



**HAL**  
open science

# Processus cohérents et applications des phénomènes de lumière lente et rapide dans l'hélium métastable à température ambiante

Thomas Lauprêtre

► **To cite this version:**

Thomas Lauprêtre. Processus cohérents et applications des phénomènes de lumière lente et rapide dans l'hélium métastable à température ambiante. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. Français. NNT : 2012PA112287 . tel-00772326

**HAL Id: tel-00772326**

**<https://theses.hal.science/tel-00772326>**

Submitted on 10 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
ECOLE DOCTORALE ONDES ET MATIÈRE  
LABORATOIRE AIMÉ COTTON

DISCIPLINE : PHYSIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 23/11/2012

par

Thomas Lauprêtre

**Processus cohérents  
et applications des phénomènes de lumière lente et rapide  
dans l'hélium métastable à température ambiante**

Directeur de thèse M. Fabien Bretenaker

Directeur de recherche LAC

**Composition du jury :**

<b>Président du jury</b>	M. Christoph Westbrook	Directeur de recherche	LCFIO
<b>Rapporteurs</b>	M. Mohamed Aziz Bouchene	Professeur	IRSAMC-LCAR
	M. Arnaud Landragin	Directeur de recherche	SYRTE
<b>Examineurs</b>	M. Yannick Dumeige	Maître de conférences	ENSSAT
	M. Anders Kastberg	Professeur	LPMC
	M. Julien Laurat	Maître de conférences	LKB
<b>Membres invités</b>	M. Fabien Bretenaker	Directeur de recherche	LAC
	Mme Fabienne Goldfarb	Maître de conférences	LAC



---

## Remerciements

C'est en 2009 lors d'un stage de M2 que cette aventure a commencé au laboratoire Aimé Cotton. La décision de poursuivre en thèse ce projet a été prise très rapidement, et j'aurai au total passé plus de trois ans et demi à m'y consacrer. C'est donc un cycle entier qui s'achève avec la publication de ce manuscrit, et les nombreuses rencontres et interactions ayant eu lieu durant cette période nécessitent quelques mots.

Je commence par remercier grandement mes deux chefs, à savoir Fabienne Goldfarb et Fabien Bretenaker, pour m'avoir fait confiance en me remettant le fonctionnement de la manip entre les mains. Leurs connaissances étendues associées à des points de vue respectifs différents auront largement contribué à ma compréhension des phénomènes mis en jeu. Malgré ce que pourra en dire Fabienne, souvent prise par ses enseignements et ayant dû partir en congé maternité durant la seconde année, il a toujours été possible de trouver réponse à mes questions et d'avancer grâce à leur présence régulière. Quelques phrases échangées au détour d'un couloir sont parfois suffisantes à débloquer une réflexion. Mais j'insisterai tout particulièrement sur leur grande sympathie, qui a permis d'assurer une très bonne ambiance de travail tout au long de cette thèse. Autour d'un verre de vin et d'un plateau de fromage lors de la parution d'un article, sirotant quelques bières belges autour d'un barbecue, autant de petits moments agréables ponctuant ces trois années.

Je remercie ensuite l'ensemble du personnel du laboratoire. Les techniciens des ateliers de mécanique et d'électronique, sans lesquels les manip avanceraient encore plus lentement. L'administration également, dont la lourde tâche comprend entre autre la gestion des très nombreuses commandes.

Je souhaite ensuite remercier les différents collaborateurs avec qui j'ai eu l'occasion de travailler durant cette période. A commencer par nos proches collègues indiens, Santosh Kumar et Rupa Ghosh. J'ajouterais également Hema Ramachandran ainsi que Subhasish Dutta Gupta, qui m'ont très gentiment accueilli lors de mon voyage en Inde, et Vishwa Pal avec qui nous avons passé de très bons moments accompagnés de Santosh. C'est ensuite au tour des collègues de Thalès, Perrine Berger et Sylvain Schwartz, que je remercie pour les discussions efficaces et conviviales qui auront grandement contribué à l'avancée de ces travaux.

Je remercie enfin tous les membres du jury, et en particulier les rapporteurs, pour leur intérêt porté à ces travaux et pour avoir lu ce manuscrit avec beaucoup d'attention.

---

Mais la vie au laboratoire durant ces trois ans et demi ne s'est pas limitée qu'à des relations de travail. Le Grand orchestre du laboratoire Aimé Cotton (ou Grolac pour les intimes), dont je salue tous les membres et particulièrement les deux leaders qu'ont été Anne Crubellier et Jean-François Wyart, a été l'occasion de ressortir mon saxophone. Même si les répétitions ont parfois pu être un peu chaotique, nous avons finalement réussi à nous produire lors d'évènements majeurs tels que l'AG ou la Flac.

Je remercie d'ailleurs Vincent Carrat, entre autres, pour avoir organisé avec moi cette magnifique fête du laboratoire qu'a été la Flac 2010. Incomparable avec la Flac 2012, dont je remercie bien entendu les organisateurs Héloïse Linget et Guyve Khalili, ainsi que tous les musiciens grandioses menés par Paul Huillery.

Je salue aussi l'initiative de Robert-Christopher Tongning d'avoir organisé un interlude sportif dans la semaine avec le basket du jeudi, et je n'oublierai pas les longues discussions de bureau avec Matthieu Bonarota, dont la musique était un sujet récurrent au grand regret de nos collègues. Je salue aussi tous les membres passés et présents du groupe de midi, ainsi que Christophe Siour et Floréal Prats, à qui je souhaite un bon rétablissement.

Je tiens également à remercier Albert et Virginie pour le petit guichet du vendredi soir, pouvant parfois s'éterniser en la bonne compagnie de Hans Lignier.

J'en ai certainement oublié et je m'en excuse, mais je finis par remercier ma famille et mes amis qui auront toujours été présents durant ces trois années.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>A Physique des systèmes à plusieurs niveaux dans l'hélium</b>	<b>17</b>
<b>1 Résonances de largeur sub-naturelle. Transparence électromagnétique induite dans l'hélium</b>	<b>19</b>
I Rappels sur les résonances de largeur sub-naturelle . . . . .	21
I.1 Oscillations cohérentes de population . . . . .	21
I.2 Transparence électromagnétiquement induite . . . . .	24
II EIT dans l'hélium métastable à température ambiante . . . . .	33
II.1 Hélium métastable à température ambiante . . . . .	34
II.2 EIT . . . . .	39
III Conclusions . . . . .	50
<b>2 Excitation du système en <math>\Lambda</math> par des polarisations non circulaires</b>	<b>53</b>
I Position du problème . . . . .	54
II Polarisation linéaires . . . . .	58
II.1 EIT dans la base $( C\rangle,  NC\rangle)$ . . . . .	58
II.2 Introduction d'un champ magnétique . . . . .	63
III CPO ultra-fin . . . . .	68
III.1 Système à deux niveaux ouverts . . . . .	69
III.2 CPO double dans un système en $\lambda$ . . . . .	79
IV Polarisation elliptiques . . . . .	85
IV.1 Système non dégénéré . . . . .	85
IV.2 Système dégénéré . . . . .	86

TABLE DES MATIÈRES

---

V	Conclusions . . . . .	88
<b>B</b>	<b>Propriétés dispersives de l'hélium et application.</b>	<b>89</b>
<b>3</b>	<b>Propagation d'information dans les milieux dispersifs</b>	<b>91</b>
I	Introduction et définitions . . . . .	92
I.1	Vitesse de la lumière . . . . .	92
I.2	Relations de Kramers-Kronig . . . . .	95
II	Lumière lente . . . . .	96
II.1	Définition - Présentation . . . . .	96
II.2	Lumière lente dans l'hélium . . . . .	98
II.3	Lumière arrêtée-Stockage . . . . .	100
III	Lumière supraluminique . . . . .	101
III.1	Définition - Présentation . . . . .	101
III.2	EIT et variation négative de la dispersion . . . . .	103
III.3	Lumière rapide dans l'hélium . . . . .	103
IV	Causalité-Propagation d'information . . . . .	106
V	Conclusions . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Taux de décroissance d'une cavité optique contenant un milieu fortement dispersif</b>	<b>115</b>
I	Introduction et position du problème . . . . .	117
I.1	Gyroscope laser . . . . .	118
I.2	Réponse spectrale d'une cavité optique en présence d'un milieu dispersif . . . . .	122
II	Cavité optique et lumière lente . . . . .	127
II.1	Résultats expérimentaux . . . . .	128
II.2	Théorie . . . . .	133
II.3	Conclusion . . . . .	135
III	Vitesse de groupe négative et inadéquation du concept de durée de vie . . . . .	136
III.1	Introduction . . . . .	136

TABLE DES MATIÈRES

---

III.2	Résolution théorique . . . . .	137
III.3	Modèle du doublet de gain . . . . .	141
III.4	Vérification expérimentale . . . . .	143
III.5	Conclusion . . . . .	146
IV	Généralisation . . . . .	147
V	Conclusions . . . . .	150
<b>Conclusion générale</b>		<b>153</b>
<b>Annexes</b>		<b>159</b>
<b>A Conventions pour la transformée de Fourier</b>		<b>159</b>
<b>B Propagation d'un champ dans un milieu diélectrique linéaire</b>		<b>161</b>
B.1	Equation de propagation . . . . .	161
B.2	Ondes planes . . . . .	163
B.3	Réponse du milieu . . . . .	164
B.4	Notation complexe . . . . .	165
<b>C Polarisation circulaires</b>		<b>167</b>
C.1	Polarisation circulaires et traitement scalaire . . . . .	167
C.2	Hamiltonien d'interaction dipolaire électrique pour des polarisation circu- laire . . . . .	169
C.2.1	Définitions . . . . .	169
C.2.2	Cas d'un système en $\Lambda$ avec sous-niveaux Zeeman . . . . .	170
C.2.3	Matrice du dipôle atomique et fréquence de Rabi . . . . .	171
<b>D Matrice de l'opérateur dipolaire électrique</b>		<b>173</b>
D.1	Définitions . . . . .	173
D.2	Wigner-Eckart . . . . .	174
D.3	Cas usuel d'une transition optique composée de plusieurs sous-niveaux . . . . .	175
D.4	Base des polarisation circulaires . . . . .	176
D.5	Forces d'oscillateur-Durée de vie radiative-d . . . . .	177

TABLE DES MATIÈRES

---

D.5.1	Forces d'oscillateur . . . . .	177
D.5.2	Durée de vie radiative . . . . .	178
<b>E</b>	<b>Résolution d'un système avec le développement de Floquet</b>	<b>181</b>
E.1	Position du problème . . . . .	181
E.2	Résolution . . . . .	182
E.3	Application . . . . .	183
<b>F</b>	<b>Systèmes à deux niveaux</b>	<b>185</b>
F.1	Système à deux niveaux : équations de Bloch optiques . . . . .	185
F.2	Système à deux niveaux : méthode de Floquet . . . . .	189
F.3	Système à deux niveaux : lien entre équations de Bloch optiques et équations cinétiques . . . . .	190
F.4	Système à deux niveaux : résolution des équations cinétiques . . . . .	193
<b>G</b>	<b>Systèmes à trois niveaux en <math>\Lambda</math></b>	<b>199</b>
G.1	Equations de Bloch optiques . . . . .	199
G.2	Méthode de Floquet . . . . .	205
G.3	Lien entre équations de Bloch optiques et équations cinétiques . . . . .	207
G.4	Résolution des équations cinétiques . . . . .	210
G.5	Résolution des équations de Bloch optiques . . . . .	216
G.5.1	Résolution analytique . . . . .	216
G.5.2	Elargissement inhomogène . . . . .	220
G.5.3	Susceptibilité . . . . .	222
G.5.4	Transmission . . . . .	222
G.5.5	Résonances EIT-Largeur . . . . .	223
G.5.6	Vitesse de groupe-Délai de groupe . . . . .	224
<b>H</b>	<b>Hélium métastable</b>	<b>227</b>
H.1	Niveaux d'énergie . . . . .	227
H.2	Taux de relaxation . . . . .	227
H.3	Transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ . . . . .	229
H.3.1	Dégénérescence Zeeman . . . . .	229
H.3.2	Moments dipolaires . . . . .	230

## TABLE DES MATIÈRES

---

H.4	Densité d'atomes métastables . . . . .	232
<b>I</b>	<b>Cavités optiques</b>	<b>235</b>
I.1	Cavité dans le vide . . . . .	235
I.2	Cavité contenant un milieu dispersif . . . . .	238
I.3	Réponse temporelle d'une cavité optique . . . . .	240
I.3.1	Définitions . . . . .	240
I.3.2	Approximations . . . . .	240
I.3.3	Réponse temporelle de la cavité . . . . .	242
I.4	Front descendant incident sur la cavité . . . . .	244
I.5	Résolution théorique . . . . .	247
I.6	Modèle théorique pour les simulations numériques . . . . .	248
I.6.1	Doublet de gain . . . . .	249
I.6.2	EIT . . . . .	250

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Introduction

La compréhension des processus d'interaction lumière-matière a toujours suscité la curiosité de la communauté scientifique. Dans ce cadre, la propagation des impulsions lumineuses dans les milieux a fait l'objet de nombreuses études. Si la vitesse de la lumière  $c$  est la quantité pertinente pour des impulsions se propageant dans le vide, on compte au moins huit définitions de la vitesse de la lumière pour les impulsions se propageant dans un milieu [Smith, 1970; Bloch, 1977]. Jusqu'au début du XX<sup>ème</sup> siècle, on pensait en particulier que l'information contenue dans une impulsion se propageait à la vitesse de groupe, et il était admis qu'elle pouvait prendre n'importe quelle valeur. Mais l'arrivée de la théorie de la relativité d'Einstein vient perturber ces notions en énonçant qu'aucune information ne peut se propager plus vite qu'une certaine limite : la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le cas contraire, un effet pourrait se produire avant sa propre cause et le principe de causalité ne serait pas respecté. Il était pourtant bien connu que la vitesse de groupe peut, au moins théoriquement, excéder  $c$  au centre d'une raie d'absorption. Ce sont donc ces premières interrogations qui ont motivé le travail de Sommerfeld et Brillouin au début du XX<sup>ème</sup> siècle, et ils développèrent alors une théorie sur la propagation des impulsions lumineuses dans les milieux [Sommerfeld, 1914; Brillouin, 1914, 1960]. Il en résulte en particulier que la vitesse d'une impulsion de forme carrée ne peut excéder  $c$ , même si la vitesse de groupe est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Ils conclurent que l'impulsion est extrêmement déformée dans ces conditions, et ils tentèrent de définir alors la vitesse d'un signal respectant la causalité comme la vitesse du premier point atteignant la moitié du maximum de l'impulsion. Or certaines études théoriques et expérimentales plus récentes montrent qu'une impulsion peut se propager sans déformation à une vitesse de groupe négative [Garrett and McCumber, 1970; Chu and Wong, 1982]. Ceci invalide donc la proposition de Sommerfeld et Brillouin concernant la vitesse d'un signal respectant la causalité, et pose le réel problème que constitue la définition de

## INTRODUCTION

---

la vitesse de l'information.

Si la possibilité d'obtenir des vitesses de groupe supraluminiques dans un milieu résonnant était bien connue, il fut montré que la vitesse de groupe peut également être réduite sur le côté d'une raie d'absorption [Chu and Wong, 1982] ou bien au centre d'une raie spectrale de gain [Casperson and Yariv, 1971]. Cet effet ne pose pas de problème concernant le respect de la causalité et semble même prometteur : il serait possible d'introduire un retard contrôlable lors de la propagation d'une impulsion dans le milieu. La maîtrise du phénomène permettrait un contrôle tout optique de la propagation des impulsions, alors que le développement du transfert d'information par voie optique bat son plein dans les années 80. Mais deux problèmes se posent alors. L'absorption est forte même sur le côté d'une résonance en absorption et réduit la possibilité d'application, tandis qu'il est nécessaire d'avoir des résonances de gain assez fines spectralement pour obtenir des réductions conséquentes et utilisables de la vitesse de groupe. Le système à deux niveaux n'est alors plus suffisant dans un contexte d'application et l'étude de systèmes plus complexes semble nécessaire.

Par ailleurs, le développement de lasers monochromatiques accordables apporte de nouvelles possibilités quant à l'étude spectroscopique des systèmes à deux niveaux, et autorise alors une extension à l'étude de systèmes plus complexes. L'interaction d'un système à trois niveaux et de plusieurs champs cohérents présente par exemple des processus non linéaires exacerbés. Il devient également possible d'étudier les phénomènes cohérents entre états d'un même atome. C'est dans ce contexte que fut découvert le piégeage cohérent de population (CPT) [Alzetta et al., 1976; Arimondo and Orriols, 1976]. Ce phénomène consiste en un pompage des atomes dans une superposition d'états fondamentaux, et il fait apparaître des résonances en transmission dont la largeur est inférieure au taux de relaxation des cohérences optiques. Le CPT semble alors être un outil puissant pour la spectroscopie [Arimondo, 1996]. La découverte de la transparence électromagnétiquement induite (EIT) [Harris et al., 1990] découlera également de ces études et permettra de mettre à jour le phénomène de lumière ultra-lente : la vitesse de groupe peut être réduite à une échelle humaine de quelques mètres par seconde [Hau et al., 1999]. Ce phénomène se produit de plus au centre d'une fenêtre de transmission, et la vitesse de groupe est accordable avec l'intensité des champs appliqués. Ceci semble très prometteur quant aux applications dans le domaine du traitement optique de l'information. L'EIT met par ailleurs en œuvre une cohérence entre deux niveaux du système dont le taux de relaxation

## INTRODUCTION

---

est faible. Des processus de stockage d'impulsions lumineuses grâce à l'EIT ont ainsi pu être développées. Alors qu'il est également possible d'imprimer les propriétés quantiques de la lumière incidente dans le système atomique, l'EIT semble aussi adapté au domaine de l'information quantique.

Le comportement de ce type de systèmes dépend bien entendu du type de milieu utilisé. La première réalisation du phénomène d'EIT a eu lieu dans une vapeur de strontium [Boller et al., 1991] et les propriétés dispersives associées ont été démontrées dans une vapeur de plomb [Harris et al., 1992]. Ce phénomène est aussi réalisable dans des cristaux dopés [Ham et al., 1997], que l'immobilité des sites actifs rend attractifs. Les inhomogénéités spatiales des cristaux dopés sont à l'origine d'un fort élargissement inhomogène, et il est par exemple possible d'y réaliser le stockage d'impulsions multi-modes [Afzelius et al., 2009; Nunn et al., 2008; Bonarota et al., 2011]. Mais ils nécessitent en général l'utilisation de cryostats afin de réduire les taux de relaxation des cohérences. Au contraire, les atomes dans les vapeurs sont mobiles et sujets à l'élargissement Doppler. Il est possible de s'en affranchir en utilisant des méthodes de refroidissement laser, ou bien à l'inverse de profiter de la facilité d'utilisation des vapeurs à température ambiante. Les vapeurs de rubidium sont très présentes dans la littérature concernant l'étude des processus cohérents tels que l'EIT : les longueurs d'onde d'utilisation sont faciles d'accès et les processus de refroidissement bien connus. Leur utilisation à température ambiante peut par contre présenter quelques difficultés : il est nécessaire de chauffer la cellule contenant le gaz et d'y introduire un gaz tampon. Les niveaux d'énergie d'intérêt sont en effet sensibles aux collisions. Dans ce manuscrit, nous présentons des résultats obtenus dans une vapeur d'hélium métastable à température ambiante. L'hélium a en effet l'avantage de présenter une répartition très simple de ses niveaux d'énergie, et les collisions ne sont pas rédibitoires pour l'observation des phénomènes cohérents. Un premier objectif de cette thèse consiste en l'étude de la réponse d'un système à trois niveaux en  $\Lambda$ , qu'il est possible d'extraire de façon très pure de la sous-structure Zeeman des niveaux d'énergie de l'hélium.

D'un autre côté, ces dernières décennies ont vu l'apparition de senseurs tout optiques, dont le principe est basé sur l'interférométrie ou les cavités amplificatrices. La grande précision associée à la compacité de ces dispositifs les rend très attractifs. Afin d'augmenter leur performances, il a été proposé d'y ajouter des milieux hautement dispersifs [Purves et al., 2006; Shi et al., 2007; Shahriar et al., 2007]. Dans le cas des détecteurs basés sur des cavités laser, le bruit est en particulier déterminé par la durée de vie des photons dans

## INTRODUCTION

---

la cavité [Dorschner et al., 1980]. L'insertion de milieux hautement dispersifs en cavité aurait-elle alors une influence sur cette durée de vie ? Notre système expérimental à 3 niveaux en  $\Lambda$  fait émerger des comportements en absorption ou en transmission dont la largeur spectrale est de quelques dizaines de kHz, et des phénomènes dispersifs de grande ampleur y sont associés. Un second objectif de cette thèse consiste en l'étude du taux de décroissance d'une cavité optique lorsqu'elle contient un milieu fortement dispersif.

La manuscrit est organisé en deux parties chacune constituée de deux chapitres.

La première partie concerne l'étude des systèmes à plusieurs niveaux, dont le premier chapitre rappelle les bases nécessaires à la bonne compréhension du reste du manuscrit. Il présentera en particulier le phénomène d'oscillations de population (CPO) pouvant avoir lieu dans un système à deux niveaux ainsi qu'un modèle théorique simple rendant compte du phénomène. Il présentera également le phénomène de transparence électromagnétiquement induite dans un système à trois niveaux en  $\Lambda$ , à la base des travaux effectués durant cette thèse. La suite du chapitre consiste en la réalisation pratique du phénomène d'EIT dans un gaz d'hélium métastable à température ambiante : les caractéristiques de ce gaz seront d'abord décrites avant de présenter les résultats expérimentaux.

Le second chapitre répond au problème posé par l'excitation de notre système expérimental par des polarisations non circulaires. On y démontre d'abord théoriquement que le phénomène de CPO dans un système à deux niveaux ouvert peut faire apparaître des phénomènes résonnants de faible largeur spectrale. Des observations expérimentales montrent ensuite que la réponse du système en  $\Lambda$  dans  $\text{He}^*$  excité par des polarisations linéaires est déterminée à la fois par le phénomène de CPO et par le phénomène d'EIT. Un modèle théorique explique enfin que ce système possède deux types de réponse en fonction des polarisations incidentes : celui-ci peut agir comme un système à deux niveaux fermé ou comme un système à deux niveaux ouvert.

La seconde partie concerne plus spécifiquement les phénomènes dispersifs associés aux résonances optiques présentes dans les matériaux. Le troisième chapitre présente l'observation expérimentale des phénomènes de lumière lente, rapide, ainsi que des vitesses de groupe négatives dus à l'EIT dans notre système. Une discussion sur la propagation des impulsions optiques dans les matériaux dispersifs et sur le respect de la causalité durant la propagation sera également développée.

Enfin, le dernier chapitre met en œuvre les propriétés dispersives réalisables dans l'hé-

## INTRODUCTION

---

lium pour étudier les caractéristiques des cavités optiques contenant un milieu dispersif. On y étudie en particulier le taux de décroissance d'une telle cavité lorsqu'elle contient un milieu à dispersion positive d'une part, puis lorsque la vitesse de groupe intracavité est négative d'autre part. On y montre que pour certains types de milieu dispersif, le taux de décroissance ne peut pas être défini.

## INTRODUCTION

---

## Partie A

# Physique des systèmes à plusieurs niveaux dans l'hélium



# Chapitre 1

## Résonances de largeur sub-naturelle. Transparence électromagnétiquement induite dans l'hélium

### Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Rappels sur les résonances de largeur sub-naturelle . . . . .</b>	<b>21</b>
I.1	Oscillations cohérentes de population . . . . .	21
I.2	Transparence électromagnétiquement induite . . . . .	24
I.2.1	Etat « noir » . . . . .	25
I.2.2	Doublet Autler-Townes . . . . .	27
I.2.3	Equations de Bloch optiques . . . . .	29
<b>II</b>	<b>EIT dans l'hélium métastable à température ambiante . . . . .</b>	<b>33</b>
II.1	Hélium métastable à température ambiante . . . . .	34
II.1.1	Hélium métastable . . . . .	34
II.1.2	Dégénérescence Zeeman et extraction d'un système en $\Lambda$ . . . . .	37
II.1.3	Hélium à température ambiante . . . . .	37
II.2	EIT . . . . .	39
II.2.1	Elargissement inhomogène . . . . .	39
II.2.2	Processus de relaxation dans l'hélium métastable . . . . .	41

Chapitre 1. Résonances de largeur sub-naturelle. Transparence électromagnétiquement induite dans l'hélium

---

II.2.3	Réalisation expérimentale et résultats . . . . .	43
<b>III</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>50</b>

---

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les notions utiles à la lecture de ce manuscrit, ainsi que le système expérimental pré-existant dont je suis parti pour réaliser les travaux présentés. La première section rappelle le principe des phénomènes d'oscillation cohérente de population et de transparence électromagnétiquement induite. Ces deux types de phénomènes donnent en effet naissance à des résonances de largeur sub-naturelle (ce terme designera des résonances dont la largeur spectrale est inférieure au taux de relaxation des cohérences optiques). La seconde section montre comment et pourquoi il est possible d'observer la transparence électromagnétiquement induite dans un milieu constitué d'atomes d'hélium métastable à température ambiante, et rappelle ainsi des résultats obtenus par Joyee Ghosh, la doctorante m'ayant précédé.

## I Rappels sur les résonances de largeur sub-naturelle

### I.1 Oscillations cohérentes de population

C'est en 1967 que Schwarz et Tan prédisent l'existence d'une fenêtre de transparence liée à la durée de vie des populations [Schwarz and Tan, 1967], parlant alors de « hole-burning »<sup>1</sup>. Ce phénomène fut ensuite utilisé en spectroscopie pour réaliser des mesures de durée de vie très courte, non réalisables par les procédés conventionnels [Lee et al., 1980]. Ce n'est qu'aux alentours de 1980 que des explications en terme d'oscillations de populations verront le jour, et Boyd en 1981 publiera une analyse complète du phénomène [Boyd et al., 1981].

Lorsqu'un champ de pompe intense est appliqué sur une transition optique d'un milieu saturable, modélisé par un système à deux niveaux, l'absorption d'un second champ sonde faiblement désaccordé et appliqué sur la même transition peut être considérablement réduite [Piredda and Boyd, 2007]. Ce phénomène est appelé oscillations cohérentes de population, usuellement noté CPO (pour Coherent Population Oscillations). Alors que la valeur moyenne de l'intensité du champ, principalement donnée par le champ de pompe, détermine la population moyenne dans chacun des niveaux, la modulation du champ créée par le signal de sonde induit une modulation de ces populations. Si la modulation du champ a lieu à une fréquence inférieure au taux de désexcitation du niveau supérieur

---

1. Littéralement « brûlage de trou ». Cette appellation n'a rien à voir avec le hole-burning spectral à l'œuvre dans les milieux à élargissement inhomogène.

vers l'état fondamental, alors le système atomique est capable de suivre l'évolution temporelle et il réagit en phase avec la modulation appliquée. Il en résulte une diminution de l'absorption du champ sonde. Au contraire, si la modulation présente une fréquence trop élevée, le système atomique n'est plus capable de suivre l'évolution temporelle et le champ sonde est absorbé par le milieu. La fenêtre de transparence ainsi créée a donc une largeur limitée par le taux de désexcitation du niveau supérieur. Or dans les systèmes réels classiques, la largeur homogène est toujours plus grande que le taux de désexcitation des populations. Dans les vapeurs atomiques, le taux de relaxation des cohérences optiques inclut par exemple un terme provenant des collisions déphasantes. Dans les matrices cristallines, la largeur homogène comprend aussi des termes de relaxation dus aux interactions possibles au sein de la matrice. C'est donc ici qu'apparaît le caractère sub-naturel de la largeur de la fenêtre de transparence créée par CPO. De même que tous les phénomènes donnant lieu à la création de résonances ultrafines, la dispersion associée peut conduire à une modification profonde de la vitesse de groupe lors de la propagation d'impulsions. Un certain nombre de protocoles expérimentaux basés sur le phénomène de CPO a donc été proposé dans les domaines de l'information optique ou même de l'information quantique.

Ainsi, les premières démonstrations expérimentales de lumière lente et de lumière supraluminique par CPO furent obtenues en 2003 [Bigelow et al., 2003b] dans une matrice cristalline à température ambiante. Récemment, les matériaux se sont diversifiés pour réaliser le CPO dans des puits quantiques semi-conducteurs [Ku et al., 2004] et même obtenir des records de vitesse ultra-lente dans des protéines biologiques ( $0,091 \text{ mm.s}^{-1}$ !) [Wu and Rao, 2005]. Le CPO trouve également des applications dans le domaine de l'information quantique puisque des articles récents proposent la réalisation de mémoires optiques [Eilam et al., 2010] ou la production de photons jumeaux de faible bande spectrale [Sharypov and Wilson-Gordon, 2011] à partir de ce phénomène.

## Théorie

D'un point de vue théorique, le CPO n'implique que les populations du système considéré et il est donc possible de rendre compte du phénomène à partir d'un modèle utilisant seulement les équations cinétiques<sup>2</sup> [Piredda and Boyd, 2007].

Considérons donc un système à deux niveaux fermé tel que décrit sur la figure 1.1.

---

2. Ce terme désignera les équations d'évolution des populations en régime adiabatique pour les cohérences, ou « rate equations » en anglais.

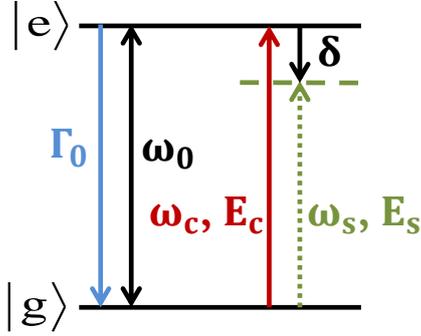


FIGURE 1.1 – Système à deux niveaux fermé.  $\Gamma_0$  est l'inverse de la durée de vie du niveau supérieur  $|e\rangle$  et  $\omega_0$  la fréquence de la transition optique entre  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ . Un champ de couplage (sonde) d'amplitude  $E_c$  ( $E_s$ ) et de fréquence optique  $\omega_c$  ( $\omega_s$ ) est appliqué à la transition.  $\delta = \omega_s - \omega_c$  est le désaccord entre les champs de sonde et de couplage.

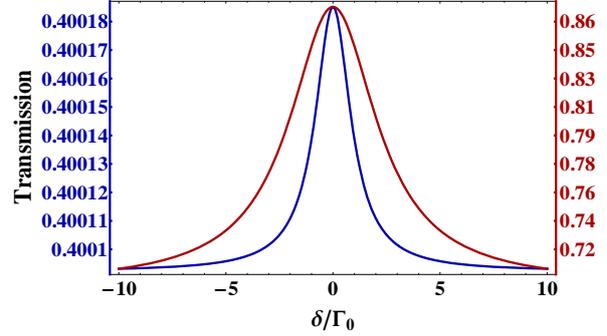


FIGURE 1.2 – Profil de transmission du champ sonde en fonction du désaccord normalisé  $\delta/\Gamma_0$ , pour une transmission sans couplage de 0,4 % et pour  $\sigma\Gamma_0 = 1,43 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ . Bleu :  $I_0/\Gamma_0^2 = 2,74 \times 10^{-16} \text{ J.s.m}^{-2}$  et  $I_1/\Gamma_0^2 = I_{-1}/\Gamma_0^2 = 2,57 \times 10^{-17} \text{ J.s.m}^{-2}$ . Rouge :  $I_0/\Gamma_0^2 = 1,03 \times 10^{-12} \text{ J.s.m}^{-2}$  et  $I_1/\Gamma_0^2 = I_{-1}/\Gamma_0^2 = 1,58 \times 10^{-15} \text{ J.s.m}^{-2}$ .

$\Gamma_0$  est le taux de désexcitation du niveau supérieur et  $\omega_0$  la pulsation optique de la transition optique associée. Deux champs optiques sont également appliqués. Le premier, à résonance optique, est un champ intense de couplage d'amplitude  $E_c$  et de pulsation optique  $\omega_c = \omega_0$ . Le second, de pulsation optique  $\omega_s$ , est un champ de faible amplitude  $E_s$  légèrement désaccordé d'une quantité  $\delta = \omega_s - \omega_c$ . Il en résulte que l'intensité totale  $I(t)$  appliquée au système peut s'exprimer comme un terme moyen auquel s'ajoute un terme de modulation<sup>3</sup> :  $I(t) = I_0 + I_1 e^{-i\delta t} + I_{-1} e^{i\delta t}$  (cf annexe F.3).

Si l'on note  $w = N_e - N_g$ <sup>4</sup> la différence de population des niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , le système satisfait alors à l'équation d'évolution (cf annexe F.4)

$$\frac{dw}{dt} = -\Gamma_0 w - \frac{2I\sigma}{\hbar\omega_0} w - n\Gamma_0,$$

où l'on a noté  $\sigma$  la section efficace (cf annexe A.F.3).

Au premier ordre en sonde, on cherche la solution sous la forme  $w(t) = w_0 + w_1 e^{-i\delta t} +$

3.  $I$  est réelle ici :  $I_1 = I_1^*$ .

4. On intègre dans cette définition la densité volumique  $n$  d'atomes :  $N_{e,g} = n\sigma_{ee,gg}$  où  $\sigma_{ee}$  et  $\sigma_{gg}$  sont les termes de population de la matrice densité, sans dimension.

$w_{-1}e^{i\delta t}$  donnée en régime stationnaire par (cf annexe A.F.4)

$$w(t) = -n \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 + \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0}} \left( 1 - \frac{2I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Gamma_0 - i\delta + \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0}} e^{-i\delta t} - \frac{2I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Gamma_0 + i\delta + \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0}} e^{i\delta t} \right).$$

La transmission du champ sonde est alors donnée pour une longueur de milieu  $L$  par

$$T = \exp \left[ \sigma \left( w_0 + \operatorname{Re} \left[ w_1 \frac{I_0}{I_1} \right] \right) L \right] = \exp \left[ \sigma \left( w_0 - \operatorname{Re} \left[ w_0 \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Gamma_0 - i\delta + \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0}} \right] \right) L \right],$$

Dans cette formule apparaît le terme  $1/(\Gamma_0 - i\delta + \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0})$  qui est caractéristique d'une lorentzienne dont la largeur à mi-hauteur pour les faibles intensités de couplage est limitée par  $2\Gamma_0$ . La figure 1.2 illustre ainsi le profil de transmission obtenu dans de tels systèmes en fonction du désaccord normalisé entre les champs optiques. Nous y observons l'apparition d'une fenêtre de transmission dont la largeur est de l'ordre de  $\Gamma_0$  et qui s'élargit par saturation avec l'augmentation de l'intensité de couplage (terme  $2I_0\sigma/\hbar\omega_0$  au dénominateur de  $w_1$ ).

## I.2 Transparence électromagnétiquement induite

De même que le CPO, la transparence électromagnétiquement induite (ou EIT pour Electromagnetically Induced Transparency) est un phénomène qui permet de réduire l'absorption d'une transition optique pour un champ sonde. La différence réside dans le fait que le champ de couplage est cette fois-ci appliqué sur une autre transition optique. Ce phénomène est donc réalisable dans des systèmes constitués de plusieurs niveaux d'énergie, tels que les systèmes en V, en échelle ou en  $\Lambda$  (Fig. 1.3). Comme la réponse du milieu implique alors une cohérence entre deux niveaux non couplés optiquement, on peut s'attendre à l'apparition d'une résonance sub-naturelle si la durée de vie de la cohérence impliquée n'est pas affectée par l'émission spontanée.

Le phénomène de transparence électromagnétiquement induite a été découvert en 1990 à Stanford [Harris et al., 1990; Boller et al., 1991]. Alors que ces premières expériences d'EIT ont été effectuées dans des vapeurs atomiques, la possibilité de le réaliser dans des systèmes d'atomes froids [Hau et al., 1999] ou dans des systèmes à l'état solide [Ham et al., 1997] a été démontrée peu après. La forte dispersion associée à l'EIT a permis la réalisation

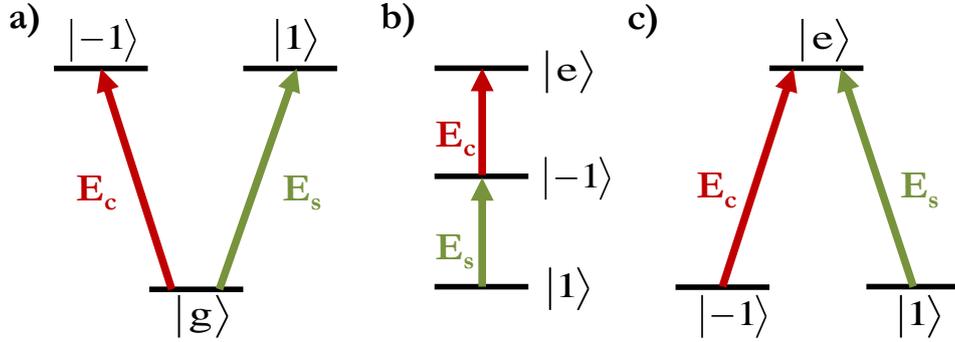


FIGURE 1.3 – Différents systèmes dans lesquels il est possible de réaliser le phénomène d'EIT : a) système en V, b) système en échelle, c) système en  $\Lambda$ .

et l'observation du phénomène de lumière lente [Harris et al., 1992], et ceci a mis en évidence l'intérêt de l'EIT dans le domaine du traitement tout optique de l'information. Des expériences concluantes de stockage ont même pu être réalisées [Liu et al., 2001]. L'EIT est due à l'annulation locale de la susceptibilité linéaire d'un matériau, alors que la susceptibilité non linéaire est en contrepartie augmentée. La réalisation de processus non linéaires pour des énergies de quelques photons voire de l'ordre du photon unique a donc été proposée et démontrée [Harris and Hau, 1999; Chen et al., 2012]. Plus récemment, des applications de l'EIT à la magnéto-métrie ont également pu être expérimentalement mises en œuvre [Yudin et al., 2010]. L'EIT réalisée dans des atomes uniques introduits en cavité semble aussi adaptée à la réalisation de processeurs quantiques [Mücke et al., 2010]. Aujourd'hui, des résultats encourageants quant à la miniaturisation et l'intégration sur puces ont montré que l'EIT est réalisable par couplage opto-mécanique dans des cavités photoniques nanométriques [Safavi-Naeini et al., 2011].

Les sections suivantes présentent différentes manières de comprendre l'EIT.

### I.2.1 Etat « noir »

Lorsque deux champs optiques sont appliqués sur deux transitions d'un système à trois niveaux en  $\Lambda$ , la probabilité de présence de l'atome dans le niveau supérieur peut devenir nulle, et les atomes sont piégés dans un état de superposition des deux états de plus basse énergie. Ce phénomène, découvert en 1976 ([Arimondo and Orriols, 1976; Alzetta et al., 1976]), est le piégeage cohérent de population (CPT pour Coherent Population Trapping) et a été le phénomène précurseur aux études sur les processus cohérents impliquant des

résonances de largeur sub-naturelle dans les systèmes à plusieurs niveaux. Le refroidissement laser a pu par exemple atteindre de nouvelles limites grâce au piégeage cohérent de population sélectif en vitesse (VSCPT) [Aspect et al., 1988]. Le CPT est aussi d'une grande importance aujourd'hui pour la préparation de systèmes dans des états déterminés grâce à la méthode du STIRAP [Bergmann et al., 1998]. La réalisation d'horloges atomiques tout optiques miniatures fait également partie des recherches actuelles basées sur le CPT [Zibrov et al., 2010].

L'EIT peut être considéré comme un cas limite du phénomène de CPT. Si l'on considère le système en  $\Lambda$  dégénéré décrit par la figure 1.3 c) excité par des champs à résonance optique, l'hamiltonien d'interaction dipolaire électrique peut s'exprimer dans la base des états ( $|e\rangle, |-1\rangle, |1\rangle$ ) comme

$$\begin{aligned}\hat{V} &= -\widehat{\vec{D}} \cdot \vec{E} = - \begin{pmatrix} 0 & d_{e-1}E_c \cos \omega t & d_{e1}E_s \cos \omega t \\ d_{e-1}E_c \cos \omega t & 0 & 0 \\ d_{e1}E_s \cos \omega t & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_c \cos \omega t & \Omega_s \cos \omega t \\ \Omega_c \cos \omega t & 0 & 0 \\ \Omega_s \cos \omega t & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On a introduit ici les pulsations de Rabi  $\Omega_c$  et  $\Omega_s$  des deux faisceaux. Elles s'expriment en fonction des éléments de matrice du hamiltonien dipolaire  $d_{e\pm 1}$  et des amplitudes des champs électriques  $E_{c,s}$  :  $\Omega_c = \frac{d_{e-1}E_c}{\hbar}$  et  $\Omega_s = \frac{d_{e1}E_s}{\hbar}$ .

Cet hamiltonien définit pour le système un état propre<sup>5</sup>  $|NC\rangle = \frac{\Omega_c}{\sqrt{\Omega_s^2 + \Omega_c^2}} |1\rangle - \frac{\Omega_s}{\sqrt{\Omega_s^2 + \Omega_c^2}} |-1\rangle$ , qui est un état non couplé au champ optique :  $\langle e|\widehat{V}|NC\rangle = 0$ . C'est-à-dire que lorsque les atomes se désexcitent dans cet état à partir du niveau supérieur  $|e\rangle$ , ils y restent piégés puisqu'ils n'interagissent plus avec le champ. Après quelques cycles de pompage, l'ensemble des atomes se retrouve donc piégé dans cet état dit « état noir », à condition bien sûr que celui-ci n'ait pas une durée de vie comparable à la durée d'un cycle d'émission spontanée. Il résulte de ce phénomène que l'absorption des champs optiques est considérablement réduite, voire entièrement supprimée.

Lorsque la puissance d'un des champs optiques est très faible devant l'autre ( $\Omega_s \ll \Omega_c$ ),

---

5. Ceci n'est vrai que pour des champs à même pulsation  $\omega$ , c'est-à-dire à résonance Raman, sinon l'état noir oscille entre les deux niveaux inférieurs.

typiquement lors d'une expérience de type pompe-sonde, on peut considérer que l'état noir est un état propre du système initial :  $|NC\rangle = |1\rangle$ . Il n'est donc plus possible pour le champ sonde de coupler les états  $|1\rangle$  et  $|e\rangle$ , et l'absorption du système sur cette transition optique est alors annulée : c'est le phénomène de transparence électromagnétiquement induite.

Bien sûr, cette explication n'est valable qu'à l'ordre le plus bas en  $\Omega_s/\Omega_c$ . Mais elle a le mérite d'offrir une vision simple du phénomène d'EIT. Les sections suivantes développeront des modèles plus rigoureux.

### I.2.2 Doublet Autler-Townes

Dans la littérature ou lors d'exposés, l'EIT est souvent présenté comme le simple résultat de l'effet Autler-Townes. Lorsque deux transitions optiques en cascade partagent un même niveau et que l'une d'elles est couplée à un champ de forte intensité (Fig. 1.4), alors la raie d'absorption de la seconde transition pour un champ sonde de faible intensité se sépare en deux. Ce phénomène fut découvert en 1955 [Autler and Townes, 1955] pour des champs micro-ondes puis largement étudié dans le domaine optique. En particulier, le modèle de l'atome habillé permet de facilement rendre compte du phénomène. Sous l'effet d'un champ intense, le niveau commun se sépare en deux sous-niveaux légèrement séparés en énergie, et la séparation est proportionnelle à la pulsation de Rabi du champ (Fig. 1.4). Ces sous-niveaux s'expriment alors comme une superposition des états de la transition optique excitée par le champ intense. Ils peuvent donc chacun être couplés au troisième niveau par le champ sonde, et la transmission du système fait alors apparaître deux raies d'absorption : il s'agit du doublet Autler-Townes. Mais il n'est pas possible d'observer ce

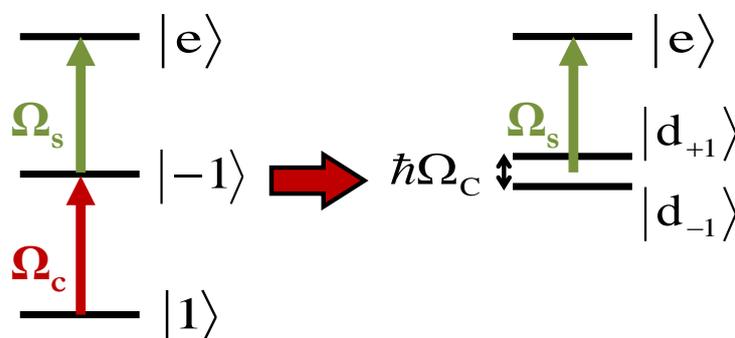


FIGURE 1.4 – Système en cascade faisant apparaître l'effet Autler-Townes et représentation du modèle de l'atome habillé équivalent.

doublet si la puissance de couplage est trop faible : si la séparation des niveaux est petite comparée à la largeur de chacune des raies d'absorption, alors une seule raie est observée.

Ce modèle, relativement pratique pour la compréhension des phénomènes de ce type, peut aussi être appliqué dans le cas des systèmes en  $\Lambda$  ou en  $V$ . Mais la fenêtre de transparence créée dans le cas de l'EIT ne correspond pas à la simple addition de deux raies d'absorption : la fenêtre de transmission est présente même à faible puissance de couplage au centre de la raie d'absorption. On comprend donc qu'un phénomène d'interférence supplémentaire est nécessaire ici pour la bonne compréhension de l'EIT.

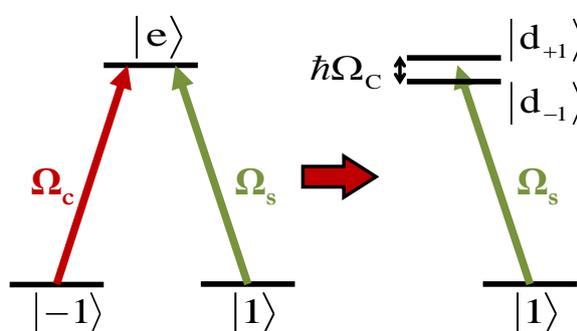


FIGURE 1.5 – Système en  $\Lambda$  faisant apparaître l'effet d'EIT et représentation du modèle de l'atome habillé équivalent.

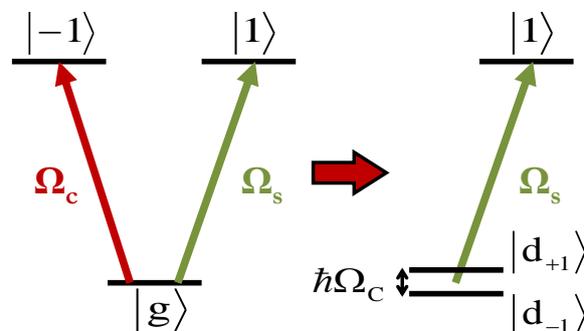


FIGURE 1.6 – Système en  $V$  et représentation du modèle de l'atome habillé équivalent.

Il a déjà été montré que lorsque deux niveaux séparés en énergie se désexcitent radiativement vers un même niveau, le profil de transmission du système pour un champ sonde voit son absorption annulée à la fréquence centrale entre les deux transitions [Fleischhauer et al., 1992]. Cet effet est dû à un terme de couplage supplémentaire entre les cohérences optiques des transitions, qui provient de l'interférence lors de la désexcitation des deux niveaux supérieurs selon un même mode du champ. Ce phénomène a suscité beaucoup d'enthousiasme pour la réalisation de lasers sans inversion de population [Imamoğlu and Harris, 1989]. Lorsqu'on applique le modèle de l'atome habillé à un système en  $\Lambda$ , la situation est identique (Fig. 1.5). On comprend donc que le profil de transmission ne sera pas uniquement déterminé par la résonance de chacune des transitions (dans le modèle de l'atome habillé), mais que ce terme de couplage produit l'interférence requise pour annuler l'absorption à résonance.

Si on applique les calculs de [Fleischhauer et al., 1992] au système de la figure 1.4, c'est-à-dire que l'on sonde au contraire un système pour lequel un niveau se désexcite vers

deux autres niveaux, on s'aperçoit que ce terme de couplage n'apparaît plus. La réponse du système est alors bien donnée par l'addition de deux raies d'absorptions. Ce résultat suggère d'ailleurs que la réalisation de l'EIT n'est en fait pas possible dans un système en V : la représentation du modèle de l'atome habillé est en effet reproduite sur la figure 1.6, et correspond à cette dernière situation. De même, la réponse d'un système en cascade dépend de la transition sondée : l'un ne devrait faire apparaître que le doublet Autler-Townes tandis que le second devrait faire apparaître l'EIT (Fig. 1.7). Cette distinction a d'ailleurs fait l'objet de plusieurs études [Abi-Salloum, 2010; Anisimov et al., 2011].

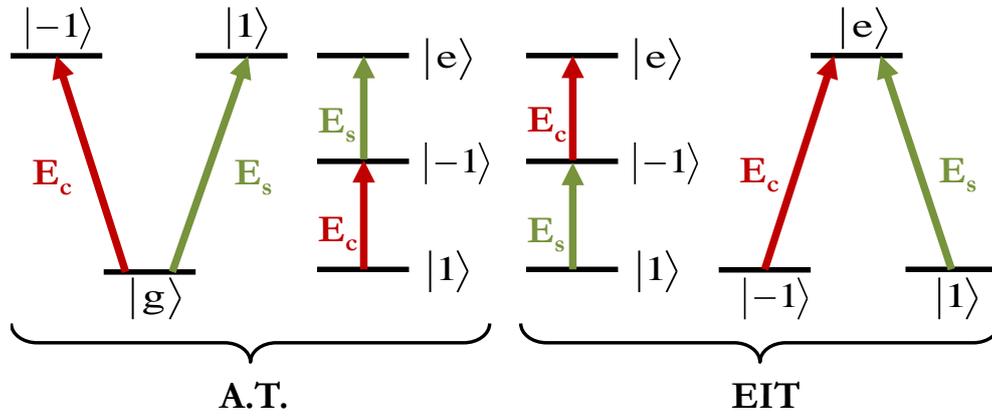


FIGURE 1.7 – Schémas des systèmes faisant apparaître le phénomène de doublet Autler-Townes (A.T.) ou d'EIT.

A forte puissance de couplage par contre, lorsque la séparation entre les deux raies d'absorption devient plus grande que leur largeur spectrale, l'interférence n'est plus visible et tous ces systèmes sont équivalents. Le doublet Autler-Townes est alors le seul phénomène pertinent à considérer.

A partir de maintenant, nous nous limiterons à l'étude d'un système en  $\Lambda$ , qui comme nous le verrons par la suite, correspond à notre système expérimental.

### I.2.3 Equations de Bloch optiques

Cette section présente l'EIT dans un modèle semi-classique en utilisant le formalisme de la matrice densité et les équations de Bloch optiques.

Considérons le système en  $\Lambda$  ( $|e\rangle, |-1\rangle, |1\rangle$ ) de la Fig. 1.8, pour lequel nous avons introduit des taux d'alimentation de l'extérieur  $\Lambda_e, \Lambda_{-1}, \Lambda_1$  et de désexcitation vers l'extérieur

$\gamma_e, \gamma_{-1}, \gamma_1$  pour les populations de chacun des niveaux. Le niveau  $|e\rangle$  peut se désexciter vers chacun des niveaux inférieurs par émission spontanée avec un taux  $\frac{\Gamma_e}{2}$ . Nous introduisons également des taux de relaxation  $\gamma_{e1}$  et  $\gamma_{e-1}$  pour les cohérences optiques en jeu, ainsi qu'un taux de relaxation  $\gamma_{1,-1}$  pour la cohérence Raman entre les deux niveaux inférieurs  $|1\rangle$  et  $|-1\rangle$ , pour lesquels il n'y a pas de transition optique.

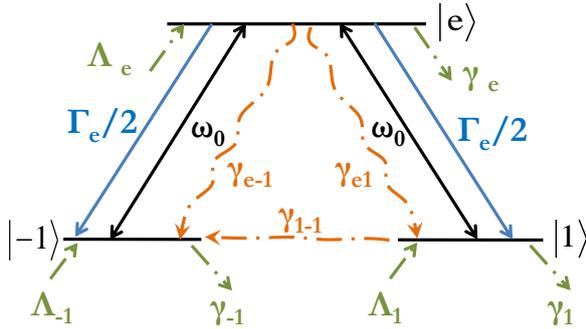


FIGURE 1.8 – Système à trois niveaux en  $\Lambda$  : taux de relaxations. Le niveau excité  $|e\rangle$  a un taux de relaxation  $\Gamma_e/2$  vers les deux sous-niveaux  $|-1\rangle$  et  $|1\rangle$ , un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_e$  et un taux d'alimentation  $\Lambda_e$ . Les niveaux fondamentaux  $|\pm 1\rangle$  ont un taux d'alimentation  $\Lambda_{\pm 1}$  et un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_{\pm 1}$ . Les cohérences optiques ont des taux de relaxation  $\gamma_{e,\pm 1}$  et la cohérence Raman entre niveaux fondamentaux  $\gamma_{1,-1}$ . La différence d'énergie entre le niveau du haut et les niveaux du bas est  $\hbar\omega_0$ .

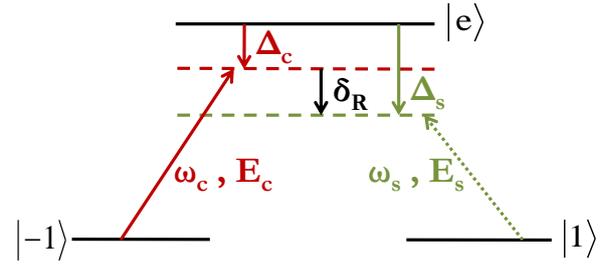


FIGURE 1.9 – Système à trois niveaux en  $\Lambda$  : excitations. Un champ de sonde de pulsation optique  $\omega_s$  couple la transition  $|1\rangle \rightarrow |e\rangle$  avec une amplitude complexe  $E_s$  et un champ de couplage de pulsation optique  $\omega_c$  couple la transition  $|-1\rangle \rightarrow |e\rangle$  avec une amplitude complexe  $E_c$ . On note  $\Delta_c = \omega_c - \omega_0$  le désaccord optique pour le champ de couplage,  $\Delta_s = \omega_s - \omega_0$  le désaccord optique pour le champ de sonde et  $\delta_R = \Delta_s - \Delta_c = \omega_s - \omega_c$  le désaccord Raman.

Considérons également, comme sur la figure 1.9, que le système est couplé à deux champs optiques (scalaires) de couplage et de sonde exprimés en entrée respectivement par

$$\bar{E}_c = E_c e^{-i(\omega_c t - k_c z)} + cc \quad \text{et} \quad \bar{E}_s = E_s e^{-i(\omega_s t - k_s z)} + cc ,$$

et on note  $\Omega_{c,s} = \frac{dE_{c,s}}{\hbar}$  les pulsations de Rabi associées.  $\omega_{c,s}$  représentent les pulsations optiques, et  $\delta_R = \Delta_s - \Delta_c = \omega_s - \omega_c$  est le désaccord Raman entre les deux champs. Tous les détails de calcul concernant cette section peuvent être trouvés en annexe G.5.

Le formalisme de la matrice densité ainsi que l'équation d'évolution associée  $\frac{d\hat{\sigma}}{dt} =$

$\frac{1}{i\hbar} [\widehat{H}, \widehat{\sigma}] + \left\{ \frac{d\widehat{\sigma}}{dt} \right\}_{relax}$  nous permettent d'obtenir le système d'équations suivant dans l'approximation quasi-résonante [Cohen-Tannoudji et al., 1980; Grynberg et al., 1997] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = -i [(\tilde{\sigma}_{e1}\Omega_s^* - \tilde{\sigma}_{1e}\Omega_s) + (\tilde{\sigma}_{e-1}\Omega_c^* - \tilde{\sigma}_{-1e}\Omega_c)] + \Lambda_e - \gamma_e\sigma_{ee} - \Gamma_e\sigma_{ee} \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} = -i(\tilde{\sigma}_{1e}\Omega_s - \tilde{\sigma}_{e1}\Omega_s^*) + \Lambda_1 - \gamma_1\sigma_{11} + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} \\ \frac{d\sigma_{-1-1}}{dt} = -i(\tilde{\sigma}_{-1e}\Omega_c - \tilde{\sigma}_{e-1}\Omega_c^*) + \Lambda_{-1} - \gamma_{-1}\sigma_{-1-1} + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{e1}}{dt} = \tilde{\sigma}_{e1}(i\Delta_s - \gamma_{e1}) + i(\sigma_{11} - \sigma_{ee})\Omega_s + i\tilde{\sigma}_{-11}\Omega_c \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{e-1}}{dt} = \tilde{\sigma}_{e-1}(i\Delta_c - \gamma_{e-1}) + i(\sigma_{-1-1} - \sigma_{ee})\Omega_c + i\tilde{\sigma}_{-1-1}\Omega_s \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{-1-1}}{dt} = -\tilde{\sigma}_{-1-1}(\gamma_{-1-1} + i\delta_R) - i\tilde{\sigma}_{1e}\Omega_c + i\tilde{\sigma}_{e-1}\Omega_s^* \end{array} \right.$$

où l'on s'est placé dans le référentiel tournant en posant  $\sigma_{e1} = \tilde{\sigma}_{e1}e^{-i\omega_s t}$ ,  $\sigma_{e-1} = \tilde{\sigma}_{e-1}e^{-i\omega_c t}$  et  $\sigma_{-1-1} = \tilde{\sigma}_{-1-1}e^{-i(\omega_c - \omega_s)t}$ .

Considérons à partir de maintenant un système pour lequel la population totale est conservée, c'est-à-dire que  $\Lambda_e + \Lambda_1 + \Lambda_{-1} = \gamma_e\sigma_{ee} + \gamma_1\sigma_{11} + \gamma_{-1}\sigma_{-1-1}$ . Il est ensuite possible de s'affranchir des équations sur les populations en considérant que lorsque la sonde est très faible ( $\Omega_s \ll \Omega_c$ ), tous les atomes sont pompés dans le niveau  $|1\rangle$ , qui est alors l'état noir pour le champ de couplage. Nous pouvons donc considérer que  $\sigma_{ee} = \sigma_{-1-1} = 0$  et  $\sigma_{11} = 1$  à l'ordre 0 en  $\Omega_s$ . Le système en régime stationnaire, qui peut alors être résolu analytiquement, se simplifie ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{e1}(\gamma_{e1} - i\Delta_s) = i\Omega_s + i\tilde{\sigma}_{-11}\Omega_c \\ \tilde{\sigma}_{e-1}(\gamma_{e-1} - i\Delta_c) = i\tilde{\sigma}_{-1-1}\Omega_s \\ \tilde{\sigma}_{-1-1}(\gamma_{-1-1} + i\delta_R) = -i\tilde{\sigma}_{1e}\Omega_c + i\tilde{\sigma}_{e-1}\Omega_s^* \end{array} \right.$$

Lorsque l'on cherche la réponse du milieu sur le champ sonde au premier ordre, nous pouvons exprimer le champ sonde issu du milieu (annexe B)

$$\bar{E}_s = \frac{E_s}{2} e^{-\frac{\omega_s}{2c} \text{Im}(\chi)z} \exp \left[ -i \left( \omega_s t - \left( k_s + \frac{\omega_s}{2c} \text{Re}(\chi) \right) z \right) \right] + cc.$$

On a introduit ici la susceptibilité linéaire  $\chi$  du matériau qui s'exprime simplement en

fonction de la cohérence  $\tilde{\sigma}_{e1} = \sigma_{e1}e^{i\omega_s t}$  par :

$$\chi = \frac{nd^2}{\Omega_s \epsilon_0 \hbar} \tilde{\sigma}_{e1},$$

où  $n$  est la densité volumique d'atomes participant au phénomène.

La transmission du champ sonde après sa propagation dans le matériau sera donc directement liée à la partie imaginaire de la cohérence dans le référentiel tournant  $\tilde{\sigma}_{e1}$ , donnée par [Scully and Zubairy, 1997] :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{e1} &= \frac{i\Omega_s(\gamma_{1-1} - i\delta_R)}{(\gamma_{1-1} - i\delta_R)(\gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)) + |\Omega_c|^2}, \\ \text{et } \text{Im}(\tilde{\sigma}_{e1}) &= \Omega_s \frac{\gamma_{1-1}(\gamma_{1-1}\gamma_{e1} + |\Omega_c|^2) + \delta_R^2\gamma_{e1}}{(\gamma_{1-1}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R) + |\Omega_c|^2)^2 + (\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{1-1}(\Delta_c + \delta_R))^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

dont on peut voir la forme tracée sur la Fig. 1.10. Il est remarquable de voir apparaître au milieu du profil d'absorption classique d'un système à deux niveaux une fenêtre de transparence lorsque les lasers sont à résonance Raman ( $\delta_R = 0$ ). Il faut noter ici que ce résultat suppose les deux champs optiques cohérents : une phase variable entre les deux champs dégraderait fortement le phénomène, et il faudrait en particulier tenir compte de la largeur spectrale des champs de couplage et de sonde.

Dans la plupart des cas, si la cohérence Raman n'est pas affectée par l'émission spontanée, elle possède une longue durée de vie. Et le taux de décroissance  $\gamma_{1-1}$  est donc très faible devant le taux de décroissance de la cohérence optique  $\gamma_{e1}$ . On a en particulier lorsque  $\Delta_c$  est nul et dans les conditions  $\delta_R, \gamma_{1-1} \ll \gamma_{e1}, |\Omega_c|$  :

$$\text{Im}(\tilde{\sigma}_{e1}) = \Omega_s \left( \frac{1}{\gamma_{e1}} - \frac{1}{\gamma_{e1}} \frac{\frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}} \left( \gamma_{1-1} + \frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}} \right)}{\left( \gamma_{1-1} + \frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}} \right)^2 + \delta_R^2} \right). \quad (1.2)$$

La forme de ce résultat est caractéristique : il s'agit d'une lorentzienne de largeur à mi-hauteur

$$W = 2\gamma_{1-1} + 2\frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}}. \quad (1.3)$$

Pour que cette approximation soit valable, il faut notamment que la condition  $\delta_R \ll \gamma_{e1}, |\Omega_c|$  soit valable sur toute la largeur de la résonance, ce qui implique également que

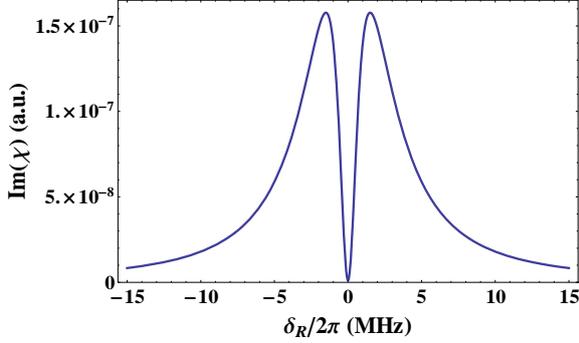


FIGURE 1.10 – Partie imaginaire de la susceptibilité en fonction du désaccord Raman pour  $\Delta_c/2\pi = 0$  Hz,  $\gamma_{e1}/2\pi = 3,5$  MHz,  $\gamma_{1-1}/2\pi = 5$  kHz et  $\Omega_c/2\pi = 3$  MHz.

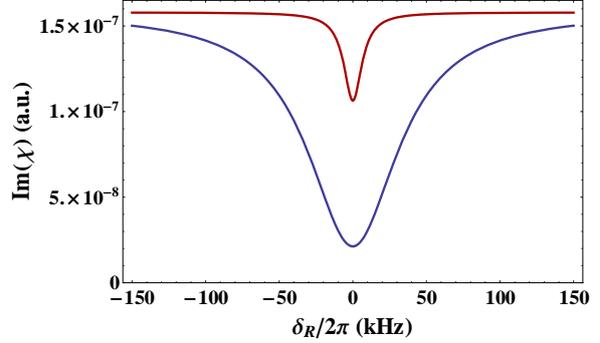


FIGURE 1.11 – Partie imaginaire de la susceptibilité en fonction du désaccord Raman. En bleu :  $\Delta_c/2\pi = 0$  Hz,  $\gamma_{e1}/2\pi = 70$  MHz,  $\gamma_{1-1}/2\pi = 5$  kHz et  $\Omega_c/2\pi = 3$  MHz. En rouge :  $\Delta_c/2\pi = 0$  Hz,  $\gamma_{e1}/2\pi = 0,93$  GHz,  $\gamma_{1-1}/2\pi = 5$  kHz et  $\Omega_c/2\pi = 3$  MHz. Ces paramètres correspondent à l'hélium sans et en présence d'élargissement inhomogène respectivement.

$$|\Omega_c| \ll \gamma_{e1}.$$

On comprend bien ici que le phénomène est limité à faible puissance de couplage par le taux de relaxation de la cohérence Raman  $\gamma_{1-1}$ . De plus, l'évolution de la largeur de la fenêtre de transparence en fonction de l'intensité de couplage est linéaire puisque donnée par le terme de saturation proportionnel à  $\Omega_c^2$ , qui est un résultat bien établi [Figueroa et al., 2006; Goldfarb, F. et al., 2008]. La forme de la susceptibilité dans ce cas est tracée sur la Fig. 1.11, et la formule (1.3) nous indique que plus la relaxation de la cohérence optique est grande, plus la fenêtre de transparence est fine pour une même puissance de couplage.

## II EIT dans l'hélium métastable à température ambiante

Cette section présente d'une part les propriétés particulières de l'hélium et les avantages liés à l'utilisation de ce milieu, et d'autre part les résultats obtenus en réalisant l'EIT dans une vapeur d'hélium métastable.

## II.1 Hélium métastable à température ambiante

L'hélium a été l'objet de nombreuses études expérimentales au cours des dernières décennies. Comme cet atome ne possède que deux électrons, il fait partie des éléments pour lesquels des calculs détaillés d'électrodynamique quantique sont possibles. L'écart entre ses niveaux électroniques est plus important que pour l'atome d'hydrogène, et ceci en fait un candidat plus adapté à une mesure expérimentale précise de la constante de structure fine [Pichanick et al., 1968; George et al., 2001]. Dans la littérature, l'hélium est principalement étudié sous ses deux formes isotopiques stables  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$ .  $^3\text{He}$  possède un spin nucléaire non nul et une structure hyperfine. Comme les temps de relaxation des spins nucléaires sont bien plus longs que ceux des spins électroniques,  $^3\text{He}$  semble par exemple très adapté à l'information quantique et la réalisation de mémoires quantiques [Dantan et al., 2005]. Au contraire,  $^4\text{He}$  ne possède pas de structure hyperfine et ses propriétés particulières en ont fait un bon candidat pour la condensation de Bose-Einstein [Pereira Dos Santos et al., 2001; Robert et al., 2001]. L'état de l'atome dans le condensat est alors un état métastable de  $^4\text{He}$ , dont l'énergie suffisante pour ioniser d'autres atomes ou molécules rend sa réalisation attractive.

Cette première section s'attachera à présenter les différentes caractéristiques de l'hélium gazeux et à justifier le choix d'un tel milieu pour l'observation de processus cohérents tels que l'EIT.

### II.1.1 Hélium métastable

Les atomes  $^4\text{He}$  ne possèdent pas de spin nucléaire et la répartition de leurs niveaux d'énergie est donc simple, comme l'illustre la figure 1.12 [George et al., 2001]. L'interprétation de phénomènes mettant en jeu plusieurs niveaux sera donc plus facile, si l'on compare à d'autres milieux tels que le rubidium par exemple [Xiao et al., 1995]. En particulier, une transition optique à  $1,083 \mu\text{m}$  avec laquelle il est possible d'observer le phénomène d'EIT apparaît entre les niveaux  $2^3\text{S}_1$  et  $2^3\text{P}$  [Goldfarb, F. et al., 2008].

Les atomes d'hélium sont excités dans le niveau  $2^3\text{S}_1$ , séparé du niveau fondamental  $1^1\text{S}_0$  de presque 20 eV, par un plasma produit par décharge radio-fréquence (RF). L'état fondamental  $1^1\text{S}_0$  a ses spins anti-parallèles tandis que l'état  $2^3\text{S}_1$  a ses spins alignés : l'excitation ne peut se réaliser par une transition optique puisqu'elle nécessite le retournement d'un spin. Les atomes portés dans l'état  $2^3\text{S}_1$  ne peuvent donc pas se désexciter dans l'état

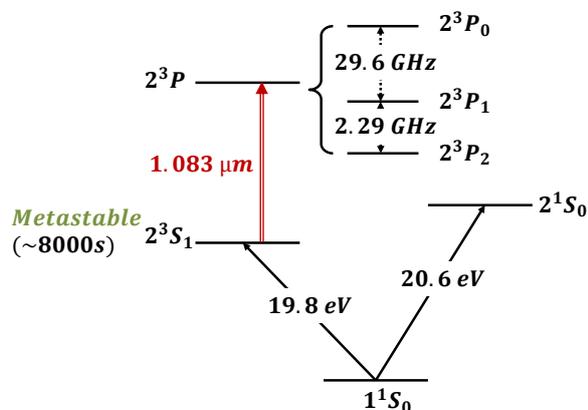


FIGURE 1.12 – Diagramme des niveaux d'énergie dans  $^4\text{He}$ . La transition étudiée est la transition  $2^3S_1 \rightarrow 2^3P$  à  $1,083 \mu\text{m}$ . Les atomes sont portés dans l'état métastable  $2^3S_1$  par décharge RF.

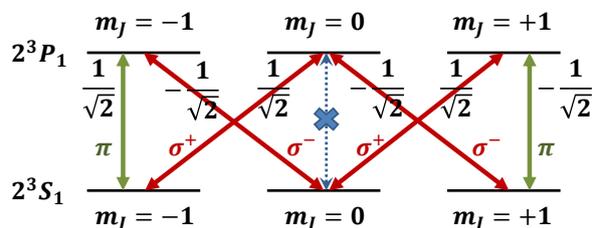


FIGURE 1.13 – Dégénérescence Zeeman des niveaux  $2^3S_1$  et  $2^3P_1$  et coefficients de Clebsch-Gordan associés aux transitions optiques. Les transitions rouges sont polarisées  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ , les transitions vertes polarisées  $\pi$  et la transition bleue est interdite.

fondamental par émission spontanée, conférant au niveau  $2^3S_1$  métastable (noté  $\text{He}^*$ ) une très longue durée de vie d'environ 8000 s [Drake, 1971].

Nous travaillons expérimentalement avec des cellules cylindriques remplies d' $^4\text{He}$  à 1 Torr. Afin d'exciter les atomes dans leur niveau métastable, la décharge RF est délivrée par deux électrodes collées de part et d'autre de la cellule. La décharge est produite simplement par un émetteur CB délivrant un signal RF à 27 MHz. Ce système nous permet d'obtenir selon la puissance de la décharge RF une densité d'atomes métastables de l'ordre de  $10^{11}$  atomes/ $\text{cm}^3$ , avec laquelle nous pouvons travailler expérimentalement. Cette valeur est évaluée à partir de la mesure de la transmission initiale de la cellule (voir annexe H.4). Une fois dans le niveau métastable, les atomes y restent pour une longue durée sans nécessiter de lasers supplémentaires de repompage. Le choix de la transition optique étudiée apparaît alors judicieux. Les atomes perdus ne participent d'ailleurs pas au signal optique mesuré, et nous permettent de travailler dans de bonnes conditions avec un « fond noir ». Cela justifie également de pouvoir considérer l'état  $2^3S_1$  comme l'état fondamental de notre système.

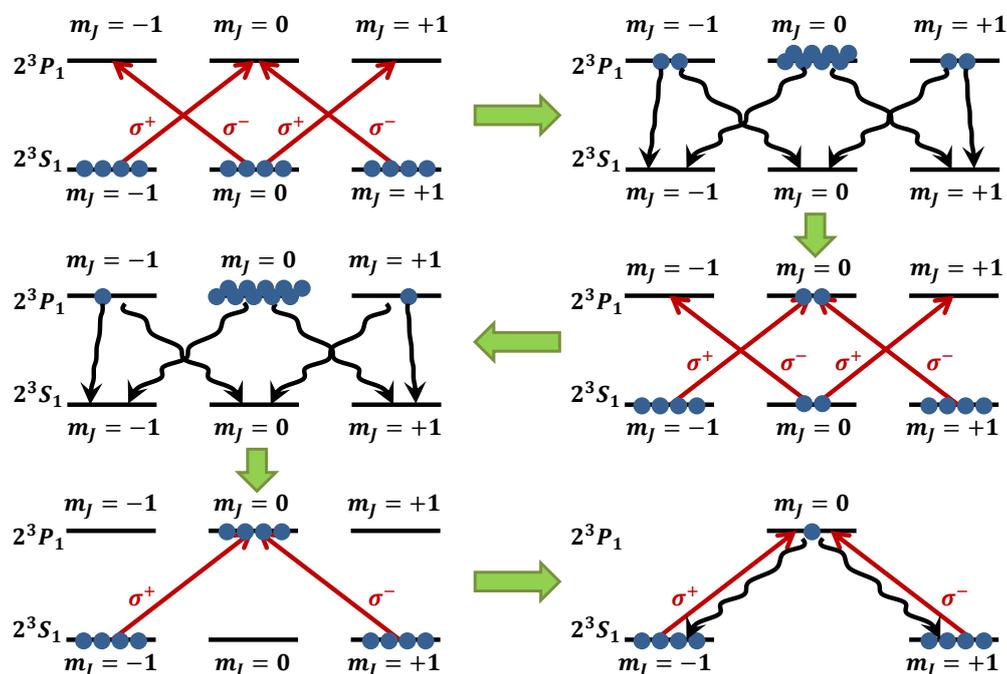


FIGURE 1.14 – Sélection du système en  $\Lambda$  par application de deux champs polarisés  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  de puissances équivalentes (cas du CPT)

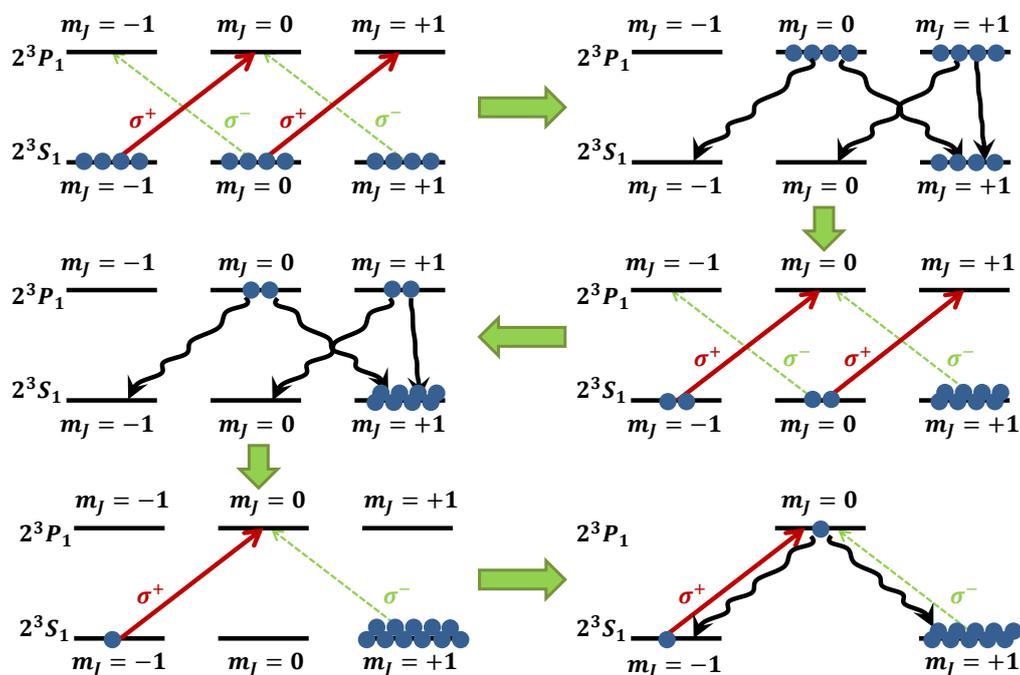


FIGURE 1.15 – Sélection du système en  $\Lambda$  par application d'un champ polarisé  $\sigma^+$  puis pompage optique pour l'EIT

### II.1.2 Dégénérescence Zeeman et extraction d'un système en $\Lambda$

Les atomes d' $^4\text{He}$  ne possèdent pas de structure hyperfine, mais les sous-niveaux Zeeman nous permettent d'extraire un système en  $\Lambda$  de la transition  $J=1 \rightarrow J=1$  entre les niveaux  $2^3\text{S}_1$  et  $2^3\text{P}_1$  [Aspect et al., 1988]. Chacun de ces niveaux possède trois sous-niveaux Zeeman  $m_J = -1, 0, 1$  et tous ces niveaux peuvent être couplés optiquement exceptée la transition  $m_J=0 \rightarrow m_J=0$  qui est interdite (Fig. 1.13).

Lorsque l'on couple nos atomes à un champ optique constitué des deux polarisations  $\sigma+$  et  $\sigma-$ , le sous-niveau  $m_J=0$  du niveau inférieur va progressivement se vider au fur et à mesure des cycles de pompage (Fig. 1.14). Ceci aura pour effet de vider également les sous-niveaux  $m_J=-1$  et  $m_J=1$  du niveau supérieur. Après quelques cycles de pompage, il est donc possible de considérer que le système n'est constitué que des trois sous-niveaux restants formant un système en  $\Lambda$  très pur sélectionné par polarisation (Fig. 1.14).

Quand l'une des excitations est faible devant l'autre, comme c'est le cas dans l'EIT, le processus de pompage optique est légèrement différent. Les atomes peuplent principalement le sous-niveau sondé  $m_J=1$  (Fig. 1.15), et il est toujours possible de considérer que le système, après quelques cycles de pompage, est seulement constitué des trois sous-niveaux restants. Le système final est alors un système en  $\Lambda$  cette fois-ci « préparé » pour l'observation du phénomène d'EIT.

### II.1.3 Hélium à température ambiante

L'utilisation d'un gaz à température ambiante pourrait sembler un choix discutable lorsque l'on souhaite observer des processus cohérents tels que ceux présentés dans ce manuscrit. On peut en effet penser que les collisions risquent de détruire les cohérences mises en jeu, et ce type de phénomènes est souvent étudié dans des systèmes « froids » [Hau et al., 1999]. Dans le cas de notre milieu constitué d'hélium, il semble logique d'envisager une désexcitation des atomes métastables  $\text{He}^*$  dans le fondamental He par l'ionisation Penning associée à la collision entre deux atomes métastables, ainsi que la dépolarisation des spins des atomes préparés dans l'état  $m_J = 1$  vers l'état  $m_J = -1$  lors des collisions avec He.

Mais les caractéristiques spécifiques de l'hélium en font un candidat adapté à l'étude à température ambiante. D'une part, lors des collisions avec les atomes dans l'état fondamental He, les atomes métastables  $\text{He}^*$  ne sont pas détruits et conservent leur polarisation

[Pinard, M. and Laloë, F., 1980]. Les atomes d'He agissent ainsi comme un gaz tampon pour He\*. D'autre part, l'ionisation Penning est presque interdite grâce au pompage optique permanent [Shlyapnikov et al., 1994]. Deux atomes métastables, chacun de spin 1 et alignés grâce au pompage optique, ne peuvent aboutir à la somme de spin total 1 constituée d'un He, d'un ion He<sup>+</sup> et d'un électron libre de spins 0,  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$  respectivement (Fig. 1.16). C'est d'ailleurs cette propriété qui a permis la réalisation expérimentale de condensats de Bose-Einstein dans l'hélium métastable [Pereira Dos Santos et al., 2001; Robert et al., 2001].

Au contraire, les collisions avec He jouent même un rôle favorable dans l'établissement du phénomène d'EIT. L'hélium à température ambiante est constitué d'un grand nombre de classes de vitesses, qui contribuent par effet Doppler à l'élargissement inhomogène des transitions étudiées. Cet élargissement est de l'ordre du GHz dans l'hélium et à  $1,083 \mu\text{m}$ . Le taux de relaxation de la cohérence optique est lui de l'ordre de la dizaine de MHz dans l'hélium, et la fréquence de Rabi de couplage doit être de l'ordre du MHz pour pouvoir observer des résonances assez fines spectralement (saturation de la largeur EIT en  $2\frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}}$ ). Il n'est donc a priori pas possible de pomper la totalité des atomes de la raie Doppler. Mais lors des collisions avec He, les atomes peuvent sauter d'une classe de vitesse à l'autre. Ces « collisions à changement de vitesse » redistribuent alors le pompage optique à toutes les classes de vitesse malgré la faible puissance de couplage, et toutes peuvent ainsi contribuer à la réalisation de l'EIT [Ghosh et al., 2009]. Il est donc préférable d'utiliser des faisceaux de couplage et de sonde co-propageants pour profiter de la réponse de toutes les classes de vitesse : si les faisceaux sont au contraire contra-propageants, le désaccord entre les faisceaux est nul seulement pour la classe de vitesse nulle et très peu d'atomes participent au phénomène d'EIT.

Enfin, les phénomènes cohérents sont limités par le temps passé par les atomes dans le faisceau lumineux. Alors qu'en l'absence de collisions la trajectoire des atomes au travers du faisceau serait ballistique, elle devient diffusive grâce aux collisions. Les collisions participent donc à l'augmentation du temps passé par les atomes dans le faisceau et donc à l'augmentation de la durée d'existence des phénomènes observés.

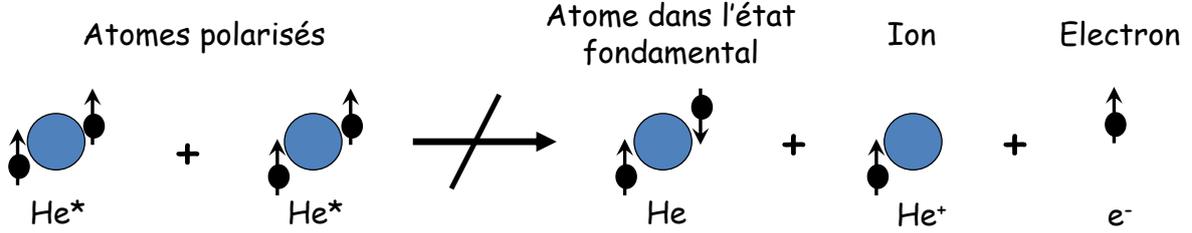


FIGURE 1.16 – Ionisation Penning interdite due à la conservation du spin.

## II.2 EIT

Nous allons dans cette section nous attarder sur l'explication théorique de l'EIT dans  $\text{He}^*$  en présence d'élargissement Doppler et sur l'observation expérimentale du phénomène. Ces résultats ont constitué une partie du travail de thèse de J. Ghosh [Ghosh, 2009].

Les notations utilisées sont celles de la section I.2.3.

### II.2.1 Elargissement inhomogène

Le système étudié est à température ambiante, et il est donc constitué de nombreuses classes de vitesse créant un élargissement inhomogène Doppler. Les résultats présentés en I.2.3 ne s'appliquent par contre qu'à une seule de ces classes. Pour déterminer la réponse globale du milieu, il est donc nécessaire de faire la somme des réponses de toutes ces classes de vitesse différentes [Figuerola et al., 2006].

Nous utilisons dans notre expérience des lasers co-propageants, chacune des classes de vitesse longitudinale  $v$  voit donc un même désaccord Raman  $\delta_R$ . Mais chacune voit également un désaccord optique  $\Delta_c(v) = \omega_c(v) - \omega_{e-1}$  différent dû à l'effet Doppler (Fig. 1.17). Lorsqu'un désaccord optique est appliqué lors de l'excitation d'un système en  $\Lambda$  tel que nous l'étudions ici, la réponse est profondément modifiée et devient en particulier asymétrique (Fig. 1.18) selon des profils dits « profils de Fano » [Lounis and Cohen-Tannoudji, 1992; Wong et al., 2004]. Ainsi, la réponse globale du système consiste en l'addition des profils de Fano sur l'ensemble des classes de vitesse.

La distribution des classes de vitesse des atomes dans un gaz chaud est donnée par la

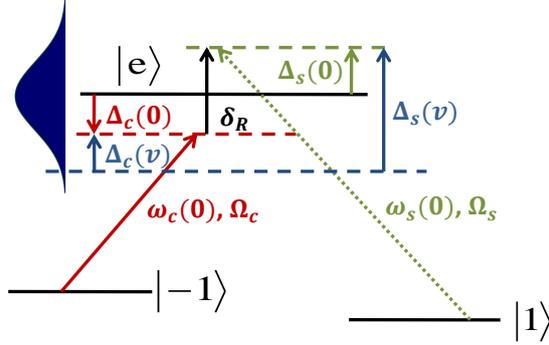


FIGURE 1.17 – Effet de l'élargissement Doppler sur les transitions optiques. Les désaccords  $\Delta_c$  et  $\Delta_s$  dépendent de la classe de vitesse mais pas le désaccord Raman  $\delta_R$ .

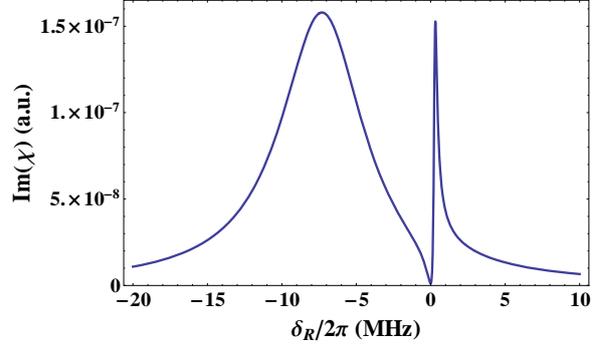


FIGURE 1.18 – Partie imaginaire de la susceptibilité en fonction du désaccord Raman pour  $\Delta_c/2\pi = 7$  MHz,  $\gamma_{e,1}/2\pi = 3, 5$  MHz,  $\gamma_{1,-1}/2\pi = 5$  kHz et  $\Omega_c/2\pi = 3$  MHz : « profil de Fano ».

distribution de Maxwell-Boltzmann. La réponse du système est donc donnée par :

$$\tilde{\sigma}_{e1}^{tot} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_{e1}(\Delta_c(v)) \frac{\sqrt{\ln 2}}{W_D \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(\omega_c(v) - \omega_c(0))^2}{W_D^2 / \ln 2} \right] d\omega_c(v),$$

où l'on a introduit la demi-largeur à mi-hauteur de l'élargissement Doppler  $W_D$ . Pour pouvoir résoudre analytiquement cette intégrale, la distribution gaussienne est remplacée par une distribution lorentzienne : on a vérifié numériquement que l'erreur commise est négligeable. Les détails de calcul peuvent être trouvés en annexe G.5.2 et le résultat final se présente sous la forme :

$$\tilde{\sigma}_{e1}^{tot} = \Omega_s \sqrt{\pi \ln 2} \frac{i\gamma_{1-1} + \delta_R}{(\gamma_{1-1} - i\delta_R) [W_D + \gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2}.$$

Cette formule est remarquable puisqu'elle est analogue à la formule analytique (1.1) obtenue en section I.2.3, dans laquelle le terme de relaxation de la cohérence optique  $\gamma_{e1}$  est remplacé par la somme de la demi-largeur de l'élargissement Doppler et de la relaxation de la cohérence  $W_D + \gamma_{e1}$ .

L'élargissement Doppler participe donc à la réduction de l'élargissement par saturation de la fenêtre de transparence, puisqu'il place le système dans les conditions de l'équation

(1.2) et de la figure 1.11. Sa largeur à mi-hauteur est alors donnée par :

$$W = 2\gamma_{1-1} + 2\frac{|\Omega_c|^2}{(W_D + \gamma_{e1})}.$$

## II.2.2 Processus de relaxation dans l'hélium métastable

Les résultats présentés jusqu'à présent ont été obtenus pour un système décrit de manière très générale. Intéressons-nous donc maintenant au cas particulier de l'hélium métastable, c'est-à-dire caractérisons plus précisément les taux de relaxation et d'alimentation dans ce cas précis. Le schéma à considérer est celui de la figure 1.8 où  $|e\rangle$  est le sous-niveau  $m_J = 0$  du niveau  $2^3P_1$ ,  $|1\rangle$  est le sous-niveau  $m_J = +1$  du niveau  $2^3S_1$  et  $|-1\rangle$  le sous-niveau  $m_J = -1$  du niveau  $2^3S_1$  (voir Fig. 1.13).

Concernant les populations tout d'abord, nous sommes en présence d'un gaz à température ambiante et les atomes sont en permanence en mouvement. Seuls les atomes en interaction avec les faisceaux lasers doivent être pris en considération, or certains rentrent et d'autres sortent à chaque instant de la zone d'interaction délimitée par le faisceau. Pour prendre en compte ce phénomène, nous introduisons un premier terme de relaxation vers l'extérieur, valable pour les trois états du système, dû au transit des atomes dans le faisceau : c'est le taux de transit  $\gamma_t$ .

Lorsque les atomes sont excités par la décharge RF, ils ont une probabilité égale d'être dans l'un des trois états  $|e\rangle$ ,  $|1\rangle$  ou  $|-1\rangle$ . Mais le niveau du haut relaxe très vite équitablement vers les niveaux inférieurs. Nous considérons en effet que plusieurs cycles de pompage ont déjà eu lieu lorsque l'on décrit le système par un système en  $\Lambda$ . Ainsi si l'on considère que le taux d'entrée dans le faisceau est le même que le taux de sortie et si on se place dans un régime de conservation des populations, chacun des états  $|1\rangle$  et  $|-1\rangle$  a donc un taux d'alimentation provenant de l'environnement extérieur égal à  $\frac{\gamma_t}{2}$ .

Mais il existe également des échanges entre les différentes populations dans notre système : les niveaux  $|1\rangle$  et  $|-1\rangle$  sont peuplés par désexcitation spontanée du niveau  $|e\rangle$ . Il existe donc un taux de désexcitation  $\Gamma_0$  pour le niveau du haut et un taux d'alimentation  $\frac{\Gamma_0}{2}$  pour chacun des niveaux du bas. Rappelons également qu'il n'y a pas de transition optique possible entre les deux états du bas  $|1\rangle$  et  $|-1\rangle$  puisqu'il s'agit de deux sous-niveaux Zeeman.

Les termes de relaxation des populations sont donc finalement donnés par :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_{ee}}{dt} \right)_{relax} &= -\Gamma_0 \sigma_{ee} - \gamma_t \sigma_{ee}, \\ \left( \frac{d\sigma_{-1-1}}{dt} \right)_{relax} &= \frac{\Gamma_0}{2} \sigma_{ee} - \gamma_t \left( \sigma_{-1-1} - \frac{1}{2} \right), \\ \left( \frac{d\sigma_{11}}{dt} \right)_{relax} &= \frac{\Gamma_0}{2} \sigma_{ee} - \gamma_t \left( \sigma_{11} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Les cohérences  $\sigma_{e1}$  ou  $\sigma_{e-1}$  vont subir un taux de relaxation  $\frac{\Gamma_0}{2}$ . A cela s'ajoutent les termes de relaxation provenant des collisions  $\Gamma_{coll}$  ainsi que le terme de transit  $\gamma_t$ . Nous noterons  $\Gamma_R$  le taux de relaxation de la cohérence entre niveaux inférieurs, auquel s'ajoute le terme de transit  $\gamma_t$ . Les termes de relaxation des cohérences sont donc donnés par :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_{e-1}}{dt} \right)_{relax} &= - \left( \frac{\Gamma_0}{2} + \Gamma_{coll} + \gamma_t \right) \sigma_{e-1} = - \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) \sigma_{e-1}, \\ \left( \frac{d\sigma_{e1}}{dt} \right)_{relax} &= - \left( \frac{\Gamma_0}{2} + \Gamma_{coll} + \gamma_t \right) \sigma_{e1} = - \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) \sigma_{e1}, \\ \left( \frac{d\sigma_{1-1}}{dt} \right)_{relax} &= - (\Gamma_R + \gamma_t) \sigma_{1-1}. \end{aligned}$$

Le schéma global de ce système est présenté en figure 1.19, et la cohérence optique suivant la transition sondée s'exprime dans ce cas :

$$\tilde{\sigma}_{e1}^{tot} = \Omega_s \sqrt{\pi \ln 2} \frac{i(\Gamma_R + \gamma_t) + \delta_R}{((\Gamma_R + \gamma_t) - i\delta_R) \left[ W_D + \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) - i(\Delta_c + \delta_R) \right] + |\Omega_c|^2}.$$

Les valeurs de ces différents taux de relaxation sont données pour une cellule d'hélium à 1 Torr et à température ambiante par [Courtade et al., 2002] :

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 2\pi \times 1,6 \times 10^6 \text{ s}^{-1}, \\ \Gamma &= 2\pi \times 2,3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}, \\ W_D &= 2\pi \times 0,86 \times 10^9 \text{ s}^{-1}, \end{aligned}$$

auxquels il faut rajouter le taux de transit pour un faisceau de taille centimétrique (voir

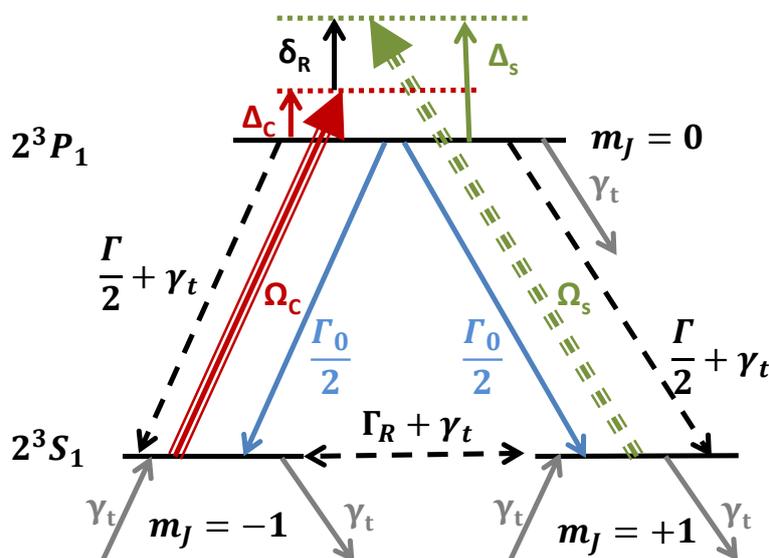


FIGURE 1.19 – Système en  $\Lambda$  ainsi que les termes de relaxation associés dans  $^4\text{He}^*$ .

annexe H.2) :

$$\gamma_t \sim 2\pi \times 10^3 \text{ s}^{-1}.$$

Le taux de relaxation  $\Gamma_R$  n'est a priori pas connu et sera déterminé expérimentalement dans les sections suivantes.

## II.2.3 Réalisation expérimentale et résultats

### Montage expérimental

Le schéma de l'expérience est donné en figure 1.20. La source lumineuse est une diode laser à  $1,083 \mu\text{m}$ , que l'on couple dans une fibre monomode afin d'obtenir un faisceau spatialement propre. Un cube séparateur de polarisation sépare ensuite le faisceau en deux bras, l'un pour le couplage et l'autre pour la sonde, chacun contrôlable en amplitude et en fréquence par deux modulateurs acousto-optique. Les deux faisceaux sont recombinaés à la sortie de ces modulateurs par un second cube séparateur, à la suite duquel une lame quart d'onde permet de transformer les deux polarisations linéaires perpendiculaires en deux polarisations circulaires orthogonales. Un télescope augmente la taille du faisceau pour augmenter le temps de transit. La cellule d'hélium, dont les atomes sont excités dans l'état métastable (détails en section II.1.1), est placée dans un blindage magnétique constitué de trois couches de  $\mu$ -métal afin de supprimer les champs magnétiques terrestre et résiduels

présents au sein du laboratoire. Enfin, la détection est réalisée par une photodiode avant laquelle un groupe d'optiques de polarisation constitué d'une lame quart d'onde, d'une lame demi-onde et d'un polariseur permet de sélectionner le champ sonde.

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus avec une cellule de 2 cm de long et un diamètre des faisceaux d'environ 1 cm.

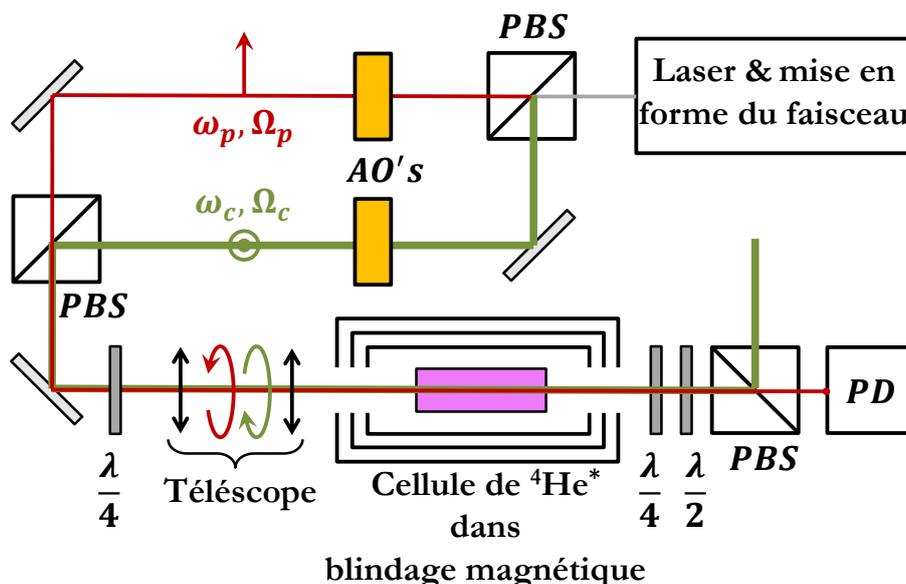


FIGURE 1.20 – Schéma du montage expérimental. AO's : modulateurs acousto-optique, PBS : cubes séparateur de polarisation, PD : photodiode.

### Observation des résonances EIT

Pour observer les fenêtres de transparence EIT, un générateur de forme arbitraire (AWG) contrôle le modulateur acousto-optique de la sonde en envoyant une rampe de fréquence dont l'amplitude est de quelques dizaines de kHz. La fréquence de la sonde est ainsi balayée autour de la résonance Raman. Afin de satisfaire les conditions nécessaires à l'EIT, la puissance de sonde est ajustée à 50 ou 60  $\mu\text{W}$  tandis que la puissance de couplage peut varier de 0,5 à 20 mW. A titre d'exemple, la figure 1.21 reproduit la transmission d'une fenêtre EIT obtenue expérimentalement pour une puissance de couplage de 6,5 mW. La largeur de la fenêtre de transparence est de quelques dizaines de kHz. Elle est à comparer ici à la demi-largeur Doppler qui est de l'ordre du GHz, ce qui nous indique que nous sommes bien dans le cadre de l'approximation  $\delta_R, \gamma_{bc} \ll |\Omega_c| \ll \gamma_{ab}$  de la section I.2.3.

Sur la figure 1.22 ont été tracés la partie imaginaire de la susceptibilité correspondante, donnée en fonction de la transmission  $T$  par  $\text{Im}(\chi) = -\frac{c}{\omega_0 L_{cell}} \ln(T)$  (annexe B), et son ajustement par une lorentzienne qui nous permet de déterminer la largeur de la fenêtre de transparence.

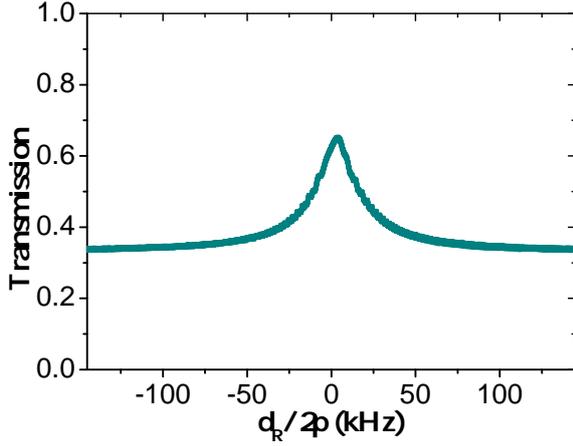


FIGURE 1.21 – Evolution expérimentale de la transmission de la sonde en fonction du désaccord Raman, pour une puissance de couplage de 6,5 mW et une puissance sonde d'environ 50  $\mu$ W et pour une cellule de 2 cm.

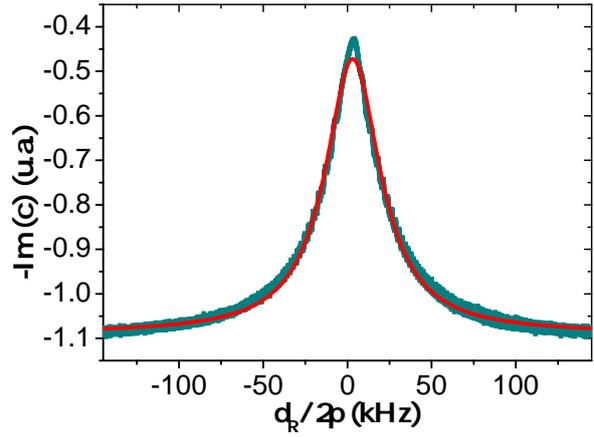


FIGURE 1.22 – Partie imaginaire de la susceptibilité extraite de la figure 1.21. Rouge : Ajustement lorentzien.

### Largeurs des résonances EIT

Lorsque le taux de relaxation de la cohérence optique  $\gamma_{e1}$  est grand devant les autres paramètres, l'amplitude de la cohérence optique peut être approchée par une lorentzienne de largeur  $W = 2\gamma_{1-1} + 2\frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}}$ , ce qui dans notre cas particulier s'écrit

$$W = 2(\Gamma_R + \gamma_t) + 2\frac{|\Omega_c|^2}{(W_D + \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t)} \approx 2(\Gamma_R + \gamma_t) + 2\frac{|\Omega_c|^2}{(W_D + \frac{\Gamma}{2})}.$$

La mesure des largeurs en fonction de l'intensité de couplage (proportionnelle à  $|\Omega_c|^2$ ) peut donc nous renseigner sur la valeur de  $\Gamma_R$  (Fig. 1.23). Le faisceau de couplage subit une forte absorption le long de la cellule, nous avons donc renormalisé son intensité par l'intensité moyenne présente au sein de la cellule en considérant une loi d'absorption de Beer-Lambert.

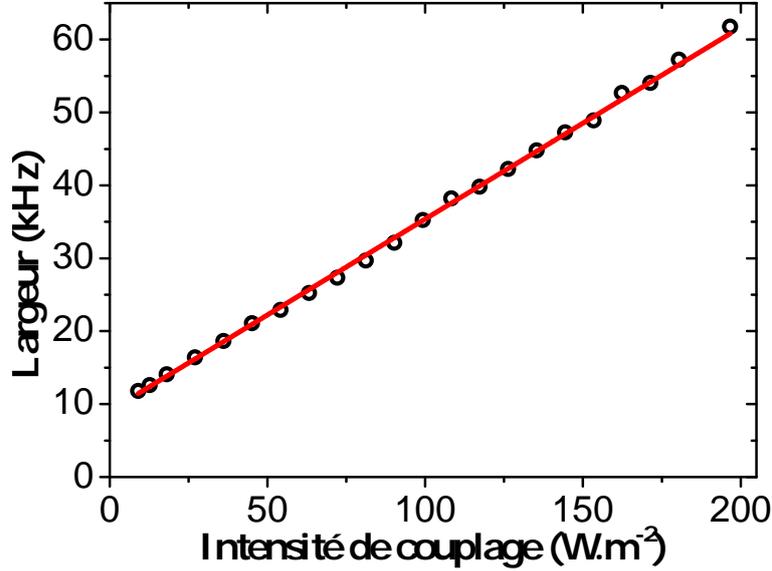


FIGURE 1.23 – Largeur des fenêtres de transparence EIT en fonction de l'intensité de couplage. Rouge : Ajustement linéaire. L'intensité de sonde est d'environ  $0,9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  et la transmission initiale de la cellule est de 39 %.

L'ajustement linéaire des largeurs expérimentales nous permet de déterminer les valeurs suivantes :

$$\frac{\Gamma_R + \gamma_t}{2\pi} = 4,5 \text{ kHz},$$

$$\frac{W_D}{2\pi} = 0,68 \text{ GHz}.$$

La valeur obtenue expérimentalement pour la demi-largeur de l'élargissement Doppler peut paraître faible comparée à la valeur théorique de 0,86 GHz. Dans notre modèle, nous considérons que tous les atomes sont pompés dans l'état noir pour le champ de couplage,  $|1\rangle$ , et ce pour chacune des classes de vitesse. En réalité, la faible puissance du champ de couplage (dont la fréquence de Rabi est de l'ordre du MHz) ne permet pas de pomper les atomes dans l'état noir sur l'ensemble de l'élargissement Doppler (de l'ordre du GHz), et les atomes ne participent pas tous au phénomène. Bien sûr, les collisions à changement de vitesse permettent de redistribuer le pompage sur l'ensemble des classes de vitesse, ce qui justifie au départ le modèle développé. Mais il semble a posteriori que l'effet de ces collisions ne soit pas suffisant, et le système réagit comme si la distribution des classes de vitesse était plus étroite. Ceci nous permet alors de définir une demi-largeur Doppler « effective »  $W_D^{eff}$ , donnée par le système expérimental et qui reflète la largeur sur laquelle

les atomes participent au phénomène [Goldfarb et al., 2009].

### Transmission

Sur la figure 1.21, on remarque que la transmission de la sonde à résonance Raman n'atteint pas 100%. Pour d'éventuelles applications, il est préférable de pouvoir se placer dans un régime où la transmission est importante. Nous avons donc mesuré expérimentalement celle-ci en fonction de l'intensité du champ de couplage. Nous disposons en effet d'un modèle analytique simple, qui nous permet d'obtenir à partir des équations de Bloch optiques la formule de la transmission de la sonde à résonance (annexe G.5.4) :

$$\ln T = -L_{cell} \frac{nd^2 \omega_0}{\epsilon_0 \hbar c} \frac{\Gamma_R + \gamma_t}{(W_D + \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t)(\Gamma_R + \gamma_t) + |\Omega_c|^2},$$

où  $L_{cell}$  est la longueur de la cellule. Cette formule peut se réexprimer en fonction de la transmission de la sonde mesurée sans couplage  $T_{0,B}$  :

$$\ln T = \ln T_{0,B} \frac{(W_D + \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t)(\Gamma_R + \gamma_t)}{(W_D + \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t)(\Gamma_R + \gamma_t) + |\Omega_c|^2},$$

où  $T_{0,B}$  est définie par

$$\ln T_{0,B} = -L_{cell} \frac{nd^2 \omega_0}{\epsilon_0 \hbar c} \frac{\Gamma_R + \gamma_t}{(W_D + \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t)(\Gamma_R + \gamma_t)}.$$

Sur la figure 1.24, les transmissions expérimentales (cercles noirs) et théoriques (rouge) de la sonde à l'accord Raman sont tracées pour une cellule de 2 cm et de transmission sans couplage 39%. Pour tracer la courbe théorique, les valeurs de  $W_D$  et  $\Gamma_R + \gamma_t$  sont déduites de la mesure des largeurs des fenêtres EIT.

La transmission expérimentale est inférieure à celle prédite par le modèle dès que l'intensité du champ de couplage est non nulle. Dans notre modèle, nous avons supposé tous les atomes pompés dans l'état noir  $|1\rangle$ . Ceci y compris dans la définition de la transmission sans couplage  $T_{0,B}$ . Un modèle plus complet qui prend en compte le pompage optique est nécessaire. Nous avons donc résolu le système des équations de Bloch optiques en utilisant la méthode de Floquet sous Mathematica (annexe G.2). Cette fois-ci, le pompage est pris en compte puisqu'il n'y a pas d'approximations sur les populations. Dans ce modèle, la

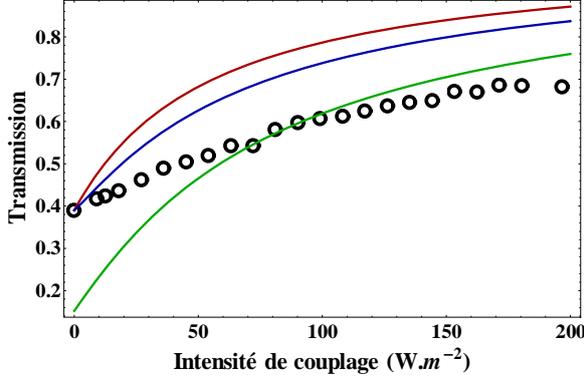


FIGURE 1.24 – Transmission à résonance pour une cellule de 2 cm. Cercles noirs : expérience, la cellule a une transmission initiale sans couplage  $T_0 = 39\%$ . En rouge : formule analytique pour une transmission initiale  $T_{0,B} = 39\%$ ; en vert : formule analytique pour une transmission initiale  $T_{0,B} = 15,2\%$ ; en bleu : résolution avec la méthode de Floquet pour une transmission initiale  $T_{0,F} = 39\%$ .

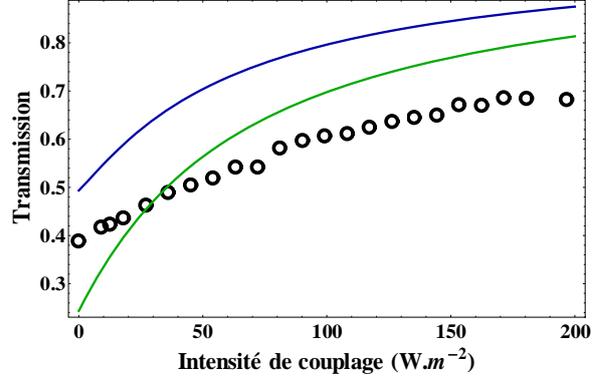


FIGURE 1.25 – Transmission à résonance pour une cellule de 2 cm. Cercles noirs : expérience, la cellule a une transmission initiale sans couplage de  $T_0 = 39\%$ . En vert : formule analytique pour une transmission initiale  $T_{0,B} = 24,4\%$ ; en bleu : résolution avec la méthode de Floquet pour une transmission initiale  $T_{0,F} = 49,3\%$ .

transmission initiale sans couplage est donnée pour des populations des niveaux  $| -1 \rangle$  et  $| 1 \rangle$  égales à  $1/2$  : seulement la moitié des atomes participe à l'absorption du champ sonde. Ainsi, si nous la notons  $T_{0,F}$ , il est possible de l'exprimer en fonction de la transmission sans couplage  $T_{0,B}$  du modèle analytique par :

$$\ln T_{0,F} = \frac{1}{2} \ln T_{0,B}.$$

Les courbes théoriques correspondantes sont représentées sur la figure 1.24, avec la résolution par la méthode de Floquet en bleu pour  $T_{0,F} = 39\%$  et le modèle analytique en vert pour  $T_{0,B} = 15,2\%$ .

La résolution par la méthode de Floquet donne des résultats plus proches des valeurs mesurées, mais la correspondance n'est pas parfaite. Il est intéressant de discuter aussi la différence entre les deux modèles théoriques. Si la résolution par Floquet prend en compte le pompage, les deux modèles devraient se rejoindre à haute puissance, lorsque le champ de couplage est assez intense pour pomper tous les atomes dans l'état  $| 1 \rangle$ . On n'observe

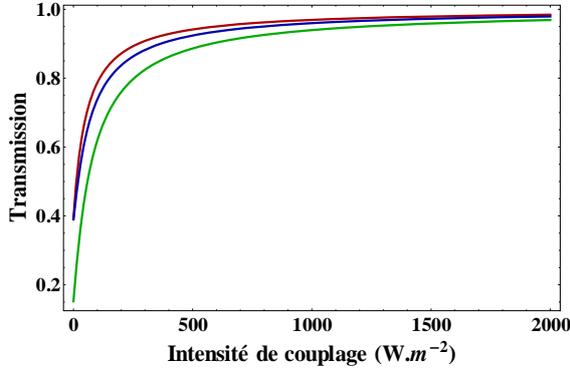


FIGURE 1.26 – Transmission à résonance pour une cellule de 2 cm. En rouge : formule analytique pour une transmission initiale  $T_{0,B} = 39\%$ ; en vert : formule analytique pour une transmission initiale  $T_{0,B} = 15,2\%$ ; en bleu : résolution avec la méthode de Floquet pour une transmission initiale  $T_{0,F} = 39\%$ .

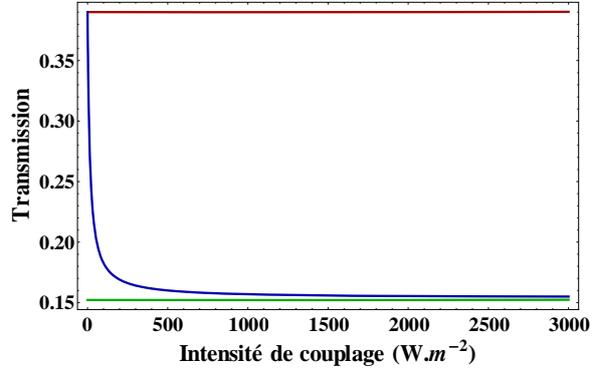


FIGURE 1.27 – Transmission hors résonance pour une cellule de 2 cm et  $\delta_R/2\pi = 10$  MHz. En rouge : formule analytique pour une transmission initiale  $T_{0,B} = 39\%$ ; en vert : formule analytique pour une transmission initiale  $T_{0,B} = 15,2\%$ ; en bleu : résolution avec la méthode de Floquet pour une transmission initiale  $T_{0,F} = 39\%$ .

pas ce comportement sur la figure 1.24. Ces deux modèles ont donc été tracés sur une plage d'intensité plus importante sur la figure 1.26, ainsi que la transmission hors résonance EIT sur la figure 1.27. Cette dernière représente en effet le fond résiduel d'absorption par les atomes pompés, et a été tracée pour une valeur du désaccord Raman  $\delta_R/2\pi = 10$  MHz afin de rester proche du centre de l'élargissement Doppler ( $\delta_R \ll W_D$ ). L'étude de ces courbes nous permet d'estimer une intensité de couplage pour laquelle il est possible de considérer le système entièrement pompé, aux alentours de  $I_c = 1000 \text{ W.m}^{-2}$ . S'il existe une plage d'intensité sur laquelle le système à trois niveaux considéré n'est pas entièrement pompé, il est raisonnable de penser de même que le système expérimental constitué de six sous-niveaux Zeeman ne peut pas être pompé sur une certaine plage d'intensité. La proportion d'atomes dans l'état  $|0\rangle$  devrait donc participer à une augmentation de l'absorption en plus de la réduction du phénomène d'EIT due au moins bon pompage. Dans notre modèle, nous avons également considéré une largeur de la cohérence optique homogène égale à l'élargissement Doppler. Dans le système réel, le pompage peut alors s'effectuer de manière différente compte-tenu des effets collisionnels. Pour aller plus loin, on pourrait dans un premier temps regarder les différences entre un modèle prenant en compte l'intégration de

la réponse sur l'élargissement inhomogène et le modèle considérant une largeur homogène égale à la largeur inhomogène. Il semblerait dans un second temps intéressant d'étudier le système à six niveaux complet pour obtenir un modèle plus exact. La transmission expérimentale  $T_0$  mesurée sans champ de couplage est en effet déterminée par l'absorption de deux des trois niveaux du bas du système réel. Elle peut finalement être liée aux transmissions sans couplage des modèles précédents par :

$$\ln T_0 = \frac{2}{3} \ln T_{0,B} = \frac{4}{3} \ln T_{0,F},$$

et les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 1.25. On s'attendrait alors à ce que tous les résultats, expérimentaux et théoriques, se rejoignent à partir d'une certaine intensité de couplage. Il n'est malheureusement pas possible avec notre système expérimental d'observer une plus grande plage d'intensité. Enfin, il est possible que des effets de propagation puissent influencer les résultats obtenus. Nous avons tenté des les prendre en compte très simplement en renormalisant l'intensité de couplage. Mais la réponse du milieu pourrait varier selon la distance de propagation et expliquer des différences entre expérience et simulations.

### III Conclusions

Ce chapitre a permis de rappeler les notions nécessaires à la bonne compréhension de la suite du manuscrit, ainsi que de présenter le système expérimental à la base des observations effectuées. Les principales conclusions sont synthétisées dans les tableaux suivants.

Concernant le phénomène de CPO :

- Il apparaît dans les systèmes à deux niveaux excités par un champ modulé en amplitude.
  - Les cohérences ne sont pas impliquées dans la description de ce phénomène, seulement les populations.
  - Il fait émerger une fenêtre de transmission dont la largeur spectrale est limitée par le taux de désexcitation du niveau supérieur.
  - Le modèle simple des équations cinétiques suffit à rendre compte du phénomène.
- 

Concernant le phénomène d'EIT :

- Il apparaît dans les systèmes à trois niveaux, lorsque la condition d'accord Raman est vérifiée entre un champ de couplage de grande amplitude appliqué sur une transition optique et un champ sonde négligable appliqué sur une seconde.
  - Dans un système en  $\Lambda$ , c'est la cohérence Raman entre niveaux fondamentaux qui détermine le processus.
  - Il fait émerger une fenêtre de transmission dont la largeur spectrale est limitée par le taux de relaxation de la cohérence Raman.
  - Un modèle prenant en compte les cohérences, comme la résolution des équations de Bloch optiques, est nécessaire pour rendre compte du phénomène.
-

Concernant l'EIT dans l'hélium :

- $^4\text{He}^*$  est un bon candidat à l'étude des processus cohérents.
  - L'EIT est réalisable dans le système en  $\Lambda$  extrait par polarisations de la transition optique à  $1,083 \mu\text{m}$  entre le niveau métastable  $2^3\text{S}_1$  et le niveau  $2^3\text{P}_1$  de  $^4\text{He}$ .
  - L'élargissement Doppler à température ambiante participe à la réduction des largeurs des fenêtres de transparence en présence d'un champ de couplage ainsi qu'à une réduction de la transmission à résonance.
  - L'étude des largeurs des fenêtres de transparence en fonction de l'intensité du champ de couplage permet de mesurer le taux de relaxation de la cohérence Raman entre niveaux inférieurs, ainsi que l'élargissement Doppler « effectif » pour le pompage.
-

# Chapitre 2

## Excitation du système en $\Lambda$ par des polarisations non circulaires

### Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Position du problème</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>II</b>	<b>Polarisations linéaires</b> . . . . .	<b>58</b>
II.1	EIT dans la base $( C\rangle,  NC\rangle)$ . . . . .	58
II.2	Introduction d'un champ magnétique . . . . .	63
<b>III</b>	<b>CPO ultra-fin</b> . . . . .	<b>68</b>
III.1	Système à deux niveaux ouverts . . . . .	69
III.1.1	Modèle des équations cinétiques . . . . .	70
III.1.2	Système ouvert et résonances ultra-fines . . . . .	72
III.1.3	Systèmes à deux niveaux : conclusion. . . . .	77
III.2	CPO double dans un système en $\lambda$ . . . . .	79
III.2.1	Modèle des équations cinétiques . . . . .	80
III.2.2	Système en $\Lambda$ : conclusion . . . . .	83
<b>IV</b>	<b>Polarisations elliptiques</b> . . . . .	<b>85</b>
IV.1	Système non dégénéré . . . . .	85
IV.2	Système dégénéré . . . . .	86
<b>V</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>88</b>

---

La réponse d'un système atomique à des excitations lumineuses dépend de la polarisation de ces dernières, comme le montre l'observation de l'effet Hanle dans les années 30 : lorsqu'on soumet un milieu à un champ magnétique et à une excitation lumineuse polarisée linéairement, la lumière réémise par les atomes constituant le milieu se dépolarise. Dans les années 70-80, des méthodes de spectroscopie utilisant la polarisation des excitations lumineuses sont développées afin d'extraire par une mesure directe les valeurs des durées de vie des populations et des taux de relaxation des cohérences optiques Wieman and Hänsch [1976]; Song et al. [1978]; Lee et al. [1980].

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment l'EIT pouvait être observée dans notre système expérimental en utilisant des polarisations circulaires orthogonales. Si l'on excite le même système avec des polarisations différentes, les phénomènes de CPO et d'EIT peuvent avoir lieu simultanément et changer la réponse du milieu.

Nous étudions donc dans ce chapitre la réponse de notre système lorsque les polarisations des champs de couplage et de sonde ne sont plus circulaires. Le cas des polarisations linéaires est d'abord examiné expérimentalement, puis un modèle théorique expliquant les résultats observés est décrit. Enfin, les résultats expérimentaux obtenus dans le cas de polarisations quelconques seront présentés .

## I Position du problème

Lorsqu'un système en  $\Lambda$  est excité par deux ondes électromagnétiques de pulsations de Rabi  $\Omega_c$  et  $\Omega_s$  à résonance optique (Fig.2.1.a), il existe pour le système un état stationnaire non couplé au niveau du haut. C'est l'état noir, donnant lieu au phénomène de CPT, défini par (cf I.2.1)

$$|NC\rangle = -\frac{\Omega_s}{\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_s^2}}|-1\rangle + \frac{\Omega_c}{\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_s^2}}|1\rangle.$$

L'état noir permet de définir un état orthogonal, l'état brillant, défini par

$$|C\rangle = \frac{\Omega_c}{\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_s^2}}|-1\rangle + \frac{\Omega_s}{\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_s^2}}|1\rangle.$$

Ces deux états associés à l'état excité  $|e\rangle$  constituent alors une base pour le système.

Le phénomène d'EIT a été présenté dans le chapitre précédent comme un cas limite

du phénomène de CPT, pour lequel l'état noir devient l'un des niveaux du système, qui est sondé par un champ petit devant le champ de couplage : lorsque le champ de sonde  $\Omega_s$  tend vers 0, il est possible de considérer que

$$|NC\rangle \approx |1\rangle \quad \text{et} \quad |C\rangle \approx |-1\rangle.$$

Dans cette configuration, le phénomène est limité par le taux de relaxation  $\gamma_{1,-1}$  de la cohérence Raman entre états fondamentaux du système.

Il est utile pour la suite de faire la distinction entre différents types d'états noirs. Lorsque le même système est excité par le champ de couplage  $\Omega_c$  seul, il est possible de définir les états  $|NC\rangle_c = |1\rangle$  et  $|C\rangle_c = |-1\rangle$ . De même lorsque le système est excité par le champ de sonde  $\Omega_s$  seul, nous pouvons définir les états  $|NC\rangle_s = |-1\rangle$  et  $|C\rangle_s = |1\rangle$ . Dans le cas de l'EIT, nous avons les relations remarquables suivantes (Fig.2.1 a)) :

$$|1\rangle = |NC\rangle_c = |C\rangle_s \approx |NC\rangle \quad \text{et} \quad |-1\rangle = |NC\rangle_s = |C\rangle_c \approx |C\rangle.$$

L'état sondé est donc exactement l'état noir pour le champ de couplage, qui est l'un des niveaux fondamentaux du système.

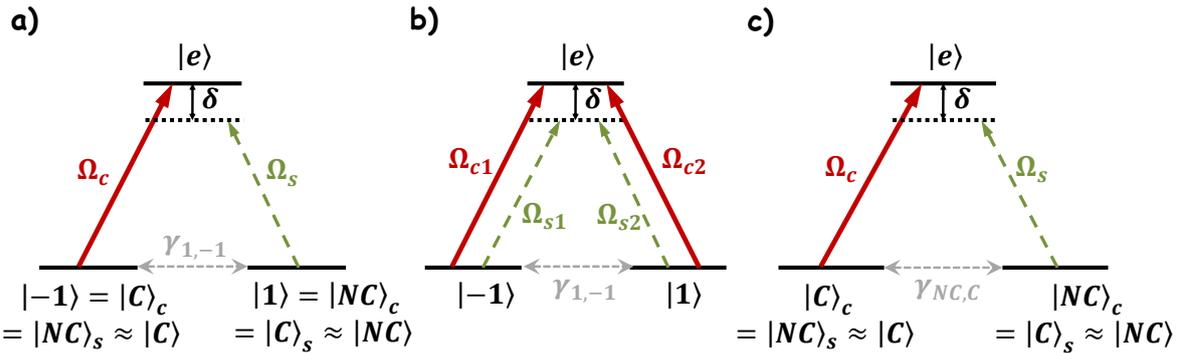


FIGURE 2.1 – a) Schéma d'excitation dans le cas usuel de l'EIT : un champ de faible intensité sonde l'état noir défini par le champ de couplage. b) Schéma d'excitation dans le cas du CPT : deux champs de couplage créent un état noir superposition des deux états fondamentaux. c) Même système que pour b) exprimé dans la base des états noir et brillant du CPT pour le couplage.  $\Omega_{c,s}$  représentent les fréquences de Rabi associées aux champs et sont données par les équations 2.1, 2.2, et 2.3.

Dans notre système expérimental, l'axe de quantification est choisi parallèle à la direction de propagation et les transitions optiques sont excitées à l'aide de polarisations circulaires. Si les champs sont polarisés différemment, par exemple si les polarisations sont linéaires, les deux transitions sont excitées simultanément par un même champ. Si un champ de couplage seul polarisé linéairement excite les deux transitions, le CPT pompe les atomes dans un état noir défini pour ce champ de couplage par  $|NC\rangle_c = -\frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ . Cet état n'est plus l'un des états fondamentaux du système mais une superposition symétrique de ces états. Est-il donc possible de sonder cet état par un champ de faible intensité, qui couplerait l'état  $|NC\rangle_c$  à l'état excité, à l'image du phénomène d'EIT ?

Prenons le cas général du système en  $\Lambda$  de la figure 2.1 b) sur lequel sont appliqués deux champs de couplage de fréquences de Rabi  $\Omega_{c1}$  et  $\Omega_{c2}$ . Ceux-ci définissent un état noir pour le champ total de couplage seul de fréquence de Rabi  $\Omega_c$ , donnant lieu au phénomène de CPT :

$$|NC\rangle_c = -\frac{\Omega_{c2}}{\Omega_c}|-1\rangle + \frac{\Omega_{c1}}{\Omega_c}|1\rangle,$$

où  $\Omega_c$  est défini par la relation :

$$\Omega_c = \sqrt{\Omega_{c1}^2 + \Omega_{c2}^2}. \quad (2.1)$$

Si l'on regarde le système dans la base ( $|e\rangle, |NC\rangle_c, |C\rangle_c$ ), on constate que c'est également un système en lambda dont on peut sonder l'état noir à l'aide d'un faible champ  $\Omega_s$  (Fig.2.1.c), si celui-ci vérifie dans le système réel les relations suivantes :

$$\Omega_{s1} = -\frac{\Omega_{c2}}{\sqrt{\Omega_{c1}^2 + \Omega_{c2}^2}}\Omega_s, \quad (2.2)$$

$$\Omega_{s2} = \frac{\Omega_{c1}}{\sqrt{\Omega_{c1}^2 + \Omega_{c2}^2}}\Omega_s. \quad (2.3)$$

Dans un système expérimental comme le nôtre constitué de sous-niveaux Zeeman (II.1.2), les champs de couplage  $\Omega_c$  et  $\Omega_s$  correspondent alors à deux polarisations elliptiques orthogonales. L'état noir pour le champ total est défini dans ce cas par

$$|NC\rangle = -\frac{\Omega_s}{\sqrt{\Omega_s^2 + \Omega_c^2}}|C\rangle_c + \frac{\Omega_c}{\sqrt{\Omega_s^2 + \Omega_c^2}}|NC\rangle_c \approx |NC\rangle_c = |C\rangle_s.$$

La configuration dans cette nouvelle base est donc identique à la configuration usuelle de l'EIT dans un système en  $\Lambda$ . Le phénomène d'EIT peut-il alors avoir lieu de la même façon dans cette nouvelle base ? Et qu'advient-il alors de la cohérence Raman  $\gamma_{NC,C}$  entre les états noir et brillant lorsqu'ils sont exprimés comme une superposition d'états ? En d'autres termes, que se passe-t-il lorsque l'on mélange les populations et les cohérences de notre système initial ?

## Mise en oeuvre

Le système en  $\Lambda$  utilisé expérimentalement est constitué de transitions  $\sigma_{\pm}$  entre sous-niveaux Zeeman. En particulier, des polarisations circulaires droite ou gauche sont utilisées pour coupler ces transitions : l'axe de quantification est choisi selon l'axe de propagation des champs optiques. Mais les polarisations circulaires droite ou gauche constituent une base dans l'espace des polarisations. Ainsi, lorsqu'on envoie une polarisation elliptique quelconque dans notre cellule d'hélium, nous sommes capables d'exciter les deux bras de notre système en  $\Lambda$  (transitions  $\sigma_{\pm}$ ) avec des pulsations de Rabi relatives qui dépendent de la polarisation du champ.

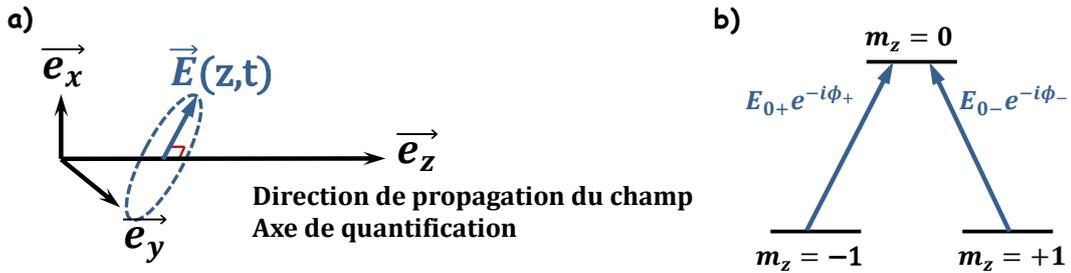


FIGURE 2.2 – a) Champ de polarisation quelconque se propageant selon  $\vec{e}_z$ . b) Schéma d'excitation du système en  $\Lambda$  considéré.  $E_{\pm 0}$  et  $\phi_{\pm}$  sont définis par les formules 2.6 et 2.7.

Considérons un champ à la pulsation optique  $\omega$  de polarisation quelconque dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  du référentiel lié au laboratoire (Fig.2.2.a) :

$$\vec{E} = E_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \vec{e}_x + E_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \vec{e}_y,$$

qui peut s'exprimer également

$$\vec{E} = \frac{E_x e^{-i\phi_x} - iE_y e^{-i\phi_y}}{2\sqrt{2}} e^{-i(\omega t - kz)} \vec{\varepsilon}_+ + \frac{E_x e^{-i\phi_x} + iE_y e^{-i\phi_y}}{2\sqrt{2}} e^{-i(\omega t - kz)} \vec{\varepsilon}_- + cc$$

lorsqu'on introduit les vecteurs complexes unitaires pour les polarisations circulaires droite et gauche :

$$\vec{\varepsilon}_+ = \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad (2.4)$$

$$\vec{\varepsilon}_- = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}. \quad (2.5)$$

Si l'on note en effet

$$E_+ = \frac{E_x e^{-i\phi_x} - iE_y e^{-i\phi_y}}{\sqrt{2}} = E_{0+} e^{-i\phi_+}, \quad (2.6)$$

$$E_- = \frac{E_x e^{-i\phi_x} + iE_y e^{-i\phi_y}}{\sqrt{2}} = E_{0-} e^{-i\phi_-}, \quad (2.7)$$

alors le champ est constitué d'une polarisation circulaire droite de module  $E_{0+}$  déphasée de  $\phi_+$  qui excitera la transition  $\sigma_+$  de notre système, et d'une polarisation circulaire gauche de module  $E_{0-}$  déphasée de  $\phi_-$  qui excitera la transition  $\sigma_-$  de notre système (Fig.2.2.b).

## II Polarisation linéaires

### II.1 EIT dans la base ( $|C\rangle, |NC\rangle$ )

On présente dans cette section les résultats obtenus dans le cas particulier où le système est excité par des polarisations linéaires. Supposons le système en  $\Lambda$  habituel excité par deux polarisations linéaires perpendiculaires, l'une intense de couplage polarisée selon  $\vec{e}_x$  :  $\vec{E}_c = E_c \cos(\omega_c t - k_c z) \vec{e}_x$ , et l'autre de sonde polarisée selon  $\vec{e}_y$  :  $\vec{E}_s = E_s \cos(\omega_s t - k_s z) \vec{e}_y$  (Fig.2.3.a). Dans la base des polarisations circulaires complexes,

ces deux champs s'expriment (2.4 et 2.5) :

$$\begin{aligned}\vec{E}_c &= \frac{E_c}{2\sqrt{2}}e^{-i(\omega_c t - k_c z)}\vec{\epsilon}_+ + \frac{E_c}{2\sqrt{2}}e^{-i(\omega_c t - k_c z)}\vec{\epsilon}_- + cc, \\ \vec{E}_s &= \frac{E_s e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}}e^{-i(\omega_s t - k_s z)}\vec{\epsilon}_+ - \frac{E_s e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}}e^{-i(\omega_s t - k_s z)}\vec{\epsilon}_- + cc.\end{aligned}$$

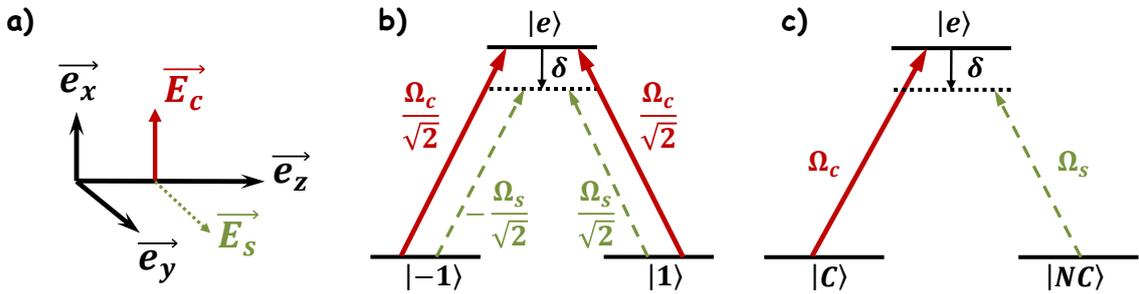


FIGURE 2.3 – a) Polarisation des champs de couplage et de sonde se propageant selon  $\vec{e}_z$ . b) Schéma d'excitation dans la base habituelle avec l'axe de quantification selon  $\vec{e}_z$ . c) Schéma d'excitation dans la base des états noir et brillant.

Si on note  $\Omega_c = \frac{dE_c}{2\hbar}$  et  $\Omega_s = -\frac{dE_s e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\hbar}$  les fréquences de Rabi complexes associées aux champs, le schéma d'excitation du système réel est alors présenté sur la figure 2.3 b). On peut constater que le système est symétrique dans ce cas particulier, et qu'il constitue ainsi la configuration la plus simple à étudier dans un premier temps. Le schéma d'excitation dans la base des états noir et brillant pour le champ de couplage est présenté sur la figure 2.3 c).

Comme dans le chapitre 1, nous raisonnons à l'aide de l'opérateur densité  $\hat{\sigma}$ . Regardons donc ce qu'il advient des cohérences dans la nouvelle base ( $|e\rangle, |C\rangle, |NC\rangle$ ). Les états noir et brillant pour le champ de couplage sont définis par

$$\begin{aligned}|NC\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \\ |C\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, la cohérence optique selon la transition sondée est donnée par

$$\sigma_{e,NC} = \langle e|\hat{\sigma}|NC\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{e,1} - \sigma_{e,-1}),$$

et la cohérence Raman par

$$\sigma_{NC,C} = \langle NC | \hat{\sigma} | C \rangle = \frac{1}{2}(\sigma_{1,1} - \sigma_{-1,-1}) + \frac{1}{2}(\sigma_{1,-1} - \sigma_{-1,1}).$$

Rappelons à ce stade que les relaxations des cohérences sont données pour notre système par (voir chapitre 1) :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_{-1,-1}}{dt} \right)_{relax} &= \frac{\Gamma_0}{2} \sigma_{ee} - \gamma_t \left( \sigma_{-1,-1} - \frac{1}{2} \right), \\ \left( \frac{d\sigma_{1,1}}{dt} \right)_{relax} &= \frac{\Gamma_0}{2} \sigma_{ee} - \gamma_t \left( \sigma_{1,1} - \frac{1}{2} \right), \\ \left( \frac{d\sigma_{e-1}}{dt} \right)_{relax} &= - \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) \sigma_{e-1}, \\ \left( \frac{d\sigma_{e1}}{dt} \right)_{relax} &= - \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) \sigma_{e1}, \\ \left( \frac{d\sigma_{1,-1}}{dt} \right)_{relax} &= - (\Gamma_R + \gamma_t) \sigma_{1,-1}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons les relaxations dans notre nouvelle base :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_{e,NC}}{dt} \right)_{relax} &= - \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) \sigma_{e,NC}, \\ \left( \frac{d\sigma_{NC,C}}{dt} \right)_{relax} &= - (\Gamma_R + \gamma_t) \sigma_{NC,C} + \frac{\Gamma_R}{2} (\sigma_{1,1} - \sigma_{-1,-1}). \end{aligned}$$

Dans la configuration présentée ici, le système est symétrique pour le champ de couplage et on peut donc s'attendre à ce que les populations des niveaux inférieurs  $| -1 \rangle$  et  $| 1 \rangle$  soit égales à  $1/2$ , ce qui nous amène au résultat remarquable suivant :

$$\left( \frac{d\sigma_{NC,C}}{dt} \right)_{relax} = - (\Gamma_R + \gamma_t) \sigma_{NC,C}.$$

Ce résultat nous suggère que comme les cohérences dans la nouvelle base possèdent les mêmes taux de relaxation que dans la configuration usuelle avec des polarisations circulaires, le phénomène d'EIT peut se produire de la même façon et avec les mêmes limitations. Nous nous attendons donc à observer une évolution de la transmission et des

largeurs de résonance en fonction de la puissance du champ de couplage équivalente dans les deux configurations, avec polarisations circulaires ou linéaires.

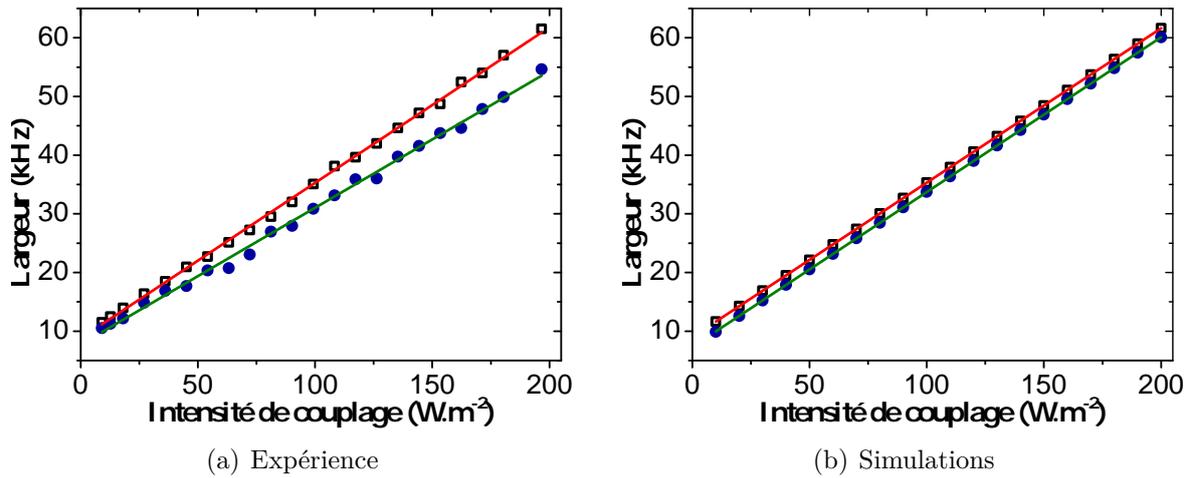


FIGURE 2.4 – Largeur à mi-hauteur des résonances EIT en fonction de l'intensité de couplage. Carrés noirs : le couplage et la sonde sont des polarisations circulaires droite et gauche (configuration habituelle). Disques bleus : le couplage et la sonde sont polarisées linéairement perpendiculairement.

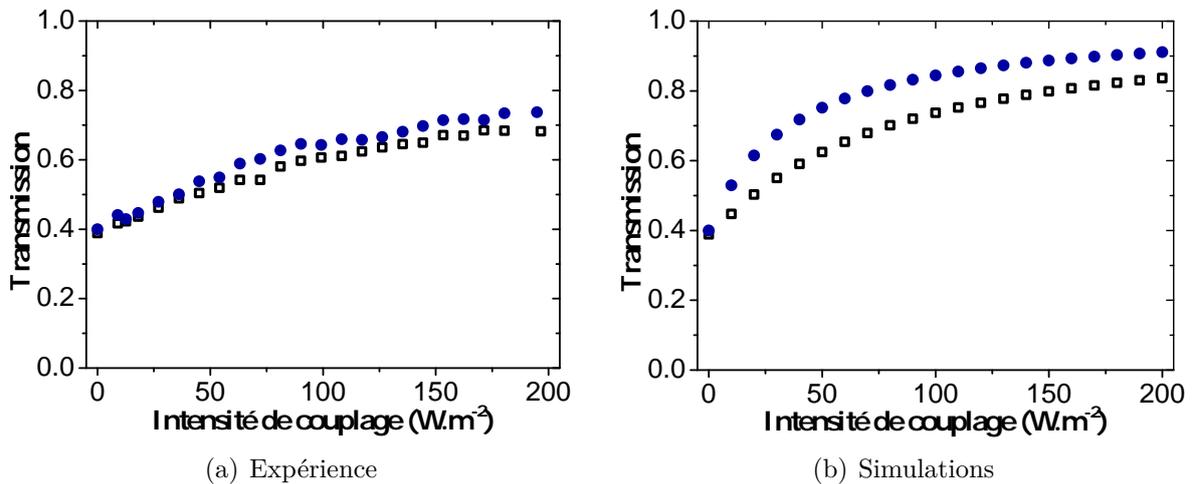


FIGURE 2.5 – Transmission au maximum de la fenêtre de transmission en fonction de l'intensité de couplage. Carrés noirs : le couplage et la sonde sont des polarisations circulaires droite et gauche (configuration habituelle). Disques bleus : le couplage et la sonde sont polarisées linéairement perpendiculairement.

## Résultats

Nous comparons dans ce paragraphe les résultats expérimentaux obtenus lorsque le système est excité par deux champs de couplage et de sonde polarisés circulairement droite et gauche, et par deux champs de couplage et de sonde polarisés linéairement et perpendiculaires. Le schéma du montage expérimental est le même que celui présenté dans la chapitre 1 section II.2.3.

La cellule d'hélium fait 2 cm de longueur, la puissance de la sonde est ajustée à  $60 \mu\text{W}$  et le diamètre des faisceaux (couplage et sonde) est de l'ordre du cm. La transmission non saturée de la cellule pour le champ sonde, sans couplage, est d'environ 40%. La fréquence de la sonde est scannée sur 300 kHz en 5 ms autour de la fréquence de couplage. Pour obtenir les résultats en configuration linéaire, la lame quart d'onde en amont de la cellule d'hélium est tournée de façon à ce que le couplage et la sonde soient alignés avec ses lignes neutres.

La largeur de la résonance EIT en fonction de l'intensité de couplage est représentée sur la figure 2.4(a), tandis que la figure 2.5(a) représente la transmission de la cellule à résonance Raman.

Les résultats sont très similaires, et le phénomène d'EIT semble se produire de façon équivalente dans les deux configurations [Lauprêtre et al., 2009]. Malgré tout, il existe de faibles différences qui sont reproductibles expérimentalement : nous observons une plus grande transmission à résonance dans le cas des polarisations linéaires, et la largeur de la résonance semble toujours plus faible dans cette configuration. L'ordonnée à l'origine en particulier, qui nous renseigne sur la valeur de  $\Gamma_R$ , est légèrement inférieure.

Les modèles utilisés jusqu'à présent ne permettent pas de comprendre cette différence, et il est nécessaire d'aller plus loin pour rendre compte du phénomène. Nous avons ainsi résolu analytiquement les équations d'évolution par simulation sous Mathematica. En utilisant un développement de Floquet (annexe E) à l'ordre 1 en  $\delta = \omega_s - \omega_c$ <sup>1</sup>, nous avons pu obtenir les courbes théoriques présentées figure 2.4(b) et figure 2.5(b).

Concernant la dépendance théorique des largeurs avec l'intensité de couplage, nous observons bien que la courbe correspondant aux polarisations linéaires est toujours en-dessous de celle correspondant aux polarisations circulaires, avec une ordonnée à l'origine légèrement inférieure. Ce modèle ne nous renseigne pas par contre sur la différence de pente

---

1.  $\delta$  est la différence de pulsation entre les champs de couplage et de sonde et ne doit pas être confondue avec le désaccord Raman  $\delta_R$ .

observée expérimentalement. Peut-être est-ce dû à une meilleure efficacité du pompage dans le cas des polarisations linéaires, mais dont nous ne comprenons pas encore l'origine. La transmission à résonance est également supérieure pour le cas linéaire avec notre modèle, ce qui semble correspondre aux résultats expérimentaux.

Même si notre modèle ne reproduit pas toutes les différences observées, il en reproduit certaines dont l'explication est donnée dans la suite de ce chapitre.

## II.2 Introduction d'un champ magnétique

Dans le but d'étudier les différences entre configuration avec polarisations circulaires et configuration avec polarisations linéaires, nous avons étudié le comportement de notre système lorsque la dégénérescence entre les niveaux fondamentaux est levée. En effet, il est possible de voir le système excité par des polarisations quelconques comme la superposition de deux systèmes en  $\Lambda$  « opposés » (Fig. 2.6.a). Si nous séparons les deux niveaux fondamentaux, nous devrions séparer les résonances associées à chacun de ces systèmes, et éventuellement observer pour quelles raisons les deux configurations ne sont pas strictement identiques.

Le système étudié est constitué de sous-niveaux Zeeman. Pour procéder à une levée de dégénérescence, nous introduisons un champ magnétique longitudinal statique  $\vec{B}$ . Les niveaux fondamentaux de notre système en  $\Lambda$  sont des sous-niveaux  $m_J = \pm 1$ , chacun va donc voir son énergie modifiée de  $\pm \Delta_Z$ , où  $\Delta_Z$  est le décalage Zeeman proportionnel au champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\Delta_Z = \frac{e\hbar}{2m_e} m_J g \|\vec{B}\|.$$

$m_e$  est la masse de l'électron, et  $g = 2$  le facteur de Landé pour le niveau  $2^3S_1$  de  $^4\text{He}$  (voir annexe H.3.1).

Le décalage Zeeman est donc de 2,8 kHz/mG. Si le champ magnétique appliqué est assez faible pour que le décalage Zeeman reste de l'ordre de la dizaine de kHz, alors l'influence du désaccord optique  $\Delta_c = \omega_c - \omega_{ba}$  peut être négligée sur le profil de transmission de la résonance EIT. En effet,  $\Delta_c$  doit être de l'ordre d'une fraction de la largeur inhomogène de la cohérence optique (dans notre cas déterminée par la largeur Doppler, après intégration sur les différentes classes de vitesse) pour commencer à observer l'apparition d'asymétries du type profils de Fano. Dans notre système expérimental, nous n'observons

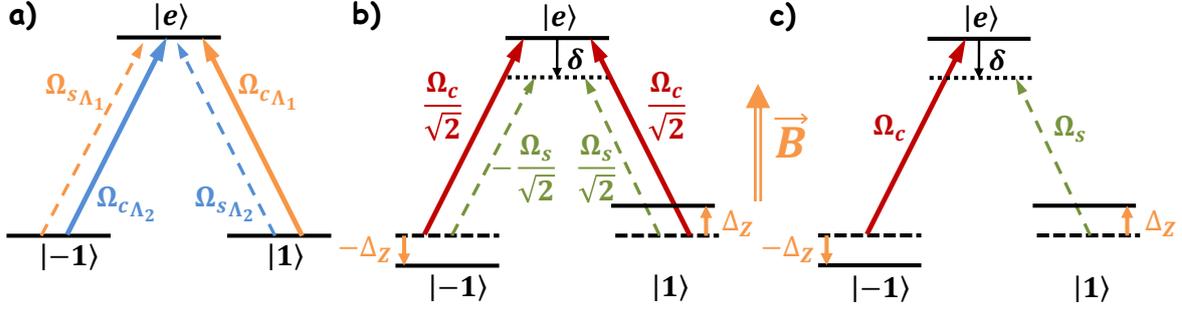


FIGURE 2.6 – a) Schéma d’excitation avec des polarisations quelconques : mise en évidence de deux systèmes en  $\Lambda$  « opposés ». b) Schéma d’excitation avec polarisations linéaires lorsque qu’un champ magnétique longitudinal  $\vec{B}$  est appliqué au système. c) Schéma d’excitation avec polarisations circulaires lorsque qu’un champ magnétique longitudinal  $\vec{B}$  est appliqué au système.

pas de différence majeure tant que le désaccord optique n’atteint pas plusieurs dizaines de MHz.

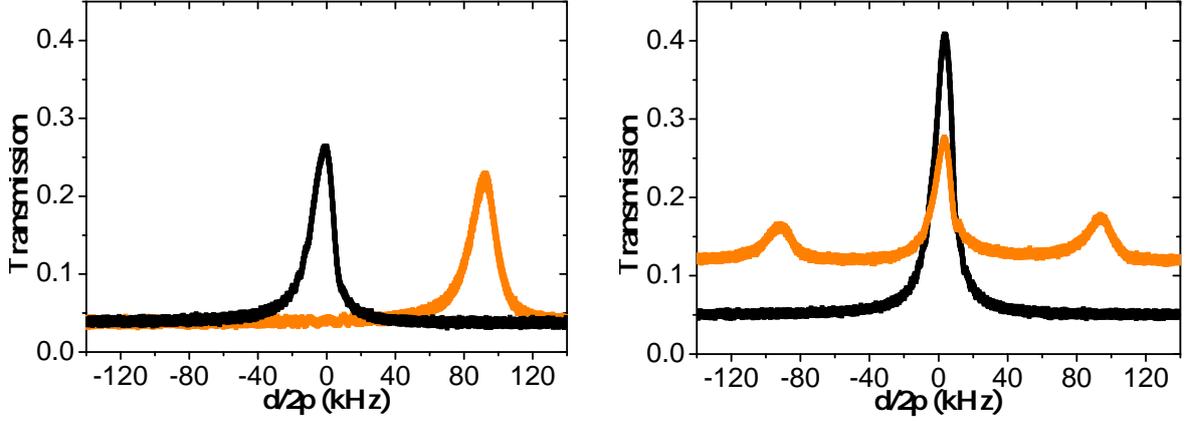
Le schéma d’excitation pour des polarisations circulaires est donné en figure 2.6 c). Dans cette configuration et compte-tenu de la remarque précédente, nous nous attendons à observer une résonance EIT à résonance Raman ( $\delta_R = 0$ ), soit lorsque  $\delta = \omega_s - \omega_c = -2\Delta_Z$ .

Lorsque notre système est excité par deux polarisations linéaires (Fig. 2.6.b), nous nous attendons pour les mêmes raisons à observer une résonance EIT à  $\delta = -2\Delta_Z$  dans le premier système en  $\Lambda$ , et une seconde à  $\delta = +2\Delta_Z$ , dans le second.

## Résultats

Pour réaliser cette expérience, une cellule d’hélium de longueur 6 cm et de diamètre 4 cm a été introduite dans un solénoïde longitudinal de longueur 20 cm et de diamètre 5 cm. La transmission initiale de la cellule est d’environ 4%. Le courant parcourant le solénoïde est contrôlé par un convertisseur tension-courant dont l’entrée est délivrée par un générateur de tension continue variable sur une plage de plusieurs dizaines de millivolts. Le protocole expérimental est identique à celui présenté dans la section précédente : nous observons le profil de transmission de la sonde en présence et en l’absence de champ magnétique pour des polarisations circulaires et linéaires.

Les profils de transmission obtenus dans le cas des polarisations circulaires sont reproduits sur la figure 2.7(a) pour une puissance de couplage de 5 mW et un champ magnétique



(a) Profil de transmission obtenu pour des polarisations circulaires.

(b) Profil de transmission obtenu pour des polarisations linéaires.

FIGURE 2.7 – Profils de transmission expérimentaux obtenus pour une puissance de couplage de 5 mW. Noir : aucun champ magnétique n’est appliqué. Orange : un champ magnétique d’environ 15 mG est appliqué.

d’environ 15 mG. Comme nous l’avons supposé, une résonance EIT apparaît pour chacun des cas à l’accord Raman, ce qui correspond à  $\delta = 0$  lorsqu’il n’y a pas de champ magnétique, et à  $\delta = -2\Delta_Z \approx 2\pi \times 90$  kHz lorsque le champ magnétique est appliqué.

Les profils obtenus pour les mêmes conditions expérimentales mais avec des polarisations linéaires sont représentés en figure 2.7(b). Nous y voyons cette fois la présence de trois pics de largeur inférieure à 20 kHz séparés chacun d’environ 90 kHz. Les pics latéraux ont une origine évidente : il s’agit des deux résonances EIT associées aux deux systèmes en  $\Lambda$  présents dans le système (Fig. 2.6 a) et b)), comme nous l’avons supposé. Le troisième pic apparaît par contre à  $\delta = 0$ , lorsque les lasers de couplage et de sonde sont résonnants. S’il n’est dû à aucune résonance Raman, il peut être issu soit de la réponse des deux champs sur une même transition, soit d’un processus à plus de deux photons impliquant les deux transitions et la cohérence Raman.

Si le phénomène implique la cohérence Raman, celui-ci sera fortement perturbé par la présence d’inhomogénéités du champ magnétique. Nous avons donc mesuré les largeurs des différentes résonances en présence de fortes inhomogénéités du champ. La manipulation expérimentale a consisté à ouvrir le blindage magnétique dans lequel est placée la cellule et à la rapprocher d’un bord. Dans ce cas, les inhomogénéités du champ magnétique sont assez importantes, sans pour autant annihiler complètement le phénomène d’EIT. Les ré-

sultats obtenus sont présentés sur la figure 2.8(a). La largeur des résonances EIT classique (sans champ magnétique et avec polarisations circulaires) et la largeur des résonances centrales pour des polarisations linéaires y sont tracées en présence ou non d'inhomogénéités du champ magnétique.

Le tracé est effectué en fonction de l'intensité de couplage moyenne au sein de la cellule : celle-ci est en effet assez longue pour ne plus pouvoir être considérée comme un milieu optiquement mince, et le champ de couplage subit une absorption forte le long de la cellule. Les intensités sont donc renormalisées par l'intensité moyenne présente dans la cellule en considérant une absorption de la cellule pour le champ de couplage suivant la loi de Beer-Lambert.

La figure 2.8(b) reproduit les simulations correspondant aux courbes de la figure 2.8(a). Les inhomogénéités du champ magnétique ont été modélisées par une distribution uniforme des valeurs de la composante longitudinale du champ sur une plage de 3,75 mG (soit entre -1,875 et +1,875 mG). Ceci correspond à un élargissement inhomogène sur la transition du champ sonde de 21 kHz.

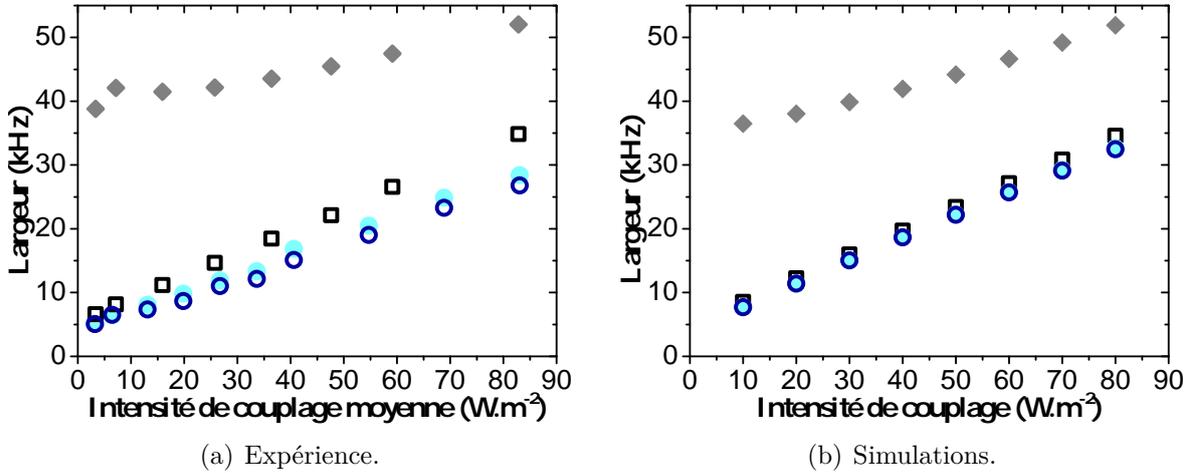
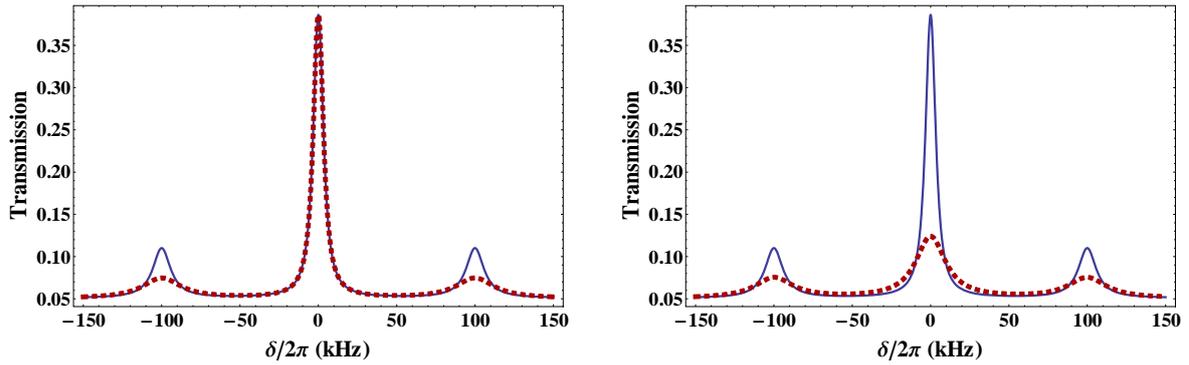


FIGURE 2.8 – Largeur à mi-hauteur des résonances en fonction de l'intensité de couplage moyenne dans la cellule. Carrés noirs : EIT en polarisations circulaires sans champ. Disques bleu clair : résonance centrale en polarisations linéaires avec champ. Losanges pleins gris : EIT en polarisations circulaires sans champ en présence d'inhomogénéités du champ magnétique. Cercles bleus : résonance centrale en polarisations linéaires avec champ en présence d'inhomogénéités du champ magnétique. Les simulations ont été faites avec  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma = 2\pi \times 0,53 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma_R = 2\pi \times 0,4 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma_t = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $\Delta_z/2\pi = 100 \text{ kHz}$  pour correspondre aux conditions expérimentales.

La résonance EIT en configuration circulaire est comme attendu fortement élargie par l'introduction d'inhomogénéités magnétiques. Par contre, la résonance centrale en configuration linéaire ne voit aucune modification significative de sa largeur. Cette résonance est donc insensible aux inhomogénéités du champ magnétique. Ceci prouve que le phénomène n'implique pas la cohérence entre les deux sous-niveaux fondamentaux, et que cette résonance provient d'une réponse à deux champs appliqués sur une même transition.

Le phénomène permettant d'obtenir des résonances de largeur sub-naturelle lorsque deux lasers sont présents sur une même transition est le phénomène de CPO, qui a été présenté dans le premier chapitre. Mais les résonances associées ont une largeur liée à la durée de vie des populations du niveau supérieur, ce qui correspond dans notre système à une largeur de l'ordre du MHz ( $\Gamma_0/2\pi = 1,6$  MHz) : cet effet ne peut donc expliquer qu'une augmentation du minimum du spectre de transmission en configuration linéaire, mais pas la présence de cette résonance ultra-fine. La troisième résonance, même si elle ne correspond à aucune résonance Raman, semble de largeur identique à la résonance EIT classique limitée par  $\Gamma_R + \gamma_t$ . Sur les figures 2.9(a) et 2.9(b) sont tracés les profils de transmission obtenus par simulation avec la méthode de Floquet lorsque les valeurs des taux  $\Gamma_R$  et  $\gamma_t$  sont modifiés. On observe ici que la résonance centrale est insensible à une modification du taux de relaxation de la cohérence Raman  $\Gamma_R$ , mais que sa largeur est déterminée par le taux de transit  $\gamma_t$ .



(a) Pour un même taux de transit  $\gamma_t = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma_R = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  en bleu et  $\Gamma_R = 2\pi \times 10 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  en rouge pointillé. (b) Pour un même taux  $\Gamma_R = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma_t = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  en bleu et  $\gamma_t = 2\pi \times 10 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  en rouge pointillé.

FIGURE 2.9 – Transmission pour des polarisations linéaires en considérant une cellule de 6 cm de transmission initiale 5 % avec  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma = 2\pi \times 0,53 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_c = 2\pi \times 3 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ , et  $\Delta_z/2\pi = 50 \text{ kHz}$ .

Résumons nos observations. Lorsque le système étudié expérimentalement est non dégénéré et excité par des polarisations linéaires, nous avons pu observer trois résonances ultra-fines dont la largeur est de l'ordre de la dizaine de kHz. Deux sont dues à l'EIT ayant lieu lorsque la condition d'accord Raman est respectée sur chacun des systèmes en  $\Lambda$  présents. Comme elles impliquent la cohérence Raman entre deux sous-niveaux Zeeman, leur largeur est sensible aux inhomogénéités du champ magnétique. La troisième résonance correspond à la réponse du système à deux champs appliqués sur la même transition. Sa largeur est alors insensible aux inhomogénéités du champ magnétique, et elle semble ne dépendre que du taux de transit des atomes dans le faisceau laser. Alors que les CPO usuelles ne peuvent pas expliquer l'apparition de cette résonance, nous allons voir que ce phénomène est tout de même à l'origine de celle-ci.

### III CPO ultra-fin

Nous avons observé une résonance de quelques kHz lorsqu'un système en  $\Lambda$  en présence d'un faible champ magnétique est excité par deux champs de couplage et de sonde polarisés linéairement. Le CPO est un phénomène qui donne naissance à l'apparition d'une fenêtre de transmission lorsque deux champs sont à résonance sur une seule transition optique, mais sa largeur de raie est normalement limitée par la durée de vie du niveau excité. Si le phénomène observé expérimentalement n'est pas limité par la durée de vie du niveau supérieur mais par le taux de transit dans le faisceau laser, il est tout de même lié à un phénomène d'oscillations de population. L'objet de cette section est de montrer comment le phénomène de CPO peut mener à la création de résonances de largeur inférieure au taux de relaxation des populations du niveau excité.

Distinguons d'abord deux notions utiles à la compréhension de la suite de cette section : les notions de système ouvert et de système fermé. Dans un système comme le nôtre, il est possible de considérer un système ouvert ou fermé de deux points de vue différents : du point de vue de l'ensemble atomique ou bien du point de vue du système atomique. Dans le premier cas, il s'agit de savoir si les atomes dont on regarde la réponse peuvent entrer ou sortir du volume étudié (=ensemble atomique). Dans le second, il s'agit de savoir si pour un atome donné, le système de niveaux d'énergie considéré (=système atomique) peut échanger avec d'autres niveaux qui constituent alors l'environnement extérieur du système. Dans notre cas, un système ouvert que ce soit du point de vue de l'ensemble

atomique ou du système atomique sera modélisé de la même manière par des taux de relaxation vers l'extérieur, et nous verrons que la conséquence est la même quant à la description du CPO. On pourrait par contre imaginer des différences quant aux conséquences pour les applications de type stockage d'information, où perdre un atome de l'ensemble atomique pourrait avoir des conséquences différentes de celles de la désexcitation du système atomique considéré vers l'extérieur.

Comme les CPOs sont habituellement considérées dans les systèmes à deux niveaux, nous étudierons d'abord comment le phénomène de CPO peut produire des résonances ultra-fines dans un système à deux niveaux. Nous verrons ensuite que la réponse d'un système à trois niveaux en  $\Lambda$  peut faire apparaître le même type de réponse.

### III.1 Système à deux niveaux ouverts

Lorsqu'un système à deux niveaux est excité par un champ de pompe intense, le profil spectral de transmission d'une sonde de faible intensité est fortement modifié. Une résonance en transmission, dont la largeur à faible puissance de pompe est limitée par la durée de vie du niveau supérieur, est en particulier créée lorsque les champs sont à résonance : c'est le phénomène de CPO (Chapitre 1). Pourtant, il est possible d'observer des profils de transmission beaucoup moins traditionnels lorsque le système considéré n'est pas fermé, et lorsque le taux de relaxation des populations du niveau supérieur et du niveau fondamental vers l'extérieur ne sont pas égaux. Un tel système, dit « ouvert », voit son comportement profondément modifié en comparaison à un système fermé.

Dans les années 80, des travaux ont prédit théoriquement l'existence de résonances ultra-fines dans les systèmes à deux niveaux ouverts [Friedmann et al., 1986; Berman et al., 1988; Wilson-Gordon and Friedmann, 1989]. Ces théories furent développées dans un contexte d'étude du mélange à quatre ondes. Le lien avec le phénomène d'oscillations cohérentes de populations n'apparaîtra qu'à partir des années 90, dans des systèmes à plusieurs niveaux. Des résonances ultra-fines en transmission ou en absorption seront en effet observées expérimentalement dans les profils de transmission de systèmes plus complexes [Akulshin et al., 1998; Lezama et al., 1999; Lipsich et al., 2000; Fuchs et al., 2007]. Les oscillations de populations seront aussi invoquées pour justifier la présence de fréquences supplémentaires dans des signaux à résonance optique [Akulshin et al., 2011].

Dans ces dernières références, le lien entre résonances ultra-fines et oscillations de

populations est toujours ambigu : les explications invoquent à la fois des notions de cohérence Zeeman et d'oscillations de populations. Un lien direct, présentant les différentes formes de profils de transmission dans un système à deux niveaux à partir du phénomène de CPO n'existe pas à ce jour. Cette section s'attardera donc à formuler en termes de CPO les différents processus pouvant avoir lieu dans un système à deux niveaux ouvert, rétablissant le lien entre la vision en terme de mélange à quatre ondes de la fin des années 80 et les références plus récentes.

En particulier, nous montrons qu'un modèle développé à partir des équations cinétiques suffit à rendre compte des phénomènes ultra-fins observés dans les systèmes à deux niveaux ouverts. Une comparaison avec la résolution complète des équations de Bloch optiques à l'aide d'un développement de Floquet au premier ordre montre l'efficacité du modèle simple des équations cinétiques, preuve du lien avec le phénomène de CPO.

### III.1.1 Modèle des équations cinétiques

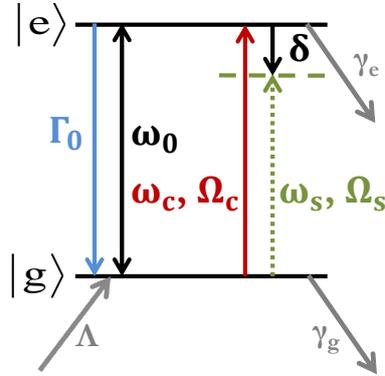


FIGURE 2.10 – Système à deux niveaux ouvert.  $\Gamma_0$  est l'inverse de la durée de vie du niveau supérieur  $|e\rangle$  et  $\omega$  la fréquence de la transition optique entre  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ . Un champ de couplage (de sonde) de pulsation de Rabi  $\Omega_c$  ( $\Omega_s$ ) et de pulsation optique  $\omega_c$  ( $\omega_s$ ) est appliqué à la transition.  $\delta$  est le désaccord entre champs pompe et sonde.  $\Lambda$  est le taux d'alimentation du niveau fondamental  $|g\rangle$ , et  $\gamma_{e,g}$  sont les taux de relaxation vers l'extérieur des niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ .

Considérons le système à deux niveaux ouvert de la figure 2.10, que nous avons décrit de manière générale : chacun des niveaux possède un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_e$  ou  $\gamma_g$ . Un taux d'alimentation  $\Lambda$  a été introduit pour le niveau fondamental, et  $\Gamma_0$  est le taux de désexcitation du niveau supérieur vers le niveau fondamental. Enfin, le

système est couplé à deux champs optiques : un champ de couplage de fréquence de Rabi  $\Omega_c$  et de fréquence optique  $\omega_c$ , et un champ de sonde de fréquence de Rabi  $\Omega_s$  et de fréquence optique  $\omega_s$ . La démarche est identique à celle du premier chapitre : l'intensité totale appliquée au système peut s'exprimer  $I(t) = I_0 + I_1 e^{-i\delta t} + I_1 e^{i\delta t}$  (cf F.3 pour la définition de  $I(t)$  et  $\sigma$ ), et nous cherchons à déterminer la différence de population entre niveau excité  $|e\rangle$  et niveau fondamental  $|g\rangle$  :  $w(t) = N_e(t) - N_g(t) = w_0 + w_1 e^{-i\delta t} + w_{-1} e^{i\delta t}$ . Le système est cette fois-ci soumis aux équations d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dN_e}{dt} &= -(\Gamma_0 + \gamma_e)N_e + \frac{I(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(N_g - N_e), \\ \frac{dN_g}{dt} &= n\Lambda + \Gamma_0 N_e - \gamma_g N_g - \frac{I(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(N_g - N_e).\end{aligned}$$

La transmission du système considéré pour le champ sonde est donnée par (cf F.3)

$$T = \exp \left[ \sigma \left( w_0 + \operatorname{Re} \left( w_1 \frac{I_0}{I_1} \right) \right) L \right],$$

et la réponse du système est donc donnée par le terme  $w_1$  oscillant à  $e^{-i\delta t}$ . Nous obtenons en régime permanent

$$w_1 = -w_0 \frac{I_1 \sigma}{\hbar\omega_0} \frac{\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta}{(\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta)(\gamma_g - i\delta) + \frac{I_0 \sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta)}, \quad (2.8)$$

avec

$$w_0 = -n\Lambda \frac{\Gamma_0 + \gamma_e}{\gamma_g(\Gamma_0 + \gamma_e) + \frac{I_0 \sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_g + \gamma_e)}.$$

La formule obtenue est compliquée et il est difficile d'en tirer un comportement général. Etudions la d'abord pour deux cas particuliers.

### Cas particulier du système fermé

Lorsque le système est fermé,  $\Lambda = \gamma_e = \gamma_g = 0$ . Dans ce cas, nous retrouvons la formule obtenue dans le premier chapitre :

$$w_{1,ferm} = -w_{0,ferm} \frac{2I_1 \sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{(\Gamma_0 - i\delta) + \frac{2I_0 \sigma}{\hbar\omega_0}},$$

avec

$$w_{0,ferm} = -n \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}}.$$

On reconnaît d'ailleurs ici la forme usuelle de la différence de populations en présence d'un champ d'intensité  $I_0$  :  $w_{0,ferm} = -n \frac{1}{1 + \frac{I_0}{I_{sat}}}$ , où l'intensité de saturation est définie par  $I_{sat} = \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0\Gamma_0}$ .

La réponse du milieu sera donc donnée par une lorentzienne dont la largeur est limitée à faible puissance de couplage par  $2\Gamma_0$ . Nous retrouvons ici le comportement du phénomène de CPO habituel, limité par la durée de vie de la population du niveau supérieur.

### III.1.2 Système ouvert et résonances ultra-fines

Dans le cas précédent, auquel correspond une grande partie des systèmes expérimentaux, il n'y a donc pas de phénomène résonnant ultra-fin. La largeur est toujours déterminée par la durée de vie du niveau supérieur. Mais le cas des systèmes ouverts nécessite de prendre en considération les différentes désexcitations possibles. On peut par exemple imaginer une désexcitation du niveau supérieur vers un niveau intermédiaire, ou au contraire une désexcitation du niveau fondamental vers un autre niveau extérieur. Il n'y a alors aucune relation entre les différents taux  $\Lambda$ ,  $\gamma_e$  et  $\gamma_g$ , et la réponse du système est donnée par le résultat général 2.8.

#### Cas d'un ensemble atomique ouvert

Dans les systèmes constitués d'une vapeur d'atomes en mouvement par exemple, les taux de relaxation des niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  ainsi que le taux d'alimentation  $\Lambda$  sont généralement égaux mais non nuls, car ils correspondent au taux de transit  $\gamma_t$  dans le faisceau laser. Le système est alors ouvert du point de vue de l'ensemble atomique mais fermé du point de vue du système atomique. Dans un système tel que celui-ci, où il est possible de noter  $\Lambda = \gamma_e = \gamma_g = \gamma_t$ , la réponse est donné par

$$w_{1,trans} = -w_{0,ouv} \frac{2I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{(\Gamma_0 + \gamma_t - i\delta) + \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0}},$$

et

$$w_{0,trans} = -n \frac{\Gamma_0 + \gamma_t}{(\Gamma_0 + \gamma_t) + \frac{2I_0\sigma}{\hbar\omega_0}}.$$

Dans cette configuration, nous remarquons la similitude avec le cas d'un système entièrement fermé : la forme du profil de transmission est identique, mais la fenêtre de transmission a une largeur limitée cette fois-ci par  $2(\Gamma_0 + \gamma_t)$ . Ainsi, le phénomène est toujours limité par la durée de vie totale du niveau supérieur. (En pratique, le taux de transit  $\gamma_t$  peut souvent être négligé en comparaison à l'inverse de la durée de vie du niveau supérieur, et la réponse est alors comparable à celle du système fermé équivalent.) Notons que ce comportement est valable pour tous les systèmes ouverts en général qui vérifient  $\gamma_e = \gamma_g$ .

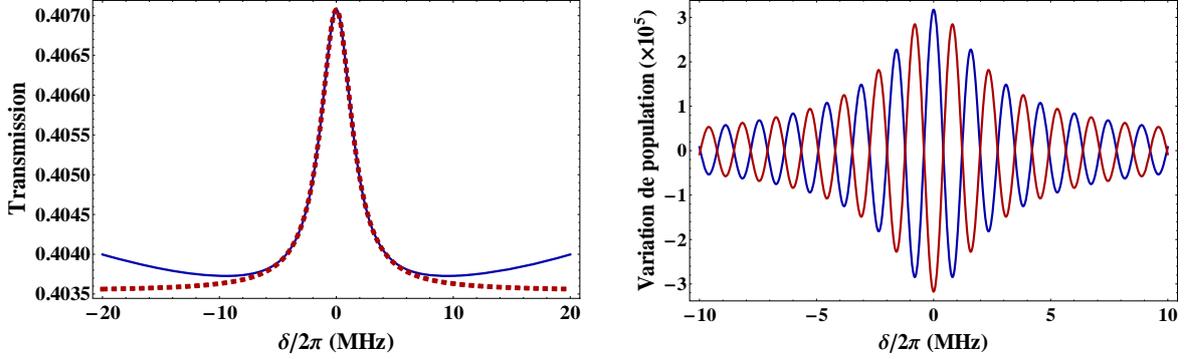
Le profil de transmission d'un système à deux niveaux fermé est tracé sur la figure 2.11(a) : la première courbe est obtenue avec le modèle des équations cinétiques (tirets rouges) tandis que la seconde est tracée à partir de la résolution des équations de Bloch optiques avec le développement de Floquet (bleu). Les paramètres choisis correspondent à ceux de l'hélium. On remarque le très bon accord de ces deux modèles, avec lesquels apparaît une fenêtre de transmission due au phénomène de CPO. Sa largeur est de l'ordre du MHz et correspond au taux de relaxation  $\Gamma_0$ .

Sur la figure 2.11(b) sont représentés en fonction du désaccord  $\delta$  et pour les mêmes paramètres les termes oscillants  $\text{Re} [N_{e1} e^{-i\delta t}]$  et  $\text{Re} [N_{g1} e^{-i\delta t}]$  des populations de notre système à deux niveaux pour un instant  $t$  fixé arbitraire. Les périodes des oscillations dépendent effectivement de  $t$ , qui a été choisi afin de pouvoir observer les oscillations, mais l'enveloppe reste elle identique. La fenêtre sur laquelle les populations sont capables de suivre le battement  $\delta$  entre les deux excitations lumineuses, à l'origine de la fenêtre de transparence et limitée par le taux  $\Gamma_0$ , correspond à une augmentation de l'amplitude des oscillations des populations.

### Cas général à faible puissance de pompe

Pour comprendre le comportement du système dans le cas général, étudions l'expression 2.8 pour  $I_0\sigma/\hbar\omega_0 \ll \gamma_e, \gamma_g, \Gamma_0$ , afin de faire apparaître les limitations des largeurs des résonances à faible puissance de pompe. On a alors :

$$\begin{aligned} w_{1,lim} &= -w_{0,lim} \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta}{(\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta)(\gamma_g - i\delta)}, \\ &= -w_{0,lim} \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\gamma_g - (\Gamma_0 + \gamma_e)} \left[ \frac{\gamma_g - \gamma_e - 2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta} + \frac{\gamma_g - \gamma_e}{\gamma_g - i\delta} \right], \end{aligned}$$



(a) Profil de transmission du système à deux niveaux fermé, avec méthode de Floquet en bleu et avec méthode des équations cinétiques en tirets rouges.

(b) Terme oscillant des populations du niveau supérieur en bleu et du niveau inférieur en rouge, en fonction du désaccord  $\delta/2\pi$  et à un temps fixé de  $0,7 \mu\text{s}$ .

FIGURE 2.11 – Les courbes ont été tracées en considérant une cellule de 2 cm de transmission initiale 40%, pour  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_c = 2\pi \times 3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_0/\sigma = 4,6 \times 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}\text{s}$  (correspond à un désaccord optique nul et un taux de relaxation de la cohérence optique  $\Gamma = 2\pi \times 0,57 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ), et  $\Lambda = \gamma_e = \gamma_g = 2\pi \times 3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Les valeurs moyennes des populations sont  $\langle N_e \rangle = 4,8 \times 10^{-3}$  et  $\langle N_g \rangle = 0,995$ .

où

$$w_{0,lim} = -n \frac{\Lambda}{\gamma_g}.$$

$w_{1,lim}$  est composé dans ce cas de deux termes, chacun caractéristique d'une lorentzienne. Le premier terme correspond à une lorentzienne de largeur  $2(\Gamma_0 + \gamma_e)$ , caractéristique du phénomène de CPO classique, tandis que le second correspond à une lorentzienne de largeur  $2\gamma_g$ , alors limité par la durée de vie du niveau inférieur. Si la valeur de  $\gamma_g$  est faible ( $\gamma_g \ll \Gamma_0$ ), alors il sera possible d'observer dans le profil de transmission une résonance limitée par  $\gamma_g$  en plus de la réponse classique du CPO.

Le numérateur de la seconde lorentzienne est en particulier donné par la différence  $\gamma_g - \gamma_e$ , ce qui nous permet de distinguer trois cas :  $\gamma_g < \gamma_e$ ,  $\gamma_g > \gamma_e$  et  $\gamma_g = \gamma_e$ .

\* Lorsque  $\gamma_g = \gamma_e$ , nous sommes en présence d'un système correspondant à un ensemble atomique ouvert. Si l'on note  $\gamma_g = \gamma_e = \gamma_t$  :

$$w_{1,lim,trans} = -w_{0,lim,trans} \frac{I_1 \sigma}{\hbar\omega_0} \left[ \frac{2}{\Gamma_0 + \gamma_t - i\delta} \right].$$

On retrouve bien l'expression obtenue dans le paragraphe précédent à faible puissance de

pompe, caractéristique d'une lorentzienne de largeur  $2(\Gamma_0 + \gamma_t)$ .

\* Lorsque  $\gamma_g - \gamma_e = -\Delta\gamma < 0$ , nous obtenons

$$w_{1,lim} = -w_{0,lim} \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{(\Gamma_0 + \Delta\gamma)} \left[ \frac{2\Gamma_0 + \Delta\gamma}{\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta} + \frac{\Delta\gamma}{\gamma_g - i\delta} \right].$$

Dans ce cas, la forme du profil de transmission est donc constitué de deux fenêtres de transmission superposées, l'une de largeur  $2(\Gamma_0 + \gamma_e)$  et l'autre de largeur  $2\gamma_g$ . On comprend bien ici que sous la condition  $\gamma_g \ll \Gamma_0$ , il sera possible d'observer une résonance en transmission très fine de largeur limitée par  $\gamma_g$ .

\* Enfin, lorsque  $\gamma_g - \gamma_e = \Delta\gamma > 0$ ,

$$w_{1,lim} = -w_{0,lim} \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{1}{\Delta\gamma - \Gamma_0} \left[ \frac{\Delta\gamma - 2\Gamma_0}{\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta} + \frac{\Delta\gamma}{\gamma_g - i\delta} \right].$$

Plusieurs cas de figure se présentent ici en fonction de la valeur de  $\Delta\gamma$ . Mais si  $\gamma_g \ll \Gamma_0$ , alors  $\Delta\gamma - \Gamma_0 < 0$  et  $\Delta\gamma - 2\Gamma_0 < 0$ . Le profil de transmission sera donc constitué d'une fenêtre de transmission de largeur  $2(\Gamma_0 + \gamma_e)$ , et d'un pic d'absorption ultra fin de largeur  $2\gamma_g$ .

### Traitement complet

Dans le paragraphe précédent, nous avons négligé l'effet de la saturation afin de mettre en évidence les différents comportements envisageables dans notre système à deux niveaux ouverts. En particulier, nous avons vu que l'observation d'une réponse ultra-fine dans le profil de transmission est conditionnée par la valeur de  $\gamma_g$ , qui doit être négligeable devant la valeur de  $\Gamma_0$  qui détermine la largeur habituelle du phénomène de CPO. Dans ce paragraphe, nous allons réintroduire le terme de saturation par le champ de couplage et observer deux comportements différents. On suppose que  $\gamma_g \ll \Gamma_0$ , et qu'on observe le profil de transmission autour de la résonance délimitée par  $\gamma_g$ , soit  $\delta \ll \Gamma_0$ .

- $\gamma_g \ll \gamma_e \approx \Gamma_0$

Si le taux de désexcitation du niveau du haut vers l'extérieur  $\gamma_e$  est de l'ordre de  $\Gamma_0$ , la réponse est donnée par

$$w_1 = -w_0 \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{\frac{\gamma_e}{\Gamma_0 + \gamma_e}}{(\gamma_g - i\delta) + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{\gamma_e}{\Gamma_0 + \gamma_e}}.$$

On reconnaît une fois de plus la forme usuelle d'une lorentzienne dont la largeur à mi-hauteur  $W$  est limitée à faible puissance de pompe par  $2\gamma_g$ , mais qui inclut cette fois-ci le terme d'élargissement par saturation :

$$W = 2\gamma_g + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{2\gamma_e}{(\Gamma_0 + \gamma_e)}.$$

Pour que cette formule soit valable, il faut par ailleurs que  $\delta$  satisfasse la condition  $\delta \ll \Gamma_0$  tout le long de cette fenêtre de transmission :  $W \ll \Gamma_0$ . Ceci se traduit par la condition sur la puissance de pompe suivante :  $I_0\sigma/\hbar\omega_0 \ll \Gamma_0(\Gamma_0 + \gamma_e)/2\gamma_e$ .

Le profil de transmission pour un système à deux niveaux ouvert dans ces conditions est tracé sur la figure 2.12(a) : le taux de relaxation  $\gamma_e$  est choisi égal à  $\Gamma_0$ . Nous observons bien dans ce cas une fenêtre de transmission dont la largeur, cette fois de l'ordre du kHz, est déterminée par le taux de désexcitation du niveau inférieur  $\gamma_g$ . Nous pouvons également remarquer le très bon accord du modèle des équations cinétiques avec celui des équations de Bloch optiques résolues par la méthode de Floquet. Ceci prouve une fois de plus que le phénomène donnant lieu à une résonance ultra-fine trouve bien son origine dans les oscillations de populations.

Les parties oscillantes  $\text{Re} [N_{e1}e^{-i\delta t}]$  et  $\text{Re} [N_{g1}e^{-i\delta t}]$  des populations du niveau supérieur et du niveau fondamental sont tracées en fonction du désaccord  $\delta$  à un instant  $t$  fixé arbitraire pour les mêmes paramètres Fig. 2.12(b). Il est très intéressant de constater que la différence de populations est alors dominée par celle du niveau fondamental. Seule celle-ci est capable de suivre l'oscillation de l'intensité lumineuse pour de faibles désaccord, avec une amplitude vingt fois plus grande que celle du niveau excité, et c'est dans ces oscillations que la fenêtre de transmission trouve donc son origine.

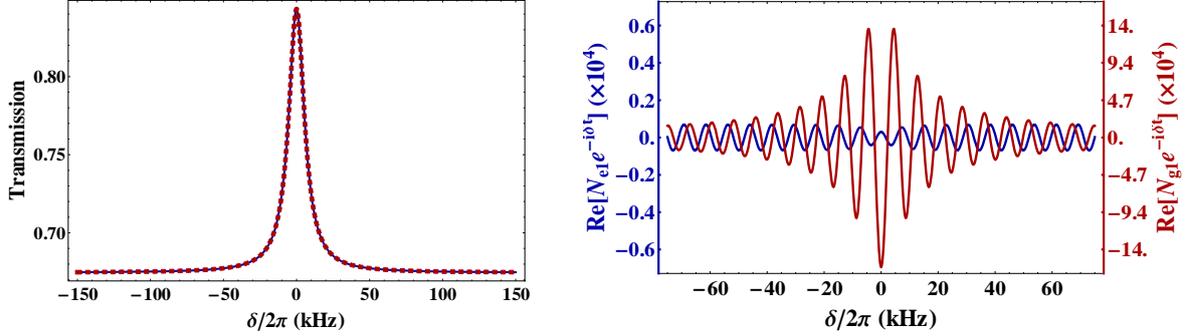
- $\gamma_e < \gamma_g$

Lorsque c'est le niveau inférieur qui peut se désexciter plus rapidement que le niveau supérieur, nous obtenons le résultat suivant

$$w_1 = -w_0 \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0} \frac{\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta}{(\Gamma_0 - i\delta)(\gamma_g - i\delta) + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta)},$$

dont il est difficile de prédire le comportement.

Sur les figures 2.13(a) et 2.13(b) sont donc tracés le profil de transmission ainsi que le terme oscillant des populations en fonction du désaccord entre la pompe et la sonde dans



(a) Profil de transmission du système à deux niveaux ouvert, avec méthode de Floquet en bleu et avec méthode des équations cinétiques en tirets rouges.

(b) Terme oscillant des populations du niveau supérieur en bleu et du niveau inférieur en rouge, en fonction du désaccord  $\delta/2\pi$  et à un temps fixé de 0,13 ms.

FIGURE 2.12 – Les courbes ont été tracées en considérant une cellule de 2 cm de transmission initiale 40%, pour  $\Gamma_0 = \gamma_e = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_c = 2\pi \times 3 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_0/\sigma = 4,6 \times 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}.\text{s}$  (correspond à un désaccord optique nul et un taux de relaxation de la cohérence optique  $\Gamma = 2\pi \times 0,57 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ), et  $\Lambda = \gamma_g = 2\pi \times 3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Les valeurs moyennes des populations sont  $\langle N_e \rangle = 1,0 \times 10^{-3}$  et  $\langle N_g \rangle = 0,43$ .

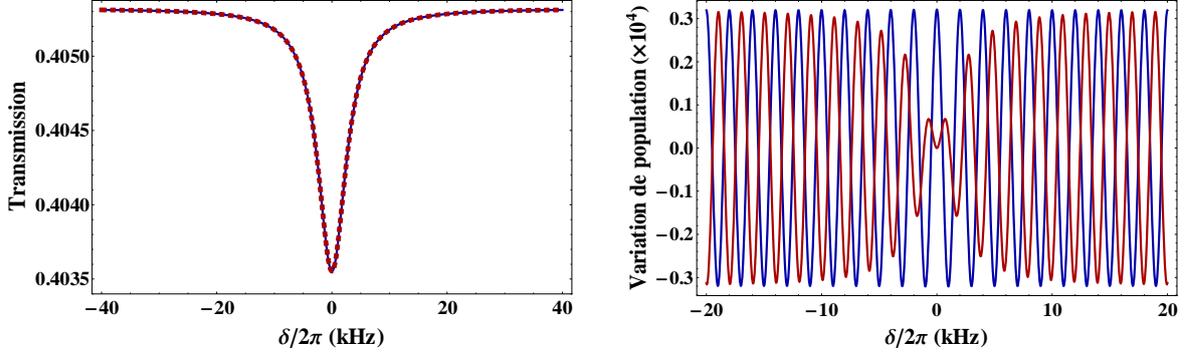
le cas particulier où le taux  $\gamma_e$  est nul. Comme nous l'avions prévu précédemment, il y a apparition d'une résonance en absorption. La figure 2.13(b) nous indique d'ailleurs que la réponse du système est également déterminée par les oscillations de population du niveau fondamental dans ce cas.

- Comportement à grand désaccord.

Il est intéressant de constater que dans les deux cas précédents, la fenêtre de transmission usuelle du CPO, limitée par la durée de vie du niveau supérieur, est toujours présente. Les figures 2.14(a) et 2.14(b) montrent le profil de transmission lorsque le désaccord est de l'ordre du MHz, soit de l'ordre du taux de relaxation du niveau supérieur. On observe alors une résonance large limitée par  $\Gamma_0$  ainsi que la résonance fine limitée par  $\gamma_g$ , en transmission ou en absorption selon le cas.

### III.1.3 Systèmes à deux niveaux : conclusion.

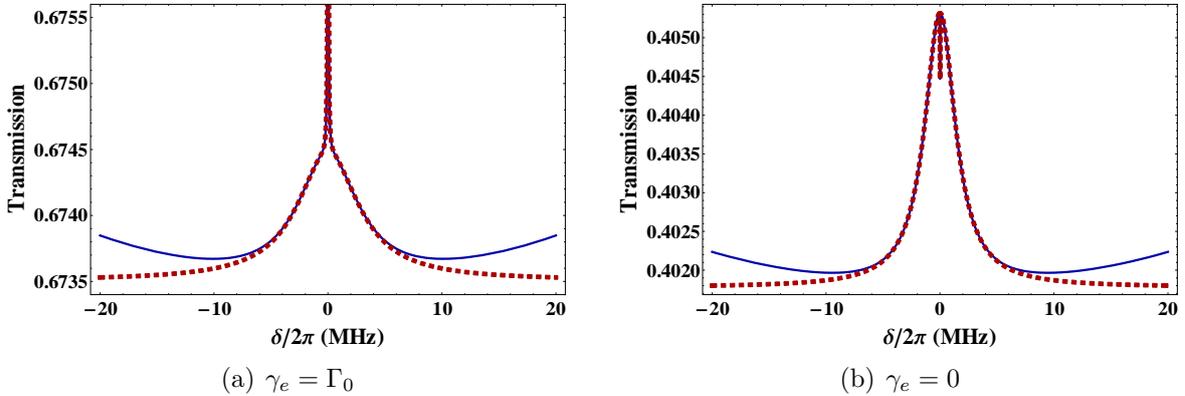
Le phénomène de CPO dans les systèmes à deux niveaux est habituellement associé à l'apparition d'une résonance en transmission dont la largeur est limitée par la durée de vie du niveau supérieur. Dans cette section, il a été montré que le phénomène de CPO dans les



(a) Profil de transmission du système à deux niveaux ouvert, avec méthode de Floquet en bleu et avec méthode des équations cinétiques en tirets rouges.

(b) Terme oscillant des populations du niveau supérieur en bleu et du niveau inférieur en rouge, en fonction du désaccord  $\delta$  et à un temps fixé de 0.5 ms.

FIGURE 2.13 – Les courbes ont été tracées en considérant une cellule de 2 cm de transmission initiale 40%, pour  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_c = 2\pi \times 3 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_0/\sigma = 4,6 \times 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}.\text{s}$  (correspond à un désaccord optique nul et un taux de relaxation de la cohérence optique  $\Gamma = 2\pi \times 0,57 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ),  $\Lambda = \gamma_g = 2\pi \times 3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $\gamma_e = 0$ . Les valeurs moyennes des populations sont  $\langle N_e \rangle = 4,8 \times 10^{-3}$  et  $\langle N_g \rangle = 1,0$ .



(a)  $\gamma_e = \Gamma_0$

(b)  $\gamma_e = 0$

FIGURE 2.14 – Profil de transmission du système à deux niveaux ouvert, avec méthode de Floquet en bleu et avec méthode des équations cinétiques en tirets rouges, pour une cellule de 2 cm de transmission initiale 40%. Les courbes ont été tracées pour  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_c = 2\pi \times 3 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_0/\sigma = 4,6 \times 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}.\text{s}$  (correspond à un désaccord optique nul et un taux de relaxation de la cohérence optique  $\Gamma = 2\pi \times 0,57 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ),  $\Lambda = \gamma_g = 2\pi \times 3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

systemes ouverts peut également conduire à l'apparition de résonances ultra-fines, limitée alors par la durée de vie du niveau inférieur. Ces résonances peuvent d'ailleurs apparaître

en transmission ou en absorption, selon la valeur du rapport entre le taux de désexcitation vers l'extérieur du niveau supérieur  $\gamma_e$  et le taux de désexcitation du niveau fondamental  $\gamma_g$ . La comparaison entre la résolution des équations de Bloch optiques par la méthode de Floquet et d'un modèle développé uniquement à partir des équations cinétiques nous assure que ces comportements sont dus aux oscillations cohérentes de populations dans les systèmes à deux niveaux.

### III.2 CPO double dans un système en lambda

Nous avons observé dans notre système expérimental une fenêtre de transmission large de quelques kHz et insensible aux inhomogénéités de champ magnétique (Fig. 2.7(b) et Fig. 2.8(a)). Celle-ci apparaît lorsque notre système en  $\Lambda$ , dont les niveaux inférieurs sont non dégénérés, est excité par deux champs de couplage et de sonde polarisés linéairement. Cette résonance est présente dans le profil de transmission lorsque les deux lasers ont la même fréquence optique ( $\delta = 0$ ), et la réponse correspond à l'action des deux champs optiques sur une même transition. La section précédente nous a permis de comprendre qu'il était possible dans certaines conditions d'observer ce type de comportement dans les systèmes à deux niveaux grâce au phénomène de CPO.

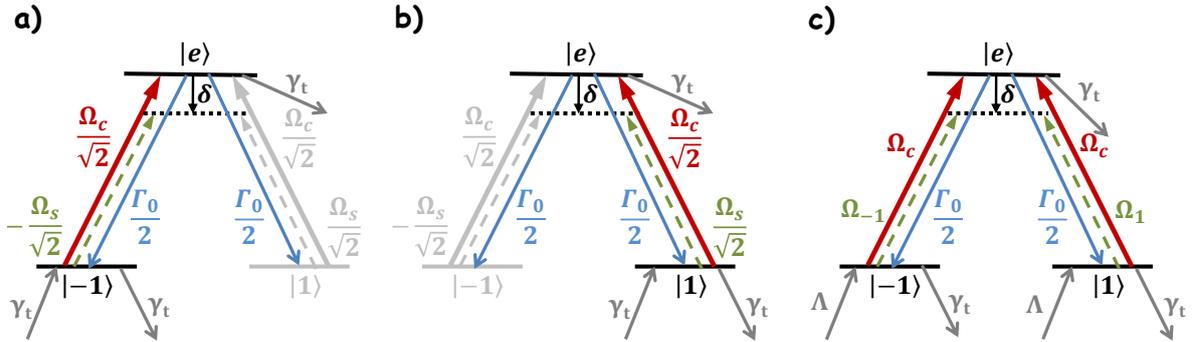


FIGURE 2.15 – a) Premier système à deux niveaux ouvert dans le système en  $\Lambda$  associé à  $\text{He}^*$  excité avec des polarisations linéaires. b) Second système à deux niveaux ouvert dans le système en  $\Lambda$  associé à  $\text{He}^*$  excité avec des polarisations linéaires. c) Schéma d'excitation dans un système en  $\Lambda$  pour le traitement par les équations cinétiques.

Considérons donc une seule des deux branches de notre système en  $\Lambda$  (Fig. 2.15.a). Le niveau supérieur peut se désexciter vers le second sous-niveau fondamental avec un même taux  $\frac{\Gamma_0}{2}$  (de l'ordre du MHz), alors que la durée de vie du niveau inférieur est donnée

par le taux de transit dans le faisceau laser  $\gamma_t$  (de l'ordre du kHz). C'est un système à deux niveaux ouvert, à la fois du point de vue de l'ensemble et du système atomiques. Les taux de désexcitation de l'ensemble atomique vers l'extérieur sont les mêmes pour tous les niveaux ( $\gamma_t$ ), ce qui correspondrait à un phénomène de CPO limité par la durée de vie du niveau supérieur  $|e\rangle$ . Mais le système atomique est ouvert avec un taux  $\frac{\Gamma_0}{2}$  pour le niveau supérieur, et ceci nous place dans les conditions  $\gamma_t = \gamma_g \ll \gamma_e = \frac{\Gamma_0}{2} + \gamma_t$ . Son profil de transmission est alors constitué de deux fenêtres de transmission, l'une de l'ordre du MHz déterminée par  $2(\Gamma_0 + \gamma_t)$  et l'autre de l'ordre du kHz déterminée par  $2\gamma_t$ .

Notre système comprend également une seconde branche, dont les caractéristiques et la réponse sont identiques (Fig. 2.15.b). Notre résultat expérimental suggère alors que les deux réponses s'additionnent pour faire apparaître une fenêtre de transparence centrée dans le profil de transmission.

### III.2.1 Modèle des équations cinétiques

Dans les systèmes à deux niveaux, le modèle des équations cinétiques suffit à rendre compte des phénomènes de type CPO observés expérimentalement. Un tel modèle devrait donc suffire à faire apparaître le comportement observé dans notre système expérimental à 3 niveaux. Considérons le schéma d'excitation de la figure 2.15 c) lorsque les champs considérés sont linéaires, c'est-à-dire lorsque les fréquences de Rabi de la sonde vérifient  $\Omega_1 = \pm\Omega_{-1}$  : les champs de couplage et de sonde sont orthogonaux lorsque  $\Omega_1 = -\Omega_{-1}$  ou parallèles lorsque  $\Omega_1 = \Omega_{-1}$ . Le système satisfait aux équations d'évolution (voir l'annexe G.3 pour les définitions de  $I^\pm(t)$  et  $\sigma$ ) :

$$\begin{aligned}\frac{dN_e}{dt} &= -(\Gamma_0 + \gamma_t)N_e + \frac{I^-(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(N_{-1} - N_e) + \frac{I^+(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(N_1 - N_e), \\ \frac{dN_{-1}}{dt} &= n\Lambda + \frac{\Gamma_0}{2}N_e - \gamma_t N_{-1} - \frac{I^-(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(N_{-1} - N_e), \\ \frac{dN_1}{dt} &= n\Lambda + \frac{\Gamma_0}{2}N_e - \gamma_t N_1 - \frac{I^+(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(N_1 - N_e).\end{aligned}$$

où  $N_e$ ,  $N_{-1}$  et  $N_1$  sont les populations des différents niveaux, et  $I^+(t)$  et  $I^-(t)$  les intensités appliquées sur les transitions  $|1\rangle \rightarrow |e\rangle$  et  $|-1\rangle \rightarrow |e\rangle$  respectivement.

Au premier ordre en champ sonde, on peut noter :

$$I^\pm(t) = I_0 + I_1^\pm e^{-i\delta t} + I_{-1}^\pm e^{i\delta t},$$

et définir les différences de populations

$$w^\pm(t) = N_e(t) - N_{\pm 1}(t) = w_0^\pm + w_1^\pm e^{-i\delta t} + w_{-1}^\pm e^{i\delta t},$$

où  $I_{1,-1}^\pm \ll I_0$  et  $w_{1,-1}^\pm \ll w_0^i$ .

Dans ce cas, la transmission à la sortie du milieu de longueur  $L$  est donnée par (annexe G.3)

$$T = \exp \left[ \sigma \left( \frac{w_0^- + w_0^+}{2} + \operatorname{Re} \left( w_1^- \frac{I_0}{2I_1^-} + w_1^+ \frac{I_0}{2I_1^+} \right) \right) L \right].$$

Dans le cadre de nos approximations, nous obtenons en régime stationnaire (annexe G.4 :

$$w_1^- = -\frac{w_0}{2} \left[ \frac{3(I_1^- + I_1^+) \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_0 + \gamma_t + 3\frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} - i\delta} + \frac{(I_1^- - I_1^+) \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}}{\gamma_t + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} - i\delta} \right],$$

$$w_1^+ = -\frac{w_0}{2} \left[ \frac{3(I_1^- + I_1^+) \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_0 + \gamma_t + 3\frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} - i\delta} - \frac{(I_1^- - I_1^+) \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}}{\gamma_t + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} - i\delta} \right],$$

avec

$$w_0 = w_0^- = w_0^+ = -n \frac{\Lambda}{\gamma_t} \frac{\Gamma_0 + \gamma_t}{\Gamma_0 + \gamma_t + 3\frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}}.$$

Les formules obtenues ont une forme connue. Chacune est composée d'un terme caractéristique d'une lorentzienne de largeur limitée à faible puissance par  $2(\Gamma_0 + \gamma_t)$  et d'un terme caractéristique d'une lorentzienne de largeur limitée à faible puissance par  $2\gamma_t$ . Le premier correspond à la réponse habituelle du CPO, tandis que le second correspond à la réponse caractéristique d'un système à deux niveaux ouverts.

Il est intéressant de remarquer la présence du signe négatif au numérateur  $(I_1^- - I_1^+) \sigma / \hbar\omega$  du second terme, qui détermine deux régimes pour notre système. La résonance ultra-fine est présente si les fréquences de Rabi du champ sonde ont un signe opposé sur les deux transitions (Fig. 2.16(a)), ce qui a pour effet de supprimer la résonance de largeur  $2(\Gamma_0 + \gamma_t)$  (Fig. 2.16(c)). Au contraire, lorsque les fréquences de Rabi sont de même signe, la résonance de largeur  $\gamma_t$  disparaît (Fig. 2.16(b)) au profit de la résonance

du CPO habituel (Fig. 2.16(d)).

Sur ces figures ont également été tracées les courbes correspondant au traitement complet avec la méthode de Floquet du système à trois niveaux lorsque la dégénérescence est levée, et tous les paramètres ont été choisis pour correspondre à  $\text{He}^*$ . Le profil obtenu avec la méthode de Floquet diffère de la méthode des équations cinétiques puisque les résonances EIT sont également présentes, ainsi que la résonance en absorption de la transition optique. Mais les résonances dues au phénomène de CPO sont identiques.

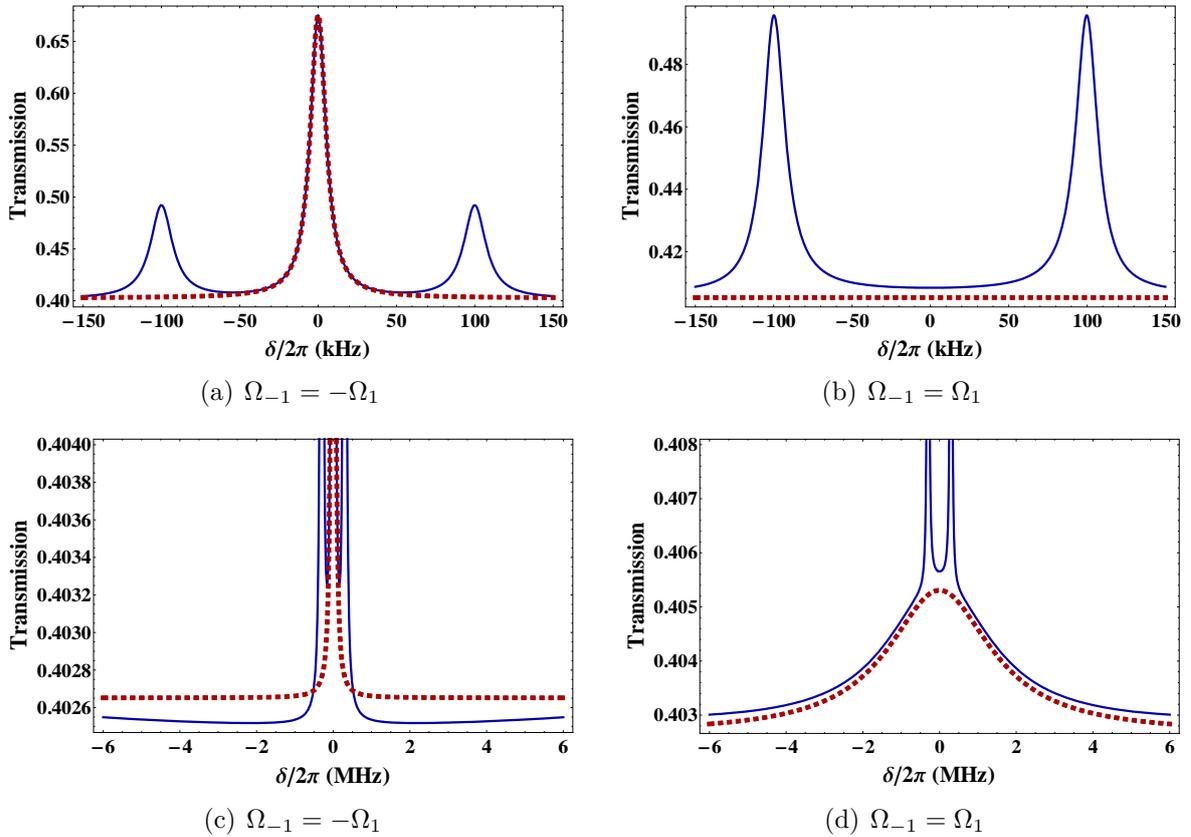


FIGURE 2.16 – Profils de transmission du système à trois niveaux, avec méthode de Floquet en bleu et avec méthode des équations cinétiques en tirets rouges, pour une cellule de 2 cm de transmission initiale 40%. Les courbes ont été tracées pour  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\sqrt{2}\Omega_c = 2\pi \times 3 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_0/\sigma = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}.\text{s}$  (correspond à un désaccord optique nul et un taux de relaxation de la cohérence optique  $\Gamma = 2\pi \times 0,57 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ),  $\Lambda = \gamma_t = 2\pi \times 3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Un décalage Zeeman de 50 kHz a été introduit pour le traitement par la méthode de Floquet.

Cette différence de comportement peut s'expliquer par le caractère couplé des deux

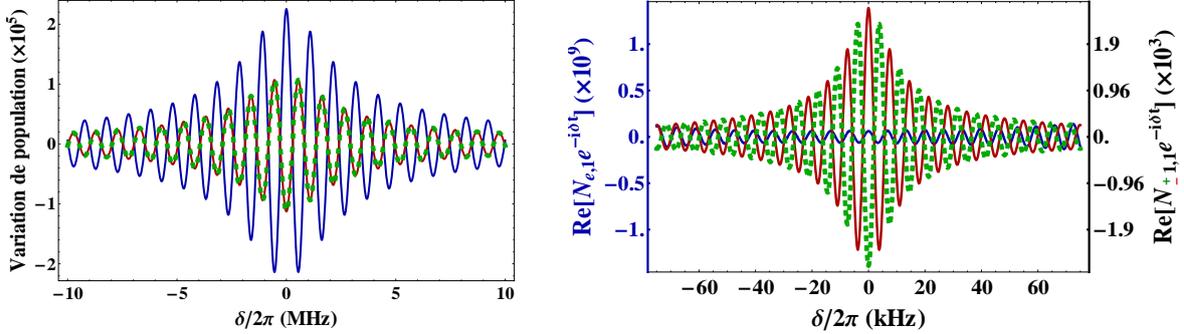
systèmes à deux niveaux ouverts. Lorsque les champs de sonde ont des signes opposés sur chacune des transitions, les oscillations sont en opposition de phase (Fig. 2.17(b)), ce qui permet aux atomes de s'accumuler alternativement dans chacun des deux niveaux du bas. Les réponses des deux systèmes à deux niveaux ouverts s'additionnent alors pour former une fenêtre de transmission limitée par la durée de vie des niveaux inférieurs :  $w_1^- \frac{I_0}{2I_1^-} + w_1^+ \frac{I_0}{2I_1^+} = -(N_e - N_{-1}) \frac{I_0}{2I_1^+} + (N_e - N_1) \frac{I_0}{2I_1^+} = (N_{-1} - N_1) \frac{I_0}{2I_1^+}$ . Il n'y a d'ailleurs plus de résonance de largeur  $2(\Gamma_0 + \gamma_t)$  puisque les oscillations de populations entre niveau excité et fondamentaux sont transférées en oscillations de populations entre les deux niveaux fondamentaux.

Lorsque les champs de sonde ont au contraire le même signe sur chacune des transitions, les oscillations présentes dans chacun des systèmes à deux niveaux constitutifs du système en  $\Lambda$  sont en phase (Fig : 2.17(a)). Le niveau supérieur ne peut donc pas se désexciter sur la transition opposée pour donner lieu à une résonance ultra-fine. Les niveaux inférieurs agissent comme un seul niveau en opposition de phase avec le niveau excité. L'amplitude des oscillations du niveau supérieur est d'ailleurs égale à la somme des amplitudes des oscillations des niveaux inférieurs : le système est équivalent à un système à deux niveaux fermé, pour lequel une fenêtre de transmission de largeur limitée par l'inverse de la durée de vie du niveau supérieur est présente.

### III.2.2 Système en $\Lambda$ : conclusion

Lorsque notre système en  $\Lambda$  non dégénéré est excité par deux polarisations de couplage et de sonde linéaires, il existe alors deux types de réponse en fonction de la polarisation du champ sonde par rapport à celle du champ de couplage.

Lorsque les champs de couplage et de sonde sont polarisés perpendiculairement, le profil de transmission est constitué de trois résonances en transmission. Deux ont pour origine le phénomène d'EIT et apparaissent lorsque les lasers d'excitation satisfont une condition d'accord Raman. Leur largeur est donc déterminée par la somme des taux de relaxation  $\Gamma_R + \gamma_t$ , où  $\Gamma_R$  est le taux de relaxation de la cohérence Raman entre les niveaux fondamentaux et  $\gamma_t$  le taux de transit dans les faisceaux laser. La troisième apparaît lorsque les lasers sont accordés et correspond au phénomène de CPO dans un système ouvert, dont la largeur est déterminée dans notre cas uniquement par le taux de transit  $\gamma_t$ . Nous observons ce phénomène expérimentalement sur la figure 2.8(a), où



(a)  $\Omega_{-1} = \Omega_1$ , Temps fixé à  $1 \mu\text{s}$ . Les valeurs moyennes des populations sont  $\langle N_e \rangle = 2,41 \times 10^{-3}$ ,  $\langle N_{-1} \rangle = 0,499$  et  $\langle N_1 \rangle = 0,499$ . Les deux niveaux du bas sont en phase et en opposition de phase avec le niveau excité, CPO de quelques MHz de large.

(b)  $\Omega_{-1} = -\Omega_1$ , Temps fixé à  $150 \mu\text{s}$ . Les valeurs moyennes des populations sont  $\langle N_e \rangle = 2,41 \times 10^{-3}$ ,  $\langle N_{-1} \rangle = 0,499$  et  $\langle N_1 \rangle = 0,499$ . Les deux niveaux du bas voient une résonance en opposition de phase l'un avec l'autre, CPO ultra-fin de quelques kHz de large.

FIGURE 2.17 – Terme oscillant des populations du niveau supérieur en bleu, du niveau  $| -1 \rangle$  en rouge et du niveau  $| 1 \rangle$  en vert, en fonction du désaccord  $\delta/2\pi$ , en considérant une cellule de 2 cm de transmission initiale 40% et pour  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\sqrt{2}\Omega_c = 2\pi \times 3 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega_0/\sigma = 4,6 \times 10^{-4} \text{ J.m}^{-2}$  (correspond à un désaccord optique nul et un taux de relaxation de la cohérence optique  $\Gamma = 2\pi \times 0,57 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ),  $\Lambda = \gamma_t = 2\pi \times 3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

l'on voit que l'ordonnée à l'origine pour la résonance centrale est légèrement inférieure à l'ordonnée à l'origine pour les résonances désaccordées.

Lorsque la sonde est parallèle au couplage, la troisième résonance correspond au CPO habituel dans un système à deux niveaux fermé. Sa largeur est limitée par la durée de vie de la population du niveau supérieur.

Lorsque le système est dégénéré, ces trois résonances apparaissent superposées à l'accord Raman ( $\delta_R = 0$ ). On comprend alors que la transmission observée à résonance dans le cas des polarisations linéaires est plus grande que dans le cas de deux polarisations circulaires (Fig. 2.5(a) et 2.5(b)). A faible puissance de couplage, la largeur de la résonance est alors limitée par une valeur légèrement inférieure à  $2(\Gamma_R + \gamma_t)$  (Fig. 2.4(a) et 2.4(b)).

En conclusion, ce système possède un intérêt tout particulier puisqu'il peut se comporter en système à deux niveaux ouvert en fonction de la polarisation relative de la sonde par rapport à celle du couplage [Lauprêtre et al., 2012a]. Ce type de système couplé semble être un bon candidat pour la réalisation expérimentale de propositions théoriques récentes à base de CPO à longue durée de vie, telle que la génération de paires de photons

faible bande [Sharypov and Wilson-Gordon, 2011] ou la réalisation de mémoires optiques [Eilam et al., 2010].

## IV Polarisation elliptiques

Nous avons obtenu dans notre système expérimental des profils de transmission inattendus lorsque les polarisations des champs envoyés ne sont plus circulaires mais linéaires. Nous avons pu observer en particulier l'apparition d'une résonance CPO supplémentaire lorsque le système est non dégénéré, due au couplage des deux systèmes à deux niveaux ouverts constitutifs du système en  $\Lambda$  étudié. Lorsque le système est dégénéré, ceci se traduit par une augmentation de la transmission à résonance et une légère diminution des largeurs à mi-hauteur des résonances observées.

Les résultats obtenus lorsque les polarisations des champs de couplage et de sonde sont elliptiques et orthogonales l'une par rapport à l'autre sont présentés dans cette section.

### IV.1 Système non dégénéré

Pour obtenir des polarisations elliptiques, la lame  $\frac{\lambda}{4}$  positionnée en amont de la cellule est simplement tournée. Les profils de transmission obtenus avec une cellule de 6 cm de long ayant une transmission initiale d'environ 8 % sont présentés sur la figure 2.18(a) pour différentes positions de la lame quart-d'onde. Un champ magnétique d'environ 15 mG était présent afin de lever la dégénérescence des niveaux inférieurs. Les simulations effectuées avec le développement de Floquet sont présentées sur la figure 2.18(b).

L'étude de ces courbes nous montre que les phénomènes en jeu sont les mêmes dans le cas de polarisations elliptiques que dans le cas de polarisations linéaires. Le profil de transmission est en effet constitué de manière générale de trois pics : deux pics EIT impliquant une résonance Raman plus le pic central provenant du phénomène de CPO. Le changement de polarisation des champs modifie la répartition de l'intensité sur chaque branche du système en  $\Lambda$  et fait prendre une part plus ou moins importante aux différentes résonances présentes dans le profil de transmission.

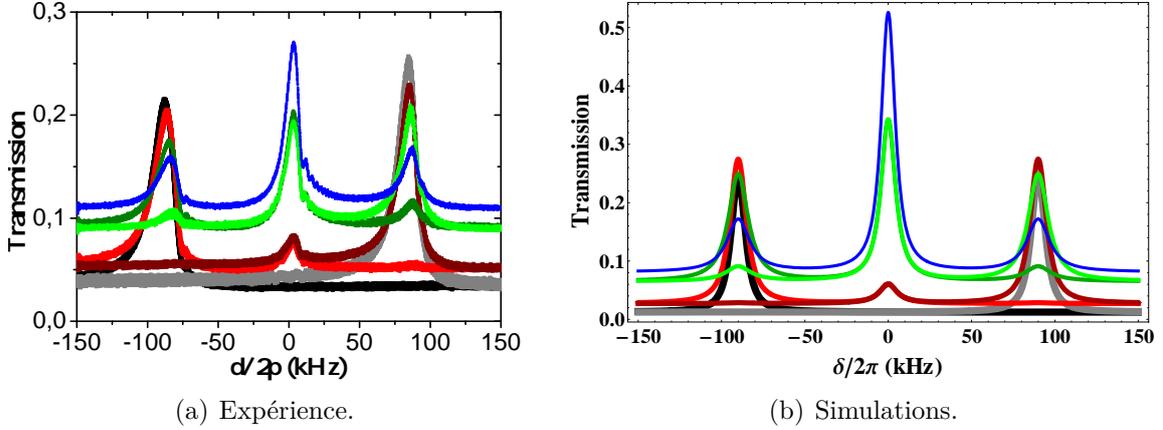


FIGURE 2.18 – Profils de transmission obtenus pour différentes positions de la lame  $\frac{\lambda}{4}$ . Noir :  $-45^\circ$  (polarisations circulaires), rouge :  $-25^\circ$ , vert foncé :  $-10^\circ$ , bleu :  $0^\circ$  (polarisations linéaires), vert clair :  $+10^\circ$ , bordeaux :  $+25^\circ$ , gris :  $+45^\circ$  (polarisations circulaires). Les simulations sont faites avec  $\Gamma_0 = 2\pi \times 1,62 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_c = 2\pi \times 3,5 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\Gamma = 2\pi \times 0,53 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma_t = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma_R = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $\Delta_z/2\pi = 50 \text{ kHz}$  pour correspondre aux conditions expérimentales.

## IV.2 Système dégénéré

Lorsque le système excité par des polarisations elliptiques orthogonales est dégénéré, on s'attend à ce que les trois résonances observées dans le système non dégénéré se superposent pour faire apparaître une unique résonance. De même que dans le cas des polarisations linéaires, le comportement du système devrait donc être modifié autant sur les largeurs des résonances obtenues que sur la transmission à résonance Raman. Les résultats expérimentaux obtenus dans une cellule de 2 cm de transmission initiale environ 40% sont présentés sur les figures 2.19(a) et 2.20(a). Les courbes théoriques correspondantes obtenues avec la méthode de Floquet sont tracées sur les figures 2.19(b) et 2.20(b).

On constate que pour des polarisations elliptiques, les largeurs des résonances et la transmission à résonance Raman sont comprises entre les deux courbes déterminées par le cas des polarisations linéaires et le cas des polarisations circulaires. Lorsque l'on se place dans la base des états noirs et brillants pour le champ de couplage (comme dans la partie II.1), le système équivalent est également un système en  $\Lambda$  susceptible de faire apparaître le phénomène d'EIT<sup>2</sup>. La part provenant du CPO dans la réponse du système augmente

2. Il n'est cependant pas possible d'exprimer les taux de relaxation dans cette nouvelle base aussi simplement que dans le cas des polarisations linéaires.

donc lorsqu'on s'éloigne de la configuration avec polarisations circulaires et est maximale lorsque les polarisations sont linéaires.

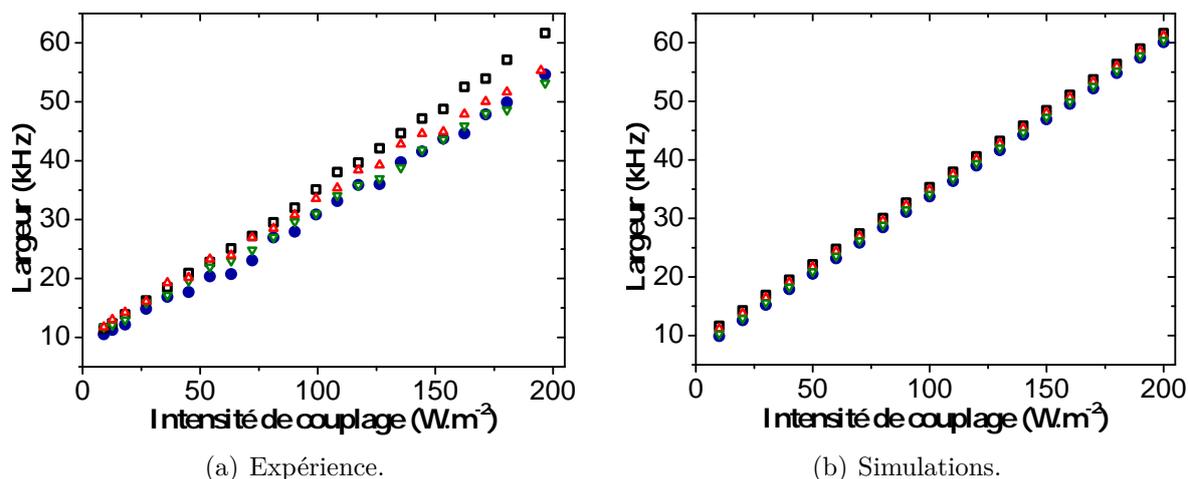


FIGURE 2.19 – Largueur à mi-hauteur des résonances EIT en fonction de l'intensité de couplage. Disques bleus : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $0^\circ$  (polarisations linéaires). Carrés noirs : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $45^\circ$  (polarisations circulaires). Triangles hauts rouges : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $30^\circ$ . Triangles bas verts : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $15^\circ$ .

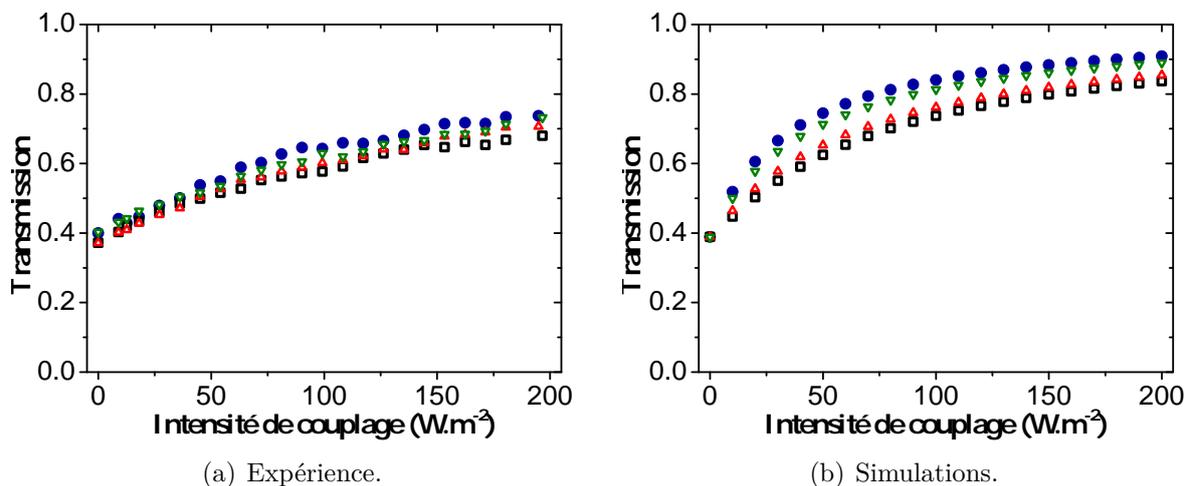


FIGURE 2.20 – Transmission au maximum de la fenêtre de transmission en fonction de l'intensité de couplage. Disques bleus : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $0^\circ$  (polarisations linéaires). Carrés noirs : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $45^\circ$  (polarisations circulaires). Triangles hauts rouges : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $30^\circ$ . Triangles bas verts : lame  $\frac{\lambda}{4}$  à  $15^\circ$ .

## V Conclusions

Le tableau suivant récapitule les résultats démontrés dans ce chapitre.

---

- Dans un système à deux niveaux ouvert, des résonances ultra-fines dues au phénomène de CPO sont susceptibles d'apparaître en absorption ou en transmission.
  - Chacune des transitions optiques d'un système en  $\Lambda$  agit comme un système à deux niveaux ouvert par l'intermédiaire de la désexcitation du niveau supérieur sur l'autre transition.
  - Si un champ de couplage et un champ de sonde sont appliqués simultanément sur les deux transitions d'un système en  $\Lambda$ , la réponse du système est déterminée par deux phénomènes fondamentalement différents :
    - les CPOs, qui n'impliquent par la dynamique des cohérences,
    - l'EIT, qui implique la cohérence Raman entre niveaux inférieurs.
  - En fonction de la valeur relative des champs sondes appliqués sur chacune des transitions, le système en  $\Lambda$  peut agir comme un système à deux niveaux ouvert ou fermé quant au phénomène de CPO.
  - La transmission relative de chacune des trois résonances ultra-fines observées dans un système en  $\Lambda$  non dégénéré dépend des amplitudes relatives des champs présents sur chacune des transitions.
-

## Partie B

Propriétés dispersives de l'hélium et  
application.



# Chapitre 3

## Propagation d'information dans les milieux dispersifs

### Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Introduction et définitions . . . . .</b>	<b>92</b>
I.1	Vitesse de la lumière . . . . .	92
I.2	Relations de Kramers-Kronig . . . . .	95
<b>II</b>	<b>Lumière lente . . . . .</b>	<b>96</b>
II.1	Définition - Présentation . . . . .	96
II.2	Lumière lente dans l'hélium . . . . .	98
II.3	Lumière arrêtée-Stockage . . . . .	100
<b>III</b>	<b>Lumière supraluminique . . . . .</b>	<b>101</b>
III.1	Définition - Présentation . . . . .	101
III.2	EIT et variation négative de la dispersion . . . . .	103
III.3	Lumière rapide dans l'hélium . . . . .	103
<b>IV</b>	<b>Causalité-Propagation d'information . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>V</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>114</b>

---

Dans ce chapitre, nous présentons les notions utiles à la compréhension de la propagation d'impulsions lumineuses dans les milieux dispersifs. Nous y expliquons ensuite comment observer les phénomènes de lumière lente et de lumière rapide avec notre système expérimental. Une discussion quant au respect de la causalité et les limites des modèles considérés aura lieu en fin de chapitre.

## I Introduction et définitions

### I.1 Vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière, notée  $c$ , représente la vitesse d'une onde électromagnétique monochromatique dans le vide. Lorsque l'on considère des impulsions lumineuses se propageant dans un milieu, il est possible de donner jusqu'à huit définitions de la vitesse de la lumière [Smith, 1970; Bloch, 1977]. Nous en présentons deux, les plus courantes et les plus utiles à la compréhension des phénomènes observés par la suite.

Lorsqu'une impulsion  $E(z, t)$  se propage, celle-ci peut être exprimée comme la somme d'ondes planes monochromatiques de pulsation optique  $\omega$  (annexe B) :

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega,$$

où  $\tilde{A}(\omega)$  est la transformée de Fourier de l'impulsion à  $z=0$  :

$$\tilde{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(0, t) e^{i\omega t} dt.$$

Le vecteur d'onde  $k(\omega)$  s'exprime en fonction de l'indice complexe  $n(\omega)$  du milieu par

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}.$$

La phase associée à l'onde monochromatique de pulsation  $\omega$  s'exprime alors

$$\phi(\omega, z, t) = \omega t - \text{Re}[k(\omega)]z = \omega t - \frac{n_R(\omega)\omega}{c}z,$$

où  $n_R(\omega)$  est la partie réelle de l'indice complexe  $n(\omega)$  du milieu dans lequel se propage l'impulsion.

### Vitesse de phase

La vitesse de phase  $v_\phi(\omega)$  associée à la composante de pulsation  $\omega$  est définie par

$$v_\phi(\omega) = \frac{c}{n_R(\omega)} = \frac{\omega}{\text{Re}[k(\omega)]}.$$

Cette quantité représente la vitesse à laquelle un point ayant une phase donnée se propage dans l'espace (Fig. 3.1(a) et 3.1(b)).

En effet si  $\frac{\Delta z}{\Delta t} = v_\phi(\omega)$ , alors  $\phi(\omega, z + \Delta z, t + \Delta t) = \phi(\omega, z, t)$ .

### Vitesse de groupe : définition

L'impulsion représente le degré de cohérence entre les composantes spectrales qui la composent. Lorsque celle-ci se propage dans le vide par exemple, le maximum de l'impulsion représente le point pour lequel toutes les ondes monochromatiques sont en phase. Les ailes de l'impulsion proviennent des variations de phase entre les composantes spectrales. Dans le vide, toutes les composantes spectrales se propagent à la même vitesse de phase  $c$ . L'impulsion se propage donc à  $c$  sans déformation.

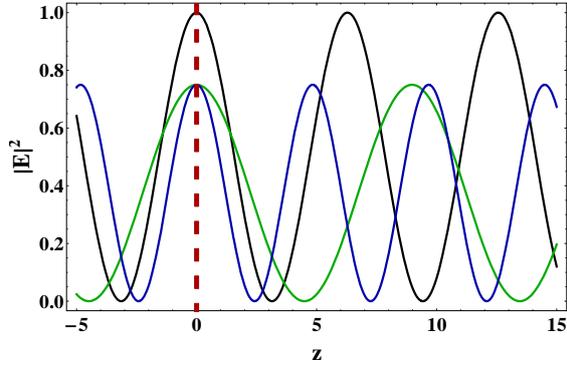
Lorsqu'une impulsion se propage dans un milieu dispersif, la vitesse de phase de chacune des composantes spectrales dépend de l'indice du milieu (Fig. 3.1(a) et 3.1(b)). Supposons alors, à l'image de la propagation dans le vide, qu'il existe un point d'abscisse  $z$  pour lequel toutes les composantes puissent être en phase à un instant  $t$ . Ceci se traduit par  $\phi(\omega, z, t) = \omega t - \text{Re}[k(\omega)]z = K(z, t)$ , ou bien encore  $\frac{\partial \phi(\omega, z, t)}{\partial \omega} = 0$ .

On définit alors la vitesse de groupe  $v_g$  comme la vitesse de ce point, et elle s'écrit :

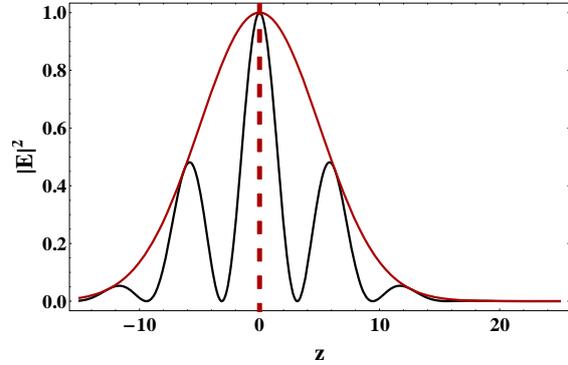
$$v_g = \frac{z}{t} = \left( \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{n_g}, \quad (3.1)$$

où  $n_g$  définit alors l'indice de groupe du milieu.

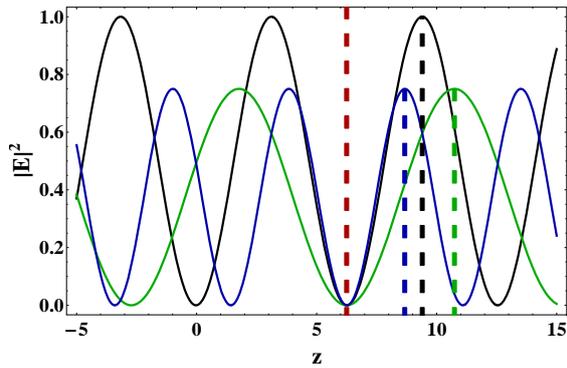
Dans le cas général, la vitesse de groupe ainsi définie dépend de la pulsation  $\omega$ , et elle n'a pas forcément de signification physique évidente. Sous certaines conditions néanmoins, il est possible de considérer qu'une impulsion de pulsation centrale  $\omega_0$  se propage à la



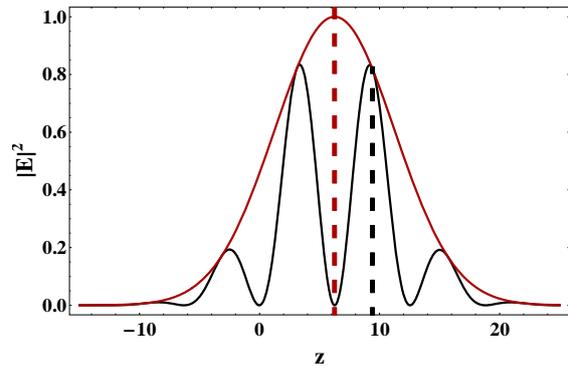
(a) A l'instant  $t_0$ . Toutes les composantes ont la même phase  $\phi_0$  au point d'abscisse  $z = 0$  représenté par la ligne pointillée rouge.



(a) A l'instant  $t_0$ . La composante de pulsation centrale possède une phase  $\phi_0$  au point d'abscisse  $z = 0$  qui coïncide avec le maximum de l'impulsion représenté par la ligne pointillée rouge.



(b) A l'instant  $t$ . Les points de phase  $\phi_0$  à l'instant initial  $t_0$  se sont déplacés à la vitesse de phase pour chacune des composantes spectrales et sont représentés par les lignes pointillées noire, bleue et verte. Toutes les composantes sont en phase au point se déplaçant à la vitesse de groupe représenté par la ligne pointillée rouge.



(b) A l'instant  $t$ . Le point de phase  $\phi_0$  à l'instant initial  $t_0$ , représenté par la ligne pointillée noire, s'est déplacé à la vitesse de phase pour la composante de pulsation centrale. Le maximum de l'impulsion, représenté par la ligne pointillée rouge, s'est déplacé à la vitesse de groupe.

FIGURE 3.1 – Intensité de trois des composantes spectrales d'une impulsion en fonction de la distance de propagation  $z$  à deux instants donnés  $t_0$  et  $t$ . La composante à la pulsation centrale  $\omega_0$  est représentée en noir tandis que deux composantes de pulsations symétriques  $\omega_0 + \Delta\omega$  et  $\omega_0 - \Delta\omega$  sont représentées en bleu et vert respectivement.

FIGURE 3.2 – Intensité d'une impulsion lumineuse et de sa composante à pulsation centrale en fonction de la distance de propagation  $z$  à deux instants donnés  $t_0$  et  $t$ . La composante de pulsation centrale est représentée en noir et l'impulsion en rouge.

vitesse de groupe définie par

$$v_g(\omega_0) = \left( \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \right)^{-1} = \frac{c}{n_R(\omega_0) + \omega_0 \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega_0}} = \frac{c}{n_g}.$$

Les figures 3.2(a) et 3.2(b) illustrent alors ce phénomène : la vitesse de la composante à  $\omega_0$ , déterminée par sa vitesse de phase  $v_\phi(\omega_0)$ , est différente de la vitesse de l'enveloppe déterminée par  $v_g(\omega_0)$ . Nous reviendrons dans la dernière section de ce chapitre sur les hypothèses que cela implique.

## I.2 Relations de Kramers-Kronig

Comme nous le verrons aussi dans la dernière section de ce chapitre, la causalité nous impose des relations entre la partie réelle  $n_R(\omega)$  et la partie imaginaire  $n_I(\omega)$  de l'indice  $n(\omega)$  d'un milieu : ce sont les relations de Kramers-Kronig.

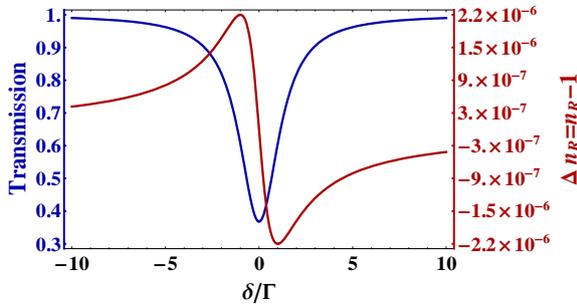


FIGURE 3.3 – Pic d'absorption de largeur  $2\Gamma$  (bleu) et variation d'indice associée (rouge) en fonction du désaccord normalisé  $\delta/\Gamma$ .

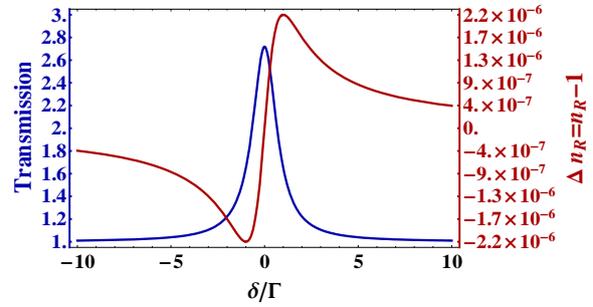


FIGURE 3.4 – Pic de gain de largeur  $2\Gamma$  (bleu) et variation d'indice associée (rouge) en fonction du désaccord normalisé  $\delta/\Gamma$ .

Les formes des profils de transmission et de la variation d'indice d'un milieu, respectivement donnés par  $-n_I$  et  $n_R$  (annexe B), sont donc liées. En particulier, lorsqu'un pic d'absorption est présent dans le profil de transmission du milieu (Fig. 3.3), la variation d'indice a la forme représentée sur la figure 3.3 et sa dérivée est négative à résonance : la dispersion est négative. Au contraire, la dérivée de la variation d'indice est positive à

résonance si le profil de transmission est composé d'un pic de transmission ou de gain (Fig. 3.4) : la dispersion est positive.

### Trois régimes de propagation

Selon la valeur de  $\left. \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0}$ , il va donc être possible de définir plusieurs régimes de propagation [Bolda et al., 1993]. Proche d'une résonance en transmission ou de gain,  $n_g > 1$  et la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de la lumière : c'est le régime de lumière lente. Proche d'une résonance en absorption, il est possible d'obtenir un indice de groupe  $n_g < 1$ . Si  $0 \leq n_g < 1$ , la vitesse de groupe est supérieur à la vitesse de la lumière : c'est le régime de lumière rapide. Si enfin  $n_g < 0$ , la vitesse de groupe est négative à l'intérieur du milieu.

Ces différents régimes sont présentés dans les sections suivantes, ainsi que le moyen de les réaliser et de les observer dans notre système expérimental.

## II Lumière lente

### II.1 Définition - Présentation

Généralement, l'indice de phase d'un milieu est supérieur à 1 (1,5 pour le verre jusqu'à environ 2,5 pour le diamant par exemple). La vitesse de phase est donc inférieure à  $c$ . Lorsqu'un pic de transmission ou de gain est présent dans le profil de transmission d'un milieu, sa dispersion présente une variation quasi-linéaire de pente positive (Fig. 3.4). La vitesse de groupe d'une impulsion se propageant dans les bonnes conditions est donc telle que  $v_g < c$ . On parle de lumière lente (« slow light ») lorsque la vitesse de groupe dans un milieu est diminuée de plusieurs ordres de grandeur comparée à la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ ; c'est-à-dire lorsque la pente de la dispersion est assez grande pour considérer que  $v_g \ll c$ . Dans ce régime, une impulsion se propage beaucoup moins vite que dans le vide et accumule un retard au cours de sa propagation dans le milieu (Fig. 3.5).

La propagation d'impulsions dans les systèmes atomiques résonants a suscité un grand intérêt à partir du début du XX<sup>e</sup> siècle. La première observation d'une réduction conséquente de la vitesse de groupe ( $c/2,5$ ) date de 1971 dans un laser à xénon [Casperson and Yariv, 1971]. Mais c'est avec la découverte du phénomène d'EIT et des résonances

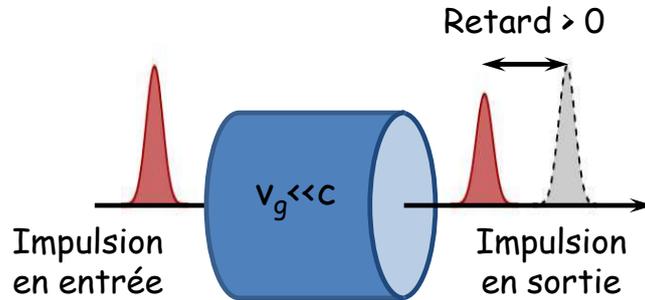


FIGURE 3.5 – Propagation dans un milieu à lumière lente. L'impulsion grise représente l'impulsion de propageant dans le vide. Le retard accumulé lors de la propagation est positif.

ultra-fines associées que s'est répandu le concept de lumière lente, c'est-à-dire une très forte réduction de la vitesse de groupe comparée à la vitesse de la lumière dans le vide. La première observation de ce phénomène date de 1992, où une réduction de la vitesse de groupe d'un facteur 250 ( $v_g = c/250$ ) a été obtenue dans une vapeur de plomb en régime d'EIT [Harris et al., 1992]. Quelques années plus tard, des vitesses de groupe aussi faibles que  $17 \text{ m.s}^{-1}$  et  $90 \text{ m.s}^{-1}$  sont démontrées respectivement dans un nuage d'atomes de sodium froids [Hau et al., 1999] et dans une vapeur de rubidium à température ambiante [Kash et al., 1999]. On parle alors de lumière ultra-lente (« ultraslow light ») pour désigner ce type de régime. La possibilité d'obtenir des vitesses de groupe ultra-lentes dans les systèmes plus simples à deux niveaux émerge un peu plus tard, et des vitesses de groupe allant jusqu'à  $57 \text{ m.s}^{-1}$  ont par exemple été enregistrées expérimentalement dans un cristal de ruby en présence de CPO [Bigelow et al., 2003a].

Des applications ont été proposées au traitement tout optique de l'information, et les applications à plus ou moins long terme incluent la réalisation de lignes à retard ou de mémoires tampons. Il a aussi été montré que le ralentissement de la lumière permet une augmentation des effets non linéaires dans les matériaux, rendant les applications réalisables à faible puissance [Harris and Hau, 1999]. Plus récemment, l'utilisation de la lumière lente a également été proposée pour augmenter la sensibilité de certains types d'interféromètres [Purves et al., 2006; Shi et al., 2007].

Les dernières recherches concernant les milieux à lumière lente comprennent par exemple la réalisation des phénomènes d'EIT et de lumière lente dans des structures photoniques nanométriques, adaptée à une intégration sur puce [Safavi-Naeini et al., 2011],

ou bien l'augmentation du rapport signal sur bruit dans l'imagerie de tissus biologiques par ultrasons [Zhang et al., 2012].

## II.2 Lumière lente dans l'hélium

Il est possible de réaliser l'EIT dans l'hélium métastable à température ambiante, menant à l'observation de fenêtres de transmission de quelques dizaines de kHz de large (Chapitre 1). La faible largeur des résonances ainsi que leur fort contraste semblent adaptés à la réalisation et l'observation de lumière lente.

### Protocole expérimental

Pour observer la lumière lente, nous mesurons le délai de groupe introduit par la cellule : c'est la différence entre le temps d'arrivée d'une impulsion se propageant dans la cellule en présence d'EIT et le temps d'arrivée d'une impulsion se propageant dans le vide. En pratique, on considère que la vitesse de propagation dans la cellule d'hélium en l'absence de décharge RF correspond à la vitesse de propagation dans le vide ( $n_g \approx 1$  pour l'hélium gazeux dans l'état fondamental). Le générateur de forme arbitraire contrôlant le modulateur acousto-optique de la sonde envoie une impulsion gaussienne centrée autour de la fréquence  $\omega_s$  de la sonde, telle que le désaccord Raman  $\delta_R = \omega_s - \omega_c$  soit nul. On mesure la différence entre les temps d'arrivée sur le détecteur des impulsions se propageant avec ou sans décharge RF dans notre cellule.

En pratique, comme les fenêtres de transparence sont de l'ordre de la dizaine de kHz, nous préférons moduler le signal sonde plutôt que d'envoyer des impulsions longues temporellement : la présence de plusieurs périodes rend l'ajustement plus facile comparé à celui d'une gaussienne ne présentant qu'un seul maximum et sujette à déformation. Si deux champs de même amplitude et de pulsations  $\omega_s - \delta\omega$  et  $\omega_s + \delta\omega$  se propagent dans une région où la dispersion est quasi-linéaire, le champ total détecté est :

$$E(z, t) = \cos [(\omega_s - \delta\omega)t - (k_s - \delta k)z] + \cos [(\omega_s + \delta\omega)t - (k_s + \delta k)z],$$

soit

$$E(z, t) = 2 \cos(\omega_s t - k_s z) \cos \left[ \delta\omega \left( t - \frac{\delta k}{\delta\omega} z \right) \right].$$

L'enveloppe sinusoidale d'un signal modulé se propage donc bien à la vitesse de groupe.

L'amplitude du signal sonde utilisé est modulée à une fréquence de 1 kHz sur une durée de 5 ms, c'est-à-dire que l'intensité du signal détecté est modulée à 2 kHz et le signal présente 10 périodes (Fig. 3.7). Les délais de groupe expérimentaux obtenus avec le signal modulé sont également plus grands : la fréquence de modulation est assez faible pour que le signal soit entièrement contenu dans la résonance EIT, alors qu'un certain nombre de fréquences ne subissent pas la dispersion positive lors de l'utilisation d'un signal gaussien de trop courte durée.

### Résultats

Les délais mesurés en fonction de l'intensité de couplage, obtenus pour une cellule de 6 cm et une transmission initiale sans couplage de la cellule d'environ 3%, sont représentés sur la figure 3.6. La résolution analytique des équations de Bloch optiques dans le cadre des approximations du Chapitre 1 nous permet d'obtenir la formule du délai de groupe en fonction de  $|\Omega_c|^2$  à désaccord optique et désaccord Raman nuls ( $\Delta_c = 0$  et  $\delta_R = 0$ ) (annexe G.5.6) :

$$\tau_g = \frac{L}{v_g} - \frac{L}{c} = -\frac{\ln T_0}{2} \frac{(W_D + \frac{\Gamma}{2})|\Omega_c|^2}{((\Gamma_R + \gamma_t)(W_D + \frac{\Gamma}{2}) + |\Omega_c|^2)^2}.$$

Les valeurs de  $\Gamma_R + \gamma_t$  et de  $W_D$  ont été obtenues à l'aide de la mesure des largeurs des résonances en fonction de l'intensité de couplage dans les mêmes conditions. La courbe théorique obtenue est tracée en fonction de l'intensité de couplage sur la même figure en tirets verts, ainsi que le résultat obtenu par la résolution complète en utilisant la méthode de Floquet en trait plein rouge. La transmission initiale est ajustée différemment dans les deux modèles puisque le modèle analytique simple considère un pompage complet des atomes dans l'état noir, alors que la résolution par la méthode de Floquet calcule également le pompage optique. Les deux transmissions initiales sont liées par  $T_{0,B}^2 = T_{0,F}$  (voir Chapitre 1 p.47).

Nous pouvons observer des délais de groupe d'environ 20  $\mu\text{s}$  dans cette cellule de 6 cm, ce qui signifie donc qu'il est possible de réduire la vitesse de groupe dans notre système expérimental jusqu'à environ 3  $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le délai de groupe ainsi introduit est de plus accordable avec l'intensité de couplage, alors que le milieu reste transparent.

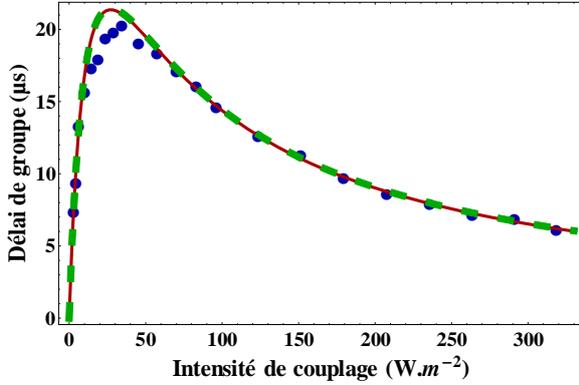


FIGURE 3.6 – Délai de groupe à résonance en fonction de l'intensité de couplage. Résultats expérimentaux (points bleus) pour une cellule de 6 cm et une transmission initiale d'environ 3 %. Courbe théorique obtenue avec un développement de Floquet en rouge et avec la résolution analytique des équations de Bloch optique en tirets verts. Les paramètres choisis sont  $W_D = 2\pi \times 0,59 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma = 2\pi \times 1,4 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma_R + \gamma_t = 2\pi \times 4 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_{0,F}=11,5 \%$  pour Floquet et  $T_{0,B}=1,3 \%$  pour Bloch.

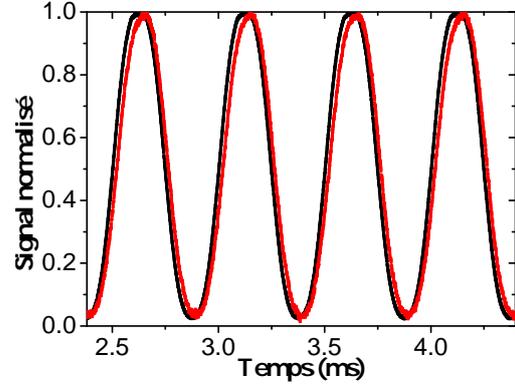


FIGURE 3.7 – Signal de sonde détecté et normalisé modulé à 2 kHz en intensité pour la mesure du délai de groupe. Noir : signal détecté après propagation dans la cellule d'hélium en absence de décharge RF. Rouge : signal détecté après propagation dans la cellule d'hélium en présence du phénomène d'EIT pour une puissance de couplage d'environ 4 mW. Le délai de groupe est alors d'environ  $20 \mu\text{s}$ .

### II.3 Lumière arrêtée-Stockage

L'étude du stockage des impulsions lumineuses dans les matériaux est aussi d'un grand intérêt dans le domaine du traitement optique de l'information. En particulier, la réalisation de mémoires quantiques est devenu un vaste champ de recherche depuis quelques années, dont les objectifs comprennent entre autre la réalisation de sources déterministes de photons uniques, la réalisation de répéteurs quantiques ou les mesures de précision [Simon et al., 2010]. Dans ce contexte, les expériences de lumière ultra-lente ont naturellement abouti à des expériences de stockage : il semble possible de stopper l'impulsion à l'intérieur du milieu. La démonstration du stockage en présence d'EIT a ainsi pu être réalisée en 2001 dans plusieurs matériaux : des atomes de sodium froids [Liu et al., 2001], une vapeur de rubidium à température ambiante [Phillips et al., 2001] ou un solide dopé aux ions de terres rares [Turukhin et al., 2001].

Une impulsion se propageant dans un milieu en présence d'EIT et subissant un effet de

lumière ultra-lente est en effet compressée spatialement de plusieurs ordres de grandeur (d'un facteur égal à l'indice de groupe). Si elle est entièrement contenue dans le milieu lorsque le champ de couplage est éteint, l'impulsion sonde est immédiatement absorbée et convertie en une excitation cohérente de spin via la cohérence Raman responsable du phénomène d'EIT. Lorsque le champ de couplage est rallumé, le phénomène inverse se produit et l'impulsion initialement stockée est réémise. Une caractéristique importante de cette méthode est son caractère non destructif, le niveau excité et donc l'émission spontanée n'étant pas mis en jeu dans le processus. Pour ce type de stockage, il est aussi courant de parler de lumière arrêtée (« stopped light »). Il se produit en effet une réduction de la vitesse de groupe du polariton associé (superposition du champ et de l'excitation de spin) jusqu'à une valeur nulle [Fleischhauer and Lukin, 2000; Fleischhauer et al., 2005].

Ainsi, le stockage d'un photon unique a pu être réalisé dans un nuage d'atomes de rubidium froids en 2005 [Chaneliere et al., 2005], montrant l'intérêt d'une telle méthode dans le cadre de la réalisation de mémoires quantiques. Des temps de stockage supérieurs à la seconde ont également pu être observés dans des cristaux dopés en présence d'EIT [Longdell et al., 2005]. Une présentation ainsi qu'une discussion sur le stockage d'impulsions grâce au phénomène d'EIT dans les vapeurs d'atomes chauds peuvent être trouvées dans [Novikova et al., 2012].

### III Lumière supraluminique

#### III.1 Définition - Présentation

La transition optique la plus simple a lieu dans un système à deux niveaux. Ceci se traduit par une résonance en absorption dans le milieu, et dans ce cas, la pente de la dispersion à résonance est négative (Fig. 3.3). Or l'indice de groupe est donné par

$$n_g = n_R(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} .$$

Si la variation de la dispersion est assez grande pour compenser l'indice de phase, l'indice de groupe dans le milieu peut devenir inférieur à 1 à résonance. On parle alors de lumière rapide ou supraluminique (« superluminal » or « fast » light). L'impulsion semble se propager dans le milieu plus vite que l'impulsion dans le vide (Fig. 3.8). Dans des cas

extrêmes, l'indice de groupe peut même devenir négatif. L'impulsion se propage en sens inverse à partir de la face arrière du milieu et de l'impulsion sortante pour rejoindre la face avant et l'impulsion entrante (Fig. 3.9).

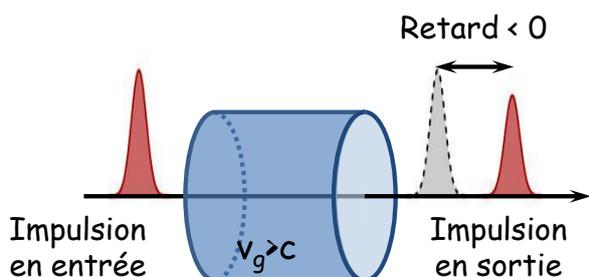


FIGURE 3.8 – Propagation dans un milieu à lumière rapide. L'impulsion grise représente l'impulsion de propageant dans le vide. Le retard accumulé lors de la propagation est négatif.

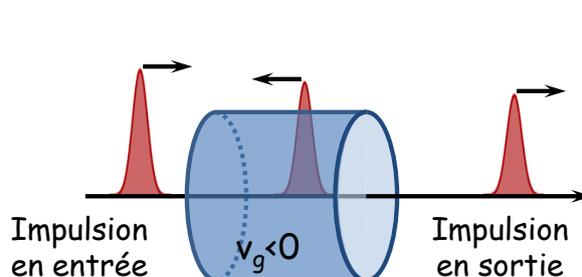


FIGURE 3.9 – Propagation dans un milieu pour lequel la vitesse de groupe est négative. les flèches représentent le sens de propagation des différentes impulsions présentes.

Le phénomène de lumière rapide a suscité un grand intérêt scientifique depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle pour ses implications vis-à-vis de la théorie de la relativité d'Einstein. En 1982, des vitesses de groupes supérieures à  $c$  et négatives sont observées dans un milieu résonant [Chu and Wong, 1982], c'est-à-dire en présence d'une absorption forte. Ceci pose alors des problèmes d'utilisation puisque les signaux détectés sont forcément de faible amplitude. Il est montré en 1999 que l'absorption électromagnétiquement induite (EIA) dans un système à deux niveaux dégénérés permet aussi l'observation de lumière rapide, mais toujours en présence d'absorption [Akulshin et al., 1999].

Pour éviter la forte absorption présente sur une transition optique résonante, il a été proposé d'utiliser deux résonances de gain assez proches pour que la dispersion soit négative au centre [Wang et al., 2000b]. En particulier, il a été démontré qu'il n'y a pas de distorsion majeure de l'impulsion lors de la propagation dans ce type de régime.

Parmi les avancées récentes, le phénomène de lumière rapide a pu être réalisé dans une cavité en anneau [Li et al., 2009] et dans une puce photonique par diffusion Brillouin stimulée [Pant et al., 2012]. L'augmentation de la sensibilité de capteurs à base de cavités optiques à l'aide de la dispersion négative a aussi fait l'objet d'études au cours des dernières années, et le chapitre 5 de ce manuscrit traitera le sujet plus en détails.

La vitesse de groupe est souvent associée, à tort, à la vitesse de propagation de l'in-

formation contenue dans une impulsion. Or selon la théorie de la relativité, la vitesse de la lumière dans le vide est la limite fondamentale de propagation de l'information, afin de ne pas violer le principe de causalité. Même lorsque la vitesse de groupe excède  $c$  dans un milieu, la causalité est en fait toujours respectée. Le rapport entre vitesse de groupe, propagation d'information et causalité sera abordé dans la section suivante. Le reste de cette section est consacré à l'obtention de lumière rapide dans notre système expérimental.

### III.2 EIT et variation négative de la dispersion

L'EIT est associé à l'apparition d'une fenêtre de transparence et à une variation positive de la dispersion. Le phénomène de lumière lente est alors réalisable, comme expliqué dans la section précédente. Mais il est également possible d'obtenir de la lumière rapide en présence d'EIT désaccordé [Mikhailov et al., 2004].

Considérons le système à 3 niveaux en  $\Lambda$  de la figure 3.10. Lorsque le désaccord optique  $\Delta_c$  entre le champ de couplage et la transition optique associée est non nul, le profil de transmission du système est profondément modifié en un profil de Fano (Fig. 3.11 et Chapitre 1 p.40). Dans ce cas, un pic d'absorption très fin et de fort contraste est présent dans le profil de transmission lorsque la condition d'accord Raman ( $\delta_R = 0$ ) n'est plus respectée. La variation de la dispersion est donc fortement négative au centre de cette résonance en absorption. On peut alors s'attendre à ce qu'une impulsion de champ sonde, légèrement désaccordée afin d'être centrée sur cette résonance, puisse subir un phénomène de lumière rapide.

### III.3 Lumière rapide dans l'hélium

Dans  $\text{He}^*$  à température ambiante, la transition  $2^3\text{S}_1 \rightarrow 2^3\text{P}_1$  utilisée pour réaliser l'EIT possède un élargissement inhomogène dû à l'effet Doppler. Nous avons vu dans le Chapitre 1 p.39 que chaque classe de vitesse a un profil en transmission donné par un profil de Fano. La réponse du milieu est alors donnée par l'intégration de ces différents profils sur l'ensemble des classes de vitesse. Le résultat analytique est équivalent au même système pour lequel la largeur homogène est remplacée par la largeur inhomogène. Lorsqu'un désaccord optique est introduit, le profil de transmission est donc également modifié pour donner des profils de Fano [Goldfarb et al., 2009].

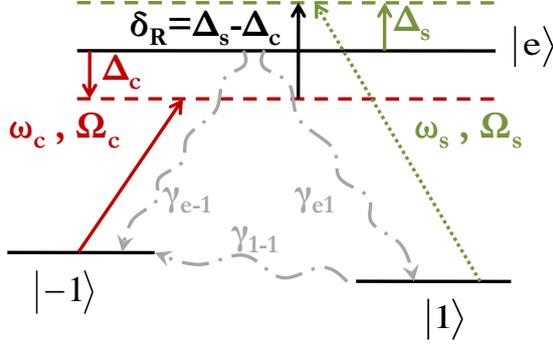


FIGURE 3.10 – Système en  $\Lambda$  lorsque le champ de couplage de fréquence de Rabi  $\Omega_c$  et de fréquence optique  $\omega_c$  est désaccordé optiquement de  $\Delta_c$  par rapport à la transition optique.

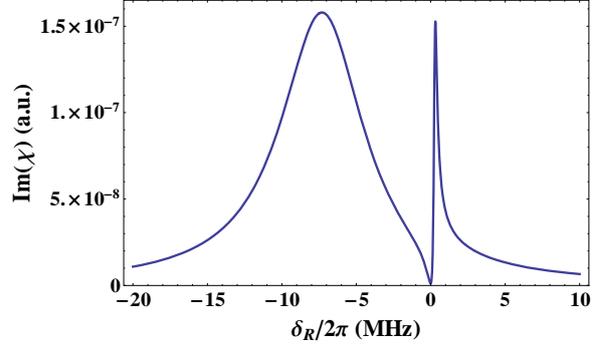


FIGURE 3.11 – Partie imaginaire de la susceptibilité en fonction du désaccord Raman pour  $\Delta_c/2\pi = 7$  MHz,  $\gamma_{e,1}/2\pi = 3,5$  MHz,  $\gamma_{1,-1}/2\pi = 5$  kHz et  $\Omega_c/2\pi = 3$  MHz : « profil de Fano ».

Le profil de transmission expérimental d'une cellule de 6 cm de longueur et de transmission initiale 3 %, pour un désaccord optique d'environ 1,4 GHz et une puissance de couplage de 5 mW est tracé sur la figure 3.12. L'ajustement par la courbe théorique obtenue par la résolution des équations de Bloch optiques est également tracé en rouge. En présence d'élargissement inhomogène, la fenêtre EIT s'affine et la transmission à résonance est moindre. Il se produit le même phénomène pour le pic d'absorption qui apparaît lorsque le désaccord optique est non nul. Sa largeur s'approche alors du taux de relaxation de la cohérence Raman  $\Gamma_R$  et l'absorption en son centre est réduite. Il est ainsi possible d'obtenir une forte variation négative de la dispersion, dans une région spectrale où le milieu reste tout de même transparent. Ces conditions sont propices à l'observation du phénomène de lumière rapide.

### Résultats expérimentaux

Nous avons mesuré le délai de groupe introduit par la cellule d'hélium lorsque le champ de couplage est désaccordé optiquement ( $\Delta_c \neq 0$ ) en fonction du désaccord Raman  $\delta_R$  entre les champs de couplage et de sonde. Le protocole expérimental est identique à celui présenté dans la section précédente concernant la lumière lente. Les résultats sont tracés sur la figure 3.13, ainsi que les courbes théoriques obtenues avec la résolution analytique des équations de Bloch (voir annexe G.5.6) ou avec le développement de Floquet. La correspondance n'est pas très bonne, et trois raisons immédiates semblent pouvoir l'ex-

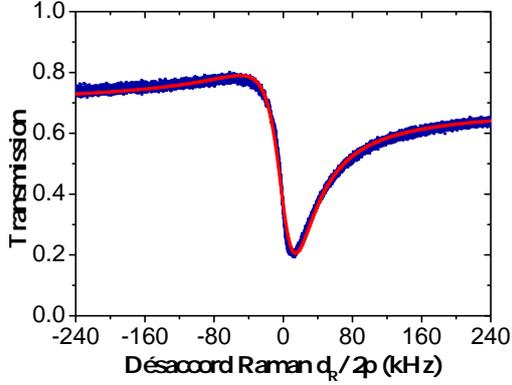


FIGURE 3.12 – Expérience (bleu) : profil de Fano obtenu lorsque le champ de couplage de puissance 5 mW est désaccordé de  $\Delta_c = 1.4$  GHz, pour une cellule de 6 cm de transmission initiale environ 3 %. Théorie (rouge) : ajustement par la formule de la transmission obtenue en annexe G.5.4.

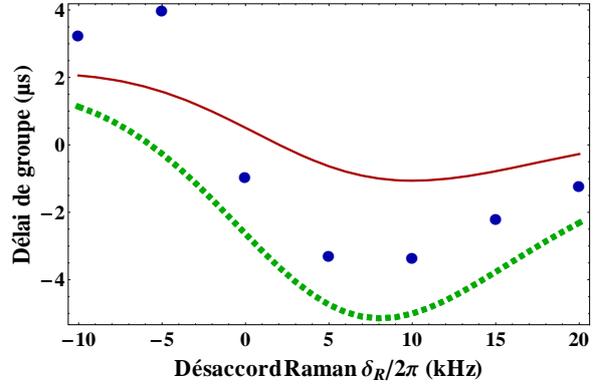


FIGURE 3.13 – Délai de groupe en fonction du désaccord Raman  $\delta_R$  entre le champ de sonde et le champ de couplage. Expérience (points bleus) : les conditions sont celles de la figure 3.12. Théorie : formule analytique en tirets verts et résolution par la méthode de Floquet en rouge. Les valeurs des paramètres sont obtenues à partir de l'ajustement de la transmission expérimentale la figure 3.12.

pliquer. Le pompage des atomes est d'abord moins efficace lorsque le champ de couplage est désaccordé optiquement, ce qui réduit le nombre d'atomes participant au délai de groupe. Nos modèles considèrent ensuite une largeur homogène égale à la largeur inhomogène expérimentale. Si cette approximation est valable pour les profils de transmission à résonance optique, des différences apparaissent dès lors que le désaccord optique est non nul. Enfin, nous pourrions voir dans la section suivante que la définition du délai de groupe n'est cohérente que lorsque le spectre est contenu dans une région où l'absorption peut être considérée comme constante et la dispersion linéaire. Ce n'est plus vraiment le cas pour des profils de Fano avec de rapides variations d'absorption et de dispersion en fonction du désaccord Raman. L'ordre de grandeur des délais négatifs obtenus reste tout de même le bon, avec des résultats de l'ordre de la  $\mu s$ .

Des vitesses de groupe jusqu'à  $-15 \text{ km.s}^{-1}$  peuvent ainsi être observées dans notre système expérimental. Les délais de groupe obtenus lorsque le désaccord optique est non nul semblent de plus accordables avec le désaccord Raman entre les champs optiques : il est possible de passer du régime de lumière lente au régime de lumière rapide jusqu'aux vi-

tesses de groupe négative. Ainsi, ce système semble adapté à la réalisation des propositions théoriques et expérimentales basées sur le phénomène de lumière supraluminique.

## IV Causalité-Propagation d'information

D'après la théorie de la relativité, le principe de causalité a pour conséquence qu'aucune information ne peut se propager plus rapidement que la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ . L'existence de la lumière rapide a par contre été prédite dès le début du XX<sup>ème</sup> siècle, et a donc suscité un intérêt tout particulier avec les travaux sur la relativité d'Einstein et le respect du principe de causalité. Que devient en effet la vitesse de propagation de l'information contenue dans une impulsion qui sort d'un milieu avant même d'y être entrée [Gehring et al., 2006] ? Dans cette section, nous revenons sur le principe de causalité et sur ce que cela implique quant à la propagation d'impulsions. Nous verrons en particulier que la causalité est tout de même respectée avec la lumière rapide.

### Kramers-Kronig

Selon le principe de causalité, la réponse d'un système à un signal d'entrée doit rester nulle tant que ce dernier est nul. Si l'on considère la fonction de transfert du système, ceci se traduit par une relation particulière entre sa partie réelle et sa partie imaginaire : une relation de transformée d'Hilbert (voir par exemple [Milonni, 2005] pour plus de détails). Les parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert s'expriment alors l'une par rapport à l'autre par ce que l'on appelle les relations de Kramers-Kronig.

Lorsque l'on considère la réponse linéaire d'un milieu à un champ électromagnétique, on a la relation suivante entre la polarisation du milieu et le champ :

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega). \quad (3.2)$$

Ici,  $\chi$  est la susceptibilité du matériau que l'on peut exprimer en fonction de l'indice complexe  $n(\omega)$  du matériau :

$$\chi(\omega) = n(\omega)^2 - 1.$$

Pour que la relation (3.2) soit causale, il est nécessaire d'appliquer les relations de Kramers-Kronig à  $\chi(\omega)$ . On en déduit les relations suivantes entre parties réelle et imaginaire de

l'indice :

$$\begin{aligned} n_R(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} PV \int_0^\infty \frac{\omega' n_I(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \\ n_I(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} PV \int_0^\infty \frac{n_R(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \end{aligned}$$

où nous avons introduit ici la valeur principale de Cauchy définie par

$$PV \int_0^\infty = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{\omega-\epsilon} + \int_{\omega+\epsilon}^\infty \right).$$

Pour que ces relations soient valables, il est aussi nécessaire de supposer que l'indice tend vers 1 pour des fréquences infinies : la justification physique est qu'un milieu ne pouvant pas répondre à des fréquences infinies, le champ se propage alors comme s'il se propageait dans le vide [Milonni, 2005; Jackson, 1962].

La conséquence directe du principe de causalité est le lien existant entre la forme du profil de transmission et la dispersion d'un matériau, respectivement données par  $-n_I$  et  $n_R$ . Considérer une résonance en absorption ou en transmission nous renseigne en particulier sur le signe de la dispersion à résonance, comme ceci est illustré sur les figures 3.3 et 3.4 de la page 95.

La possibilité d'obtenir des vitesses de groupe supraluminiques ou négatives semble donc découler directement du principe de causalité. Si la vitesse de groupe représente bien la vitesse de propagation d'une impulsion, ceci signifie qu'une impulsion peut sortir du milieu avant même d'y être entrée [Gehring et al., 2006]. Et si l'impulsion représente l'information contenue dans le signal se propageant, alors c'est en désaccord avec le principe de causalité. Il est donc nécessaire de comprendre ici ce que signifie réellement la vitesse de groupe d'une part, et ce qui définit l'information dans un signal d'autre part.

### Vitesse de groupe

Nous avons défini la vitesse de groupe  $v_g = \frac{c}{n_R(\omega) + \omega \frac{dn_R(\omega)}{d\omega}}$  comme la vitesse du point à l'endroit duquel toutes les composantes spectrales d'une impulsion sont en phase (I.1 p.93). Ceci suppose en particulier que toutes les dérivées de  $\phi(\omega, z, t) = \omega t - \text{Re}[k(\omega)]z$  par rapport à  $\omega$  sont nulles. C'est équivalent à considérer la partie réelle  $\text{Re}[k(\omega)]$  affine avec la pulsation  $\omega$ , ce qui se réécrit :

$$\frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} = \frac{1}{c} \left( n_R(\omega) + \omega \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right) = \frac{n_g}{c},$$

où  $n_g$  est ici constant. En conséquence, l'indice de phase devrait être de la forme :

$$n_R(\omega) = n_g + \frac{K}{\omega},$$

avec  $K$  une constante. Mais dans un système réel, ceci n'est pas possible pour des raisons physiques. L'indice de phase doit d'abord tendre vers 1 pour des fréquences infinies : un milieu ne pouvant pas répondre à des fréquences infinies, le champ doit alors se propager comme s'il se propageait dans le vide. Comme la polarisation du milieu  $\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \sqrt{n^2(\omega) - 1} \vec{E}(\omega)$  est une quantité physique, l'indice de phase ne peut pas non plus avoir d'asymptote verticale. Le seul système qui satisfait cette condition est le vide, lorsque  $n_R(\omega) = n_g = 1$ .

Dans le cas général, la vitesse de groupe dépend donc de la pulsation  $\omega$  et n'a pas toujours de signification physique évidente. Sous certaines conditions seulement, il est possible de considérer que la vitesse de groupe détermine la vitesse de propagation d'une impulsion.

### Propagation d'une impulsion

Une impulsion est en pratique centrée autour d'une pulsation optique  $\omega_0$ . Si on note le champ  $E(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z, t) + cc$  et  $\mathcal{E}(0, t) = E_0(t) e^{-i\omega_0 t}$ , alors  $E_0(t)$  représente l'enveloppe de l'impulsion et s'exprime :

$$E_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega.$$

Le champ se propageant s'écrit alors en notation complexe (annexe B) :

$$\mathcal{E}(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega.$$

Supposons que l'impulsion ait une largeur spectrale  $\Delta\omega$ , et que le milieu dans lequel se propage l'impulsion possède une résonance (en absorption ou en gain) de largeur  $2\Gamma$  centrée autour d'une pulsation  $\omega_r$ .

Lorsque  $|\omega_0 - \omega_r| \gg \Gamma, \Delta\omega$ , alors l'impulsion est envoyée loin de la résonance du milieu et n'interagit pas avec celui-ci. Il est donc possible de négliger l'effet du milieu et l'impulsion se propage sans déformation avec  $v_g = v_\phi = c$ .

Il est par contre habituel de travailler au voisinage de la résonance pour profiter des

interactions entre la lumière et le milieu. On peut alors considérer que  $\Delta\omega, |\omega_0 - \omega_r| \ll \Gamma$ . Dans ces conditions, il est possible de négliger la variation d'absorption avec la pulsation  $\omega$  et de considérer le développement au premier ordre de la dispersion (Fig. 3.3 et 3.4)<sup>1</sup>. Nous obtenons :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{dk(\omega)}{d\omega} = \left. \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega_0}.$$

On peut alors définir la vitesse de groupe dans ces approximations, qui s'exprime :

$$v_g = \left( \left. \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right)^{-1} = \frac{c}{n_R(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0}}.$$

De même, on peut définir l'indice de groupe par :

$$n_g = \frac{c}{v_g} = n_R(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0}.$$

Le champ se propageant devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) \exp[-\text{Im}[k(\omega_0)]z] \\ &\quad \times \exp -i \left[ (\omega_0 + \omega - \omega_0)t - \left( \text{Re}[k(\omega_0)] + (\omega - \omega_0) \left. \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right) z \right] d\omega, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &= \frac{e^{-\text{Im}[k(\omega_0)]z}}{\pi} \exp -i [\omega_0 t - \text{Re}[k(\omega_0)]z] \\ &\quad \times \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) \exp \left[ -i(\omega - \omega_0) \left( t - \left. \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega_0} z \right) \right] d\omega. \end{aligned}$$

On obtient finalement pour le champ total se propageant :

$$E(z, t) = \frac{1}{2} E_0 \left( t - \frac{z}{v_g} \right) e^{-\text{Im}[k(\omega_0)]z} \exp -i [\omega_0 t - \text{Re}[k(\omega_0)]z] + cc, \quad (3.3)$$

---

1. Attention : ceci est seulement possible si  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , ce qui est une hypothèse adaptée dans le domaine optique. Ces approximations au voisinage d'une résonance sont valables sur l'indice  $n$  mais ne sont pas forcément sur le vecteur d'onde  $k \propto \omega n$ .

où la vitesse de groupe  $v_g$  est bien donnée par :

$$v_g = \left( \frac{d\text{Re}[k(\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \right)^{-1} .$$

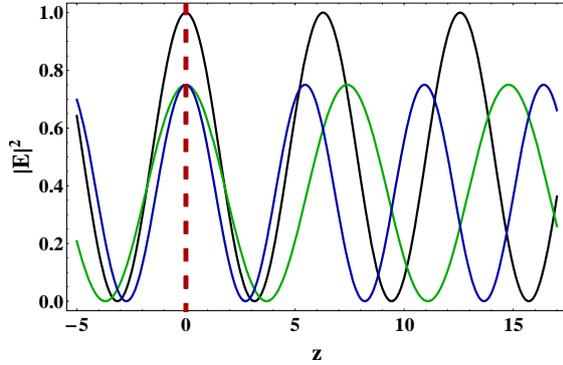
La formule 3.3 nous indique que, lors de la propagation, l'enveloppe de l'impulsion se propage à la vitesse  $v_g$ . Elle subit également l'absorption du milieu à la pulsation de la porteuse suivant une loi de Beer-Lambert. La porteuse à  $\omega_0$  se propage, elle, à la vitesse de phase  $v_\phi(\omega_0)$ . Ce comportement est illustré sur les figures 3.2(a) et 3.2(b) dans le cas d'une vitesse de groupe plus lente que la vitesse de phase et sur les figures 3.15(a) et 3.15(b) dans le cas d'une vitesse de groupe plus rapide que la vitesse de phase. A noter ici que le terme d'absorption n'a pas été pris en compte sur ces figures, et que celui-ci peut dramatiquement changer la forme de l'impulsion à l'intérieur du milieu [Crouzil and Bouchene, 2009]. Mais dès lors que l'impulsion est sortie du milieu et sous les hypothèses de ce paragraphe, elle retrouve sa forme initiale avec une amplitude modifiée par l'absorption ou le gain subi pendant la propagation. Elle se propage ensuite à  $c$  avec le retard accumulé lors de son passage dans le milieu (qui peut être négatif).

### Distorsion

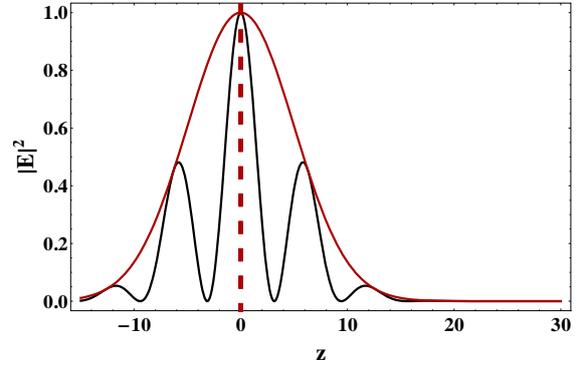
Les conditions supposées pour considérer que l'enveloppe de l'impulsion se propage à la vitesse de groupe sont en fait très restrictives. Dès que le spectre de l'impulsion devient de l'ordre de grandeur de la largeur de la résonance du milieu, il n'est déjà plus possible de considérer l'absorption comme constante ou la dispersion comme linéaire. Son spectre est alors modifié et l'enveloppe de l'impulsion distordue. Cet effet persiste même après sa sortie du milieu [Crouzil and Bouchene, 2009]. La vitesse de groupe dans ce cas ne peut plus s'interpréter simplement comme la vitesse de propagation de l'impulsion.

Ce phénomène fut d'ailleurs l'un des premiers arguments pour affirmer que le phénomène de lumière rapide ne violait pas le principe de causalité. On a en effet pensé pendant longtemps que les vitesses de groupe supraluminiques ou négatives dans un milieu s'accompagnaient obligatoirement d'une distorsion de l'impulsion [Crisp, 1971]. L'effet de vitesse de groupe supraluminique serait alors dû à une absorption plus grande de l'arrière d'une impulsion que de son début, la conséquence étant que le maximum apparent de l'impulsion se propage plus vite que  $c$ .

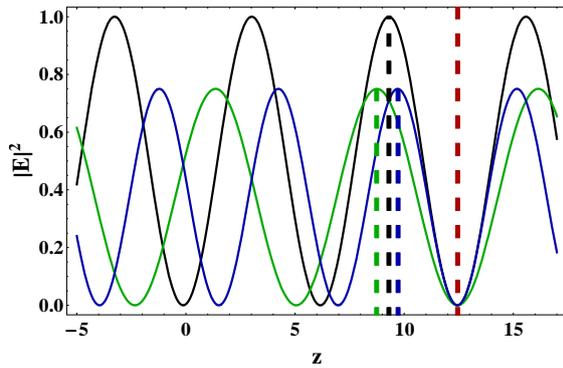
Pourtant au même moment, il est suggéré théoriquement que le phénomène de lumière



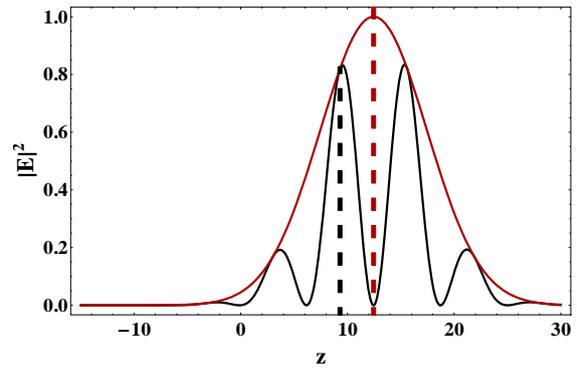
(a) A l'instant  $t_0$ . Toutes les composantes ont la même phase  $\phi_0$  au point d'abscisse  $z = 0$  représenté par la ligne pointillée rouge.



(a) A l'instant  $t_0$ . La composante de pulsation centrale possède une phase  $\phi_0$  au point d'abscisse  $z = 0$  qui coïncide avec le maximum de l'impulsion représenté par la ligne pointillée rouge.



(b) A l'instant  $t$ . Les points de phase  $\phi_0$  à l'instant initial  $t_0$  se sont déplacés à la vitesse de phase pour chacune des composantes spectrales et sont représentés par les lignes pointillées noire, bleue et verte. Toutes les composantes sont en phase au point se déplaçant à la vitesse de groupe représenté par la ligne pointillée rouge.



(b) A l'instant  $t$ . Le point de phase  $\phi_0$  à l'instant initial  $t_0$ , représenté par la ligne pointillée noire, s'est déplacé à la vitesse de phase pour la composante de pulsation centrale. Le maximum de l'impulsion, représenté par la ligne pointillée rouge, s'est déplacé à la vitesse de groupe.

FIGURE 3.14 – Intensité de trois des composantes spectrales d'une impulsion en fonction de la distance de propagation  $z$  à deux instants donnés  $t_0$  et  $t$ . La composante à la pulsation centrale  $\omega_0$  est représentée en noir tandis que deux composantes de pulsations symétriques  $\omega_0 + \Delta\omega$  et  $\omega_0 - \Delta\omega$  sont représentées en bleu et vert respectivement.

FIGURE 3.15 – Intensité d'une impulsion lumineuse et de sa composante à la pulsation centrale en fonction de la distance de propagation  $z$  à deux instants donnés  $t_0$  et  $t$ . La composante de pulsation centrale est représentée en noir et l'impulsion en rouge.

rapide est réalisable sans distorsion de l'impulsion initiale [Garrett and McCumber, 1970]. En effet, ce devrait bien être le cas s'il est possible de satisfaire les conditions énoncées précédemment, à savoir un spectre de l'impulsion entièrement contenu dans la résonance d'un milieu. Cette proposition fut démontrée expérimentalement en 1982 [Chu and Wong, 1982] dans le cas d'impulsions lumineuses subissant une forte absorption durant leur propagation, mais la véritable démonstration expérimentale dans le cas d'impulsions se propageant sans absorption sera plus tardive [Wang et al., 2000b].

### Remodelage

Malgré tout, la représentation d'une impulsion qui serait moins absorbée à son début ne semble pas si erronée. Une impulsion peut en effet être considérée comme une somme d'ondes sinusoïdales se propageant chacune à une vitesse de phase différente. Lorsque le champ est présent dans le milieu, le point pour lequel ces ondes sont constructives peut prendre de l'avance comparé à la vitesse de phase (figures 3.14 et 3.15), et l'enveloppe de l'impulsion se propager ainsi plus rapidement que dans le vide. On peut alors considérer le phénomène comme un remodelage de l'impulsion vers l'avant lors de la propagation.

Ce point de vue nécessite de considérer que le signal est alors présent au sein du milieu, même si l'addition des composantes spectrales le rend négligeable. C'est dans ce contexte qu'apparaît la notion de signal analytique, infiniment dérivable en tout point et défini sur une plage de temps infinie. Seulement un morceau d'un tel signal est suffisant pour que le milieu soit capable de recréer en avance une partie du signal qui n'est pas encore rentrée [Chiao, 1993]. Le caractère analytique du signal permet au milieu de « prédire » la fin du signal.

### Front de l'impulsion-Points de non analyticité

Au vu de ces dernières considérations, une vitesse de groupe supraluminique ou négative nécessite que le signal soit présent dans le milieu bien avant la majeure partie de l'impulsion. L'information contenue dans le fait d'envoyer une impulsion s'est donc déjà propagée. Cette information semble finalement être contenue dans ce que l'on appelle le front de l'impulsion, qui est défini comme le point à partir duquel le signal est non nul. Il est alors très intéressant de constater que dès les années 1910, Sommerfeld et Brillouin avaient déjà étudié les conditions de propagation dans un milieu d'un signal démarrant par un front montant. Ils ont en effet montré que le front de l'impulsion se propage né-

cessairement à  $c$ , et que celle-ci est également fortement distordue. La dérivée du signal au niveau du front est infinie, et le spectre de l'impulsion est donc infiniment large. Ce sont principalement les fréquences situées à l'infini qui déterminent le point non continu constituant le front. Or le milieu ne peut répondre pour de telles fréquences ( $n \rightarrow 1$  à l'infini) : ce point se propage donc comme s'il se propageait dans le vide.

Finalement, la solution la plus communément admise actuellement est que la vitesse de propagation de l'information est contenue dans les points de non analyticité d'un signal [Diener, 1996], définis comme des points en lesquels le signal n'est pas indéfiniment dérivable. Un milieu ne peut justement pas prévoir l'existence de ces points, déterminés uniquement par le créateur du signal. On montre alors que ces points de non analyticité se propagent à  $c$  aussi bien dans le cas de lumière lente [Stenner et al., 2005] que de dans le cas de lumière rapide [Stenner et al., 2003], englobant ainsi la première théorie de Sommerfeld et la définition de la vitesse du front.

### Lumière rapide et causalité

Pour avoir une vision correcte du phénomène de lumière rapide, il est donc nécessaire d'associer les concepts de vitesse de groupe et de vitesse du front (où points de non analyticité le cas échéant). Alors que le début d'un signal (le front) ne se propage qu'à la vitesse de la lumière  $c$ , l'impulsion qui le compose pourra prendre de l'avance et se rapprocher du front de l'impulsion (Fig. 3.16). Si l'impulsion se rapproche trop du front lors de la propagation, l'impulsion « se heurte » au mur que celui-ci constitue alors et se déforme [Diener, 1996; Mitchell and Chiao, 1997].

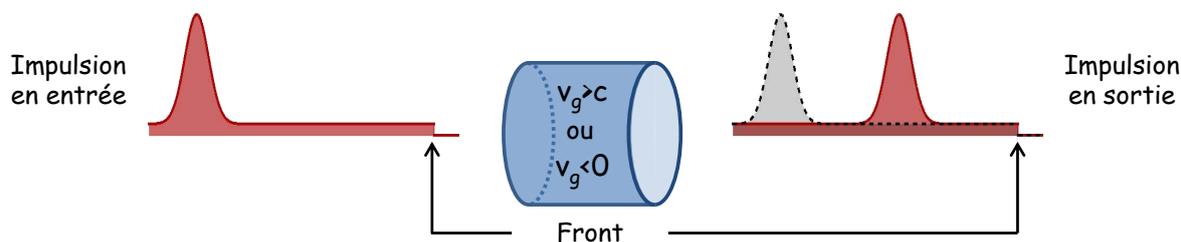


FIGURE 3.16 – Propagation d'une impulsion dans un milieu à vitesse supraluminique. L'impulsion grise représente l'impulsion de propageant dans le vide. Le front lumineux se déplace à  $c$ , tandis que l'impulsion se déplace à  $v_g$  et se rapproche du front lumineux.

Finalement, l'existence des phénomènes de lumière rapide et de vitesse de groupe négative ne met pas en défaut le principe de causalité. Il ne peut y avoir de propagation

d'une information à une vitesse plus rapide que celle de la lumière dans le vide. Des propositions ont même été suggérées pour atteindre cette limite. Plusieurs travaux ont par exemple tenté de montrer que quelle que soit la vitesse de groupe dans le milieu, et en particulier lorsqu'elle-ci est lente, il est possible de propager une information à  $c$  par l'intermédiaire des précurseurs optiques [Jeong et al., 2006; Wei et al., 2009].

## V Conclusions

Les tableaux suivants synthétisent les résultats démontrés dans ce chapitre.

---

Concernant les résultats expérimentaux

- La dispersion associée à l'EIT dans He\* permet d'observer une réduction de la vitesse de groupe jusqu'à  $3 \text{ km.s}^{-1}$ .
  - La vitesse de groupe est accordable avec la puissance de couplage.
  - En introduisant un désaccord optique, il est possible d'observer les phénomènes de lumière rapide et de vitesse de groupe négative jusqu'à  $-15 \text{ km.s}^{-1}$ .
- 

Concernant la propagation d'impulsions

- La causalité assure que les profils de transmission et de dispersion d'un matériau sont liés.
  - La vitesse de groupe n'a de signification physique que dans les cas particuliers où le spectre de l'impulsion est compris dans une résonance.
  - La propagation d'information est contenue dans les points de non-analyticité.
  - La possibilité d'observer les phénomènes de lumière rapide ou de vitesse de groupe négative n'est pas en contradiction avec la causalité.
-

# Chapitre 4

## Taux de décroissance d'une cavité optique contenant un milieu fortement dispersif

### Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Introduction et position du problème . . . . .</b>	<b>117</b>
I.1	Gyroscope laser . . . . .	118
I.2	Réponse spectrale d'une cavité optique en présence d'un milieu dispersif . . . . .	122
I.2.1	Cavité optique dans le vide . . . . .	122
I.2.2	Milieu dispersif . . . . .	123
<b>II</b>	<b>Cavité optique et lumière lente . . . . .</b>	<b>127</b>
II.1	Résultats expérimentaux . . . . .	128
II.2	Théorie . . . . .	133
II.3	Conclusion . . . . .	135
<b>III</b>	<b>Vitesse de groupe négative et inadéquation du concept de durée de vie . . . . .</b>	<b>136</b>
III.1	Introduction . . . . .	136
III.2	Résolution théorique . . . . .	137
III.3	Modèle du doublet de gain . . . . .	141
III.4	Vérification expérimentale . . . . .	143

Chapitre 4. Taux de décroissance d'une cavité optique contenant un milieu fortement dispersif

---

III.5	Conclusion	146
<b>IV</b>	<b>Généralisation</b>	<b>147</b>
<b>V</b>	<b>Conclusions</b>	<b>150</b>

---

En prenant l'exemple du gyroscope laser, nous allons tout d'abord mettre en évidence l'importance du taux de décroissance des cavités laser pour les senseurs. Nous rappelons ensuite le comportement d'une cavité en anneau dans le vide, puis nous expliquerons la modification de son comportement lorsqu'un milieu dispersif y est introduit. Les résultats expérimentaux concernant la mesure de la durée de vie des photons dans la cavité en présence d'un milieu à forte dispersion positive sont présentés et analysés dans la section II. La section III amène un nouveau regard sur le taux de décroissance d'une cavité lorsque elle contient un milieu à forte dispersion négative, qui sera ensuite généralisé dans la section IV.

## I Introduction et position du problème

L'existence de résonances ultra-fines donne lieu aux phénomènes de vitesse lente et de vitesse supraluminique (voire de vitesse de groupe négative). Les relations de Kramers-Kronig relient en effet les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité diélectrique d'un matériau (Chapitre 3). L'indice de réfraction présente alors de très fortes variations en fonction de la fréquence d'un champ électrique incident.

Vers la fin des années 90, il a été observé que la forte dispersion positive associée au phénomène de CPT dans un jet de césium peut réduire la largeur spectrale d'une cavité optique [Müller et al., 1997]. L'EIT ayant des propriétés similaires en terme de dispersion, il fut montré théoriquement [Lukin et al., 1998] et expérimentalement dans une vapeur de rubidium [Wang et al., 2000a] qu'elle peut également réduire la largeur spectrale d'une cavité. Ceci semble alors prometteur pour une application à la stabilisation de fréquence des lasers ou la spectroscopie haute résolution. L'introduction d'ions ou d'atomes uniques dans une cavité en présence d'EIT semble également intéressant pour le contrôle cohérent de la lumière et l'optique non-linéaire à l'échelle du photon unique [Mücke et al., 2010], ainsi que pour la réalisation des outils de base nécessaires à l'information quantique tels que mémoires, portes logiques ou transistors quantiques [Albert et al., 2011].

D'un autre côté, il a été proposé d'introduire des milieux à dispersion négative pour augmenter la sensibilité des senseurs dont le principe est basé sur une cavité laser, tels que les gyroscopes lasers [Shahriar et al., 2007; Pati et al., 2007; Salit et al., 2007; Smith et al., 2008]. Or le bruit dans ce type de dispositifs dépend de la durée de vie des photons dans la cavité laser [Dorschner et al., 1980], et ceci a motivé notre étude concernant le

taux de décroissance d'une cavité contenant un milieu dispersif.

La suite présente d'abord le cas particulier du gyroscope laser, afin de comprendre le lien entre dispersion, sensibilité et durée de vie des photons dans une cavité optique.

## I.1 Gyroscope laser

### Principe de fonctionnement

Le schéma simplifié d'un gyroscope laser est présenté sur la figure 4.1. Un gyroscope laser est une cavité laser en anneau qui contient un milieu à gain, et dans lequel deux modes résonnants contra-propageants peuvent co-exister. Si le gyroscope tourne à une vitesse angulaire  $\Omega$ , les deux modes contra-propageants  $+$  et  $-$  voient deux longueurs de cavité différentes  $L_+$  et  $L_-$ . La différence de longueur est alors donnée par

$$\Delta L = L_+ - L_- = 4A \frac{\Omega}{c},$$

où  $A$  est l'aire de la cavité optique. Ce phénomène est dû à l'effet Sagnac, qui est à l'origine du développement des gyroscopes tout optiques [Chow et al., 1985].

La condition de résonance pour chacun des modes contra-propageants est alors donnée par (cf annexe I.1)

$$\omega_{\pm,p} = p2\pi \frac{c}{L_{\pm}},$$

où  $p$  est un entier. Les pulsations optiques des deux modes résonnants contra-propageants sont donc différentes, la différence étant donnée par :

$$\Delta\omega = 4A \frac{\omega_0 \Omega}{L_0 c},$$

où  $L_0$  est la longueur réelle de la cavité et  $\omega_0$  la pulsation résonnante de la cavité immobile. La mesure de la vitesse angulaire s'effectue alors par la mesure de la différence de fréquence des deux modes contra-propageants, en général réalisée par détection hétérodyne.

### Milieu dispersif

Lorsqu'un gyroscope laser contient un milieu dispersif, son comportement est modifié. Considérons donc un gyroscope laser contenant un milieu dispersif d'indice de réfraction  $n_R(\omega)$ , occupant toute la cavité pour plus de simplicité, tel que représenté sur la figure

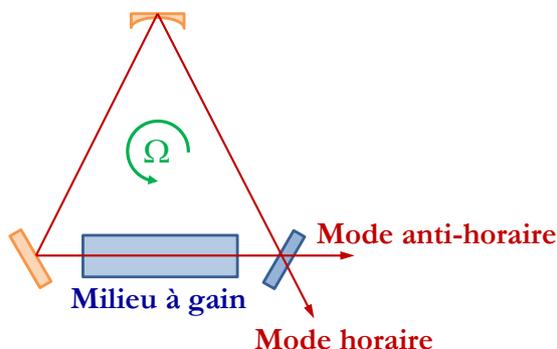


FIGURE 4.1 – Schéma d'un gyroscope laser dans le vide.  $\Omega$  est sa vitesse angulaire de rotation. Le milieu à gain est supposé avoir un indice de réfraction égal à 1.

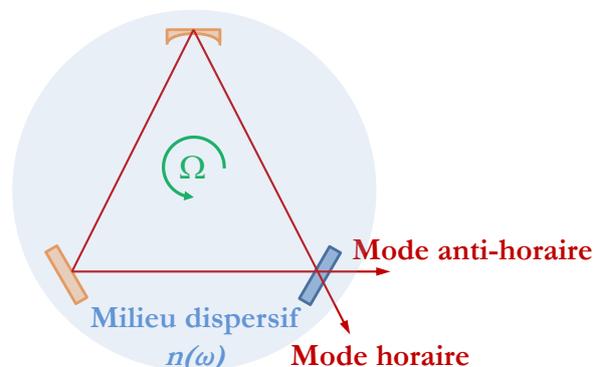


FIGURE 4.2 – Schéma d'un gyroscope laser contenant un milieu dispersif.  $\Omega$  est sa vitesse angulaire de rotation.

4.2. La condition de résonance est cette fois-ci donnée par

$$\omega_p = p2\pi \frac{c}{n(\omega)L}.$$

Comme l'indice de réfraction dépend de la pulsation, nous obtenons après dérivation :

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta n}{n} - \frac{\delta L}{L}.$$

En réexprimant alors  $\delta n = \delta\omega \frac{dn}{d\omega}$  et en utilisant la définition de l'indice de groupe  $n_g = n + \omega \frac{dn}{d\omega}$ , ceci peut se réécrire :

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{n}{n_g} \frac{\delta L}{L}.$$

L'indice de groupe est donc un paramètre important puisqu'il agit directement sur la fréquence de résonance de la cavité. En particulier, une réduction de l'indice de groupe, c'est-à-dire un phénomène de lumière rapide au sein de la cavité, implique directement une augmentation de la variation de la fréquence de résonance pour une variation de longueur donnée. Or le facteur d'échelle du gyroscope laser est défini dans ce cas par :

$$f = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{4A}{c} \frac{\omega_0}{L_0} \frac{n(\omega_0)}{n_g(\omega_0)},$$

et il est inversement proportionnel à l'indice de groupe au sein de la cavité. Une réduction

de l'indice de groupe implique donc également une augmentation du facteur d'échelle. Mais la résolution du senseur n'est augmentée que si le niveau de bruit n'est pas également augmenté.

### Bruit fondamental et durée de vie des photons

Pour les senseurs dont le principe est basé sur une cavité laser, le bruit fondamental est donné par le bruit de phase du laser. Si  $\phi(t)$  est la phase du laser considéré, alors l'équation de Langevin de la phase nous indique que  $\phi(t)$  suit un mouvement brownien. Le coefficient de diffusion associé à cette marche aléatoire est donné par :

$$D_\phi = \frac{1}{4N_{phot}\tau_{cav}},$$

où  $\tau_{cav}$  est la durée de vie des photons dans la cavité et  $N_{phot}$  le nombre de photons présents dans la cavité. Ce dernier peut d'ailleurs s'exprimer :  $N_{phot} = P_{out}\tau_{cav}/\hbar\omega_0$ , où  $\omega_0$  est la pulsation optique du laser et  $P_{out}$  sa puissance de sortie.

On montre également que la largeur spectrale fondamentale du laser, appelée largeur Schawlow-Townes, est alors donnée par :

$$\Delta\omega_{S.T.} = 2D_\phi = \frac{\hbar\omega_0}{2} \frac{1}{P_{out}\tau_{cav}^2}.$$

Si on note  $\delta\phi(t) = \phi(t) - \phi(0)$ , où  $\phi(0)$  est la phase du laser à l'instant initial, alors  $\langle\delta\phi(t)\rangle = 0$  et  $\langle\delta\phi(t)^2\rangle = 2D_\phi t = \Delta\omega_{S.T.}t$ . L'erreur faite sur une mesure de phase après un temps  $T$  est donc donnée par :

$$\Delta\phi_{RMS,T} = \sqrt{\Delta\omega_{S.T.}}\sqrt{T},$$

Et ceci se traduit par une erreur sur la mesure de pulsation du laser après un temps  $T$  :

$$\Delta\omega_{RMS,T} = \frac{\Delta\phi_{RMS,T}}{T} = \sqrt{\frac{\Delta\omega_{S.T.}}{T}}.$$

Dans le cas usuel d'une cavité dans le vide de largeur fréquentielle à mi-hauteur  $\Delta\omega_{1/2}$

et de finesse  $\mathfrak{F}$ , la durée de vie des photons est donnée par (cf annexe I.1) :

$$\frac{1}{\tau_{cav}} = \Delta\omega_{1/2} = \frac{2\pi c}{\mathfrak{F} L},$$

soit

$$\tau_{cav} = \frac{\tau_{tour}\mathfrak{F}}{2\pi}$$

où  $\tau_{tour} = \frac{L}{c}$  est la durée de parcours d'un tour de la cavité.

Mais la valeur du paramètre  $\tau_{cav}$  était encore récemment peu claire dans la littérature. Certains affirment que celui-ci dépend de l'indice de réfraction et donc de la vitesse de phase dans la cavité [Shahriar et al., 2007; Salit et al., 2007]. Pour d'autres, il est déterminé par l'indice de groupe et la vitesse de groupe dans le milieu dispersif [van Exter et al., 1991; Joshi and Xiao, 2004; Wu et al., 2008]. Les premiers considèrent un champ monochromatique présent en permanence dans la cavité. Les seconds adoptent l'image simple d'une impulsion se propageant dans la cavité, sortant après chaque tour avec une amplitude décroissante dans le temps : l'impulsion se propage alors à la vitesse de groupe (Fig. 4.3).

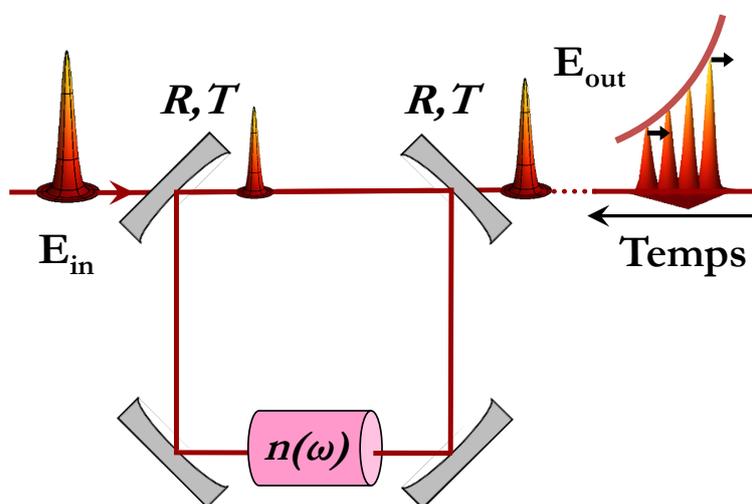


FIGURE 4.3 – Schéma d'une impulsion se propageant dans une cavité. Ayant un spectre fini, elle se propage à la vitesse de groupe.

### Sensibilité du gyroscope

Si la durée de vie des photons dans la cavité est gouvernée par l'indice de phase, il est possible d'augmenter le facteur d'échelle sans changer le bruit sur la mesure. Mais si l'indice de groupe régit la durée de vie des photons dans la cavité, le gain sur le facteur d'échelle sera compensé par l'augmentation de la largeur Schalow-Townes et du bruit du laser.

C'est donc à cette question en apparence simple que mes travaux ont tenté de répondre expérimentalement. La section suivante présente en particulier les résultats obtenus dans le cas où une cavité optique contient un milieu à forte dispersion positive introduisant une forte réduction de la vitesse de groupe. La section d'après examine le cas moins intuitif d'une cavité contenant un milieu à vitesse de groupe négative.

Mais rappelons tout d'abord le comportement d'une cavité optique dans le vide, et comment celui-ci est modifié par l'introduction d'un milieu hautement dispersif.

## I.2 Réponse spectrale d'une cavité optique en présence d'un milieu dispersif

Nous étudierons ici l'influence d'un milieu à forte dispersion inséré dans une cavité optique. Nous supposons une cavité en anneau, l'onde intra-cavité n'est pas stationnaire.

### I.2.1 Cavité optique dans le vide

Rappelons tout d'abord le comportement d'une cavité optique dans le vide et considérons le système de la figure 4.4, où l'on note  $r$  et  $t$  les coefficients de réflexion et de transmission pour des miroirs d'entrée  $M_1$  et de sortie  $M_2$  identiques. On note les coefficients de réflexion et de transmission en intensité  $R$  et  $T$  tels que  $R + T = r^2 + t^2 = 1$ . Les deux autres miroirs sont supposés parfaitement réfléchissants. Un champ incident  $\vec{E}_i = \frac{E_i}{2} e^{-i(\omega t - \frac{\omega}{c} z)} \vec{e}_x + cc$  arrive sur la cavité.  $E_i$  et  $E_{out}$  sont les amplitudes des champs incident et sortant respectivement.

La réponse spectrale en transmission à un champ monochromatique de pulsation  $\omega$  est donnée pour cette cavité par (cf annexe I.1) :

$$t_{cav}(\omega) = \frac{E_{out}}{E_i} = \frac{T e^{i\Delta\phi_0}}{1 - R e^{i\Delta\phi}} = \frac{T e^{iL_0 \frac{\omega}{c}}}{1 - R e^{iL \frac{\omega}{c}}},$$

où  $\Delta\phi = L\frac{\omega}{c}$  est la phase accumulée sur un tour et  $\Delta\phi_0 = L_0\frac{\omega}{c}$  est la phase accumulée sur la portion entre les miroirs  $M_1$  et  $M_2$ .

La coefficient de transmission en intensité de la cavité est donné par :

$$T_{cav}(\omega) = \frac{I_{out}}{I_i} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos L\frac{\omega}{c}},$$

dont l'évolution est tracée sur la figure 4.5.

Il est ensuite habituel de définir la finesse de la cavité comme le rapport entre l'intervalle spectrale libre<sup>1</sup> de celle-ci et la largeur à mi-hauteur des résonances  $\Delta\omega_{1/2}$ . Dans les cas habituels (sans dispersion), il est équivalent de définir la finesse dans le domaine spectral et dans le domaine des phases puisqu'il existe une relation de proportionnalité entre phase accumulée sur un tour et pulsation optique :  $\Delta\phi = L\omega/c$ . Ce n'est plus le cas lorsque des milieux dispersifs sont présents, et il est important pour la suite de définir la finesse dans le domaine des phases.

Pour notre cavité dans le vide, la finesse est définie par

$$\mathfrak{F} = \frac{2\pi}{\Delta\phi_{1/2}} = \frac{\pi}{2 \arcsin 1/\sqrt{m}},$$

où  $\Delta\phi_{1/2} = 4 \arcsin \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$  représente la largeur de la résonance à mi-hauteur dans le domaine des phases et  $m$  est défini par  $m = \frac{4R}{T^2}$ .

### I.2.2 Milieu dispersif

Supposons maintenant qu'un milieu dispersif de longueur  $L_{cell}$  et d'indice de réfraction complexe  $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$  est introduit dans cette cavité, tel qu'illustré sur la figure 4.6. La phase complexe accumulée sur un tour par le champ est cette fois-ci donnée par

$$\Delta\phi_c = (n(\omega)L_{cell} + L_{vac})\frac{\omega}{c},$$

---

1. ou ISL, espacement entre les résonances.

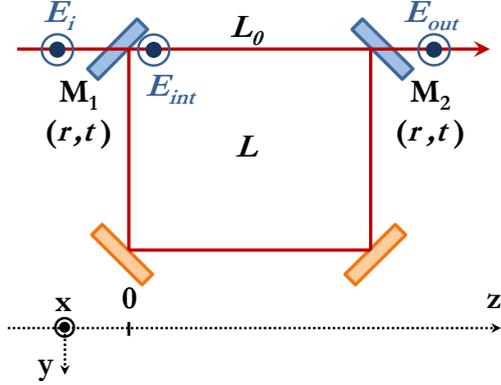


FIGURE 4.4 – Schéma d'une cavité en anneau dans le vide. Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  ont des coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$ .  $L$  est son périmètre total et  $L_0$  la distance entre les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$ .

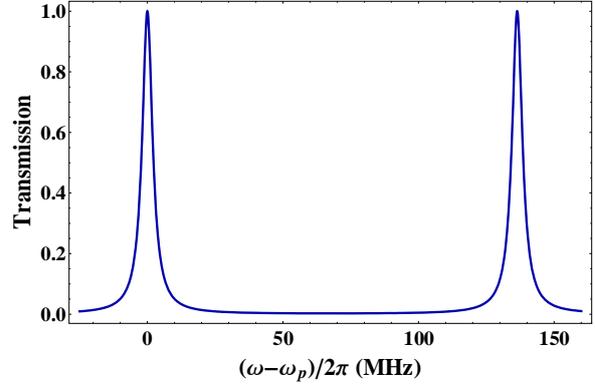


FIGURE 4.5 – Profil de transmission normalisé de la cavité de la figure 4.4 pour  $L = 1$  m et  $r^2 = 0,9$  autour d'une fréquence de résonance  $\omega_p$ .

où  $L = L_{cell} + L_{vac}$  est la longueur de la cavité. La réponse en transmission de la cavité à un champ monochromatique est alors donnée en amplitude par (annexe I.2)

$$t_{cav}(\omega) = \frac{E_{out}}{E_i} = \frac{T e^{i\Delta\phi_0}}{1 - R e^{i\Delta\phi_c}} = \frac{T e^{iL_0 \frac{\omega}{c}}}{1 - R \exp \left[ i(n(\omega)L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega}{c} \right]},$$

où  $\Delta\phi_0$  est la phase accumulée entre les miroirs d'entrée et de sortie distants de  $L_0$  (Fig. 4.6).

En notant  $R' = R \exp \left[ -n_I(\omega)L_{cell} \frac{\omega}{c} \right]$  et  $\Delta\phi' = (n_R(\omega)L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega}{c}$  la phase accumulée sur un tour, nous pouvons exprimer la transmission en intensité  $T_{cav}$  :

$$T_{cav}(\omega) = \frac{T_{max}}{1 + m' \sin^2 \frac{\Delta\phi'}{2}} = \frac{T_{max}}{1 + m' \sin^2 \frac{\omega}{2c} (n(\omega)L_{cell} + L_{vac})},$$

où  $m'$  est défini par  $m' = \frac{4R'}{(1-R')^2}$  et  $T_{max} = \frac{T^2}{(1-R')^2}$  est le maximum de transmission de la cavité.

Considérons que la largeur de la résonance de la cavité est très inférieure à la largeur de la résonance atomique du milieu considéré. On peut alors noter  $T_m$  et  $A_m$  la transmission

et l'absorption en intensité introduites par le milieu dispersif, constantes, telles que

$$\exp \left[ -n_I(\omega) L_{cell} \frac{\omega}{c} \right] = \sqrt{T_m} = \sqrt{1 - A_m}.$$

Il est possible d'exprimer la largeur a mi-hauteur de la résonance :

$$\Delta\phi'_{1/2} = 4 \arcsin \frac{1 - R\sqrt{T_m}}{2\sqrt{RT_m}^{1/4}}. \quad (4.1)$$

On constate ici que la finesse dans l'espace des phases une fois le milieu dispersif introduit, toujours définie par  $\mathfrak{F}' = 2\pi/\Delta\phi'_{1/2}$ , ne diffère de la finesse de la cavité vide que par les pertes supplémentaires introduites dans la cavité. Dans le cas hypothétique d'un milieu purement dispersif (sans absorption ni gain), la finesse de la cavité est alors inchangée comparée à la même cavité dans le vide. Nous allons voir ensuite que la réponse d'une telle cavité à une variation de fréquence ou à une variation de longueur est très différente.

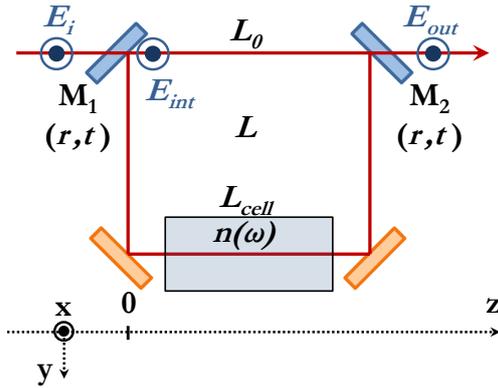


FIGURE 4.6 – Schéma d'une cavité contenant un milieu dispersif d'indice  $n(\omega)$  et de longueur  $L_{cell}$ . Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  ont des coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$ .  $L$  est son périmètre total et  $L_0$  la distance entre les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$ .

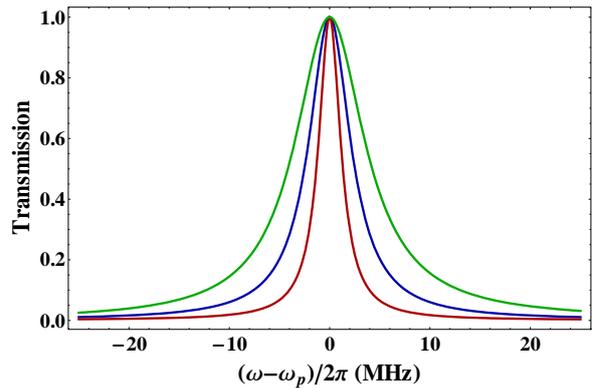


FIGURE 4.7 – Résonances à la pulsation  $\omega_p$  normalisées de la cavité de la figure 4.6 pour  $L_{vac} = 0,9$  m,  $L_{cell} = 0,1$  m et  $r^2 = 0,9$ . Bleu :  $n_g = 1$ , rouge :  $n_g = 10$  et vert :  $n_g = -4$

### Réponse en fréquence

Dans ce paragraphe, considérons un milieu dispersif d'indice de réfraction  $n_R(\omega)$  introduit dans la même cavité en anneau. Supposons la cavité résonante pour une pulsation  $\omega'_0$  et cherchons la pulsation  $\omega'_1$  pour laquelle la résonance atteint sa mi-hauteur. Nous avons

$$[n_R(\omega'_1)L_{cell} + L_{vac}]\frac{\omega'_1}{c} - [n_R(\omega'_0)L_{cell} + L_{vac}]\frac{\omega'_0}{c} = \frac{1}{2}\Delta\phi'_{1/2}.$$

Au voisinage d'une résonance dans notre milieu, il est alors possible d'exprimer l'indice de réfraction au premier ordre :

$$n_R(\omega'_1) = n_R(\omega'_0) + (\omega'_1 - \omega'_0) \left. \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega'_0}.$$

Nous pouvons réécrire alors que

$$\frac{\omega'_1 - \omega'_0}{c} \left[ L_{vac} + L_{cell} \left( n_R(\omega'_0) + \omega'_1 \left. \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega'_0} \right) \right] = \frac{1}{2}\Delta\phi'_{1/2},$$

et au premier ordre en  $\omega'_1 - \omega'_0$  :

$$\frac{\omega'_1 - \omega'_0}{c} [L_{vac} + L_{cell}n_g(\omega'_0)] = \frac{1}{2}\Delta\phi'_{1/2}.$$

La largeur à mi-hauteur fréquentielle est finalement donnée pour notre cavité par

$$\Delta\omega'_{1/2} = \frac{c}{L_{vac} + n_g L_{cell}} \Delta\phi'_{1/2}.$$

On constate ici que, au contraire de la largeur des résonances dans le domaine des phases, la largeur fréquentielle de la cavité dépend fortement de la dispersion introduite par le milieu au travers de l'indice de groupe. Si  $n_g$  est supérieur à 1, la largeur de la résonance est plus fine que la résonance de la cavité sans dispersion, tandis qu'elle est plus large si l'indice de groupe est inférieur à 1. La figure 4.7 illustre le spectre de transmission d'une telle cavité pour des indices de groupe  $n_g = -4$ ,  $n_g = 1$  et  $n_g = 10$ , pour lesquels la variation de la largeur spectrale est visible. Ces deux cas ont été illustrés expérimentalement par [Müller et al., 1997] dans le cas de la dispersion positive et par [Pati et al., 2007] dans le cas d'une dispersion négative réduisant l'indice de groupe à une

valeur proche de 0.

### Réponse à une variation de longueur

Considérons la même cavité pour laquelle le milieu dispersif introduit a une longueur  $L_{cell}$  constante, excitée à une pulsation optique  $\omega$  constante. Si  $L = L_{cell} + L_{vac}$  est la longueur totale de la cavité, la phase accumulée sur un tour est donnée par  $\Delta\phi' = [(n_R(\omega) - 1)L_{cell} + L]\frac{\omega}{c}$ , qui est une fonction affine de la longueur  $L$  de la cavité. Le profil de transmission de la cavité en fonction de la longueur  $L$  de la cavité présente alors des résonances dont la largeur à mi-hauteur  $\Delta L'_{1/2}$  est donnée par :

$$\Delta L'_{1/2} = \frac{c}{\omega} \Delta\phi'_{1/2}.$$

Lorsque la longueur de la cavité est balayée, il n'y a pas d'influence de la dispersion sur la largeur des résonances. L'absorption introduite par le milieu joue par contre le même rôle dans l'élargissement de ces résonances que dans le domaine des phases. Le profil de transmission de la cavité en fonction de sa longueur est donc équivalent au profil de transmission selon la phase à un facteur  $c/\omega$  près. Ce n'est pas le cas pour le profil spectral de la cavité qui lui dépend de la dispersion.

Par contre, nous avons déjà pu constater lors de la présentation du gyroscope laser que la variation de la fréquence propre de la cavité en réponse à une variation de longueur dépend elle aussi de l'indice de groupe (cf I.1).

Le comportement de la cavité est donc différent si on considère une réponse à une variation de longueur ou à une variation de fréquence. La dispersion permet de changer la largeur spectrale du profil de transmission mais n'affecte pas la finesse de la cavité.

Après ces discussions utiles à la compréhension du comportement des cavités en présence d'un milieu dispersif, nous revenons au problème du bruit des senseurs basés sur une cavité. Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus concernant le taux de décroissance d'une cavité contenant un milieu dispersif.

## II Cavité optique et lumière lente

La fréquence propre d'une cavité contenant un milieu à dispersion négative varie plus avec la longueur que celle d'une cavité vide. L'utilisation de la réponse en fréquence permet

donc d'augmenter la résolution des mesures des senseurs basés sur une cavité laser tels que les gyroscopes laser. Mais le bruit sur la mesure est par contre directement lié à la durée de vie des photons dans la cavité. Si cette durée de vie est gouvernée par l'indice de groupe présent dans la cavité, le gain sera nul. Nous l'avons donc mesurée dans le cas où un milieu à forte dispersion positive est introduit dans une cavité optique, afin de déterminer si la quantité pertinente est la vitesse de groupe ou la vitesse de phase [Shahriar et al., 2007].

## II.1 Résultats expérimentaux

Le milieu dispersif utilisé est une cellule d'hélium métastable en présence d'EIT. Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent qu'il est possible d'obtenir avec ce système des réductions de la vitesse de groupe jusqu'à quelques  $\text{km.s}^{-1}$ , soit des durées de parcours de quelques microsecondes.

Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure 4.8. La cellule a été introduite dans une cavité en anneau, constituée de deux miroirs plans semi-réfléchissants de transmission  $T=2\%$ , et d'un miroir concave hautement réfléchissant de rayon de courbure 5 m monté sur une actuateur piezo-électrique. La cavité n'est résonante que pour le champ sonde : le champ de couplage entre et sort de la cavité par l'intermédiaire de deux cubes séparateurs de polarisation. On remarquera que les polarisations des champs sont linéaires : la dispersion du milieu est quasiment identique à celle en présence de polarisations circulaires, et cela nous évite de rajouter des éléments optiques qui augmenteraient les pertes dans la cavité. Sur la figure 4.9 sont tracés trois profils de transmission de la cavité, pour deux puissances de couplages différentes ainsi que le profil obtenu pour la cellule éteinte. Comme c'est la longueur de la cavité qui est alors balayée, la largeur des résonances ne dépend que des pertes supplémentaires introduites par la cellule. La finesse augmente donc avec la puissance de couplage puisque la transmission à résonance Raman de la cellule augmente avec celle-ci (cf I.2.2). Lorsque la cellule est éteinte, le milieu n'absorbe plus et la finesse est maximale. Sa valeur proche de 30 peut paraître faible, mais il ne faut pas oublier que les fenêtres de la cellule et les optiques de polarisation augmentent les pertes dans la cavité. Ceci correspond pour notre cavité vide, c'est-à-dire sans milieu dispersif, à un temps de décroissance théorique  $\tau_{cav,vide} \approx 39 \text{ ns}$ .

L'expérience consiste à balayer lentement la longueur de la cavité jusqu'à ce qu'elle

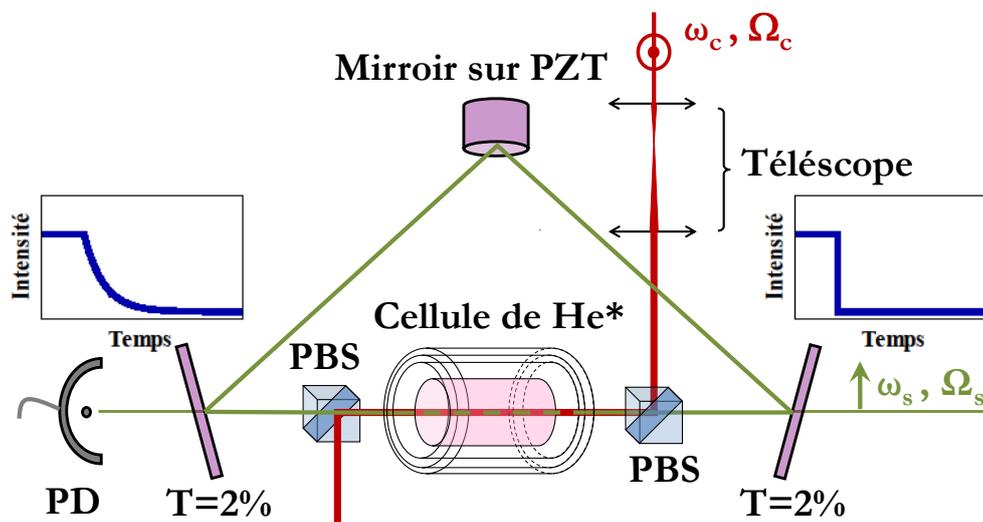


FIGURE 4.8 – Schéma du montage expérimental utilisé pour la mesure de la durée de vie d'une cavité. La cellule d'hélium métastable est introduite dans une cavité en anneau d'environ 2,45 m de périmètre, faite de deux miroirs semi-réfléchissants de transmission en intensité 2% et d'un miroir concave de rayon de courbure 5 m. Ce dernier est monté sur un actuateur piezo-électrique (PZT) afin de pouvoir faire varier la longueur de la cavité. Le champ de couplage est introduit et évacué de la cavité par l'intermédiaire de deux cubes séparateurs de polarisation (PBS). Protocole pour la mesure de la durée de vie de la cavité : le champ sonde monochromatique alimente la cavité pendant que sa longueur est balayée très lentement, puis il est coupé abruptement lorsque la cavité est résonante. La décroissance en sortie de cavité est détectée sur une photodiode (PD).

soit résonante pour le champ de sonde. Nous coupons alors brusquement le champ sonde et observons la décroissance du signal en sortie de cavité (Fig. 4.8). Comme nous pouvons l'observer sur la figure 4.10 pour les mêmes paramètres expérimentaux que la figure 4.9, nous obtenons des signaux décroissant exponentiellement dont la constante de temps est la durée de vie des photons dans la cavité.

En utilisant un modèle simpliste considérant un champ monochromatique, nous pouvons alors poser pour l'intensité sortante après  $n$  tour :

$$I_0 e^{-\frac{n\tau_{tour}}{\tau_{cav}}} = I_0 \mathcal{T}^n,$$

où  $\mathcal{T}$  est la transmission totale d'un tour de la cavité, que nous pouvons exprimer avec

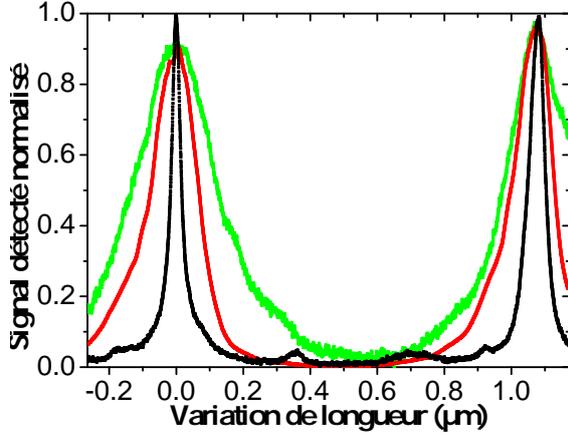


FIGURE 4.9 – Profil de transmission de la cavité en présence d'EIT obtenu par balayage de sa longueur. Noir : cellule éteinte, rouge : puissance de couplage de 9 mW et vert : puissance de couplage de 3 mW.

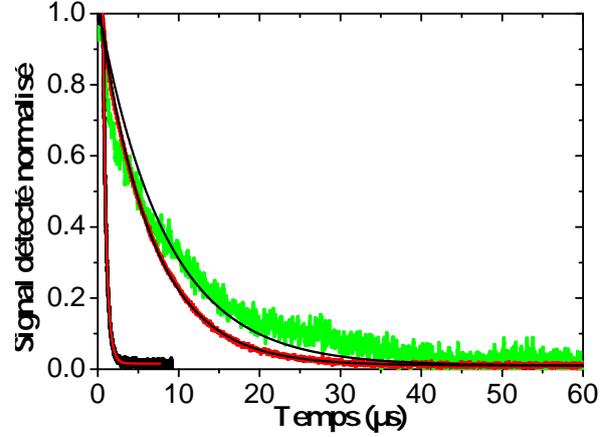


FIGURE 4.10 – Signal décroissant détecté en sortie de cavité. Noir : cellule éteinte, rouge : puissance de couplage de 9 mW et vert : puissance de couplage de 3 mW. Nous mesurons avec les ajustements exponentiels  $\tau_{cav} = 420$  ns cellule éteinte,  $\tau_{cav} = 6,3$   $\mu$ s pour 9 mW et  $\tau_{cav} = 10$   $\mu$ s pour 3 mW.

les notations de la section précédente  $\mathcal{T} = R^2 T_m = \sqrt{R'}$ . On en déduit en particulier :

$$\tau_{cav} = -\frac{\tau_{tour}}{\ln \mathcal{T}}. \quad (4.2)$$

Si  $\tau_{tour}$  est déterminé par la vitesse de phase, qui est très proche de la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ , alors cette formule nous indique que la durée de vie des photons dans la cavité diminue si l'absorption du milieu à l'intérieur augmente. Dès lors que notre cellule est allumée, de l'absorption supplémentaire est introduite dans la cavité. La durée de vie des photons mesurée avec la cellule allumée devrait donc être inférieure à celle mesurée lorsque la cellule est éteinte.

Le résultat obtenu dans le cas de la cavité vide (cellule éteinte) est représenté par la courbe noire sur la figure 4.10. Son ajustement par une exponentielle décroissante nous donne un temps de décroissance de 420 ns. Cette valeur ne correspond pas au résultat théorique précédent de  $\tau_{cav, vide}$  : elle correspond en fait au temps de réponse des appareils utilisés dans l'expérience (photodiode, modulateurs acousto-optiques, électronique...). Mais elle nous donne tout de même une majoration de la valeur que nous devrions mesurer dans tous les cas si la durée de vie était gouvernée par la vitesse de phase.

Les résultats obtenus dès que la cellule est allumée sont représentés par les courbes rouges et vertes sur la figure 4.10. Pour une puissance de couplage de 9 mW par exemple, nous obtenons une valeur  $\tau_{cav} = 6,3 \mu s$ . Cette valeur est déjà incompatible avec le résultat obtenu en cavité vide pour considérer le taux de décroissance gouverné par la vitesse de phase.

La figure 4.11 montre les résultats obtenus en fonction de l'intensité du champ de couplage. Les carrés pleins noirs représentent le délai de groupe introduit par la cellule d'hélium en présence d'EIT. Les valeurs mesurées sont de l'ordre de quelques  $\mu s$  et prouvent que notre cellule possède alors une forte dispersion positive. Les cercles rouges représentent la durée de vie des photons dans la cavité mesurée sur les signaux en sortie de cavité. Lorsque le milieu dispersif est présent, les durées de vie mesurées sont de l'ordre de la dizaine de microsecondes et sont supérieures aux délais de groupe introduits par la cellule. Si l'indice de phase était en jeu, les résultats auraient été très proches de celui obtenu pour la cavité vide (cellule éteinte), représenté par la ligne pointillée noire sur la figure. Dans ce cas, la durée de vie devrait en outre augmenter avec l'intensité de couplage et l'augmentation de la finesse. Mais le comportement observé est bien cohérent avec la variation du délai de groupe en fonction de l'intensité de couplage.

On conclut de ces résultats que la durée de vie peut s'exprimer :

$$\tau_{cav} = -\frac{\tau_{tour}^g}{\ln \mathcal{T}}, \quad (4.3)$$

où  $\tau_{tour}^g$  est alors le délai de groupe pour faire un tour, défini avec les notations de la section précédente :  $\tau_{tour}^g = (L_{vac} + n_g L_{cell})/c$ . Par ailleurs, d'après l'équation (4.1), nous pouvons exprimer  $\mathcal{T}$  à l'aide la finesse mesurée lors d'un balayage en longueur de la cavité tel que :

$$\mathfrak{F} = \frac{\pi}{2} \arcsin^{-1} \frac{1 - \sqrt{\mathcal{T}}}{2\mathcal{T}^{1/4}}$$

Les triangles bleus de la figure 4.11 représentent les résultats obtenus pour  $\tau_{cav}$  à partir de la mesure du délai de groupe et de la finesse. Nous avons aussi représenté par les losanges oranges les résultats que nous aurions dû mesurer si la durée pour parcourir un tour était gouvernée par la vitesse de phase. Les valeurs sont comme nous pouvions nous y attendre de l'ordre de la dizaine de nanosecondes et bien inférieures à la durée de vie minimale que nous pouvions mesurer avec nos appareils.

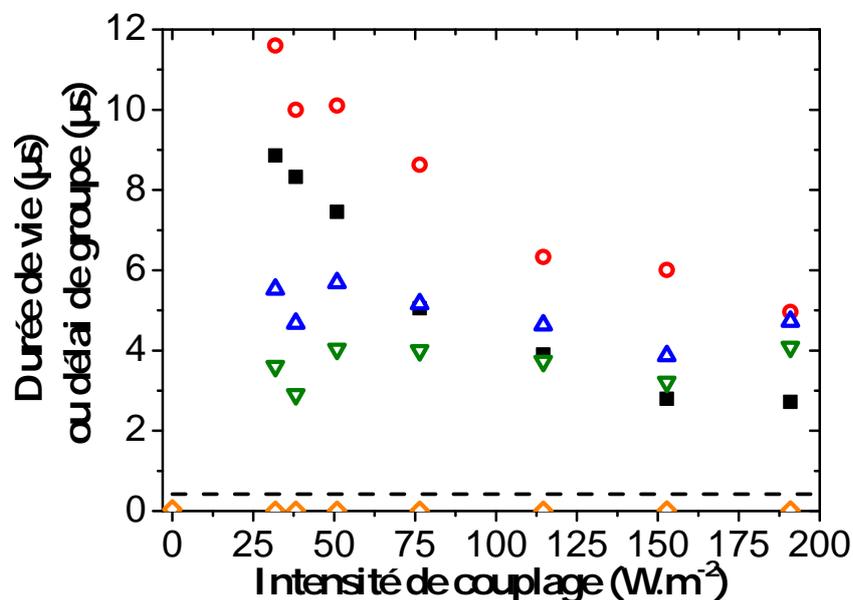


FIGURE 4.11 – Résultats expérimentaux en fonction de l'intensité de couplage. Carrés noirs : délai de groupe introduit par la cellule. Cercles rouges : durée de vie de la cavité. Ligne pointillée noire : temps de décroissance mesuré cavité vide. Triangles bleus : durée de vie obtenue à partir des mesures de délais de groupe et de finesse en utilisant la formule 4.3. Losanges oranges : durée de vie obtenue à partir des mesures de finesse en utilisant la formule 4.2 et un temps pour un tour donné par la vitesse de phase. Triangles retournés verts : durée de vie obtenue à partir des mesures de délais de groupe et de finesse en utilisant la formule 4.6.

Les résultats obtenus ne permettent pas de reproduire quantitativement les mesures expérimentales, ce qui peut être expliqué par deux raisons immédiates. Le diamètre du faisceau sonde est d'abord différent selon la mesure effectuée. Lors de la mesure des délais de groupe, le faisceau est directement incident sur la cellule. Lorsque la cavité est en place, c'est le mode propre de celle-ci qui détermine le diamètre du faisceau et peut mener à une saturation de l'EIT. Enfin, lors de la mesure de la finesse de la cavité, la puissance de sonde présente dans la cellule varie pendant le balayage de la longueur de cavité. La saturation de l'EIT est donc plus importante au sommet que dans les ailes d'une résonance.

Nous avons finalement montré à l'aide de ces résultats expérimentaux que c'est la vitesse de groupe au sein de la cavité qui régit le taux de décroissance de celle-ci. Un modèle théorique simple rendant compte de ce résultat est développé dans la sous-section suivante.

## II.2 Théorie

### Définitions

Considérons la cavité de la figure 4.6 contenant un milieu dispersif d'indice de réfraction complexe  $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$ . Supposons un champ incident scalaire de pulsation optique  $\omega_l$  coupé abruptement à l'origine des temps :

$$\bar{E}_i = \frac{E_i}{2} [1 - H(t)] e^{-i\omega_l t} + cc,$$

où  $H$  est la fonction de Heavyside définie par  $H(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $H(t) = 1$  si  $t \geq 0$ . L'origine des distances  $z$  est choisie sur le miroir  $M_1$ .

Nous avons vu au début de ce chapitre (I.2.2) que la réponse de la cavité à un champ monochromatique de pulsation  $\omega$  est donnée par

$$\tilde{t}_{cav}(\omega) = \frac{T e^{iL_0 \frac{\omega}{c}}}{1 - R \exp \left[ i(n(\omega)L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega}{c} \right]}.$$

Le champ en sortie de cavité s'exprime alors par le produit de convolution suivant :

$$\bar{E}_{out}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}_i(\tau) t_{cav}(t - \tau) d\tau. \quad (4.4)$$

On a introduit ici la réponse temporelle causale de la cavité  $t_{cav}$  définie par la transformée de Fourier inverse :

$$t_{cav}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}_{cav}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

### Résolution

Supposons que la cavité est résonante pour une pulsation  $\omega_p$ , c'est-à-dire que

$$\exp \left[ i(n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega_p}{c} \right] = 1.$$

Supposons également que  $\omega_l - \omega_p \ll ISL$ , afin de considérer que la réponse de la cavité est donnée seulement par la résonance à  $\omega_p$  que l'on approximera alors par une lorentzienne. Enfin, supposons que la réponse de la cavité est à l'intérieur d'une résonance du milieu dispersif, de telle sorte que l'on peut développer l'indice de réfraction au premier ordre en  $(\omega - \omega_p)$  et ne considérer que l'ordre 0 de l'indice imaginaire :  $n_R(\omega) = n_R(\omega_p) + (\omega -$

$\omega_p) \left. \frac{dn_R}{d\omega} \right|_{\omega_p}$  et  $n_I(\omega) = n_I(\omega_p)$ . Tous les détails du calcul peuvent être trouvés en annexes I.3 et I.4.

La réponse spectrale de la cavité est alors donnée au premier ordre en  $(\omega - \omega_p)$  par :

$$\tilde{t}_{cav}(\omega) = C_0 \frac{e^{iL_0 \frac{\omega}{c}}}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega - \omega_p)}, \quad (4.5)$$

où on a défini ici  $\gamma_c = 2(1 - R')/R'\tau_{tour}^g$  et  $C_0 = T/R'\tau_{tour}^g$ , où  $\tau_{tour}^g = (L_{vac} + n_g L_{cell})/c$  est le délai de groupe pour parcourir un tour de la cavité et  $R' = R \exp[-n_I(\omega_p)L_{cell} \frac{\omega_p}{c}]$ .

La réponse temporelle de la cavité s'écrit alors :

$$t_{cav}(t) = C_0 \exp\left[-\frac{\gamma_c}{2} \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] \exp\left[-i\omega_p \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] H\left(t - \frac{L_0}{c}\right),$$

et le champ en sortie de cavité est enfin donné par :

$$\begin{aligned} \bar{E}_{out}(t) &= \frac{1}{2} \frac{T_0 E_i}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp\left[-i\omega_l \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] + cc, & \text{si } t \leq \frac{L_0}{c}, \\ \bar{E}_{out}(t) &= \frac{1}{2} \frac{T_0 E_i}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp\left[-i\omega_p \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] \exp\left[-\frac{\gamma_c}{2} \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] + cc, & \text{si } t \geq \frac{L_0}{c}. \end{aligned}$$

La réponse du système n'est donc pas la même selon la valeur de  $t$ . Pour  $t \leq L_0/c$ , la réponse de la cavité est donnée par sa réponse classique à un champ monochromatique de pulsation  $\omega_l$ . Pour  $t \geq L_0/c$ , le signal en sortie oscille à la pulsation de résonance de la cavité  $\omega_p$ , et décroît exponentiellement en intensité avec un temps caractéristique

$$\tau_{cav} = \frac{1}{\gamma_c} = \frac{R'\tau_{tour}^g}{2(1 - R')}, \quad (4.6)$$

où l'on rappelle que  $\tau_{tour}^g = \frac{L_{vac} + n_g L_{cell}}{c}$  est le délai de groupe pour parcourir un tour de la cavité. On peut également remarquer que cette réponse est bien causale puisque le point de non analyticité se propage à la vitesse  $c$ .

De même que précédemment, nous pouvons extraire une valeur de  $R' (= \sqrt{\mathcal{T}})$  à l'aide des mesures de finesse effectuées. Les résultats obtenus pour la durée de vie sont représentés par les triangles retournés verts de la figure 4.11. Ce modèle, qui semble pourtant plus propre, reproduit encore moins bien quantitativement les résultats mesurés que le précédent très simpliste. L'approximation faite dans ce modèle d'une absorption constante

est en effet bien trop forte si l'on regarde la réponse spectrale de notre milieu dispersif : le profil spectral de la cavité est en fait filtré par la résonance EIT et ce phénomène participe d'autant plus à l'augmentation de la durée de vie des photons dans la cavité. Ces valeurs présentent en réalité les résultats que l'on aurait obtenu si la dispersion était appliquée à toute la largeur spectrale de la cavité déterminée uniquement par la transmission à résonance de l'EIT. Ils peuvent néanmoins être comparés aux valeurs données par les losanges oranges, qui elles représentent les mêmes résultats sans dispersion.

### II.3 Conclusion

Dans cette section, nous avons montré expérimentalement que lorsqu'un milieu à forte dispersion positive est inséré dans une cavité optique, son taux de décroissance est gouverné par la vitesse de groupe et non de phase [Lauprêtre et al., 2011]. Un modèle simple dans les approximations usuelles permet aussi de lier directement la durée de vie des photons dans la cavité au délai de groupe pour parcourir un tour. Finalement, l'image naïve qui consiste à considérer une impulsion se propageant dans la cavité et sortant avec une amplitude décroissante semble être valable pour comprendre le phénomène.

Lorsqu'un milieu dispersif est introduit dans un senseur tel qu'un gyroscope laser, la réduction de l'indice de groupe nécessaire à l'augmentation du facteur d'échelle impliquerait donc une augmentation du bruit. Il serait intéressant de réaliser une expérience similaire où une cavité active contiendrait un milieu à lumière rapide. Des travaux sur le bruit de fréquence d'une cavité laser en présence d'un milieu hautement dispersif permettraient en effet de conclure définitivement sur l'intérêt d'un milieu dispersif pour les mesures de haute précision.

Compte-tenu des résultats obtenus, il semble intéressant de se demander maintenant comment se comporte une cavité lorsque le délai de groupe pour parcourir un tour de cavité est négatif, c'est-à-dire lorsque la cavité contient un milieu à dispersion négative assez importante pour rendre la vitesse de groupe au sein de la cavité négative. Des résultats théoriques et expérimentaux sont présentés dans la section suivante.

### III Vitesse de groupe négative et inadéquation du concept de durée de vie

#### III.1 Introduction

Nous avons montré dans la section précédente que lorsqu'une cavité optique contient un milieu à vitesse de groupe positive, c'est le délai de groupe pour parcourir un tour qui donne le taux de décroissance de celle-ci. La représentation d'une impulsion se propageant dans la cavité est alors pertinente. Etudions maintenant le comportement d'une cavité optique qui contient un milieu à forte dispersion négative, telle que le délai de groupe pour parcourir un tour soit négatif.

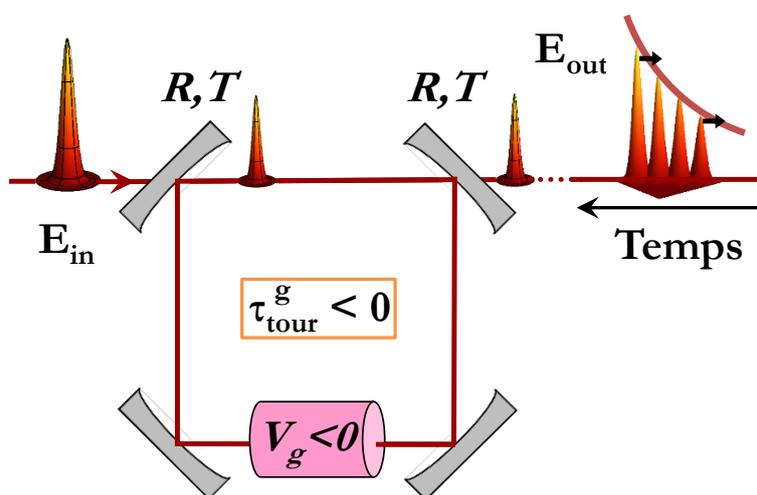


FIGURE 4.12 – Schéma d'une impulsion se propageant dans une cavité contenant un milieu à vitesse de groupe négative suffisante pour rendre le délai de groupe pour un tour négatif.

#### Image naïve

Appliquons tout d'abord le même raisonnement que dans le cas précédent et considérons une impulsion de propageant dans la cavité décrite par la figure 4.12. Le délai de groupe pour parcourir un tour  $\tau_{tour}^g$  est alors supposé négatif. Après un tour de cavité, l'impulsion se trouve en avance comparée à celle qui est entrée. De même après un second tour, l'impulsion est en avance comparée aux deux premières. Et ainsi de suite. Le signal en sortie de cavité se propagerait alors dans le passé, l'amplitude des impulsions

augmentant jusqu'à l'arrivée de l'impulsion initiale, tel qu'illustré sur la figure 4.12. Cette réponse ne serait pas causale.

### Modèle théorique simple

La représentation simple d'une impulsion se propageant dans la cavité est apparemment fautive pour le cas d'un délai de groupe pour un tour négatif. Appliquons alors le modèle théorique simple de la section précédente dans ce cas. Sous les mêmes approximations, la formule 4.5 est toujours valable, excepté cette fois que le paramètre  $\gamma_c$  est négatif :

$$\tilde{t}_{cav}(\omega) = C_0 \frac{e^{iL_0 \frac{\omega}{c}}}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega - \omega_p)},$$

avec  $\gamma_c = \frac{2(1-R')}{R' \tau_{tour}^g}$ .

Si un champ incident  $\bar{E}_i = \frac{E_i}{2} [1 - H(t)] e^{-i\omega t} + cc$  est incident sur la cavité, alors le champ en sortie est donné par (I.4) :

$$\begin{aligned} \bar{E}_{out}(t) &= \frac{E_i}{2} \frac{T_0}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp \left[ -i\omega_l \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \\ &\quad - \frac{E_i}{2} \frac{T_0}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp \left[ -\frac{\gamma_c}{2} \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] + cc, \quad \text{si } t < \frac{L_0}{c}, \\ &= 0, \quad \text{si } t \geq \frac{L_0}{c}. \end{aligned}$$

Selon ce modèle, la cavité répondrait avant que le point de non analyticité se propageant à  $c$  ne soit sorti de la cavité, et le champ serait ensuite nul. La causalité n'est pas respectée : ce modèle ne peut donc plus s'appliquer dans le cas d'un délai de groupe pour un tour négatif.

Nous allons voir que cela s'explique par une réponse non-lorentzienne de la cavité, ce qui implique que le développement au premier ordre de l'indice de réfraction n'est plus valable dans ce cas.

## III.2 Résolution théorique

Consid rions un milieu à dispersion négative : la courbe type de la variation de son indice autour d'une résonance à  $\omega_r$  est représentée sur la figure 4.13, et sa dispersion est négative à résonance. Consid rions une cavité résonnante pour une pulsation  $\omega_p$  égale à la

fréquence  $\omega_r$  de la résonance atomique. Supposons finalement que la résonance atomique est plus large que la résonance de la cavité vide mais plus étroite que l'ISL.

La condition de résonance de la cavité est :

$$[n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}]\frac{\omega_p}{c} = p2\pi,$$

où  $p$  est un entier.

Lorsque l'indice de réfraction  $n_R(\omega)$  du milieu augmente avec la pulsation  $\omega$ , il ne peut y avoir d'autre fréquence pour laquelle la cavité est résonante au même ordre  $p$ . Par contre, si l'indice  $n_R(\omega)$  est décroissant avec la pulsation  $\omega$ , il est possible d'avoir d'autres fréquences pour lesquelles la cavité est résonante pour la même valeur de  $p$ . Les pulsations correspondantes risquent alors d'être relativement proches de la pulsation de résonance  $\omega_p$  considérée. Intéressons-nous donc à ces fréquences.

### Démonstration graphique

Si elles existent, les pulsations  $\omega$  résonantes pour le même ordre  $p$  vérifient également la condition de résonance :

$$[n_R(\omega)L_{cell} + L_{vac}]\frac{\omega}{c} = p2\pi,$$

soit

$$[n_R(\omega)L_{cell} + L_{vac}]\frac{\omega - \omega_p + \omega_p}{c} = [n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}]\frac{\omega_p}{c}.$$

Ceci se réécrit au 1er ordre en  $(\omega - \omega_p)$  :

$$n_R(\omega) - n_R(\omega_p) = -\frac{n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}}{L_{cell}\omega_p}(\omega - \omega_p). \quad (4.7)$$

Les termes de part et d'autre de l'égalité 4.7 sont remarquables. Celui de gauche représente la courbe de dispersion du matériau translatée de  $n_R(\omega_p)$ , tandis que celui de droite représente une droite de coefficient directeur  $-[n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}]/L_{cell}\omega_p$  et coupant l'axe des abscisses en  $\omega_p$ . Les pulsations  $\omega$  pour lesquelles la cavité est aussi résonante au même ordre  $p$  sont donc données par les points d'intersection entre les deux courbes représentées sur la figure 4.13.

Au vu de ce graphique, trois cas de figure se distinguent alors en fonction de la valeur

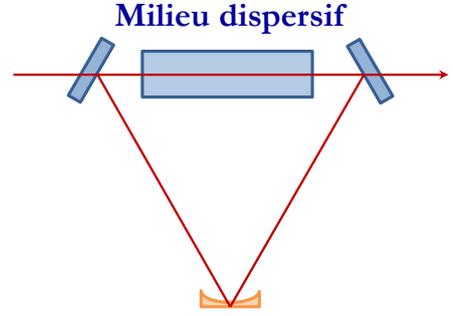
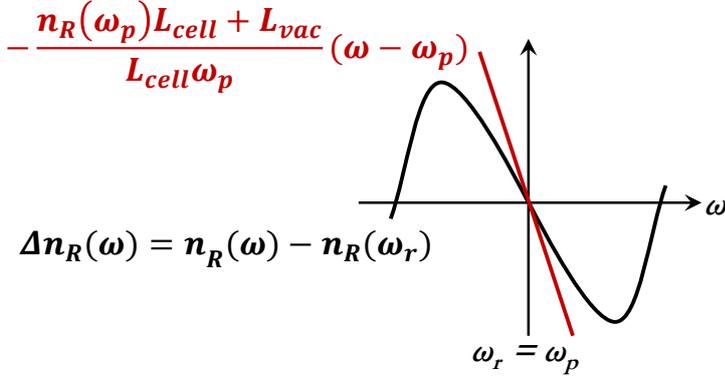


FIGURE 4.13 – Représentation des deux membres de l'égalité 4.7. Le nombre de points d'intersections va dépendre de la valeur du coefficient directeur  $-(n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac})/L_{cell}\omega_p$  de la droite rouge. Noir :  $n_R(\omega) - n_R(\omega_p)$ .

FIGURE 4.14 – Cavité annulaire considérée pour le modèle numérique de III.3 et III.4.

du coefficient  $-(n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac})/L_{cell}\omega_p$  comparé à la pente de la dispersion à l'origine  $\left.\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_p}$ . Or ce coefficient est directement lié à la pente de la dispersion par l'intermédiaire du délai de groupe pour un tour :

$$-\frac{n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}}{L_{cell}\omega_p} = -\frac{\tau_{tour}^g}{L_{cell}\omega_p} + \left.\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_p}. \quad (4.8)$$

Détaillons donc les trois possibilités.

- $-\frac{n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}}{L_{cell}\omega_p} < \left.\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_p}$

Cette inégalité signifie tout d'abord que le délai de groupe pour un tour est positif (Eq. 4.8). Ainsi, la dispersion négative introduite dans la cavité permet de réduire le temps mis pour traverser le milieu mais n'est pas suffisante à rendre le délai de groupe de parcours d'un tour de la cavité négatif.

Cette inégalité est représentée graphiquement sur la figure 4.15 a). On constate dans ce cas qu'il n'existe qu'un seul point d'intersection entre les deux courbes des membres de l'égalité 4.7 : il n'y a alors pas d'autre fréquence résonnante au même ordre  $p$  pour cette cavité. Le profil de la cavité peut donc être considéré comme lorentzien : le délai de groupe pour un tour est positif est les résultats de la section précédente peuvent s'appliquer.

$$\bullet - \frac{n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}}{L_{cell}\omega_p} = \left. \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_p}$$

Cette égalité est équivalente à un délai de groupe pour un tour nul (Eq. 4.8). Elle est représentée graphiquement sur la figure 4.15 b) : il existe une infinité de fréquences pour lesquelles la cavité est (presque) résonante. On retrouve ici les conditions de fonctionnement d'une « white-light cavity » [Pati et al., 2007], dont le principe repose sur l'introduction d'un milieu à dispersion négative en cavité.

Il serait par contre nécessaire de développer la condition de résonance à un ordre supérieur pour réellement modéliser le comportement d'une telle cavité [Pati et al., 2007].

$$\bullet - \frac{n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}}{L_{cell}\omega_p} > \left. \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_p}$$

Cette inégalité fait émerger le cas qui nous intéresse : elle est en effet équivalente à un délai de groupe pour un tour négatif (Eq. 4.8), et sa représentation graphique est donnée figure 4.15 c). Nous constatons qu'il existe trois points d'intersection entre les courbes des membres de l'égalité 4.7 : ceci signifie qu'il existe trois fréquences pour lesquelles la cavité est résonante au même ordre  $p$ . Une preuve mathématique de ce phénomène sans approximation peut être trouvée en annexe I.5.

Si la résonance du milieu considérée est de largeur inférieure à un ISL de la cavité, les résonances supplémentaires de la cavité ont lieu à des pulsations proches de la pulsation  $\omega_p$ . Celles-ci ont donc une influence sur la réponse de la cavité, qui ne peut plus être supposée lorentzienne dans le domaine spectral à considérer.

La conclusion de cette étude amène au théorème suivant : si un milieu introduit dans la cavité possède une dispersion négative assez importante pour rendre le délai de groupe de parcours d'un tour de la cavité négatif, des résonances supplémentaires apparaissent dans le profil spectral de la cavité qui rendent la décroissance de la cavité non exponentielle<sup>2</sup>.

Les sous-sections suivantes présenteront deux vérifications de ce théorème : l'une présentera les simulations obtenues lorsqu'un doublet de gain est introduit en cavité, l'autre présentera les résultats expérimentaux obtenus quand une cellule d'hélium en présence d'EIT désaccordé est introduite dans une cavité.

---

2. Ce théorème ne prend pas en compte l'absorption : nous verrons dans les exemples ci-après que celle-ci modifie également la réponse de la cavité.

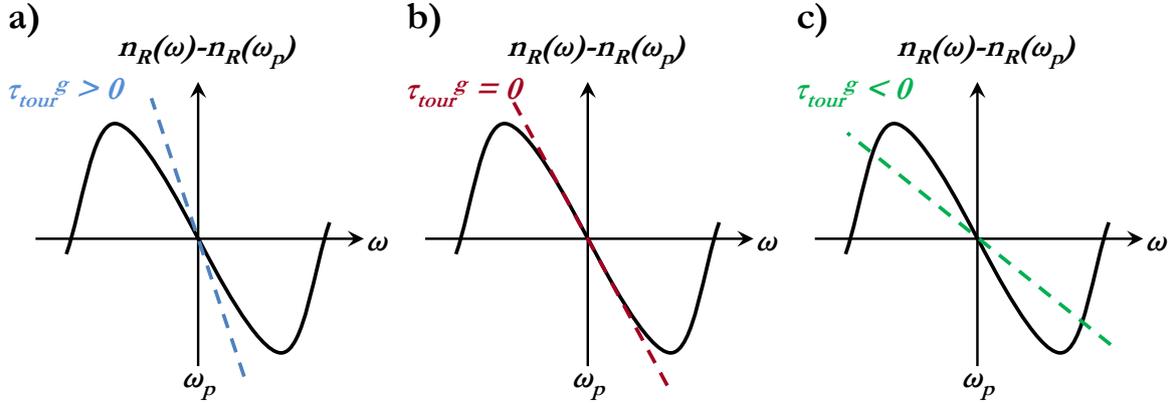


FIGURE 4.15 – Représentations graphiques de l'égalite 4.7. a) Pour  $\tau_{tour}^g > 0$ , il n'existe qu'un seul point d'intersection. b) Pour  $\tau_{tour}^g = 0$ , il existe une infinité de points d'intersection (« white-light wavity »). c) Pour  $\tau_{tour}^g < 0$ , trois points d'intersection et trois fréquences résonantes.

### III.3 Modèle du doublet de gain

Nous venons de montrer que lorsque le délai de groupe pour un tour d'une cavité optique est négatif, la réponse spectrale de la cavité n'est plus lorentzienne. Un moyen très populaire d'obtenir une forte dispersion négative est l'utilisation d'un doublet de gain [Steinberg and Chiao, 1994; Wang et al., 2000b] : on s'affranchit alors de l'absorption présente pour les résonances naturelles dans un milieu.

Pour le modèle, la cavité est considérée telle que sur la figure 4.14 pour correspondre à l'expérience : le milieu dispersif est situé entre les deux miroirs d'entrée et de sortie (la formule du profil de transmission en présence d'un milieu dispersif est alors légèrement différente de celle obtenue avec les modèles précédents, voir annexe I.6)). Pour des paramètres proches de nos conditions expérimentales, c'est-à-dire une longueur de cavité de 2,45 m et une longueur d'onde de résonance à 1,083  $\mu\text{m}$ , le tracé en pointillés bleus de la figure 4.16 représente l'évolution spectrale du module de la transmission en amplitude de la cavité vide. Notons que des pertes supplémentaires ont été ajoutées aux 2% de transmission des miroirs semi-réfléchissants pour que la cavité reste sous le seuil après l'ajout d'un doublet de gain. Les pertes totales sont ajustées à 29% par tour.

Considérons maintenant un milieu introduit dans la cavité dont le profil de transmission est donné par un doublet de gain. Les pics sont pris espacés de 1,5 MHz, de largeur à mi-hauteur 800 kHz et de gain par tour 28%. On suppose que la cavité est résonante au

milieu du doublet, de telle sorte que la dispersion négative introduite par celui-ci rende le délai de groupe pour un tour négatif :  $\tau_{tour}^g = -3,3$  ns. Dans ces conditions, l'évolution spectrale de la transmission de la cavité est représentée par la courbe verte de la figure 4.16. Le profil n'est plus lorentzien mais constitué de deux pics. Ils proviennent alors de l'effet conjugué des résonances supplémentaires dues à la dispersion et du gain supplémentaire du doublet. Le pic central n'est également plus visible à cause du doublet de gain.

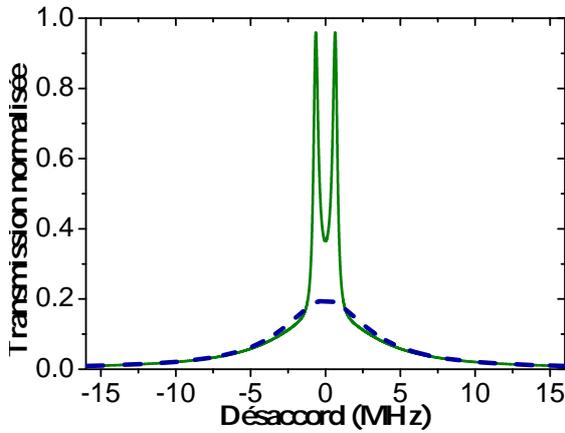


FIGURE 4.16 – Profils spectraux de transmission de la cavité vide (pointillés bleus) et contenant un doublet de gain (vert), tel que le  $\tau_{tour}^g = -3,3$  ns.

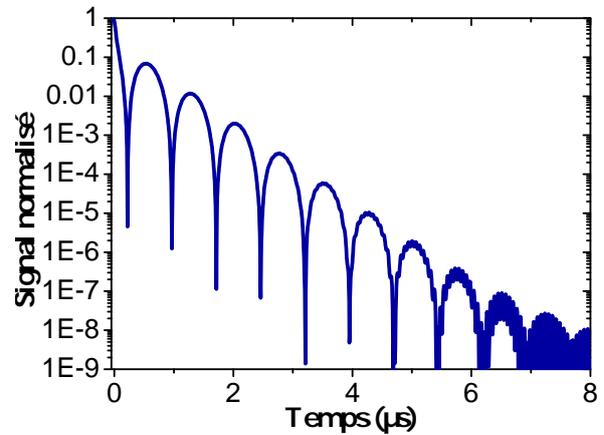


FIGURE 4.17 – Signal en sortie de cavité excitée par un champ coupé abruptement.

Nous avons ensuite calculé numériquement l'évolution temporelle du champ en sortie de la cavité soumis à un champ incident  $\bar{E}_i = \frac{E_i}{2}[1 - H(t)]e^{-i\omega_1 t}$ . La réponse est calculée à partir du produit de convolution (4.4) en considérant un seul ordre de la cavité dont le profil est modifié (Fig. 4.16). Le résultat est représenté sur la figure 4.17 en échelle logarithmique. La décroissance n'est plus exponentielle : elle consiste en une diminution rapide (de l'ordre de la centaine de nanosecondes) d'environ un ordre de grandeur de l'intensité, suivie par des oscillations dont le maximum diminue avec un temps caractéristique de l'ordre de la microseconde. La fréquence des oscillations est d'environ 1,3 MHz, ce qui correspond aux battements entre les deux pics de transmission présents dans le profil spectral de la cavité.

Cette simulation constitue une première vérification théorique du théorème énoncé précédemment : la décroissance de la cavité n'est plus exponentielle et il n'est plus possible

de définir un taux de décroissance pour la cavité. Etudions maintenant la validation expérimentale de ce théorème, ainsi que la validité de notre modèle numérique.

### III.4 Vérification expérimentale

Nous avons vu dans le chapitre 4 que notre système expérimental permet d'obtenir de forts délais de groupe négatifs de l'ordre de la microseconde. Celui-ci semble donc adapté à l'étude du comportement d'une cavité contenant un milieu à dispersion négative. Le montage expérimental est identique à celui réalisé pour la mesure de la durée de vie d'une cavité contenant un milieu à dispersion positive (Fig. 4.8). Le protocole est lui aussi identique : nous balayons lentement la longueur de la cavité jusqu'à ce qu'elle soit résonante pour le champ sonde, puis nous coupons abruptement ce dernier.

Pour obtenir une forte dispersion négative, nous nous plaçons dans une configuration d'EIT à fort désaccord optique. Le profil expérimental de la transmission de la cellule d'hélium dans ce cas est représenté sur la figure 4.18, pour un désaccord optique  $\Delta_c/2\pi = 1,4$  GHz environ et une puissance de couplage de 5 mW (correspondant à une pulsation de Rabi de couplage  $\Omega_c/2\pi \approx 10$  MHz). Au centre du creux d'absorption, la dispersion est assez forte pour obtenir un délai de groupe négatif  $\tau_g \approx -4 \mu\text{s}$ . L'ajustement de la transmission obtenue avec la formule analytique (G.15) de l'annexe G.5, découlant de la résolution des équations de Bloch optiques, est également tracé en rouge sur la figure 4.18. Les paramètres obtenus  $\Delta_c/2\pi = 1,3$  GHz,  $\Omega_c/2\pi = 11$  MHz, et  $(\Gamma_R + \gamma_t)/2\pi = 12$  kHz sont utilisés pour simuler la réponse de la cavité avec notre modèle numérique.

L'étude de la décroissance de la cavité est faite selon les mêmes conditions expérimentales. Le signal obtenu est tracé en bleu sur la figure 4.19. En première observation, nous constatons que le signal n'est pas une exponentielle décroissante, ce qui illustre le théorème énoncé précédemment. Trois zones peuvent être considérées pour analyser les différentes évolutions du signal. La zone I représente l'intensité en sortie de la cavité lorsque le champ sonde n'est pas encore coupé. Nous remarquons que le signal expérimental est fortement bruité à cause des fluctuations de la fréquence du laser et de la longueur de la cavité. Mais ceci n'a aucune influence dès que le signal est coupé et que la cavité se vide. Dès que le champ sonde est éteint (zone II, 4.21) et de façon assez surprenante, l'intensité augmente sur une échelle de temps d'environ  $1 \mu\text{s}$ . Après cette première évolution, le signal décroît ensuite exponentiellement (Fig. 4.20 en échelle logarithmique) sur une échelle de temps

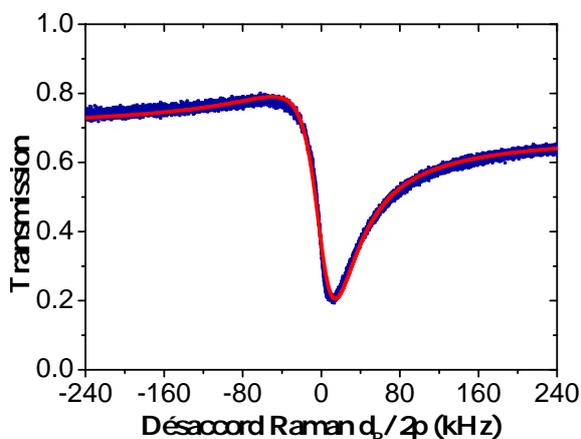


FIGURE 4.18 – Profil de transmission expérimental de la cellule d'hélium en présence d'EIT désaccordé, pour  $\Delta_c/2\pi \approx 1,4$  GHz et une puissance de couplage d'environ 5 mW. Rouge : ajustement par la formule analytique solution des équations de Bloch optiques.

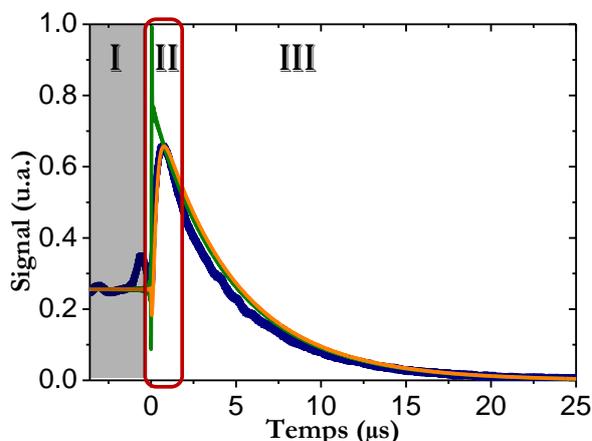


FIGURE 4.19 – Bleu : signal expérimental obtenu en sortie de cavité pour les conditions expérimentales de la figure 4.18. Vert : signal théorique. Orange : signal théorique en introduisant un temps de coupure de l'AOM d'environ 200 ns.

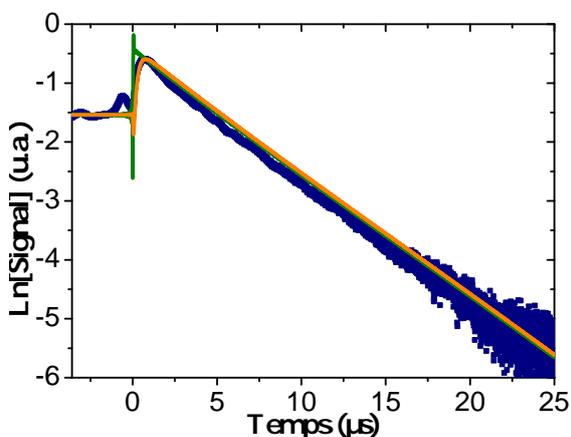


FIGURE 4.20 – Mêmes courbes que la figure 4.19 en échelle logarithmique.

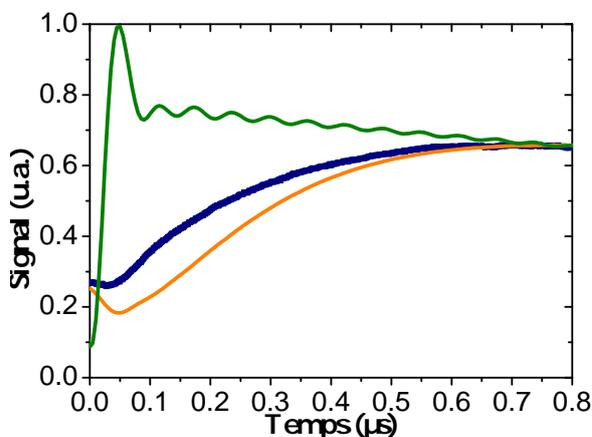


FIGURE 4.21 – Zoom sur la zone II de la figure 4.19.

plus longue de l'ordre de  $20 \mu s$  environ.

Le modèle utilisé précédemment est appliqué à notre cas expérimental, et la courbe verte de la figure 4.19 représente le résultat obtenu par simulation numérique. Le modèle prédit bien une augmentation de l'intensité après extinction du champ sonde, mais n'est

pas en accord quantitatif avec l'expérience : la montée est plus rapide et plus importante. Par ailleurs, le zoom sur la zone I montre des oscillations (Fig. 4.21). Les différences obtenues peuvent s'expliquer notamment par le temps de réponse des appareils. La photodiode utilisée a un temps de réponse de l'ordre de 200 ns et ne nous permet pas de détecter les variations rapides du signal. De même, le modulateur acousto-optique utilisé pour éteindre la sonde possède un temps de réponse non nul de l'ordre de la centaine de nanosecondes. Dans notre modèle, nous avons par ailleurs ajusté les pertes supplémentaires dues aux optiques de polarisation à 1%. Elles peuvent être légèrement différentes dans le montage expérimental. Pour vérifier l'influence du temps de coupure du modulateur acousto-optique, nous avons remplacé la fonction de Heavyside dans notre modèle théorique par une exponentielle décroissante ayant un temps caractéristique de 200 ns. La courbe obtenue est représentée en orange sur la figure 4.19 : elle est en excellent accord avec la courbe expérimentale.

Si le signal obtenu en sortie de cavité est surprenant au premier abord, il est en fait possible de comprendre qualitativement son évolution. Pour cela, observons le profil de transmission de la cavité. Nous n'avons pas le matériel pour faire cette observation expérimentalement, mais le profil obtenu théoriquement est présenté figure 4.22. Nous pouvons tout d'abord y observer deux résonances dues à l'effet de la dispersion. L'une d'elle, très fine, est donnée par l'EIT et correspond alors à une décroissance exponentielle sur une longue échelle de temps. L'autre est très large et est décalée de plusieurs MHz.

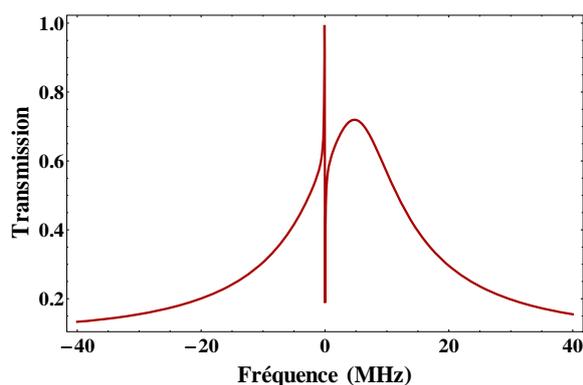


FIGURE 4.22 – Profil spectral de transmission de la cavité théorique lorsque le milieu introduit a un profil de transmission correspondant à la figure 4.18.

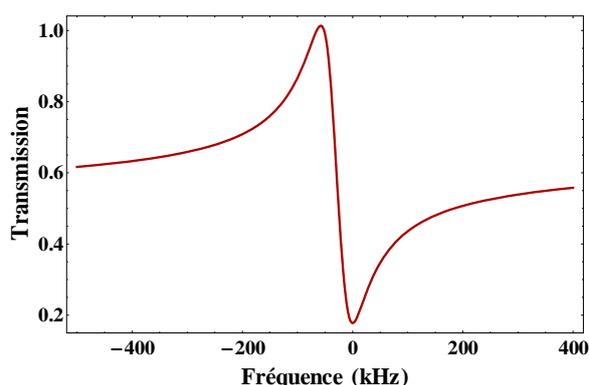


FIGURE 4.23 – Zoom autour de la fréquence de résonance de la courbe de la figure 4.22.

La largeur de la résonance fine est d'environ 40 kHz comme nous pouvons l'observer sur le zoom effectué dans la figure 4.23. Ceci correspond au temps caractéristique d'environ  $4 \mu\text{s}$  observé sur le signal de sortie, dans la zone III de la figure 4.19 et sur la figure 4.20. Pour réaliser l'expérience, la cavité est excitée à une fréquence pour laquelle la dispersion négative est maximale, et donc l'absorption maximale. Même si la cavité est résonante à cette fréquence, sa transmission est très faible à cause de l'absorption. Lorsque le champ sonde est coupé abruptement, les fréquences proches pour lesquelles la transmission de la cavité est plus importante sont également excitées, en particulier les autres fréquences respectant la condition de résonance de la cavité. Lorsque la cavité se vide, elle le fait donc à des fréquences pour lesquelles elle est résonante avec une transmission plus grande. L'intensité en sortie commence par augmenter, en atteignant un niveau plus haut que celui de la cavité excitée par le champ monochromatique : c'est l'évolution du signal observée dans la zone II des figures 4.19 et 4.21. Enfin, de petites oscillations sont visibles sur la courbe théorique verte de la figure 4.21. Elles ont une période de quelques dizaines de nanosecondes, et elles correspondent aux battements entre la résonance fine et la résonance large du profil qui sont espacées d'environ 5 MHz. Elles ne sont pas visibles sur le signal expérimental à cause du temps de réponse de la photodiode et du modulateur acousto-optique : ceci est reproduit sur la courbe orange des figures 4.19 et 4.21.

### III.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons montré que lorsqu'un milieu à indice de groupe négatif est introduit dans une cavité optique, plusieurs cas de figure peuvent se présenter. Si le délai de groupe pour un tour reste positif, il est possible de définir le taux de décroissance de la cavité comme nous l'avons fait dans le cas d'un milieu à dispersion positive. C'est alors l'indice de groupe qui gouverne le comportement de la cavité. Si le délai de groupe pour un tour est négatif, d'autres fréquences sont susceptibles de résonner pour le même ordre et le profil de transmission n'est plus lorentzien. La décroissance de la cavité n'est alors plus exponentielle, et il n'est plus possible de définir une durée de vie des photons.

En particulier dans ce dernier cas, nous avons pu constater à l'aide d'une simulation numérique et d'un exemple expérimental que le comportement de la cavité dépend fortement du type de milieu dispersif introduit. Il n'est pas possible de déterminer une règle générale de comportement, et chaque cas doit être étudié indépendamment. La seule af-

firmation possible est que la forme de la décroissance est déterminée par le profil spectral de la cavité.

Ces résultats sont résumés dans [Lauprêtre et al., 2012b].

## IV Généralisation

Lors de nos expériences concernant un milieu à vitesse de groupe positive introduit en cavité, nous avons parfois pu constater que la décroissance de la cavité n'était pas parfaitement exponentielle. Ceci se produit pour de très faibles puissances de couplage (Fig. 4.24), et suggère que le profil spectral de la cavité dans ce cas peut ne plus être considéré comme lorentzien. Pourtant, le théorème de la section III.2 nous assure qu'il n'existe qu'une seule fréquence résonante pour un même ordre  $p$  (Fig. 4.15). Aussi lors de l'étude d'une cavité en présence de dispersion négative, nous avons pu constater que le profil d'absorption du milieu joue un rôle important dans la détermination du profil spectral de la cavité.

Observons alors le profil de transmission obtenu à l'aide de notre simulation pour des paramètres correspondant à nos données expérimentales. Un tel profil est par exemple

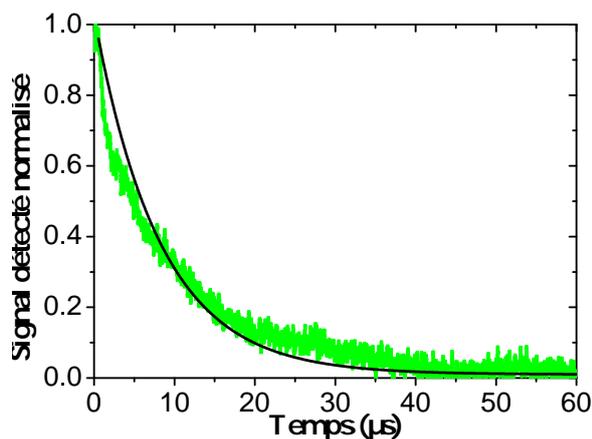


FIGURE 4.24 – Décroissance expérimentale (vert) en sortie de cavité en présence du phénomène d'EIT pour une puissance de couplage de 3,5 mW, et ajustement exponentiel (noir).

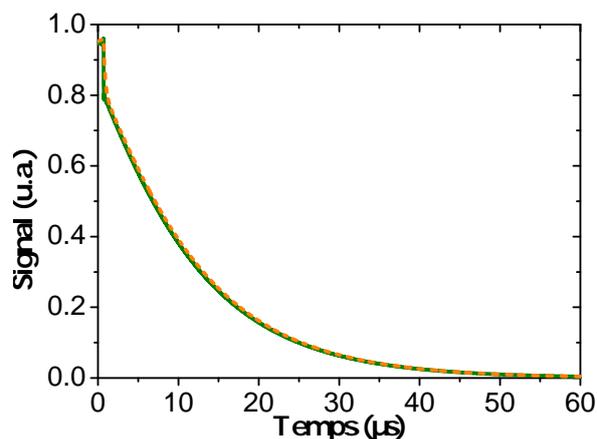


FIGURE 4.25 – Vert : décroissance en sortie de cavité théorique en présence du phénomène d'EIT pour une puissance de couplage de 3,5 mW. Orange pointillée : courbe théorique avec temps de coupure de l'AOM.

tracé sur la figure 4.26 pour une puissance de couplage de 3,5 mW. Comme nous l'avions supposé, le profil n'est plus lorentzien. Il consiste en un piédestal de très grande largeur surmonté d'une résonance très fine. La forme du signal en sortie de cavité, tracé sur la figure 4.25, correspond à celle attendue pour ce type de profil. Il est en effet constitué d'une décroissance rapide, dont le temps caractéristique est dû à la résonance de grande largeur, suivi d'une décroissance quasi-exponentielle provenant de la résonance fine. Le résultat obtenu est d'ailleurs en bon accord avec l'observation expérimentale.

Pour comprendre la forme du profil spectral de la cavité, étudions tout d'abord les caractéristiques de notre cavité expérimentale. Sa longueur est d'environ 2,45 m, et ceci correspond à un intervalle spectrale libre (supposé sans dispersion) :

$$\frac{ISL}{2\pi} = \frac{c}{L} \approx 122 \text{ MHz.}$$

Les mesures effectuées sur le profil de transmission de la figure 4.9 nous permettent d'évaluer la finesse de notre cavité vide à 30 environ, ce qui correspond à des largeurs de résonances à mi-hauteur :  $\Delta\omega_{1/2}/2\pi \approx 4$  MHz. Nous remarquons que cette valeur est bien supérieure à la largeur du profil de transmission de la cellule d'hélium en présence d'EIT, qui elle est de l'ordre de la dizaine de kHz. La différence est bien plus grande lorsque la cellule d'hélium est allumée : la forte absorption de la cellule réduit la finesse et augmente la largeur des résonances. Pour notre cellule de 6 cm de transmission sans couplage de 3%, nous obtenons des largeurs spectrales de l'ordre de 30 MHz. Mais l'amplitude des résonances est alors très faible.

Lorsque le champ de couplage est ensuite allumé, nous produisons dans notre milieu une fenêtre de transparence de quelques dizaines de kHz de largeur spectrale. Alors que la transmission augmente lorsque la fréquence de sonde se rapproche de la résonance Raman, la finesse ainsi que l'amplitude de la résonance de la cavité augmentent. Ces deux paramètres ne sont donc pas constants avec la fréquence de la sonde, et le profil spectral de la cavité s'affine au fur et à mesure que l'on s'approche de la fréquence de résonance. A cela s'ajoutent en plus les effets dispersifs, comme nous avons déjà pu le constater dans les sections précédentes.

Si la transmission de la sonde à résonance est assez grande maintenant, la résonance de la cavité sortira complètement du « pied » constitué par la résonance sans EIT et le profil peut finalement être considéré comme lorentzien. Pour les très faibles puissances de

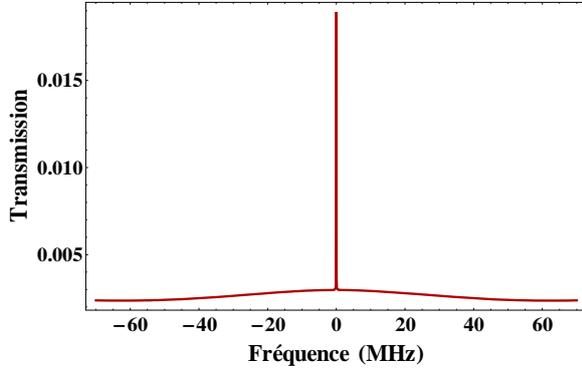


FIGURE 4.26 – Profil spectral théorique de la cavité en présence d'EIT à résonance optique pour une puissance de couplage de 3,5 mW.

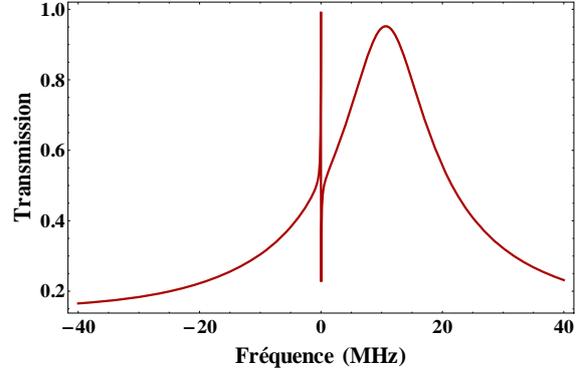


FIGURE 4.27 – Profil spectral théorique lorsque le milieu introduit a un profil de transmission correspondant à l'EIT désaccordé optiquement de la figure 4.18. La fréquence de résonance est ajustée à -23 kHz du maximum d'absorption pour avoir un délai de groupe pour un tour positif à résonance.

couplage par contre, la résonance due à la fenêtre EIT ne ressort pas assez de ce fond et celui-ci doit être pris en considération dans le comportement de la cavité. Bien sûr, le modèle développé dans la partie II.2 ne prend pas en compte ce phénomène, puisqu'il considère l'absorption par le matériau constante sur la plage spectrale d'une résonance de la cavité dans le vide, et donc un profil qui reste lorentzien.

Ce résultat peut également s'appliquer lorsque le désaccord optique est non nul. Lorsque le désaccord optique est assez grand pour obtenir un profil de Fano, le délai de groupe peut être positif ou négatif selon la valeur du désaccord Raman (Fig. 3.13). Dans la section précédente, nous avons choisi de remplir la cavité à une fréquence pour laquelle le délai de groupe était négatif (dans le creux d'absorption). Mais nous pourrions aussi choisir de remplir la cavité à une fréquence pour laquelle le délai de groupe est positif. La figure 4.27 illustre le profil spectral de la cavité lorsque nous avons choisi sa fréquence de résonance décalée de -23 kHz du maximum d'absorption du profil de transmission du milieu. Le délai de groupe est alors d'environ  $1 \mu\text{s}$ . Le délai de groupe pour un tour est positif, et le profil spectral de la cavité n'est pourtant pas lorentzien : il est très similaire à celui obtenu dans les conditions de la figure 4.22. Alors que le délai de groupe pour un tour est largement positif dans cette configuration, la décroissance de la cavité n'est

tout de même plus exponentielle (Fig. 4.28(b) et Fig. 4.28(a)). Le profil d'absorption du milieu joue finalement un rôle très important dans la détermination du comportement de la cavité optique.

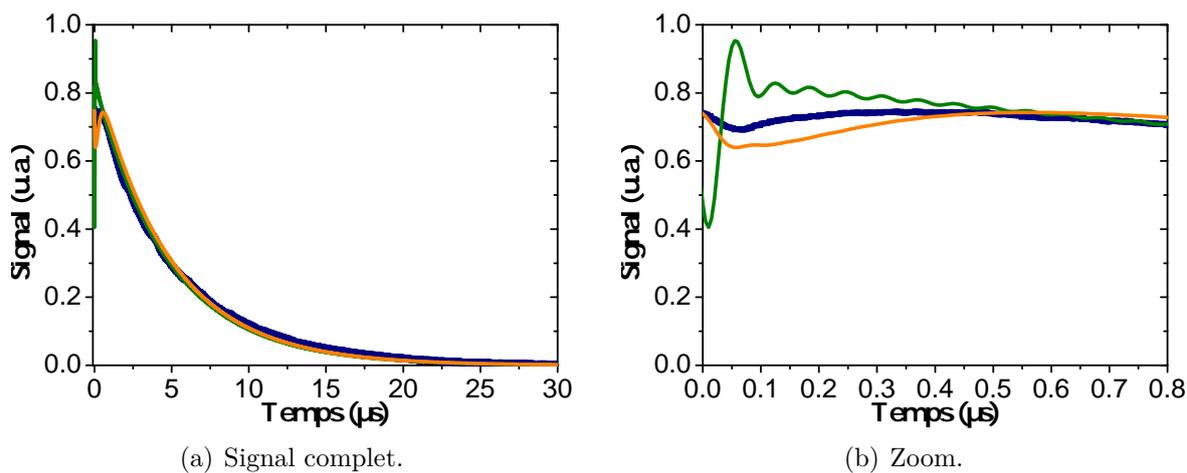


FIGURE 4.28 – Bleu : signal expérimental obtenu en sortie de cavité pour le profil expérimentale de la figure 4.18 désaccordé pour obtenir un délai de groupe pour un tour positif. Vert : signal théorique. Orange : signal théorique avec temps de coupure de l'AOM.

## V Conclusions

Les tableaux suivants synthétisent les résultats démontrés dans ce chapitre.

Concernant le profil spectral d'une cavité en présence d'un milieu dispersif :

- La finesse d'une cavité définie dans l'espace des phases ne dépend que des pertes (incluant l'absorption du milieu dispersif).
  - Lorsqu'un milieu dispersif est introduit dans une cavité, une variation de phase est équivalente à une variation de longueur mais pas à une variation de fréquence.
  - Un milieu dispersif modifie le profil spectral d'une cavité :
    - Dans le cas d'un indice de groupe positif, la largeur spectrale des résonances est réduite s'il est supérieur à 1 et augmentée s'il est inférieur à 1.
    - Dans le cas d'un indice de groupe négatif, le profil spectral de la cavité n'est jamais lorentzien.
- 

Concernant la décroissance d'une cavité en présence d'un milieu dispersif :

- La décroissance d'une cavité est entièrement déterminée par son profil spectral incluant la transmission et la dispersion du milieu qu'elle contient.
  - Si le profil spectral peut encore être considéré lorentzien, la décroissance est exponentielle et il est possible de définir une durée de vie liée à la vitesse de groupe dans la cavité.
  - Il n'est plus possible de définir de durée de vie des photons dans le cas où le profil n'est plus lorentzien.
-



# Conclusion générale

Pendant ces trois années de thèse, les travaux expérimentaux réalisés dans un système d'atomes d'hélium métastables à température ambiante ont abouti à plusieurs résultats.

L'étude d'un système en  $\Lambda$  constitué de sous-niveaux Zeeman non dégénérés excité par des polarisations linéaires orthogonales a pu mettre en évidence deux phénomènes fondamentalement différents dans la réponse du système : les oscillations cohérentes de population (CPO) et la transparence électromagnétiquement induite (EIT).

Le CPO est un phénomène qui n'implique pas la dynamique des cohérences entre niveaux et s'explique simplement par les variations des populations du système. Il apparaît lorsque deux lasers pompe et sonde légèrement désaccordés sont appliqués sur une même transition optique. Le phénomène de CPO réduit alors l'absorption de la sonde sur cette transition à la condition que les oscillations de population puissent suivre la modulation entre les deux champs. Habituellement observé dans les systèmes à deux niveaux, sa largeur spectrale est limitée par le taux de désexcitation du niveau supérieur. Mais il est susceptible de faire apparaître des résonances de bien plus faible largeur lorsque le système considéré est ouvert.

L'EIT, au contraire, est dû à l'existence d'une cohérence Raman entre les deux sous-niveaux fondamentaux. Elle implique une condition de résonance Raman entre deux champs de couplage et de sonde appliqués sur deux transitions optiques (résonance à deux photons). L'EIT réduit également l'absorption de la sonde, sur une largeur spectrale limitée par le taux de désexcitation de la cohérence Raman.

Lorsque le système en  $\Lambda$  étudié est dégénéré et excité par des polarisations linéaires perpendiculaires, son profil de transmission semble être donné par une résonance EIT. Mais l'application d'un champ magnétique levant la dégénérescence des sous-niveaux Zeeman a pu mettre en évidence l'existence de trois résonances. Deux sont translatées en fréquence dans le profil de transmission et correspondent à la condition de résonance Ra-

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

man entre les deux lasers et donc à l'EIT. La troisième apparaît lorsque les lasers sont à résonance et correspond à une fenêtre de CPO. L'application d'inhomogénéités de champ magnétique a en effet pu confirmer que les résonances translatées sont dues à la cohérence Zeeman entre les sous-niveaux fondamentaux, tandis que la résonance centrale n'était pas affectée.

Dans notre système, la largeur de ces deux phénomènes est principalement limitée par l'inverse du temps de transit dans les faisceaux laser, qui est de l'ordre de quelques dizaines de microsecondes.

Les phénomènes résonnants ayant lieu dans notre système ont des largeurs de l'ordre de la dizaine de kHz, et présentent de très fortes propriétés dispersives associées. Au voisinage d'une résonance EIT, il est possible d'observer une très forte réduction de la vitesse de groupe jusqu'à  $3000 \text{ m.s}^{-1}$ . Cette réduction est de plus accordable avec la puissance du champ de couplage et pourrait être appliquée à la réalisation de lignes à retard ou de « buffers » optiques dans le cadre du contrôle tout optique de l'information. Lorsque le champ de couplage est désaccordé optiquement, le profil de transmission devient asymétrique pour donner un profil de Fano. Les pics d'absorption associés ont des largeurs de quelques kHz et permettent d'observer le phénomène de lumière rapide et même des vitesses de groupe négatives. Les propriétés dispersives de l'hélium nous ont notamment donné la possibilité d'étudier le comportement d'une cavité en présence de lumière lente ou négative.

Lors de cette étude, nous avons montré que lorsque le profil spectral de la cavité contenant le milieu dispersif peut être approximé par une lorentzienne, c'est le délai de groupe pour parcourir un tour de la cavité qui gouverne le taux de décroissance de la cavité. Nous avons également montré théoriquement et observé expérimentalement que lorsqu'un milieu à dispersion négative est inséré dans la cavité, des pics résonnants secondaires apparaissent dans le profil de transmission rendant impossible l'approximation par une lorentzienne. La décroissance de la cavité n'est alors plus exponentielle et le taux de décroissance ne peut plus être défini dans ce cas. Nous avons également observé que le taux de décroissance peut ne pas être défini dans des cas où le milieu introduit possède une dispersion positive et où le délai de groupe pour parcourir un tour de la cavité est tout de même positif.

Ce comportement semble d'une grande importance pour les applications éventuelles

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

à des capteurs optiques basés sur de telles cavités. Pour ce type de senseurs, tels que les gyroscopes lasers, le bruit fondamental est en effet déterminé par la largeur Schawlow-Townes du laser et serait également influencé par le milieu dispersif.

De nouvelles orientations sont maintenant envisageables. Par exemple, l'utilisation de la transition optique entre les niveaux  $2^3S_1$  et  $2^3P_0$  de l'état métastable permet d'extraire un système en tripod : les trois sous-niveaux Zeeman du niveau métastable  $2^3S_1$  sont alors couplés à un unique niveau qui est séparé de presque 30 GHz du niveau le plus proche. Deux états noirs co-existent dans un système comme celui-ci, le rendant très intéressant pour des applications au stockage d'information quantique ou des applications à la magnéto-métrie. Il devient également possible d'étudier l'interaction entre états noirs. Une étude préalable a déjà été effectuée pendant ma thèse en collaboration avec la School of Physical Sciences de Jawaharlal Nehru University à Delhi. Nous avons pu mettre en évidence expérimentalement et théoriquement l'addition incohérente ou l'interférence destructive de deux fenêtres EIT en fonction des polarisations incidentes [Kumar et al., 2011]. De même que nous l'avons montré pour les systèmes en  $\Lambda$ , le mélange des champs de couplage et de sonde sur des transitions optiques communes fait apparaître le phénomène de CPO en plus des fenêtres de transparence EIT déjà observées.

Dans ce manuscrit, l'étude du système en  $\Lambda$  dans  $\text{He}^*$  est aussi limitée à une excitation par des polarisations des champs de couplage et de sonde orthogonales. Les profils de transmission du champ sonde peuvent être dramatiquement modifiés lorsque les polarisations envoyées sont quelconques. Les simulations nous suggèrent qu'il serait par exemple possible de transformer une fenêtre de transparence en un creux d'absorption moyennant les bons paramètres d'excitation du système. Nous avons par exemple déjà pu constater dans un système en tripod l'apparition d'un creux d'absorption très fin dans le profil de transmission de la sonde alors que tous les champs sont à accord optique. Je laisse à Santosh Kumar le soin d'atteindre une bonne compréhension physique de ces phénomènes.

Concernant les résultats obtenus en cavité, il serait intéressant d'étudier en détails le bruit d'un laser contenant un milieu dispersif. Comme le bruit provient alors de photons émis spontanément, certains pensent en effet qu'ils ne subissent pas les propriétés dispersives associées au phénomènes cohérents tels l'EIT. Mais s'ils participent au bruit d'un mode laser, cela ne signifie-t-il pas qu'ils ont une relation de phase avec les photons du

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

mode, et qu'ils peuvent eux-aussi interagir avec le milieu dispersif? Une mesure précise du bruit dans ce cas permettrait de conclure véritablement quant à l'intérêt des milieux dispersifs pour ce type de senseurs.

L'EIT a également été utilisé dans des opérations de stockage. De même, l'utilisation de résonances de CPO ultra-fines a été proposée pour la réalisation de mémoires optiques. Il serait intéressant d'étudier d'éventuelles différences de fonctionnement et d'efficacité quant à la nature de ces deux procédés, puisque nous sommes capables de produire et d'isoler des résonances de l'un ou l'autre phénomène. Il est également admis que l'efficacité de stockage par EIT dans les vapeurs est faible à cause des processus de déphasage par collisions. Qu'en est-il dans l'hélium métastable, pour lequel les collisions ne participent pas au déphasage?

# Annexes



## Annexe A

# Conventions pour la transformée de Fourier

Pour tous les calculs effectués dans ce manuscrit, les conventions choisies pour les calculs de transformée de Fourier sont les suivantes :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.$$

Le produit de convolution est aussi :

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \\ &= \text{TF}^{-1}[\tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{g}(\omega)](t).\end{aligned}$$

Remarque : si la fonction  $f$  est à valeur réelle,  $\tilde{f}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = f(-\omega)$ .



## Annexe B

# Propagation d'un champ dans un milieu diélectrique linéaire

Cette annexe rappelle les formules de la propagation d'un champ dans un milieu diélectrique linéaire et la définition de la transmission du milieu en fonction de la susceptibilité linéaire.

### B.1 Equation de propagation

Lorsqu'un champ  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  se propage dans un milieu diélectrique, il est soumis aux équations de Maxwell et vérifie l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (\text{B.1})$$

où  $\vec{P}$  est le vecteur polarisation du milieu, défini comme le moment dipolaire par unité de volume, et  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

D'après l'analyse de Fourier, nous pouvons décomposer  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  sur la base des fonctions oscillantes :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ \vec{P}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vec{P}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Comme  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  sont des grandeurs réelles, on a en particulier  $\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = \tilde{\vec{E}}^*(\vec{r}, -\omega)$  et  $\tilde{\vec{P}}(\vec{r}, \omega) = \tilde{\vec{P}}^*(\vec{r}, -\omega)$ .

De manière générale dans un milieu linéaire, les composantes du vecteur polarisation du milieu sont liées aux composantes du champ par le tenseur de la susceptibilité linéaire  $[\chi(\vec{r}, \omega)]$  :

$$\tilde{\vec{P}}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 [\chi(\vec{r}, \omega)] \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega),$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_x(\vec{r}, \omega) \\ \tilde{P}_y(\vec{r}, \omega) \\ \tilde{P}_z(\vec{r}, \omega) \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{xy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{xz}(\vec{r}, \omega) \\ \chi_{yx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{yy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{yz}(\vec{r}, \omega) \\ \chi_{zx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{zy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{zz}(\vec{r}, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(\vec{r}, \omega) \\ \tilde{E}_y(\vec{r}, \omega) \\ \tilde{E}_z(\vec{r}, \omega) \end{pmatrix}.$$

Si l'on suppose à partir de maintenant que le milieu est homogène (les coefficients de la matrice de la susceptibilité ne dépendent pas du point de l'espace) et isotrope (il n'y a pas de direction privilégiée et la matrice devient scalaire), on peut exprimer :

$$\boxed{\tilde{\vec{P}}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega).}$$

De même que pour le champ et la polarisation du milieu, nous avons pour la susceptibilité :  $\chi(\omega) = \chi^*(-\omega)$ .

Il suffit alors de chercher les solutions de (B.1) pour chaque composante à  $\omega$  du champ  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , et l'équation devient :

$$\boxed{\Delta \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = 0.} \quad (\text{B.2})$$

On a introduit ici l'indice complexe  $n$  du milieu tel que  $\boxed{n(\omega)^2 = 1 + \chi(\omega)}$  (que l'on peut aussi exprimer en introduisant la permittivité du milieu  $n^2(\omega) = 1 + \chi(\omega) = \varepsilon_r(\omega)$ ).  $n$  est choisi tel que  $\text{Re}[n] > 0$  pour la plupart des pulsations ( $n = 1$  si  $\chi(\omega) = 0$ ), et si on pose  $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$ , nous avons les relations suivantes puisque  $n(\omega) = n^*(-\omega)$  :  $n_R(\omega) = n_R(-\omega)$  et  $n_I(\omega) = -n_I(-\omega)$ .

## B.2 Ondes planes

Nous considérons maintenant que le champ est invariant dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , tel que  $\vec{\tilde{E}}(\vec{r}, \omega) = \vec{\tilde{E}}(z, \omega)$ <sup>1</sup>. Nous déduisons alors de (B.2) :

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{r}, \omega) = \vec{\tilde{E}}_1(\omega)e^{+ik(\omega)z} + \vec{\tilde{E}}_2(\omega)e^{-ik(\omega)z},$$

où on a défini le nombre d'onde  $k(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c}$ . Le champ total peut finalement s'exprimer :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{E}}_1(\omega)e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{E}}_2(\omega)e^{-i(\omega t + k(\omega)z)} d\omega,$$

et on montre également à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss que le champ n'a pas de composante selon  $\vec{e}_z$  :  $\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_z = 0$ .

Réécrivons le premier terme de cette dernière formule sous forme de cosinus et sinus :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{E}}_1(\omega)e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{E}}_1(\omega)e^{-\text{Im}[k(\omega)]z} [\cos(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z) \\ &\quad - i \sin(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z)] d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \vec{\tilde{E}}_1(\omega)e^{-\text{Im}[k(\omega)]z} [\cos(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z) - i \sin(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z)] d\omega \\ &\quad + \int_0^{\infty} \vec{\tilde{E}}_1(-\omega)e^{-\text{Im}[k(-\omega)]z} [\cos(-\omega t - \text{Re}[k(-\omega)]z) - i \sin(-\omega t - \text{Re}[k(-\omega)]z)] d\omega. \end{aligned}$$

Puisque  $\text{Re}[k(\omega)] = -\text{Re}[k(-\omega)]$  et  $\text{Im}[k(\omega)] = \text{Im}[k(-\omega)]$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{E}}_1(\omega)e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega &= \int_0^{\infty} [\vec{\tilde{E}}_1(\omega) + \vec{\tilde{E}}_1(-\omega)]e^{-\text{Im}[k(\omega)]z} \cos(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z) d\omega \\ &\quad - \int_0^{\infty} i[\vec{\tilde{E}}_1(\omega) - \vec{\tilde{E}}_1(-\omega)]e^{-\text{Im}[k(\omega)]z} \sin(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z) d\omega. \end{aligned}$$

On comprend bien sous cette forme que ce premier terme est en fait une somme d'ondes planes monochromatiques se propageant dans le sens des  $z$  croissants. De même, on montre que le second est une somme d'ondes planes monochromatiques se propageant dans le sens des  $z$  décroissants<sup>2</sup>.

1. Ceci parce que nous n'allons considérer que des ondes planes. Pour des solutions plus générales, on peut décomposer le champ par transformée de Fourier spatiale.

2. Ce n'est complètement vrai que si  $\text{Re}[k(\omega)]$  ne change pas de signe. Si c'est le cas, on peut considérer

Nous nous restreignons finalement à l'étude d'un champ  $\vec{E}(z, t)$  se propageant (principalement) dans le sens des  $z$  croissants, et nous obtenons la formule de propagation du champ :

$$\boxed{\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega.} \quad (\text{B.3})$$

ou encore sous forme réelle :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}[\tilde{\vec{E}}(\omega)] e^{-\text{Im}[k(\omega)]z} \cos(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z) d\omega \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im}[\tilde{\vec{E}}(\omega)] e^{-\text{Im}[k(\omega)]z} \sin(\omega t - \text{Re}[k(\omega)]z) d\omega. \end{aligned}$$

### B.3 Réponse du milieu

La fonction de transfert  $\tilde{S}(z, \omega)$  du milieu après une propagation sur une distance  $z$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(z, \omega) &= e^{ik(\omega)z} = e^{in(\omega)\frac{\omega}{c}z} \\ &= e^{-n_I(\omega)\frac{\omega}{c}z} e^{in_R(\omega)\frac{\omega}{c}z}, \end{aligned}$$

où on introduit les parties réelles et imaginaires de l'indice :  $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$ .

Usuellement, la valeur de la susceptibilité est petite devant 1 :  $|\chi| \ll 1$ , et on peut noter  $n(\omega) \approx 1 + \frac{\chi}{2}$ . On peut donc écrire la transmission en amplitude du milieu pour un champ monochromatique de pulsation  $\omega_l$  :

$$t(z, \omega_l) = e^{-\frac{\omega_l}{2c} \text{Im}[\chi(\omega_l)]z},$$

ainsi que la transmission en intensité :

$$\boxed{T(z, \omega_l) = e^{-\frac{\omega_l}{c} \text{Im}[\chi(\omega_l)]z},} \quad (\text{B.4})$$

ou encore le coefficient d'absorption :

$$\boxed{\alpha(\omega_l) = \frac{\omega_l}{c} \text{Im}[\chi(\omega_l)].}$$

---

que ce n'est que pour un nombre fini de fréquences auxquelles le milieu répond, et que la plupart se propage dans le bon sens (en particulier les fréquences infinies auxquelles le milieu ne répond pas).

On peut aussi noter l'indice de réfraction :

$$n_R(\omega_l) = 1 + \operatorname{Re} \left[ \frac{\chi(\omega_l)}{2} \right]$$

Remarque : lorsque l'on étudie un profil de transmission ou de dispersion, on ne considère habituellement que l'indice (on ne prend pas en compte la variation de  $\omega_l$  dans la fonction de transfert). Ceci est valable si la plage sur laquelle on observe la réponse est petite devant la pulsation moyenne de la plage. Dans le domaine optique, les pulsations sont de l'ordre de  $10^{15}$  rad.s<sup>-1</sup> et cette approximation est tout à fait valable si les réponses du milieu ont des largeurs même jusqu'à la centaine GHz.

En règle générale, on notera alors le coefficient d'absorption :

$$\alpha(\omega_l) = \frac{\omega_0}{c} \operatorname{Im}[\chi(\omega_l)], \quad (\text{B.5})$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de la transition optique étudiée.

## B.4 Notation complexe

Soit un champ dont les composantes spectrales se propagent dans le sens des z croissants :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega.$$

Comme  $\vec{E}(z, t)$  est réel et que  $\tilde{\vec{E}}(\omega) = \tilde{\vec{E}}^*(-\omega)$ , le champ n'est en fait déterminé que par les valeurs positives des pulsations. On note alors le champ complexe  $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$  tel que :

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\vec{E}}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega,$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{\mathcal{E}}}(\omega) &= \tilde{\vec{E}}(\omega) & \text{si } \omega > 0, \\ &= 0 & \text{si } \omega < 0. \end{aligned}$$

On a alors les relations suivantes :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}(z, t) + \vec{\mathcal{E}}^*(z, t)) = \text{Re}[\vec{\mathcal{E}}(z, t)]$$

et

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}(\omega) + \vec{\mathcal{E}}^*(-\omega)).$$

# Annexe C

## Polarisations circulaires

Cette annexe pose les conventions prises pour l'excitation d'un système par des polarisations circulaires. Elle détermine également dans ce cas la forme des matrices de l'hamiltonien dipolaire électrique qui n'est pas simple au premier abord.

### C.1 Polarisation circulaires et traitement scalaire

Supposons l'axe de quantification selon le vecteur  $\vec{e}_z$  et considérons un champ oscillant à  $\omega_l$  correspondant à une polarisation circulaire  $\sigma_+$  pris en  $z = 0$  :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\cos(\omega_l t + \phi)\vec{e}_x + \sin(\omega_l t + \phi)\vec{e}_y) = \frac{E_0}{2}(e^{-i(\omega_l t + \phi)}\vec{\epsilon}_+ + e^{i(\omega_l t + \phi)}\vec{\epsilon}_-) \\ &= \frac{E_0}{2}e^{-i(\omega_l t + \phi)}\vec{\epsilon}_+ + cc = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega_l t} + cc.\end{aligned}$$

On a posé ici pour le champ complexe  $\vec{\mathcal{E}} = 2\vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega_l t}$ , et on a introduit les vecteurs unitaires complexes des polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  :

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}_+ &= \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \\ \vec{\epsilon}_- &= \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Nous avons aussi les relations

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \frac{\vec{\varepsilon}_+ + \vec{\varepsilon}_-}{\sqrt{2}}, \\ \vec{e}_y &= i \frac{\vec{\varepsilon}_- - \vec{\varepsilon}_+}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Il est usuel pour la résolution de l'équation de propagation de travailler scalairement et en notation complexe. Dans le cas de la polarisation circulaire droite, il faut utiliser :

$$\bar{\mathcal{E}}_0 = \vec{\mathcal{E}}_0 \cdot_{\mathbb{C}} \vec{\varepsilon}_+ = \frac{E_0 e^{-i\phi}}{2}.$$

L'opération  $\cdot_{\mathbb{C}}$  représente ici le produit scalaire dans  $\mathbb{C}$ , défini par  $\vec{u} \cdot_{\mathbb{C}} \vec{v} = \vec{u} \cdot_{\mathbb{R}} \vec{v}^*$ .

Le champ est alors donné par :

$$\vec{E} = \bar{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} \vec{\varepsilon}_+ + cc = 2\text{Re}[\bar{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} \vec{\varepsilon}_+] = 2\text{Re}[\vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}].$$

Il faut noter ici qu'à l'inverse des polarisations linéaires, il n'est pas possible de définir un champ scalaire réel par projection sur un vecteur réel<sup>1</sup>.

### Généralisation

Un champ monochromatique de polarisation quelconque peut toujours se décomposer sur la base des polarisations circulaires  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  et s'exprimer :

$$\vec{E} = \frac{E_1}{2} e^{-i\omega t} \vec{\varepsilon}_+ + \frac{E_2}{2} e^{-i\omega t} \vec{\varepsilon}_- + cc = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} + cc.$$

Il est alors possible de définir le vecteur unitaire complexe

$$\vec{u}_0 = \frac{E_1}{\sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2}} \vec{\varepsilon}_+ + \frac{E_2}{\sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2}} \vec{\varepsilon}_-,$$

tel que  $\vec{\mathcal{E}}_0 = \bar{\mathcal{E}}_0 \vec{u}_0$  où  $\bar{\mathcal{E}}_0 = \frac{\sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2}}{2}$ . On a alors bien :

$$\vec{E} = \bar{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} \vec{u}_0 + cc.$$

---

1. Pour une polarisation linéaire  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}$  où  $\vec{u} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y$ , on peut poser  $\bar{E} = \vec{E} \cdot \vec{u} = E_0 \cos(\omega t + \phi) = \frac{E_0 e^{-i\phi}}{2} e^{-i\omega t} + cc = \bar{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} + cc$ .

### Polarisation et susceptibilité

La TF  $\vec{P}$  de la polarisation  $\vec{P}$  d'un milieu associée à un champ  $\vec{E}$  de TF  $\vec{E}$  s'écrit en fonction de la susceptibilité  $\chi$  du milieu :

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega).$$

Pour un champ monochromatique à la pulsation  $\omega_l$  et de polarisation quelconque  $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega_l t} + cc$ , on a :

$$\vec{E}(\omega) = \vec{\mathcal{E}}_0 \delta(\omega - \omega_l) + \vec{\mathcal{E}}_0^* \delta(\omega + \omega_l),$$

soit

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}_0 \delta(\omega - \omega_l) + \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}_0^* \delta(\omega + \omega_l)$$

et

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega_l) \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega_l t} + cc.$$

Si on note  $\vec{P} = \vec{\mathcal{P}}_0 e^{-i\omega_l t} + cc$ , alors la susceptibilité  $\chi(\omega_l)$  à la pulsation  $\omega_l$  s'exprime :

$$\chi(\omega_l) = \frac{1}{\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_0} \vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \vec{u}_0 = \frac{\vec{\mathcal{P}}_0}{\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_0}.$$

## C.2 Hamiltonien d'interaction dipolaire électrique pour des polarisations circulaires

### C.2.1 Définitions

Soit un champ polarisé  $\sigma_+$  :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\cos(\omega_l t + \phi) \vec{e}_x + \sin(\omega_l t + \phi) \vec{e}_y) \\ &= \frac{E_0 e^{-i\phi}}{2} e^{-i\omega_l t} \vec{\varepsilon}_+ + cc. \end{aligned}$$

Le hamiltonien d'interaction dipolaire électrique est :

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= -\widehat{\vec{D}} \cdot_{\mathbb{R}} \vec{E} = \frac{eE_0}{\sqrt{2}} (\cos(\omega_l t + \phi) \hat{x} + \sin(\omega_l t + \phi) \hat{y}) \\ &= \frac{1}{2} \widehat{W} e^{-i(\omega_l t + \phi)} + \frac{1}{2} \widehat{W}^\dagger e^{i(\omega_l t + \phi)}.\end{aligned}$$

où  $\widehat{W}$  et  $\widehat{W}^\dagger$  sont transconjuguées :

$$\widehat{W} = \frac{eE_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad \text{et} \quad \widehat{W}^\dagger = \frac{eE_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}).$$

### C.2.2 Cas d'un système en $\Lambda$ avec sous-niveaux Zeeman

Supposons le système de trois niveaux ( $|e\rangle, |-1\rangle, |1\rangle$ ) tel que  $|e\rangle = |l = 1, m = 0\rangle$ ,  $|-1\rangle = |l = 0, m = -1\rangle$  et  $|1\rangle = |l = 0, m = +1\rangle$ , où  $l$  est le nombre quantique orbital et  $m$  le nombre quantique magnétique en ayant choisi l'axe de quantification selon  $\vec{e}_z$ .

Notons

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} 0 & W_{e-1} & W_{e1} \\ W_{-1e} & 0 & W_{-11} \\ W_{1e} & W_{1-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les règles de sélection, comme  $m_e = m_{-1} + 1$ ,  $W_{e-1} \neq 0$  et  $W_{e-1}^\dagger = 0$ . Comme  $m_e = m_1 - 1$ ,  $W_{e1} = 0$  et  $W_{e1}^\dagger \neq 0$ . Et comme  $l_{-1} = l_1$  d'autre part,  $W_{-11} = W_{-11}^\dagger = 0$ .

Comme  $\widehat{W}$  et  $\widehat{W}^\dagger$  sont transconjuguées, on en déduit les expressions :

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} 0 & W_{e-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ W_{1e} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{W}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{1e}^* \\ W_{e-1}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le hamiltonien dipolaire pour le champ  $\vec{E}$  est alors donné par :

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & W_{e-1} e^{-i(\omega_l t + \phi)} & W_{1e}^* e^{+i(\omega_l t + \phi)} \\ W_{e-1}^* e^{+i(\omega_l t + \phi)} & 0 & 0 \\ W_{1e} e^{-i(\omega_l t + \phi)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans l'approximation quasi-résonnante, nous retrouvons la forme usuelle :

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & W_{e-1} e^{-i(\omega t + \phi)} & 0 \\ W_{e-1}^* e^{+i(\omega t + \phi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### C.2.3 Matrice du dipôle atomique et fréquence de Rabi

Comme  $\widehat{H} = -\widehat{\vec{D}} \cdot_{\mathbb{R}} \vec{E} = \frac{1}{2} \widehat{W} e^{-i(\omega t + \phi)} + \frac{1}{2} \widehat{W}^\dagger e^{i(\omega t + \phi)} = -\widehat{\vec{D}} \cdot_{\mathbb{R}} \left( \frac{E_0}{2} e^{-i(\omega t + \phi)} \vec{\varepsilon}_+ + cc \right)$ , on en déduit que

$$\widehat{W} = -\widehat{\vec{D}} \cdot_{\mathbb{R}} \vec{\varepsilon}_+ E_0 \quad \text{et} \quad \widehat{W}^\dagger = -\widehat{\vec{D}} \cdot_{\mathbb{R}} \vec{\varepsilon}_- E_0.$$

Ceci nous permet de déterminer la forme matricielle (et vectorielle) de l'opérateur dipôle :

$$\widehat{\vec{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{e1} \\ d_{e-1}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_+ + \begin{pmatrix} 0 & d_{e-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{e1}^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_-.$$

(Attention ici  $\vec{\varepsilon}_+ \cdot_{\mathbb{R}} \vec{\varepsilon}_+ = 0$  mais  $\vec{\varepsilon}_+ \cdot_{\mathbb{R}} \vec{\varepsilon}_- = 1$ )

Il est alors possible de noter

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} 0 & -d_{e-1} E_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d_{e1}^* E_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{W}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_{e1} E_0 \\ -d_{e-1}^* E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En définissant ensuite la pulsation de Rabi complexe du champ incident polarisé  $\sigma_+$

$\Omega = \frac{d_{e-1} E_0 e^{-i\phi}}{\hbar}$ , le hamiltonien d'interaction pour ce champ s'exprime dans l'approximation quasi-résonnante :

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega e^{-i\omega t} & 0 \\ \Omega^* e^{+i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même, il est possible de définir la pulsation de Rabi et le hamiltonien d'interaction

pour un champ polarisé  $\sigma_-$  :

$$\Omega = \frac{d_{e1} E_0 e^{-i\phi}}{\hbar}$$

et

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega e^{-i\omega t} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega^* e^{+i\omega t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Annexe D

## Matrice de l'opérateur dipolaire électrique

Des rappels théoriques au sujet de la matrice de l'opérateur dipolaire sont faits dans cette annexe. Ils sont utiles dès lors que les transitions optiques étudiées ne sont plus de simples systèmes à deux niveaux ou que les polarisations des champs appliqués ne sont plus linéaires.

### D.1 Définitions

Pour un système soumis à un champ  $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$ , l'hamiltonien d'interaction dipolaire électrique est donné par :

$$\begin{aligned} H_{int} &= -\hat{D} \cdot \vec{E} = e\hat{r} \cdot \vec{E} \\ &= e(E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}), \end{aligned}$$

où  $e$  est la charge élémentaire.

Remarque : ceci n'est vrai que pour un atome à un électron, mais on peut toujours dans le cas général exprimer l'opérateur du dipôle avec ses composantes cartésiennes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$ .

Si l'axe de quantification est choisi selon  $\vec{e}_z$ , on peut associer à l'opérateur vectoriel

irréductible  $\hat{r}$  ses composantes standard [Messiah, 1995] :

$$\begin{aligned}\hat{T}_{-1}^{(1)} &= \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}}, \\ \hat{T}_0^{(1)} &= \hat{z}, \\ \hat{T}_1^{(1)} &= -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

On peut alors écrire l'opérateur dipolaire  $\hat{D}$  dans la base cartésienne :

$$\hat{D} = e \left[ \frac{\hat{T}_{-1}^{(1)} - \hat{T}_1^{(1)}}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + i \frac{\hat{T}_{-1}^{(1)} + \hat{T}_1^{(1)}}{\sqrt{2}} \vec{e}_y + \hat{T}_0^{(1)} \vec{e}_z \right]$$

Cette forme est utile puisqu'il est ensuite possible d'exprimer les matrices des opérateurs  $\hat{T}_i^{(1)}$  dans la base des états propres du moment cinétique.

## D.2 Wigner-Eckart

Si on note les états propres du moment cinétique  $|k\rangle = |L_k, J_k, m_{j_k}\rangle$ , alors d'après le théorème de Wigner-Eckart, l'élément de matrice  $\langle L_k, J_k, m_{J_k} | \hat{T}_i^{(1)} | L_p, J_p, m_{J_p} \rangle$  s'exprime comme le produit d'un terme indépendant du nombre quantique magnétique et d'un coefficient de Clebsch-Gordan :

$$\langle L_k, J_k, m_{J_k} | \hat{T}_i^{(1)} | L_p, J_p, m_{J_p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2J_k + 1}} \langle L_k, J_k || \hat{T}^{(1)} || L_p, J_p \rangle C_{(1,i),(J_p,m_{J_p})}^{J_k,m_{J_k}}.$$

$\langle L_k, J_k || \hat{T}^{(1)} || L_p, J_p \rangle$  est appelé élément de matrice réduit.

Les arguments de parité nous permettent également d'affirmer que les éléments diagonaux sont nuls :  $\langle L_k, J_k, m_{J_k} | \hat{T}_i^{(1)} | L_k, J_k, m_{J_k} \rangle = 0$ , ainsi que tous les éléments correspondant à des états de même nombre quantique orbital :  $\langle L_k = L_p, J_k, m_{J_k} | \hat{T}_i^{(1)} | L_k = L_p, J_p, m_{J_p} \rangle = 0$  et tous les éléments correspondant à des états de même parité :  $(-1)^{L_k} = (-1)^{L_p}$ .

### D.3 Cas usuel d'une transition optique composée de plusieurs sous-niveaux

Considérons maintenant une transition optique entre deux groupes de niveaux, de nombres quantiques  $L_1, J_1$  et  $L_2, J_2$  respectivement, de parités opposées ( $(-1)^{L_1} \neq (-1)^{L_2}$ ) et d'énergies telles que  $E_1 > E_2$ . On peut exprimer les matrices des opérateurs  $\hat{T}_i^{(1)}$  sous forme de matrices par blocs :

$$\hat{T}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & A_i^{(1)} \\ B_i^{(1)} & 0 \end{pmatrix},$$

où les matrices  $A_i^{(1)}$  et  $B_i^{(1)}$  sont définies par

$$\begin{aligned} (A_i^{(1)})_{k,p} &= \langle L_1, J_1, m_{1k} | \hat{T}_i^{(1)} | L_2, J_2, m_{2p} \rangle, \\ (B_i^{(1)})_{k,p} &= \langle L_2, J_2, m_{2k} | \hat{T}_i^{(1)} | L_1, J_1, m_{1p} \rangle. \end{aligned}$$

Pour les matrices  $A_i^{(1)}$  de chacun des opérateurs  $\hat{T}_i^{(1)}$ , l'élément de matrice réduit  $\langle L_1, J_1 | \hat{T}_i^{(1)} | L_2, J_2 \rangle$ , que l'on notera  $-d\sqrt{J_1 + 1}/e$ , est le même pour tous les éléments de matrice et le même pour tous les  $i$ . Pour les matrices  $B_i^{(1)}$  de chacun des opérateurs  $\hat{T}_i^{(1)}$ , l'élément de matrice réduit  $\langle L_2, J_2 | \hat{T}_i^{(1)} | L_1, J_1 \rangle$  est le même pour tous les éléments de matrice et le même pour tous les  $i$ . De plus, nous avons la relation suivante entre ces deux éléments de matrice réduit :  $(-1)^{J_2} \langle L_2, J_2 | \hat{T}_i^{(1)} | L_1, J_1 \rangle = (-1)^{J_1} \langle L_1, J_1 | \hat{T}_i^{(1)} | L_2, J_2 \rangle^*$ . On peut alors noter :

$$\begin{aligned} (A_i^{(1)})_{k,p} &= -\frac{d}{e} C_{(1,i),(J_2,m_{2p})}^{J_1,m_{1k}}, \\ (B_i^{(1)})_{k,p} &= -\frac{d^*}{e} (-1)^{J_1-J_2} \sqrt{\frac{2J_1+1}{2J_2+1}} C_{(1,i),(J_1,m_{1p})}^{J_2,m_{2k}}. \end{aligned}$$

## D.4 Base des polarisations circulaires

Exprimons en particulier l'opérateur dipolaire dans la base des polarisations circulaires, définies selon les conventions prises dans ce manuscrit par (annexe C) :

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}_+ &= \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \\ \vec{\varepsilon}_- &= \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\widehat{D} = e \left[ \widehat{T}_{-1}^1 \vec{\varepsilon}_+ - \widehat{T}_1^1 \vec{\varepsilon}_- + \widehat{T}_0^1 \vec{e}_z \right].$$

Si note  $\left[ C_{(1,i),(J_p,m_{J_p,p})}^{J_k,m_{J_k,k}} \right]_{(k,p)}$  la matrice dont les termes sont les coefficients de Clebsch-Gordan, on peut finalement réécrire :

$$\widehat{D} = - \left( \begin{array}{cc} 0 & d \left[ C_{(1,-1),(J_2,m_{2p})}^{J_1,m_{1k}} \right] \\ d^* (-1)^{J_1-J_2} \sqrt{\frac{2J_1+1}{2J_2+1}} \left[ C_{(1,-1),(J_1,m_{1p})}^{J_2,m_{2k}} \right] & 0 \end{array} \right) \vec{\varepsilon}_+ \\ + \left( \begin{array}{cc} 0 & d \left[ C_{(1,1),(J_2,m_{2p})}^{J_1,m_{1k}} \right] \\ d^* (-1)^{J_1-J_2} \sqrt{\frac{2J_1+1}{2J_2+1}} \left[ C_{(1,1),(J_1,m_{1p})}^{J_2,m_{2k}} \right] & 0 \end{array} \right) \vec{\varepsilon}_- \\ - \left( \begin{array}{cc} 0 & d \left[ C_{(1,0),(J_2,m_{2p})}^{J_1,m_{1k}} \right] \\ d^* (-1)^{J_1-J_2} \sqrt{\frac{2J_1+1}{2J_2+1}} \left[ C_{(1,0),(J_1,m_{1p})}^{J_2,m_{2k}} \right] & 0 \end{array} \right) \vec{e}_z.$$

Remarque : il existe la relation  $(-1)^{1+J_1-J_2} \sqrt{\frac{2J_1+1}{2J_2+1}} C_{(1,-i),(J_1,m_{1p})}^{J_2,m_{2k}} = C_{(1,i),(J_2,m_{2p})}^{J_1,m_{1k}}$  entre les coefficients de Clebsch-Gordan. On comprend ici que les ratios des couplages pour une transition optique impliquant plusieurs sous-niveaux Zeeman dépendent alors des coefficients de Clebsch-Gordan associés aux transitions.

Attention : les coefficients de Clebsch-Gordan sont usuellement notés  $C_{(j_1,m_1),(j_2,m_2)}^{j,m}$ , il faut donc faire la correspondance

$$\begin{aligned}J_k, m_{J_k,k} &\rightarrow j, m && \text{(niveau de la ligne)} \\ (1, i) &\rightarrow (j_1, m_1) && \text{(opérateur)} \\ (J_p, m_{J_p,p}) &\rightarrow (j_2, m_2) && \text{(niveau de la colonne)}.\end{aligned}$$

## D.5 Forces d'oscillateur-Durée de vie radiative-d

### D.5.1 Forces d'oscillateur

On définit alors pour cette transition optique une force d'oscillateur d'émission  $f_{1 \rightarrow 2}$ , identique pour tous les sous-niveaux  $m_{2k}$ , et une force d'oscillateur d'absorption  $f_{2 \rightarrow 1}$ , identique pour tous les sous-niveaux  $m_{1p}$ , par [Nacher and Leduc, 1985] :

$$f_{1 \rightarrow 2} = -\frac{2m_e\omega_0}{\hbar} \sum_{i; m_{1p}} |\langle L_2, J_2, m_{2k} | \hat{T}_i^{(1)} | L_1, J_1, m_{1p} \rangle|^2 = -\frac{2m_e\omega_0}{\hbar} \frac{|\langle L_2, J_2 | \hat{T}^{(1)} | L_1, J_1 \rangle|^2}{2J_2 + 1},$$

$$f_{2 \rightarrow 1} = \frac{2m_e\omega_0}{\hbar} \sum_{i; m_{2k}} |\langle L_1, J_1, m_{1p} | \hat{T}_i^{(1)} | L_2, J_2, m_{2k} \rangle|^2 = \frac{2m_e\omega_0}{\hbar} \frac{|\langle L_1, J_1 | \hat{T}^{(1)} | L_2, J_2 \rangle|^2}{2J_1 + 1},$$

où  $m_e$  est la masse de l'électron et  $\omega_0$  est la pulsation optique de la transition. Ceci se réécrit :

$$\boxed{-f_{1 \rightarrow 2} \frac{2J_2 + 1}{2J_1 + 1} = f_{2 \rightarrow 1} = \frac{2m_e\omega_0}{\hbar e^2} |d|^2.}$$

#### Remarque

Les valeurs des forces d'oscillateur  $f_0$  usuellement données dans les tables correspondent à des forces d'oscillateur d'absorption données en fonction des éléments de matrice réduit dans la base découplée [Drake, 2005] :

$$f_0 = \frac{2m_e\omega_0}{\hbar} \frac{|\langle L_1 | \hat{T}^{(1)} | L_2 \rangle|^2}{2L_1 + 1}.$$

Il faut donc utiliser la formule de décomposition des éléments de matrice réduits [Cowan, 1981; Messiah, 1995; Nacher and Leduc, 1985] :

$$\langle L_1, J_1 | \hat{T}^{(1)} | L_2, J_2 \rangle = (-1)^{L_2+J_2} \sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)} \left\{ \begin{matrix} L_1 & 1 & J_1 \\ J_2 & 1 & L_2 \end{matrix} \right\} \langle L_1 | \hat{T}^{(1)} | L_2 \rangle,$$

où on a supposé ici un même nombre quantique de spin  $S = 1$  pour les deux niveaux<sup>1</sup> et où le terme entre accolades représente un coefficient de Wigner 6-j.

1. Pour correspondre à l'hélium.

On peut alors écrire :

$$-f_{1 \rightarrow 2} \frac{2J_2 + 1}{2J_1 + 1} = f_{2 \rightarrow 1} = f_0(2J_2 + 1)(2L_1 + 1) \begin{Bmatrix} L_1 & 1 & J_1 \\ J_2 & 1 & L_2 \end{Bmatrix},$$

et finalement exprimer le module carré de  $|d|^2$  :

$$|d|^2 = (2J_2 + 1)(2L_1 + 1) \begin{Bmatrix} L_1 & 1 & J_1 \\ J_2 & 1 & L_2 \end{Bmatrix}^2 \frac{e^2 \hbar}{2m_e \omega_0} f_0.$$

### Application à l'hélium

Pour la transition  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P$  de  $^4\text{He}$ , les coefficients de Wigner 6-j sont tels que :

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}^2 = \frac{1}{9}.$$

On a alors  $f_{2^3S_1 \rightarrow 2^3P_i} = f_0$  pour les trois niveaux  $2^3P_0$ ,  $2^3P_1$  et  $2^3P_2$ , qui ont donc la même valeur de  $|d|^2$  donnée par :

$$|d|^2 = \frac{e^2 \hbar}{2m_e \omega_0} f_0.$$

### D.5.2 Durée de vie radiative

Le taux de désexcitation radiative  $\Gamma_{0,p \rightarrow k}$  du niveau  $|l_1, j_1, m_{1p}\rangle$  vers le niveau  $|l_2, j_2, m_{2k}\rangle$  se définit par [Grynberg et al., 1997] :

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,p \rightarrow k} &= \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\langle L_2, J_2, m_{2k} | e\hat{T}_{m_{2k}-m_{1p}}^{(1)} | L_1, J_1, m_{1p} \rangle|^2 \\ &= \frac{e^2 \omega_0^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \frac{|\langle L_2, J_2 | \hat{T}^{(1)} | L_1, J_1 \rangle|^2}{2J_2 + 1} C_{(1, m_{2k}-m_{1p}), (J_1, m_{1p})}^{J_2, m_{2k}}, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,p \rightarrow k} &= -\frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} f_{1 \rightarrow 2} \left( C_{(1, m_{2k} - m_{1p}), (J_1, m_{1p})}^{J_2, m_{2k}} \right)^2 \\ &= \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} f_{2 \rightarrow 1} \left( C_{(1, m_{1p} - m_{2k}), (J_2, m_{2k})}^{J_1, m_{1p}} \right)^2 \\ &= \frac{\omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |d|^2 \left( C_{(1, m_{1p} - m_{2k}), (J_2, m_{2k})}^{J_1, m_{1p}} \right)^2. \end{aligned}$$

On peut alors définir le taux de désexcitation radiative  $\Gamma_0$ , identique pour chacun des niveaux supérieurs :

$$\Gamma_0 = \sum_k \Gamma_{0,p \rightarrow k} = \frac{\omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} \sum_{m_{2k}} |\langle L_2, J_2, m_{2k} | e \hat{T}_{m_{2k} - m_{1p}}^{(1)} | L_1, J_1, m_{1p} \rangle|^2,$$

soit

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= -\frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} f_{1 \rightarrow 2} \frac{2J_2 + 1}{2J_1 + 1} \\ &= \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} f_{2 \rightarrow 1} \\ &= \frac{\omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |d|^2. \end{aligned}$$

### Application à l'hélium

On peut exprimer la durée de vie radiative de chacun des sous-niveaux Zeeman des niveaux  $2^3P_0$ ,  $2^3P_1$  et  $2^3P_2$  en fonction de la force d'oscillateur  $f_0$  trouvée dans les tables :

$$\Gamma_0 = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} f_0,$$

formule avec laquelle on retrouve  $\frac{1}{\Gamma_0} = 98$  ns.



# Annexe E

## Résolution d'un système avec le développement de Floquet

Nous expliquons dans cette annexe comment résoudre un système périodique linéaire avec le développement de Floquet. Cette résolution est utile lorsque la dépendance temporelle dans les équations de Bloch optiques ne peut pas être supprimée par passage dans le référentiel tournant, typiquement lorsque deux champs désaccordés excitent une même transition optique. Nous expliquons donc comment l'appliquer aux systèmes étudiés dans ce manuscrit.

### E.1 Position du problème

Considérons le système linéaire d'équations différentielles sous forme matricielle suivant :

$$\dot{R} = BR - S,$$

où  $B$  varie temporellement et peut s'exprimer  $B = B_1 e^{-i\delta t} + B_0 + B_{-1} e^{+i\delta t}$ .

$B$  est périodique de période  $2\pi/\delta$  :  $B(t + 2\pi/\delta) = B(t)$ , et d'après le théorème de Floquet, la solution du système à l'état stationnaire est périodique de période  $2\pi/\delta$  et peut être développée en série de Fourier de la façon suivante [Papademetriou et al., 1992; Wong et al., 2004] :

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_{-n} e^{in\delta t}.$$

## E.2 Résolution

Le système nous donne la relation de récurrence suivante entre les coefficients de Fourier de  $R$  :

$$\begin{cases} -i\delta n R_n = B_1 R_{n-1} + B_0 R_n + B_{-1} R_{n+1} & \text{si } n \neq 0 \\ 0 = B_1 R_{-1} + B_0 R_0 + B_{-1} R_1 - S. \end{cases}$$

Le principe de la résolution réside dans la troncature des termes  $R_n$  à partir d'un certain ordre et d'utiliser la méthode des fractions continues pour les matrices. Soit  $N > 0$  et  $P < 0$  tels que :

$$\begin{cases} R_n = 0 & \text{si } n > N \\ R_n = 0 & \text{si } n < P, \end{cases}$$

La relation de récurrence devient pour les derniers termes :

$$\begin{cases} 0 = B_1 R_{N-1} + (B_0 + i\delta N) R_N \\ 0 = (B_0 + i\delta P) R_P + B_{-1} R_{P+1}, \end{cases}$$

En posant  $A_n = B_0 + i\delta n I$ , où  $I$  est la matrice identité,  $C_n = A_n^{-1} B_1$  et  $D_n = A_n^{-1} B_{-1}$ , nous avons pour les  $n$  positifs :

$$\begin{cases} R_N = -C_N R_{N-1} \\ 0 = C_n R_{n-1} + R_n + D_n R_{n+1} & \text{si } 0 < n < N \\ S = C_0 R_{-1} + R_0 + D_0 R_1, \end{cases}$$

Et on obtient par récurrence :

$$R_1 = -[I - D_1(\dots\{I - D_{N-2}(I - D_{N-1}C_N)^{-1}C_{N-1}\}^{-1}\dots C_2)]^{-1}C_1 R_0.$$

On a de même pour les  $n$  strictement négatifs :

$$\begin{cases} R_P = -D_P R_{P+1} \\ 0 = C_n R_{n-1} + R_n + D_n R_{n+1} & \text{si } P < n < 0, \end{cases}$$

et on obtient par récurrence :

$$R_{-1} = -[I - C_{-1}(\dots\{I - C_{P+2}(I - C_{P+1}D_P)^{-1}D_{P+1}\}^{-1}\dots D_{-2})]^{-1}D_{-1}R_0.$$

Nous pouvons alors introduire les matrices  $M^+$  et  $M^-$  telles que :

$$\begin{aligned} R_1 &= M^+ R_0, \\ R_{-1} &= M^- R_0, \end{aligned}$$

et nous obtenons alors :

$$R_0 = (I + D_0M^+ + C_0M^-)^{-1}S.$$

Normalement, les indices de troncatures  $N$  et  $P$  doivent être choisis assez grand pour que les harmoniques  $R_n$  recherchées ne dépendent que peu de la troncature.

### E.3 Application

Nous avons utilisé cette méthode pour résoudre les systèmes d'équations de Bloch optiques de nos différents systèmes. En particulier, nous étudions toujours dans ce manuscrit la réponse de notre système pour une sonde faible comparée au champ de couplage ( $\Omega_s \ll \Omega_c$ ). Si on regarde les termes de la matrice  $B$  dans ce cas (p.189 pour le système à 2 niveaux et p.205 pour le système à 3 niveaux), on s'aperçoit que les termes des matrices  $B_1$  et  $B_{-1}$  sont tels que  $\|B_1\|, \|B_{-1}\| \ll \|B_0\|$ . Nous avons donc tronqué  $R$  à l'ordre 1 (et vérifié que tronquer à l'ordre 2 ne changeait pas radicalement les résultats) en posant :

$$R = R_1e^{-i\delta t} + R_0 + R_{-1}e^{+i\delta t}.$$

Les résultats sont alors donnés au 1er ordre pour le champ sonde par :

$$\boxed{\begin{cases} R_1 = -(B_0 + i\delta I)^{-1}B_1R_0 \\ R_{-1} = -(B_0 - i\delta I)^{-1}B_{-1}R_0 \\ R_0 = B_0^{-1}S. \end{cases}}$$



# Annexe F

## Systèmes à deux niveaux

Cette annexe regroupe tous les calculs utilisés dans ce manuscrit concernant les systèmes à deux niveaux. Elle fait également le lien entre les différents modèles et les différentes résolutions effectuées.

### F.1 Système à deux niveaux : équations de Bloch optiques

Soit le système à deux niveaux de la figure F.1.  $\Gamma_0$  est le taux de désexcitation du niveau supérieur  $|e\rangle$  vers le niveau  $|g\rangle$ ,  $\Lambda$  le taux d'alimentation du niveau fondamental  $|g\rangle$ , et  $\gamma_e$  et  $\gamma_g$  les taux respectifs de relaxation vers l'extérieur de ces niveaux. Deux champs électromagnétiques  $(\Omega_c, \omega_c)$  et  $(\Omega_s, \omega_s)$  couplent les deux niveaux séparés d'une énergie  $\hbar\omega_0$ .

L'hamiltonien pour ce système est donné dans la base  $(|e\rangle, |g\rangle)$  et en prenant la référence des énergies pour l'état excité  $|e\rangle$  par

$$\widehat{H} = -\hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + \Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ \Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + \Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s) & \omega_0 \end{pmatrix}.$$

Et avec le formalisme de la matrice densité, notée  $\hat{\sigma}$ , le système satisfait à l'équation

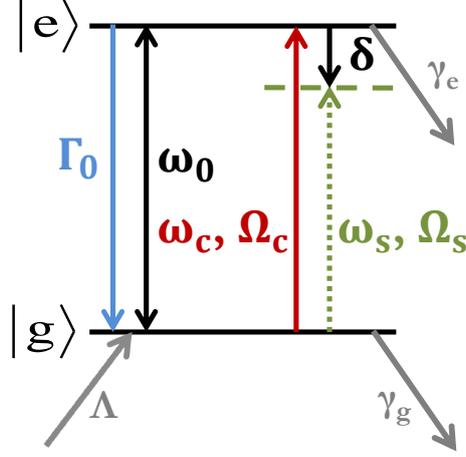


FIGURE F.1 – Système à deux niveaux séparés d’une énergie  $\hbar\omega_0$ . Le niveau excité  $|e\rangle$  a un taux de désexcitation vers le niveau  $|g\rangle$   $\Gamma_0$  et un taux de relaxation vers l’extérieur  $\gamma_e$ , le niveau fondamental  $|g\rangle$  a un taux d’alimentation  $\Lambda$  et un taux de relaxation vers l’extérieur  $\gamma_g$ . Le système est couplé à un champ de couplage de fréquence de Rabi  $\Omega_c$  et de fréquence optique  $\omega_c$  et à un champ de sonde de fréquence de Rabi  $\Omega_s$  et de fréquence optique  $\omega_s$ .

d’évolution de Liouville-Von Neumann :

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\widehat{H}, \hat{\sigma}] + \left. \frac{d\hat{\sigma}}{dt} \right|_{relax},$$

où  $\left. \frac{d\hat{\sigma}}{dt} \right|_{relax}$  représentent les termes de relaxation donnés par

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_{ee}}{dt} \right|_{relax} &= -(\Gamma_0 + \gamma_e)\sigma_{ee}, \\ \left. \frac{d\sigma_{gg}}{dt} \right|_{relax} &= \Lambda + \Gamma_0\sigma_{ee} - \gamma_g\sigma_{gg}, \\ \left. \frac{d\sigma_{eg}}{dt} \right|_{relax} &= -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{eg}. \end{aligned}$$

Remarque : dans le cas le plus simple lorsqu’il n’y a pas de termes de relaxation supplémentaires,  $\frac{\Gamma}{2} = \frac{\Gamma_0}{2} + \frac{\gamma_e}{2} + \frac{\gamma_g}{2}$ .

Calculons maintenant

$$[\widehat{H}, \hat{\sigma}] = \widehat{H}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\widehat{H} =$$

$$\begin{aligned}
 & -\hbar \begin{pmatrix} \sigma_{ge}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) & \sigma_{gg}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] & +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] \\ \sigma_{ee}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) & \sigma_{eg}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] + \sigma_{ge}\omega_0 & +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] + \sigma_{eg}\omega_0 \end{pmatrix} \\
 & +\hbar \begin{pmatrix} \sigma_{eg}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) & \sigma_{ee}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] & +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] + \sigma_{eg}\omega_0 \\ \sigma_{gg}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) & \sigma_{ge}[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] & +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] + \sigma_{gg}\omega_0 \end{pmatrix} \\
 & = \hbar \begin{pmatrix} (\sigma_{eg} - \sigma_{ge})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) & (\sigma_{ee} - \sigma_{gg})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] & +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] + \sigma_{eg}\omega_0 \\ (\sigma_{gg} - \sigma_{ee})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) & (\sigma_{ge} - \sigma_{eg})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) \\ +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] - \sigma_{ge}\omega_0 & +\Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

et le système satisfait donc le système d'équations d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = -i(\sigma_{eg} - \sigma_{ge})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + \Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] - (\Gamma_0 + \gamma_e)\sigma_{ee} \\ \frac{d\sigma_{gg}}{dt} = -i(\sigma_{ge} - \sigma_{eg})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + \Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] + \Lambda + \Gamma_0\sigma_{ee} - \gamma_g\sigma_{gg} \\ \frac{d\sigma_{eg}}{dt} = -i(\sigma_{ee} - \sigma_{gg})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + \Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] - i\sigma_{eg}\omega_0 - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{eg} \\ \frac{d\sigma_{ge}}{dt} = -i(\sigma_{gg} - \sigma_{ee})[\Omega_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + \Omega_s \cos(\omega_s t + \phi_s)] + i\sigma_{ge}\omega_0 - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ge}. \end{cases}$$

Nous nous plaçons maintenant dans le référentiel tournant, en notant  $\sigma_{eg} = \tilde{\sigma}_{eg}e^{-i\omega_c t}$ , et appliquons également l'approximation des ondes tournantes (qui consiste à ne conserver que les termes oscillant lentement). Nous définissons également les pulsations de Rabi complexes par  $\Omega_{c,s} = \Omega_{c,s}e^{-i\phi_{c,s}}$  (et donc  $\Omega_{c,s}^* = \Omega_{c,s}e^{i\phi_{c,s}}$ ), le désaccord  $\delta = \omega_s - \omega_c$  et enfin le désaccord optique  $\Delta_c = \omega_c - \omega_0$ . Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = -\frac{i}{2}(\tilde{\sigma}_{eg}\Omega_s^*e^{i\delta t} - \tilde{\sigma}_{ge}\Omega_s e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{eg}\Omega_c^* - \tilde{\sigma}_{ge}\Omega_s) - (\Gamma_0 + \gamma_e)\sigma_{ee} \quad (F.1.a) \\ \frac{d\sigma_{gg}}{dt} = -\frac{i}{2}(\tilde{\sigma}_{ge}\Omega_s e^{-i\delta t} - \tilde{\sigma}_{eg}\Omega_s^*e^{i\delta t} + \tilde{\sigma}_{ge}\Omega_c - \tilde{\sigma}_{eg}\Omega_s^*) + \Lambda + \Gamma_0\sigma_{ee} - \gamma_g\sigma_{gg} \quad (F.1.b) \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{eg}}{dt} = -i(\sigma_{ee} - \sigma_{gg})\left(\frac{\Omega_s e^{-i\delta t}}{2} + \frac{\Omega_c}{2}\right) + i\tilde{\sigma}_{eg}(\Delta_c + i\frac{\Gamma}{2}) \quad (F.1.c) \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{ge}}{dt} = i(\sigma_{ee} - \sigma_{gg})\left(\frac{\Omega_s^* e^{i\delta t}}{2} + \frac{\Omega_c^*}{2}\right) - i\tilde{\sigma}_{ge}(\Delta_c - i\frac{\Gamma}{2}). \quad (F.1.d) \end{array} \right.$$

Remarque : nous aurions obtenu le même système d'équations en prenant dès le départ un hamiltonien complexe :

$$\widehat{H}_c = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_c e^{-i\omega_c t} + \Omega_s e^{-i\omega_s t} \\ \Omega_c^* e^{i\omega_c t} + \Omega_s^* e^{i\omega_s t} & \omega_0 \end{pmatrix}.$$

L'approximation quasi-résonnante consiste alors à ne considérer que  $\widehat{H}_c$  dans la définition de  $\widehat{H} = \widehat{H}_c + cc$ .

### Susceptibilité linéaire

Pour trouver la susceptibilité linéaire en champ sonde, exprimons la polarisation du milieu donnée par

$$P = n\langle \widehat{D} \rangle = nTr(\widehat{\sigma}\widehat{D}),$$

où  $n$  est la densité volumique d'atomes de notre système et  $\langle \widehat{D} \rangle$  la valeur moyenne du dipôle atomique, donnée alors par :

$$\langle \widehat{D} \rangle = Tr(\widehat{\sigma}\widehat{D}).$$

Calculons donc

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D} \rangle &= Tr \left[ \begin{pmatrix} \sigma_{ee} & \sigma_{eg} \\ \sigma_{ge} & \sigma_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d \\ d^* & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} \sigma_{eg}d^* & \sigma_{ee}d \\ \sigma_{gg}d^* & \sigma_{ge}d \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement :

$$P = n(\sigma_{eg}d^* + cc).$$

Lorsque nous cherchons la réponse linéaire en champ sonde du système, la cohérence  $\tilde{\sigma}_{eg}$  dans le référentiel tournant peut s'exprimer

$$\tilde{\sigma}_{eg}(t) = \tilde{\sigma}_{eg,0} + \tilde{\sigma}_{eg,1}e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{eg,-1}e^{+i\delta t},$$

soit pour la cohérence

$$\sigma_{eg}(t) = \tilde{\sigma}_{eg,0}e^{-i\omega_c t} + \tilde{\sigma}_{eg,1}e^{-i\omega_s t} + \tilde{\sigma}_{eg,-1}e^{-i(2\omega_c - \omega_s)t},$$

puis la polarisation à la fréquence du champ sonde :

$$P_{\omega_s} = n\tilde{\sigma}_{eg,1}d^*e^{-i\omega_s t} + cc.$$

En notant  $P_{\omega_s} = \varepsilon_0\chi_{\omega_s}E_s e^{-i(\omega_s t + \phi_s)} + cc$  et  $\Omega_s = \frac{dE_s e^{-i\phi_s}}{\hbar}$ , nous en déduisons la susceptibilité linéaire en champ sonde :

$$\boxed{\chi_{\omega_s} = \frac{n|d|^2}{\varepsilon_0\hbar} \frac{\tilde{\sigma}_{eg,1}}{\Omega_s}}.$$

### Transmission

Le coefficient d'absorption sera donc donné pour le champ sonde par (cf équation (B.5))

$$\boxed{\alpha = n \frac{2\omega_0|d|^2}{\varepsilon_0\hbar c} \Im\left(\frac{\tilde{\sigma}_{eg,1}}{\Omega_s}\right)}.$$

## F.2 Système à deux niveaux : méthode de Floquet

A l'aide de la méthode de Floquet (annexe E), nous résolvons le système d'équations (F.1) du système atomique de la figure F.1 en posant

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_{ee} \\ \sigma_{gg} \\ \tilde{\sigma}_{eg} \\ \tilde{\sigma}_{ge} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{R} = BR - S .$$

Les matrices  $B$  et  $S$  sont ainsi définies par

$$B = \begin{pmatrix} -\Gamma_0 - \gamma_e & 0 & -\frac{i}{2}(\Omega_c^* + \Omega_s^* e^{i\delta t}) & \frac{i}{2}(\Omega_c + \Omega_s e^{-i\delta t}) \\ \Gamma_0 & -\gamma_g & \frac{i}{2}(\Omega_c^* + \Omega_s^* e^{i\delta t}) & -\frac{i}{2}(\Omega_c + \Omega_s e^{-i\delta t}) \\ -\frac{i}{2}(\Omega_c + \Omega_s e^{-i\delta t}) & \frac{i}{2}(\Omega_c + \Omega_s e^{-i\delta t}) & i\Delta_c - \frac{\Gamma}{2} & 0 \\ \frac{i}{2}(\Omega_c^* + \Omega_s^* e^{i\delta t}) & -\frac{i}{2}(\Omega_c^* + \Omega_s^* e^{i\delta t}) & 0 & -i\Delta_c - \frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix},$$

et

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous recherchons ensuite la réponse linéaire du système en utilisant le développement de Floquet suivant :

$$\begin{aligned} R &= R_1 e^{-i\delta t} + R_0 + R_{-1} e^{i\delta t}, \\ B &= B_1 e^{-i\delta t} + B_0 + B_{-1} e^{i\delta t}. \end{aligned}$$

La réponse du système étant donnée par  $\tilde{\sigma}_{eg,1}$ , c'est le troisième élément de  $R_1$ , noté  $R_1[3]$ , qui donnera la réponse du système dans les calculs informatiques réalisés sous Mathematica par (annexe F.1) :

$$\boxed{\chi_{\omega_s} = \frac{n|d|^2 R_1[3]}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_s}}.$$

### F.3 Système à deux niveaux : lien entre équations de Bloch optiques et équations cinétiques

Considérons le système de la figure F.1 et le système d'équations d'évolution associé (F.1). Le modèle des équations cinétiques consiste à considérer le système dans l'approximation adiabatique, c'est-à-dire que la cohérence  $\tilde{\sigma}_{eg}$  répond assez vite pour supposer que  $\frac{d\tilde{\sigma}_{eg}}{dt} = 0$  à tout instant. Ceci se traduit par la relation suivante :

$$\tilde{\sigma}_{eg} = \frac{\sigma_{ee} - \sigma_{gg}}{\Delta_c + i\Gamma} \left( \frac{\Omega_s e^{-i\delta t}}{2} + \frac{\Omega_c}{2} \right). \quad (\text{F.2})$$

On dit alors dans le cadre de cette approximation que la cohérence optique suit adiabatiquement les populations.

Le système se réduit alors aux équations d'évolutions des populations seules :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = -(\Gamma_0 + \gamma_e)\sigma_{ee} + (\sigma_{gg} - \sigma_{ee}) \frac{|\Omega_c + \Omega_s e^{-i\delta t}|^2}{2} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\Delta_c^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \\ \frac{d\sigma_{gg}}{dt} = \Lambda + \Gamma_0\sigma_{ee} - \gamma_g\sigma_{gg} - (\sigma_{gg} - \sigma_{ee}) \frac{|\Omega_c + \Omega_s e^{-i\delta t}|^2}{2} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\Delta_c^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \end{cases}$$

Si l'on introduit maintenant l'intensité  $I(t) = \frac{\varepsilon_0 c \hbar^2 |\Omega_c + \Omega_s e^{-i\delta t}|^2}{2 |d|^2}$ , où  $d$  est l'élément de matrice dipolaire électrique associé à la transition, nous pouvons réexprimer le système :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = -(\Gamma_0 + \gamma_e)\sigma_{ee} + \frac{I(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(\sigma_{gg} - \sigma_{ee}) & (F.3.a) \\ \frac{d\sigma_{gg}}{dt} = \Lambda + \Gamma_0\sigma_{ee} - \gamma_g\sigma_{gg} - \frac{I(t)\sigma}{\hbar\omega_0}(\sigma_{gg} - \sigma_{ee}), & (F.3.b) \end{cases} \quad (F.3)$$

où on a défini ici une section efficace  $\sigma = \frac{|d|^2 \omega_0}{\varepsilon_0 \hbar c} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\Delta_c^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$ .

On retrouve alors la forme habituelle des équations cinétiques.

### Approximation adiabatique

Lorsque le champ est constitué de deux composantes battant à  $\delta$ , il est logique de chercher la réponse linéaire du système de Bloch optique en posant pour la cohérence optique  $\tilde{\sigma}_{eg}(t) = \tilde{\sigma}_{eg,0} + \tilde{\sigma}_{eg,1}e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{eg,-1}e^{i\delta t}$ . Nous avons alors dans ce cas

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{eg}}{dt} = \frac{d\tilde{\sigma}_{eg,1}}{dt}e^{-i\delta t} - i\delta\tilde{\sigma}_{eg,1}e^{-i\delta t} + \frac{d\tilde{\sigma}_{eg,-1}}{dt}e^{i\delta t} + i\delta\tilde{\sigma}_{eg,-1}e^{i\delta t},$$

et l'équation d'évolution de la cohérence devient en régime permanent :

$$-i\delta\tilde{\sigma}_{eg,1}e^{-i\delta t} + i\delta\tilde{\sigma}_{eg,-1}e^{i\delta t} = -i(\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) \left( \frac{\Omega_s e^{-i\delta t}}{2} + \frac{\Omega_c}{2} \right) + i\tilde{\sigma}_{eg} \left( \Delta_c + i\frac{\Gamma}{2} \right).$$

Considérer dans l'approximation adiabatique que  $\frac{d\tilde{\sigma}_{eg}}{dt} = 0$  revient donc à supprimer les termes de gauche dans cette dernière équation, ce qui signifie faire l'approximation

suivante :

$$\tilde{\sigma}_{eg,\pm 1} \left( \Delta_c + i\frac{\Gamma}{2} \pm \delta \right) \approx \tilde{\sigma}_{eg,\pm 1} \left( \Delta_c + i\frac{\Gamma}{2} \right).$$

L'approximation adiabatique revient donc à considérer que la cohérence optique a atteint son régime permanent puis à négliger la fréquence du battement  $\delta$  devant le taux de relaxation de la cohérence optique  $\Gamma$ .

### Transmission

Le coefficient d'absorption  $\alpha$  du système pour le champ sonde est défini par (annexe F.1) :

$$\alpha = \frac{2n\omega_0|d|^2}{\varepsilon_0\hbar c} \Im \left( \frac{\tilde{\sigma}_{eg,1}}{\Omega_s} \right),$$

où  $n$  est la densité volumique d'atomes du milieu.

Si on note  $w(t) = n(\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) = w_0 + w_1e^{-i\delta t} + w_{-1}e^{i\delta t}$ , alors l'équation (F.2) nous donne

$$n\tilde{\sigma}_{eg}(t) = \frac{w_0\Omega_c + w_{-1}\Omega_s + (w_1\Omega_c + w_0\Omega_s)e^{-i\delta t} + w_{-1}e^{i\delta t}}{2\left(\Delta_c + i\frac{\Gamma}{2}\right)},$$

et

$$n\tilde{\sigma}_{eg,1} = \frac{w_1\Omega_c + w_0\Omega_s}{2\left(\Delta_c + i\frac{\Gamma}{2}\right)}.$$

Nous pouvons alors réexprimer le coefficient d'absorption

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\omega_0 d^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \Im \left( \frac{w_0}{2\left(\Delta_c + i\frac{\Gamma}{2}\right)} + \frac{w_1}{2\left(\Delta_c + i\frac{\Gamma}{2}\right)} \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \right) \\ &= \frac{2\omega_0 d^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \left[ -\frac{w_0 \frac{\Gamma}{2}}{2\left(\Delta_c^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)} + \frac{1}{2\left(\Delta_c^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)} \Im \left( w_1 \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \left(\Delta_c - i\frac{\Gamma}{2}\right) \right) \right] \\ &= -\sigma w_0 + \frac{1}{2\left(\Delta_c^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)} \left[ \Delta_c \Im \left( w_1 \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \right) - \frac{\Gamma}{2} \operatorname{Re} \left( w_1 \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = -\sigma \left[ w_0 + \operatorname{Re} \left( w_1 \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \right) - \frac{2\Delta_c}{\Gamma} \operatorname{Im} \left( w_1 \frac{\Omega_c}{\Omega_s} \right) \right]}.$$

Il est aussi utile d'exprimer l'intensité sous la forme :

$$I(t) = I_0 + I_1 e^{-i\delta t} + I_{-1} e^{i\delta t},$$

où  $I_0 = \frac{\varepsilon_0 c \hbar^2}{2|d|^2} (|\Omega_c|^2 + |\Omega_s|^2)$ ,  $I_1 = \frac{\varepsilon_0 c \hbar^2}{2|d|^2} \Omega_c^* \Omega_s$  et  $I_{-1} = \frac{\varepsilon_0 c \hbar^2}{2|d|^2} \Omega_c \Omega_s^*$ .

Ceci nous permet de réexprimer le coefficient d'absorption du système pour le champ sonde lorsque nous nous plaçons dans l'approximation  $|\Omega_s| \ll |\Omega_c|$  :

$$\alpha = -\sigma \left[ w_0 + \operatorname{Re} \left( w_1 \frac{I_0}{I_1} \right) - \frac{2\Delta_c}{\Gamma} \operatorname{Im} \left( w_1 \frac{I_0}{I_1} \right) \right].$$

## F.4 Système à deux niveaux : résolution des équations cinétiques

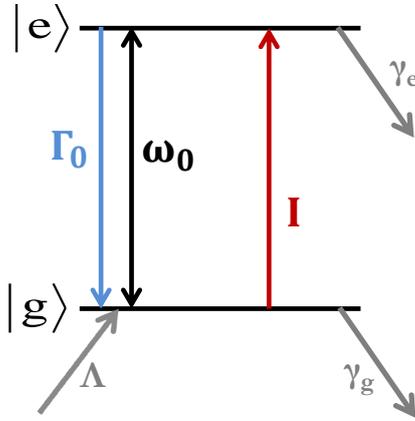


FIGURE F.2 – Système couplé à un champ optique d'intensité  $I$ .

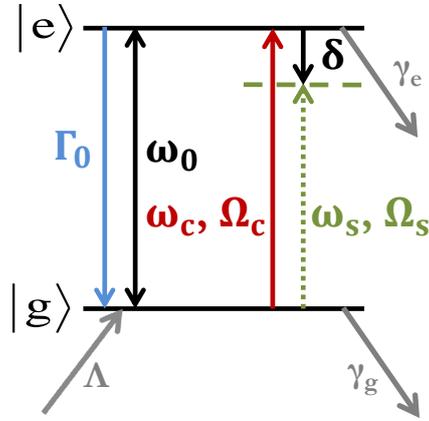


FIGURE F.3 – Système couplé à un champ de couplage de fréquence de Rabi  $\Omega_c$  et de fréquence optique  $\omega_c$  et à un champ de sonde de fréquence de Rabi  $\Omega_s$  et de fréquence optique  $\omega_s$ .

Système à deux niveaux séparés d'une énergie  $\hbar\omega_0$ . Le niveau excité  $|e\rangle$  a une durée de vie  $\Gamma_0$  et un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_e$ , le niveau fondamental  $|g\rangle$  a un taux d'alimentation  $\Lambda$  et un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_g$ .

Le système considéré est celui de la figure F.2.  $\Gamma_0$  est la durée de vie du niveau supérieur

$|e\rangle$ ,  $\Lambda$  le taux d'alimentation du niveau fondamental  $|g\rangle$ , et  $\gamma_e$  et  $\gamma_g$  les taux respectifs de relaxation vers l'extérieur de ces niveaux. Un champ électromagnétique d'intensité  $I$  couple les deux niveaux séparés d'une énergie  $\hbar\omega_0$ . Le système d'équations d'évolution des populations, respectivement notées  $N_e = n\sigma_{ee}$  et  $N_g = n\sigma_{gg}$ , est alors donné par (voir annexe F.3) :

$$\begin{cases} \frac{dN_e}{dt} = -(\Gamma_0 + \gamma_e)N_e + \frac{I\sigma}{\hbar\omega_0}(N_g - N_e) \\ \frac{dN_g}{dt} = n\Lambda + \Gamma_0 N_e - \gamma_g N_g - \frac{I\sigma}{\hbar\omega_0}(N_g - N_e). \end{cases}$$

On considère maintenant comme sur la figure F.3 que le champ électromagnétique est constitué d'un champ de couplage de fréquence optique fixe  $\omega_c$  et de fréquence de Rabi  $\Omega_c$ , et d'un champ de sonde de faible intensité de fréquence variable  $\omega_s$  et de fréquence de Rabi  $\Omega_s$ . En notant  $\delta = \omega_s - \omega_c$ , l'intensité totale peut alors s'exprimer :

$$I(t) = I_0 + I_1 e^{-i\delta t} + I_{-1} e^{i\delta t},$$

où  $I_1, I_{-1} \ll I_0$ .

En effet nous pouvons exprimer (annexe F.3) :

$$\begin{aligned} I_0 &\propto |\Omega_c|^2, \\ I_1 &\propto \Omega_c^* \Omega_s, \\ I_{-1} &\propto \Omega_c \Omega_s^*. \end{aligned}$$

Nous cherchons la réponse linéaire du système en régime permanent, et exprimons ainsi les populations

$$\begin{aligned} N_e(t) &= N_{e0} + N_{e1} e^{-i\delta t} + N_{e-1} e^{i\delta t}, \\ N_g(t) &= N_{g0} + N_{g1} e^{-i\delta t} + N_{g-1} e^{i\delta t}. \end{aligned}$$

Nous noterons également par la suite  $w(t) = N_e(t) - N_g(t) = w_0 + w_1 e^{-i\delta t} + w_{-1} e^{i\delta t}$ .

Le système devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\delta N_{e1}e^{-i\delta t} + i\delta N_{e-1}e^{i\delta t} = -(\Gamma_0 + \gamma_e)(N_{e0} + N_{e1}e^{-i\delta t} + N_{e-1}e^{i\delta t}) \\ \quad + \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_0 + I_1e^{-i\delta t} + I_{-1}e^{i\delta t})(N_{g0} + N_{g1}e^{-i\delta t} + N_{g-1}e^{i\delta t} - N_{e0} - N_{e1}e^{-i\delta t} - N_{e-1}e^{i\delta t}) \\ -i\delta N_{g1}e^{-i\delta t} + i\delta N_{g-1}e^{i\delta t} = n\Lambda + \Gamma_0(N_{e0} + N_{e1}e^{-i\delta t} + N_{e-1}e^{i\delta t}) \\ \quad - \gamma_g(N_{g0} + N_{g1}e^{-i\delta t} + N_{g-1}e^{i\delta t}) \\ \quad - \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_0 + I_1e^{-i\delta t} + I_{-1}e^{i\delta t})(N_{g0} + N_{g1}e^{-i\delta t} + N_{g-1}e^{i\delta t} - N_{e0} - N_{e1}e^{-i\delta t} - N_{e-1}e^{i\delta t}), \end{array} \right.$$

soit en ne conservant que les termes de premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = -(\Gamma_0 + \gamma_e)N_{e0} + \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_0N_{g0} - I_0N_{e0}) & (F.4.a) \\ -i\delta N_{e1} = -(\Gamma_0 + \gamma_e)N_{e1} + \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_1N_{g0} - I_1N_{e0} + I_0N_{g1} - I_0N_{e1}) & (F.4.b) \\ i\delta N_{e-1} = -(\Gamma_0 + \gamma_e)N_{e-1} + \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_{-1}N_{g0} - I_{-1}N_{e0} + I_0N_{g-1} - I_0N_{e-1}) & (F.4.c) \\ 0 = n\Lambda + \Gamma_0N_{e0} - \gamma_gN_{g0} - \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_0N_{g0} - I_0N_{e0}) & (F.4.d) \\ -i\delta N_{g1} = \Gamma_0N_{e1} - \gamma_gN_{g1} - \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_1N_{g0} - I_1N_{e0} + I_0N_{g1} - I_0N_{e1}) & (F.4.e) \\ i\delta N_{g-1} = \Gamma_0N_{e-1} - \gamma_gN_{g-1} - \frac{\sigma}{\hbar\omega_0}(I_{-1}N_{g0} - I_{-1}N_{e0} + I_0N_{g-1} - I_0N_{e-1}). & (F.4.f) \end{array} \right.$$

En sommant (F.4.a) et (F.4.d), nous obtenons

$$\gamma_e N_{e0} + \gamma_g N_{g0} = n\Lambda,$$

ce qui donne en réinjectant dans (F.4.a) et (F.4.d) :

$$N_{e0} \left( \Gamma_0 + \gamma_e + \frac{\gamma_e I_0 \sigma}{\gamma_g \hbar \omega_0} + \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0} \right) = \frac{n\Lambda I_0 \sigma}{\gamma_g \hbar \omega_0},$$

$$N_{g0} \left( \gamma_g \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{\gamma_e} \right) + \frac{\gamma_g I_0 \sigma}{\gamma_e \hbar \omega_0} + \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0} \right) = n\Lambda \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{\gamma_e} + \frac{1}{\gamma_e} \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0} \right),$$

et finalement

$$N_{e0} = n\Lambda \frac{\frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0}}{\gamma_g (\Gamma_0 + \gamma_e) + \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0} (\gamma_e + \gamma_g)},$$

$$N_{g0} = n\Lambda \frac{\Gamma_0 + \gamma_e + \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0}}{\gamma_g (\Gamma_0 + \gamma_e) + \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0} (\gamma_e + \gamma_g)},$$

$$w_0 = -n\Lambda \frac{\Gamma_0 + \gamma_e}{\gamma_g(\Gamma_0 + \gamma_e) + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e + \gamma_g)}. \quad (\text{F.5})$$

En sommant (F.4.b) et (F.4.e), nous obtenons

$$(\gamma_e - i\delta)N_{e1} = -(\gamma_g - i\delta)N_{g1},$$

ce qui donne en réinjectant dans (F.4.b) et (F.4.e) :

$$N_{e1} \left( \Gamma_0 + \gamma_e - i\delta + \frac{\gamma_e - i\delta}{\gamma_g - i\delta} \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} \right) = -w_0 \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0},$$

$$N_{g1} \left( \gamma_g + \Gamma_0 \frac{\gamma_g - i\delta}{\gamma_e - i\delta} - i\delta + \frac{\gamma_g - i\delta}{\gamma_e - i\delta} \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0} \right) = w_0 \frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0},$$

et finalement

$$N_{e1} = -w_0 \frac{\frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_g - i\delta)}{(\gamma_g - i\delta)(\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta) + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta)},$$

$$N_{g1} = w_0 \frac{\frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e - i\delta)}{(\gamma_g - i\delta)(\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta) + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta)},$$

$$w_1 = -w_0 \frac{\frac{I_1\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta)}{(\gamma_g - i\delta)(\Gamma_0 + \gamma_e - i\delta) + \frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}(\gamma_e + \gamma_g - 2i\delta)}. \quad (\text{F.6})$$

La transmission du système est donnée par ce dernier terme  $w_1$  (annexe F.3) et il n'est donc pas nécessaire d'aller plus loin dans la résolution du système.

### CPO usuel

Dans un système à deux niveaux qui vérifie les conditions  $\Lambda = \gamma_g = \gamma_e$ , taux de relaxation que nous notons alors  $\gamma_t$ , nous avons

$$w_0 = -n \frac{\Gamma_0 + \gamma_t}{\Gamma_0 + \gamma_t + 2\frac{I_0\sigma}{\hbar\omega_0}}, \quad (\text{F.7})$$

et

$$w_1 = -w_0 \frac{2 \frac{I_1 \sigma}{\hbar \omega_0}}{\Gamma_0 + \gamma_t + 2 \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0} - i\delta}. \quad (\text{F.8})$$

Nous reconnaissons ici la formule d'une lorentzienne complexe, dont la largeur à mi-hauteur de la partie réelle est donnée par  $2 \left( \Gamma_0 + \gamma_t + 2 \frac{I_0 \sigma}{\hbar \omega_0} \right)$ .

Dans les systèmes réels,  $\gamma_t$  représente en général un taux de transit dont la valeur est négligeable comparé à la durée de vie du niveau supérieur  $\Gamma_0$ . Ainsi, le profil de transmission du système sera constitué d'une fenêtre de transparence dont la largeur est limitée à faible puissance de pompe par la durée de vie du niveau du haut  $\Gamma_0$ . C'est le cas du phénomène de CPO usuel.



# Annexe G

## Systèmes à trois niveaux en $\Lambda$

Cette annexe regroupe tous les calculs utilisés dans ce manuscrit concernant les systèmes à trois niveaux en  $\Lambda$ . Elle fait également le lien entre les différents modèles et les différentes résolutions effectuées.

### G.1 Equations de Bloch optiques

Soit le système à trois niveaux en  $\Lambda$  défini par les figures G.1 et G.2. Comme nous sommes en présence de plusieurs transitions couplées chacune par plusieurs champs, il n'est plus possible de traiter le problème de façon scalaire. Dans le cas de sous-niveaux  $|-1\rangle$  et  $|1\rangle$  Zeeman et en prenant l'axe de quantification parallèle à l'axe de propagation, il faut une polarisation  $\sigma_+$  pour exciter la transition  $|-1\rangle \rightarrow |e\rangle$  et une polarisation  $\sigma_-$  pour exciter la transition  $|1\rangle \rightarrow |e\rangle$ .

Considérons que le système est excité par deux champs de couplage  $\vec{E}_c$  et de sonde  $\vec{E}_s$ , tels que :

$$\begin{aligned}\vec{E}_c &= \sqrt{2}|E_{c-1}|[\cos(\omega_c t + \phi_{c-1})\vec{e}_x + \sin(\omega_c t + \phi_{c-1})\vec{e}_y] \\ &\quad + \sqrt{2}|E_{c1}|[\cos(\omega_c t + \phi_{c1})\vec{e}_x - \sin(\omega_c t + \phi_{c1})\vec{e}_y], \\ &= E_{c-1}e^{-i\omega_c t}\vec{\epsilon}_+ + E_{c1}e^{-i\omega_c t}\vec{\epsilon}_- + cc, \\ \vec{E}_s &= \sqrt{2}|E_{s-1}|[\cos(\omega_s t + \phi_{s-1})\vec{e}_x + \sin(\omega_s t + \phi_{s-1})\vec{e}_y] \\ &\quad + \sqrt{2}|E_{s1}|[\cos(\omega_s t + \phi_{s1})\vec{e}_x - \sin(\omega_s t + \phi_{s1})\vec{e}_y], \\ &= E_{s-1}e^{-i\omega_s t}\vec{\epsilon}_+ + E_{s1}e^{-i\omega_s t}\vec{\epsilon}_- + cc,\end{aligned}$$

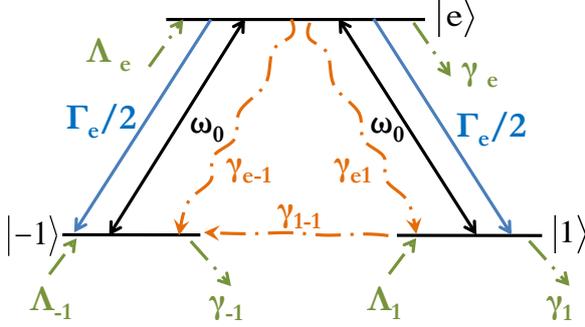


FIGURE G.1 – Système à trois niveaux en  $\Lambda$  : taux de relaxations. Le niveau excité  $|e\rangle$  a un taux de relaxation  $\Gamma_e/2$  vers les deux sous-niveaux  $|-1\rangle$  et  $|1\rangle$ , un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_e$  et un taux d'alimentation  $\Lambda_e$ . Les niveaux fondamentaux  $|\pm 1\rangle$  ont un taux d'alimentation  $\Lambda_{\pm 1}$  et un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_{\pm 1}$ . Les cohérences optiques ont des taux de relaxation  $\gamma_{e,\pm 1}$  et la cohérence Raman entre niveaux fondamentaux  $\gamma_{1,-1}$ . La différence d'énergie entre le niveaux du haut et les niveaux du bas est  $\hbar\omega_0$ .

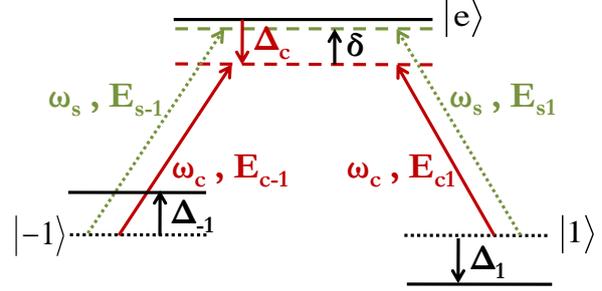


FIGURE G.2 – Système à trois niveaux en  $\Lambda$  : excitations. Un champ de sonde (couplage) de pulsation optique  $\omega_s$  ( $\omega_c$ ) couple la transition  $|-1\rangle \rightarrow |e\rangle$  avec une amplitude complexe  $E_{s-1}$  ( $E_{c-1}$ ) et la transition  $|1\rangle \rightarrow |e\rangle$  avec une amplitude complexe  $E_{s1}$  ( $E_{c1}$ ). On note  $\Delta_{-1}$  la levée de dégénérescence du niveau  $|-1\rangle$  et  $\Delta_1$  la levée de dégénérescence du niveau  $|1\rangle$ . On note  $\Delta_c = \omega_c - \omega_0$  et  $\delta = \omega_s - \omega_c$  la différence de pulsation entre les deux champs.

où on a introduit les vecteurs unitaires complexes des polarisations  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  :

$$\vec{\varepsilon}_+ = \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{\varepsilon}_- = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}.$$

Si on note l'opérateur du dipôle atomique (annexe C.2)

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{e1} \\ d_{e-1}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_+ + \begin{pmatrix} 0 & d_{e-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{e1}^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_-,$$

on peut définir les pulsations de Rabi complexes associées aux amplitudes des champs<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}\Omega_{c-1} &= \frac{d_{e-1}E_{c-1}}{\hbar}, \\ \Omega_{c1} &= \frac{d_{e1}E_{c1}}{\hbar}, \\ \Omega_{s-1} &= \frac{d_{e-1}E_{s-1}}{\hbar}, \\ \Omega_{s1} &= \frac{d_{e1}E_{s1}}{\hbar}.\end{aligned}$$

L'hamiltonien pour ce système est alors donné dans la base ( $|e\rangle, |-1\rangle, |1\rangle$ ), en prenant la référence des énergies pour l'état excité  $|e\rangle$  et dans l'approximation quasi-résonante (annexe C.2) :

$$\widehat{H} = -\hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{c-1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s-1}e^{-i\omega st} & \Omega_{c1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s1}e^{-i\omega st} \\ \Omega_{c-1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s-1}^*e^{i\omega st} & \omega_0 - \Delta_{-1} & 0 \\ \Omega_{c1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s1}^*e^{i\omega st} & 0 & \omega_0 - \Delta_1 \end{pmatrix}.$$

Et avec le formalisme de la matrice densité, notée  $\widehat{\sigma}$ , le système satisfait à l'équation d'évolution de Liouville-Von Neumann :

$$\frac{d\widehat{\sigma}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\widehat{H}, \widehat{\sigma}] + \left. \frac{d\widehat{\sigma}}{dt} \right|_{relax},$$

où  $\left. \frac{d\widehat{\sigma}}{dt} \right|_{relax}$  représente les termes de relaxation donnés par

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\sigma_{ee}}{dt} \right|_{relax} &= \Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e)\sigma_{ee}, \\ \left. \frac{d\sigma_{-1-1}}{dt} \right|_{relax} &= \Lambda_{-1} + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} - \gamma_{-1}\sigma_{-1-1}, \\ \left. \frac{d\sigma_{11}}{dt} \right|_{relax} &= \Lambda_1 + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} - \gamma_1\sigma_{11},\end{aligned}$$

---

1. Attention ici nous avons décidé de définir les pulsations de Rabi par rapport aux amplitudes complexes : elles sont la moitié des pulsations de Rabi définies habituellement pour les amplitudes réelles.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_{e-1}}{dt} \right|_{relax} &= -\gamma_{e-1}\sigma_{e-1}, \\ \left. \frac{d\sigma_{e1}}{dt} \right|_{relax} &= -\gamma_{e1}\sigma_{e1}, \\ \left. \frac{d\sigma_{1-1}}{dt} \right|_{relax} &= -\gamma_{1-1}\sigma_{1-1}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant

$$[\widehat{H}, \widehat{\sigma}] = \widehat{H}\widehat{\sigma} - \widehat{\sigma}\widehat{H} =$$

$$\begin{aligned} -\hbar & \begin{pmatrix} \sigma_{-1e}[\Omega_{c-1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s-1}e^{-i\omega st}] & \sigma_{-1-1}[\Omega_{c-1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s-1}e^{-i\omega st}] & \sigma_{-11}[\Omega_{c-1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s-1}e^{-i\omega st}] \\ +\sigma_{1e}[\Omega_{c1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s1}e^{-i\omega st}] & +\sigma_{1-1}[\Omega_{c1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s1}e^{-i\omega st}] & \sigma_{11}[\Omega_{c1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s1}e^{-i\omega st}] \\ \sigma_{ee}[\Omega_{c-1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s-1}^*e^{i\omega st}] & \sigma_{e-1}[\Omega_{c-1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s-1}^*e^{i\omega st}] & \sigma_{e1}[\Omega_{c-1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s-1}^*e^{i\omega st}] \\ +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{-1e} & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{-1-1} & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{-11} \\ \sigma_{ee}[\Omega_{c1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s1}^*e^{i\omega st}] & \sigma_{e-1}[\Omega_{c1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s1}^*e^{i\omega st}] & \sigma_{e1}[\Omega_{c1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s1}^*e^{i\omega st}] \\ +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{1e} & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{1-1} & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{11} \end{pmatrix} \\ +\hbar & \begin{pmatrix} \sigma_{e-1}[\Omega_{c-1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s-1}^*e^{i\omega st}] & \sigma_{ee}[\Omega_{c-1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s-1}e^{-i\omega st}] & \sigma_{ee}[\Omega_{c1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s1}e^{-i\omega st}] \\ +\sigma_{e1}[\Omega_{c1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s1}^*e^{i\omega st}] & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{e-1} & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{e1} \\ \sigma_{-1-1}[\Omega_{c-1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s-1}^*e^{i\omega st}] & \sigma_{-1e}[\Omega_{c-1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s-1}e^{-i\omega st}] & \sigma_{-1e}[\Omega_{c1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s1}e^{-i\omega st}] \\ +\sigma_{-11}[\Omega_{c1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s1}^*e^{i\omega st}] & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{-1-1} & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{-11} \\ \sigma_{1-1}[\Omega_{c-1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s-1}^*e^{i\omega st}] & \sigma_{1e}[\Omega_{c-1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s-1}e^{-i\omega st}] & \sigma_{1e}[\Omega_{c1}e^{-i\omega ct} + \Omega_{s1}e^{-i\omega st}] \\ +\sigma_{11}[\Omega_{c1}^*e^{i\omega ct} + \Omega_{s1}^*e^{i\omega st}] & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{1-1} & +(\omega_0 - \Delta_1)\sigma_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous nous plaçons maintenant dans le référentiel tournant à  $\omega_c$  en notant

$$\begin{aligned} \sigma_{e1} &= \tilde{\sigma}_{e1}e^{-i\omega ct}, \\ \sigma_{e-1} &= \tilde{\sigma}_{e-1}e^{-i\omega ct}, \\ \sigma_{-11} &= \tilde{\sigma}_{-11}. \end{aligned}$$

On note  $\delta = \omega_s - \omega_c$  la différence de pulsation entre les deux lasers et  $\Delta_c = \omega_c - \omega_0$  le désaccord optique pour le champ de couplage. Le système d'équations d'évolution du système est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = -i \left[ \tilde{\sigma}_{e-1} \left( \Omega_{c-1}^* + \Omega_{s-1}^* e^{i\delta t} \right) - \tilde{\sigma}_{-1e} \left( \Omega_{c-1} + \Omega_{s-1} e^{-i\delta t} \right) \right] \\
 \quad - i \left[ \tilde{\sigma}_{e1} \left( \Omega_{c1}^* + \Omega_{s1}^* e^{i\delta t} \right) - \tilde{\sigma}_{1e} \left( \Omega_{c1} + \Omega_{s1} e^{-i\delta t} \right) \right] + \Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e) \sigma_{ee} \\
 \\
 \frac{d\sigma_{-1-1}}{dt} = i \left[ \tilde{\sigma}_{e-1} \left( \Omega_{c-1}^* + \Omega_{s-1}^* e^{i\delta t} \right) - \tilde{\sigma}_{-1e} \left( \Omega_{c-1} + \Omega_{s-1} e^{-i\delta t} \right) \right] + \Lambda_{-1} + \frac{\Gamma_e}{2} \sigma_{ee} - \gamma_{-1} \sigma_{-1-1} \\
 \\
 \frac{d\sigma_{11}}{dt} = i \left[ \tilde{\sigma}_{e1} \left( \Omega_{c1}^* + \Omega_{s1}^* e^{i\delta t} \right) - \tilde{\sigma}_{1e} \left( \Omega_{c1} + \Omega_{s1} e^{-i\delta t} \right) \right] + \Lambda_1 + \frac{\Gamma_e}{2} \sigma_{ee} - \gamma_1 \sigma_{11} \\
 \\
 \frac{d\tilde{\sigma}_{e-1}}{dt} = -i(\sigma_{ee} - \sigma_{-1-1}) \left( \Omega_{c-1} + \Omega_{s-1} e^{-i\delta t} \right) \\
 \quad + i\tilde{\sigma}_{-1-1} \left( \Omega_{c1} + \Omega_{s1} e^{-i\delta t} \right) + \tilde{\sigma}_{e-1} [i(\Delta_c + \Delta_{-1}) - \gamma_{e-1}] \\
 \\
 \frac{d\tilde{\sigma}_{e1}}{dt} = -i(\sigma_{ee} - \sigma_{11}) \left( \Omega_{c1} + \Omega_{s1} e^{-i\delta t} \right) \\
 \quad + i\tilde{\sigma}_{-11} \left( \Omega_{c-1} + \Omega_{s-1} e^{-i\delta t} \right) + \tilde{\sigma}_{e1} [i(\Delta_c + \Delta_1) - \gamma_{e1}] \\
 \\
 \frac{d\tilde{\sigma}_{-11}}{dt} = i\tilde{\sigma}_{e1} \left( \Omega_{c-1}^* + \Omega_{s-1}^* e^{i\delta t} \right) \\
 \quad - i\tilde{\sigma}_{-1e} \left( \Omega_{c1} + \Omega_{s1} e^{-i\delta t} \right) + \tilde{\sigma}_{-11} [i(\Delta_1 - \Delta_{-1}) - \gamma_{-11}].
 \end{array} \right. \quad (\text{G.1})$$

### Susceptibilité linéaire

Pour trouver la susceptibilité linéaire en champ sonde, exprimons la polarisation du milieu donnée par

$$\vec{P} = n \langle \widehat{\vec{D}} \rangle = n \text{Tr}(\hat{\sigma} \widehat{\vec{D}}),$$

où  $n$  est la densité volumique d'atomes de notre système et  $\langle \widehat{\vec{D}} \rangle$  la valeur moyenne du dipôle atomique.

Calculons donc

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D} \rangle &= Tr \left\{ \left( \begin{array}{ccc} \sigma_{ee} & \sigma_{e-1} & \sigma_{e1} \\ \sigma_{-1e} & \sigma_{-1-1} & \sigma_{-11} \\ \sigma_{1e} & \sigma_{1-1} & \sigma_{11} \end{array} \right) \left[ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & d_{e1} \\ d_{e-1}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \vec{\varepsilon}_+ + \left( \begin{array}{ccc} 0 & d_{e-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{e1}^* & 0 & 0 \end{array} \right) \vec{\varepsilon}_- \right] \right\} \\ &= Tr \left[ \left( \begin{array}{ccc} \sigma_{e-1}d_{e-1}^* & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \sigma_{1e}d_{e1} \end{array} \right) \vec{\varepsilon}_+ + \left( \begin{array}{ccc} \sigma_{e1}d_{e1}^* & \star & \star \\ \star & \sigma_{-1e}d_{e-1} & \star \\ \star & \star & 0 \end{array} \right) \vec{\varepsilon}_- \right], \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\vec{P} = n(\sigma_{e-1}d_{e-1}^*\vec{\varepsilon}_+ + \sigma_{e1}d_{e1}^*\vec{\varepsilon}_- + cc).$$

Nous cherchons la réponse linéaire en champ sonde du système en considérant que les cohérences  $\tilde{\sigma}_{e-1}$  et  $\tilde{\sigma}_{e1}$  dans le référentiel tournant peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{e-1}(t) &= \tilde{\sigma}_{e-1,0} + \tilde{\sigma}_{e-1,1}e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{e-1,-1}e^{+i\delta t}, \\ \tilde{\sigma}_{e1}(t) &= \tilde{\sigma}_{e1,0} + \tilde{\sigma}_{e1,1}e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{e1,-1}e^{+i\delta t}, \end{aligned}$$

soit pour les cohérences

$$\begin{aligned} \sigma_{e-1}(t) &= \tilde{\sigma}_{e-1,0}e^{-i\omega_c t} + \tilde{\sigma}_{e-1,1}e^{-i\omega_s t} + \tilde{\sigma}_{e-1,-1}e^{-i(2\omega_c - \omega_s)t}, \\ \sigma_{e1}(t) &= \tilde{\sigma}_{e1,0}e^{-i\omega_c t} + \tilde{\sigma}_{e1,1}e^{-i\omega_s t} + \tilde{\sigma}_{e1,-1}e^{-i(2\omega_c - \omega_s)t}. \end{aligned}$$

Nous cherchons à partir de maintenant la réponse du système à la fréquence du champ sonde et sur le même vecteur initial. La susceptibilité linéaire en fonction du champ sonde se définit à partir de la polarisation (annexe C.1) :

$$\vec{P}_{\omega_s} = \varepsilon_0 \chi_{\omega_s} E_s e^{-i\omega_s t} \vec{u}_s + cc,$$

où

$$\vec{u}_s = \frac{E_{s-1}}{E_s} \vec{\varepsilon}_+ + \frac{E_{s1}}{E_s} \vec{\varepsilon}_-,$$

avec  $E_s$  l'amplitude du champ sonde totale définie par  $E_s = \sqrt{|E_{s-1}|^2 + |E_{s1}|^2}$ . La polari-

sation scalaire à la fréquence du champ sonde est alors :

$$P_{\omega_s} = \varepsilon_0 \chi_{\omega_s} E_s e^{-i\omega_s t} = n e^{-i\omega_s t} \left( \frac{E_{s-1}^*}{E_s} \tilde{\sigma}_{e-1,1} d_{e-1}^* + \frac{E_{s1}^*}{E_s} \tilde{\sigma}_{e1,1} d_{e1}^* \right).$$

La susceptibilité linéaire du système pour le champ sonde est finalement donnée par (annexe C.1) :

$$\boxed{\chi_{\omega_s} = \frac{n}{\varepsilon_0 \hbar} \left( \frac{|d_{e-1}|^2 |E_{s-1}/E_s|^2 \tilde{\sigma}_{e-1,1}}{\Omega_{s-1}} + \frac{|d_{e1}|^2 |E_{s1}/E_s|^2 \tilde{\sigma}_{e1,1}}{\Omega_{s1}} \right)}. \quad (\text{G.2})$$

### Transmission

Le coefficient d'absorption sera donc donné pour le champ sonde par (Eq. (B.5))

$$\alpha = n \frac{2\omega_0}{\varepsilon_0 \hbar c} \text{Im} \left[ \frac{|d_{e-1}|^2 |E_{s-1}/E_s|^2 \tilde{\sigma}_{e-1,1}}{\Omega_{s-1}} + \frac{|d_{e1}|^2 |E_{s1}/E_s|^2 \tilde{\sigma}_{e1,1}}{\Omega_{s1}} \right].$$

Dans notre système expérimental, nous pouvons considérer que  $|d_{e-1}| = |d_{e1}| = d$  et nous pouvons réécrire :

$$\boxed{\alpha = n \frac{2\omega_0 d^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \text{Im} \left[ \frac{\Omega_{s-1}^* \tilde{\sigma}_{e-1,1}}{|\Omega_s|^2} + \frac{\Omega_{s1}^* \tilde{\sigma}_{e1,1}}{|\Omega_s|^2} \right]},$$

où on a alors défini la pulsation de Rabi pour le champ sonde total :

$$\boxed{\Omega_s = \frac{dE_s}{\hbar} = \sqrt{|\Omega_{s-1}|^2 + |\Omega_{s1}|^2}}.$$

## G.2 Méthode de Floquet

A l'aide de la méthode de Floquet (annexe E), nous résolvons le système d'équations (G.1) du système atomique des figures G.1 et G.2 en posant

$$R = (\sigma_{ee}, \sigma_{-1-1}, \sigma_{11}, \tilde{\sigma}_{e-1}, \tilde{\sigma}_{-1e}, \tilde{\sigma}_{e1}, \tilde{\sigma}_{1e}, \tilde{\sigma}_{-11}, \tilde{\sigma}_{1-1})^T$$

et  $\dot{R} = BR - S$ . Les matrices S et B sont alors définies par :

$$S = (-\Lambda_{e1}, -\Lambda_{-1}, -\Lambda_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +i\Omega_{s-1} & 0 & +i\Omega_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{s1} & 0 & 0 \\ -i\Omega_{s-1} & +i\Omega_{s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +i\Omega_{s1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\Omega_{s1} & 0 & +i\Omega_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 & +i\Omega_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{s-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\delta t}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\Gamma_e - \gamma_e & 0 & 0 & -i\Omega_{c-1}^* & +i\Omega_{c-1} \\ \frac{\Gamma_e}{2} & -\gamma_{-1} & 0 & +i\Omega_{c-1}^* & -i\Omega_{c-1} \\ \frac{\Gamma_e}{2} & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -i\Omega_{c-1} & +i\Omega_{c-1} & 0 & i(\Delta_c + \Delta_{-1}) - \gamma_{e-1} & 0 \\ +i\Omega_{c-1}^* & -i\Omega_{c-1}^* & 0 & 0 & -i(\Delta_c + \Delta_{-1}) - \gamma_{e-1} \\ -i\Omega_{c1} & 0 & +i\Omega_{c1} & 0 & 0 \\ i\Omega_{c1}^* & 0 & -i\Omega_{c1}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{c1} \\ 0 & 0 & 0 & i\Omega_{c1}^* & 0 \\ -i\Omega_{c1}^* & +i\Omega_{c1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +i\Omega_{c1}^* & -i\Omega_{c1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +i\Omega_{c1} \\ 0 & 0 & -i\Omega_{c1}^* & 0 & 0 \\ i(\Delta_c + \Delta_1) - \gamma_{e1} & 0 & +i\Omega_{c-1} & 0 & 0 \\ 0 & -i(\Delta_c + \Delta_1) - \gamma_{e1} & 0 & 0 & -i\Omega_{c-1}^* \\ i\Omega_{c-1}^* & 0 & i(\Delta_1 - \Delta_{-1}) - \gamma_{-11} & 0 & 0 \\ 0 & -i\Omega_{c-1} & 0 & 0 & -i(\Delta_1 - \Delta_{-1}) - \gamma_{-11} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{s-1}^* & 0 & -i\Omega_{s1}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i\Omega_{s-1}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +i\Omega_{s1}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +i\Omega_{s-1}^* & -i\Omega_{s-1}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{s1}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\Omega_{s1}^* & 0 & -i\Omega_{s1}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_{s-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\Omega_{s-1}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\Omega_{s1}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{+i\delta t}.$$

Nous recherchons ensuite la réponse linéaire du système en utilisant le développement de Floquet suivant :

$$\begin{aligned} R(t) &= R_1 e^{-i\delta t} + R_0 + R_{-1} e^{i\delta t}, \\ B(t) &= B_1 e^{-i\delta t} + B_0 + B_{-1} e^{i\delta t}. \end{aligned}$$

La réponse du système étant donnée par  $\tilde{\sigma}_{e-1,1}$  et  $\tilde{\sigma}_{e1,1}$ , ce sont le quatrième et le sixième termes de  $R_1$ , notés  $R_1[4]$  et  $R_1[6]$ , qui donneront la réponse du système dans les calculs informatiques réalisés sous Mathematica par (Eq. (G.2)) :

$$\chi_{\omega_s} = \frac{n|d|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \left( \frac{\Omega_{s-1}^* R_1[4]}{|\Omega_s|^2} + \frac{\Omega_{s1}^* R_1[6]}{|\Omega_s|^2} \right).$$

### G.3 Lien entre équations de Bloch optiques et équations cinétiques

Considérons le système des figures G.1 et G.2 ainsi que les équations d'évolution des termes de la matrice densité associées (G.1). Le modèle des équations cinétiques consiste à considérer le système dans l'approximation adiabatique, c'est-à-dire que les cohérences  $\tilde{\sigma}_{e-1}$  et  $\tilde{\sigma}_{e1}$  répondent assez vite pour supposer que  $\frac{d\tilde{\sigma}_{e-1}}{dt} = \frac{d\tilde{\sigma}_{e1}}{dt} = 0$  à tout instant. La cohérence  $\tilde{\sigma}_{-11}$  est également supposée nulle. Ceci se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{e-1} &= \frac{\sigma_{ee} - \sigma_{-1-1}}{\Delta_c + \Delta_{-1} + i\gamma_{e-1}} \left( \Omega_{c-1} + \Omega_{s-1} e^{-i\delta t} \right), \\ \tilde{\sigma}_{e1} &= \frac{\sigma_{ee} - \sigma_{11}}{\Delta_c + \Delta_1 + i\gamma_{e1}} \left( \Omega_{c1} + \Omega_{s1} e^{-i\delta t} \right). \end{aligned} \tag{G.3}$$

On dit alors dans le cadre de cette approximation que la cohérence optique suit adiabatiquement les populations.

Le système se réduit alors aux équations d'évolution des populations seules :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = \Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e)\sigma_{ee} + (\sigma_{-1-1} - \sigma_{ee})|\Omega_{c-1} + \Omega_{s-1}e^{-i\delta t}|^2 \frac{\gamma_{e-1}}{(\Delta_c + \Delta_1)^2 + \gamma_{e-1}^2} \\ \quad + (\sigma_{11} - \sigma_{ee})|\Omega_{c1} + \Omega_{s1}e^{-i\delta t}|^2 \frac{\gamma_{e1}}{(\Delta_c + \Delta_1)^2 + \gamma_{e1}^2} \\ \frac{d\sigma_{-1-1}}{dt} = \Lambda_{-1} + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} - \gamma_{-1}\sigma_{-1-1} - (\sigma_{-1-1} - \sigma_{ee})|\Omega_{c-1} + \Omega_{s-1}e^{-i\delta t}|^2 \frac{\gamma_{e-1}}{(\Delta_c + \Delta_1)^2 + \gamma_{e-1}^2} \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} = \Lambda_1 + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} - \gamma_1\sigma_{11} - (\sigma_{11} - \sigma_{ee})|\Omega_{c1} + \Omega_{s1}e^{-i\delta t}|^2 \frac{\gamma_{e1}}{(\Delta_c + \Delta_1)^2 + \gamma_{e1}^2}. \end{array} \right.$$

Si l'on introduit maintenant les intensités

$$\boxed{\begin{array}{l} I^-(t) = \varepsilon_0 c \frac{\hbar^2 |\Omega_{c-1} + \Omega_{s-1}e^{-i\delta t}|^2}{|d_{e-1}|^2}, \\ I^+(t) = \varepsilon_0 c \frac{\hbar^2 |\Omega_{c1} + \Omega_{s1}e^{-i\delta t}|^2}{|d_{e1}|^2}, \end{array}}$$

où  $d_{e-1}$  et  $d_{e1}$  sont les éléments de matrice dipolaire électrique associé à chacune des transitions, nous pouvons réexprimer le système :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_{ee}}{dt} = \Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e)\sigma_{ee} + \frac{I^-(t)\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(\sigma_{-1-1} - \sigma_{ee}) + \frac{I^+(t)\sigma_1}{\hbar\omega_0}(\sigma_{11} - \sigma_{ee}) \\ \frac{d\sigma_{-1-1}}{dt} = \Lambda_{-1} + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} - \gamma_{-1}\sigma_{-1-1} - \frac{I^-(t)\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(\sigma_{-1-1} - \sigma_{ee}) \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} = \Lambda_1 + \frac{\Gamma_e}{2}\sigma_{ee} - \gamma_1\sigma_{11} - \frac{I^+(t)\sigma_1}{\hbar\omega_0}(\sigma_{11} - \sigma_{ee}). \end{array} \right.}$$

où  $\sigma_{-1}$  et  $\sigma_1$  sont les sections efficaces définies par  $\sigma_{-1} = \frac{|d_{e-1}|^2\omega_0}{\varepsilon_0\hbar c} \frac{\gamma_{e-1}}{(\Delta_c + \Delta_1)^2 + \gamma_{e-1}^2}$  et

$$\sigma_1 = \frac{|d_{e1}|^2\omega_0}{\varepsilon_0\hbar c} \frac{\gamma_{e1}}{(\Delta_c + \Delta_1)^2 + \gamma_{e1}^2}.$$

**Transmission**

Le coefficient d'absorption  $\alpha$  du système pour le champ sonde est défini par (p.205) :

$$\alpha = n \frac{2\omega_0}{\varepsilon_0 \hbar c} \Im \left( \frac{|d_{e-1}|^2 |E_{s-1}/E_s|^2 \tilde{\sigma}_{e-1,1}}{\Omega_{s-1}} + \frac{|d_{e1}|^2 |E_{s1}/E_s|^2 \tilde{\sigma}_{e1,1}}{\Omega_{s1}} \right).$$

où  $n$  est la densité volumique d'atomes du milieu.

Si on note  $w^-(t) = n(\sigma_{ee} - \sigma_{-1,-1}) = w_0^- + w_1^- e^{-i\delta t} + w_{-1}^- e^{i\delta t}$  et  $w^+(t) = n(\sigma_{ee} - \sigma_{11}) = w_0^+ + w_1^+ e^{-i\delta t} + w_{-1}^+ e^{i\delta t}$ , alors les équations (G.3) nous donnent par exemple

$$n\tilde{\sigma}_{e-1}(t) = \frac{w_0^- \Omega_{c-1} + w_{-1}^- \Omega_{s-1} + (w_1^- \Omega_{c-1} + w_0^- \Omega_{s-1})e^{-i\delta t} + w_{-1}^- e^{i\delta t}}{(\Delta_c + \Delta_{-1} + i\gamma_{e-1})},$$

et finalement

$$\begin{aligned} n\tilde{\sigma}_{e-1,1} &= \frac{w_1^- \Omega_{c-1} + w_0^- \Omega_{s-1}}{(\Delta_c + \Delta_{-1} + i\gamma_{e-1})}, \\ n\tilde{\sigma}_{e1,1} &= \frac{w_1^+ \Omega_{c1} + w_0^+ \Omega_{s1}}{(\Delta_c + \Delta_1 + i\gamma_{e1})}. \end{aligned}$$

Supposons pour la suite  $d_{e-1} = d_{e1} = d$ ,  $\gamma_{e-1} = \gamma_{e1} = \gamma$  et  $\Delta_{-1} = -\Delta_1 = \Delta$  et  $\Delta_c = 0$ . Notons  $\alpha = |E_{s-1}/E_s|^2$  et  $\beta = |E_{s1}/E_s|^2$ . Nous pouvons alors réexprimer le coefficient d'absorption

$$\alpha = \frac{2\omega_0 d^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \Im \left( \frac{\alpha w_0^-}{(\Delta + i\gamma)} + \frac{\beta w_0^+}{(-\Delta + i\gamma)} + \frac{\alpha w_1^-}{(\Delta + i\gamma)} \frac{\Omega_{c-1}}{\Omega_{s-1}} + \frac{\beta w_1^+}{(-\Delta + i\gamma)} \frac{\Omega_{c1}}{\Omega_{s1}} \right),$$

$$\alpha = -\sigma \left[ \alpha w_0^- + \beta w_0^+ + \operatorname{Re} \left( \alpha w_1^- \frac{\Omega_{c-1}}{\Omega_{s-1}} + \beta w_1^+ \frac{\Omega_{c1}}{\Omega_{s1}} \right) - \frac{\Delta}{\gamma} \operatorname{Im} \left( \alpha w_1^- \frac{\Omega_{c-1}}{\Omega_{s-1}} - \beta w_1^+ \frac{\Omega_{c1}}{\Omega_{s1}} \right) \right].$$

Il est aussi utile d'exprimer les intensités sous la forme :

$$\begin{aligned} I^-(t) &= I_0^- + I_1^- e^{-i\delta t} + I_{-1}^- e^{i\delta t}, \\ I^+(t) &= I_0^+ + I_1^+ e^{-i\delta t} + I_{-1}^+ e^{i\delta t}, \end{aligned}$$

$$\text{où } I_0^\pm = \frac{\varepsilon_0 c \hbar^2}{d^2} (|\Omega_{c\pm 1}|^2 + |\Omega_{s\pm 1}|^2), \quad I_1^\pm = \frac{\varepsilon_0 c \hbar^2}{d^2} \Omega_{c\pm 1}^* \Omega_{s\pm 1} \quad \text{et} \quad I_{-1}^\pm = \frac{\varepsilon_0 c \hbar^2}{d^2} \Omega_{c\pm 1} \Omega_{s\pm 1}^*.$$

Ceci nous permet de réexprimer le coefficient d'absorption du système pour le champ

sonde lorsque nous nous plaçons dans l'approximation  $|\Omega_{s\pm 1}| \ll |\Omega_{c\pm 1}|$  :

$$\alpha = -\sigma \left[ \alpha w_0^- + \beta w_0^+ + \operatorname{Re} \left( \alpha w_1^- \frac{I_0^-}{I_1^-} + \beta w_1^+ \frac{I_0^+}{I_1^+} \right) - \frac{\Delta}{\gamma} \operatorname{Im} \left( \alpha w_1^- \frac{I_0^-}{I_1^-} - \beta w_1^+ \frac{I_0^+}{I_1^+} \right) \right].$$

## G.4 Résolution des équations cinétiques

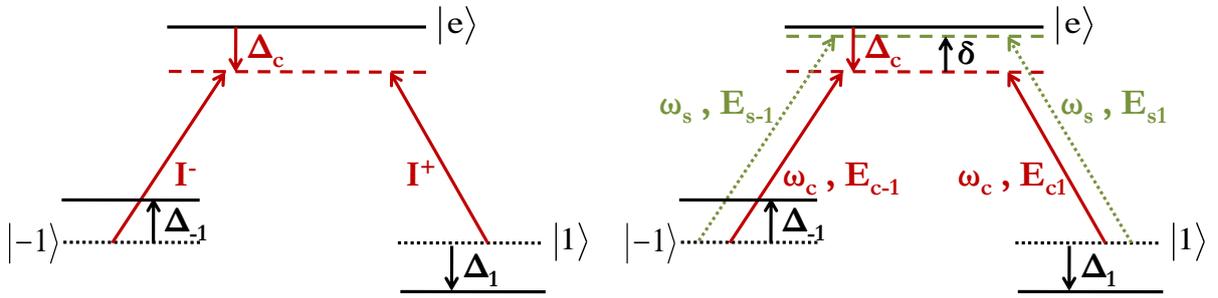


FIGURE G.3 – Système en  $\Lambda$  couplé à deux champs optiques d'intensité  $I^-$  et  $I^+$ .

FIGURE G.4 – Système en  $\Lambda$  couplé à un champ de couplage de pulsation optique  $\omega_c$  et à un champ de sonde de pulsation optique  $\omega_s$  tels qu'ils excitent chacune des transitions avec une amplitude complexe  $E_{c,s,\pm 1}$ .

On considère le même système atomique dont chacune des transitions est excitée par une intensité  $I^\pm$  (Fig. G.3). Les équations d'évolution des populations, notées ici  $N_e$ ,  $N_{-1}$  et  $N_1$ , sont alors données par :

$$\begin{cases} \frac{dN_e}{dt} = n\Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e)N_e + \frac{I^- \sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(N_{-1} - N_e) + \frac{I^+ \sigma_1}{\hbar\omega_0}(N_1 - N_e), \\ \frac{dN_{-1}}{dt} = n\Lambda_{-1} + \frac{\Gamma_e}{2}N_e - \gamma_{-1}N_{-1} - \frac{I^- \sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(N_{-1} - N_e), \\ \frac{dN_1}{dt} = n\Lambda_1 + \frac{\Gamma_e}{2}N_e - \gamma_1N_1 - \frac{I^+ \sigma_1}{\hbar\omega_0}(N_1 - N_e). \end{cases}$$

On considère maintenant comme sur la figure G.4 que le champ électromagnétique sur chacune des transitions  $\pm 1$  est constitué d'un champ de couplage de pulsation optique fixe  $\omega_c$  et de pulsation de Rabi  $\Omega_{c,\pm 1}$ , et d'un champ de sonde de pulsation variable  $\omega_s$ ,

et de pulsation de Rabi  $\Omega_{s\pm 1}$  de faible intensité ( $\Omega_{s\pm 1} \ll \Omega_{c\pm 1}$ ). En notant  $\delta = \omega_s - \omega_c$ , l'intensité sur chacune des transitions peut s'exprimer :

$$\begin{aligned} I^-(t) &= I_0^- + I_1^- e^{-i\delta t} + I_{-1}^- e^{i\delta t}, \\ I^+(t) &= I_0^+ + I_1^+ e^{-i\delta t} + I_{-1}^+ e^{i\delta t}, \end{aligned}$$

où  $I_1^\pm, I_{-1}^\pm \ll I_0^\pm$ .

Nous cherchons la réponse linéaire du système en régime permanent, et exprimons ainsi les populations en régime permanent :

$$\begin{aligned} N_e(t) &= N_{e0} + N_{e1} e^{-i\delta t} + N_{e-1} e^{i\delta t}, \\ N_{-1}(t) &= N_{-10} + N_{-11} e^{-i\delta t} + N_{-1-1} e^{i\delta t}, \\ N_1(t) &= N_{10} + N_{11} e^{-i\delta t} + N_{1-1} e^{i\delta t}. \end{aligned}$$

Nous noterons également par la suite  $w^\pm(t) = N_e(t) - N_{\pm 1}(t) = w_0^\pm + w_1^\pm e^{-i\delta t} + w_{-1}^\pm e^{i\delta t}$ .

Le système devient alors

$$\left\{ \begin{aligned} -i\delta N_{e1} e^{-i\delta t} + i\delta N_{e-1} e^{i\delta t} &= n\Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e)(N_{e0} + N_{e1} e^{-i\delta t} + N_{e-1} e^{i\delta t}) \\ &+ \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0} (I_0^- + I_1^- e^{-i\delta t} + I_{-1}^- e^{i\delta t})(N_{-10} + N_{-11} e^{-i\delta t} + N_{-1-1} e^{i\delta t} - N_{e0} - N_{e1} e^{-i\delta t} - N_{e-1} e^{i\delta t}) \\ &+ \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0} (I_0^+ + I_1^+ e^{-i\delta t} + I_{-1}^+ e^{i\delta t})(N_{10} + N_{11} e^{-i\delta t} + N_{1-1} e^{i\delta t} - N_{e0} - N_{e1} e^{-i\delta t} - N_{e-1} e^{i\delta t}) \\ -i\delta N_{-11} e^{-i\delta t} + i\delta N_{-1-1} e^{i\delta t} &= n\Lambda_{-1} - \gamma_{-1}(N_{-10} + N_{-11} e^{-i\delta t} + N_{-1-1} e^{i\delta t}) \\ &+ \frac{\Gamma_e}{2} (N_{e0} + N_{e1} e^{-i\delta t} + N_{e-1} e^{i\delta t}) \\ -\frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0} (I_0^- + I_1^- e^{-i\delta t} + I_{-1}^- e^{i\delta t})(N_{-10} + N_{-11} e^{-i\delta t} + N_{-1-1} e^{i\delta t} - N_{e0} - N_{e1} e^{-i\delta t} - N_{e-1} e^{i\delta t}) \\ -i\delta N_{11} e^{-i\delta t} + i\delta N_{1-1} e^{i\delta t} &= n\Lambda_1 - \gamma_1(N_{10} + N_{11} e^{-i\delta t} + N_{1-1} e^{i\delta t}) \\ &+ \frac{\Gamma_e}{2} (N_{e0} + N_{e1} e^{-i\delta t} + N_{e-1} e^{i\delta t}) \\ -\frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0} (I_0^+ + I_1^+ e^{-i\delta t} + I_{-1}^+ e^{i\delta t})(N_{10} + N_{11} e^{-i\delta t} + N_{1-1} e^{i\delta t} - N_{e0} - N_{e1} e^{-i\delta t} - N_{e-1} e^{i\delta t}). \end{aligned} \right.$$

soit en ne conservant que les termes de premier ordre :

$$0 = n\Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e)N_{e0} + \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(I_0^- N_{-10} - I_0^- N_{e0}) + \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0}(I_0^+ N_{10} - I_0^+ N_{e0}), \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{aligned} -i\delta N_{e1} = & -(\Gamma_e + \gamma_e)N_{e1} + \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(I_1^- N_{-10} - I_1^- N_{e0} + I_0^- N_{-11} - I_0^- N_{e1}) \\ & + \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0}(I_1^+ N_{10} - I_1^+ N_{e0} + I_0^+ N_{11} - I_0^+ N_{e1}), \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

$$\begin{aligned} i\delta N_{e-1} = & -(\Gamma_e + \gamma_e)N_{e-1} + \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(I_{-1}^- N_{-10} - I_{-1}^- N_{e0} + I_0^- N_{-1-1} - I_0^- N_{e-1}) \\ & + \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0}(I_{-1}^+ N_{10} - I_{-1}^+ N_{e0} + I_0^+ N_{1-1} - I_0^+ N_{e-1}), \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

$$0 = n\Lambda_{-1} + \frac{\Gamma_e}{2}N_{e0} - \gamma_{-1}N_{-10} - \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(I_0^- N_{-10} - I_0^- N_{e0}), \quad (\text{G.7})$$

$$-i\delta N_{-11} = \frac{\Gamma_e}{2}N_{e1} - \gamma_{-1}N_{-11} - \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(I_1^- N_{-10} - I_1^- N_{e0} + I_0^- N_{-11} - I_0^- N_{e1}), \quad (\text{G.8})$$

$$i\delta N_{-1-1} = \frac{\Gamma_e}{2}N_{e-1} - \gamma_{-1}N_{-1-1} - \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0}(I_{-1}^- N_{-10} - I_{-1}^- N_{e0} + I_0^- N_{-1-1} - I_0^- N_{e-1}), \quad (\text{G.9})$$

$$0 = n\Lambda_1 + \frac{\Gamma_e}{2}N_{e0} - \gamma_1 N_{10} - \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0}(I_0^+ N_{10} - I_0^+ N_{e0}), \quad (\text{G.10})$$

$$-i\delta N_{11} = \frac{\Gamma_e}{2}N_{e1} - \gamma_1 N_{11} - \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0}(I_1^+ N_{10} - I_1^+ N_{e0} + I_0^+ N_{11} - I_0^+ N_{e1}), \quad (\text{G.11})$$

$$i\delta N_{1-1} = \frac{\Gamma_e}{2}N_{e-1} - \gamma_1 N_{1-1} - \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0}(I_1^+ N_{10} - I_1^+ N_{e0} + I_0^+ N_{1-1} - I_0^+ N_{e-1}). \quad (\text{G.12})$$

### Termes d'ordre 0

Les équations (G.7) et (G.10) nous donnent :

$$\begin{aligned} N_{e0} \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} \right) + n\Lambda_{-1} &= N_{-10} \left( \gamma_{-1} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} \right), \\ N_{e0} \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_1 I_0^+}{\hbar\omega_0} \right) + n\Lambda_1 &= N_{10} \left( \gamma_1 + \frac{\sigma_1 I_0^+}{\hbar\omega_0} \right). \end{aligned}$$

En réinjectant dans (G.4) :

$$0 = n\Lambda_e - (\Gamma_e + \gamma_e)N_{e0} - \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}N_{e0} - \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0}N_{e0} + \frac{\sigma_{-1}}{\hbar\omega_0} \left[ \frac{N_{e0} \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} \right) + n\Lambda_{-1}}{\gamma_{-1} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}} \right] \\ + \frac{\sigma_1}{\hbar\omega_0} \left[ \frac{N_{e0} \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} \right) + n\Lambda_1}{\gamma_1 + \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0}} \right],$$

que l'on peut réécrire après quelques transformations :

$$n\Lambda_e\gamma_{-1}\gamma_1 + n(\Lambda_e + \Lambda_1)\gamma_{-1}\frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} + n(\Lambda_e + \Lambda_{-1})\gamma_1\frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} + n(\Lambda_e + \Lambda_1 + \Lambda_{-1})\frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}\frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} = \\ N_{e0} \left[ (\Gamma_e + \gamma_e)\gamma_{-1}\gamma_1 + \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \gamma_e + \gamma_1 \right) \gamma_{-1}\frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} + \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \gamma_e + \gamma_{-1} \right) \gamma_1\frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} \right. \\ \left. + (\gamma_e + \gamma_{-1} + \gamma_1)\frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}\frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} \right].$$

On peut alors exprimer  $w_0^-$  et  $w_0^+$  :

$$w_0^- = N_{e0} - N_{10} = N_{e0} \left( 1 - \frac{\frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}}{\gamma_{-1} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}} \right) - \frac{n\Lambda_{-1}}{\gamma_{-1} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}} \\ = N_{e0} \frac{\gamma_{-1} - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma_{-1} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}} - \frac{n\Lambda_{-1}}{\gamma_{-1} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}}, \\ w_0^+ = N_{e0} - N_{10} = N_{e0} \frac{\gamma_1 - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma_1 + \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0}} - \frac{n\Lambda_1}{\gamma_1 + \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0}}.$$

### Termes d'ordre 1

Les équations (G.9) et (G.11) nous donnent :

$$N_{e1} \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} \right) + \frac{\sigma_{-1}I_{-1}^-}{\hbar\omega_0}w_0^- = N_{-11} \left( \gamma_{-1} - i\delta + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} \right), \\ N_{e1} \left( \frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} \right) + \frac{\sigma_1I_1^+}{\hbar\omega_0}w_0^+ = N_{11} \left( \gamma_1 - i\delta + \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} \right),$$

et l'équations (G.5) peut se réécrire :

$$0 = -(\Gamma_e + \gamma_e - i\delta)N_{e1} - \frac{\sigma_{-1}I_1^-}{\hbar\omega_0}w_0^- - \frac{\sigma_1I_1^+}{\hbar\omega_0}w_0^+ \\ + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}(N_{-11} - N_{e1}) + \frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0}(N_{11} - N_{e1}).$$

On voit ici que les calculs sont les mêmes que pour l'ordre 0 en effectuant les changements :

$$\begin{aligned} \gamma_e &\leftarrow \gamma_e - i\delta, \\ \gamma_{-1} &\leftarrow \gamma_{-1} - i\delta, \\ \gamma_1 &\leftarrow \gamma_1 - i\delta, \\ n\Lambda_{-1} &\leftarrow \frac{\sigma_{-1}I_1^-}{\hbar\omega_0}w_0^-, \\ n\Lambda_1 &\leftarrow \frac{\sigma_1I_1^+}{\hbar\omega_0}w_0^+, \\ n\Lambda_e &\leftarrow -\frac{\sigma_{-1}I_1^-}{\hbar\omega_0}w_0^- - \frac{\sigma_1I_1^+}{\hbar\omega_0}w_0^+ \quad (= -n(\Lambda_{-1} + \Lambda_1)). \end{aligned}$$

D'où

$$-\left[\frac{\sigma_{-1}I_1^-}{\hbar\omega_0}w_0^- + \frac{\sigma_1I_1^+}{\hbar\omega_0}w_0^+\right] (\gamma_{-1} - i\delta)(\gamma_1 - i\delta) + \frac{\sigma_{-1}I_1^-}{\hbar\omega_0}w_0^-(\gamma_{-1} - i\delta)\frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} - \frac{\sigma_1I_1^+}{\hbar\omega_0}w_0^+(\gamma_1 - i\delta)\frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} = \\ N_{e1} \left[ (\Gamma_e + \gamma_e - i\delta)(\gamma_{-1} - i\delta)(\gamma_1 - i\delta) + \left(\frac{\Gamma_e}{2} + \gamma_e + \gamma_1 - 2i\delta\right) (\gamma_{-1} - i\delta)\frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} \right. \\ \left. + \left(\frac{\Gamma_e}{2} + \gamma_e + \gamma_{-1} - 2i\delta\right) (\gamma_1 - i\delta)\frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0} \right. \\ \left. + (\gamma_e + \gamma_{-1} + \gamma_1 - 3i\delta)\frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}\frac{\sigma_1I_0^+}{\hbar\omega_0} \right].$$

On peut alors exprimer  $w_1^-$  et  $w_1^+$  :

$$\begin{aligned} w_1^- &= N_{e1} - N_{-11} = N_{e1} \left( 1 - \frac{\frac{\Gamma_e}{2} + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}}{\gamma_{-1} - i\delta + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}} \right) - \frac{\frac{\sigma_{-1}I_1^-}{\hbar\omega_0}w_0^-}{\gamma_{-1} - i\delta + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}} \\ &= N_{e1} \frac{\gamma_{-1} - i\delta - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma_{-1} - i\delta + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}} - \frac{\frac{\sigma_{-1}I_1^-}{\hbar\omega_0}w_0^-}{\gamma_{-1} - i\delta + \frac{\sigma_{-1}I_0^-}{\hbar\omega_0}}, \end{aligned}$$

$$w_1^+ = N_{e1} - N_{11} = N_{e1} \frac{\gamma_1 - i\delta - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma_1 - i\delta + \frac{\sigma_1 I_0^+}{\hbar\omega_0}} - \frac{\frac{\sigma_1 I_1^+}{\hbar\omega_0} w_0^+}{\gamma_1 - i\delta + \frac{\sigma_1 I_0^+}{\hbar\omega_0}},$$

qui sont suffisants à calculer la transmission.

### Cas particulier

Appliquons ces formules au cas du chapitre 2, pour lequel nous sommes dans les conditions :  $\sigma_{-1} = \sigma_1 = \sigma$ ,  $\Lambda_e = 0$ ,  $\Lambda_{-1} = \Lambda_1 = \Lambda$ ,  $\gamma_e = \gamma_{-1} = \gamma_1 = \gamma$  et  $I_0^+ = I_0^- = I_0$ .

On a alors :

$$N_{e0} = \frac{2n\Lambda \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} \left( \gamma + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} \right)}{(\Gamma_e + \gamma)\gamma^2 + (\Gamma_e + \gamma)\gamma \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} + 3\gamma^2 \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} + 3\gamma \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} = n \frac{2\frac{\Lambda}{\gamma} \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_e + \gamma + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}},$$

puis

$$\begin{aligned} w_0^+ = w_0^- = w_0 &= N_{e0} \frac{\gamma - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} - \frac{n\Lambda}{\gamma + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \\ &= n \frac{2\frac{\Lambda}{\gamma} \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_e + \gamma + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \frac{\gamma - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} - \frac{n\Lambda}{\gamma + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \\ &= n \frac{\Lambda}{\gamma} \frac{2\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} \gamma - \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} \Gamma_e - \gamma \Gamma_e - \gamma^2 - 3\gamma \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_e + \gamma + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \frac{1}{\gamma + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}}, \end{aligned}$$

$$w_0 = -n \frac{\Lambda}{\gamma} \frac{\Gamma_e + \gamma}{\Gamma_e + \gamma + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}}.$$

On a également :

$$\begin{aligned} N_{e1} &= -w_0 \frac{(\gamma - i\delta)^2 \frac{\sigma(I_1^- + I_1^+)}{\hbar\omega_0} + (\gamma - i\delta) \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} \frac{\sigma(I_1^- + I_1^+)}{\hbar\omega_0}}{(\Gamma_e + \gamma - i\delta)(\gamma - i\delta)^2 + (\Gamma_e + \gamma - i\delta)(\gamma - i\delta) \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} + 3(\gamma - i\delta)^2 \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} + 3(\gamma - i\delta) \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0} \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \\ &= -w_0 \frac{\frac{\sigma(I_1^- + I_1^+)}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_e + \gamma - i\delta + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 w_1^+ &= N_{e1} \frac{\gamma - i\delta - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} - \frac{\frac{\sigma I_1^+}{\hbar\omega_0} w_0}{\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \\
 &= -w_0 \left[ \frac{\frac{\sigma(I_1^- + I_1^+)}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_e + \gamma - i\delta + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \frac{\gamma - i\delta - \frac{\Gamma_e}{2}}{\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} + \frac{\frac{\sigma I_1^+}{\hbar\omega_0}}{\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \right] \\
 &= -\frac{w_0}{2} \frac{-\frac{\sigma I_1^-}{\hbar\omega_0} \Gamma_e + 2\frac{\sigma I_1^-}{\hbar\omega_0} (\gamma - i\delta) - \frac{\sigma I_1^+}{\hbar\omega_0} \Gamma_e + 2\frac{\sigma I_1^+}{\hbar\omega_0} (\gamma - i\delta) + 2\frac{\sigma I_1^+}{\hbar\omega_0} \Gamma_e + 2\frac{\sigma I_1^+}{\hbar\omega_0} (\gamma - i\delta) + 6\frac{\sigma I_1^+}{\hbar\omega_0} \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}}{(\Gamma_e + \gamma - i\delta + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}) (\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0})} \\
 &= -\frac{w_0}{2} \frac{3\frac{\sigma(I_1^+ + I_1^-)}{\hbar\omega_0} (\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}) + \frac{\sigma(I_1^+ - I_1^-)}{\hbar\omega_0} (\Gamma_e + \gamma - i\delta + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0})}{(\Gamma_e + \gamma - i\delta + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}) (\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0})},
 \end{aligned}$$

$$\boxed{w_1^+ = -\frac{w_0}{2} \left[ \frac{3\frac{\sigma(I_1^+ + I_1^-)}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_e + \gamma - i\delta + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} + \frac{\frac{\sigma(I_1^+ - I_1^-)}{\hbar\omega_0}}{\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \right]}.$$

On obtient de même :

$$\boxed{w_1^- = -\frac{w_0}{2} \left[ \frac{3\frac{\sigma(I_1^+ + I_1^-)}{\hbar\omega_0}}{\Gamma_e + \gamma - i\delta + 3\frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} - \frac{\frac{\sigma(I_1^+ - I_1^-)}{\hbar\omega_0}}{\gamma - i\delta + \frac{\sigma I_0}{\hbar\omega_0}} \right]}.$$

## G.5 Résolution des équations de Bloch optiques

Dans cette section, nous nous plaçons dans un cas particulier pour pouvoir résoudre analytiquement les équations de Bloch optiques.

### G.5.1 Résolution analytique

Dans cette section, nous résolvons analytiquement le système G.1 pour le cas particulier correspondant à la configuration expérimentale d'EIT la plus simple. La polarisation du champ sonde est prise  $\sigma_-$  ( $E_{s-1} = 0$ ) et la polarisation du champ de couplage  $\sigma_+$  ( $E_{c1} = 0$ ). Le schéma du système est alors tel que sur les figures G.5 et G.6. Nous supposons également que le nombre total d'atomes est conservé :  $\Lambda_e + \Lambda_1 + \Lambda_{-1} = \gamma_e \sigma_{ee} + \gamma_1 \sigma_{11} + \gamma_{-1} \sigma_{-1-1}$ , et que le champ sonde est assez faible pour considérer le pompage total à l'ordre 0 en

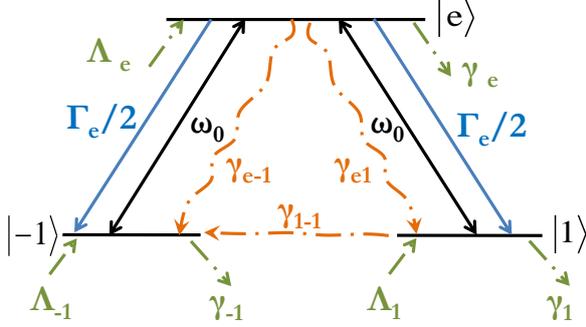


FIGURE G.5 – Système à trois niveaux en  $\Lambda$  : taux de relaxations. Le niveau excité  $|e\rangle$  a un taux de relaxation  $\Gamma_e/2$  vers les deux sous-niveaux  $|-1\rangle$  et  $|1\rangle$ , un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_e$  et un taux d'alimentation  $\Lambda_e$ . Les niveaux fondamentaux  $|\pm 1\rangle$  ont un taux d'alimentation  $\Lambda_{\pm 1}$  et un taux de relaxation vers l'extérieur  $\gamma_{\pm 1}$ . Les cohérences optiques ont des taux de relaxation  $\gamma_{e,\pm 1}$  et la cohérence Raman entre niveaux fondamentaux  $\gamma_{1,-1}$ . La différence d'énergie entre le niveaux du haut et les niveaux du bas est  $\hbar\omega_0$ .

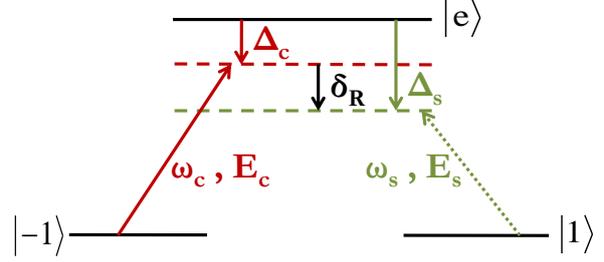


FIGURE G.6 – Système à trois niveaux en  $\Lambda$  : excitations. Un champ de sonde de pulsation optique  $\omega_s$  couple la transition  $|1\rangle \rightarrow |e\rangle$  avec une amplitude complexe  $E_s$  et un champ de couplage de pulsation optique  $\omega_c$  couple la transition  $|-1\rangle \rightarrow |e\rangle$  avec une amplitude complexe  $E_c$ . On note  $\Delta_c = \omega_c - \omega_0$  le désaccord optique pour le champ de couplage,  $\Delta_s = \omega_s - \omega_0$  le désaccord optique pour le champ de sonde et  $\delta_R = \Delta_s - \Delta_c = \omega_s - \omega_c$  le désaccord Raman.

champ sonde :  $\sigma_{ee} = \sigma_{-1-1} = 0$  et  $\sigma_{11} = 1$ . Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\sigma}_{e-1}}{dt} = i\tilde{\sigma}_{-1-1}\Omega_s e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{e-1}[i(\Delta_c + \Delta_{-1}) - \gamma_{e-1}] \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{e1}}{dt} = i\Omega_s e^{-i\delta t} + i\tilde{\sigma}_{-11}\Omega_c + \tilde{\sigma}_{e1}[i(\Delta_c + \Delta_1) - \gamma_{e1}] \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{-11}}{dt} = i\tilde{\sigma}_{e1}\Omega_c^* - i\tilde{\sigma}_{-1e}\Omega_s e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{-11}[i(\Delta_1 - \Delta_{-1}) - \gamma_{-11}]. \end{cases} \quad (\text{G.13})$$

Comme nous cherchons ensuite la réponse linéaire du système en champ sonde en régime permanent, nous posons :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{e-1}(t) &= \tilde{\sigma}_{e-1,0} + \tilde{\sigma}_{e-1,1}e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{e-1,-1}e^{+i\delta t}, \\ \tilde{\sigma}_{e1}(t) &= \tilde{\sigma}_{e1,0} + \tilde{\sigma}_{e1,1}e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{e1,-1}e^{+i\delta t}, \\ \tilde{\sigma}_{-11}(t) &= \tilde{\sigma}_{-11,0} + \tilde{\sigma}_{-11,1}e^{-i\delta t} + \tilde{\sigma}_{-11,-1}e^{+i\delta t}. \end{aligned}$$

Le système devient après avoir négligé les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = i\tilde{\sigma}_{1-1,-1}\Omega_s + \tilde{\sigma}_{e-1,0}[i(\Delta_c + \Delta_{-1}) - \gamma_{e-1}] \quad (G.14.a) \\ -i\delta\tilde{\sigma}_{e-1,1} = \tilde{\sigma}_{1-1,0}\Omega_s + \tilde{\sigma}_{e-1,1}[i(\Delta_c + \Delta_{-1}) - \gamma_{e-1}] \quad (G.14.b) \\ i\delta\tilde{\sigma}_{e-1,-1} = \tilde{\sigma}_{e-1,-1}[i(\Delta_c + \Delta_{-1}) - \gamma_{e-1}] \quad (G.14.c) \\ 0 = i\tilde{\sigma}_{-11,0}\Omega_c + \tilde{\sigma}_{e1,0}[i(\Delta_c + \Delta_1) - \gamma_{e1}] \quad (G.14.d) \\ -i\delta\tilde{\sigma}_{e1,1} = i\Omega_s + i\tilde{\sigma}_{-11,1}\Omega_c + \tilde{\sigma}_{e1,1}[i(\Delta_c + \Delta_1) - \gamma_{e1}] \quad (G.14.e) \\ i\delta\tilde{\sigma}_{e1,-1} = i\tilde{\sigma}_{-11,-1}\Omega_c + \tilde{\sigma}_{e1,-1}[i(\Delta_c + \Delta_1) - \gamma_{e1}] \quad (G.14.f) \\ 0 = i\tilde{\sigma}_{e1,0}\Omega_c^* - i\tilde{\sigma}_{-1e,-1}\Omega_s + \tilde{\sigma}_{-11,0}[i(\Delta_1 - \Delta_{-1}) - \gamma_{-11}] \quad (G.14.g) \\ -i\delta\tilde{\sigma}_{-11,1} = i\tilde{\sigma}_{e1,1}\Omega_c^* - i\tilde{\sigma}_{-1e,0}\Omega_s + \tilde{\sigma}_{-11,1}[i(\Delta_1 - \Delta_{-1}) - \gamma_{-11}] \quad (G.14.h) \\ i\delta\tilde{\sigma}_{-11,-1} = i\tilde{\sigma}_{e1,-1}\Omega_c^* + \tilde{\sigma}_{-11,-1}[i(\Delta_1 - \Delta_{-1}) - \gamma_{-11}] \quad (G.14.i) \end{array} \right. .$$

Comme nous l'avons déjà vu avec l'équation (G.2), la réponse du système sur le champ sonde est donnée par le terme  $\tilde{\sigma}_{e1,1}$  et seules les équations (G.14.e), (G.14.h) et (G.14.a) sont utiles.

D'après (G.14.e) d'abord, on a :

$$\tilde{\sigma}_{e1,1}[i(\Delta_c + \Delta_1 + \delta) - \gamma_{e1}] = -i\Omega_s - i\Omega_c\tilde{\sigma}_{-11,1}.$$

Puis d'après (G.14.a)\*, on a :

$$\tilde{\sigma}_{-11,1} = \frac{i\gamma_{e-1} - (\Delta_c + \Delta_{-1})}{\Omega_s^*} \tilde{\sigma}_{-1e,0},$$

que l'on injecte dans (G.14.h) :

$$-\tilde{\sigma}_{-11,1}[i(\Delta_1 - \Delta_{-1} + \delta) - \gamma_{-11}] = i\tilde{\sigma}_{e1,1}\Omega_c^* - i\Omega_s \frac{\Omega_s^*}{i\gamma_{e-1} - (\Delta_c + \Delta_{-1})} \tilde{\sigma}_{-11,1},$$

et qui nous donne au premier ordre en  $\Omega_s$  :

$$\tilde{\sigma}_{-11,1} = -\frac{i\Omega_c^*}{i(\Delta_1 - \Delta_{-1} + \delta) - \gamma_{-11}} \tilde{\sigma}_{e1,1}.$$

Après injection dans (G.14.e), nous obtenons :

$$\tilde{\sigma}_{e1,1}[i(\Delta_c + \Delta_1 + \delta) - \gamma_{e1}] = -i\Omega_s + i\Omega_c \frac{i\Omega_c^*}{i(\Delta_1 - \Delta_{-1} + \delta) - \gamma_{-11}} \tilde{\sigma}_{e1,1},$$

soit finalement

$$\tilde{\sigma}_{e1,1} = \frac{i\Omega_s[\gamma_{-11} - i(\Delta_1 - \Delta_{-1} + \delta)]}{[\gamma_{-11} - i(\Delta_1 - \Delta_{-1} + \delta)][\gamma_{e1} - i(\Delta_c + \Delta_1 + \delta)] + |\Omega_c|^2}.$$

En règle générale, on peut prendre  $\Delta_{-1} = 0$  et noter le désaccord optique de la sonde  $\Delta_s = \omega_s - (\omega_0 - \Delta_1) = \delta + \Delta_c + \Delta_1$ . Ceci nous permet de définir le désaccord Raman  $\delta_R = \Delta_s - \Delta_c = \Delta_1 + \delta$ . Nous pouvons exprimer la cohérence avec ces notations :

$$\tilde{\sigma}_{e1,1} = \frac{i\Omega_s[\gamma_{-11} - i\delta_R]}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][\gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2}.$$

### Autre méthode

Pour effectuer ce calcul, il est aussi possible de se placer dès le départ dans un autre référentiel tournant, défini par

$$\begin{aligned}\sigma_{e1} &= \tilde{\sigma}_{e1} e^{-i\omega_s t}, \\ \sigma_{e-1} &= \tilde{\sigma}_{e-1} e^{-i\omega_c t}, \\ \sigma_{-11} &= \tilde{\sigma}_{-11} e^{-i\delta_R t},\end{aligned}$$

dans lequel le système d'évolution est :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\sigma}_{e-1}}{dt} = i\tilde{\sigma}_{-11}\Omega_s + \tilde{\sigma}_{e-1}[i\Delta_c - \gamma_{e-1}] \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{e1}}{dt} = i\Omega_s + i\tilde{\sigma}_{-11}\Omega_c + \tilde{\sigma}_{e1}[i\Delta_s - \gamma_{e1}] \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{-11}}{dt} = i\tilde{\sigma}_{e1}\Omega_c^* - i\tilde{\sigma}_{-1e}\Omega_s + \tilde{\sigma}_{-11}[i\delta_R - \gamma_{-11}]. \end{cases}$$

La résolution de ce système au premier ordre en  $\Omega_s$  en régime permanent donne le même résultat.

### G.5.2 Elargissement inhomogène

En présence d'élargissement inhomogène, il faut prendre en considération la réponse de toutes les classes d'atomes. Pour pouvoir faire le calcul analytique, nous modélisons la distribution des pulsations de résonance  $\omega_{res}$  des atomes participant à l'élargissement inhomogène par une lorentzienne, de demi-largeur à mi-hauteur  $W$  et centrée autour de la pulsation de la transition étudié  $\omega_0$  :

$$D(\omega_{res}) = \frac{\sqrt{\ln 2}}{W\sqrt{\pi} [1 + (\omega_{res} - \omega_0)^2/W^2]}$$

Pour une classe de ces atomes, le désaccord optique est modifié :  $\Delta'_c(\omega_{res}) = \omega_c - \omega_{res} = \Delta_c - (\omega_{res} - \omega_0)$ , mais pas le désaccord Raman :  $\delta'_R = \Delta'_s(\omega_{res}) - \Delta'_c(\omega_{res}) = \omega_s - (\omega_{res} - \Delta_1) - [\Delta_c - (\omega_{res} - \omega_0)] = \delta_R$ .

La réponse du système est donc donnée par l'intégrale suivante :

$$\tilde{\sigma}_{e1,1}^{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{e1,1}(\Delta'_c(\omega_{res})) D(\omega_{res}) d\omega_{res},$$

soit

$$\tilde{\sigma}_{e1,1}^{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\Omega_s[\gamma_{-11} - i\delta_R]}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][\gamma_{e1} - i(\Delta_c - (\omega_{res} - \omega_0) + \delta_R)] + |\Omega_c|^2} \frac{\sqrt{\ln 2}/(W\sqrt{\pi})}{\left[1 + \left(\frac{\omega_{res} - \omega_0}{W}\right)^2\right]} d\omega_{res},$$

Effectuons le changement de variable  $\omega = (\omega_{res} - \omega_0)$  et notons  $\tilde{\sigma}_{e1,1}^{tot} = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} W \Omega_s I$  avec

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(W^2 + \omega^2) \left( \omega - (\Delta_c + \delta_R) - i\gamma_{e1} + \frac{|\Omega_c|^2}{i\gamma_{-11} + \delta_R} \right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).$$

Pour calculer cette intégrale, prolongeons la fonction  $F(\omega)$  dans le plan complexe afin d'utiliser le théorème des résidus sur le contour  $\mathcal{D}_-$  de rayon  $R$  de la figure G.7. En effet :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_-} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_-} F(\omega),$$

puis il est facile de montrer que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_-} F(\omega) = 0$  en majorant le module de  $F$  par une fonction convergente avec  $R$  dont l'intégrale tend vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ .

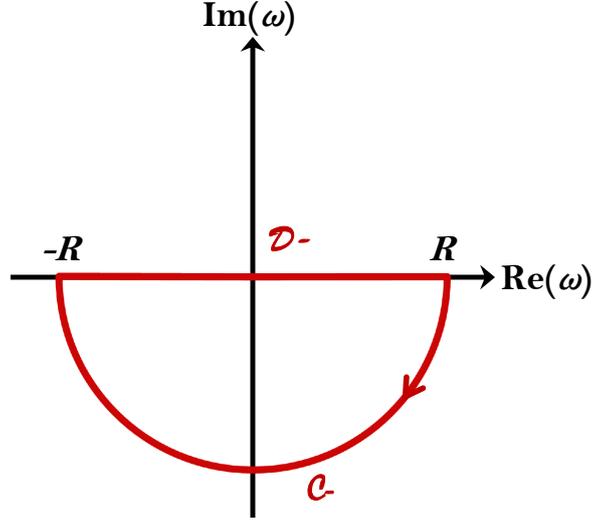


FIGURE G.7 – Contour utilisé pour l'intégration dans le plan complexe.

Pour cette fonction, il n'existe qu'un seul pôle de partie imaginaire négative (et donc à l'intérieur du contour) :  $z_1 = -iW$ . En effet, réécrivons le pôle  $z_3$  :

$$\begin{aligned}
 z_3 &= (\Delta_c + \delta_R) + i\gamma_{e1} - \frac{|\Omega_c|^2}{i\gamma_{-11} + \delta_R}, \\
 &= \Delta_c + \delta_R + i\gamma_{e1} - |\Omega_c|^2 \frac{-i\gamma_{-11} + \delta_R}{\gamma_{-11}^2 + \delta_R^2}, \\
 &= \Delta_c + \delta_R - \frac{|\Omega_c|^2 \delta_R}{\gamma_{-11}^2 + \delta_R^2} + i \left( \gamma_{e1} + \frac{|\Omega_c|^2 \gamma_{-11}}{\gamma_{-11}^2 + \delta_R^2} \right),
 \end{aligned}$$

$z_3$  a donc une partie imaginaire positive, de même que le pôle  $z_2 = z_1^* = iW$ .

D'après le théorème des résidus, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
 I &= -2i\pi \frac{1}{(-2iW) \left( -iW - (\Delta_c + \delta_R) - i\gamma_{e1} + \frac{|\Omega_c|^2}{i\gamma_{-11} + \delta_R} \right)} \\
 &= \frac{i\pi}{W} \frac{\gamma_{-11} - i\delta_R}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][W + \gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2}
 \end{aligned}$$

Et exprimer la cohérence pour tout le système :

$$\tilde{\sigma}_{e1,1}^{tot} = \sqrt{\pi \ln 2} \frac{i\Omega_s[\gamma_{-11} - i\delta_R]}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][W + \gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2}.$$

Ce dernier résultat est remarquable, puisque à un facteur  $\sqrt{\pi \ln 2}$  près, il est identique à celui obtenu sans élargissement inhomogène : le taux de relaxation de la cohérence optique  $\gamma_{e1}$  a été remplacé dans la formule par sa somme avec la demi-largeur à mi-hauteur de l'élargissement inhomogène considéré  $\boxed{W + \gamma_{e1}}$ .

Pour tous les résultats théoriques présentés dans ce manuscrit (y compris pour les systèmes à deux niveaux), nous remplacerons donc le taux de relaxation de la cohérence optique par sa somme avec la demi-largeur à mi-hauteur de l'élargissement inhomogène.

### G.5.3 Susceptibilité

La susceptibilité  $\chi(\delta_R)$  pour le champ sonde est alors donnée par :

$$\chi(\delta_R) = n \frac{2|d_{e1}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{\tilde{\sigma}_{e1,1}}{\Omega_s}.$$

Ceci se réécrit :

$$\chi(\delta_R) = n \frac{2|d_{e1}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{i[\gamma_{-11} - i\delta_R]}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][\gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2},$$

ou en présence d'élargissement inhomogène :

$$\chi(\delta_R)^{tot} = n \frac{2\sqrt{\pi \ln 2}|d_{e1}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{i[\gamma_{-11} - i\delta_R]}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][(W + \gamma_{e1}) - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2}.$$

### G.5.4 Transmission

La transmission du système pour un champ monochromatique est donnée pour une longueur du milieu  $L$  par :

$$T(\delta_R) = e^{-\frac{\omega_0}{c} \text{Im}[\chi(\delta_R)]L} = e^{-\alpha L}.$$

On peut ensuite écrire :

$$\begin{aligned}\alpha &= n \frac{2\omega_0 |d_{e1}|^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \operatorname{Im} \left[ \frac{i[\gamma_{-11} - i\delta_R]}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][\gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2} \right], \\ &= K \operatorname{Im} \left[ \frac{(\delta_R + i\gamma_{-11})(|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R) + i[\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)])}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)]^2} \right], \\ &= K \frac{\delta_R^2 \gamma_{e1} + \gamma_{-11}[\gamma_{-11}\gamma_{e1} + |\Omega_c|^2]}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)]^2}.\end{aligned}$$

Notons maintenant  $T_0$  la transmission du système à désaccord optique de sonde nul ( $\Delta_s = \delta_R + \Delta_c = 0$ ) et couplage nul<sup>2</sup> telle que :

$$\ln T_0 = -\frac{KL}{\gamma_{e1}} = -n \frac{2\omega_0 |d_{e1}|^2 L}{\varepsilon_0 \hbar c \gamma_{e1}}.$$

On peut alors noter la transmission du milieu :

$$\ln T = \gamma_{e1} \ln T_0 \frac{\delta_R^2 \gamma_{e1} + \gamma_{-11}[\gamma_{-11}\gamma_{e1} + |\Omega_c|^2]}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)]^2}, \quad (\text{G.15})$$

et la susceptibilité du système :

$$\chi(\delta_R) = -\frac{c\gamma_{e1} \ln T_0}{\omega_0 L} \frac{i[\gamma_{-11} - i\delta_R]}{[\gamma_{-11} - i\delta_R][\gamma_{e1} - i(\Delta_c + \delta_R)] + |\Omega_c|^2}.$$

Ces dernières formules restent valables en présence d'élargissement inhomogène, à condition de remplacer  $\gamma_{e1}$  par  $W + \gamma_{e1}$ .

### G.5.5 Résonances EIT-Largeur

Etudions plus attentivement la forme de la partie imaginaire de la susceptibilité :

$$\operatorname{Im}(\chi) \propto \frac{\delta_R^2 \gamma_{e1} + \gamma_{-11}[\gamma_{-11}\gamma_{e1} + |\Omega_c|^2]}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)]^2}.$$

2. Notons ici que cette définition de la transmission sans couplage du milieu suppose un pompage des atomes dans l'état  $|1\rangle$ , et qu'elle ne correspond donc pas à une transmission sans couplage réelle du système pour lequel les populations sont équitablement réparties entre  $|-1\rangle$  et  $|1\rangle$ .

Dans des conditions usuelles pour l'étude de l'EIT, on peut considérer que  $\delta_R, \gamma_{-11} \ll \gamma_{e1}, |\Omega_c|$ , et en particulier regarder à désaccord optique nul  $\Delta_c = 0$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\chi) &\propto \frac{\delta_R^2 \gamma_{e1} + \gamma_{-11} [\gamma_{-11} \gamma_{e1} + |\Omega_c|^2]}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11} \gamma_{e1}]^2 + [\delta_R \gamma_{e1}]^2} \\ &\propto \frac{1/\gamma_{e1} (\delta_R^2 \gamma_{e1}^2 + [|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11} \gamma_{e1}]^2) - |\Omega_c|^2 / \gamma_{e1} (|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11} \gamma_{e1})}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11} \gamma_{e1}]^2 + [\delta_R \gamma_{e1}]^2}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Im}(\chi) \propto \frac{1}{\gamma_{e1}} - \frac{1}{\gamma_{e1}} \frac{|\Omega_c|^2 (|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11} \gamma_{e1})}{\delta_R^2 + \left[ \gamma_{-11} + \frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}} \right]^2}}.$$

La forme de cette dernière expression est caractéristique : il s'agit d'une lorentzienne soustraite à un fond, dont la largeur à mi-hauteur  $\Delta\omega$  est donnée par :

$$\boxed{\Delta\omega = 2\gamma_{-11} + 2 \frac{|\Omega_c|^2}{\gamma_{e1}}}.$$

Cette formule est encore valable en présence d'élargissement inhomogène, pour lequel la largeur à mi-hauteur est alors :

$$\boxed{\Delta\omega = 2\gamma_{-11} + 2 \frac{|\Omega_c|^2}{W + \gamma_{e1}}}.$$

### G.5.6 Vitesse de groupe-Délai de groupe

Rappelons d'abord la formule de la vitesse de groupe pour le champ sonde, exprimée en fonction du désaccord  $\delta_R$  :

$$v_g(\delta_R) = \frac{c}{n_R(\delta_R) + \omega_s \left. \frac{dn_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\delta_R}},$$

où l'on considèrera  $\omega_s = \omega_0$  puisque nous sommes dans le domaine optique. Nous pouvons aussi rappeler la formule de l'indice de réfraction :  $n_R(\delta_R) = 1 + \text{Re} \left( \frac{\chi(\delta_R)}{2} \right)$ , où  $\text{Re}(\chi(\delta_R)) \ll 1$ , et considérer l'indice de groupe non négligable comparé à 1. On en déduit :

$$\boxed{v_g(\delta_R) = \frac{c}{1 + \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{d\text{Re}(\chi(\omega))}{d\omega} \right|_{\delta_R}}},$$

et on peut exprimer le délai de groupe introduit par le milieu de longueur  $L$  :

$$\tau_g = \frac{L}{v_g} - \frac{L}{c} = \frac{L \omega_0}{c} \frac{d\text{Re}(\chi(\omega))}{d\omega} \Big|_{\delta_R}$$

Puis

$$\begin{aligned} \tau_g &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \frac{d\text{Re} \left( \frac{i[\gamma_{-11}-i\omega]}{[\gamma_{-11}-i\omega][\gamma_{e1}-i(\Delta_c+\omega)]+|\Omega_c|^2} \right)}{d\omega} \Big|_{\delta_R} \\ &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \frac{d}{d\omega} \text{Re} \left( \frac{i\gamma_{-11} + i\omega}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \omega(\Delta_c + \omega)]^2 + [\omega\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \omega)]^2} \right) \Big|_{\delta_R} \\ &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \frac{d}{d\omega} \frac{\omega[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \omega(\Delta_c + \omega)] - \gamma_{-11}[\omega\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \omega)]}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \omega(\Delta_c + \omega)]^2 + [\omega\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \omega)]^2} \Big|_{\delta_R} \\ &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \frac{d}{d\omega} \frac{\omega|\Omega_c|^2 - (\omega^2 + \gamma_{-11}^2)(\Delta_c + \omega)}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \omega(\Delta_c + \omega)]^2 + [\omega\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \omega)]^2} \Big|_{\delta_R} \\ &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \left[ \frac{|\Omega_c|^2 - 2\delta_R(\Delta_c + \delta_R) - (\delta_R^2 + \gamma_{-11}^2)}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\delta_R|\Omega_c|^2 - (\delta_R^2 + \gamma_{-11}^2)(\Delta_c + \delta_R)) 2([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)](\Delta_c + 2\delta_R))}{([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)]^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\delta_R|\Omega_c|^2 - (\delta_R^2 + \gamma_{-11}^2)(\Delta_c + \delta_R)) 2([\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)](\gamma_{e1} + \gamma_{-11}))}{([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R(\Delta_c + \delta_R)]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}(\Delta_c + \delta_R)]^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Faisons quelques approximations à partir d'ici qui sont adaptées dans le contexte de l'EIT :

$\delta_R, \gamma_{-11} \ll \gamma_{e1}, |\Omega_c|$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \tau_g &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \left[ \frac{|\Omega_c|^2 - 2\delta_R\Delta_c}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R\Delta_c]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}\Delta_c]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\delta_R|\Omega_c|^2 - (\delta_R^2 + \gamma_{-11}^2)\Delta_c) 2([|\Omega_c|^2 - \delta_R\Delta_c](\Delta_c + 2\delta_R))}{([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R\Delta_c]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}\Delta_c]^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\delta_R|\Omega_c|^2 - (\delta_R^2 + \gamma_{-11}^2)\Delta_c) 2([\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}\Delta_c](\gamma_{e1}))}{([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1} - \delta_R\Delta_c]^2 + [\delta_R\gamma_{e1} + \gamma_{-11}\Delta_c]^2)^2} \right], \end{aligned}$$

puis si nous observons à désaccord optique  $\Delta_c = 0$  :

$$\begin{aligned} \tau_g &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \left[ \frac{|\Omega_c|^2}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1}]^2 + [\delta_R\gamma_{e1}]^2} \right. \\ &\quad - \frac{(\delta_R|\Omega_c|^2) 2 (|\Omega_c|^2)(2\delta_R)}{([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1}]^2 + [\delta_R\gamma_{e1}]^2)^2} \\ &\quad \left. - \frac{(\delta_R|\Omega_c|^2) 2 ([\delta_R\gamma_{e1}](\gamma_{e1}))}{([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1}]^2 + [\delta_R\gamma_{e1}]^2)^2} \right] \\ &= -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \left[ \frac{|\Omega_c|^2}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1}]^2 + [\delta_R\gamma_{e1}]^2} - \frac{2\delta_R^2|\Omega_c|^2(\gamma_{e1}^2 + 2\Omega_c^2)}{([|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1}]^2 + [\delta_R\gamma_{e1}]^2)^2} \right], \end{aligned}$$

et enfin à résonance  $\delta_R = 0$  :

$$\boxed{\tau_g = -\frac{\gamma_{e1} \ln T_0}{2} \frac{|\Omega_c|^2}{[|\Omega_c|^2 + \gamma_{-11}\gamma_{e1}]^2}.}$$

# Annexe H

## Hélium métastable

Cette annexe regroupe les différentes données correspondant à notre système expérimental constitué d'un gaz d'hélium à température ambiante.

### H.1 Niveaux d'énergie

La répartition des premiers niveaux d'énergie de  $^4\text{He}$  sont donnés par la figure H.1 : toutes les valeurs peuvent être retrouvées à partir de Pastor et al. [2004]; Zelevinsky et al. [2005]; Kandula et al. [2010]; van Rooij et al. [2011]

### H.2 Taux de relaxation

Les valeurs données ici peuvent être trouvées dans Courtade et al. [2002].

- Si on note  $\Gamma_0$  le taux de relaxation des niveaux de  $2^3\text{P}$  de  $^4\text{He}$ , il est donné par

$$\Gamma_0 = 1,02 \times 10^7 \text{ s}^{-1} = 2\pi \times 1,63 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

soit une durée de vie

$$\tau_0 = 97,8 \text{ ns.}$$

- Si on note  $\frac{\Gamma}{2} = \frac{\Gamma_0}{2} + \Gamma_{coll}$  le taux de relaxation de la cohérence cohérence optique d'une transition  $2^3\text{S}_1 \leftrightarrow 2^3\text{P}$  en l'absence de désexcitation des niveaux vers l'extérieur,

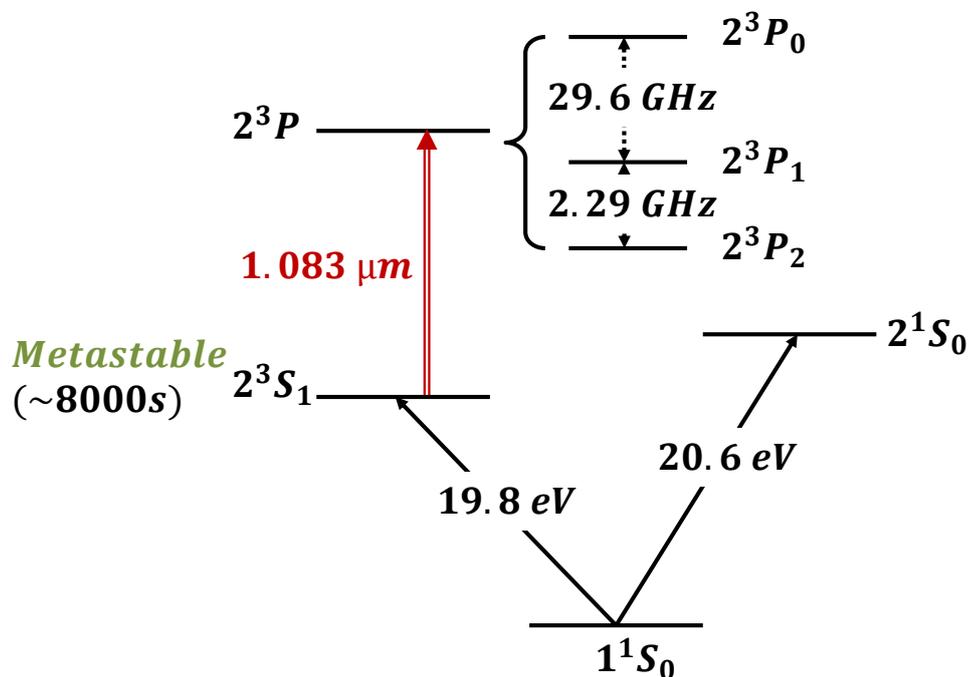


FIGURE H.1 – Répartition des niveaux d'énergie de l'hélium 4.

alors :

$$\Gamma = \Gamma_0 + 10^8 \text{ s}^{-1}/\text{mbar}.$$

Nous travaillons avec une cellule contenant 1 Torr d'hélium, nous avons donc<sup>1</sup> :

$$\Gamma = 1,43 \times 10^8 \text{ s}^{-1} = 2\pi \times 2,28 \times 10^7 \text{ s}^{-1},$$

soit une durée de vie

$$\tau = \frac{2}{\Gamma} = 13,99 \text{ ns}.$$

- La demi-largeur à mi-hauteur Doppler est enfin donnée à 300K par :

$$\frac{W_D}{2\pi} = 0,86 \text{ GHz}.$$

1. 1 Torr=1,33 mbar.

## Transit

Il est possible d'évaluer le taux de transit dans le faisceau laser en supposant une marche aléatoire brownienne en 1 dimension. La variance de la position est donnée par

$$\Delta_x^2 = 2Dt,$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion des atomes métastables dans le gaz d'hélium. Ce dernier a été évalué par Fitzsimmons et al. [1968] à  $D \approx 500 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut alors estimer le taux de sortie d'un faisceau de largeur  $\Delta_x = 1 \text{ cm}$  :

$$\gamma_t = \frac{1}{t} = \frac{2D}{\Delta_x} \approx 10^4 \text{ s}^{-1}.$$

Pour des raisons de simplicité on prendra  $\boxed{\gamma_t \approx 2\pi \times 10^3 \text{ s}^{-1}}$ .

## H.3 Transition $2^3\text{S}_1 \leftrightarrow 2^3\text{P}_1$

### H.3.1 Dégénérescence Zeeman

Chacun des niveaux  $2^3\text{S}_1$  et  $2^3\text{P}_1$  possède trois sous-niveaux Zeeman, tel qu'illustré sur la figure H.2. L'application d'un champ magnétique  $\vec{B}$  aligné avec l'axe de quantification permet de lever la dégénérescence des sous-niveaux en modifiant leur énergie d'une quantité :

$$\Delta E_{z,j} = \mu_B g m_J \|\vec{B}\|,$$

où  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  est le magnéton de Bohr et  $g$  le facteur de Landé, qui s'exprime :

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Pour le niveau  $2^3\text{P}_1$ ,  $S = 1$ ,  $L = 1$  et  $J = 1$  donc  $g = 3/2$ ; pour le niveau  $2^3\text{S}_1$ ,  $S = 1$ ,  $L = 0$  et  $J = 1$  donc  $\boxed{g = 2}$ .

La levée de dégénérescence des sous-niveaux pour le niveau  $2^3S_1$  est donc <sup>2</sup> :

$$\frac{\Delta\omega_{z,\pm 1}}{2\pi\|\vec{B}\|} = \frac{\Delta E_{z,\pm 1}}{h\|\vec{B}\|} = \pm 2,8 \text{ kHz/mG.}$$

### H.3.2 Moments dipolaires

#### H.3.2.1 Couplages

Les couplages entre transitions optiques associées à la transition  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$  sont donnés par les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure H.2 ([Bardou, 1995] p.404, annexe D).

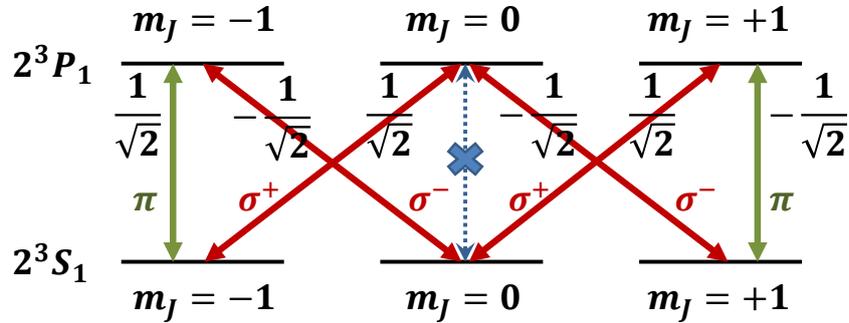


FIGURE H.2 – Dégénérescence Zeeman des niveaux  $2^3S_1$  et  $2^3P_1$  et coefficients de Clebsch-Gordan associés aux transitions optiques. Les transitions rouges sont polarisées  $\sigma+$  et  $\sigma-$ , les transitions vertes polarisées  $\pi$  et la transition bleue est interdite.

Pour la transition  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ , on a  $J = 1$  pour tous les niveaux, on peut donc d'après l'annexe D écrire dans la base  $(|L = 1, m = -1\rangle, |L = 1, m = 0\rangle, |L = 1, m = 1\rangle, |L =$

2.  $\mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$ , soit  $\mu_B/\hbar = 8,80 \times 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}.\text{T}^{-1} = 8,80 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}.\text{mG}^{-1} = 2\pi \times 1,40 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}.\text{mG}^{-1}$ .

$0, m = -1\rangle, |L = 0, m = 0\rangle, |L = 0, m = 1\rangle\rangle :$

$$\widehat{D} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_- - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{d}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{\sqrt{2}} \\ \frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{e}_z.$$

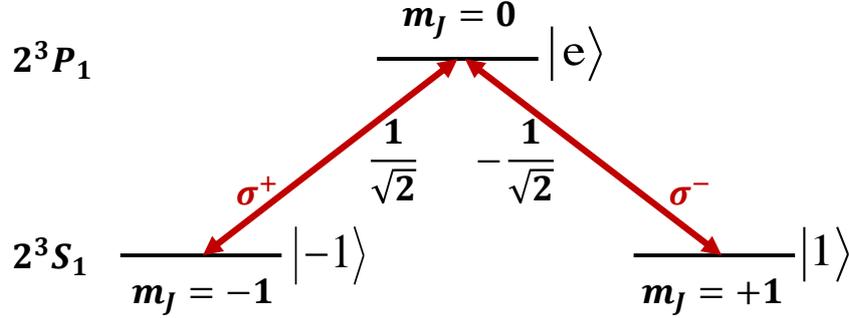
La dernière matrice selon le vecteur  $\vec{e}_z$  fait d'ailleurs apparaître le fait que la transition  $|j = 1, m = 0\rangle \leftrightarrow |j = 1, m = 0\rangle$  est interdite puisque  $C_{(1,0),(1,0)}^{1,0} = 0$ .

### H.3.2.2 Système réduit et pulsations de Rabi

Lorsque l'on considère le pompage des atomes effectués à l'aide des champs optiques, le système se réduit à un système de trois niveaux (Fig. H.3). La matrice de l'opérateur dipolaire peut alors se mettre sous la forme dans la base  $(|e\rangle, |-1\rangle, |1\rangle)$  :

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{\sqrt{2}} \\ \frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_+ + \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{d^*}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\varepsilon}_-.$$

On retrouve bien la forme obtenue dans l'annexe C avec en plus dans l'hélium  $d_{e1} = d_{e-1} = d/\sqrt{2}$  pour les définitions des pulsations de Rabi.


 FIGURE H.3 – Système à trois niveaux en  $\Lambda$  après quelques cycles de pompage.

### H.3.2.3 Valeur de $d$

D'après [Courtade et al., 2002; Drake, 2005], la force d'oscillateur est  $f_0 = 0,54$ . Ceci nous permet de déduire la valeur de  $|d|^2$  (annexe D.5.1) :

$$|d|^2 = f_0 \frac{\hbar e^2}{2m_e \omega_0} = 4,57 \times 10^{-58} \text{ C}^2 \cdot \text{m}^2,$$

ou

$$|d| = 2,14 \times 10^{-29} \text{ C.m.}$$

On en déduit en particulier les valeurs de  $|d_{e1}|$  et  $|d_{e-1}|$  :

$$|d_{e1}| = |d_{e-1}| = 1,51 \times 10^{-29} \text{ C.m.}$$

## H.4 Densité d'atomes métastables

Nous pouvons obtenir un ordre de grandeur de la densité d'atomes métastables dans la cellule grâce à la mesure de sa transmission initiale sans champ de couplage et pour un champ de sonde polarisé circulairement.

Si le champ sonde est très faible, on peut considérer qu'il ne modifie pas les populations et que la susceptibilité du système est donnée par celle d'un système à deux niveaux pour chacune des transitions excitées<sup>3</sup>. Cela donne à résonance, en présence d'élargissement

3. Le système est bien constitué des six sous-niveaux ici.

Doppler  $W_D$  et pour un champ s'approchant de 0 :

$$\text{Im}[\chi] = \frac{2}{3} n \frac{|d_{e1}|^2}{\varepsilon_0 \hbar \left( W_D + \frac{\Gamma}{2} \right)},$$

où  $n$  est la densité d'atomes métastables et  $d_{e1}$  l'élément de la matrice dipolaire selon la transition optique  $2^3S_1, m_z = +1 \leftrightarrow 2^3P_1, m_z = 0$  ou  $2^3S_1, m_z = 0 \leftrightarrow 2^3P_1, m_z = -1$  (ils sont identiques puisque les coefficients de Clebsch-Gordan associés à ces transitions sont égaux, voir figure H.2). Le coefficient  $2/3$  vient du fait que seulement deux sous-niveaux Zeeman de l'état  $2^3S_1$  peuvent être couplés et participer à l'absorption.

Nous pouvons alors exprimer la densité en fonction de la transmission initiale mesurée (annexe B) :

$$n = -\frac{3}{2} \frac{c}{\omega_0 L_{cell}} \frac{\varepsilon_0 \hbar}{|d_{e1}|^2} \left( W_D + \frac{\Gamma}{2} \right) \ln T_0,$$

où  $L_{cell}$  est la longueur de la cellule.

### Cellule de 2 cm

Pour les expériences faites avec la cellule de 2 cm, nous avons avec nos conditions expérimentales une transmission initiale aux alentours de 40%. Cela nous donne une densité d'atomes métastables pour  $W_D/2\pi = 0,86$  GHz et  $\Gamma/2\pi = 22,8$  MHz :

$$n \approx 2,6 \times 10^{11} \text{ atomes.cm}^{-3}.$$

### Cellule de 6 cm

Pour les expériences faites avec la cellule de 6 cm, nous avons avec nos conditions expérimentales une transmission initiale aux alentours de 3%. Cela nous donne une densité d'atomes métastables pour  $W_D/2\pi = 0,86$  GHz et  $\Gamma/2\pi = 22,8$  MHz :

$$n \approx 3,4 \times 10^{11} \text{ atomes.cm}^{-3}.$$

Remarque : la densité d'atomes métastables dépend à priori de la pression dans la cellule et de la décharge RF. Cette décharge ne s'effectue pas de la même façon selon la cellule utilisée (position des électrodes, diamètre...) et la densité peut donc légèrement varier selon les conditions.



# Annexe I

## Cavités optiques

Cette annexe rappelle les bases au sujet des cavités optiques. Elle regroupe aussi les calculs des modèles présentés dans ce manuscrit et elle explique les modèles utilisés pour la résolution numérique.

### I.1 Cavité dans le vide

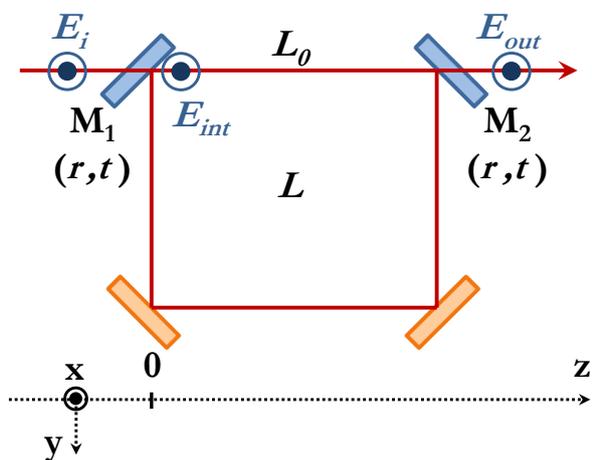


FIGURE I.1 – Schéma d'une cavité en anneau dans le vide de longueur totale  $L$ .

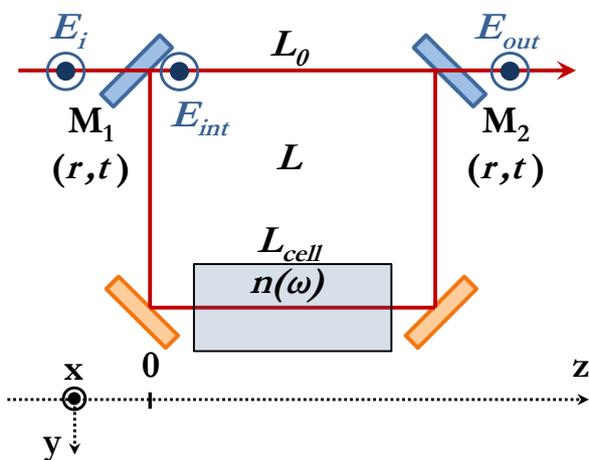


FIGURE I.2 – Schéma d'une cavité en anneau de longueur  $L$  contenant un milieu dispersif d'indice complexe  $n(\omega)$  et de longueur  $L_{cell}$ .

Considérons la cavité de la figure I.1, de longueur  $L$ . On note  $r$  et  $t$  les coefficients

de réflexion et de transmission en amplitude pour des miroirs d'entrée  $M_1$  et de sortie  $M_2$  identiques. On note les coefficients de réflexion et de transmission en intensité  $R$  et  $T$  tels que  $R + T = |r|^2 + |t|^2 = 1$ . Les deux autres miroirs sont supposés parfaitement réfléchissants. Un champ incident  $\vec{E}_i = \frac{E_i}{2} e^{-i(\omega t - \frac{\omega}{c}z)} \vec{e}_x + cc$  arrive sur la cavité.  $E_i$  et  $E_{out}$  sont les amplitudes des champs incident et sortant respectivement.  $E_{int}$  est l'amplitude du champ à l'intérieur de la cavité juste après le miroir  $M_1$ .

Le champ à l'intérieur de la cavité après le miroir  $M_1$  est lié au champ incident par :

$$E_{int} = tE_i + r^2 E_{int} e^{i\Delta\phi},$$

où  $\Delta\phi = L\frac{\omega}{c}$  est la phase accumulée sur un tour de longueur  $L$ . De même, le champ sortant de la cavité peut être lié au champ interne par :

$$E_{out} = tE_{int} e^{i\Delta\phi_0},$$

où  $\Delta\phi_0 = L_0\frac{\omega}{c}$  est la phase accumulée sur la portion entre les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  de longueur  $L_0$ .

La réponse spectrale en transmission pour un champ monochromatique de pulsation  $\omega$  est donc donnée pour cette cavité par <sup>1</sup> :

$$t_{cav}(\omega) = \frac{E_{out}}{E_i} = \frac{t^2 e^{i\Delta\phi_0}}{1 - r^2 e^{i\Delta\phi}} = \frac{T e^{i\Delta\phi_0}}{1 - R e^{i\Delta\phi}} = \frac{T e^{iL_0\frac{\omega}{c}}}{1 - R e^{iL\frac{\omega}{c}}}.$$

La transmission en intensité de la cavité est alors donnée par :

$$T_{cav}(\omega) = \frac{I_{out}}{I_i} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos L\frac{\omega}{c}}.$$

Il est également possible de réécrire la transmission :

$$T_{cav}(\Delta\phi) = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2 \frac{\Delta\phi}{2})} = \frac{T^2}{(1 - R)^2 (1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2})},$$

---

1. On peut aussi arriver à ce résultat en additionnant les champs après chaque tour et en utilisant la somme d'une série géométrique.

soit en posant  $m = \frac{4R}{T^2}$  :

$$T_{cav}(\Delta\phi) = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}}.$$

Si nous notons maintenant  $\Delta\phi_{1/2}$  la largeur de la résonance à mi-hauteur, nous pouvons écrire :

$$T_{cav}(\Delta\phi_{1/2}/2) = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\Delta\phi_{1/2}/2}{2}} = \frac{1}{2},$$

soit

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\Delta\phi_{1/2}}{4} &= \frac{1}{m} \\ \Delta\phi_{1/2} &= 4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

et finalement  $\Delta\phi_{1/2} = 4 \arcsin \frac{T}{2\sqrt{R}} = 4 \arcsin \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$ . La finesse est alors définie par :

$$\mathfrak{F} = \frac{2\pi}{\Delta\phi_{1/2}} = \frac{2\pi}{4 \arcsin 1/\sqrt{m}} = \frac{\pi}{2 \arcsin 1/\sqrt{m}}.$$

Pour des coefficients de réflexion R supérieurs à 0,54,  $m \geq 10$  et il est possible de considérer  $m \gg 1$  et d'exprimer alors :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{1/2} &= 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}, \\ \mathfrak{F} &= \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R}. \end{aligned}$$

### Faibles pertes

Il est aussi usuel de se placer dans l'approximation des faibles pertes ( $R \approx 1$  et  $T \ll 1$ ) :

$$\mathfrak{F} \approx \frac{\pi}{T} = \frac{2\pi}{\Pi}$$

où  $\Pi = 2T$  représente alors les pertes de la cavité.

### Durée de vie

A l'image d'une réponse lorentzienne, on définit la durée de vie des photons dans la cavité comme l'inverse de la largeur spectrale à mi-hauteur  $\Delta\omega_{1/2}$  :

$$\tau_{cav} = \frac{1}{\Delta\omega_{1/2}} = \frac{L}{c\Delta\phi_{1/2}},$$

soit

$$\tau_{cav} = \tau_{tour} \frac{2\pi}{\mathfrak{F}},$$

où  $\tau_{tour} = L/c$  est la durée de parcours d'un tour de la cavité. Il est aussi usuel de définir alors le nombre d'oscillations, ou le nombre de tours dans la cavité par  $N = 2\pi/\mathfrak{F}$ .

## I.2 Cavité contenant un milieu dispersif

Considérons maintenant qu'un milieu dispersif de longueur  $L_{cell}$  et d'indice de réfraction complexe  $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$  est introduit dans cette cavité, tel que représenté sur la figure I.2. La phase complexe accumulée sur un tour par le champ est cette fois-ci donnée par

$$\Delta\phi_c = (n(\omega)L_{cell} + L_{vac})\frac{\omega}{c},$$

où  $L = L_{cell} + L_{vac}$ . La phase complexe accumulée sur la portion de longueur  $L_0$  est toujours donnée par

$$\Delta\phi_{0,c} = L_0\frac{\omega}{c}.$$

La réponse en transmission de la cavité à un champ monochromatique est alors donnée en amplitude par

$$t_{cav}(\omega) = \frac{E_{out}}{E_i} = \frac{T \exp\left[iL_0\frac{\omega}{c}\right]}{1 - R \exp\left[i(n(\omega)L_{cell} + L_{vac})\frac{\omega}{c}\right]},$$

et en intensité par

$$T_{cav}(\omega) = \frac{T^2}{1 + R^2 \exp\left[-2n_I(\omega)L_{cell}\frac{\omega}{c}\right] + 2R \exp\left[-n_I(\omega)L_{cell}\frac{\omega}{c}\right] \cos\left[(n_R(\omega)L_{cell} + L_{vac})\frac{\omega}{c}\right]}.$$

En notant  $R' = R \exp \left[ -n_I(\omega) L_{cell} \frac{\omega}{c} \right]$  et  $\Delta\phi' = (n_R(\omega) L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega}{c}$  la phase accumulée sur un tour, nous pouvons réexprimer  $T_{cav}$  :

$$T_{cav}(\Delta\phi) = \frac{T_{max}}{1 + m' \sin^2 \frac{\Delta\phi'}{2}},$$

où  $m'$  est défini par  $m' = \frac{4R'}{(1-R')^2}$  et  $T_{max} = \frac{T^2}{(1-R')^2}$  est le maximum de transmission de la cavité.

Si on suppose la cavité excitée par un champ monochromatique, et que l'on note  $T_m$  et  $A_m$  la transmission et l'absorption en intensité introduites par le milieu dispersif, telles que

$$\exp \left[ -n_I(\omega) L_{cell} \frac{\omega}{c} \right] = \sqrt{T_m} = \sqrt{1 - A_m},$$

on peut exprimer la largeur à mi-hauteur :

$$\Delta\phi'_{1/2} = 4 \arcsin \frac{1 - R\sqrt{T_m}}{2\sqrt{RT_m^{\frac{1}{4}}}}.$$

Si  $R\sqrt{T_m} = R' > 0,54$  (équivalent à  $m' \gg 1$ ), ceci se réécrit :

$$\Delta\phi'_{1/2} = 2 \frac{1 - R\sqrt{T_m}}{\sqrt{RT_m^{\frac{1}{4}}}},$$

et la finesse s'exprime

$$\mathfrak{F}' = \pi \frac{\sqrt{RT_m^{\frac{1}{4}}}}{1 - R\sqrt{T_m}}.$$

Nous obtenons dans l'approximation des faibles pertes ( $R \approx 1$ ,  $T \ll 1$  et  $A_m \ll 1$ ) :

$$\mathfrak{F}' \approx \frac{\pi}{T + \frac{A_m}{2}} = \frac{2\pi}{\Pi'},$$

avec  $\Pi' = 2T + A_m$  les pertes totales dans la cavité.

Remarquons que ces formules correspondent à celles obtenues dans le cas où l'on considère par exemple des miroirs imparfaits et des pertes supplémentaires dans la cavité.

## I.3 Réponse temporelle d'une cavité optique

### I.3.1 Définitions

Supposons la même cavité contenant un milieu dispersif d'indice complexe  $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$ . La réponse de la cavité à un champ monochromatique de pulsation  $\omega$  est donnée par (I.2)

$$\tilde{t}_{cav}(\omega) = \frac{T \exp \left[ iL_0 \frac{\omega}{c} \right]}{1 - R \exp \left[ i(n(\omega)L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega}{c} \right]}.$$

Ainsi, la réponse temporelle de la cavité est donnée par :

$$t(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Pour pouvoir calculer analytiquement cette réponse, nous allons faire certaines approximations habituelles.

### I.3.2 Approximations

Supposons que la cavité est résonante pour une pulsation  $\omega_p$ , c'est-à-dire que

$$\exp \left[ i(n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega_p}{c} \right] = 1.$$

Supposons également que  $\omega_l - \omega_p \ll ISL$ , afin de considérer que la réponse de la cavité est donnée seulement par la résonance à  $\omega_p$  que l'on approximera alors par une lorentzienne.

Enfin, supposons que la réponse de la cavité est comprise dans une résonance du milieu dispersif, de telle sorte que l'on puisse développer au premier ordre en  $(\omega - \omega_p)$  l'indice de réfraction :  $n_R(\omega) = n_R(\omega_p) + (\omega - \omega_p) \left. \frac{dn_R}{d\Omega} \right|_{\omega_p}$  et ne considérer que l'ordre 0 de l'indice imaginaire :  $n_I(\omega) = n_I(\omega_p)$ .

La réponse spectrale de la cavité à un champ monochromatique s'exprime avec ces approximations :

$$\tilde{t}_{cav}(\omega) = \frac{T \exp \left[ iL_0 \frac{\omega}{c} \right]}{1 - R \exp \left[ -n_I(\omega_p)L_{cell} \frac{\omega_p}{c} \right] \exp \left[ i \left( \left[ n_R(\omega_p) + (\omega - \omega_p) \left. \frac{dn_R}{d\Omega} \right|_{\omega_p} \right] L_{cell} + L_{vac} \right) \frac{\omega - \omega_p + \omega_p}{c} \right]}.$$

Le dénominateur peut ensuite s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{cav}(\omega) = & 1 - R \exp \left[ -n_I(\omega_p) L_{cell} \frac{\omega_p}{c} \right] \exp \left[ i(n_R(\omega_p) L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega_p}{c} \right] \\ & \times \exp \left[ i \left( \left[ n_R(\omega_p) + (\omega - \omega_p) \frac{dn_R}{d\Omega} \Big|_{\omega_p} + \omega_p \frac{dn_R}{d\Omega} \Big|_{\omega_p} \right] L_{cell} + L_{vac} \right) \frac{\omega - \omega_p}{c} \right], \end{aligned}$$

qui se réécrit au premier ordre en  $\omega - \omega_p$  et en notant  $R' = R \exp \left[ -n_I(\omega_p) L_{cell} \frac{\omega_p}{c} \right]$  et  $n_g(\omega_p) = n_R(\omega_p) + \omega_p \frac{dn_R}{d\Omega} \Big|_{\omega_p}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{cav}(\omega) = & 1 - R' \exp \left[ i(n_g(\omega_p) L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega - \omega_p}{c} \right], \\ \tilde{D}_{cav}(\omega) = & 1 - R' \left( 1 + i(n_g(\omega_p) L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega - \omega_p}{c} \right). \end{aligned}$$

La réponse spectrale de la cavité s'écrit finalement :

$$\tilde{t}_{cav}(\omega) = \frac{T \exp \left[ iL_0 \frac{\omega}{c} \right]}{1 - R' - iR' [n_g(\omega_p) L_{cell} + L_{vac}] \frac{\omega - \omega_p}{c}}.$$

Si on définit maintenant  $\tau_{tour}^g = \frac{L_{vac} + n_g L_{cell}}{c}$  le délai de groupe pour parcourir un tour de la cavité, cela se réexprime :

$$\boxed{\tilde{t}_{cav}(\omega) = T_0 \frac{\exp \left[ iL_0 \frac{\omega}{c} \right]}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega - \omega_p)},}$$

avec  $\gamma_c = \frac{2(1-R')}{R' \tau_{tour}^g}$  et  $T_0 = \frac{T}{R' \tau_{tour}^g}$ .

### I.3.3 Réponse temporelle de la cavité

La réponse temporelle de la cavité  $t_{cav}$  est définie par la transformée de Fourier inverse :

$$t_{cav}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}_{cav}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

soit

$$\begin{aligned} t_{cav}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0 \frac{\exp\left[iL_0 \frac{\omega}{c}\right]}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega - \omega_p)} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{T_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left[-i\omega \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right]}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega - \omega_p)} d\omega. \end{aligned}$$

Notons  $f(\omega)$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\exp\left[-i\omega \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right]}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega - \omega_p)} \\ &= \frac{1}{-i} \frac{\exp\left[-i\omega \left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right]}{\omega - \left(\omega_p - i\frac{\gamma_c}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale de  $f$ , nous prolongeons  $f$  dans le plan des  $\omega$  complexes. L'intégrale se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_+} f(\omega) d\omega \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} < 0, \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_-} f(\omega) d\omega \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} > 0. \end{aligned}$$

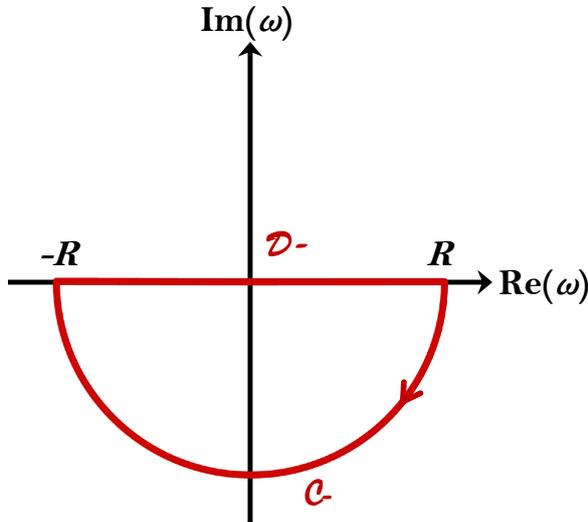
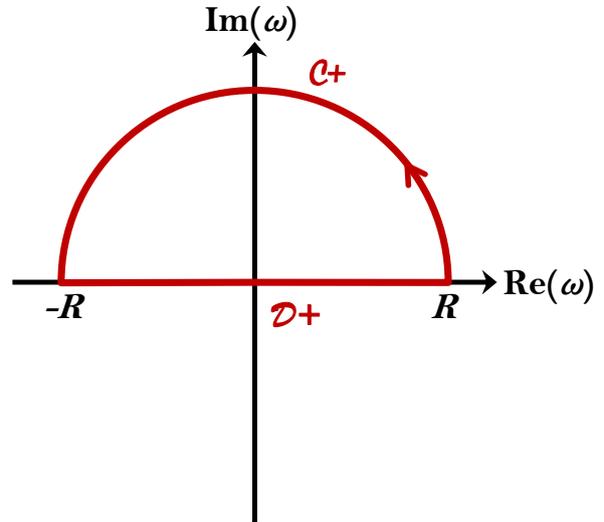
où  $\mathcal{D}_\pm$  définissent les demi-cercles de rayon  $R$  des figures I.3 et I.4.

En effet l'intégrale sur l'arc de cercle  $\mathcal{C}_+$  si  $t - \frac{L_0}{c} < 0$  est telle que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_+} f(\omega) d\omega = 0,$$

et l'intégrale sur l'arc de cercle  $\mathcal{C}_-$  si  $t - \frac{L_0}{c} > 0$  est telle que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_-} f(\omega) d\omega = 0.$$


 FIGURE I.3 – Contour utilisé pour l'intégration dans le plan complexe si  $t - \frac{L_0}{c} > 0$ .

 FIGURE I.4 – Contour utilisé pour l'intégration dans le plan complexe si  $t - \frac{L_0}{c} < 0$ .

- Si  $\boxed{\gamma_c > 0}$

La fonction  $f(\omega)$  possède un seul pôle dans la moitié inférieure du plan complexe  $\omega_{pole} = \omega_p - i\frac{\gamma_c}{2}$ , il en résulte d'après le théorème des résidus que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega &= 0 && \text{pour } t - \frac{L_0}{c} < 0, \\ &= 2\pi \exp\left[-i\omega_{pole}\left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] && \text{pour } t - \frac{L_0}{c} > 0. \end{aligned}$$

La réponse temporelle de la cavité s'écrit finalement :

$$t_{cav}(t) = T_0 \exp\left[-\frac{\gamma_c}{2}\left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] \exp\left[-i\omega_p\left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] H\left(t - \frac{L_0}{c}\right).$$

- Si  $\boxed{\gamma_c < 0}$

La fonction  $f(\omega)$  possède un seul pôle dans la moitié supérieure du plan complexe  $\omega_{pole} = \omega_p - i\frac{\gamma_c}{2}$ , il en résulte d'après le théorème des résidus que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega &= -2\pi \exp\left[-i\omega_{pole}\left(t - \frac{L_0}{c}\right)\right] && \text{pour } t - \frac{L_0}{c} < 0, \\ &= 0 && \text{pour } t - \frac{L_0}{c} > 0. \end{aligned}$$

La réponse temporelle de la cavité s'écrit finalement :

$$t_{cav}(t) = -T_0 \exp \left[ -\frac{\gamma_c}{2} \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] H \left( \frac{L_0}{c} - t \right).$$

## I.4 Front descendant incident sur la cavité

Supposons maintenant un champ incident scalaire de pulsation optique  $\omega_l$  coupé abruptement à l'origine des temps :

$$\bar{E}_i = \frac{E_i}{2} [1 - H(t)] e^{-i\omega_l t},$$

où  $H$  est la fonction de Heavyside définie par  $H(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $H(t) = 1$  si  $t \geq 0$ . L'origine des distance distances  $z$  est choisie sur le miroir  $M_1$ .

Le champ en sortie de cavité s'exprime alors par le produit de convolution suivant avec nos conventions :

$$\bar{E}_{out}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}_i(\tau) t_{cav}(t - \tau) d\tau.$$

On a introduit ici la réponse temporelle causale de la cavité  $t_{cav}$  définie par la transformée de Fourier inverse :

$$t_{cav}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}_{cav}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Connaissant la réponse temporelle de la cavité, le champ en sortie de celle-ci se calcule à partir du produit de convolution suivant avec nos conventions :

$$\bar{E}_{out}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}_i(\tau) t_{cav}(t - \tau) d\tau,$$

- Si  $\boxed{\gamma_c > 0}$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{out}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_i}{2} [1 - H(\tau)] e^{-i\omega_l \tau} T_0 \exp \left[ -\frac{\gamma_c}{2} \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) \right] \\ \times \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) \right] H \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) d\tau, \end{aligned}$$

$$\bar{E}_{out}(t) = \frac{E_i T_0}{2} \exp \left[ -\frac{\gamma c}{2} \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \times \int_{-\infty}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}] \tau} H \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) d\tau.$$

Puis

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}] \tau} H \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) d\tau &= \int_{-\infty}^{t - \frac{L_0}{c}} e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}] \tau} d\tau \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} \leq 0, \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}] \tau} d\tau \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}] \tau} H \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) d\tau &= \frac{e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}] (t - \frac{L_0}{c})}}{-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}} \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} \leq 0, \\ &= \frac{1}{-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma c}{2}} \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} \geq 0, \end{aligned}$$

Et le champ en sortie de cavité est enfin donné par :

$\begin{aligned} \bar{E}_{out}(t) &= \frac{E_i T_0}{2} \frac{1}{\frac{\gamma c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp \left[ -i\omega_l \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] && \text{si } t \leq \frac{L_0}{c}, \\ &= \frac{E_i T_0}{2} \frac{1}{\frac{\gamma c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp \left[ -\frac{\gamma c}{2} \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] && \text{si } t \geq \frac{L_0}{c}. \end{aligned}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

- Si  $\boxed{\gamma_c < 0}$

$$\bar{E}_{out}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_i}{2} [1 - H(\tau)] e^{-i\omega_l \tau} T_0 \exp \left[ -\frac{\gamma_c}{2} \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) \right] \\ \times \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \tau - \frac{L_0}{c} \right) \right] H \left( \frac{L_0}{c} + \tau - t \right) d\tau,$$

$$\bar{E}_{out}(t) = -\frac{E_i T_0}{2} \exp \left[ -\frac{\gamma_c}{2} \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \\ \times \int_{-\infty}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma_c}{2}] \tau} H \left( \frac{L_0}{c} + \tau - t \right) d\tau.$$

Puis

$$\int_{-\infty}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma_c}{2}] \tau} H \left( \frac{L_0}{c} + \tau - t \right) d\tau = \int_{t - \frac{L_0}{c}}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma_c}{2}] \tau} d\tau \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} < 0, \\ = 0 \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma_c}{2}] \tau} H \left( \frac{L_0}{c} + \tau - t \right) d\tau = \frac{1 - e^{[-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma_c}{2}] (t - \frac{L_0}{c})}}{-i(\omega_l - \omega_p) + \frac{\gamma_c}{2}} \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} < 0, \\ = 0 \quad \text{pour } t - \frac{L_0}{c} \geq 0,$$

Et le champ en sortie de cavité est enfin donné par :

$$\boxed{\bar{E}_{out}(t) = \frac{E_i}{2} \frac{T_0}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp \left[ -i\omega_l \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \\ - \frac{E_i}{2} \frac{T_0}{\frac{\gamma_c}{2} - i(\omega_l - \omega_p)} \exp \left[ -\frac{\gamma_c}{2} \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \exp \left[ -i\omega_p \left( t - \frac{L_0}{c} \right) \right] \quad \text{si } t < \frac{L_0}{c}, \\ = 0 \quad \text{si } t \geq \frac{L_0}{c}.}$$

Cette réponse ne respecte pas la causalité. La formule de la réponse de la cavité dans ce cas nous indiquait déjà le problème de causalité : on peut en effet montrer qu'un milieu doit avoir une fonction de transfert nulle tant que  $t < \frac{L_0}{c}$  [Milonni, 2005].

## I.5 Résolution théorique

Soit un milieu dont la dispersion est négative à la pulsation de résonance  $\omega_r$ . L'indice de réfraction  $n_R$  de ce milieu satisfait les conditions suivantes ([Jackson, 1962; Milonni, 2005]) :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} n_R(\omega) &= 1, \\ \lim_{\omega \rightarrow -\infty} n_R(\omega) &= 1, \end{aligned} \tag{I.1}$$

et bien sûr

$$\left. \frac{dn_R(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\omega_r} < 0.$$

Si ce milieu est introduit dans une cavité optique de la figure I.2, la condition de résonance est telle que :

$$\Delta\phi = (n_R(\omega)L_{cell} + L_{vac})\frac{\omega}{c} = 2p\pi.$$

Supposons la cavité résonante pour l'ordre  $p$  à la pulsation  $\omega_p$  et cherchons les pulsations  $\omega$  résonantes au même ordre. Ceci s'écrit :

$$(n_R(\omega)L_{cell} + L_{vac})\frac{\omega}{c} = (n_R(\omega_p)L_{cell} + L_{vac})\frac{\omega_p}{c}. \tag{I.2}$$

Notons alors

$$f(\delta) = \delta L_{vac} + L_{cell}[(\omega_p + \delta)n_R(\omega_p + \delta) - \omega_p n_R(\omega_p)].$$

L'équation I.2 est équivalente à chercher les solutions de  $f(\delta) = 0$ .  $\delta = 0$  est une solution évidente et correspond à la résonance à la pulsation  $\omega_p$ . De plus, la dérivée de  $f$  en 0 est donnée par :

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(\Delta)}{d\Delta} \right|_{\delta=0} &= L_{vac} + L_{cell} \left[ n_R(\omega_p) + \omega_p \left. \frac{dn_R(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\omega_p} \right], \\ &= c\tau_{tour}^g. \end{aligned}$$

Les propriétés I.1 de  $n_R$  sont aussi équivalentes à :

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow +\infty} f(\delta) &= +\infty, \\ \lim_{\delta \rightarrow -\infty} f(\delta) &= -\infty,\end{aligned}$$

Si le délai de groupe pour un tour  $\tau_{tour}^g$  est strictement négatif, on peut montrer par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe  $\delta_1 < 0$  et  $\delta_2 > 0$  tel que

$$f(\delta_1) = f(\delta_2) = 0,$$

et en conclusion :

Si  $\tau_{tour}^g < 0$ , il existe au moins deux pulsations  $\omega_1 < \omega_p$  et  $\omega_2 > \omega_p$  pour lesquelles la cavité est résonante au même ordre  $p$ .

## I.6 Modèle théorique pour les simulations numériques

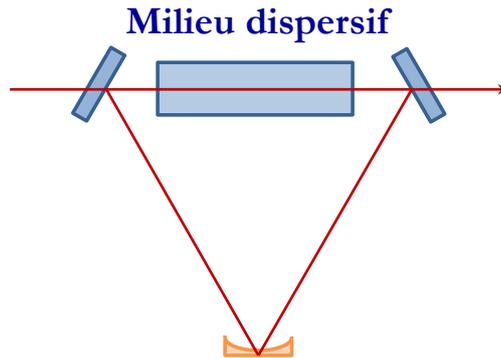


FIGURE I.5 – Schéma de la cavité contenant un milieu dispersif utilisé pour les simulations numériques.

Pour les simulations numériques effectuées, le schéma de cavité considéré est celui de la figure I.5 afin de correspondre au système expérimental. Dans ce cas, la réponse en

transmission de la cavité pour un champ monochromatique est donnée en amplitude par

$$t_{cav}(\omega) = \frac{P \times T \exp \left[ i[n(\omega) - 1]L_{cell} + L_0 \frac{\omega}{c} \right]}{1 - P \times R \exp \left[ i(n(\omega)L_{cell} + L_{vac}) \frac{\omega}{c} \right]},$$

où  $P$  sont les pertes intracavité supplémentaires.

Pour nos simulations, la longueur totale de la cavité est 2,45 m et les coefficients de transmission et réflexion  $T = 1 - R = 2\%$ . Les pertes supplémentaires correspondant aux optiques de polarisation intra-cavité sont prises égales à 1% en intensité, auxquelles s'ajoutent les pertes au niveau des fenêtres de la cellule  $T_{cell} = 0,96 \times 0,96$  (en champ pour deux fenêtres de deux interfaces). Soit finalement  $P = \sqrt{0,99} \times 0,96 \times 0,96$ .

La réponse de la cavité à un front descendant est ensuite obtenue en résolvant numériquement le produit de convolution

$$\bar{E}_{out}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}_i(\tau) t_{cav}(t - \tau) d\tau.$$

### I.6.1 Doublet de gain

Pour les simulations concernant un doublet de gain introduit en cavité, nous avons pris pour l'indice du milieu :

$$n(\delta) = 1 + K \left( \frac{1}{(\delta - \delta_{Res} + i\Gamma)} + \frac{1}{(\delta + \delta_{Res} + i\Gamma)} \right),$$

Les valeurs numériques sont prises telles que :  $K = 0,2$ ,  $\Gamma/2\pi = 4$  MHz et  $\delta_{Res} = 0,75$  MHz.  $L_{cell}$  est pris à 50 cm pour avoir un délai de groupe pour un tour négatif égal à  $\tau_{tour}^g = -3,3$  ns. Les pertes intracavité sont aussi augmentées artificiellement à 29% en intensité pour ne pas dépasser le seuil laser, soit  $P = \sqrt{0,81} T_{cell}$ .

## I.6.2 EIT

Pour les simulations concernant notre système expérimental introduit en cavité, nous avons pris pour l'indice du milieu :

$$n(\delta_R) = 1 - \frac{c \left[ W_D + \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) \right] \ln T_0}{2\omega_0 L} \frac{i(\Gamma_R + \gamma_t) + \delta_R}{[(\Gamma_R + \gamma_t) - i\delta_R] \left[ W_D + \left( \frac{\Gamma}{2} + \gamma_t \right) - i(\Delta_c + \delta_R) \right] + |\Omega_c|^2}.$$

qui est la formule analytique obtenue par la résolution des équations de Bloch optiques appliquée à l'hélium.

### I.6.2.1 EIT désaccordé

Pour que les simulations du chapitre 4 correspondent aux expériences, les valeurs des paramètres sont ajustées à  $L_{cell} = 6$  cm,  $T_0 = 2\%$ ,  $\Delta_c/2\pi = 1,4$  GHz,  $W_D/2\pi = 0,45$  kHz,  $(\Gamma_R + \gamma_t)/2\pi = 12$  kHz et  $\Omega_c/2\pi = 11$  MHz. Elles ont été obtenues à partir de l'ajustement de la figure 4.18.

Nous avons ensuite ajusté le désaccord optique à  $\delta_R = 17$  kHz pour un délai de groupe négatif  $\tau_g \approx 5$   $\mu$ s et  $\delta_R = 3$  kHz pour un délai de groupe positif  $\tau_g \approx 1$   $\mu$ s.

### I.6.2.2 EIT à résonance optique

Pour que les simulations du 4 correspondent aux expériences, les valeurs des paramètres sont ajustées à  $L_{cell} = 6$  cm,  $T_0 = 2\%$ ,  $\Delta_c/2\pi = 0$  GHz,  $W_D/2\pi = 0,46$  kHz,  $(\Gamma_R + \gamma_t)/2\pi = 5,8$  kHz et  $\Omega_c/2\pi = 7,8$  MHz. Le désaccord Raman est aussi pris nul  $\delta_R/2\pi = 0$  kHz. Ces valeurs ont été obtenues à l'aide de l'ajustement du profil de transmission expérimental correspondant.

# Bibliographie

- Abi-Salloum, T. Y. (2010). Electromagnetically induced transparency and Autler-Townes splitting : Two similar but distinct phenomena in two categories of three-level atomic systems. *Phys. Rev. A*, 81 :053836.
- Afzelius, M., Simon, C., de Riedmatten, H., and Gisin, N. (2009). Multimode quantum memory based on atomic frequency combs. *Phys. Rev. A*, 79 :052329.
- Akulshin, A. M., Barreiro, S., and Lezama, A. (1998). Electromagnetically induced absorption and transparency due to resonant two-field excitation of quasidegenerate levels in Rb vapor. *Phys. Rev. A*, 57 :2996–3002.
- Akulshin, A. M., Barreiro, S., and Lezama, A. (1999). Steep anomalous dispersion in coherently prepared Rb vapor. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :4277–4280.
- Akulshin, A. M., McLean, R. J., Sidorov, A. I., and Hannaford, P. (2011). Probing degenerate two-level atomic media by coherent optical heterodyning. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 44 :175502.
- Albert, M., Dantan, A., and Drewsen, M. (2011). Cavity electromagnetically induced transparency and all-optical switching using ion coulomb crystals. *Nat Photon*, 5 :633–636.
- Alzetta, G., Gozzini, A., Moi, L., and Orriols, G. (1976). An experimental method for the observation of RF transitions and laser beat resonances in oriented Na vapour. *Nuovo Cimento*, 36B :5–20.
- Anisimov, P. M., Dowling, J. P., and Sanders, B. C. (2011). Objectively discerning Autler-Townes splitting from electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :163604.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Arimondo, E. (1996). V. coherent population trapping in laser spectroscopy. volume 35 of *Progress in Optics*, pages 257 – 354. Elsevier.
- Arimondo, E. and Orriols, G. (1976). Nonabsorbing atomic coherences by coherent two-photon transitions in a three-level optical pumping. *Nuovo Cimento*, 17 :333–338.
- Aspect, A., Arimondo, E., Kaiser, R., Vansteenkiste, N., and Cohen-Tannoudji, C. (1988). Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :826–829.
- Autler, S. H. and Townes, C. H. (1955). Stark effect in rapidly varying fields. *Phys. Rev.*, 100 :703–722.
- Bardou, F. (1995). *Refroidissement laser sub-recul par résonances noires*. PhD thesis, Université Paris Sud XI, U.F.R. scientifique d’Orsay, Orsay.
- Bergmann, K., Theuer, H., and Shore, B. W. (1998). Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules. *Rev. Mod. Phys.*, 70 :1003–1025.
- Berman, P. R., Steel, D. G., Khitrova, G., and Liu, J. (1988). Effects of radiative decay in four-wave-mixing spectroscopy : Narrow resonances produced by nonconservation of population, alignment, and orientation. *Phys. Rev. A*, 38 :252–262.
- Bigelow, M. S., Lepeshkin, N. N., and Boyd, R. W. (2003a). Observation of ultraslow light propagation in a ruby crystal at room temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :113903.
- Bigelow, M. S., Lepeshkin, N. N., and Boyd, R. W. (2003b). Superluminal and slow light propagation in a room-temperature solid. *Science*, 301 :200–202.
- Bloch, S. (1977). Eighth velocity of light. *Am. J. Phys*, 45 :538–549.
- Bolda, E. L., Chiao, R. Y., and Garrison, J. C. (1993). Two theorems for the group velocity in dispersive media. *Phys. Rev. A*, 48 :3890–3894.
- Boller, K.-J., Imamolu, A., and Harris, S. E. (1991). Observation of electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2593–2596.
- Bonarota, M., Le Gouët, J.-L., and Chanelière, T. (2011). Highly multimode storage in a crystal. *New Journal of Physics*, 13 :013013.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Boyd, R. W., Raymer, M. G., Narum, P., and Harter, D. J. (1981). Four-wave parametric interactions in a strongly driven two-level system. *Phys. Rev. A*, 24 :411–423.
- Brillouin, L. (1914). Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien. *Ann. Physik*, 44 :203.
- Brillouin, L. (1960). *Wave Propagation and Group Velocity*, volume 304. Academic Press New York.
- Casperson, L. and Yariv, A. (1971). Pulse propagation in a high-gain medium. *Phys. Rev. Lett.*, 26 :293–295.
- Chaneliere, T., Matsukevich, D. N., Jenkins, S. D., Lan, S.-Y., Kennedy, T. A. B., and Kuzmich, A. (2005). Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories. *Nature*, 438 :833–836.
- Chen, Y.-H., Lee, M.-J., Hung, W., Chen, Y.-C., Chen, Y.-F., and Yu, I. A. (2012). Demonstration of the interaction between two stopped light pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :173603.
- Chiao, R. Y. (1993). Superluminal (but causal) propagation of wave packets in transparent media with inverted atomic populations. *Phys. Rev. A*, 48 :R34–R37.
- Chow, W. W., Gea-Banacloche, J., Pedrotti, L. M., Sanders, V. E., Schleich, W., and Scully, M. O. (1985). The ring laser gyro. *Rev. Mod. Phys.*, 57 :61–104.
- Chu, S. and Wong, S. (1982). Linear pulse propagation in an absorbing medium. *Phys. Rev. Lett.*, 48 :738–741.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., and Laloë, F. (1980). *Mécanique Quantique I*. Hermann.
- Courtade, E., Marion, F., Nacher, P.-J., Tastevin, G., Kiersnowski, K., and Dohnalik, T. (2002). Magnetic field effects on the 1083 nm atomic line of helium. *Eur. Phys. J. D*, 21 :25–55.
- Cowan, R. (1981). *The theory of atomic structure and spectra*, volume 3. Univ of California Pr.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Crisp, M. D. (1971). Concept of group velocity in resonant pulse propagation. *Phys. Rev. A*, 4 :2104–2108.
- Crouzil, T. and Bouchene, M. A. (2009). Propagation of light pulses in a fast-light medium : Interplay between gain and dispersion. *Phys. Rev. A*, 80 :055802.
- Dantan, A., Reinaudi, G., Sinatra, A., Laloë, F., Giacobino, E., and Pinard, M. (2005). Long-lived quantum memory with nuclear atomic spins. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :123002.
- Diener, G. (1996). Superluminal group velocities and information transfer. *Physics Letters A*, 223 :327 – 331.
- Dorschner, T., Haus, H., Holz, M., Smith, I., and Stutz, H. (1980). Laser gyro at quantum limit. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 16 :1376–1379.
- Drake, G. (2005). *Springer handbook of atomic, molecular, and optical physics*, volume 1. Springer.
- Drake, G. W. F. (1971). Theory of relativistic magnetic dipole transitions : Lifetime of the metastable  $2^3S$  state of the heliumlike ions. *Phys. Rev. A*, 3 :908–915.
- Eilam, A., Azuri, I., Sharypov, A. V., Wilson-Gordon, A. D., and Friedmann, H. (2010). Spatial optical memory based on coherent population oscillations. *Opt. Lett.*, 35 :772–774.
- Figueroa, E., Vewinger, F., Appel, J., and Lvovsky, A. I. (2006). Decoherence of electromagnetically induced transparency in atomic vapor. *Opt. Lett.*, 31 :2625–2627.
- Fitzsimmons, W. A., Lane, N. F., and Walters, G. K. (1968). Diffusion of  $\text{He}(2^3S_1)$  in helium gas;  $2^3S_1 - 1^1S_0$  interaction potentials at long range. *Phys. Rev.*, 174 :193–200.
- Fleischhauer, M., Imamoglu, A., and Marangos, J. P. (2005). Electromagnetically induced transparency : Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, 77 :633–673.
- Fleischhauer, M., Keitel, C., Narducci, L., Scully, M., Zhu, S.-Y., and Zubairy, M. (1992). Lasing without inversion : interference of radiatively broadened resonances in dressed atomic systems. *Optics Communications*, 94 :599 – 608.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Fleischhauer, M. and Lukin, M. D. (2000). Dark-state polaritons in electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :5094–5097.
- Friedmann, H., Wilson-Gordon, A. D., and Rosenbluh, M. (1986). Extraresonances in degenerate four-wave mixing induced by sequential decay. *Phys. Rev. A*, 33 :1783–1787.
- Fuchs, J., Duffy, G. J., Rowlands, W. J., Lezama, A., Hannaford, P., and Akulshin, A. M. (2007). Electromagnetically induced transparency and absorption due to optical and ground-state coherences in  ${}^6\text{Li}$ . *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 40 :1117.
- Garrett, C. G. B. and McCumber, D. E. (1970). Propagation of a gaussian light pulse through an anomalous dispersion medium. *Phys. Rev. A*, 1 :305–313.
- Gehring, G. M., Schweinsberg, A., Barsi, C., Kostinski, N., and Boyd, R. W. (2006). Observation of backward pulse propagation through a medium with a negative group velocity. *Science*, 312 :895–897.
- George, M. C., Lombardi, L. D., and Hessels, E. A. (2001). Precision microwave measurement of the  $2^3\text{P}_1$ - $2^3\text{P}_0$  interval in atomic helium : A determination of the fine-structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :173002.
- Ghosh, J. (2009). *Coherent Manipulation and Storage of Light in Three-Level Atomic Media*. PhD thesis, School of Physical Sciences, Jawaharlal Nehru University, New Delhi.
- Ghosh, J., Ghosh, R., Goldfarb, F., Le Gouët, J.-L., and Bretenaker, F. (2009). Analysis of electromagnetically induced transparency and slow light in a hot vapor of atoms undergoing collisions. *Phys. Rev. A*, 80 :023817.
- Goldfarb, F., Lauprêtre, T., Ruggiero, J., Bretenaker, F., Ghosh, J., and Ghosh, R. (2009). Electromagnetically-induced transparency, slow light, and negative group velocities in a room temperature vapor of  ${}^4\text{He}^*$ . *Comptes Rendus Physique*, 10(10) :919 – 926.
- Goldfarb, F., Ghosh, J., David, M., Ruggiero, J., Chanelière, T., Le Gouët, J.-L., Gilles, H., Ghosh, R., and Bretenaker, F. (2008). Observation of ultra-narrow electromagnetically

## BIBLIOGRAPHIE

---

- induced transparency and slow light using purely electronic spins in a hot atomic vapor. *EPL*, 82(5) :54002.
- Grynberg, G., Aspect, A., and Fabre, C. (1997). *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*. Ellipses, Paris.
- Ham, B., Hemmer, P., and Shahriar, M. (1997). Efficient electromagnetically induced transparency in a rare-earth doped crystal. *Optics Communications*, 144 :227 – 230.
- Harris, S. E., Field, J. E., and Imamoglu, A. (1990). Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :1107–1110.
- Harris, S. E., Field, J. E., and Kasapi, A. (1992). Dispersive properties of electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. A*, 46 :R29–R32.
- Harris, S. E. and Hau, L. V. (1999). Nonlinear optics at low light levels. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :4611–4614.
- Hau, L. V., Harris, S. E., Dutton, Z., and Behroozi, C. H. (1999). Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, 397 :594–598.
- Imamoglu, A. and Harris, S. E. (1989). Lasers without inversion : interference of dressed lifetime-broadened states. *Opt. Lett.*, 14 :1344–1346.
- Jackson, J. D. (1962). *Classical Electrodynamics*.
- Jeong, H., Dawes, A. M. C., and Gauthier, D. J. (2006). Direct observation of optical precursors in a region of anomalous dispersion. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :143901.
- Joshi, A. and Xiao, M. (2004). Cavity quantum electrodynamics with quantum interference in a three-level atomic system. In *International Quantum Electronics Conference*. Optical Society of America.
- Kandula, D. Z., Gohle, C., Pinkert, T. J., Ubachs, W., and Eikema, K. S. E. (2010). Extreme ultraviolet frequency comb metrology. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :063001.
- Kash, M. M., Sautenkov, V. A., Zibrov, A. S., Hollberg, L., Welch, G. R., Lukin, M. D., Rostovtsev, Y., Fry, E. S., and Scully, M. O. (1999). Ultraslow group velocity and

## BIBLIOGRAPHIE

---

- enhanced nonlinear optical effects in a coherently driven hot atomic gas. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :5229–5232.
- Ku, P.-C., Sedgwick, F., Chang-Hasnain, C. J., Palinginis, P., Li, T., Wang, H., Chang, S.-W., and Chuang, S.-L. (2004). Slow light in semiconductor quantum wells. *Opt. Lett.*, 29 :2291–2293.
- Kumar, S., Lauprêtre, T., Ghosh, R., Bretenaker, F., and Goldfarb, F. (2011). Interacting double dark resonances in a hot atomic vapor of helium. *Phys. Rev. A*, 84 :023811.
- Lauprêtre, T., Kumar, S., Berger, P., Faoro, R., Ghosh, R., Bretenaker, F., and Goldfarb, F. (2012a). Ultranarrow resonance due to coherent population oscillations in a  $\Lambda$ -type atomic system. *Phys. Rev. A*, 85 :051805.
- Lauprêtre, T., Proux, C., Ghosh, R., Schwartz, S., Goldfarb, F., and Bretenaker, F. (2011). Photon lifetime in a cavity containing a slow-light medium. *Opt. Lett.*, 36 :1551–1553.
- Lauprêtre, T., Ruggiero, J., Ghosh, R., Bretenaker, F., and Goldfarb, F. (2009). Observation of electromagnetically induced transparency and slow light in the dark state - bright state basis. *Opt. Express*, 17 :19444–19450.
- Lauprêtre, T., Schwartz, S., Ghosh, R., Carusotto, I., Goldfarb, F., and Bretenaker, F. (2012b). Anomalous ring-down effects and breakdown of the decay rate concept in optical cavities with negative group delay. *New Journal of Physics*, 14 :043012.
- Lee, J. H., Song, J. J., Scarparo, M. A. F., and Levenson, M. D. (1980). Coherent population oscillations and hole burning observed in  $\text{Sm}^{+2}:\text{CaF}_2$  using polarization spectroscopy. *Opt. Lett.*, 5 :196–198.
- Lezama, A., Barreiro, S., Lipsich, A., and Akulshin, A. M. (1999). Coherent two-field spectroscopy of degenerate two-level systems. *Phys. Rev. A*, 61 :013801.
- Li, Q., Zhang, Z., Wang, J., Qiu, M., and Su, Y. (2009). Fast light in silicon ring resonator with resonance-splitting. *Opt. Express*, 17 :933–940.
- Lipsich, A., Barreiro, S., Akulshin, A. M., and Lezama, A. (2000). Absorption spectra of driven degenerate two-level atomic systems. *Phys. Rev. A*, 61 :053803.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Liu, C., Dutton, Z., Behroozi, C. H., and Hau, L. V. (2001). Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses. *Nature*, 409 :490–493.
- Longdell, J. J., Fraval, E., Sellars, M. J., and Manson, N. B. (2005). Stopped light with storage times greater than one second using electromagnetically induced transparency in a solid. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :063601.
- Lounis, B. and Cohen-Tannoudji, C. (1992). Coherent population trapping and fano profiles. *J. Phys. II France*, 2 :579–592.
- Lukin, M. D., Fleischhauer, M., Scully, M. O., and Velichansky, V. L. (1998). Intracavity electromagnetically induced transparency. *Opt. Lett.*, 23 :295–297.
- Messiah, A. (1995). *Mécanique Quantique, Tome 2*. Dunod.
- Mikhailov, E. E., Sautenkov, V. A., Novikova, I., and Welch, G. R. (2004). Large negative and positive delay of optical pulses in coherently prepared dense Rb vapor with buffer gas. *Phys. Rev. A*, 69 :063808.
- Milonni, P. (2005). *Slow Light, Fast Light and Left-Handed Light*. Institute of Physics, Bristol and Philadelphia, PA.
- Mitchell, M. W. and Chiao, R. Y. (1997). Negative group delay and fronts in a causal system : An experiment with very low frequency bandpass amplifiers. *Physics Letters A*, 230 :133 – 138.
- Mücke, M., Figueroa, E., Bochmann, J., Hahn, C., Murr, K., Ritter, S., Villas-Boas, C. J., and Rempe, G. (2010). Electromagnetically induced transparency with single atoms in a cavity. *Nature*, 465 :755–758.
- Müller, G., Müller, M., Wicht, A., Rinkleff, R.-H., and Danzmann, K. (1997). Optical resonator with steep internal dispersion. *Phys. Rev. A*, 56 :2385–2389.
- Nacher, P. and Leduc, M. (1985). Optical pumping in  $^3\text{He}$  with a laser. *J. Phys. France*, 46 :2057–2073.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Novikova, I., Walsworth, R., and Xiao, Y. (2012). Electromagnetically induced transparency-based slow and stored light in warm atoms. *Laser & Photonics Reviews*, 6 :333–353.
- Nunn, J., Reim, K., Lee, K. C., Lorenz, V. O., Sussman, B. J., Walmsley, I. A., and Jaksch, D. (2008). Multimode memories in atomic ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :260502.
- Pant, R., Byrnes, A., Poulton, C. G., Li, E., Choi, D.-Y., Madden, S., Luther-Davies, B., and Eggleton, B. J. (2012). Photonic-chip-based tunable slow and fast light via stimulated brillouin scattering. *Opt. Lett.*, 37 :969–971.
- Papademetriou, S., Chakmakjian, S., and C. R. Stroud, J. (1992). Optical subharmonic Rabi resonances. *J. Opt. Soc. Am. B*, 9 :1182–1188.
- Pastor, P. C., Giusfredi, G., Natale, P. D., Hagel, G., de Mauro, C., and Inguscio, M. (2004). Absolute frequency measurements of the  $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_{0,1,2}$  atomic helium transitions around 1083 nm. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :023001.
- Pati, G. S., Salit, M., Salit, K., and Shahriar, M. S. (2007). Demonstration of a tunable-bandwidth white-light interferometer using anomalous dispersion in atomic vapor. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :133601.
- Pereira Dos Santos, F., Léonard, J., Wang, J., Barrelet, C. J., Perales, F., Rasel, E., Unnikrishnan, C. S., Leduc, M., and Cohen-Tannoudji, C. (2001). Bose-Einstein condensation of metastable helium. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :3459–3462.
- Phillips, D. F., Fleischhauer, A., Mair, A., Walsworth, R. L., and Lukin, M. D. (2001). Storage of light in atomic vapor. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :783–786.
- Pichanick, F. M. J., Swift, R. D., Johnson, C. E., and Hughes, V. W. (1968). Experiments on the  $2^3P$  state of helium I. A measurement of the  $2^3P_1 - 2^3P_2$  fine structure. *Phys. Rev.*, 169 :55–78.
- Pinard, M. and Laloë, F. (1980). The role of the pauli principle in metastability exchange collisions. *J. Phys. France*, 41 :799–818.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Piredda, G. and Boyd, R. (2007). Slow light by means of coherent population oscillations : laser linewidth effects. *Journal of the European Optical Society-Rapid Publications*, 2 :07004.
- Purves, G. T., Adams, C. S., and Hughes, I. G. (2006). Sagnac interferometry in a slow-light medium. *Phys. Rev. A*, 74 :023805.
- Robert, A., Sirjean, O., Browaeys, A., Poupard, J., Nowak, S., Boiron, D., Westbrook, C. I., and Aspect, A. (2001). A Bose-Einstein condensate of metastable atoms. *Science*, 292 :461–464.
- Safavi-Naeini, A. H., Alegre, T. P. M., Chan, J., Eichenfield, M., Winger, M., Lin, Q., Hill, J. T., Chang, D. E., and Painter, O. (2011). Electromagnetically induced transparency and slow light with optomechanics. *Nature*, 472 :69–73.
- Salit, M., Pati, G. S., Salit, K., and Shahriar, M. S. (2007). Fast-light for astrophysics : super-sensitive gyroscopes and gravitational wave detectors. *Journal of Modern Optics*, 54 :2425–2440.
- Schwarz, S. and Tan, T. (1967). Wave interactions in saturable absorbers. *Applied Physics Letters*, 10 :4–7.
- Scully, M. and Zubairy, M. (1997). *Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- Shahriar, M. S., Pati, G. S., Tripathi, R., Gopal, V., Messall, M., and Salit, K. (2007). Ultrahigh enhancement in absolute and relative rotation sensing using fast and slow light. *Phys. Rev. A*, 75 :053807.
- Sharypov, A. V. and Wilson-Gordon, A. D. (2011). Narrowband-biphoton generation due to long-lived coherent population oscillations. *Phys. Rev. A*, 84 :033845.
- Shi, Z., Boyd, R. W., Camacho, R. M., Vudyasetu, P. K., and Howell, J. C. (2007). Slow-light fourier transform interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :240801.
- Shlyapnikov, G. V., Walraven, J. T. M., Rahmanov, U. M., and Reynolds, M. W. (1994). Decay kinetics and bose condensation in a gas of spin-polarized triplet helium. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :3247–3250.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Simon, C., Afzelius, M., Appel, J., Boyer de la Giroday, A., Dewhurst, S. J., Gisin, N., Hu, C. Y., Jelezko, F., Kröll, S., Müller, J. H., Nunn, J., Polzik, E. S., Rarity, J. G., De Riedmatten, H., Rosenfeld, W., Shields, A. J., Sköld, N., Stevenson, R. M., Thew, R., Walmsley, I. A., Weber, M. C., Weinfurter, H., Wrachtrup, J., and Young, R. J. (2010). Quantum memories. *The European Physical Journal D*, 58 :1–22.
- Smith, D. D., Chang, H., Arissian, L., and Diels, J. C. (2008). Dispersion-enhanced laser gyroscope. *Phys. Rev. A*, 78 :053824.
- Smith, R. (1970). The velocities of light. *American Journal of Physics*, 38 :978.
- Sommerfeld, A. (1914). Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien. *Ann. Physik*, 44 :177.
- Song, J. J., Lee, J. H., and Levenson, M. D. (1978). Picosecond relaxation measurements by polarization spectroscopy in condensed phases. *Phys. Rev. A*, 17 :1439–1447.
- Steinberg, A. M. and Chiao, R. Y. (1994). Dispersionless, highly superluminal propagation in a medium with a gain doublet. *Phys. Rev. A*, 49 :2071–2075.
- Stenner, M. D., Gauthier, D. J., and Neifeld, M. A. (2003). The speed of information in a "fast-light" optical medium. *Nature*, 425 :695–698.
- Stenner, M. D., Gauthier, D. J., and Neifeld, M. A. (2005). Fast causal information transmission in a medium with a slow group velocity. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :053902.
- Turukhin, A. V., Sudarshanam, V. S., Shahriar, M. S., Musser, J. A., Ham, B. S., and Hemmer, P. R. (2001). Observation of ultraslow and stored light pulses in a solid. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :023602.
- van Exter, M. P., Hamel, W. A., and Woerdman, J. P. (1991). Nonuniform phase diffusion in a laser. *Phys. Rev. A*, 43 :6241–6246.
- van Rooij, R., Borbely, J. S., Simonet, J., Hoogerland, M. D., Eikema, K. S. E., Rozendaal, R. A., and Vassen, W. (2011). Frequency metrology in quantum degenerate helium : Direct measurement of the  $2^3S_1 \rightarrow 2^1S_0$  transition. *Science*, 333 :196–198.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Wang, H., Goorskey, D. J., Burkett, W. H., and Xiao, M. (2000a). Cavity-linewidth narrowing by means of electromagnetically induced transparency. *Opt. Lett.*, 25 :1732–1734.
- Wang, L. J., Kuzmich, A., and Dogariu, A. (2000b). Gain-assisted superluminal light propagation. *Nature*, 406 :277–279.
- Wei, D., Chen, J. F., Loy, M. M. T., Wong, G. K. L., and Du, S. (2009). Optical precursors with electromagnetically induced transparency in cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :093602.
- Wieman, C. and Hänsch, T. W. (1976). Doppler-free laser polarization spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 36 :1170–1173.
- Wilson-Gordon, A. D. and Friedmann, H. (1989). Ultranarrow extraresonant antiholes in pump-probe spectroscopy induced by inelastic collisions. *Opt. Lett.*, 14 :390–392.
- Wong, V., Bennink, R. S., Marino, A. M., Boyd, R. W., Stroud, C. R., and Narducci, F. A. (2004). Influence of coherent raman scattering on coherent population trapping in atomic sodium vapor. *Phys. Rev. A*, 70 :053811.
- Wu, H., Gea-Banacloche, J., and Xiao, M. (2008). Observation of intracavity electromagnetically induced transparency and polariton resonances in a doppler-broadened medium. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :173602.
- Wu, P. and Rao, D. V. G. L. N. (2005). Controllable snail-paced light in biological bacteriorhodopsin thin film. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :253601.
- Xiao, M., Li, Y.-q., Jin, S.-z., and Gea-Banacloche, J. (1995). Measurement of dispersive properties of electromagnetically induced transparency in rubidium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :666–669.
- Yudin, V. I., Taichenachev, A. V., Dudin, Y. O., Velichansky, V. L., Zibrov, A. S., and Zibrov, S. A. (2010). Vector magnetometry based on electromagnetically induced transparency in linearly polarized light. *Phys. Rev. A*, 82 :033807.
- Zelevinsky, T., Farkas, D., and Gabrielse, G. (2005). Precision measurement of the three  $2^3P_J$  helium fine structure intervals. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :203001.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Zhang, H., Sabooni, M., Rippe, L., Kim, C., Kröll, S., Wang, L. V., and Hemmer, P. R. (2012). Slow light for deep tissue imaging with ultrasound modulation. *Applied Physics Letters*, 100 :131102.
- Zibrov, S. A., Novikova, I., Phillips, D. F., Walsworth, R. L., Zibrov, A. S., Velichansky, V. L., Taichenachev, A. V., and Yudin, V. I. (2010). Coherent-population-trapping resonances with linearly polarized light for all-optical miniature atomic clocks. *Phys. Rev. A*, 81 :013833.

## Processus cohérents et applications des phénomènes de lumière lente et rapide dans l'hélium métastable à température ambiante

L'interaction entre des champs électromagnétiques et des systèmes à plusieurs niveaux peut donner lieu à différents processus cohérents. La transparence électromagnétiquement induite (EIT) ou les oscillations cohérentes de populations (CPO) sont des phénomènes résonnants ayant pour conséquence d'annuler l'absorption du système pour un champ sonde. L'EIT se produit dans les systèmes à trois niveaux et met en jeu une cohérence entre niveaux non couplés optiquement, alors que les systèmes à deux niveaux suffisent pour faire apparaître le CPO qui ne met pas en jeu la dynamique des cohérences.

Il est possible dans un milieu constitué d'atomes d'hélium métastable à température ambiante d'extraire un système à trois niveaux en  $\Lambda$  qui, lorsqu'il est excité par des polarisations circulaires, fait apparaître des fenêtres EIT de l'ordre de quelques dizaines de kHz de large. Lorsque ce système est excité par des polarisations linéaires et soumis à un champ magnétique de faible amplitude, c'est l'association des deux phénomènes de CPO et d'EIT qui détermine la réponse du système. Une fenêtre de transparence CPO de quelques dizaines de kHz de large a en particulier été observée.

Ce type de phénomènes résonnants est associé à de grandes variations de l'indice de réfraction avec la fréquence du champ sonde, ayant pour conséquence de profondes modifications de la vitesse de groupe d'une impulsion se propageant dans le milieu. Notre système expérimental permet ainsi d'observer de la lumière lente, de la lumière rapide ainsi que des vitesses de groupe négatives. L'insertion de tels milieux dispersifs en cavité optique a été suggérée pour augmenter la précision de senseurs comme les gyroscopes lasers, mais leur bruit fondamental dépend de la durée de vie des photons dans la cavité. C'est pourquoi l'influence des milieux hautement dispersifs sur la durée de vie des photons dans une cavité est étudiée expérimentalement et théoriquement.

### Mots-Clefs

Cohérence atomique	EIT	CPO
Milieu dispersif	Lumière lente	Lumière rapide
Causalité	Cavité optique	Durée de vie des photons

---

## Coherent processes and applications of the slow and fast light phenomena in metastable helium at room temperature

Many coherent processes can be observed when electromagnetic fields are applied to multi-level systems. Electromagnetically induced transparency (EIT) or coherent population oscillations (CPO) are resonant phenomena resulting in the cancellation of the absorption of the system for a probe field. EIT occurs in three-level systems and involves the coherence between two optically uncoupled levels, whereas two-level systems are sufficient to produce CPO which does not involve the dynamics of the coherences.

A three-level  $\Lambda$  system can be isolated in a gas of metastable helium atoms at room temperature. When excited with circular polarizations, this system exhibits EIT resonances of a few tens of kHz. If this system is excited by linear polarizations and submitted to a weak magnetic field, the response of the system is given by the combination of these two phenomena, namely EIT and CPO. A narrow CPO transmission window of a few tens of kHz has then been observed.

This kind of resonant phenomena is associated with very strong variations of the refractive index at the probe frequency, leading to major changes of the group velocity of a pulse propagating in the medium. Our experimental set-up allows us to observe slow light, fast light, and even negative group velocities. Insertion of such dispersive media inside an optical cavity has been suggested to increase the sensitivity of sensors such as laser gyroscopes, but their fundamental noise depends on the lifetime of photons inside the cavity. This is why the influence of highly dispersive media on the photon lifetime inside a cavity is studied experimentally and theoretically.

### Keywords

Atomic coherence	EIT	CPO
Dispersive medium	Slow light	Fast light
Causality	Optical cavity	Photon lifetime