Objets tressés : une étude unificatrice de structures algébriques et une catégorification des tresses virtuelles

Victoria LEBED
sous la direction de Marc ROSSO

Paris 7, IMJ

13 décembre 2012

structure algébrique sur un e.v. V	$\rightsquigarrow$	complexe $(V^{\otimes n}, d_n)$

e.v.	$\rightsquigarrow$	Koszul : $d_K(v_1 \ldots v_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varepsilon(v_i) v_1 \ldots \widehat{v_i} \ldots v_n$,
str. auto-distributive (=AD) : $(S, \quad \lhd : S \times S \to S)$ $(a \lhd b) \lhd c = (a \lhd c) \lhd (b \lhd c)$ $V = \Bbbk S$	$\rightsquigarrow$	distributive monoterme : $d_{AD}(a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (a_1 \lhd a_i, \ldots, a_{i-1} \lhd a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, rack : $d_r = d_{AD} - d_K$

Motivation

structure algébrique sur un e.v. V $\rightsquigarrow$ complexe $(V^{\otimes n}, d_n)$

algèbre associative unitaire (AAU) $\rightsquigarrow$ bar : $d_{bar}(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i v_1 \dots v_{i-1}(v_i \cdot v_{i+1}) v_{i+2} \dots v_n,$

algèbre de Leibniz unitaire : $(V, [\,], \mathbf{1})$
$$[v,[w,u]] = [[v,w],u] - [[v,u],w]$$
$$[\mathbf{1}, v] = [v, \mathbf{1}] = 0$$
$\rightsquigarrow$ Leibniz : $d_{Lei}(v_1 \dots v_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{j-1} v_1 \dots v_{i-1} [v_i, v_j] v_{i+1} \dots \widehat{v_j} \dots v_n.$

Les formules ont la même allure :

$$d_K(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varepsilon(v_i) v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_n,$$

$$d_{AD}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (a_1 \lhd a_i, \dots, a_{i-1} \lhd a_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$$d_{bar}(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i} v_1 \dots v_{i-1} (v_i \cdot v_{i+1}) v_{i+2} \dots v_n,$$

$$d_{Lei}(v_1 \dots v_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{j-1} v_1 \dots v_{i-1} [v_i, v_j] v_{i+1} \dots \widehat{v_j} \dots v_n.$$

Les formules ont la même allure :

$$d_K(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_n,$$

$$d_{AD}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (a_1 \lhd a_i, \dots, a_{i-1} \lhd a_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$$d_{bar}(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i} v_1 \dots v_{i-1} (v_i \cdot v_{i+1}) v_{i+2} \dots v_n,$$

$$d_{Lei}(v_1 \dots v_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{j-1} v_1 \dots v_{i-1} [v_i, v_j] v_{i+1} \dots \widehat{v_j} \dots v_n.$$

Une réponse tressée

Définition

Un e.v. *pré-tressé* est un e.v. V muni d'un *pré-tressage*, i.e. d'une application $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ qui satisfait

$$(\sigma \otimes \mathrm{Id}_V) \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes \mathrm{Id}_V) = (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes \mathrm{Id}_V) \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma). \tag{YB}$$

⚠ Le pré-tressage n'est pas inversible en général.

Une réponse tressée

Définition

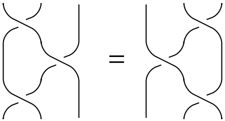
Un e.v. *pré-tressé* est un e.v. V muni d'un *pré-tressage*, i.e. d'une application $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ qui satisfait

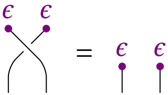
$$(\sigma \otimes \mathrm{Id}_V) \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes \mathrm{Id}_V) = (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes \mathrm{Id}_V) \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma). \tag{YB}$$

Définition

Un *caractère tressé* pour (V, σ) est une application $\epsilon : V \to \Bbbk$ qui satisfait

$$(\epsilon \otimes \epsilon) \circ \sigma = \epsilon \otimes \epsilon.$$





Une réponse tressée

str. algébrique sur V $\rightsquigarrow$ pré-tressage sur V $\longmapsto$ complexe $(V^{\otimes n}, d_n)$

$\rightsquigarrow$: construction à la main

$\longmapsto$: théorie homologique des e.v. pré-tressés

Exemple

structure	pre-tressage
e.v.	flip $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$
AD	$\sigma_{AD}(a,b) = (b, a \triangleleft b)$
AAU	$\sigma_{AAU}(v \otimes w) = \mathbf{1} \otimes v \cdot w$
ALU	$\sigma_{ALU}(v \otimes w) = w \otimes v + \mathbf{1} \otimes [v,w]$

L'homologie tressée

Théorème

Soient ϵ, ζ deux caractères tressés pour (V,σ). Alors $T(V)$ peut être munie d'une structure de bicomplexe comme suit :

$$V^{\otimes n} \to V^{\otimes (n-1)}$$

$$^{\epsilon}d_n = (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_{n-1}) \circ \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{1,n-1}$$

$$d_n^{\zeta} = (-1)^{n-1}(\mathrm{Id}_{n-1} \otimes \zeta) \circ \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{n-1,1}$$

Ici $\underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}$ est la *comultiplication de battage quantique*.

L'homologie tressée

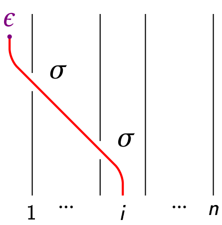
Théorème

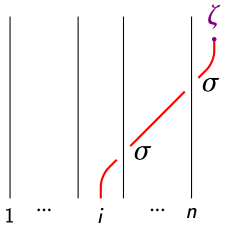
Soient ϵ,ζ deux caractères tressés pour (V,σ). Alors $T(V)$ peut être munie d'une structure de bicomplexe comme suit :

$$V^{\otimes n} \to V^{\otimes (n-1)}$$

$$^{\epsilon}d_n = (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_{n-1}) \circ \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{1,n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, {}^{\epsilon}d_{n;i}$$

$$d_n^{\zeta} = (-1)^{n-1} (\mathrm{Id}_{n-1} \otimes \zeta) \circ \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{n-1,1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, d_{n;i}^{\zeta}$$

$^{\epsilon}d_{n;i} =$ 

$d_{n;i}^{\zeta} =$ 

L'homologie tressée

Remarque

- une famille de différentielles, souvent compatibles entre elles ;
- caractère : $(\epsilon \otimes \epsilon) \circ \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{1,1} = 0$;
- signes "cachés" ;
- relations "locales" ;
- opérations homologiques ;
- l'hyper-bord de Loday :

$$V^{\otimes n} \to V^{\otimes(n-k)},$$

$${}^{\epsilon,(k)}d_n = (\epsilon^{\otimes k} \otimes \mathrm{Id}_{n-k}) \circ \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{k,n-k}$$

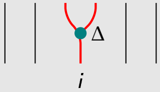
$$d_n^{\epsilon,(k)} = (-1)^{kn-\frac{k(k+1)}{2}} (\mathrm{Id}_{n-k} \otimes \epsilon^{\otimes k}) \circ \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{n-k,k}$$

L'homologie tressée

Théorème

Les $d_{n;i}$ forment une structure ***pré-bisimpliciale****, même* ***faiblement bisimpliciale*** *si (V,σ) est en plus muni d'une "bonne" comultiplication Δ, avec comme dégénérescences*

$$s_{n;i} = \mathrm{Id}_{i-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}_{n-i} =$$



$\Longrightarrow$ On a un **(bi)complexe normalisé**.

Exemple

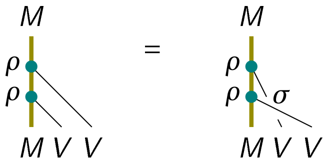
structure	une bonne comultiplication
e.v.	une Δ coassociative cocommutative
AD	$\Delta_{AD}(a) = (a,a)$ si $a \lhd a = a \; \forall a \in S$
AAU	$\Delta_{AAU}(v) = \mathbf{1} \otimes v$
ALU	$\Delta_{ALU}(v) = \mathbf{1} \otimes v + v \otimes \mathbf{1}$

Direction 1 : coefficients

Définition

Un *module tressé à droite* sur (V,σ) est un e.v. M muni d'une application $\rho : M \otimes V \to M$ qui satisfait

$$\rho \circ (\rho \otimes \mathrm{Id}_V) = \rho \circ (\rho \otimes \mathrm{Id}_V) \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \sigma) : M \otimes V \otimes V \to M.$$



Exemple

Pour $M = \mathbb{k}$, module tressé à droite = module tressé à gauche = caractère.

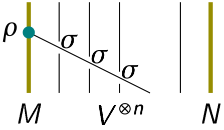
Direction 1 : coefficients

Théorème

Soient (M,ρ) (resp. (N,λ)) un module tressé à droite (resp. à gauche) pour (V,σ). Alors $M\otimes T(V)\otimes N$ peut être munie d'une structure de bicomplexe comme suit :

$$^{\rho}d_n = (\rho\otimes \mathrm{Id}_{n-1}\otimes \mathrm{Id}_N)\circ(\mathrm{Id}_M\otimes \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{1,n-1}\otimes \mathrm{Id}_N)$$

$$d_n^{\lambda} = (-1)^{n-1}(\mathrm{Id}_M\otimes \mathrm{Id}_{n-1}\otimes\lambda)\circ(\mathrm{Id}_M\otimes \underset{-\sigma}{\overline{\sqcup\!\sqcup}}^{n-1,1}\otimes \mathrm{Id}_N)$$



Direction 2 : systèmes tressés

Définition

Un *système tressé* est une famille finie d'e.v. $(V_1,\ldots,V_r)$ munie d'une collection d'applications $\sigma_{i,j} : V_i \otimes V_j \to V_j \otimes V_i \quad \forall\, \underline{i \leqslant j}$, qui satisfont (YB) sur tous les $V_i \otimes V_j \otimes V_k$ avec $\underline{i \leqslant j \leqslant k}$.

Définition

Un *module multi-tressé* sur $(\overline{V},\overline{\sigma})$ est un e.v. M muni d'une collection d'applications $\rho_i : M \otimes V_i \to M$ qui satisfont

$$\rho_j \circ (\rho_i \otimes \mathrm{Id}_j) = \rho_i \circ (\rho_j \otimes \mathrm{Id}_i) \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \sigma_{i,j}) : M \otimes V_i \otimes V_j \to M \qquad \forall\, \underline{i \leqslant j}.$$

Théorème

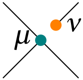
Soient $(M,\overline{\rho})$ (resp. $(N,\overline{\lambda})$) un module multi-tressé à droite (resp. à gauche) sur $(\overline{V},\overline{\sigma})$. Alors $M \otimes T(V_1) \otimes \cdots \otimes T(V_r) \otimes N$ peut être munie d'une structure de bicomplexe.

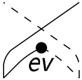
Exemple

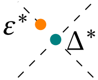
- La structure de **bigèbre** de dimension finie est encodée par le système tressé suivant :

$$\overline{H}_2 := (H, H^*; \sigma_{1,1} = \sigma_{AAU}(H), \sigma_{2,2} = \sigma_{AAU}(H^*),$$
$$\sigma_{1,2}(h \otimes l) = l_1(h_2)\, l_2 \otimes h_1).$$

- $\overline{\mathbf{Mod}}_{\overline{H}_2} \simeq \mathbf{Mod}_H^H$.
- $\sigma_{1,2}$ est inversible ssi H est une algèbre de Hopf.
- On retrouve la (co)homologie de Gerstenhaber-Schack.

$\sigma_{H,H} =$ 

,
$\sigma_{H,H^*} =$ 

,
$\sigma_{H^*,H^*} =$ 

.

Exemple

Produits (bi-)croisés / smash.

Exemple

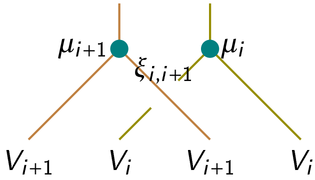
La structure d'**algèbre de Poisson** est encodée par le système tressé suivant :

$$(V, V; \sigma_{1,1} = \sigma_{AAU}, \sigma_{2,2} = \sigma_{ALU} = \sigma_{1,2}).$$

Théorème

Soient $V_1, \ldots, V_r$ des AAU munies d'une collection d'applications $\xi_{i,j} : V_i \otimes V_j \to V_j \otimes V_i \ \forall\, \underline{i < j}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. (tressée) *Les $\xi_{i,j}$ complétées par $\sigma_{i,i} := \sigma_{AAU}(V_i)$ définissent un système tressé sur $\overline{V}$.*
2. (algébrique) *Les $\xi_{i,j}$ permettent de munir $\overleftarrow{V} := V_r \otimes V_{r-1} \otimes \cdots \otimes V_1$ d'une structure d'AAU, appelée produit tensoriel multi-tressé.*



⚠ L'ordre inverse des composantes dans $\overleftarrow{V}$.

Produits tensoriels multi-tressés d'algèbres

Proposition

$$\overline{\mathbf{Mod}}_{(V_1,\dots,V_r)} \simeq \mathbf{Mod}_{V_r \underset{\xi}{\otimes} V_{r-1} \underset{\xi}{\otimes} \dots \underset{\xi}{\otimes} V_1}.$$

Proposition

On a une action partielle explicite de S_r sur les systèmes tressés à r composantes, et une S_r-action compatible sur les produits tensoriels multi-tressés d'algèbres.

(Bi)modules de Hopf

Exemple

$$\text{Modules de Hopf} \simeq \overline{\mathbf{Mod}}_{\overline{H}_2} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathscr{H}(H)},$$

où $\mathscr{H}(H)$ est le *double de Heisenberg* de H.

Exemple

- $$\text{Bimodules de Hopf} \simeq \overline{\mathbf{Mod}}_{\overline{H}_4} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathscr{X}(H)}, \text{ où}$$
  $$\mathscr{X}(H) := ((H^*)^{op} \otimes H^*) \underset{\sigma}{\otimes} (H^{op} \otimes H)$$
  est l'*algèbre $\mathscr{X}$* de la bigèbre H (Rosso-Cibils).
- Si H est une algèbre de Hopf, alors S_4 "agit" sur $\overline{H}_4$, et donc sur $\mathscr{X}(H)$.
  $\Longrightarrow$ On a $4! = 24$ algèbres 2 à 2 isomorphes, y compris les algèbres $\mathscr{Y}$ et $\mathscr{Z}$ (Panaite).

Applications homologiques

Proposition

- *$M \otimes T(V_1) \otimes \cdots \otimes T(V_s)$ est un module multi-tressé sur $(V_s, \ldots, V_r)$.*
- *Les différentielles tressées préservent cette structure.*

Exemple

Le complexe bar avec des coefficients dans un bimodule de Hopf est un complexe de bimodules de Hopf.

Exemple

Modules YD : deux interprétations.

1. Comme coefficients :
$$ {}_H\mathbf{YD}^H \simeq \overline{\mathbf{Mod}}_{(H^{op},H^*;\dots)} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathscr{D}(H)}, $$
où $\mathscr{D}(H) := H^* \underset{\sigma}{\otimes} H^{op}$ est le *double de Drinfel'd* de H.
2. Comme composantes du système tressé $(H, M_2, \dots, M_{r-1}, H^*)$, avec le **pré-tressage de Woronowicz** comme $\sigma_{i,j}$ pour $i<j$.

   $\Longrightarrow$ Structures de produit tensoriel sur ${}_H\mathbf{YD}^H$.

Direction 3 : catégorification

Applications

- super-versions
- co-versions
- versions miroir

Problème

Définition catégorique de l'auto-distributivité :

$$(a \lhd b) \lhd c = (a \lhd c) \lhd (b \lhd c)$$

Problème

Définition catégorique de l'auto-distributivité :

$$(a \lhd b) \lhd c = (a \lhd \underbrace{c) \lhd (b}_{\text{tressage}} \lhd c)$$

Auto-distributivité catégorique

Problème

Définition catégorique de l'auto-distributivité :

tressage

$$(a \lhd b) \lhd c = (a \lhd c) \lhd (b \lhd c)$$

comultiplication

Motivations “virtuelles”

Théorème

La catégorie des tresses virtuelles est équivalente à la catégorie symétrique libre engendrée par un objet tressé.

Applications

- représentations
- structures AD virtuelles (Manturov)
- représentation de Burau tordue

Motivations “virtuelles”

Théorème

La catégorie des tresses virtuelles est équivalente à la catégorie symétrique libre engendrée par un objet tressé.

niveau catégorique	“symétressage” global sur $\mathscr{C}$	tressage local sur V
niveau VB_n	partie S_n	partie B_n
niveau ADC	$\mathscr{C}$ symétrique	$\lhd, \Delta \rightsquigarrow \sigma_{ADC}$

Auto-distributivité catégorique

Définition

L'auto-distributivité dans une catégorie symétrique $(\mathscr{C}, c)$:

ADC =	comultiplic-n Δ	+	opération binaire $\triangleleft$
	➾coassociative, ➾"presque" cocomutative		➾AD, avec Δ comme diagonale, ➾respecte Δ, dans le sens de bigèbre tressée

Proposition

$\sigma_{ADC} := (\mathrm{Id}_V \otimes \triangleleft) \circ (c \otimes \mathrm{Id}_V) \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \Delta)$ *est un pré-tressage.*

Cadeau

Une théorie homologique pour les objets ADC.

Exemple

Δ	interprétation de l'ADC
$V = \Bbbk S,\ \Delta(a) = (a,a)$	(ADC) $\Leftrightarrow$ (AD)
$\Delta = \nu \otimes \lhd$	(ADC) $\Leftrightarrow$ (Ass)
$\Delta = \nu \otimes \lhd + \lhd \otimes \nu$	(ADC) $\Leftrightarrow$ (Lei)

Exemple

Pour une algèbre de Hopf H, $\Delta = \Delta_H$ et $\lhd = Adj$ munissent H d'une structure ADC.

À faire

- homologies cycliques ;
- structure de Poisson ;
- complexe de Chevalley-Eilenberg comme complexe normalisé ;
- liens avec les opérades ;
- systèmes AD et G-familles de quandles ;
- filtrations sur le sous-complexe dégénéré

Merci !

Joyeuses fêtes !!!