (3.62) devient :

$$\begin{aligned} &\Delta_1 \left(\frac{1}{2}(\varphi_1(r))^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s r_j^2(r_j + \gamma_j + 1)^2 - \varphi_1(r)\gamma_i + \sum_{j=1}^s \gamma_j r_j(r_j + \gamma_j + 1) \right) \\ &= \Delta_1 \left(\frac{1}{2}(\varphi_1(r))^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s r_j^2(r_j + \gamma_j + 1)^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^s (\gamma_j - \gamma_i)r_j(r_j + \gamma_j + 1) \right). \quad (3.64) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi_1(r))^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s r_j^2(r_j + \gamma_j + 1)^2 &= \sum_{1 \leq j < m \leq s} r_j(r_j + \gamma_j + 1)r_m(r_m + \gamma_m + 1) \\ &= r_i(r_i + \gamma_i + 1) \sum_{j=1, j \neq i}^s r_j(r_j + \gamma_j + 1) + R \end{aligned}$$

où R est une quantité positive. Donc la nouvelle expression de (3.64) est

$$\begin{aligned} &\Delta_1 \left(R + (2 + \gamma_i) \sum_{j=1, j \neq i}^s r_j(r_j + \gamma_j + 1) + \sum_{j=1, j \neq i}^s (\gamma_j - \gamma_i)r_j(r_j + \gamma_j + 1) \right) \\ &= \Delta_1 \left(R + \sum_{j=1, j \neq i}^s (2 + \gamma_j)r_j(r_j + \gamma_j + 1) \right) > 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Maintenant on choisit un point B_{ℓ^*} parmi les points B_ℓ qui vérifient

$$\lambda_2(B_{\ell^*}) = \min_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_2(B_\ell)$$

où $\mathcal{L} = \{\ell \in \mathbb{N}^s \mid \ell \leq r \text{ et } |\ell| = |r| - 1\}$.

Ou encore $\mathcal{L} = \{\ell \in \mathbb{N}^s \mid \ell_i = r_i - 1, 1 \leq i \leq s \text{ et } \ell_j = r_j, j = 1 \dots s, j \neq i\}$.

Nous avons

$$\lambda_2(B_\ell) = \frac{\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell)}{\varphi_2(r)\varphi_1(\ell) - \varphi_2(\ell)\varphi_1(r)}.$$

En remplaçant le numérateur par Δ_1 et le dénominateur par (3.63), nous trouvons :

$$\lambda_2(B_\ell) = \frac{1}{\sum_{j=1}^s r_j(r_j + \gamma_j + 1) \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq j}^s r_m(r_m + \gamma_m + 1) + 2 + \gamma_j \right) + (r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1)\varphi_1(r)}. \quad (3.65)$$

Pour minimiser $\lambda_2(B_\ell)$, on doit maximiser $(r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1)\varphi_1(r)$. Notons par (r_{i^*}, γ_{i^*}) un couple qui maximise $(r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1)$.

Montrons que B_{ℓ^*} appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

Théorème 3.4.5 *Le point B_{ℓ^*} appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.*

Démonstration.

Les pentes des droites \mathcal{H}_ℓ , pour $|\ell| \geq 2$, sont négatives. Elles sont données par $-\frac{\varphi_1(\ell)}{\varphi_2(\ell)}$.

Chaque droite \mathcal{H}_ℓ passe par le point $(-\frac{1}{\varphi_1(\ell)}, 0)$. Quand $\ell \leq r$ avec $|\ell| \neq |r|$, ce point est à gauche de A sur l'axe des λ_1 , car dans ce cas $\varphi_1(r) > \varphi_1(\ell)$.

De plus :

$$\left(-\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)} \right) - \left(-\frac{\varphi_1(\ell)}{\varphi_2(\ell)} \right) = \frac{\varphi_2(r)\varphi_1(\ell) - \varphi_2(\ell)\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)\varphi_2(\ell)}.$$

D'après le Théorème 3.4.4, quand $|\ell| = |r| - 1$ et $\ell \leq r$, cette quantité est positive, c'est-à-dire les pentes des droites \mathcal{H}_ℓ correspondantes sont plus petites que celle de la droite \mathcal{H}_r . Alors le point B_{ℓ^*} sur \mathcal{H}_r qui correspond au $\min_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_2(B_\ell)$, appartient à tous les demi-espaces \mathcal{O}_ℓ , pour $|\ell| = |r| - 1$ et $\ell \leq r$.

□

Montrons que $B_{\ell^*} \in \mathcal{O}_\ell$, $\forall \ell \leq r$ avec $|\ell| \leq |r| - 2$, c'est-à-dire

$$1 + \varphi_1(\ell)\lambda_1(B_\ell) + \varphi_2(\ell)\lambda_2(B_\ell) > 0. \quad (3.66)$$

En remplaçant $\lambda_1(B_{\ell^*})$ et $\lambda_2(B_{\ell^*})$ par (3.59) et (3.60) dans cette relation, nous obtenons :

$$\frac{(\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell^*))(\varphi_2(\ell) - \varphi_2(r)) + (\varphi_2(r) - \varphi_2(\ell^*))(\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell))}{\varphi_2(r)\varphi_1(\ell^*) - \varphi_2(\ell^*)\varphi_1(r)}. \quad (3.67)$$

Dans le Théorème 3.4.4 nous avons déjà montré que le dénominateur est positif.
D'autre part,

$$\begin{aligned}\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell) &= \sum_{j=1}^s (r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1), \\ \varphi_2(r) - \varphi_2(\ell) &= \frac{1}{2}(\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell))(\varphi_1(r) + \varphi_1(\ell)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (r_j^2(r_j + \gamma_j + 1)^2 - \ell_j^2(\ell_j + \gamma_j + 1)^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (2 + \gamma_j)(r_j(r_j + \gamma_j + 1) - \ell_j(\ell_j + \gamma_j + 1)).\end{aligned}$$

Donc en utilisant (3.61), le numérateur de (3.67) peut être écrit comme

$$\begin{aligned}& (\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell^*)) \left((\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell))(\varphi_1(r) + r_{i^*}^2 - r_{i^*} + r_{i^*}\gamma_{i^*} - 2\gamma_{i^*} - 2) - (\varphi_2(r) - \varphi_2(\ell)) \right) \\ &= (\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell^*)) \sum_{j=1}^s (r_j(r_j + \gamma_j + 1) - \ell_j(\ell_j + \gamma_j + 1)) \left(\frac{1}{2}(\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell)) + r_{i^*}^2 - r_{i^*} \right. \\ &\quad \left. + r_{i^*}\gamma_{i^*} - 2\gamma_{i^*} - 2 - \frac{1}{2}(r_j(r_j + \gamma_j + 1) - \ell_j(\ell_j + \gamma_j + 1)) + 2 + \gamma_j \right) \\ &= (\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell^*)) \sum_{j=1}^s (r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1) \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^s (r_m - \ell_m)(r_m + \ell_m + \gamma_m + 1) \right. \\ &\quad \left. + ((r_{i^*} - 2)(r_{i^*} + \gamma_{i^*} + 1) - (r_j - 2)(r_j + \gamma_j + 1)) + \frac{1}{2}(r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1) - 2r_j - \gamma_j \right) \\ &= (\varphi_1(r) - \varphi_1(\ell^*)) \sum_{j=1}^s (r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1) \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq j}^s (r_m - \ell_m)(r_m + \ell_m + \gamma_m + 1) \right. \\ &\quad \left. + ((r_{i^*} - 2)(r_{i^*} + \gamma_{i^*} + 1) - (r_j - 2)(r_j + \gamma_j + 1)) \right. \\ &\quad \left. + (r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1) - 2r_j - \gamma_j \right). \tag{3.68}\end{aligned}$$

Tous les facteurs de (3.68) sont positifs, sauf éventuellement

$$(r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1) - 2r_j - \gamma_j. \tag{3.69}$$

Si $r_j - \ell_j = 1$, alors (3.69) = 0.

Si $r_j = \ell_j + \delta$ avec $\delta \geq 2$, alors (3.69) = $(\delta - 1)(2\ell_j + \gamma_j + \delta) > 0$.

Si $r_j - \ell_j = 0$, alors le facteur $(r_j - \ell_j)$ dans la première somme $(\sum_{j=1}^s)$ implique que le terme correspondant est nul :

$$\begin{aligned}& (r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1) \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq j}^s (r_m - \ell_m)(r_m + \ell_m + \gamma_m + 1) + ((r_{i^*} - 2)(r_{i^*} + \gamma_{i^*} \right. \\ &\quad \left. + 1) - (r_j - 2)(r_j + \gamma_j + 1)) + (r_j - \ell_j)(r_j + \ell_j + \gamma_j + 1) - 2r_j - \gamma_j \right) = 0.\end{aligned}$$

3.4. INÉGALITÉS DE TYPE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS JACOBI 147

Par conséquent (3.68) est toujours positive.

Conclusion

B_{ℓ^*} est sur \mathcal{H}_r et il appartient à tous les demi-espaces \mathcal{O}_ℓ pour $\ell \leq r$, $\ell \neq r$. Donc B_{ℓ^*} est bien sur la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

□

Remarque 3.4.6 Dans le cas particulier où $|r| = 2$, les droites \mathcal{H}_ℓ , pour $|\ell| = 1$ et $\ell \leq r$, sont données par les équations suivantes :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\varphi_1(\ell)} = -\frac{1}{\ell_j(\ell_j + \gamma_j + 1)} = -\frac{1}{2 + \gamma_j}.$$

L'ensemble des demi-espaces positifs \mathcal{O}_ℓ , quand $|\ell| = 1$ et $\ell \leq r$, donne un demi-espace positif global \mathcal{O}_{ℓ^*} défini par

$$\lambda_1 > -\frac{1}{2 + \max_j \gamma_j}.$$

Alors $\lambda_1(B_{\ell^*}) = -\frac{1}{2 + \max_j \gamma_j}$ et $\lambda_2(B_{\ell^*})$ est donné par (3.65).

Corollaire 3.4.7 Tout point $M = (1 - \theta)A + \theta B_{\ell^*}$, pour $0 \leq \theta \leq 1$, appartient à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

Démonstration.

Les points A et B_{ℓ^*} appartiennent à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$. Or $\bar{\mathcal{D}}_r$ est un domaine convexe, alors tous les points de l'intervalle $[B_{\ell^*}, A]$ sont dans $\bar{\mathcal{D}}_r$. Mais ils sont tous sur \mathcal{H}_r . Donc ils appartiennent à la frontière de $\bar{\mathcal{D}}_r$.

□

Pour chaque point M de l'intervalle $[B_{\ell^*}, A]$ nous avons une inégalité de type Landau-Kolmogorov.

Corollaire 3.4.8 Pour tout point $M = (1 - \theta)A + \theta B_{\ell^*}$, avec $0 \leq \theta < 1$, nous avons l'inégalité de type Landau-Kolmogorov suivante, $\forall p \in \mathcal{Q}_r$,

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1(M)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2(M)}{\lambda_1(M)} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2. \quad (3.70)$$

Quand $0 < \theta < 1$, cette inégalité devient une égalité si et seulement si $p = cP_r^{(\alpha, \beta)}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Si $\theta = 1$, alors cette inégalité devient une égalité si et seulement si $p = cP_r^{(\alpha, \beta)} + \sum_{\ell \in \mathcal{L}^*} c_\ell P_\ell^{(\alpha, \beta)}$.

\mathcal{L}^* est le sous ensemble de \mathcal{L} tel que, pour tout élément de \mathcal{L}^* , nous avons le maximum de $(r_i - 2)(r_i + \gamma_i + 1)$. c et les c_ℓ sont dans \mathbb{R} .

Démonstration.

$\lambda_1(M) < 0$, $\lambda_2(M) > 0$ et $M \in \bar{\mathcal{D}}_r$. D'où l'inégalité (3.70).

Si $0 < \theta < 1$, alors M appartient à \mathcal{H}_r , c'est-à-dire

$$1 + \lambda_1(M)\varphi_1(r) + \lambda_2(M)\varphi_2(r) = 0.$$

Donc (3.70) est une égalité pour $cP_r^{(\alpha,\beta)}$.

Si $\theta = 1$, alors $M = B_{\ell^*}$ appartient à la fois à \mathcal{H}_r et aux différents \mathcal{H}_ℓ tels que $\ell \in \mathcal{L}^*$.

Par conséquent (3.70) sera une égalité pour toute combinaison linéaire des polynômes de Jacobi $P_r^{(\alpha,\beta)}$ et $P_\ell^{(\alpha,\beta)}$ pour $\ell \in \mathcal{L}^*$.

□

Remarque 3.4.9 Si $\theta = 0$, nous avons l'inégalité de Markov-Bernstein suivante

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1(A)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2, \quad \forall p \in \mathcal{Q}_r.$$

c'est-à-dire

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \leq \sum_{j=1}^s r_j(r_j + \gamma_j + 1) \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2, \quad \forall p \in \mathcal{Q}_r.$$

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si $p = cP_r^{(\alpha,\beta)}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Pour terminer cette étude, nous proposons un point M optimal sur le segment $[B_{\ell^*}, A[$ qui minimise le membre de droite de l'inégalité (3.70) quand p est un polynôme fixé de \mathcal{Q}_r .

Théorème 3.4.10 Le meilleur point M sur le segment $[B_{\ell^*}, A[$ qui minimise la partie droite de l'inégalité (3.70) pour tout polynôme $p \in \mathcal{Q}_r$ fixé, est le point B_ℓ^* .

Démonstration.

Un point M du segment $[B_{\ell^*}, A[$ est donné par $M = (1 - \theta)A + \theta B_{\ell^*}$ avec $0 < \theta \leq 1$. Ses coordonnées sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) &= -\frac{1}{\varphi_1(r)} + \theta \left(\frac{1}{\varphi_1(r)} + \lambda_1(B_\ell^*) \right), \\ \lambda_2(M) &= \theta \lambda_2(B_\ell^*). \end{aligned}$$

Soit $G(\theta)$ la partie droite de l'inégalité (3.70). Sa dérivée $G'(\theta)$ est

$$\begin{aligned} G'(\theta) &= \frac{\frac{1}{\varphi_1(r)} + \lambda_1(B_\ell^*)}{(\lambda_1(M))^2} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 + \frac{\lambda_2(B_\ell^*)}{\varphi_1(r)} \frac{1}{(\lambda_1(M))^2} \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \\ &= \frac{\hat{G}}{(\lambda_1(M))^2}. \end{aligned}$$

3.4. INÉGALITÉS DE TYPE LANDAU-KOLMOGOROV DANS LE CAS JACOBI 149

En remplaçant $\lambda_1(B_\ell^*)$ et $\lambda_2(B_\ell^*)$ par les relations (3.59) et (3.60), nous obtenons

$$\begin{aligned}\hat{G} &= \frac{\varphi_1(\ell^*) - \varphi_1(r)}{\varphi_1(r)(\varphi_2(r)\varphi_1(\ell^*) - \varphi_2(\ell^*)\varphi_1(r))} \left(\varphi_2(r) \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 \right) \\ &= \frac{\varphi_1(\ell^*) - \varphi_1(r)}{\varphi_1(r)(\varphi_2(r)\varphi_1(\ell^*) - \varphi_2(\ell^*)\varphi_1(r))} G^*.\end{aligned}$$

Le facteur de G^* est négatif (voir le Théorème 3.4.4).

Soit p un polynôme de \mathcal{Q}_r . Alors p peut être exprimé dans la base des polynômes de Jacobi $P_\rho^{(\alpha, \beta)}$, $\rho \leq r$.

$$p = \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho P_\rho^{(\alpha, \beta)}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)}, \\ \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 k_\rho^{(\nu)} = \sum_{\rho \leq r} C_\rho^{(\nu)} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)}, \\ \sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{|\nu|=2} \sum_{\rho \leq r} C_\rho^{(\nu)} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)} \\ &= \sum_{\rho \leq r} \sum_{|\nu|=2} C_\rho^{(\nu)} \beta_\rho^2 k_\rho^{(0)} \\ &= \sum_{\rho \leq r} \beta_\rho^2 \varphi_2(\rho) k_\rho^{(0)}.\end{aligned}$$

Donc $G^* = \sum_{\rho \leq r} k_\rho^{(0)} \beta_\rho^2 (\varphi_2(r) - \varphi_2(\rho)) > 0$, en utilisant la Propriété 3.4.3.

Par conséquent $G' < 0$ et $G(\theta)$ est strictement décroissante en fonction de $\theta \in]0, 1]$. Le minimum est atteint pour $\theta = 1$, c'est-à-dire quand $M = B_{\ell^*}$.

□

Remarque 3.4.11 *En utilisant la Propriété 2.1.5 pour les polynômes à une variable réelle, nous avons*

$$(p^{(\nu_j)}(x_j), p^{(\nu_j)}(x_j))_{L^2(\Omega; \mu_{\nu_j, j})} = ((1 - x_j^2)^{\nu_j/2} p^{(\nu_j)}(x_j), (1 - x_j^2)^{\nu_j/2} p^{(\nu_j)}(x_j))_{L^2(\Omega; \mu_{0, j})}.$$

Alors

$$\sum_{|\nu|=1} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 = \sum_{j=1}^s \|(1 - x_j^2)^{1/2} \partial^{\nu(j)} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}\sum_{|\nu|=2} \|\partial^\nu p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_\nu)}^2 &= \sum_{j=1}^s \|(1 - x_j^2) \partial^{\hat{\nu}(j)} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \|((1 - x_i^2)(1 - x_j^2))^{1/2} \partial^{\nu(i, j)} p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2\end{aligned} \quad (3.72)$$

où $\nu(j) = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s$ est tel que $\nu_j = 1$ et $\nu_i = 0, \forall i \neq j$. $\hat{\nu}(j) = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_s) \in \mathbb{N}^s$ est tel que $\hat{\nu}_j = 2$ et $\hat{\nu}_i = 0, \forall i \neq j$ et $\nu(i, j) = (\nu_1^*, \dots, \nu_s^*) \in \mathbb{N}^s$ est tel que $\nu_i^* = \nu_j^* = 1$ ($i < j$) et $\nu_m^* = 0, \forall m \neq i, j$.

Nous utilisons (3.71-3.72) dans (3.70) pour donner des inégalités de type Landau-Kolmogorov faisant intervenir uniquement la norme définie sur l'espace $L^2(\Omega^s; \mu_0)$.

$$\sum_{j=1}^s \left\| (1-x_j^2)^{1/2} \partial^{\nu(j)} p \right\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \leq -\frac{1}{\lambda_1(M)} \|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 - \frac{\lambda_2(M)}{\lambda_1(M)} \sum_{j=1}^s \left\| (1-x_j^2) \partial^{\hat{\nu}(j)} p \right\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2$$

$$- \frac{\lambda_2(M)}{\lambda_1(M)} \sum_{1 \leq i < j \leq s} \left\| ((1-x_i^2)(1-x_j^2))^{1/2} \partial^{\nu(i,j)} p \right\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2.$$

3.5 Problèmes ouverts

L'étude de la positivité de la forme bilinéaire dans le cas général s'est avérée très compliquée. En effet, nous ne nous sommes intéressés qu'au cas homogène, c'est-à-dire le cas où tous les λ_ν sont égaux pour un $|\nu|$ fixé et nous ne sommes pas allés au delà de $|\nu| = 2$.

De plus, pour la mesure de Jacobi, les inégalités de type Landau-Kolmogorov sont données uniquement pour $p \in \mathcal{Q}_r$.

Nous donnons quelques résultats partiels qui pourront orienter de futures recherches.

3.5.1 Les inégalités de Markov-Bernstein dans le cas non homogène

Considérons le cas de deux variables ($s = 2$) dans le cas des mesures d'Hermite ou Laguerre-Sonin.

On cherche $\lambda = (\lambda_{1,0}, \lambda_{0,1}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_\lambda(p, p) \geq 0$, $\forall p \in \mathcal{Q}_r - \{0\}$. Rappelons l'expression de la forme bilinéaire a_λ dans ce cas

$$a_\lambda(p, p) = (p, p)_{L^2(\Omega^s; \mu_0)} + \lambda_{1,0} (\partial^{\lambda_{1,0}, 0} p, \partial^{\lambda_{1,0}, 0} p)_{L^2(\Omega^s; \mu_{1,0})} + \lambda_{0,1} (\partial^{\lambda_{0,1}, 1} p, \partial^{\lambda_{0,1}, 1} p)_{L^2(\Omega^s; \mu_{0,1})}$$

Pour trouver son domaine de positivité, nous allons utiliser les droites \mathcal{H}_j de \mathbb{R}^2 , $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$, dont l'équation est :

$$\mathcal{H}_j = \{ \lambda = (\lambda_{1,0}, \lambda_{0,1}) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2^\varepsilon \lambda_{1,0} j_1 + 2^\varepsilon \lambda_{0,1} j_2 = 0 \}.$$

Lemme 3.5.1 *Les droites $\mathcal{H}_{(s,s)}$, $s \in \mathbb{N}$, sont parallèles.*

Démonstration.

En effet, $\mathcal{H}_{(s,s)} = \{ \lambda = (\lambda_{1,0}, \lambda_{0,1}) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2^\varepsilon s} + \lambda_{1,0} + \lambda_{0,1} = 0 \}$.

Donc elles ont toutes la même pente -1 .

□

Lemme 3.5.2 *Pour un s_1 (resp. s_2) fixé, toutes les droites $\mathcal{H}_{(s_1, s_2)}$ passent par le même point $(-\frac{1}{2^\varepsilon s_1}, 0)$ (resp. $(0, -\frac{1}{2^\varepsilon s_2})$).*

Démonstration.

On fixe par exemple s_2

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(s_1, s_2)} &= \{ \lambda = (\lambda_{1,0}, \lambda_{0,1}) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + 2^\varepsilon \lambda_{1,0} s_1 + 2^\varepsilon \lambda_{0,1} s_2 = 0 \} \\ &= \left\{ \lambda = (\lambda_{1,0}, \lambda_{0,1}) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_{0,1} = -\frac{s_1}{s_2} \lambda_{1,0} - \frac{1}{2^\varepsilon s_2} \right\} \end{aligned}$$

Il est clair que ces droites passent toutes par le même point $(0, -\frac{1}{2^\varepsilon s_2})$ sur l'axe $\lambda_{1,0} = 0$. Leur pente est $-\frac{s_1}{s_2}$; elle est négative.

□

Théorème 3.5.3 *Le domaine $\bar{\mathcal{D}}_r$ est bordé par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{(r_1,0)} &= \left\{ \lambda_{1,0} = -\frac{1}{2^\varepsilon r_1} \right\}, \\ \mathcal{H}_{(0,r_2)} &= \left\{ \lambda_{0,1} = -\frac{1}{2^\varepsilon r_2} \right\}, \\ \mathcal{H}_{(r_1,r_2)} &= \{1 + 2^\varepsilon \lambda_{1,0} r_1 + 2^\varepsilon \lambda_{0,1} r_2 = 0\}.\end{aligned}$$

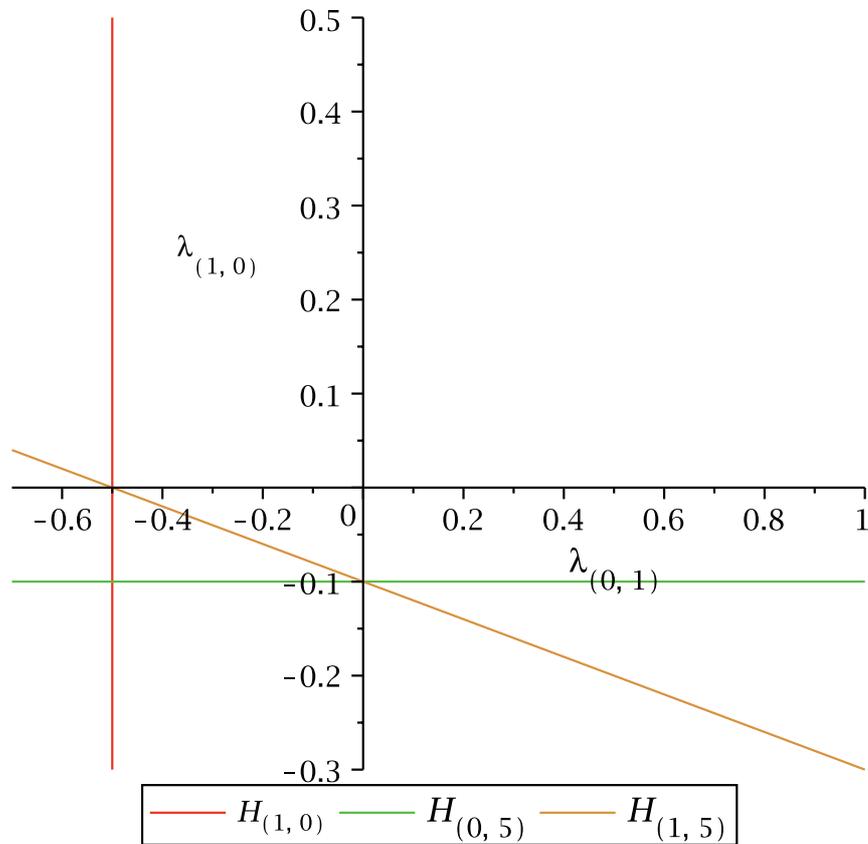


FIGURE 3.8 – Le domaine $\bar{\mathcal{D}}_{(1,5)}$ pour $N = 1$ et $s = 2$ (cas non-homogène).

Démonstration.

En utilisant les deux Lemmes précédents (3.5.1 et 3.5.2), on trouve :

- Pour un s_2 fixé, toutes les droites $\mathcal{H}_{(s_1,s_2)}$ passent par le même point $(0, -\frac{1}{2^\varepsilon s_2})$, donc il n’y a que deux droites qui interviennent dans la restriction du domaine de positivité. Elles correspondent à la pente maximale et à la pente minimale. Or la

- pente négative de ces droites est $-\frac{s_1}{s_2}$ et $0 \leq s_1 \leq r_1$. Donc ces deux droites sont $\mathcal{H}_{(0,s_2)}$ et $\mathcal{H}_{(r_1,s_2)}$.
- les droites $\mathcal{H}_{(0,s_2)}$, $0 \leq s_2 \leq r_1$, sont parallèles. Donc celle qui intervient dans la restriction du domaine \mathcal{D}_r est celle qui correspond à la plus grande ordonnée $-\frac{1}{2^\varepsilon s_2}$, ce qui revient à prendre $s_2 = r_2$.
 - Les droites $\mathcal{H}_{(r_1,s_2)}$ ont un premier indice fixé, donc elles passent toutes par le même point $(-\frac{1}{2^\varepsilon r_1}, 0)$ et celles qui interviennent dans la restriction du domaine de positivité sont $\mathcal{H}_{(0,r_2)}$ et $\mathcal{H}_{(r_1,r_2)}$.

□

Théorème 3.5.4 *Pour tout point de la frontière du domaine $\bar{\mathcal{D}}_r$, définie dans le Théorème 3.5.3, nous avons les inégalités de Markov-Bernstein suivantes, $\forall p \in \mathcal{Q}_r$:*

$$\|p\|_{L^2(\Omega^s; \mu_0)}^2 \geq -\lambda_{1,0}(\partial^{\lambda_{1,0}} p, \partial^{\lambda_{1,0}} p)_{L^2(\Omega^s; \mu_{1,0})} - \lambda_{0,1}(\partial^{\lambda_{0,1}} p, \partial^{\lambda_{0,1}} p)_{L^2(\Omega^s; \mu_{0,1})} \quad (3.73)$$

L'égalité est atteinte pour $p = cP_r$.

Corollaire 3.5.5 $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire le domaine où a_λ est non-négative pour tout polynôme de \mathcal{P}^2 , est l'othant positif.

Démonstration.

Il suffit de faire tendre r_1, r_2 vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(r_1,0)} &\rightarrow \{\lambda_1 = 0\}, \\ \mathcal{H}_{(0,r_2)} &\rightarrow \{\lambda_2 = 0\}, \\ \mathcal{H}_{(r_1,r_2)} &\rightarrow \{\lambda_1 + \lambda_2 = 0\}. \end{aligned}$$

□

Problème 1

Les inégalités pour la mesure d'Hermite et Laguerre-Sonin quand $s > 2$?

Pour $s > 2$, la démarche pourrait être la même, mais, au lieu de comparer des droites, nous aurons à manipuler des hyperplans.

Problème 2

Les inégalités dans le cas de la mesure de Jacobi ?

3.5.2 Les inégalités de type Landau-Kolmogorov pour $N > 2$ dans le cas Hermite et Laguerre-Sonin

Dans le cas Homogène il serait intéressant d'avoir des inégalités de type Landau-Kolmogorov pour un nombre N quelconque de normes, au moins pour deux variables.

Dans ce cas les hyperplans \mathcal{H}_m sont donnés par

$$\mathcal{H}_m = 1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j \sum_{|\nu|=j} C_m^{(\nu)} = 0.$$

On notera $E_m^{(j)}$ le terme $\sum_{|\nu|=j} C_m^{(\nu)}$.

En s'inspirant de ce qui a été fait dans le cas $N = 2$ et dans le cas où on avait une seule variable, on s'intéresse à la relation de construction des \mathcal{H}_m tels que $|m|$ est fixé.

Nous avons fait la conjecture suivante :

Conjecture

1. $E_m^{(2\ell+1)}$ s'exprime en fonction des $E_m^{(i)}$, $i = \ell, \dots, 2\ell$ avec des coefficients ne dépendant que de $|m|$.
2. $E_m^{(2\ell)}$ ne peut pas s'exprimer en fonction des $E_m^{(i)}$ précédents avec des coefficients ne dépendant que de $|m|$.

Cette propriété a été vérifiée jusqu'à un certain ordre, mais nous n'avons pas de démonstration dans le cas général.

Si la conjecture est vérifiée, nous aurons les résultats suivants :

Lemme 3.5.6 Soit $\mathcal{M}^{(N)}$ la matrice suivante

$$\mathcal{M}^{(N)} = \begin{pmatrix} 1 & E_{m_1}^{(1)} & \dots & E_{m_1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & E_{m_{N+1}}^{(1)} & \dots & E_{m_{N+1}}^{(N)} \end{pmatrix}$$

avec $|m_j| = \rho$, $j = 1, \dots, N+1$. Alors nous avons,

$$\text{le rang de } \mathcal{M}^{(N)} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1.$$

Démonstration.

On fait une démonstration par récurrence en séparant le cas N pair du cas N impair.

On vérifie aisément que les rangs de $\mathcal{M}^{(2)}$ et de $\mathcal{M}^{(3)}$ sont égaux à 2, et on suppose la propriété vraie jusqu'à l'ordre $N-1$.

Nous avons

$$\text{rang } \mathcal{M}^{(N-1)} \leq \text{rang } \mathcal{M}^{(N)} \leq \text{rang } \mathcal{M}^{(N-1)} + 1.$$

– Si N est pair,

$E_{m_j}^{(N)}$ ne peut pas être exprimé en fonction des $E_{m_j}^{(i)}$ précédents avec des coefficients ne dépendant que de $|m_j|$. Par conséquent, la dernière colonne est indépendante des autres et donc le rang de $\mathcal{M}^{(n)} = \text{rang } \mathcal{M}^{(N-1)} + 1 = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2 = \frac{N}{2} + 1$.

- Si N est impair, $E_{m_j}^{(N)}$ s'exprime en fonction des $E_{m_j}^{(i)}$, $i = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \dots, 2 \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ avec des coefficients ne dépendant que de $|m_j|$. Dans ce cas, la combinaison linéaire qui donne $E_{m_j}^{(N)}$ donne aussi la dernière colonne en fonction des précédentes. Alors le rang de $\mathcal{M}^{(n)} = \text{rang } \mathcal{M}^{(N-1)} = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$.

□

Corollaire 3.5.7 *Tous les hyperplans \mathcal{H}_m pour $|m|$ fixé passent par la même variété linéaire de dimension $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$.*

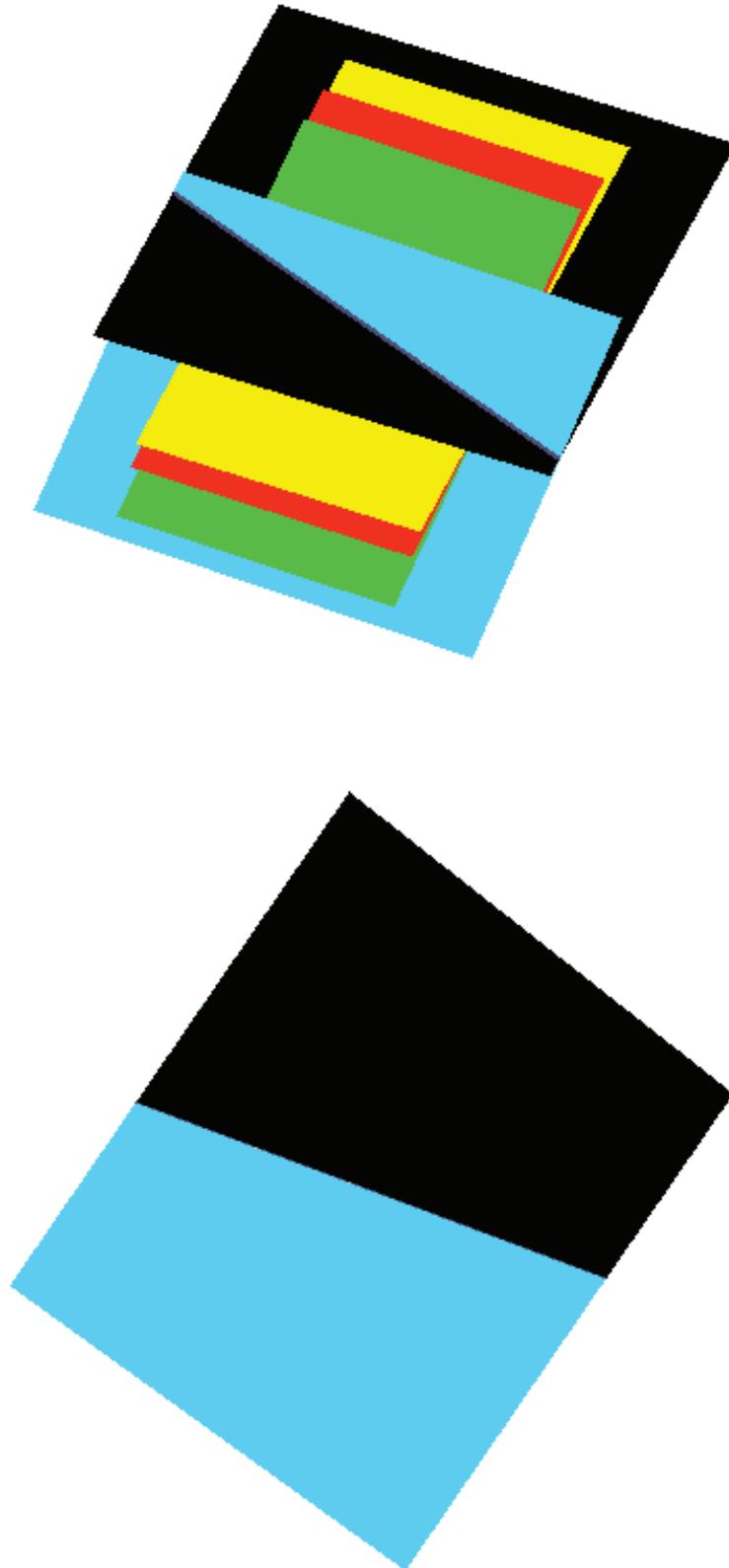
Démonstration.

La dimension de la variété linéaire commune est donnée par $N - \text{rang } \mathcal{M}^{(N)}$. Or le rang de $\mathcal{M}^{(N)}$ est donné dans le lemme précédent. Donc la dimension est $N - (\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1) = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$.

□

Par exemple, pour $N = 2$, la variété commune est un point. Pour $N = 3$ ou $N = 4$, la variété commune est une droite ...

Dans la figure suivante (Figure 3.9), on voit que, pour $N = 3$ et $s = 2$ dans le cas de la mesure de Laguerre-Sonin, tous les hyperplans $\mathcal{H}_{(j_1, j_2)}$ tels que $j_1 + j_2 = 8$ passent par la même droite. En effet, d'après les deux vues représentées, on en déduit que tous les plans sont compris entre le noir et le bleu qui correspondent à $\mathcal{H}_{(4,4)}$ et $\mathcal{H}_{(0,8)}$.

FIGURE 3.9 – Les hyperplans $\mathcal{H}_{(j_1, j_2)}$ tels que $j_1 + j_2 = 8$ pour $N = 3$ et $s = 2$.

Problème 1

Montrer la conjecture.

Problème 2

Quels sont les hyperplans \mathcal{H}_m qui interviennent dans la restriction du domaine de positivité pour un $|m|$ fixé.

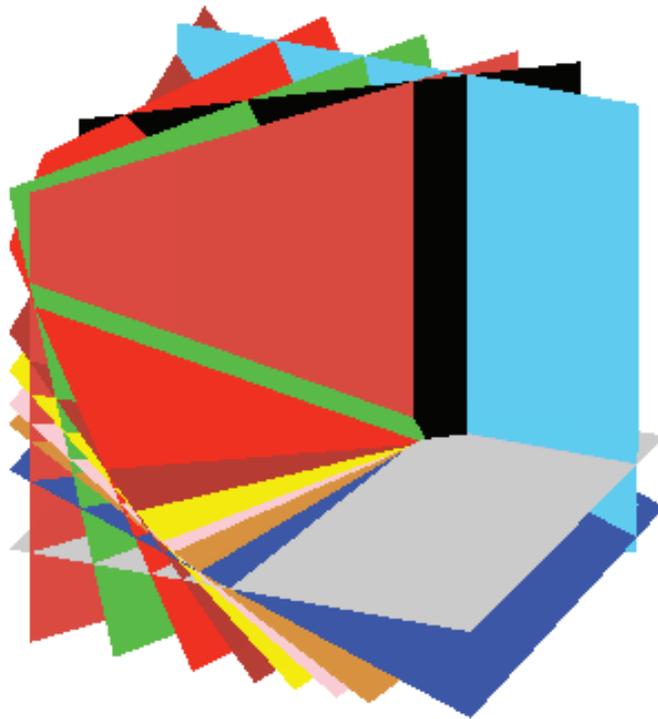


FIGURE 3.10 – Le domaine de positivité $\bar{\mathcal{D}}_8$ pour $N = 3$ et $s = 2$.

Sans l'hyperplan $\mathcal{H}_{(0,2)}$, la frontière du domaine $\bar{\mathcal{D}}_8$ ressemble fortement à ce qu'on avait en une variable (voir la Figure 2.5). De plus ce sont les mêmes hyperplans $\mathcal{H}_{(j_1, j_2)}$ qui interviennent que pour le cas $N = 2$, c'est-à-dire ceux qui correspondent à $\mathcal{H}_{|\ell|}^*$, pour $|\ell| = 1, \dots, 8$ et $\hat{\mathcal{H}}_8$. Mais, à cause de la position de $\mathcal{H}_{(0,2)}$, l'étude se complique. Et on ignore s'il est possible d'exploiter ces résultats numériques pour étendre nos inégalités à un nombre quelconque de dérivées.

Problème 3

Définir le domaine de positivité pour N quelconque et s quelconque.

3.5.3 La mesure de Jacobi

L'étude du cas Jacobi s'est avérée plus compliquée que celle d'Hermite et Laguerre-Sonin, car on n'a plus cette propriété où les hyperplans \mathcal{H}_m pour un $|m|$ fixé passent par la même variété (point pour $N = 2$). Donc on n'a pu donner des inégalités que pour $p \in Q_r$. Leur intérêt est très limité, car on ne sait pas quels sont les points qui restent dans \mathcal{D} , ce qui nous aurait permis d'étendre les résultats aux fonctions de l'espace de Sobolev.

Problème 1

Trouver la frontière du domaine de positivité pour les polynômes de \mathcal{P}_r et donner $\bar{\mathcal{D}}$.

3.5.4 Autres problèmes**Problème 1**

Donner le domaine de positivité dans le cas non homogène avec un nombre quelconque de dérivées partielles.

Problème 2

Étudier le cas général où $\mu_0 = \mu_\nu = \mu$, $\nu \in \mathbb{N}^s$, pour le cas Laguerre-Sonin et le cas Jacobi.

Bibliographie

- [1] L. Abbas and A. Draux, Landau-Kolmogorov type inequalities for the Hermite and closely connected measures, (submitted).
- [2] L. Abbas and A. Draux, Markov-Bernstein and Landau-Kolmogorov type inequalities in several variables for the Hermite and closely connected measures, (submitted).
- [3] L. Abbas and A. Draux, Landau-Kolmogorov type inequalities in several variables for the Jacobi measure, (submitted).
- [4] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables , *U.S. Government Printing Office* (1972).
- [5] R.P. Agarwal and G.V. Milovanović *One characterization of classical orthogonal polynomials* (1991) 1-4.
- [6] R.P. Agarwal, G.V. Milovanović, Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials, *Appl. Math. Comp.* **128** (2002) 151-166.
- [7] C. R. R. Alves and D. K. Dimitrov, Landau and Kolmogoroff type polynomial inequalities, *Journal of Inequalities and Applications* **4** (1999) 327-338.
- [8] E. X. L. De Andrade, D. K. Dimitrov, and L. E. De Sousa, Landau and Kolmogoroff type polynomial inequalities II, *Archives of Inequalities and Applications* **2** (2004) 339-353.
- [9] E. A. Az-Zo'bi, A new generalization of Bojanov Varma's inequality, *Int. Journal of Math. Analysis n° 14* **3** (2009), 667-671.
- [10] S. N. Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné, *Mém. Acad. Roy. Belgique (2)* **4** (1912) 1-103.
- [11] B. Bojanov and N. Naidenov, An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos, *J. Anal. Math.* **78** (1999) 263-280.
- [12] B. D. Bojanov and A. K. Varma, On a polynomial inequality of Kolmogoroff's type, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996) 491-496.
- [13] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, *Gordon and Breach*, New York (1978).
- [14] A. Draux, Improvement of the formal and numerical estimation of the constant in some Markov-Bernstein inequalities, *Numerical Algorithms* **24** (2000) 31-58.
- [15] A. Draux and C. El Hami, Hermite-Sobolev and closely connected orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **81** (1997) 165-179.

- [16] A. Draux and C. Elhami, On the positivity of some bilinear functionals in Sobolev spaces, *J. Comp. Appl. Math.* **106** (1999) 203-243.
- [17] A. Draux and V. Kaliaguin, Markov-Bernstein inequalities for generalized Hermite weight, *East Journal on Approximations* (2006) 1-23.
- [18] R. Dautray and J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, *Vol. 4. Méthodes variationnelles*, Masson, Paris 1988.
- [19] P. Dörfler, New inequalities of Markov type, *SIAM J. Math. Ana.* **18** (1987) 490-494.
- [20] C. Dunkl and Y. Xu, Orthogonal polynomials of several variables, *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, Vol. 81, Combridge University Press 2001.
- [21] J. S. Dupuy Jr, Ph. D. Dissertation, University of Alabama , *University Microfilms International, Ann Arbor, Michigan* 1978.
- [22] P. Goetgheluck, Inégalité de Markov dans les ensembles effilés, *J. Approx. Theory* **30** (1980) 149.
- [23] A. Guessab and G. V. Milovanović, Weighted L^2 -Analogues of Bernstein's Inequalities and Classical Orthogonal Polynomials, *J. Math. Ana. Appl.* **182** (1994) 244-249.
- [24] V. V. Gusev, Derivative functionals of an algebraic polynomial and V. A. Markov's theore, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.* **25** (1961) 371-384.
- [25] J. Hadamard, Sur le module maximum d'une fonction et ses dérivées, *C. R. Acad. Sci. Paris* **41** (1914) 68-72.
- [26] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, G Pólya, Inequalities, 2nd edn. *Combridge University Pres* (1994).
- [27] A. Kolmogorov, On inequalities between upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval, *Uchen. Zap. Moskov. Gos. Univ. Mat.* **30** (in russian) (1939) 3-16.
- [28] A. Kolmogorov, On inequalities between upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval , *Amer. Soc. Transl. Ser. 1-2, Amer. Math. Soc., Providence, RI (English transl.)* (1962) 233-243.
- [29] N. P. Kupov, Kolmogorov estimates for derivatives in $L^2([0, \infty))$, *Proc. Steklov Inst. Math.* **138** (English transl.) (1975) 101-125.
- [30] O. D. Kellogg, On bounded polynomials in several variables, *Math. Z.* **27** (1927) 55-65.
- [31] A. Kroó, On Bernstein-Markov-type inequalities for multivariate polynomials in L_q -norm, *J. Approx. Theory* **159** (2009) 85-96.
- [32] A. Kroó and J. Szabados, On the exact L_2 Markov inequality on some unbounded domains in R^d , *J. Approx. Theory* **164** (2012) 391-405.
- [33] E. Landau, Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen, *Proc. London Math. Soc. (2)* **13** (1913) 43-49.
- [34] Ju. I. Ljubić, On inequalities between the powers of a linear operator, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **24** (1960) 825-864.

- [35] Ju. I. Ljubić, On inequalities between the powers of a linear operator, *Amer. Math. Soc. Transl.* **40** (1964) n° 2, 39-84.
- [36] F. Marcellàn and M. Alfaro and M.L. Rezola, Orthogonal polynomials on Sobolev spaces : old and new directions, *J. Comp. Appl. Math.* **48** (1993) 113-131.
- [37] A. A. Markov, On a problem of D.I. Mendeleev, *Zap. Imp. Akad. Nauk., St. Petersburg* **62** (in russian) (1889) 1-24.
- [38] V. A. Markov, On functions deviating least from zero in a given interval, *Izdat. Imp. Akad. Nauk., St. Petersburg* (1892) (in russian).
- [39] V. A. Markov, Über Polynome die in einem gegebenen Intervall möglichst wenig von Null abweiche, *Math. Ann.* **77** (german transl.) (1916) 213-258.
- [40] P. Maroni, Prolègomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques, *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)*. **Vol.CIL**, (1987) 165-184.
- [41] D. Mendeleev, Investigation of aqueous solutions based on specific gravity, *St. Petersburg (in russian)* (1987).
- [42] G. V. Milovanović, Letter to R. Agarwal, *20 october 1987*.
- [43] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović and Th. M. Rassias, Topics in polynomials : extremal problems, inequalities, zeros, *World Scientific, Singapore* 1994.
- [44] H.-J Rack, A generalisation of an inequality of V. Markov to multivariate polynomials, *J. Approx. Theory* **35** (1982) 94-97.
- [45] A. Ronveaux, Polynômes orthogonaux dont les polynômes dérivés sont quasi-orthogonaux, *C. R. Acad. Sc. Paris, t.* **289** (1979) 433-436.
- [46] E. Schmidt, Über die nebst ihren Ableitungen orthogonalen Polynomensysteme und das zugehörige Extremum, *Math. Ann.* **119** (1944) 165-204.
- [47] I. J. Schoenberg and A. Caravetta, Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the half line, *Proc. of the Intern Conference of constructive function theory, Varna* (1972) 297-308.
- [48] A. Shadrin, Twelve Proofs of the Markov Inequality, *APPROXIMATION THEORY : A volume dedicated to Borislav Bojanov, (D. K. Dimitrov et al, Eds), Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia* (2004) 233-299.
- [49] L. F. Shampine, Asymptotic L_2 Inequalities of Markoff Type, *Ph.D. Thesis, California Institute of Thechnologie, Pasadena* (1964).
- [50] Yu. G. Bosse (G. E. Shilov), On inequalities between derivatives, *Sb. Rabot Stud. Nauch. Kruzhkov MGU (in russian)* **1** (1937) 17-27.
- [51] J. A. Shohat, , *Trans. Amer. Math. Soc.* **42** (1937) 461.
- [52] E. M. Stein, Functions of exponential type, *Ann. of Math. (2)* **65** (1957) 582-592 .
- [53] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, A.M.S. Colloquium publications, vol. XXIII, Providence (1939).
- [54] P. Turán, Remark on a theorem of Erhard Schmidt, *Mathematica* **2** **25** (1960) 373-378.

- [55] A. K. Varma , A new characterization of Hermite polynomials, *Acta Math. Hungar.* **49** (1987) 169-172.
- [56] D. R. Wilhelmsen, A Markov inequality in several dimensions, *J. Approx. Theory* **11** (1974) 216-220.

Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude des inégalités de type Landau-Kolmogorov en normes L^2 . Les mesures utilisées sont celles d'Hermitte, de Laguerre-Sonin et de Jacobi. Ces inégalités sont obtenues en utilisant une méthode variationnelle. Elles font intervenir la norme d'un polynôme p et celles de ses dérivées $p^{(i)}$, elles sont de la forme suivante :

$$\|p\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 + \sum_{i \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_i \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \geq \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i) \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2, \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

où $I^+ = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i > 0\}$, $I^- = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i < 0\}$, I^+ et $I^- \subset \{1, 2, \dots, N-1\}$ avec $N \geq 2$ et $\lambda_N > 0$.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux inégalités en une variable réelle. Nous montrons comment construire le domaine \mathcal{D} où une certaine forme bilinéaire est définie positive ce qui nous permet d'avoir les constantes λ_i . Ensuite, nous généralisons ces résultats aux polynômes de plusieurs variables réelles en utilisant le produit tensoriel dans L^2 et en faisant intervenir au plus les dérivées partielles secondes. Pour les mesures d'Hermitte et de Laguerre-Sonin, ces inégalités sont étendues à toutes les fonctions d'un espace de Sobolev. Pour la mesure de Jacobi nous donnons des inégalités uniquement pour les polynômes d'un degré fixé par rapport à chaque variable.

Mots-clés : Inégalités de type Landau-Kolmogorov, Inégalités de Markov-Bernstein, Mesure d'Hermitte, Mesure de Laguerre-Sonin, Mesure de Jacobi, Polynômes orthogonaux, Méthodes variationnelles, Espace de Sobolev, plusieurs variables.

Abstract

This thesis is devoted to Landau-Kolmogorov type inequalities in L^2 norm. The measures which are used, are the Hermite, the Laguerre-Sonin and the Jacobi ones. These inequalities are obtained by using a variational method and they involve the square norms of a polynomial p and some of its derivatives $p^{(i)}$.

$$\|p\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 + \sum_{i \in I^+ \cup \{N\}} \lambda_i \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2 \geq \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i) \|p^{(i)}\|_{L^2(\Omega,\mu)}^2, \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

where $I^+ = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i > 0\}$, $I^- = \{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i < 0\}$, I^+ et $I^- \subset \{1, 2, \dots, N-1\}$ with $N \geq 2$ and $\lambda_N > 0$.

Initially, we focus on inequalities in one real variable that involve any number of norms. The corresponding constants are taken in the domain where a certain bilinear form is positive definite. Then we generalize these results to polynomials in several real variables using the tensor product in L^2 and involving at most the second partial derivatives. For the Hermite and Laguerre-Sonin cases, these inequalities are extended to all functions of a Sobolev space. For the Jacobi case, inequalities are given only for polynomials of degree fixed with respect to each variable.

Keywords : Landau-Kolmogorov type inequalities, Markov-Bernstein inequalities, Hermite measure, Laguerre-Sonin measure, Jacobi measure, orthogonal polynomials, variational method, Sobolev spaces, several variables.