Estimations quadratiques, calculs fonctionnels et applications

Bernhard Hermann Haak

Université de Bordeaux I

Mémoire d'habilitation à diriger les recherches

présenté par **Bernhard H. Haak**

Spécialité : Mathématiques

Estimations quadratiques, calculs fonctionnels et applications

soutenu le 28 novembre 2012

après avis des rapporteurs

Wolfgang Arendt	Professeur à l'Université d'Ulm, Allemagne
Pascal Auscher	Professeur à l'Université Paris-Sud
Marius Tucsnak	Professeur à l'Université de Lorraine

devant le jury composé de

Wolfgang Arendt	Professeur à l'Université d'Ulm, Allemagne
Pascal Auscher	Professeur à l'Université Paris-Sud
Jean-Michel Coron	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
Christian Le Merdy	Professeur à l'Université de Franche-Comté
El-Maati Ouhabaz	Professeur à l'Université de Bordeaux
Marius Tucsnak	Professeur à l'Université de Lorraine

ESTIMATIONS QUADRATIQUES, CALCULS FONCTIONNELS ET APPLICATIONS

par

Bernhard H. Haak

Ma recherche se situe dans le cadre de l'analyse harmonique et fonctionnelle avec des applications en théorie du contrôle. Le fil conducteur de mes travaux est le calcul fonctionnel ainsi que les estimations de fonctions carrées associées. Mes travaux concernent les thèmes ci-dessous :

a) calcul fonctionnel H^∞ et estimations de fonctions carrées,
b) applications des estimations de fonctions carrées au problème de Cauchy stochastique,
c) résultats de perturbation pour des opérateurs (R–) sectoriels,
d) admissibilité et observabilité d'opérateurs de contrôle et d'observation,
e) applications aux équations non-autonomes ou non-linéaires, en particulier aux équations de type Volterra et aux équations de Navier–Stokes,
f) liens entre la théorie de contrôle et les mesures de Carleson.

Pour la présentation suivante j'ai regroupé les résultats en plusieurs parties.

Dans la première partie, nous introduisons les fonctions carrés et examinons le lien avec le calcul fonctionnel H^∞ et les opérateurs γ-radonifiants. Nous étendons la théorie développée par McIntosh, Kalton et Weis et nous en montrons l'utilité avec une application. Dans un deuxième paragraphe, nous discutons l'angle optimal des estimations de fonctions carrées.

Dans une deuxième partie nous étudions des questions qui proviennent de la théorie du contrôle de systèmes linéaires. Nous discutons la conjecture de Weiss dans sa forme initiale sur L^2, puis des variantes dans L^p à poids temporel. Cette variante permet des applications aux e.d.p. non-linéaires, notamment aux équations de Navier-Stokes. Ensuite nous étudions le lien entre l'admissibilité et les mesures de Carleson.

Dans une troisième partie nous discutons le test de Hautus et donnons un critère suffisant pour l'observabilité exacte.

Dans une quatrième partie nous étudions des théorèmes de perturbation pour des opérateurs sectoriels et R-sectoriels. Nous donnons une application à la régularité maximale L^p.

Dans la dernière partie nous développons le lien entre l'intégration stochastique dans des espaces de Banach et nous donnons une solution à la conjecture "stochastique" de Weiss, ce qui clôt le cercle avec les idées développées dans les deux premières parties.

Par souci de clarté, j'ai décidé de ne pas toujours donner les hypothèses minimales dans l'énoncé des théorèmes ni d'énoncer la totalité de mes résultats, les détails étant fournis dans les articles concernés. Pour bien distinguer entre mes résultats et des résultats dans la littérature, j'énumère mes résultats et cite les autres avec les noms des auteurs ou une référence vers la bibliographie.

1. Introduction : fonctions carrées

Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ à intégrale nulle qui décroît rapidement à l'infini. Posons $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$. La *fonction carrée* associée à la fonction f est donné par

$$s_\varphi f(x) := \Big(\int_0^\infty |(f * \varphi_t)(x)|^2 \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/2}, \tag{1}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Cette notion est une notion clé dans l'approche des 'variables réelles' en analyse harmonique, développée par Zygmund et ses élèves à partir de 1950 ; un des acteurs principaux de ce développement, Elias M. Stein, explique dans l'article [**54**] les origines des fonctions carrées qui datent du début des années 1920. Il montre que des travaux de Kaczmarz et Zygmund sur la convergence de séries trigonométriques, l'intégrale d'aire de Lusin mais aussi la "fonction g" de Littlewood et Paley des années 1930 peuvent exprimer dans ce langage ; le gain par rapport aux approches de fonctions complexes est la généralisation à la dimension $n > 1$. Regardons l'exemple de la fonction g, donnée par

$$g(f)(x) := \Big(\int_0^\infty |t\,\nabla(P_t * f)(x)|^2 \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

où P_t désigne le noyau de Poisson. En effet, un calcul élémentaire montre que

$$t\,\nabla(P_t * f)(x) = \tfrac{1}{\pi}(\tau,\sigma)_t * f$$

où $\tau(x) := \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ et $\sigma(x) := \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ satisfont $|\widehat{\tau}(\xi)| = |\widehat{\sigma}(\xi)| = \pi\xi e^{-|\xi|}$.

Si la fonction φ dans (1) satisfait $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}, \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi})$, il est facile de voir que s_φ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. En effet, par le théorème de Plancherel,

$$\begin{aligned}
\|s_\varphi f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |(f*\varphi_t)(x)|^2 \,dx\, \tfrac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\varphi}(t\xi)|^2 \,d\xi\, \tfrac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\le \tfrac{1}{2\pi} \Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\widehat{\varphi}(t\xi)|^2 \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \,d\xi =: C_\varphi^2 \|f\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

On peut montrer que s_φ est également borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in (1,\infty)$. Cependant, l'argument pour $p \neq 2$ est plus délicat : la décomposition Calderón-Zygmund fournit une estimation "faible $(1,1)$" et par interpolation on conclut pour $p \in (1,2)$. Le cas $p > 2$ découle ensuite par un argument de dualité, voir [**55**, p.29].

On peut exprimer (1) par le calcul fonctionnel du Laplacien (*). Le semigroupe de la chaleur $(T(t))_{t\geq 0}$ est donné par la convolution avec le noyau k_t où $k_t(x) := (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, ceci implique que

$$\begin{aligned}
\|(tA)^{1/2} T(t) f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|t^{1/2}\, \xi \widehat{k}_t(\xi) \widehat{f}(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|t^{1/2} \xi e^{-|\xi|^2/4t} \widehat{f}(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|t^{1/2} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(k_t\big) * f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \Big\|\big(t^{-1/2} \cdot \tfrac{x}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}\big) * f\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&=: \|\varphi_{\sqrt{t}} * f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

car $\varphi(x) = (4\pi)^{-1/2} x e^{-x^2/4}$ satisfait $C_\varphi = 1$. Si on note $\psi(z) := z^{1/2} e^{-z}$, et on utilise le fait que $\psi(tA) = (tA)^{1/2} T(t)$, il en suit l'estimation

$$\int_0^\infty \|\psi(tA) f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tfrac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \|(tA)^{1/2} T(t) f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tfrac{\mathrm{d}t}{t} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

Il est naturel de généraliser et d'appeler toute estimation de la forme (3) une estimation de fonction carrée, plus précisément une estimation supérieure car l'estimation inférieure "$\geq$" nous intéresse également.

Fonctions carrées et le calcul fonctionnel H^∞. — On appelle un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to X$ qui est densément défini *sectoriel d'angle* ω si son spectre est contenu dans le secteur fermé $\overline{S_\omega}$ où $S_\omega = \{z \in \mathbb{C}^* : \; |\arg(z)| < \omega\}$ et si de plus

$$\big\{zR(z,A);\; z \notin S_\theta\big\} \tag{4}$$

est borné dans $\mathcal{B}(X)$ pour tout $\theta \in (\omega, \pi)$. Rappelons que $-A$ engendre un semigroupe analytique si et seulement si A est sectoriel d'angle $< \pi/2$ et que tout (négatif de) générateur d'un semigroupe fortement continu est sectoriel d'angle $\pi/2$. Pour un opérateur sectoriel il y a un calcul holomorphe 'naturel' qui repose sur la formule de Cauchy. On introduit l'idéal $H_0^\infty(S_\theta)$ de fonctions holomorphes et bornées sur un secteur S_θ pour lesquelles $|f(z)| \lesssim \min(|z|^\epsilon, |z|^{-\epsilon})$. Pour une telle fonction, l'intégrale

$$f(A) := \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_\nu} f(z) R(z,A)\, \mathrm{d}z \qquad \nu \in (\omega, \theta)$$

*. pour la présentation ici, je ne discute que le cas n=1

converge absolument et définit un opérateur borné. On appelle ce calcul fonctionnel *borné* lorsque $\|f(A)\| \leq C\|f\|_{H^\infty}$. Dans ce cas, une procédure d'approximation permet de définir $f(A)$ pour tout $f \in H^\infty(S_\theta)$. Pour références et application nous renvoyons à [**20**].

De nombreux résultats en analyse harmonique réelle reposent sur le jeu entre des fonctions carrées et des fonctions maximales. Les premières peuvent êtres vues comme des fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}_+, \frac{\mathrm{d}t}{t})$ alors que les dernières peuvent êtres vues comme des fonctions à valeurs dans un espace L^∞. Le lien entre le calcul fonctionnel d'opérateurs autoadjoints comme dans (3) a été utilisé par Stein dans les années 1960 [**53**]. McIntosh et ses coauteurs [**12, 42, 43**], puis Le Merdy [**38**], et finalement Kalton et Weis [**31**] ont approfondi cette étude et établi un lien aavec le calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels. Ceci amène à quitter la structure Hilbertienne $H = L^2(\mathbb{R}_+, \frac{\mathrm{d}t}{t})$ et crée un lien avec la géométrie des espaces de Banach : soit (e_n) une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}_+; \frac{dt}{t})$, (h_k) une base orthonormée de H et $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ une suite indépendante de variables aléatoires Gaussiennes standardisées. Alors l'égalité de Parseval et le théorème de la convergence monotone donnent

$$
\begin{aligned}
&(5) \qquad \int_0^\infty \|\psi(tA)f\|_H^2 \, \tfrac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n,k} \Big| \int_0^\infty \langle \psi(tA)f, h_k\rangle_H \, e_n(t) \tfrac{dt}{t} \Big|^2 \\
&\qquad\qquad = \sum_k \mathbb{E} \Big| \Big\langle \sum_n \gamma_n \int_0^\infty \varphi(tA)f \cdot e_n(t) \, \tfrac{dt}{t}, h_k \Big\rangle_H \Big|^2 \\
&(6) \qquad\qquad = \mathbb{E} \Big\| \sum_n \gamma_n \int_0^\infty \varphi(tA) f e_n(t) \, \tfrac{dt}{t} \Big\|_H^2 .
\end{aligned}
$$

Rappelons qu'un opérateur linéaire $T : H \to E$ est appelé γ-radonifiant (noté $T \in \gamma(H; E)$) si pour une –et donc toute– base orthonormée de H, la série

$$\sum_n \gamma_n T e_n$$

converge dans $L^2(\Omega, E)$ (†). Dans la formulation de (6) on regarde donc la fonction carrée (1) comme un opérateur linéaire

$$s_\varphi : \quad H \to \gamma(H; E), \qquad f \mapsto \varphi(tA)f.$$

où $E = H$. Si on autorise un espace de Banach E, on obtient une généralisation intéressante des fonctions carrées.

†. Ω est l'espace probabilisé sur lequel les variables Gaussiennes sont définies.

Définition. — Soient X, Y des espaces de Banach et H un espace de Hilbert. On appelle un opérateur linéaire densement défini $S : X \to \gamma(H;Y)$ une *fonction carrée* et on parle d'une *estimation de fonction carrée* lorsque S est un opérateur borné.

La bornitude du calcul fonctionnel sectoriel sur un espace de Hilbert est caractérisée par des estimations de fonctions carrées inférieures *et* supérieures. Ce résultat se transfère dans le cadre d'espaces de Banach uniquement si on généralise 'expression de (6), donc en utilisant la notion de γ-radonification. Précisément on a :

Théorème **(**Kalton, Weis). — *Soit E un espace de Banach de cotype fini et A un opérateur γ-sectoriel d'angle ω. Alors A a un calcul fonctionnel $H^\infty(S_\theta)$ borné pour tout $\theta > \omega$ si et seulement si pour tout $\theta > \omega$,*

$$c_{\theta,\varphi}\|x\|_E \;\leq\; \|\varphi(tA)x\|_{\gamma(H;E)} \;\leq\; C_{\theta,\varphi}\|x\|_E$$

où $H = L^2(\mathbb{R}_+, \frac{\mathrm{d}t}{t})$ et $\varphi \in H_0^\infty(S_\theta)$.

On mentionne ici que si E est un espace L^p, les inégalités de Khintchine–Kahane montrent que

$$\|\varphi(tA)f\|_{\gamma(H;L^p(\Omega))} \sim \Big(\int_\Omega \Big(\int_0^\infty \big|\varphi(tA)f(\omega)\big|^2 \,\tfrac{dt}{t}\Big)^{p/2} d\omega\Big)^{1/p},$$

donc des normes $L^p(L^2)$ à la place des normes $L^2(L^p)$ que (par exemple) notre formule initiale (3) suggérerait. Avec Haase on introduit dans [**H14**] la notion suivante :

Définition. — Soit H un espace de Hilbert complexe et $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ une base orthonormale de H. Alors on appelle $M \subseteq H$ ℓ_1*–borné* s'il existe un isomorphisme S tel que

$$|M|_1 := \inf \|S^{-1}\| \sup_{x\in M} \sum_{\alpha\in I} |\langle x, Se_\alpha\rangle| < \infty. \tag{7}$$

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et A un opérateur admettant un calcul $H^\infty(\Omega)$ sur X. Pour $f, g \in H^\infty(\Omega; H)$ on peut former les opérateurs bornés

$$\begin{aligned} T_{f,x} : H \to X, &\qquad T_{f,x}h := \langle f(\cdot), h\rangle(A)x \quad \text{et}\\ U_{g,x'} : H \to X', &\qquad U_{g,x'}h := \langle g(\cdot), h\rangle(A)'x' \end{aligned}$$

Théorème 1. — *Si en plus des hypothèses ci-dessus, l'image de f et g est ℓ_1-borné, on a*

$$\|T_{f,x}\|_{\gamma(H;X)} \lesssim |f(\Omega)|_1 \cdot \|x\|_X \quad \textit{et} \quad \|U_{g,x}\|_{\gamma(H;X)'} \lesssim |g(\Omega)|_1 \cdot \|x'\|_{X'}$$

Le point intéressant est que dans des applications concrètes, holomorphie et intégrabilité donnent automatiquement une image ℓ_1-borné : dans le cas où $\Omega = \mathrm{St}_\omega := \{|\mathrm{Im} z| < \omega\}$, on utilise une fonction de test η à support dans $[-\pi, \pi]$, $\eta_t := \eta(t - \cdot)$ et suppose que $\sum_k \eta_k \equiv 1$. Alors, le système trigonométrique fenêtré $(e^{int}\eta_k)_{n,k}$ définit une base de Riesz sur $L^2(\mathbb{R})$ qui permet de voir que les boules de $W^{2,1}(\mathbb{R})$ sont ℓ_1-bornés dans $L^2(\mathbb{R})$. Ceci donne des estimations de type translation

$$\|F(t + A)x\|_{\gamma(\mathbb{R};X)} \lesssim \|x\|$$

si A a un calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$, ou, par une application conforme sur le secteur,

$$\|f(tA)x\|_{\gamma(\mathbb{R}_+\frac{\mathrm{d}t}{t};X)} \lesssim \|x\|.$$

On montre ainsi les estimations de fonctions carrées de Kalton et Weis par ℓ_1-bornitude. Mais on obtient plus : au lieu de leur structure de dilatation, $t \mapsto f(t \times z)(A)$ nous pouvons utiliser des estimations de fonctions carrées pour des fonctions de *deux variables* de la forme $t \mapsto f(t, z)(A)$ si pour tout $t > 0$ respectivement $z \in \Omega$,

$$f(t, \cdot) \in H^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad f(\cdot, z) \in H := L^2(\mathbb{R}_+, \tfrac{\mathrm{d}t}{t}).$$

Rappelons que l'estimation inférieure $\|x\| \lesssim \|\varphi(tA)\|_{\gamma(\mathbb{R}_+,X)}$ provient gratuitement de l'estimation supérieure pour l'opérateur adjoint si on a une "identité approchée" de la forme

$$\int_0^\infty \varphi(tA)x \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t} = x \qquad \text{si} \quad \int_0^\infty \varphi(t) \tfrac{\mathrm{d}t}{t} = 1. \tag{8}$$

La validité de cette identité vectorielle à été démontrée par McIntosh [**42**]. La version abstraite est la suivante : si $f, g \in H^\infty(\mathrm{St}_\omega), H$ sont telles que $\langle f(z), g(z)\rangle = 1$ pour tout z, alors

$$\langle x, x'\rangle_{X\times X'} = \left\langle T_{f,x}, U_{g,x'}\right\rangle_{\gamma\times\gamma'},$$

où γ' est l'espace dual de $\gamma(H; X)$. Si on les combine avec le théorème de la couronne de Tolokonnikov-Uchiyama [**56**], on peut résumer nos résultats dans [**H14**] ainsi :

Théorème 2. — *Soit X un espace de Banach de cotype fini et H un espace de Hilbert. Soit A un opérateur à image dense qui admet un calcul fonctionnel $H^\infty(S_\theta)$. Alors pour tout $f, g \in H^\infty(S_\theta; H)$, on a*

$$\|T_{f,x}\|_{\gamma(H,X)} \lesssim \|f\|_{H^\infty}\|x\| \quad \textit{et} \quad \|U_{g,x'}\|_{\gamma(H,X)'} \lesssim \|g\|_{H^\infty}\|x'\|.$$

Si de plus, $\inf \|f(z)\| > 0$*, on a* $\|T_{f,x}\|_{\gamma(H,X)} \sim \|x\|$.

On donne une application : on appelle classe de Hörmander (ou Sobolev uniforme) $\mathcal{H}^{\alpha,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\big\| \, [\eta_t f]^{\vee}(1+|\cdot|)^{\alpha}\big\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe engendré par $-iB$. On suppose que le spectre de B est contenu dans St_ω et on choisit $\psi \in H^\infty(\mathrm{St}\omega)$ tel que

$$C_\psi := \sup_{|r|<\omega} \int_{\mathbb{R}} |\psi(t+ir)|\, dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(-t)\eta(t)\, dt = 1.$$

On a alors la formule de représentation

$$f(B)x = \int_{\mathbb{R}} \psi(t+B) \left(\int_{\mathbb{R}} [\eta_t f]^{\vee}(s) U(s)x \, ds \right) dt.$$

En l'évaluant contre une fonctionnelle $x' \in X'$ et par un argument de dualité on obtient le résultat suivant.

Théorème (Kriegler). — *Soit X un espace de Banach avec cotype fini et soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe engendré par $-iB$. Si B a un calcul H^∞ borné sur St_ω. Supposons que*

$$\langle s\rangle^{-\alpha} U(s)x \in \gamma(\mathbb{R}; X) \quad \textit{pour tout } x \in X,$$

pour $\alpha > 1/2$, alors B a un calcul fonctionnel Hörmander $\mathcal{H}^{\beta,2}$ pour tout $\beta > 1/2 + \alpha$, c'est-à-dire, on a

$$\|f(B)x\| \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}^{\beta,2}} \|x\|.$$

L'angle optimal des estimations de fonctions carrées. — La théorie du calcul fonctionnel et celle des estimations carrées associées développées par McIntosh et Kalton-Weis obligent à considérer des fonctions dont le secteur d'holomorphie est strictement plus large que le secteur optimal contenant le spectre. Ceci provient simplement du fait que le calcul fonctionnel repose sur la formule de Cauchy et qu'il faut donc trouver un chemin contournant le spectre qui soit dans le domaine d'holomorphie.
Si on pense, par exemple, à la fonction exponentielle $\varphi(z) = e^{-z}$, une fonction qui est donc uniformément bornée sur le demi-plan droit mais sur aucun secteur S_θ plus grand, on voit que cette 'perte angulaire' peut être problématique. L'exponentielle étant une fonction naturelle à étudier pour un calcul fonctionnel car $\varphi(tA) = T(t)$, la question d'obtenir des estimations de fonctions carrées sans perte angulaire devient intéressante.
Sur des espaces de Hilbert, plusieurs résultats permettent de définir un calcul fonctionnel sans perte angulaire. Il y a le théorème de von Neumann et ses généralisations de Crouzeix et Delyon [**13**] sur le calcul H^∞ sur l'image

numérique de l'opérateur. On devrait donc s'attendre à obtenir des estimations de fonctions carrées sur le même secteur. Le résultat suivant est publié dans [**H11**].

Théorème 3. — *Soit $-A$ le générateur injectif d'un semigroupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H.*

(a) *Pour tout $\varphi \in H_0^\infty(S_{\pi/2})$, il existe un $C > 0$ tel que*

$$\int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|_H^2 \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t} \leq C\|x\|^2$$

(b) *Soit $\varphi(z) = z^{-1/2}(e^{-2z} - e^{-z})$ et $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$. Alors il existe un $c > 0$ tel que*

$$\int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|_H^2 \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t} \geq c\|x\|^2$$

Indiquons la preuve de ce résultat. Les estimations supérieures dans (a) proviennent d'une astuce empruntée à McIntosh [**42**] : il suffit de connaître des estimations pour les fonctions $\psi_\alpha(z) = z^\alpha(1+z)^{-1}$ pour $\alpha \in (0,1)$: grâce à la décomposition

$$\varphi(z) = \psi_\epsilon(z) \times z^{-\epsilon}\varphi(z) + \psi_{1-\epsilon}(z) \times z^\epsilon\varphi(z)$$

la bornitude du calcul fonctionnel (ici par l'inégalité de von Neumann) entraîne que $(z^{\pm\epsilon}\varphi(z))(tA)$ est uniformément borné. Les fonctions ψ_α ont un angle d'holomorphie $> \pi/2$; de ce fait, les estimations quadratiques pour les fonctions ψ_α sont garanties par un résultat de McIntosh. Pour montrer (b), on doit établir une identité comme (8) mais sans 'perte angulaire'. Expliquons l'argument si le semigroupe est uniformément exponentiellement stable. Pour $\varphi(z) = z^{-1/2}(e^{-2z} - e^{-z})$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi(tA)^2 x \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_0^\infty A\Big(\int_t^{2t} T(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big(\int_t^{2t} T(r)x\,\mathrm{d}r\Big)\tfrac{\mathrm{d}t}{t^2}\\
&= \int_1^2\int_1^2\int_0^\infty AT(t(s+r))x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r\\
&= \ln\big(\tfrac{1024}{729}\big)\int_0^\infty AT(t)x\,\mathrm{d}t = c\,x.
\end{aligned}$$

Finalement, un argument standard permet d'établir (b) : comme l'opérateur adjoint A' est également générateur d'un semigroupe de contractions, on a

$$|\langle x,y\rangle| \leq C\int_0^\infty |\langle\varphi(tA)x, \varphi(tA)'y\rangle| \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t} \leq C'\|x'\|\Big(\int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|^2 \,\tfrac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/2}.$$

On prend le sup sur les y dans la boule unité à gauche et à droite de cette inégalité pour conclure.

Beaucoup de questions intéressantes restent ouvertes : est-ce que l'estimation inférieure s'étend à toute fonction $\varphi \in H_0^\infty(S_{\pi/2})$ non nulle ? Existe-t-il une fonction carrée qui caractérisé le calcul H^∞ sur le demiplan ? Qu'en est-il avec des estimations $\gamma(\mathbb{R}_+, X)$ si X est un espace de Banach ? Est-ce qu'on peut étendre ces résultats à autres situations en utilisant les résultats de Crouzeix et Delyon sus–cité ?

2. Admissibilité

Une grande partie de mes travaux est consacrée à l'étude de systèmes linéaires dans des espaces de Banach. On considère trois espaces de Banach X, Y, U et un générateur d'un semigroupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X. On s'intéresse à l'équation différentielle observée

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} x'(t) + Ax(t) = Bu(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 & \\ y(t) = Cx(t) & t \geq 0. \end{cases}$$

Ici, on considère un opérateur dit *de contrôle* $B : \mathcal{D}(B) \subset U \to X$ et un opérateur dit *d'observation* $C : \mathcal{D}(C) \subset X \to Y$. Pour pouvoir inclure des situations intéressantes du point de vue des applications, par exemple des observations ponctuelles ou bien des contrôles au bord d'un domaine, il faut autoriser des observations et contrôles non-bornés. Une hypothèse faible habituellement imposée est que C, vu comme opérateur de $\mathcal{D}(A) \to Y$ est borné, et, que $B : U \to X_{-1}$ est borné où X_{-1} est l'espace d'extrapolation associé au semigroupe. La généralité du cadre proposé veut qu'il y ait beaucoup de littérature sur le sujet ; c'est pourquoi on ne cite que deux livres [**14, 57**] sur le sujet et les nombreuses références qui y sont données.
Pour un tel système avec observation et contrôle non-borné, une question naturelle se pose alors : a-t-on une dépendance continue de la solution $x(\cdot)$ et de la solution observée $y(\cdot)$ par rapport à la valeur initiale x_0 et par rapport à la fonction de contrôle $u(\cdot)$? Pour pouvoir poser cette question il faut choisir des espaces de fonctions $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ et $\mathcal{U}$ à valeurs dans X, Y et U respectivement. Une fois ces espaces fixés on appellera B et C admissibles si

$$\|y(\cdot)\|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|x_0\|_X \quad \text{et} \quad \|x(\cdot)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|u(\cdot)\|_{\mathcal{U}}.$$

La conjecture de Weiss. — Pour le choix de normes L^2 sur U et Y et $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}_+, X)$, la conjecture de Weiss essaie de caractériser l'admissibilité avec une condition sur la résolvante :

Soient X, Y des espaces de Hilbert. Alors l'opérateur C est L^2-admissible, c'est à dire,

$$\int_0^\infty \|CT(t)x\|^2 \,\mathrm{d}t \lesssim \|x\|^2 \tag{10}$$

si et seulement si les opérateurs

$$\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda)}\, C(\lambda + A)^{-1}, \qquad \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \tag{11}$$

sont uniformément bornés.

Cette conjecture est fausse, voir [**25, 26**]. Cependant, l'équivalence conjecturée est vraie pour des semigroupes normaux [**61**], des semigroupes de contractions [**22**] sur des espaces de Hilbert et des semigroupes analytiques sur des espaces de Banach dont le générateur admet des estimations de fonctions carrées [**37**]. Un analogue de ce dernier résultat dans des espaces de Banach où on remplace les normes L^2 par des normes de γ-radonification est également vrai ; ce résultat fait partie de ma thèse [**H0, H2**] et ne sera pas discuté ici. Le résultat suivant [**H12**] explique plus précisément la défaillance de la conjecture de Weiss et l'apport des estimations de fonctions carrées dans [**37**].

Théorème 4. — *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigroupe analytique qui est exponentiellement stable sur un espace de Banach E. Alors sont équivalents :*

(a) *la condition de Weiss (11)*

(b) *C est L^2-faible admissible, i.e. pour tout $x \in E$,*

$$\big\|CT(t)x\big\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}_+,Y)} \lesssim \|x\|.$$

(c) $\|CT(t)x\| \lesssim t^{-1/2}\|x\|$.

De plus, l'espace $L^{2,\infty}(\mathbb{R}_+, Y)$ est optimal dans le sens qu'en général $CT(t)x \notin L^{2,q}(0,\tau; Y)$ pour $\tau > 0$, $q < \infty$.

L'équivalence repose sur des arguments d'interpolation réelle et la dualité des espace de Lorentz. L'optimalité est démontrée en utilisant une base conditionnelle de $E = L^2(-\pi,\pi)$, le système des fonctions $e_n(t) = |t|^\beta e^{\pm int}$. Pour $q < \infty$ fixé on choisit $\beta \in (1/4, 1/2)$ convenablement et construit explicitement un semigroupe $T(t)_{t\geq 0}$, une fonctionnelle C et une fonction $x \in L^2(-\pi,\pi)$ et tel que les orbites observés $CT(t)x$ ne sont pas dans l'espace $L^{2,q}(0,\tau)$.

Admissibilité avec des normes L^p à poids temporel. — Si on compare le Théorème 4 avec le résultat positif de Le Merdy [**37**], on s'aperçoit que l'opérateur d'observation 'critique' dans (11) est $C = A^{1/2}$. En effet, la condition de Weiss (11) est satisfaite par la sectorialité de A alors que (10) implique des estimations quadratiques pour A.

Une question naturelle apparaît : que se passe-t-il si on remplace la puissance $1/2$ par un $s \in (0,1)$? On est amené à étudier des notions d'admissibilité avec un poids temporel. On appellera C un opérateur L^p_α-admissible si

$$\int_0^\infty \|t^\alpha C T(t) x\|^p \,\mathrm{d}t \lesssim \|x\|^p.$$

Au lieu d'estimations "quadratiques" on a besoin d'estimations L^p_*, de la forme

$$\|\psi(tA)x\|_{L^p(\mathbb{R}_+, \frac{\mathrm{d}t}{t}; E)} \lesssim \|x\|_E.$$

Comme pour le cas p=2, de telles estimations ne dépendent pas du choix de la fonction $\psi \in H^\infty_0 \backslash \{0\}$; en effet, les normes sur le côté gauche décrivent un espace d'interpolation réelle entre le domaine et l'image (avec norme homogène) de A, voir [**20**, section 6.3]. On obtient les résultats suivants (voir [**H1**] pour p=2 et [**H5**] pour le cas général).

Théorème 5. — *Soit $-A$ le générateur d'un semigroupe analytique fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach E tel que A est à image dense et satisfait des estimations L^p_*. Alors pour $p \in [1,\infty]$ et $\alpha \in (-1/p, 1/p')$ sont équivalents :*

(a) *Les opérateurs $t^{1/p' - \alpha} C(t+A)^{-1}$, $t > 0$ sont uniformément bornés dans $\mathcal{B}(X,Y)$*
(b) *C est L^p_α-admissible.*

L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) provient du fait que la résolvante s'écrit comme transformation de Laplace du semigroupe et de l'inégalité de Hölder. Pour l'autre direction il y a plusieurs preuves. Dans [**H7**] on donne une preuve qui n'utilise que des méthodes d'interpolation réelle. Dans ce document, j'esquisse la preuve de [**H5**] pour le cas α=0 et p=2 (‡) : on décompose

$$CT(t) = CA^{-1/2}(tA)^{1/2}T(t)t^{-1/2}x = CA^{-1/2}\,\varphi(tA)\psi(tA)t^{1/2}x$$

où $\varphi, \psi \in H^\infty_0$ sont telles que $\varphi(z)\psi(z) = z^{1/2}e^{-z}$. La condition sur la résolvante entraîne une borne uniforme sur $\|CA^{-1/2}\,\varphi(tA)\|$. En intégrant sur t, le facteur $t^{-1/2}$ donne la mesure $\mathrm{d}t/t$ et on tombe sur une fonction carrée pour la fonction ψ. Par hypothèse celle-ci s'estime contre la norme de x.

Si $\alpha = 0$, il y a une dualité naturelle entre l'admissibilité d'un opérateur de contrôle et l'admissibilité de son adjoint en tant qu'opérateur d'observation. Dès que $\alpha > 0$, ceci n'est plus vrai. Cependant, grâce à la structure convolutive le problème devient plus simple pour des opérateurs de contrôle : l'analogue de la conjecture de Weiss est toujours vrai :

‡. ceci est donc précisément le théorème de Le Merdy [**37**].

Théorème 6. — *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigroupe analytique fortement continu sur un espace de Banach E. On suppose que son générateur A est à image dense. Soit $B \in B(U, X_{-1})$ un opérateur de contrôle. Alors pour $p \in [1, \infty]$ et $\alpha \in (0, 1/p')$ sont équivalents :*

(a) *Les opérateurs $t^{1/p+\alpha}(t+A)^{-1}B$, $t > 0$ sont uniformément bornés dans $\mathcal{B}(U, X)$*

(b) *B est L^p_α-admissible.*

Applications aux e.d.p non-linéaires. — On peut utiliser les résultats sur l'admissibilité à poids temporel pour montrer l'existence de solutions pour certains problèmes non-linéaires. L'idée est de les regarder comme le système linéaire (9) et d'y ajouter un feedback F non-linéaire. On considère donc des équations de la forme

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) = Bu(t), \qquad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \qquad t \geq 0 \\ u(t) = F(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Soit par exemple, Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ à bord lisse, $\omega \subset \Omega$ un sous-domaine également à bord lisse. Soit $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, $g \in L^{d-1}(\partial\Omega)$ et $x_0 \in B^{-1/2+\epsilon}_{2,p}$, $p \geq 2$. On a alors une unique solution 'mild' du problème non-linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = \Delta x(t) \qquad t \in [0, \tau] \\ x(0) = x_0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial \nu} = f(\langle x \rangle_\omega)\, g\, \mathrm{tr}_{\partial\Omega}(x(t)) \end{cases}$$

dans $C([0, \tau]; B^{-1/2+\epsilon}_{2,p}) \cap L^p_\alpha([0, \tau]; H^1_2(\Omega))$, voir [**H5**].

Dans [**H7**] nous établissons une autre application des théorèmes 5 et 6. Nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible à densité constante dans un domaine Ω,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f, \quad (t > 0) \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ u(0, \cdot) &= v_0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \tag{12}$$

L'idée principale reste la même : nous interprétons ces équations comme un système linéaire soumis à un feedback bilinéaire $u = F(y, y)$ où $F(u, v) = P\nabla \cdot (u \otimes v)$. Un choix judicieux des espaces $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{U}$ avec des normes L^p_α, $L^{p/2}_{2\alpha}$

est nécessaire pour entamer une itération de point fixe qui mène à une unique solution 'mild', c'est-à-dire une fonction x qui vérifie

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)BF(Cx(s), Cx(s))\, ds. \tag{13}$$

On a le résultat suivant [**H7**].

Théorème 7. — *Soit E un espace de Banach et $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigroupe analytique fortement continu. On suppose que son générateur est à image dense. Soit $\tau \in (0,\infty]$ et $p \in (2,\infty]$. Soit $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha + 1/p \in (0, 1/2)$. Si les trois conditions suivantes,*

[A1] *C est L^p_α-admissible*

[A2] *B est $L^{p/2}_{2\alpha}$-admissible*

[A3] *L'opérateur 'feedthrough' $(CT_{-1}(\cdot)B)*$ est borné $L^{p/2}_{2\alpha}((0,\tau), U) \to L^p_\alpha((0,\tau), Y)$*

sont vérifiés, alors pour tout $x_0 \in X^\flat := \overline{\mathcal{D}(A)}$ il existe un $\eta \in (0,\tau]$ tel qu'on a une solution 'mild' unique x in $C([0,\eta), X^\flat)$ qui satisfait $Cx \in L^p_\alpha((0,\eta), Z)$. Si $\|CT(\cdot)x_0\|_{L^p_\alpha}$ est suffisamment petit, la solution existe globalement.

Cette approche s'inscrit dans une ligne de travaux sur des solutions 'mild' pour les équations de navier-Stokes pour des données initiales dans des espaces critiques, voir par exemple [**2, 6, 9, 32, 33, 36, 44, 51**] et certainement encore d'autres auteurs. Tous ces travaux discutent des variantes de la méthode de Kato ([**19**]) qui permet d'obtenir des solutions globales par un argument de point fixe si la valeur initiale est suffisamment petite. Nous traitons à la place de (13) l'équation pour la solution observée $y = z + \mathbb{B}(y,y)$ où $z = CT(\cdot)x_0$ et $\mathbb{B}(y,\widetilde{y}) = CT(\cdot)B * F(y,\widetilde{y})$ est une application bilinéaire continue. Avec un point fixe y à cette équation, on retrouve la solution x par injection de y dans (13) à la place de $Cx(\cdot)$.

Pour des applications aux équations de Navier Stokes, on n'utilise le théorème que pour la situation $B = \mathrm{Id}$ et $C = \mathrm{Id}$. Dans ce cas, le semigroupe agit pour tout $t > 0$ comme opérateur borné $X \to Y$ et $U \to X$. Supposons que A admet des estimations L^p_* alors en utilisant les théorèmes 5 et 6 on montre que [A1] est équivalent à $\|T(t)\|_{X\to Y} \lesssim t^{-\alpha-1/p}$ et [A2] est (pour $\alpha > 0$) équivalent à $\|T(t)\|_{U\to X} \lesssim t^{2\alpha-1/p'}$. L'hypothèse [A3] est satisfaite si $\|T(t)\|_{U\to Y} \lesssim t^{-\gamma}$ où $\gamma = \alpha - 1/p'$.

Pour des choix concrets des espaces X, Y, U ces conditions se vérifient assez simplement en utilisant des résultats de plongements de "type Sobolev" entre des espaces fonctionnels (surtout des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin). On résume plusieurs résultats de [**H7**] :

Théorème 8. — *Soit $n \geq 2$, $q>n$, $p \in (2,\infty]$, $\alpha \geq 0$ et $\lambda \in (0, {}^{n}\!/_{q})$ tel que $\alpha + {}^{1}\!/_{p} = {}^{1}\!/_{2} - {}^{n}\!/_{2q}$. Alors pour toute configuration des espaces X, Y, U dans le tableau suivant, il existe des solutions mild $x \in C([0,\tau), X) \cap L^p_\alpha(0,\tau;Y)$ pour tout $x_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. De plus, on a existence globale si la donnée initiale est suffisamment petite.*

Esp. auxilliaire Y	*Espace X*	*Espace U*	*commentaire*
$L^q(\mathbb{R}^n)$,	$\dot{B}^{-1+{}^{n}\!/_{q}}_{q,p}(\mathbb{R}^n)$	$\dot{H}^{-1}_{{}^{q}\!/_{2}}(\mathbb{R}^n)$	*le cas $p{=}\infty$ est due à Cannone ($n{=}3$) et Amann ($n{>}2$)*
$L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$	$\dot{B}^{-1+{}^{n}\!/_{q}}_{(q,\infty),p}(\mathbb{R}^n)$	$\dot{H}^{-1}_{{}^{q}\!/_{2},\infty}(\mathbb{R}^n)$	*$p{=}\infty$ due à Barraza*
$\mathcal{M}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *(espace de Morrey)*	*un espace d'interpolation*[(§)].	$\dot{\mathcal{M}}^{{}^{q}\!/_{2},2\lambda,-1}(\mathbb{R}^n)$	*Améliore des résultats de Kozono et Yamazaki*
$\mathcal{C}^\varepsilon(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	$B^{-2(\alpha+{}^{1}\!/_{p})+\varepsilon}_{\infty,p}(\mathbb{R}^n)$ *pour $\alpha > 0$*	*l'espace des ∇f avec $f \in Y$*	*retrouve des résultats de Sawada*

Ainsi, nous unifions plusieurs résultats connus dans la littérature avec un seul schéma de démonstration. De plus, notre approche permet de montrer de nouveaux résultats d'existence et d'unicité pour des données initiales rugueuses dans des domaines *arbitraires* dans $\mathbb{R}^3$ et des domaines irréguliers dans $\mathbb{R}^n$. Cependant, notre approche s'appuie sur une très bonne compréhension du problème linéaire et reste relativement brute pour le traitement de la non-linéarité ; à cause de ceci, on ne couvre pas l'intégralité des résultats connus par une version du schéma de Kato – en particulier on ne couvre pas le résultat de Koch et Tataru [**32**] qui montrent l'existence de solutions pour des valeurs initiales dans BMO^{-1}. Auscher et Tchamitchian [**6**] ont étudié indépendemment de nous quelles propriétés des deux espaces de Banach X et Y permettent un schéma d'itération semblable au notre. Leur analyse est plus approfondie et retrouve les espaces fonctionnels (X,Y) sur $\mathbb{R}^n$ ci-dessus.

En ce qui concerne les domaines arbitraires de $\mathbb{R}^3$, on retrouve les deux résultats connus de Sohr [**52**, Theorem V.4.2.2] et de Monniaux [**45**], en les améliorant un peu. Par exemple, dans le résultat suivant on autorise des forces extérieures $f \neq 0$ alors que Monniaux devait imposer $f = 0$.

§. Les espaces de Morrey ne forment pas une échelle d'espaces d'interpolation ; l'espace X obtenu par interpolation réelle n'a pas de nom spécifique dans la littérature.

Théorème 9. — *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine quelconque. Soit X un espace de Banach tel que*

$$(L^2_\sigma(\Omega), \mathbb{V})_{1/2,1} \hookrightarrow X \hookrightarrow (L^2_\sigma(\Omega), \mathbb{V})_{1/2,\infty}$$

où $\mathbb{V} = L^2_\sigma(\Omega) \cap W^1_{2,0}(\Omega)^n$. Alors pour $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $f = f_0 + \nabla \cdot F$ avec

$$f_0 \in L^{p_1}_{\beta_1}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3) \quad et \quad F \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^{3\times 3}),$$

et des paramètres qui satisfont $\alpha, \beta_1 \geq 0$, $p_1 \leq \infty$, $p < \infty$ et $\alpha + 1/p = 1/4$, $\beta_1 + 1/p_1 = 3/4$, il existe une solution 'mild' unique u qui satisfait

$$u \in C_b([0,\tau), X) \ \cap \ L^p_\alpha((0,\tau), \mathbb{V}). \tag{14}$$

Le temps d'existence $\tau > 0$ ne dépend que des normes des données initiales $\|u_0\|_X$, $\|f_0\|_{L^{\beta_1}_{\beta_1}(L^2)}$, et $\|F\|_{L^p_\alpha(L^2)}$.

La difficulté de domaines arbitraires est de montrer l'existence de la projection de Helmholtz (ou Leray). Dans les résultats sur $\mathbb{R}^3$ on est ainsi forcé de travailler avec des espaces de Hilbert pour X, Y et U. Si on suppose que le domaine Ω est tel que pour un $q_0 > 2$ la projection de Helmholtz est bornée sur $L^{q_0}(\Omega)$ et que le semigroupe de Stokes est borné analytique, on trouve de nouveaux résultats pour l'espace auxiliaire $Y = L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si $q_0 > \max(4, n)$ et pour l'espace $Y = L^4(\Omega)$ si $q_0 \leq 4$ et n=3.

Il reste la question de savoir si on peut revenir de la forme 'mild' de (13) à une solution des équations de Navier-Stokes, en particulier, comment on peut retrouver la pression. On obtient un tel résultat en utilisant la régularité maximale L^p (¶) : on dit que A a la régularité maximale L^p, si la solution 'mild' $x(\cdot)$ du problème

$$x'(t) + Ax(t) = f(t) \qquad x(0) = 0$$

satisfait $x', Ax \in L^p(0,\tau; X)$ pour tout $f \in L^p(0,\tau; X)$. Si en plus des hypothèses de Théorème 7 (avec $B = C = \mathrm{Id}$) l'opérateur A a la régularité maximale $L^{p/2}$ sur U, alors un théorème de Prüß et Simonett [**49**] assure que pour tout $\alpha \in (-1/p, 1/p')$, la régularité maximale transfère sur $L^{p/2}(0,\tau; t^\alpha\, \mathrm{d}t; X)$. Ainsi la solution mild x au problème (13) satisfait

$$x \in C([0,\eta), X) \cap L^p_\alpha((0,\eta), Y) \cap L^{p/2}_{2\alpha}((0,\eta), U)$$

ainsi que $x', Ax \in L^{p/2}_{2\alpha}((0,\eta), U) + L^p_{\alpha+1}((0,\eta), Y)$. Ceci assure que l'équation

$$x'(t) - P\Delta x(t) + P\nabla \cdot (x(t) \otimes x(t)) - Pf(t) = 0$$

est satisfaite *ponctuellement* pour presque tout $t \in (0,\eta)$. On a donc

$$P\big(x' - \Delta x(t) + \nabla \cdot (x(t) \otimes x(t)) - f(t)\big) = 0$$

¶. voir page 23 pour plus de détails et références de littérature.

presque partout. Par un résultat de deRham ceci implique que l'expression entre parenthèses est égale au gradient d'une certaine fonction – la pression p dans (12) est trouvée.

L^p-admissibilité et mesures de Carleson.— Dans [**21**] les auteurs établissent un lien entre les mesures de Carleson et admissibilité d'un opérateur de rang un pour un semigroupe diagonal sur ℓ_2. L'idée est simple et naturelle : si $b = (b_n)$,

$$\Big\|\int_0^\infty T(s)bu(s)\,\mathrm{d}s\Big\|_{\ell_2}^2 = \sum_n\Big|\int_0^\infty e^{-\lambda_n s}u(s)\,\mathrm{d}s b_n\Big|^2 = \int_{\mathbb{C}_+}\big|(\mathcal{L}u)(\lambda)\big|^2\mu(\mathrm{d}\lambda)$$

où $\mu = \sum_n \delta_{\lambda_n}|b_n|^2$. La mesure μ est Carleson si et seulement si $H^2(\mathbb{C}_+) \hookrightarrow L^2(\mu)$ et on conclut avec le théorème de Paley-Wiener. Pour généraliser ce résultat à des espaces ℓ_q et la L^p-admissibilité, il s'avère utile de distinguer deux notions : On dit qu'une mesure μ est α-Carleson, $\alpha > 0$ si pour tout q avec $\alpha q > 1$,

$$\big\|f\big\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1}_+,\mu)} \le M_q\big\|f\big\|_{H^{\alpha q}(\mathbb{R}^{d+1}_+)}.$$

En revanche, on appelle la mesure géométriquement α–Carleson si pour tout intervalle I, on a $\mu(T(I))^\alpha \le c\,|I|$ où $T(I)$ est la 'tente' au-dessus de I. Pour $\alpha \le 1$ les deux notions coïncident, mais pour $\alpha > 1$ l'estimation géométrique est strictement plus faible. Le résultat suivant a été trouvé indépendamment par Unteregge [**58**] sous une forme un peu moins générale.

Théorème 10. — *Soit $q \in (1,\infty)$, $p \in (1,2]$ et $\alpha q = p'$ où p' est l'exposant dual de p. Soit $T(t) = (e^{-\lambda_n t})_{n\ge 0}$ un semigroupe diagonal sur $E = \ell_q$ et $b = (b_n)$ une suite complexe. On définit la mesure $\mu := \sum_n |b_n|^q\delta_{\lambda_n}$.*

(a) *Si μ est une mesure α–Carleson alors $b \in X_{-\theta}$ pour tout $\theta > {}^1\!/_{p'}$ et $Bu = b\cdot u$ est L^p–admissible.*

(b) *Si $Bu = b\cdot u$ est L^p–admissible, alors $b \in X_{-\theta}$ pour tout $\theta > {}^1\!/_{p'}$ et μ est géométriquement α–Carleson.*

Les paramètres admissibles p, q dans le théorème interdisent le choix naturel p=q sauf si p=q=2. Pour dépasser ce problème j'ai proposé dans [**H8**] une autre approche, valable pour des semigroupes analytiques. Elle permet une caractérisation si $p \le q$, donc inclut le cas p=q.

Théorème 11. — *Soit $p, q \in (1,\infty)$ et $\alpha q = p$. Soit $T(t) = (e^{-\lambda_n t})_{n\ge 0}$ un semigroupe diagonal* analytique *sur $E = \ell_q$ et $b = (b_n)$ une suite complexe. On définit la mesure $\nu := \sum_n |\frac{b_n}{\lambda_n}|^q\delta_{\lambda_n^{-1}}$.*

(a) *Si ν est α–Carleson, alors $b \in X_{-\theta}$ pour tout $\theta > {}^1\!/_{p'}$ et $Bu = b\cdot u$ est L^p–admissible.*

(b) *Si $Bu = b \cdot u$ est L^p–admissible, alors $b \in X_{-\theta}$ pour tout $\theta > {}^1\!/_{p'}$ et ν est géométriquement α–Carleson.*

L'idée principale de la preuve est de réduire le problème sur les parties réelles des valeurs propres ce qui permet de supposer $\lambda_n > 0$. On utilise ensuite la convolution avec le semigroupe comme fonction carrée de la forme (1) :

$$\int_0^t T(t-s)bu(s)ds = \sum_n b_n\big(\varphi_{\lambda_n^{-1}}(t) * u\big) \otimes e_n$$

où e_n est le vecteur propre associé et $\varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}e^{-x}$. Si on évalue la norme ℓ_q, le coté gauche s'interprète comme norme $L^q(\mathbb{R}_+^2, \mathrm{d}\nu)$. En utilisant la fonction maximale

$$\psi_\nu(x) := \sup\{|Q|^{-1}\,\nu(T(Q)) :\ x \in Q\} \tag{15}$$

associée à la mesure ν, on se ramène à $P_t * u$ où P_t est le noyau de Poisson et on conclut.

Ce résultat (et sa méthode de preuve) a été repris et étendu dans [**24**, Section 3] où la bornitude de la transformation de Laplace entre $L^p(\mathbb{R}_+)$ et $L^q(\mathbb{C}_+, \mathrm{d}\mu)$ est étudiée. On y trouve également une explication du Corollaire évident des deux théorèmes 10 et 11 : si les hypothèses des deux sont satisfaits, μ est une mesure ${}^{p'}\!/_q$–Carleson si et seulement si ν est ${}^{p}\!/_q$–Carleson. En effet, dans le cas sectoriel, la propriété de α-Carleson peut être testée sur des “anneaux” dyadiques

$$D_n = \{z :\ |z| \sim 2^n, |\arg(z)| < \theta\}.$$

Le passage de la mesure μ à la mesure ν correspond alors à l'inversion $z \mapsto 1/z$ qui effectue simplement un ré-arrangement pondéré des anneaux dyadiques.

Admissibilité pour des problèmes non-autonomes de type Volterra. — On étudie les questions d'admissibilité pour une équation non-autonome de type Volterra,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t a(t-s)\,Ax(s)\,ds, \qquad t \geq 0,\\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

On suppose que ce problème est parabolique dans le sens de Prüß [**48**] et que le noyau a est 1-régulier, i.e. que a est à croissance sous-exponentielle et que sa transformation de Laplace satisfait $|\lambda\widehat{a}'(\lambda)| \lesssim |\widehat{a}(\lambda)|$. L'existence de solutions $x(\cdot) = S(t)x_0$ est alors garantie par un analogue au théorème de Hille-Yosida voir [**48**, Theorem I.3.1]. On appelle $C \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(A), Y)$ admissible en temps fini s'il existe des constantes $\eta, K > 0$ telles que

$$\left(\int_0^t \|CS(r)x\|^2\, dr\right)^{1/2} \leq Ke^{\eta t}\|x\|$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$. Si A engendre un semigroupe fortement continu $T(t)_{t\geq 0}$ sur X, et si a est sectoriel, i.e. si $\widehat{a}(\mathbb{C}_+) \subset S_\theta$, pour $\theta < \pi/2$, la famille $S(t)_{t\geq 0}$ est même subordonnée au semigroupe dans le sens où il existe une famille de fonctions $(v_t)_{t\geq 0}$, uniformément bornées dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, telles que

$$S(t)x = \int_0^\infty v_t(s)T(s)x\,\mathrm{d}s.$$

Dans [**H9**] on ajoute à ce résultat de Prüß [**48**, Prop.I.3.5] des estimations pour $\|v_t\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$; en conséquence on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz directement un transfert de l'admissibilité d'un opérateur d'observation pour le semigroupe à la famille d'évolution $S(\cdot)$.

Théorème 12. — *Soit A le générateur d'un semigroupe fortement continu sur X et $a \in L^1_{loc}$ un noyau 1-régulier et sectoriel. Alors, si C est admissible pour $T(t)_{t\geq 0}$, il l'est pour $S(t)_{t\geq 0}$.*

En utilisant les résultats connus sur la conjecture de Weiss on généralise les résultats 'perturbatifs' dans [**28, H6**]. Dans [**23**], à la place de la sectorialité de type $< \pi/2$ les auteurs mettent l'hypothèse plus faible, à savoir $\widehat{a}(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. En revanche, leur conditions supplémentaires exigent en fait une décroissance $|\frac{1}{\widehat{a}(\lambda)}| \leq M|\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}_+$ ce qui est très restrictive ; en particulier, je ne connais pas d'exemple de leur approche qui ne soit pas couvert par Théorème 12.

3. Observabilité

On souhaite savoir dans quelle mesure l'observation y du système

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) = Bu(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 & \\ y(t) = Cx(t) & t \geq 0. \end{cases}$$

détermine la valeur initiale x_0. La situation la plus simple est de regarder le système libre (i.e $B = 0$), et de supposer que C est admissible. Typiquement, trois notions sont alors distinguées [**14, 57**]. On dit que le système est exactement observable en temps $\tau \in (,\infty]$, si

$$\Psi : \begin{cases} X & \to & \mathcal{Y}_\tau \\ x & \mapsto & CT(\cdot)x \end{cases}$$

est un opérateur inversible. On appelle C approximativement observable si Ψ est injectif et on dit que C est observable en temps final, si $\|\Psi(x)\|_{\mathcal{Y}} \geq c\|T(\tau)x\|$. (‖)
On va se limiter ici à l'observabilité exacte et aux normes L^2, i.e. $\mathcal{Y} = L^2(0,\tau;Y)$. Il est facile de montrer une condition nécessaire pour l'observabilité exacte, le test de Hautus : il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\kappa^2 \mathrm{Re}(z)^2 \|x\|^2 \leq Re(z)\|Cx\|^2 + \|(z{+}A)x\|^2 \tag{16}$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. Comme pour la question d'admissibilité, une conjecture proposée par Russell et Weiss dans [**50**] a attiré beaucoup d'intérêt. Même si la conjecture est fausse en général, le critère est essentiellement vrai pour les générateurs de groupes (avec quelques restrictions de croissance), voir par exemple [**62, 39, 27**]. Ceci pour plusieurs raisons. La première est que l'observabilité exacte est 'rare' si le semigroupe n'est pas un groupe. Dans [**H11**] on montre avec des méthodes spectrales que l'observabilité exacte par des observations 'trop régulières' implique l'inversibilité du semigroupe. D'autre part la démonstration du test de Hautus est en fait un résultat de perturbation caché. On montre facilement le résultat suivant :

Proposition 13. — *Soit A générateur d'un semigroupe $T(t)_{t\geq 0}$ sur H et C admissible observable en temps $\tau > 0$. Alors C est exactement observable en temps $\tau > 0$ si et seulement si l'inégalité*

$$\frac{m}{2}\|x\|^2 \leq \int_0^\tau \|CS(t)x\|^2\,dt + M^2\Big(\int_0^\tau \|(A{-}B)S(s)x\|\,ds\Big)^2 \tag{17}$$

est vraie pour tout semigroupe $S(t) = e^{-tB}$.

La conjecture de Russel et Weiss est équivalente à affirmer que si (17) est vrai pour tout *scalaire* $B = \lambda \in \mathbb{C}$, alors (17) est vrai pour $B = A$. Même si A est borné ceci ne semble pas fournir une preuve du test de Hautus (qui est vrai dans ce cas, voir [**50**]). Il est important de signaler deux autres résultats sur la condition (16). D'une part, elle entraîne toujours l'observabilité approchée [**57**, Sect. 6.5]. D'autre part, Miller a trouvé [**40, 41**] plusieurs résultats sur l'observabilité en temps final pour des conditions spectrales de la forme

$$f(\lambda)\|Cx\| + g(\lambda)\|(\lambda + A)x\| \geq \|x\|. \tag{18}$$

Rappelons que le théorème de Kalton-Weis discuté dans la première section fournit des estimations inférieures du type $\|\varphi(tA)x\|_{\gamma(\mathbb{R}_+^*,E)} \geq m\|x\|$ pour des

‖. A ces trois notions correspondent pour l'opérateur de contrôle les notions de controllabilité exacte (tout état peut être atteint en temps τ), approché (le sous-espace des états atteignables est dense) et contrôle à l'équilibre (on peut forcer $x(\tau) = 0$ pour toute valeur initiale par une fonction u convenable.

opérateurs ayant un calcul fonctionnel borné, on devrait s'attendre à pouvoir se servir de ces estimations pour obtenir des résultats sur l'observabilité exacte. Cependant, le théorème de Le Merdy concernant l'admissibilité ne peut pas servir de modèle. En effet, la démonstration repose sur une estimation de fonction carrée pour une fonction $f(z) = z^{\alpha}e^{-z}$, ce qui oblige de travailler avec des semigroupes analytiques. Mais analyticité du semigroupe et observabilité exacte s'excluent (essentiellement) mutuellement. Dans [**H11**] on trouve une solution à ce problème. On a le résultat suivant.

Théorème 14. — *Soit $-A$ le générateur d'un semigroupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H. Si A est à image dense et si $\|CA^{-1/2}x\| \geq \delta\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$, alors*

$$m^2\|x\|^2 \leq \int_0^{\infty} \|CT(t)x\|_Y^2\, dt \tag{19}$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$. Si, de plus, soit A est inversible soit C est L^2-admissible, alors C exactement observable.

L'idée de la preuve est simple : on combine l'hypothèse du théorème avec le Théorème 3 pour calculer

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &\lesssim \int_0^{\infty} \|(tA)^{-1/2}(T(2t) - T(t))x\|^2 \,\tfrac{dt}{t} \\
&\lesssim \int_0^{\infty} \|CA^{-1}(T(2t) - T(t))x\|_Y^2 \,\tfrac{dt}{t^2} \\
&= \int_0^{\infty} \| \int_t^{2t} CT(s)x\, ds\|_Y^2 \,\tfrac{dt}{t^2} \\
&\leq \int_0^{\infty} \int_t^{2t} \|CT(s)x\|_Y^2\, ds \,\tfrac{dt}{t} \\
&= \int_1^{2} \int_0^{\infty} \|CT(tu)x\|_Y^2 t^{2\beta-1}\, dt\, du \\
&\sim \int_0^{\infty} \|CT(r)x\|_Y^2\, dr.
\end{aligned}$$

L'hypothèse d'une estimation 'multiplicative' $\|CA^{-1/2}x\| \geq \delta\|x\|$ dans le Théorème est assez restrictive, puisqu'elle ne s'applique (par exemple) pas à des observations de rang fini. Cependant il est clair qu'il faut une condition bien plus forte que (16) pour espérer des résultats pour des semigroupes. On espère pouvoir affaiblir cette hypothèse vers une condition de la forme (18) ; l'obstacle principal me semble être une certaine incompatibilité du calcul fonctionnel sectoriel avec ce type de conditions. Signalons que notre résultat est, à présent, le seul résultat abstrait connu pour des semigroupes.

4. Théorèmes de perturbation

Dans cette section on discute des théorèmes de perturbation d'opérateurs sectoriels, basé sur l'article [**H3**]. Notre approche –regarder des perturbations factorisées– s'inspire du concept d'observateur Luenberger de la théorie de contrôle : imaginons un système de la forme (9) avec une valeur initiale x_0 inconnue. Si on pose

$$z'(t) + Az(t) = Bu(t) + L(y(t) - Cz(t)) \qquad z(0) = 0,$$

alors l'erreur $e = x - z$ satisfait $e' + (A - LC)e$ et $e(0) = x_0$. Si l'opérateur $A - LC$ engendre par exemple un semigroupe exponentiellement stable, l'état du système "simulé" $z(\cdot)$ converge exponentiellement vers le "vrai" état $x(\cdot)$ du système. Puisque nous souhaitons traiter des systèmes avec des opérateurs non-bornés, nous considérons une perturbation de A de la forme

$$P := (A_{-1} - BC)\big|_X.$$

L'idée principale que nous poursuivons est d'exploiter la formule $(I - ST)^{-1} = S\,(I - TS)^{-1}\,T$, appliqué aux résolvantes de A et P. On obtient

$$\lambda(\lambda + P)^{-1} = \lambda(\lambda + A)^{-1} + \Big[\lambda^{\theta}(\lambda + A_{-1})^{-1}B\Big]\,\big[I - C(\lambda + A_{-1})^{-1}B\big]^{-1}\,\Big[\lambda^{1-\theta}C(\lambda + A)^{-1}\Big].$$

Si on suppose les trois conditions naturelles,

$$\begin{aligned}
&\big\|C(\lambda + A_{-1})^{-1}B\big\|_{Y\to Y} \le \eta < 1 && \lambda > 0\\
&\big\|\lambda^{1-\theta}C(\lambda + A)^{-1}\big\|_{X\to Y} \le \gamma && \lambda > 0\\
&\big\|\lambda^{\theta}(\lambda + A_{-1})^{-1}B\big\|_{Y\to X} \le \beta && \lambda > 0
\end{aligned}$$

la sectorialité de A se transfère sur P. Remarquons que pour le choix $\theta = 1/2$, les deux dernières conditions sont exactement les 'conditions de Weiss' pour les opérateurs B et C qui sont nécessairement satisfaites par tout opérateur d'observation respectivement de contrôle qui est L^2-admissible.

Théorème 15. — *Soit $\omega \in (0, \pi]$ et A un opérateur injectif, sectoriel de type $< \omega$ sur X. Soit $\theta \in (0, 1)$ et $Z, W \hookrightarrow X_{-1}$ des espaces de Banach tels que*

$$(\dot{\mathcal{D}}, X)_{1-\theta,1} \subset Z \quad \text{and} \quad W \subset (X, \dot{\mathcal{R}})_{1-\theta,\infty}.$$

On suppose que $[A_{-1}]^{-1} \in \mathcal{B}(W, Z)$ et une des deux conditions suivantes :

(a) *A_{-1} restreint à un opérateur sectoriel de type $< \omega$ sur Z.*

(b) *A_{-1} restreint à un opérateur sectoriel de type $< \omega$ sur W.*

Alors, si $B \in \mathcal{B}(Y, W)$ et $C \in \mathcal{B}(Z, Y)$ tel que $\|C\| \cdot \|B\|$ est suffisamment petit, P est injectif et sectoriel de type $< \omega$. De plus, P est densement défini / inversible / à image dense si A l'est.

Il est surprenant d'obtenir avec ce résultat une amélioration de résultats connus dans la littérature pour des perturbations de la forme $P = A_{-1}(1+T)$, en jouant avec les factorisations triviales

$$A_{-1}T = I \cdot A_{-1}T = A_{-1}T \cdot I$$

en effet, certains (et si T est compact, toutes) espaces d'interpolation réelle entre $\mathcal{D}(P)$ et X et ceux entre $\mathcal{D}(A)$ et X coïncident, même si on ne connaît pas $\mathcal{D}(P)$, voir [**H3**, Theorem 5.2 et 5.3].

Théorèmes de perturbation pour la régularité maximale L^p. — On dit qu'un générateur $-A$ d'un semigroupe analytique a la régularité maximale L^p sur un espace X, si la solution 'mild'

$$x(t) = \int_0^t AT(t-s)f(s)\,ds$$

du problème $x'(t) + Ax(t) = f(t)$ avec condition initiale $x(0) = 0$ satisfait $x', Ax \in L^p(0,\tau;X)$ pour tout $f \in L^p(0,\tau;X)$. Cette définition ne dépend évidemment pas de $\tau > 0$, mais elle ne dépend non plus de $p \in (1,\infty)$. L'importance de cette notion provient de son utilité pour traiter des équation non-linéaires par des arguments de point fixe. Pour traiter par exemple des équations quasi-linéaires de la forme

$$x'(t) + A(x(t))\,x(t) = f(t) \qquad x(0) = x_0,$$

on peut linéariser $x' + A(x_0)x(t) = (A(x_0) - A(x(t)))x(t) + f(t)$ et itérer cette équation point fixe sur un espace convenable, typiquement de la forme

$$W^{1,p}(0,\tau;X) \cap L^p(0,\tau;\mathcal{D}(A)) \cap C(0,\tau;Z)$$

où $Z = (X,\mathcal{D}(A))_{1/p,p}$, voir par exemple [**10**]. La littérature sur le sujet de la régularité maximale est très vaste ; on mentionnera ici [**1, 3, 4, 5, 17, 35**] et les références qui y sont données.

Sur des espaces de Hilbert, tout générateur d'un semigroupe analytique a la régularité maximale L^p [**18**]. En espaces de Banach, ceci est faux [**30**]. En effet la bonne condition a été donnée par Weis [**60**] : dans des espaces UMD un générateur d'un semigroupe analytique a la régularité maximale L^p si et seulement s'il est R-sectoriel d'angle $< \pi/2$ (**). Sur des espaces UMD ayant la propriété (α) (par exemples des Banach lattices avec UMD) la R-sectorialité est garantie si l'opérateur a un calcul H^∞ d'angle $< \pi/2$ [**31**], ce qui permet de démontrer cette propriété importante dans des exemples concrets. D'autre

. un opérateur est R-sectoriel si l'ensemble dans (4) est non seulement borné mais R-borné. La notion de R-bornitude est plus forte que bornitude uniforme, voir [35**] pour une discussion détaillée.

part, les arguments pour le Théorème 15 s'étendent essentiellement à la R-sectorialité, voir [**H3**, Théorème 6.11 et 6.12], et si on combine ceci avec le théorème de Weis, on obtient le résultat suivant.

Théorème 16. — *Soit X un espace UMD et supposons que A a la régularité maximale L^p sur X. Soit*

$$Z \in \big\{\mathcal{D}(A^\theta), [X,\mathcal{D}(A)]_\theta, (X,\mathcal{D}(A))_{\theta,2} :\ \theta \in (0,1)\big\}$$

Alors, si la norme de $T \in \mathcal{B}(Z)$ est petite, $P := A(1+T)$ engendre un semigroupe analytique et P a la régularité maximale L^p sur X.

Ce résultat généralise par exemple les résultats dans [**35**].

5. Le problème de Cauchy stochastique

Rappelons la construction de l'intégration stochastique dans des espaces de Banach par van Neerven et Weis [**46**].
Soit H un espace de Hilbert et $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle un mouvement Brownien H-cylindrique une application $W_H : L^2(\mathbb{R}_+;H) \to L^2(\Omega)$ tel que $W_H f$ est une variable aléatoire Gaussienne pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+;H)$ et

$$\mathbb{E}(W_H f \cdot W_H g) = [f,g]_{L^2(\mathbb{R}_+;H)}$$

pour tout $f,g \in H$. Une fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(H,E)$ est appelée stochastiquement intégrable si pour tout $x^* \in E^*$, la fonction $t \mapsto \Phi^*(t)x^*$ est dans $L^2(\mathbb{R}_+;H)$, et si pour tout ensemble Borelien $B \subseteq \mathbb{R}_+$ il existe une variable aléatoire $X_B \in L^2(\Omega;E)$ telle que

$$\int_B \Phi^* x^*\, dW_H := W_H(\mathbb{1}_B \Phi^* x^*) = \langle X_B, x^*\rangle, \quad \forall x^* \in E^*.$$

Dans [**46**] est montré que Φ est stochastiquement intégrable si et seulement s'il existe un opérateur $R \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+;H),E)$ tel que pour tout $x^* \in E^*$, on a $R^*x^* = \Phi^*x^*$ dans $L^2(\mathbb{R}_+;H)$. Pour plus de détails sur cette construction on réfère également au survey [**47**].

Soit $-A$ le générateur d'un semigroupe fortement continu sur E. Le problème de Cauchy

$$x(t) + Ax(t) = f(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{20}$$

a pour solution 'mild'

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

On définit par analogie le problème de Cauchy stochastique

$$(\mathrm{SCP}_{A,B}) \qquad \begin{cases} dU(t) = AU(t)\,dt + B\,dW_H(t), & t \in [0,T], \\ U(0) = x_0, \end{cases}$$

où $B \in \mathcal{B}(H;E)$ et on appelle solution un processus stochastique vérifiant

$$U(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)BdW_H.$$

Ce problème admet une solution, respectivement une mesure invariante, si et seulement si pour tout $u \in U$, $T(\cdot)Bu \in \gamma(\mathcal{H}, E)$ où $\mathcal{H} = L^2([0,\tau);H)$ avec $\tau > 0$ (respectivement $\tau = \infty$), voir [**46**].

Un théorème de Datko [**16**] dit que lorsqu'un semigroupe $T(t)_{t\geq 0}$ a des orbites carrées intégrables, alors il est déjà uniformément asymptotiquement stable. Puisque pour des espaces de Hilbert, $\gamma(\mathbb{R}_+, H) = L^2(\mathbb{R}_+, H)$, la question se pose de savoir si on avait un résultat analogue pour les espaces $\gamma(\mathbb{R}_+, X)$. La réponse, affirmative, est donné dans [**H4**]. On démontre d'abord qu'on peut tester la γ–radonification sur une base de Riesz à la place d'une base orthonormée, puis, en utilisant une base empruntée de [**8**], on démontre que la norme de la résolvante n'explose pas plus vite que $1/\mathrm{Re}(\lambda)$ lorsque $\lambda \to 0$. Ceci implique que la borne spectrale de la résolvante et donc la borne de croissance du semigroupe est strictement négative. On tire une deuxième conséquence des résultats :

Théorème 17. — *Soit $P, B \in \mathcal{B}(E)$. Si le problème* $\mathrm{SCP}_{A,B}$ *admet une solution, alors le problème perturbé* $\mathrm{SCP}_{A+P,B}$ *aussi.*
Si $\{R(is, A) : s \in \mathbb{R}\}$ est R–borné et si le problème $\mathrm{SCP}_{A,B}$ *admet une mesure invariante pour $B \in \mathcal{B}(H, E)$, alors il existe un $\delta > 0$ tel que* $\mathrm{SCP}_{A+P,B}$ *admet une unique mesure invariante pour tout $P \in \mathcal{B}(E)$ avec $\|P\| < \delta$.*

Dans le cas où B est un opérateur non-borné on s'intéressait dans [**H10**] à savoir si un analogue du théorème de Le Merdy sur la conjecture de Weiss tiendrait pour le problème de Cauchy stochastique. Dans [**H10**] on conjecture que ceci est équivalent à $A^{-1/2}B \in \gamma(H, E)$, en le vérifiant seulement pour des opérateurs bornés A et des opérateurs A, B qui se diagonalisent simultanément sur une base de Riesz. Le résultat cherché a été trouvé récemment avec Abreu et van Neerven [**H13**].

Théorème 18. — *Soit E un espace de Banach avec la propriété (α) et soit $-A$ un opérateur qui admet un calcul fonctionnel H^∞ borné d'angle $< \pi/2$. Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ le semigroupe analytique borné engendré par A et $B \in \gamma(H, E_{-1})$ un opérateur. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le problème* $(\mathrm{SCP}_{A,B})$ *admet une mesure invariante sur E ;*

(b) $(-A)^{-1/2}B \in \gamma(H, E)$;

(c) *la fonction* $t \mapsto t^{1/2} R(t, A)B$ *définit un opérateur dans* $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), E)$;

(d) *Pour tout* $t > 0$, $R(t, A)B \in \gamma(H, E)$ *et*

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n 2^{n/2} R(2^n, A)B \Big\|^2_{\gamma(H,E)} < \infty.$$

La preuve de ce résultat est longue et technique ; le point clé de la preuve consiste à utiliser une décomposition dyadique pour utiliser la méthode d'interpolation 'Rademacher' de Kalton, Kunstmann et Weis [**29**]. Ceci montre l'équivalence

(a) $B \in \gamma(H; X)$

(b) $\varphi(tA)B \in \gamma(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; X)$ pour $\varphi(z) = z^{1/2}(1 + z)^{-3/2}$

(c) $\varphi(tA)B \in \gamma(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; X)$ pour tout $\varphi \in H_0^\infty$

qu'on applique à l'espace d'extrapolation homogène $X = \dot{E}_{-1/2}$.

Références

[1] Herbert Amann *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I. Abstract linear theory.* Monographs in Mathematics, 89. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995.

[2] ———, *On the strong solvability of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **2** (2000), no. 1, 16–98.

[3] ——— *Nonlocal quasilinear parabolic equations* Uspekhi Mat. Nauk 60 (2005), no. 6(366), 21–32 ; translation in Russian Math. Surveys 60 (2005), no. 6, 1021–1033.

[4] Wolfgang Arendt et Shangquan Bu *Tools for maximal regularity.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 134 (2003), no. 2, 317–336.

[5] Wolfgang Arendt, Ralph Chill, Simona Fornaro et César Poupaud L^p*-maximal regularity for non-autonomous evolution equations.* J. Differential Equations 237 (2007), no. 1, 1–26.

[6] P. Auscher et Ph. Tchamitchian *Espaces critiques pour le système des equations de Navier-Stokes incompressibles*, preprint, ArXiv 0812.115812 (2008).

[7] Oscar A. Barraza *Self-similar solutions in weak* L^p*-spaces of the Navier-Stokes equations.* Rev. Mat. Iberoamericana 12 (1996), no. 2, 411–439.

[8] P.G. Casazza, O. Christensen, and N.J. Kalton, *Frames of translates*, Collect. Math. **52** (2001), no. 1, 35–54.

[9] Marco Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Paris, 1995, With a preface by Yves Meyer.

[10] Philippe Clément et Shuanhu Li *Abstract parabolic quasilinear equations and application to a groundwater flow problem.* Adv. Math. Sci. Appl. 3 (1993/94), Special Issue, 17–32.

[11] R. Coifman ; Y. Meyer et E.M. Stein *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis*, J. Funct. Anal. 62 (1985), no. 2, 304—335.

[12] Michael Cowling, Ian Doust, Alan McIntosh, et Atsushi Yagi, *Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **60** (1996), no. 1, 51–89.

[13] Michel Crouzeix et Bernard Delyon, *Some estimates for analytic functions of strip or sectorial operators*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), no. 5, 559–566.

[14] Ruth Curtain et Hans Zwart *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory* Texts in Applied Mathematics, 21. Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Ergodicity for Infinite-Dimensional Sys- tems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 229, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[16] R. Datko, *Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 610–616.

[17] Robert Denk, Matthias Hieber et Jan Prüss *$\mathcal{R}$-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type.* Mem. Amer. Math. Soc. 166 (2003), no. 788.

[18] L. De Simon, 'Un' applicazione della theoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineare astratte del primo ordine', Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (1964) 205-223.

[19] Hiroshi Fujita and Tosio Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem. I*, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

[20] Haase, Markus *The functional calculus for sectorial operators* Operator Theory : Advances and Applications, 169. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[21] L. F. Ho et D. L. Russell, *Admissible input elements for systems in Hilbert space and a Carleson measure criterion*, SIAM J. Control Optim. **21** (1983), no. 4, 614–640, Erratum in the same journal, Vol. 21,No. 6, p. 985–986.

[22] Birgit Jacob et Jonathan R. Partington, *The Weiss conjecture on admissibility of observation operators for contraction semigroups*, Integral Equations Operator Theory **40** (2001), no. 2, 231–243.

[23] ——— *Admissible control and observation operators for Volterra integral equations* J. Evol. Equ. 4 (2004), no. 3, 333–343.

[24] Birgit Jacob, Jonathan Partington, et Sandra Pott *On Laplace-Carleson embedding theorems*, arXiv :1201.1021v1

[25] Birgit Jacob, Olof Staffans, et Hans Zwart, *Weak admissibility does not imply admissibility for analytic semigroups*, Systems Control Lett. **48** (2003), no. 3-4, 341–350.

[26] Birgit Jacob et Hans Zwart, *Counterexamples concerning observation operators for C_0-semigroups*, SIAM J. Control Optim. **43** (2004), no. 1, 137–153.

[27] ———, *On the Hautus test for exponentially stable C_0-groups* SIAM J. Control Optim. 48 (2009), no. 3, 1275–1288.

[28] M. Jung *Admissibility of control operators for solution families to Volterra integral equations*, SIAM J. Control Optim. 38 (5) (2000) 1323–1333.

[29] Nigel Kalton, Peer Kunstmann et Lutz Weis *Perturbation and interpolation theorems for the H^∞-calculus with applications to differential operators*, Math. Ann. 336 (2006), no. 4, 747–801.

[30] Nigel Kalton et Gilles Lancien *A solution to the problem of Lp-maximal regularity* Math. Z. 235 (2000), no. 3, 559–568.

[31] Nigel Kalton et Lutz Weis, *The H^∞-calculus and square function estimates*, manuscript non publié.

[32] Herbert Koch and Daniel Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math. **157** (2001), no. 1, 22–35.

[33] Hideo Kozono and Masao Yamazaki, *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), no. 5-6, 959–1014.

[34] Christoph Kriegler, *Functional calculus and dilation for c_0–groups of polynomial growth.*, à paraître dans Semigroup Forum.

[35] P.C. Kunstmann, L. Weis : Perturbation theorems for maximal Lp-regularity, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol. XXX, 415-435 (2001).

[36] Pierre Gilles Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 431, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[37] Christian Le Merdy, *The Weiss conjecture for bounded analytic semigroups*, J. London Math. Soc. (2) **67** (2003), no. 3, 715–738.

[38] ———, *On square functions associated to sectorial operators*, Bull. Soc. Math. France 132 (2004), no. 1, 137–156.

[39] Luc Miller *Controllability cost of conservative systems : Resolvent condition and transmutation*, J. Funct. Anal., 218 (2005), pp. 425–444.

[40] ———, *A direct Lebeau-Robbiano strategy for the observability of heat-like semigroups*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 14 (2010), no. 4, 1465–1485.

[41] ———, *On the cost of fast control for heat-like semigroups : spectral inequalities and transmutation*, preprint, HAL-00459601.

[42] Alan McIntosh, *Operators which have an H_∞ functional calculus*, Miniconference on operator theory and partial differential equations (North Ryde, 1986), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 14, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986, pp. 210–231.

[43] Alan McIntosh et Atsushi Yagi, *Operators of type ω without a bounded H_∞ functional calculus*, Miniconference on Operators in Analysis (Sydney, 1989), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 24, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1990, pp. 159–172.

[44] Yves Meyer, *Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations*, Current developments in mathematics, 1996 (Cambridge, MA), Int. Press, Boston, MA, 1997, pp. 105–212

[45] Sylvie Monniaux, *Navier-Stokes equations in arbitrary domains : the Fujita-Kato scheme*, Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 2-3, 455–461.

[46] J.M.A.M. van Neerven et L. Weis, *Stochastic integration of functions with values in a Banach space*, Studia Math. **166** (2005), no. 2, 131–170.

[47] Jan van Neerven *γ-radonifying operators – a survey* The AMSI-ANU Workshop on Spectral Theory and Harmonic Analysis, 1–61, Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., 44, Austral. Nat. Univ., Canberra, 2010.

[48] Jan Prüss *Evolutionary integral equations and applications* Monographs in Mathematics, 87. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[49] Jan Prüss and Gieri Simonett, *Maximal regularity for evolution equations in weighted L_p-spaces*, Arch. Math. (Basel) **82** (2004), no. 5, 415–431.

[50] David L. Russell and George Weiss, *A general necessary condition for exact observability*, SIAM J. Control Optim. **32** (1994), no. 1, 1–23.

[51] Okihiro Sawada, *On time-local solvability of the Navier-Stokes equations in Besov spaces*, Adv. Differential Equations **8** (2003), no. 4, 385–412.

[52] Hermann Sohr, *The Navier-Stokes equations : An elementary functional analytic approach* Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[53] E. M. Stein *On the maximal ergodic theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 47 1961 1894–1897.

[54] ______, *The development of square functions in the work of A. Zygmund*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), no. 2, 359–376.

[55] ______, *Harmonic Analysis : Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[56] Tolokonnikov, V. A. Estimates in the Carleson corona theorem, ideals of the algebra H^∞, a problem of Sz.-Nagy. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 113* (1981), 178–198, 267. Investigations on linear operators and the theory of functions, XI.

[57] Marius Tucsnak et George Weiss *Observation and control for operator semigroups* Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[58] Michael Unteregge, *p-admissible control elements for diagonal semigroups on l^r-spaces*, Systems Control Lett. **56** (2007), no. 6, 447–451.

[59] I. V. Videnskiĭ, *An analogue of Carleson measures*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **298** (1988), no. 5, 1042–1047.

[60] Lutz Weis *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity.* Math. Ann. 319 (2001), no. 4, 735–758.

[61] George Weiss, *Two conjectures on the admissibility of control operators*, Estimation and control of distributed parameter systems (Vorau, 1990), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 100, Birkhäuser, Basel, 1991, pp. 367–378.

[62] Q. Zhou and M. Yamamoto *Hautus condition on the exact controllability of conservative systems*, Internat. J. Control, 63 (1997), pp. 371–379.

Publications

[H0] Thèse : *Kontrolltheorie in Banachräumen und quadratische Abschätzungen*, Universitätsverlag Karlsruhe, 2005, (Allemand) ISBN 3-937300-32-6.

[H1] avec Christian Le Merdy, *α-admissibility of observation and control operators*, Houston J. Math. **31** (2005), no. 4, 1153–1167.

[H2] avec Peer Christian Kunstmann, *Admissibility of unbounded operators and well-posedness of linear systems in Banach spaces*, Integral Equations Operator Theory **55** (2006), no. 4, 497–533.

[H3] avec Markus Haase et Peer Christian Kunstmann, *Perturbation, Interpolation, and Maximal Regularity*, Advances in Differential Equations **11** (2006), no. 2, 201–240.

[H4] avec Jan van Neerven et Mark Veraar, *A stochastic Datko-Pazy theorem*, J. Math. Anal. Appl. **329** (2007), no. 2, 1230–1239.

[H5] avec Peer Christian Kunstmann, *Weighted admissibility and wellposedness of linear systems in Banach spaces*, SIAM J. Control Optim. **45** (2007), no. 6, 2094–2118.

[H6] avec Birgit Jacob, Sandra Pott et Jonathan Partington : *Admissibility and Controllability of diagonal Volterra equations with scalar inputs*, Journal of Differential Equations **246**, (2009), Pages 4423-4440.

[H7] avec Peer Christian Kunstmann, *On Kato's method for Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **11** (2009), no. 4, 492–535.

[H8] *On the Carleson measure criterion in linear systems theory*, Complex Analysis and Operator Theory Volume 4, Issue 2 (2010), Page 281.

[H9] avec Birgit Jacob *Observation of Volterra systems with scalar kernels*, Journal of Integral Equations and Applications **23** (2011), No. 3.

[H10] avec Jan van Neerven, *Uniformly γ-radonifing families of operators and the stochastic Weiss conjecture*, à paraître dans Operators and Matrices (2012).

[H11] avec El Maati Ouhabaz, *Exact observability, square functions and spectral theory*, Journal of Functional Analysis **262** (2012), no. 6, 2903 – 2927.

[H12] *The Weiss conjecture and weak norms*, à paraître dans Journal of Evolution Equations (2012).

[H13] avec Jamil Abreu et Jan van Neerven, *The stochastic Weiss conjecture for analytic semigroups*, à paraître dans Journal Lond. Math. Soc.

Preprints

[H14] avec Markus Haase, *Square function estimates and functional calculus*, en préparation.

Bernhard H. Haak, Institut de Mathématiques de Bordeaux
E-mail : `bernhard.haak@math.u-bordeaux1.fr`