



**HAL**  
open science

# Génération et manipulation de peignes de fréquences quantiques multimodes

Renné Medeiros de Araujo

► **To cite this version:**

Renné Medeiros de Araujo. Génération et manipulation de peignes de fréquences quantiques multimodes. Optique [physics.optics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : . tel-00771444

**HAL Id: tel-00771444**

**<https://theses.hal.science/tel-00771444>**

Submitted on 8 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie en Sciences Physiques



## Génération et manipulation de peignes de fréquences quantiques multimodes

# Renné MEDEIROS DE ARAÚJO



Soutenance le 19 novembre 2012

Membres du jury :

Mme.	Agnès MAÎTRE	Président du jury
Mme.	Rosa TUALLE-BROURI	Rapporteur
M.	Yanne CHEMBO	Rapporteur
M.	Bertrand GIRARD	Examineur
M.	Nicolas TREPS	Directeur de thèse
M.	Claude FABRE	Co-directeur de thèse







## Remerciements

J'aimerais consacrer ces premières pages du manuscrit à toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce que j'arrive ici, aujourd'hui, ayant la sensation du devoir accompli. En particulier, je tiens à remercier l'ancien directeur du Laboratoire Kastler Brossel, Paul Indelicato, pour m'y avoir très bien accueilli, et l'actuel directeur, Antoine Heidmann, pour avoir donné continuité à son travail. Merci également aux membres de mon jury de thèse, Rosa Tualle-Brouri, Agnès Maître, Yanne Chembo, Bertrand Girard, Nicolas Treps et Claude Fabre, pour leur temps, leurs commentaires, leurs remarques pertinentes et pour m'avoir donné la possibilité d'écrire ces remerciements en tant que docteur.

Durant ces trois années de thèse, beaucoup de moments de doute sont apparus. Quelques uns ont été assez déstabilisants. Une manip qui ne marchait pas comme attendu... une question existentielle qui persistait... enfin, tout ce dont on entendait parler les thésards plus expérimentés. Et on voit les mêmes histoires se répéter. Les mêmes sentiments, les mêmes sensations d'insécurité. Mais enfin, tout se passe bien. Avec du recul, on voit que tout a valu la peine, et qu'on s'est même amusé. Les histoires se répètent mais elles ne se font pas toutes seules. Elles nécessitent les efforts de ses acteurs, la participation de ses plusieurs agents. Et je parle non seulement de toutes les personnes travaillant au LKB (ou chez Picard, qui m'ont nourri pendant les longues nuits de rédaction au labo), mais aussi, et bien évidemment, de mes proches, mes amis, ma famille...

Même si ma famille était loin géographiquement, j'ai pensé fort à eux pendant tout ce séjour en France, et c'est non seulement pour moi, mais pour eux aussi, que je suis venu, que j'ai entamé une thèse et que je suis allé jusqu'au bout. Merci à mes parents pour cette éducation libérale et tolérante qui m'a toujours servi et à ma petite soeur pour m'avoir transmis le sentiment qu'il y aura toujours quelqu'un qui sera de mes côtés quoi qu'il arrive. Enfin, merci, Jurema, mon amie, ma compagne, j'aurais difficilement supporté les moments durs de cette thèse sans ton amour et compréhension infinis...

Mais il n'y a pas que des moments durs dans une thèse, il y a aussi des moments d'apprentissage intense, de joie et d'excitation. Je ne peux pas exprimer dans une seule phrase mon contentement d'avoir partagé tout cela avec une équipe aussi incroyable que l'équipe Femto du groupe Optique Quantique Paramétrique du Laboratoire Kastler Brossel.

Je voudrais tout d'abord remercier Olivier Pinel pour m'avoir introduit dans le monde des manip dès mon stage de M2 et m'avoir appris tout ce dont j'avais besoin

## *Remerciements*

pour devenir autonome, y compris les limites de courant que peut prendre notre coeur avant l'arrêt cardiaque. Grazie à Virginia d'Auria pour m'avoir patiemment appris à faire un clic-clac ! Merci à Benoît Chalopin pour sa pédagogie, qui m'a tellement aidé, même si sa présence en salle de manip constituait une source importante de bruit acoustique. Merci Jean-François Morizur, pour son énergie et globalement pour son envie constante de discuter et partager des idées. Merci Giuseppe Patera et Shifeng Jiang, pour m'avoir donné les bases pour comprendre la théorie du SPOPO. Merci Pu Jian, pour la personne humble et extrêmement intelligente que tu es, toujours prête à aider, et pour tes sourires encourageants qui ont développé chez moi une amitié et une admiration sincères. Merci Roman Schmeissner pour nous faire rigoler avec tes blagues pas marrantes (c'est un don, ce que tu as) et pour être si tolérant, vu le nombre de fois où j'ai dépassé les rideaux pour venir piquer du matériel sur ta table de manip. Merci Yin Cai, pour tes questions toujours nombreuses et pertinentes qui m'ont finalement aidé à mieux comprendre ce que je fais (Je te souhaite bon courage pour la suite et je suis certain que ça va très bien se passer !). Merci à toi et aussi à Zhan Zheng de cet échange précieux qui m'a permis de me rapprocher un tout petit peu plus de la culture chinoise. Merci Giulia Ferrini, pour ta sympathie inégalable, tes éclats de rire et les échanges théorico-expérimento-musicaux toujours très intéressants et fructueux. Merci Clément Jacquard, pour tes messages sentimentaux d'encouragement pendant ma rédaction et la préparation de la soutenance : tu es un bon garçon ! Merci Valérian Thiel, pour m'avoir appris plein d'expressions typiquement françaises rien qu'en t'écoutant parler (malheureusement, je n'ai pas pu les utiliser dans ce manuscrit pour une question évidente de registre). Jonathan Roslund, you are awesome ! En plus d'une personne extrêmement humble et sincère, tu es quelqu'un de brillant et très efficace. Travailler avec toi a été un énorme plaisir et également très motivant. Merci énormément pour ta générosité et toutes les améliorations substantielles que tu as apportées à l'expérience.

Bien entendu, je ne pourrais pas remercier toute l'équipe sans remercier les personnes qui l'animent, qui la guident : Nicolas Treps et Claude Fabre, les meilleurs directeur et co-directeur de thèse que j'aurais pu imaginer avoir. Il me manque des mots pour décrire et remercier Nicolas, quelqu'un qui, ayant environ 113 stagiaires, 245 thésards et 49 post-doctorants (outre ses activités administratives, d'enseignement et autres), arrive à trouver du temps pour chacun d'entre eux. Toujours gentil et sympathique, il a toujours su guider mes travaux avec une intuition et une expérience incroyables. Nicolas, merci pour ta patience, tes qualités humaines, ton incroyable capacité à te faire respecter en respectant les autres (en particulier, merci pour respecter mon horloge biologique !). Claude, ces remerciements valent aussi pour toi, qui, même ayant été importuné par moi un peu moins souvent, as toujours su répondre à mes questionnements avec un recul et une précision impressionnantes que je mettais souvent quelques heures, voire jours, à apercevoir. Je te remercie pour ta clarté, ton

expérience et ton respect. Bref, après plus de 3 ans d'observation attentive, je suis presque convaincu que Claude et Nicolas sont en réalité des extraterrestres venus sur Terre pour répandre la paix et nous transmettre des connaissances avancées sur l'Univers.

Dans une équipe ayant une telle ambiance de confiance et respect, on ne peut faire autre chose qu'offrir naturellement le meilleur de nous mêmes.

Cette ambiance s'étendait aussi en dehors de l'équipe, pendant les pauses café, les discussions informelles, les repas à la cantine ou les soirées à L'inévitable. Je pense à vous autres du laboratoire (certains qui sont déjà partis) : Alexandros Tavernarakis, Lucile Veissier, Michael Scherman, Olivier Morin, Romain Hivet, Panayotis Akridas-Morel, Kun Huang, Jianli Liu, Alexandre Brioussel, Claire Adrados, Thomas Boulier, Mathieu Manceau, Emiliano Cancellieri, Godefroy Leménager, Julien Laurat, Pierre-François Cohadon, Oxana Mishina, Sidney Burcks, Lambert Giner, Adrien Nicolas, Dominik Maxein, Jean Teissier, Pierre Verlot, Chiara Molinelli. Merci pour les beaux moments passés ensemble.

Merci à nos collaborateurs à Sao Paulo qui sont venus de si loin nous rendre visite et qui m'ont si bien accueilli là-bas pendant un mois en fin 2012. Obrigado, Marcelo Martinelli, Paulo Nussenzweig et Felipe Barbosa. Merci encore à nos collaborateurs en Allemagne, Christine Silberhorn, Benjamin Brecht et Andreas Christ, qui ont ouvert des possibilités futures pour notre expérience. Merci également à Valentin Averchenko, notre collaborateur russe qui intégrera bientôt l'équipe Femto.

Je tiens à remercier également tout le personnel des services techniques du laboratoire. Merci à Annick et Bintou ! Même si, vu mon horaire d'arrivée habituel au labo, on ne se croisait pas très souvent, je vous remercie énormément pour avoir maintenu notre environnement toujours propre et propice au travail. Merci aux courageux messieurs de l'atelier mécanique, qui répondaient toujours à la hauteur de mes demandes très exigeantes toujours dans la bonne ambiance et avec de l'humour. Vos pièces sont partout sur la table optique, de sorte qu'on ne peut pas nier votre participation précieuse dans l'avancement de notre recherche, sans mentionner tous les travaux que vous avez réalisés au cours du déménagement. Jean-Michel, Pascal, Gaël, Arnaud, vous êtes trop forts ! Merci à Brigitte et Jean-Pierre, que j'embêtais moins souvent que la mécanique, mais qui ont été primordiaux dans des moments délicats où mon néophytisme en matière d'électronique ne m'aidait pas à avancer. Merci encore à Serge et à Corine pour la qualité du service informatique. Enfin, un énorme merci à Laëtitia et Monique pour leur support administratif toujours très efficace et compétent !

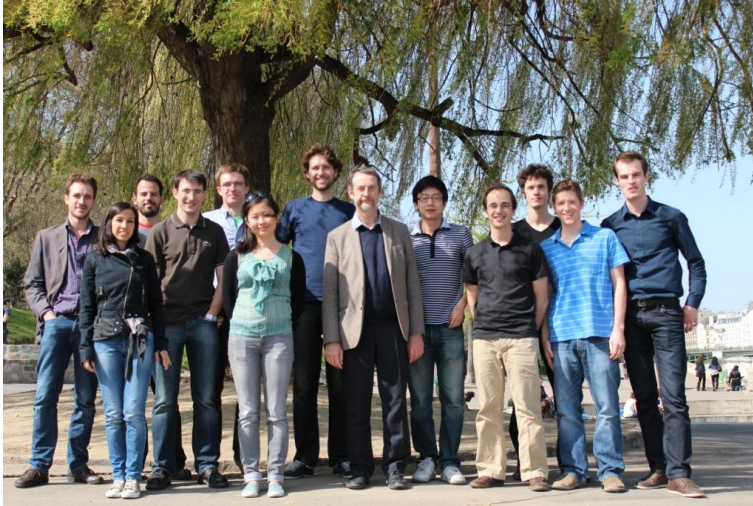
Merci Nicolas, Claude et Pu pour la relecture soigneuse et patiente de mon manuscrit, avec vos commentaires toujours précis et pertinents qui ont tellement rajouté de contenu intéressant à ces pages. Et merci à toute l'équipe pour avoir assisté à mes répétitions de soutenance, et avoir contribué à améliorer grandement la clarté de



## *Remerciements*

l'exposé.

Enfin, je tiens à remercier l'énorme générosité de Nicolas Treps, Claude Fabre et Jonathan Roslund, ces êtres humains (ou extraterrestres) absolument extraordinaires sans qui rien n'aurait été possible et qui m'ont donné nettement plus que ce que je ne serais jamais capable de leur donner. Je ne sais même pas comment exprimer ma gratitude envers vous. Merci infiniment !



***"La galère, ça paye !"***

Michael Scherman



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Outils Théoriques</b>	<b>5</b>
1	Peignes de fréquences et cavités synchrones	7
1.1	Peignes de fréquences	7
1.1.1	Peignes de fréquences et impulsions ultracourtes	8
1.1.2	Propagation dans un milieu dispersif linéaire	11
1.2	Cavités synchrones	13
1.2.1	Généralités sur les cavités optiques	14
1.2.2	Déphasage d'un tour de cavité	16
1.2.3	Couplage d'un peigne de fréquences sans CEO à une cavité sans dispersion et sans phase de Gouy : effet du chemin optique	17
1.2.4	Couplage d'un peigne de fréquences avec CEO à une cavité avec phase de Gouy et dispersion linéaire	21
1.2.5	Couplage d'un peigne de fréquences à une cavité avec GDD	24
1.2.6	Cavités synchrones à longueur réduite	26
2	Optique non-linéaire du second ordre	29
2.1	Champs électromagnétiques réel et complexe	30
2.2	Équations de propagation pour l'optique non-linéaire	31
2.3	Effets non-linéaires avec des impulsions ultra-rapides : généralités	34
2.3.1	La polarisation d'ordre deux	34
2.3.2	Le nombre d'onde autour de la fréquence centrale	35
2.4	Doublage d'un peigne de fréquences	35
2.4.1	Solution de l'équation de propagation	36
2.4.2	L'accord de phase	37
2.4.3	Doublage avec un cristal BIBO	38
2.5	Conversion paramétrique "descendante"	40
2.5.1	L'équation de propagation	41
2.5.2	Solution simplifiée : hypothèse de l'enveloppe réelle	42
2.5.3	L'accord de phase	43
2.5.4	Conversion paramétrique vs. Doublage de fréquence	44
2.5.5	Modes propres de la conversion paramétrique	44
2.5.6	Solution générale de l'équation de propagation via développement de Magnus	48

## Table des matières

2.6	Somme de fréquences . . . . .	50
2.6.1	Équations de propagation . . . . .	51
2.6.2	Solution via Développement de Magnus . . . . .	52
2.6.3	L'accord de phase avec un cristal BIBO . . . . .	52
2.6.4	Forme de la distribution spectrale conjointe . . . . .	53
2.6.5	Modes propres de la somme de fréquences . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Description du champ quantique et outils pour l'optique quantique</b>	<b>57</b>
3.1	Quantification du rayonnement libre . . . . .	57
3.1.1	Opérateurs d'annihilation et de création . . . . .	58
3.1.2	Opérateurs de quadrature . . . . .	59
3.1.3	Représentation de Schrödinger vs. Représentation de Heisenberg . . . . .	59
3.2	Les modes du champ . . . . .	60
3.2.1	Changement de base . . . . .	61
3.2.2	Monomode vs. Multimode . . . . .	62
3.3	Représentation des états quantiques en variables continues . . . . .	63
3.3.1	Matrice densité et fonction de Wigner . . . . .	63
3.3.2	États gaussiens et matrice de covariance . . . . .	63
3.4	Enveloppes lentement variables : représentation d'interaction . . . . .	65
3.4.1	Notion d'enveloppe lentement variable . . . . .	65
3.4.2	Opérateurs quantiques lentement variables . . . . .	65
3.5	Relations d'entrée-sortie . . . . .	66
3.5.1	Transformations symplectiques . . . . .	67
3.5.2	Forme générale d'une transformation symplectique en représentation d'interaction . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)</b>	<b>71</b>
4.1	Définitions . . . . .	72
4.1.1	OPO . . . . .	72
4.1.2	SPOPO . . . . .	72
4.2	Relations d'entrée-sortie pour un OPO . . . . .	73
4.2.1	Le miroir de couplage . . . . .	74
4.2.2	La propagation dans la cavité . . . . .	75
4.2.3	Le gain paramétrique . . . . .	77
4.3	Peignes de fréquences : une base naturelle du SPOPO . . . . .	80
4.3.1	Système quasi-périodique . . . . .	80
4.3.2	Problème aux valeurs propres de l'interaction paramétrique . . . . .	80
4.3.3	Forme des fonctions propres . . . . .	83
4.4	Transformation dans la base supermodes . . . . .	84
4.4.1	Réécriture de la transformation dans la base des supermodes . . . . .	84
4.4.2	Seuil d'oscillation . . . . .	87

4.5	Propriétés quantiques des peigens de fréquences . . . . .	88
4.5.1	Cas dégénéré ( $\theta = 0$ ) . . . . .	88
4.5.2	Cas non-dégénéré ( $\theta \neq 0$ ) . . . . .	90
4.6	Conclusion . . . . .	92

## II Expérience 95

5	Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux	97
5.1	Principe général de l'expérience . . . . .	97
5.1.1	Objectifs . . . . .	97
5.1.2	Dispositif expérimental . . . . .	98
5.2	Sources laser . . . . .	99
5.2.1	Laser de pompe . . . . .	99
5.2.2	Laser femtoseconde . . . . .	102
5.2.3	Asservissements du laser femtoseconde . . . . .	103
5.3	Préparation des faisceaux . . . . .	107
5.3.1	Correction de l'astigmatisme . . . . .	107
5.3.2	Compensation de la dispersion . . . . .	107
5.3.3	Doublage de fréquence . . . . .	109
5.3.4	Délai entre les impulsions signal et pompe . . . . .	110
6	Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité linéaire	113
6.1	La cavité linéaire . . . . .	114
6.1.1	Géométrie et design . . . . .	114
6.1.2	Mode transverse résonnant . . . . .	114
6.1.3	Obtention des pics de résonance et effets thermiques . . . . .	115
6.1.4	Asservissement de la longueur . . . . .	116
6.2	SPOPO en dessous du seuil . . . . .	116
6.2.1	Alignement du cristal non-linéaire et du faisceau pompe . . . . .	116
6.2.2	Amplification sensible à la phase et obtention du seuil . . . . .	117
6.2.3	Asservissement de la phase relative . . . . .	117
6.3	Détection balancée et mesures d'états non-classiques . . . . .	118
6.3.1	Détection balancée et mesure du bruit d'amplitude de faisceaux brillants . . . . .	118
6.3.2	Réduction du bruit quantique d'amplitude . . . . .	119
6.3.3	Détection balancée à filtrage spectral . . . . .	121
6.3.4	Caractérisation d'états non-classiques multimodes . . . . .	122
6.4	Conclusion . . . . .	127

## Table des matières

<b>7</b>	<b>Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau</b>	<b>129</b>
7.1	La cavité en anneau . . . . .	130
7.1.1	Pourquoi une cavité en anneau ? . . . . .	130
7.1.2	Conception et géométrie . . . . .	130
7.1.3	Mode transverse résonnant . . . . .	132
7.1.4	Mise en place et alignement . . . . .	133
7.1.5	Asservissement de la longueur . . . . .	134
7.2	SPOPO en dessous du seuil . . . . .	134
7.2.1	Alignement du cristal non-linéaire et de la pompe . . . . .	134
7.2.2	Amplification sensible à la phase et obtention du seuil . . . . .	134
7.3	SPOPO au-dessus du seuil . . . . .	134
7.3.1	Régimes de fonctionnement . . . . .	134
7.3.2	Spectre du premier supermode . . . . .	135
7.4	Détection homodyne avec mise en forme d'impulsions . . . . .	137
7.4.1	Principe de la détection homodyne : mesure projective . . . . .	137
7.4.2	Mise en forme de l'oscillateur local avec un SLM . . . . .	138
7.5	Observation du vide comprimé sans mise en forme de l'oscillateur local . . . . .	141
7.5.1	Mode matching de l'oscillateur local . . . . .	141
7.5.2	Mesure du bruit quantique . . . . .	142
7.6	Mise en évidence et caractérisation d'états non-classiques multimodes . . . . .	144
7.6.1	Matrice de covariance et protocole expérimental . . . . .	145
7.6.2	Résultats obtenus avec le cristal d'épaisseur 0,5 mm . . . . .	147
7.6.3	Résultats obtenus avec le cristal d'épaisseur 2 mm . . . . .	151
7.7	Conclusion . . . . .	153
<b>8</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>155</b>
8.1	Bilan . . . . .	155
8.2	Perspectives . . . . .	156
8.2.1	Améliorations à court terme . . . . .	156
8.2.2	Détection multipixel . . . . .	157
8.2.3	Façonnage d'états clusters . . . . .	159
8.2.4	Détection adaptative . . . . .	159
8.2.5	Manipulation d'états quantiques multimodes . . . . .	161
	<b>Bibliographie</b>	<b>163</b>







## Introduction

La mécanique quantique a permis d'expliquer de manière extrêmement précise le comportement de la matière à l'échelle microscopique, introduisant pour cela des états de systèmes physiques non accessibles à la physique classique. Pour le champ électromagnétique, la lumière en particulier, le caractère non classique d'un état peut être une ressource privilégiée pour le traitement quantique de l'information [Cerf 07]. Elle peut par exemple assurer la sécurité de protocoles de partage de clé quantique (cryptographie quantique) entre deux parties [Ekert 91] ou être utilisée pour la téléportation quantique d'états du champ [Vaidman 94, Braunstein 98]. Les états non-classiques trouvent encore une importance dans le domaine de la métrologie quantique [Giovannetti 11].

En optique quantique des variables continues, les variables mesurées sont à spectre continu et correspondent généralement aux quadratures du champ. Dans ce régime, en opposition au régime de comptage de photons, le caractère non-classique du champ se manifeste à travers les propriétés de bruit et de corrélation des quadratures. Les sources de lumière lasers stables ont des fluctuations quantiques qui définissent une limite appelée "bruit quantique standard" (*shot noise*, en anglais), calculable à l'aide de la mécanique quantique, et qui s'applique également à l'état vide du champ. Les états dont toutes les quadratures sont au bruit quantique standard sont appelés cohérents [Glauber 63].

De nombreuses expériences d'optique quantique, tirant partie de phénomènes non-linéaires du deuxième ou du troisième ordre, ont pour but de manipuler les fluctuations quantiques des quadratures pour les emmener en dessous du *shot noise*, créant ainsi des états non-classiques dits *comprimés* (observés pour la première fois en 1985 avec de la lumière continue [Slusher 85] et en 1987 en régime impulsionnel [Slusher 87]). Les mêmes dispositifs permettent de créer des états *intriqués*, c'est-à-dire possédant de fortes corrélations d'origine quantique entre différents modes [Laurat 04].

Les modes de propagation de la lumière correspondent à des solutions des équations de Maxwell. D'une manière générale, un mode est défini par sa polarisation, son profil transverse et ses propriétés spectrales/temporelles. Certains états quantiques sont dits multimodes, car leur description complète implique nécessairement au moins deux modes orthogonaux (plus il faut des modes pour décrire un état plus il est dit multimode). Le traitement multimode de la lumière trouve un grand nombre d'applications. Il est par exemple nécessaire pour augmenter le nombre de canaux disponibles en information quantique et satisfaire la complexité croissante des algorithmes [Cerf 07]. Notre groupe a une histoire importante dans l'étude des propriétés

## Introduction

quantiques des images (régime multimode spatial) [Treps 05, Chalopin 10] et s'intéresse depuis quelques années aux propriétés quantiques multimodes des OPO dans le régime impulsif, ce qui nous a emmené à l'étude des peignes de fréquences.

Les peignes de fréquences optiques, objets qui suscitent beaucoup d'intérêt aussi bien dans la recherche fondamentale qu'appliquée, ont attiré encore plus l'attention de la communauté scientifique mondiale lorsque le Prix Nobel de Physique a été décerné à Roy J. Glauber, John L. Hall et Theodor W. Hänsch en 2005. Glauber, "par ses contributions à la théorie quantique de la cohérence optique"; Hall et Hänsch "par leurs contributions au développement de la spectroscopie de précision basée sur les lasers, y compris la technique du peigne de fréquences optiques". En effet, ces objets constituent des outils très adaptés à des applications en métrologie de haute précision [Udem 02, Holzwarth 00], et l'extension de leurs propriétés extraordinaires au régime quantique peut mener à des progrès significatifs dans plusieurs domaines de la physique quantique, comme la métrologie quantique et l'estimation de paramètres [Lamine 08, Pinel 12b], mais aussi le calcul quantique dans le régime des variables continues [Lloyd 99, Menicucci 08].

Un des grands défis liés à l'implémentation des ordinateurs quantiques en variables continues, en ce qui concerne, par exemple, le calcul quantique avec des *clusters states* [Menicucci 06, Zhang 06], est la génération d'états non-classiques fortement multimodes de la lumière (et la "scalabilité" de cette génération). Une des solutions proposées pour ce problème est le mélange linéaire de faisceaux non-classiques provenant de différentes sources [Yukawa 08, O'Brien 09]. Néanmoins, la difficulté à implémenter cette stratégie augmente avec le nombre de modes, et il semble plus intéressant, au contraire, d'utiliser une seule source fortement multimode qui génère directement des ressources non-classiques partagées par plusieurs modes dans le même faisceau. Dans cette perspective, les peignes de fréquences, qui peuvent s'étendre sur plusieurs milliers de modes longitudinaux monochromatiques, ont un potentiel gigantesque pour la génération extensible d'états quantiques multimodes (temporels ou spectraux).

La lumière quantique multimode a déjà été observée expérimentalement avec des faisceaux multimodes spatiaux produits par des Oscillateurs Paramétriques Optiques (OPO) [Janousek 09, Chalopin 10] ou à travers le processus de mélange à quatre ondes [Boyer 08], mais aussi, plus récemment, avec les modes longitudinaux d'un OPO [Pysher 11]. Dans le domaine des modes temporels, la génération d'états comprimés monomodes a déjà été observée dans de nombreuses situations, la première en 1987, avec des impulsions nanosecondes en simple passage dans un cristal non-linéaire [Slusher 87]. Des états non-classiques d'impulsions femtosecondes uniques font l'objet également de plusieurs études récentes (par exemple, [Wenger 05]). Des solitons comprimés multimodes ont été générés dans une fibre optique [Spälter 98]. La réduction monomode du bruit quantique de peignes de fréquences picosecondes a été

possible avec un OPO pompé en mode synchrone (SPOPO, de l'anglais *Synchronously Pumped OPO*) [Shelby 92], qui consiste en un OPO pompé par un train d'impulsions ultracourtes synchronisées avec les impulsions effectuant des tours dans la cavité optique [Cheung 90, Edelstein 89, van Driel 95].

Plusieurs travaux théoriques réalisés au sein de notre groupe [de Valcarcel 06, Patera 09, Jiang 12] ont démontré que les SPOPOs génèrent des peignes de fréquences comprimés et multimodes. En effet, ces dispositifs se comportent comme une assemblée d'OPOs qui compriment leurs modes-propres de façon indépendante les uns des autres. Ces différents modes comprimés sont en réalité des peignes de fréquences ayant différents profils spectraux ou, de manière équivalente, des trains d'impulsions avec différents profils temporels. Les états générés par ce genre de dispositif sont potentiellement très fortement multimodes et se présentent donc comme une solution possible au problème de la scalabilité de la génération d'états multimodes.

Nous présenterons dans cette thèse la réalisation expérimentale de tels états en utilisant deux versions différentes d'un SPOPO en régime femtoseconde. Nous démontrons, en particulier, la production expérimentale d'états contenant 4 modes comprimés indépendants dans un même faisceau. Des mesures plus récentes montrent des faisceaux contenant jusqu'à 8 modes comprimés !

## Plan de la thèse

Cette thèse est divisée en deux grandes parties. La première (chapitres 1 à 4) vise à décrire tous les éléments *théoriques* nécessaires pour comprendre le fonctionnement d'un SPOPO. La seconde partie (chapitres 5 à 8) présente la *réalisation expérimentale* des sources d'états comprimés dans le domaine temps-fréquence.

Le **premier chapitre** introduit succinctement les impulsions femtoseconde et le concept de peigne de fréquence. Le couplage de ceux-ci dans une cavité résonnante dispersive est ensuite présenté en détail. Le **deuxième chapitre** est consacré à la description détaillée de phénomènes non-linéaires d'ordre deux avec des impulsions ultracourtes. Nous traitons seulement les phénomènes intéressants dans le contexte expérimental de la thèse, à savoir : le doublage de fréquences, la conversion paramétrique et la somme de fréquences. Dans le **troisième chapitre**, nous exposons quelques outils essentiels d'optique quantique. Ces outils sont nécessaires notamment dans le **quatrième chapitre**, dédié au traitement quantique du SPOPO avec une nouvelle approche mixte en temps-fréquence dans le cadre d'un formalisme symplectique.

Le **cinquième chapitre** débute par une brève explication du principe général de l'expérience et s'achève avec une description détaillée des sources laser et du montage de préparation des faisceaux. Il possède également les schémas complets de référence des deux versions de l'expérience. Le **sixième chapitre** s'intéresse à la première ver-

## *Introduction*

sion de l'expérience, qui a servi essentiellement comme une validation de principe. Nous avons notamment observé l'amplification sensible à la phase avec un SPOPO en régime femtoseconde et mis en évidence le caractère quantique multimode des états produits par le dispositif. Dans le **septième chapitre**, nous présentons la génération la plus récente de l'expérience, munie d'un nouveau *design* de cavité et d'une détection homodyne avec mise en forme d'impulsions. Les résultats obtenus sont très conséquents, avec une amélioration significative de la quantité de *squeezing*, et montrent la génération d'états quantiques fortement multimodes. Le **dernier chapitre** est consacré au bilan des résultats et à une présentation des perspectives expérimentales à court et à long termes.

# Première partie

## Outils Théoriques



# 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones

## Sommaire

---

<b>1.1 Peignes de fréquences</b> . . . . .	7
1.1.1 Peignes de fréquences et impulsions ultracourtes . . . . .	8
1.1.2 Propagation dans un milieu dispersif linéaire . . . . .	11
<b>1.2 Cavités synchrones</b> . . . . .	13
1.2.1 Généralités sur les cavités optiques . . . . .	14
1.2.2 Déphasage d'un tour de cavité . . . . .	16
1.2.3 Couplage d'un peigne de fréquences sans CEO à une cavité sans dispersion et sans phase de Gouy : effet du chemin optique . . . . .	17
1.2.4 Couplage d'un peigne de fréquences avec CEO à une cavité avec phase de Gouy et dispersion linéaire . . . . .	21
1.2.5 Couplage d'un peigne de fréquences à une cavité avec GDD . . . . .	24
1.2.6 Cavités synchrones à longueur réduite . . . . .	26

---

Dans ce chapitre nous introduisons des notions de base pour comprendre le fonctionnement d'une cavité optique injectée par un peigne de fréquences. Les peignes de fréquences, lorsque l'on passe en régime quantique, sont les principaux objets d'étude de cette thèse, tandis que les cavités synchrones se présentent comme un moyen presque incontournable pour leur création, manipulation et analyse.

## 1.1 Peignes de fréquences

Un peigne de fréquences se caractérise par un spectre qui possède des pics d'intensité à des fréquences disposées de façon parfaitement uniforme, ce qui constitue une sorte de règle pour la mesure de fréquences optiques inconnues. On appelle chaque fréquence du spectre, dont on connaît toutes les valeurs avec grande précision, une "dent" du peigne. La méthode développée par Hänsch et ses collaborateurs [Udem 99, Reichert 99] consiste à déterminer de manière très précise des fréquences optiques inconnues à travers la mesure des battements entre celles-ci et les dents du peigne. Le grand atout de cette technique est le fait qu'un seul peigne de fréquences suffit pour faire le lien entre une fréquence optique située n'importe où sur une large bande spectrale et une fréquence de référence (par exemple dans les microondes, comme dans



## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones

le cas de l'horloge atomique à Césium). Ceci a représenté une grande simplification par rapport à des méthodes utilisant les chaînes de fréquences [Schnatz 96, Udem 97].

Aujourd'hui, les applications des peignes de fréquences sont diverses. En plus de la métrologie de fréquences et de la physique fondamentale, on peut les utiliser pour faire de la spectroscopie de haute précision [Coddington 08], des mesures de distance [Schibli 06], de la caractérisation du bruit des lasers, de la télécommunication, etc. Ils sont également des candidats pour réaliser du transfert de temps à des précisions impressionnantes qui iraient jusqu'à la yoctoseconde ( $10^{-24}$  s) [Lamine 08].

Les sources de peignes de fréquences disponibles commercialement sont variées et les applications liées à la mesure de temps à haute précision ne cessent de gagner de l'importance technologique.

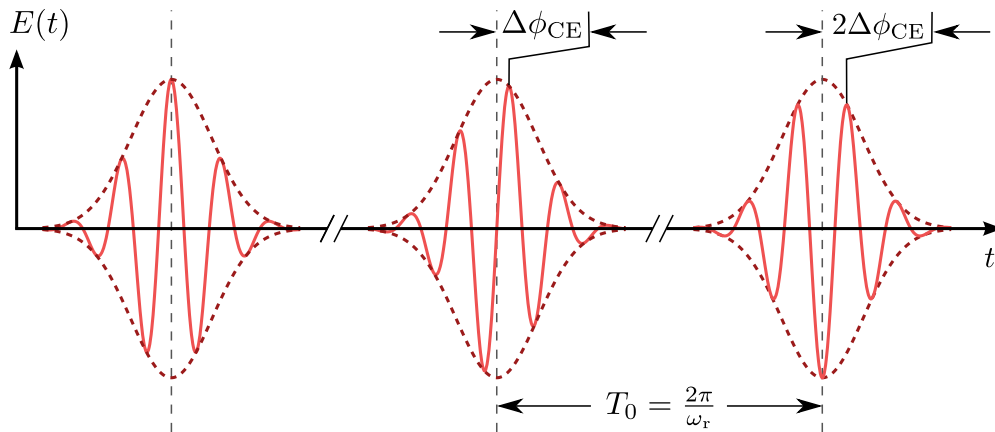
### 1.1.1 Peignes de fréquences et impulsions ultracourtes

La façon la plus standard de générer des peignes de fréquences est à travers les lasers à verrouillage de mode (*mode-locked lasers*, en anglais). Ces lasers délivrent un train d'impulsions lumineuses ultracourtes avec une enveloppe périodique. La durée typique d'une impulsion est comprise entre quelques femtosecondes et une dizaine de picosecondes, ce qui fait que la largeur spectrale d'un peigne de fréquences produit par un laser à verrouillage de modes peut aller de moins d'un nanomètre jusqu'à couvrir tout le spectre visible.

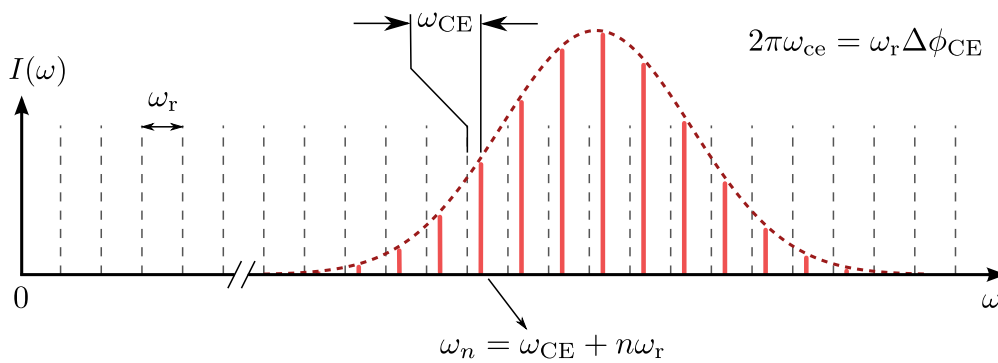
Non seulement l'enveloppe du champ est périodique, avec un taux de répétition qui fixe l'intervalle de fréquence entre deux dents consécutives du peigne, mais aussi le champ électrique  $E(t)$  lui-même (à un déphasage progressif près par rapport à l'enveloppe). Ce déphasage correspond, dans le domaine spectral, à un décalage de toutes les dents du peigne par rapport aux multiples entiers du taux de répétition  $\omega_r = 2\pi f_r$ . La figure 1.1.1 explicite le lien entre les propriétés d'un train d'impulsions et le peigne de fréquences respectif.

La périodicité (ou quasi-périodicité) du champ électrique est une propriété très importante qui exprime la cohérence entre les différentes impulsions du train et aussi, de façon équivalente, entre les différentes dents du peigne. En effet, on peut voir un train d'impulsions comme une porteuse cohérente de fréquence optique  $\omega_0$  modulé par une enveloppe périodique qui donne la forme temporelle des impulsions. Quand la période  $T_0$  de cette enveloppe n'est pas un multiple entier d'un cycle optique, c'est-à-dire de  $2\pi/\omega_0$ , la porteuse se décale progressivement par rapport à l'enveloppe quand on passe d'une impulsion à la suivante. Ainsi, si dans l'impulsion "zéro" le maximum du champ électrique correspond au maximum de l'enveloppe, ceci n'est plus nécessairement vrai pour l'impulsion  $n$ , qui subit un écart  $\phi_{CE} = n\Delta\phi_{CE}$ , souvent appelé CEP (de l'anglais *carrier-envelope phase*, phase relative porteuse-enveloppe). La différence de CEP entre deux impulsions consécutives,  $\Delta\phi_{CE}$ , se convertit dans le CEO (*carrier-envelope offset*), qui est le décalage en fréquence des dents du peigne,

Domaine temporel



Domaine fréquentiel



**Figure 1.1.1:** Comparaison entre le domaine temporel (trains d'impulsions ultracourtes) et le domaine fréquentiel (peigne de fréquences), liés par transformée de Fourier. Le déphasage progressif de la porteuse par rapport à l'enveloppe dans le domaine temporel est à l'origine du décalage en fréquence du peigne.

## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones

suivant la formule

$$\omega_{\text{CE}} = \omega_r \frac{\Delta\phi_{\text{CE}}}{2\pi}. \quad (1.1.1)$$

À l'intérieur de la cavité laser, l'écart entre l'enveloppe et la porteuse évolue au cours de la propagation sous l'effet de la dispersion de vitesse de phase. En effet, ce déphasage par tour de cavité s'écrit

$$\Delta\phi_{\text{CE}} = \left( \frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_\phi} \right) \omega_0 L_0, \quad (1.1.2)$$

où  $v_g$  et  $v_\phi$  représentent les vitesses de groupe et de phase moyennes sur un tour de cavité et  $L_0$  le chemin optique d'un tour de cavité à la fréquence  $\omega_0$ .

Si on écrit le champ électrique d'une impulsion individuelle avec  $\phi_{\text{CE}} = 0$  en fonction de son enveloppe  $g(t)$  :

$$E_{\text{impulsion}}(t) = g(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (1.1.3)$$

alors le champ du train d'impulsions peut s'exprimer comme une somme qui porte sur chaque impulsion avec un facteur supplémentaire qui tient compte du CEO :

$$E_{\text{train}}(t) = \sum_n g(t - nT_0)e^{-i\omega_0(t-nT_0)}e^{-in\Delta\phi_{\text{CE}}}. \quad (1.1.4)$$

La transformée de Fourier de ce champ donne un peigne de fréquences décalé de  $\omega_{\text{CE}}$  par rapport à l'origine, dont l'enveloppe est la transformée de Fourier du champ d'une impulsion individuelle :

$$E_{\text{train}}(\omega) = E_{\text{impulsion}}(\omega) \sum_n \delta(\omega - \omega_n), \quad (1.1.5)$$

où les fréquences du peigne sont

$$\omega_n = \omega_{\text{CE}} + n\omega_r. \quad (1.1.6)$$

Il est parfois plus commode d'indexer les fréquences du peigne par rapport à sa fréquence centrale, que l'on redéfinit comme  $\omega_0$ , et qui s'écrit

$$\omega_0 = \omega_{\text{CE}} + N\omega_r, \quad \text{typiquement } N \sim 10^6 - 10^7. \quad (1.1.7)$$

On a alors une nouvelle expression pour les composantes spectrales du peigne :

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega_r, \quad (1.1.8)$$

$n$  pouvant prendre des valeurs négatives.

L'équation (1.1.6) nous montre tout de même que deux paramètres définissent les fréquences du peigne de manière générale : le CEO et le taux de répétition, donnés respectivement en fonction de la dispersion de vitesse de phase dans le laser et de la longueur de la cavité. Ces deux grandeurs sont sensibles à des fluctuations dues aux bruits techniques, mais peuvent être asservies. On parlera alors de "stabilisation du peigne de fréquences".

Le lien entre spectre et profil temporel étant fait par la transformée de Fourier, pour obtenir des spectres larges il faut naturellement des impulsions courtes. Une impulsion gaussienne de durée  $\Delta t$  à mi-hauteur en intensité, par exemple, a un spectre de largeur donnée par  $\Delta\omega = 4 \ln 2 / \Delta t$ , aussi à mi-hauteur en intensité. On pourra également exprimer la largeur spectrale en longueur d'onde, quand  $\omega_0 \ll \Delta\omega$ , à travers la relation

$$\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda^2}{2\pi c} \Delta\omega. \quad (1.1.9)$$

Ainsi, par exemple, une impulsion gaussienne de durée 100 fs ( $\Delta\omega \simeq 10$  THz) et spectre centré à 800 nm a une largeur spectrale en longueur d'onde d'environ 9,4 nm.

### 1.1.2 Propagation dans un milieu dispersif linéaire

Lorsqu'une impulsion se propage dans un milieu dispersif, les différentes composantes spectrales accumulent des phases différentes. On appelle  $\phi(\omega)$  cette *phase spectrale*. Lors d'une propagation dans un matériau linéaire, homogène et isotrope, la phase spectrale accumulée dépend uniquement du type de matériau et de l'épaisseur traversée : elle est indépendante des caractéristiques du faisceau lumineux, comme son intensité ou la durée des impulsions.

Les réflexions sur des miroirs diélectriques introduisent elles aussi des phases ayant une dépendance spectrale, ce que l'on peut interpréter qualitativement par le fait que les différentes fréquences pénètrent plus ou moins dans les miroirs avant d'être réfléchies.

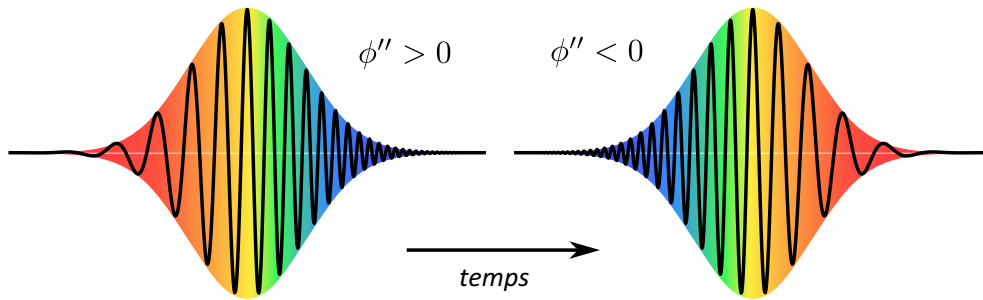
Sous réserve que le spectre soit localisé autour d'une fréquence  $\omega_0$ , on peut effectuer le développement de Taylor de la phase spectrale et s'intéresser aux termes d'ordres successifs :

$$\phi(\omega) = \phi(\omega_0) + \phi'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\phi''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.1.10)$$

**Retard de groupe** La phase linéaire (2<sup>e</sup> terme) est liée à la dispersion de vitesse de phase. La dérivée première  $\phi'(\omega_0)$  est, en effet, appelée "retard de groupe" et a pour conséquence que la porteuse et l'enveloppe se propagent à des vitesses différentes, sans pourtant déformer l'enveloppe.

**Dispersion de retard de groupe** La dérivée seconde  $\phi''(\omega_0)$ , aussi appelée GDD (de l'anglais *Group Delay Dispersion*), change la vitesse de propagation de chaque com-

## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones



**Figure 1.1.2:** À gauche (droite), une impulsion lumineuse gaussienne avec un *chirp* provoqué par la traversée d'un matériau à GDD positive (négative). Les couleurs indique le temps d'arrivée des différentes composantes spectrales.

posante spectrale. L'impulsion est donc déformée, possédant une phase quadratique et ce que l'on appelle le *chirp* (gazouillis, en français) : un glissement de fréquence qui fait que les différentes composantes spectrales se répartissent vers l'avant ou l'arrière de l'impulsion (la figure 1.1.2 illustre cet effet). La GDD est souvent donnée en  $\text{fs}^2$ .

On peut aussi développer le module  $k(\omega)$  du vecteur d'onde, dérivée de la phase spectrale  $\phi(\omega)$  par rapport à  $z$  (direction de propagation)

$$k(\omega) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(\omega), \quad (1.1.11)$$

ce qui donne

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.1.12)$$

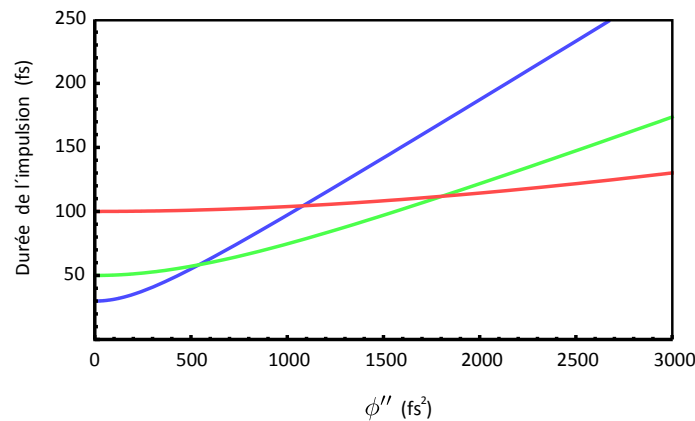
Ses deux premières dérivées sont également associées à des grandeurs dispersives :

**Vitesse de groupe** La vitesse de groupe  $v_g$  à la fréquence  $\omega_0$  s'écrit comme l'inverse de  $k'(\omega_0)$ .

**Dispersion de vitesse de groupe** La dérivée seconde  $k''(\omega_0)$  donne directement la GVD (*Group Velocity Dispersion*), qui n'est rien d'autre que la GDD par unité de longueur traversée. Il s'agit donc d'une grandeur non-extensive, qui ne dépend pas de la longueur du matériau, mais uniquement du milieu lui-même.

En guise d'exemple, une impulsion gaussienne de durée  $\Delta t$  à mi-hauteur en intensité qui accumule une phase quadratique  $\phi''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2$  due à la traversée d'un milieu possédant de la GVD subit un élargissement temporel donné par

$$\Delta t_{\text{élargi}} = \Delta t \sqrt{1 + \left( \frac{4 \ln 2 \phi''(\omega_0)}{\Delta t^2} \right)^2}. \quad (1.1.13)$$



**Figure 1.1.3:** Effet de l'ajout d'une phase quadratique sur la durée d'impulsions gaussiennes limitées par transformé de Fourier. L'impulsion est d'autant plus élargie que sa durée initiale est petite.

Cette équation est complètement analogue à celle qui régit l'évolution du profil transversal d'un faisceau gaussien en propagation libre <sup>1</sup> :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z\lambda/\pi}{w_0^2} \right)^2}, \quad (1.1.14)$$

de sorte que, de la même façon qu'un faisceau gaussien diverge sous l'effet de la propagation d'autant plus qu'il est focalisé au départ, une impulsion gaussienne s'élargit sous l'effet de la GVD d'autant plus que sa durée initiale est petite. La durée de l'impulsion gaussienne à largeur spectrale donnée est minimale quand toutes les fréquences ont la même phase. On parle alors d'impulsion *limitée par transformée de Fourier*. La figure 1.1.3, obtenue à partir de l'équation (1.1.13), montre l'effet de l'acquisition d'une phase quadratique par ces impulsions.

## 1.2 Cavités synchrones

On appelle cavités synchrones les cavités optiques capables de faire résonner un train d'impulsions ultracourtes. La difficulté technique supplémentaire par rapport aux cavités monochromatiques est que ce type de cavité doit pouvoir transmettre toutes les composantes spectrales du peigne de fréquences incident. De plus, la finesse d'une telle cavité doit idéalement rester constante sur toute la largeur de bande du peigne, ce qui signifie que les miroirs doivent souvent avoir des traitements spéciaux large-bande pour avoir un coefficient de réflexion qui ne varie pas avec la fréquence. Heureusement, aujourd'hui, cela n'est presque jamais une limitation technologique,

1. ... ou encore l'élargissement du paquet d'onde en Mécanique Quantique.

## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones

grâce à la qualité des traitements que l'on peut trouver dans le marché, surtout si le spectre n'est pas excessivement large.

L'asservissement d'un peigne de fréquences sur une cavité optique fut réalisé par Jason Jones et al. en 2000 [Jason Jones 00]. Des cavités optiques injectées par des peignes de fréquences sont maintenant utilisées pour des mesures d'absorption [Gherman 02]. On peut aussi améliorer les performances de techniques de spectroscopie basées sur les peignes de fréquences en plaçant l'objet à étudier dans une cavité synchrone. Une application intéressante consiste à mesurer la concentration des différentes molécules présentes dans l'haleine humaine [Thorpe 08]. L'étude des cavités optiques dans ce régime est intéressante pour cette thèse car l'OPO (Oscillateur Paramétrique Optique) que nous allons présenter dans les chapitres suivants fonctionne en régime femtoseconde. D'autre part, nous avons construit une cavité synchrone femtoseconde à haute finesse ayant pour but d'asservir le laser-lui-même sur cette cavité de référence.

### 1.2.1 Généralités sur les cavités optiques

Une cavité optique, aussi appelée interféromètre de Fabry-Pérot, est un dispositif linéaire avec une certaine réponse spectrale  $t(\omega)$  qui relie les champs à l'entrée et à la sortie :

$$E_{\text{out}}(\omega) = t(\omega)E_{\text{in}}(\omega), \quad \text{avec} \quad t(\omega) = |t(\omega)|e^{i\Phi(\omega)}, \quad (1.2.1)$$

de sorte que  $T(\omega) = |t(\omega)|^2$  est le coefficient de transmission *en intensité* et  $\Phi(\omega)$  la phase spectrale *introduite par l'ensemble du dispositif*.

Les cavités optiques possèdent en général un miroir d'entrée et un miroir de sortie de coefficients de réflexion et transmission *en amplitude* notés  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $t_1$  et  $t_2$ , supposés réels sans perte de généralité. Une cavité parfaitement alignée et injectée avec un faisceau dans mode propre transverse a alors une réponse qui s'écrit

$$t(\omega) = \frac{t_1 t_2 e^{i\phi(\omega)/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi(\omega)}}, \quad (1.2.2)$$

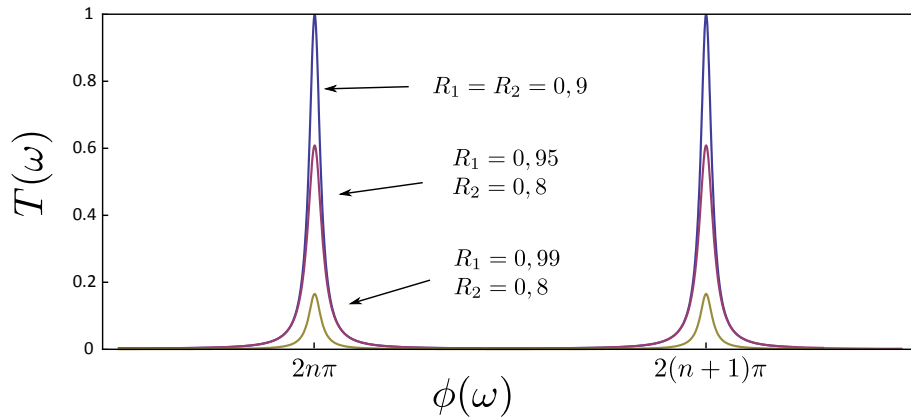
où  $\phi(\omega)$  est le déphasage que subit la lumière *par tour de cavité*. Il est important de bien faire la distinction entre les deux phases spectrales présentées ici. En effet,  $\Phi(\omega)$  est l'argument du nombre complexe  $t(\omega)$ , qui lui dépend de  $\phi(\omega)$ .

A partir de (1.2.2), le coefficient de transmission en intensité s'écrit

$$T(\omega) = T_{\text{max}} \frac{1}{1 + \zeta \sin^2 \left( \frac{\phi(\omega)}{2} \right)}, \quad (1.2.3)$$

avec

$$T_{\text{max}} = \left( \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}. \quad (1.2.4)$$



**Figure 1.2.1:** Pics de résonance Fabry-Pérot pour différentes réflectivités des miroirs coupleurs.  $R_1 = r_1^2$  et  $R_2 = r_2^2$  représentent les coefficients de réflexion en intensité.

Notez que  $T(\omega) \leq T_{\max}$  et que l'égalité est satisfaite si et seulement si  $\phi(\omega)$  est un multiple entier de  $2\pi$ . On voit apparaître des pics de résonances de cavité pour ces valeurs-là. Un autre résultat important est le fait que  $T_{\max}$  ne vaut 1 que quand  $r_1 = r_2$ . Dans ce cas, les miroirs coupleurs ont donc le même coefficient de réflexion et on dit que la cavité est *adaptée en impédance*, car toute l'intensité lumineuse incidente est transmise par la cavité résonnante (la figure 1.2.1 montre des pics de résonance de cavité dans trois cas différents). L'intervalle spectral entre deux pics de résonance d'une cavité est appelée *intervalle spectral libre* (ISL) et équivaut donc à un intervalle de phase de  $2\pi$ . On définit la  *finesse* d'une cavité Fabry-Pérot comme le rapport entre l'ISL et la largeur spectrale à mi-hauteur d'un pic de résonance. La finesse dépend exclusivement des pertes dans la cavité, n'étant pas fonction de sa longueur. Si on appelle  $\rho$  la fraction de puissance lumineuse qui reste dans la cavité après un tour complet ( $1 - \rho$  étant les pertes en intensité), la finesse vaut

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{2 \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}\right)}. \quad (1.2.5)$$

Dans le cas d'une cavité à un miroir d'entrée et un miroir de sortie comme celle considérée ici,  $\rho = (r_1 r_2)^2$ . On montre alors que l'équation (1.2.3) s'écrit en termes de la finesse comme

$$T(\omega) = T_{\max} \frac{1}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\phi(\omega)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right)}}. \quad (1.2.6)$$

Notez que, si les pertes en intensité sont inférieures à 10%, il est raisonnable de faire l'approximation



## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones

$$\mathcal{F} \approx \frac{\pi}{1 - \sqrt{\rho}} \approx \frac{\pi}{1 - \rho} \quad (1.2.7)$$

et de remplacer  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right)$  par  $\left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right)^2$  dans (1.2.6).

### 1.2.2 Déphasage d'un tour de cavité

Il est clair que si on souhaite faire résonner un peigne de fréquences dans une cavité optique, le comportement de  $\phi(\omega)$  autour de la fréquence centrale du peigne joue un rôle essentiel. En effet, pour que toutes les fréquences du peigne soient complètement transmises par la cavité, il faut que

$$\phi(\omega_n) = 0 \pmod{2\pi}, \quad \forall n. \quad (1.2.8)$$

Plusieurs éléments interviennent dans l'expression de  $\phi(\omega)$ . La propagation libre sur un chemin optique  $L$  contribue avec un déphasage qui dépend linéairement de la fréquence :  $\frac{\omega L}{c}$ . La phase de Gouy, liée à la propagation des modes transverses, ne dépend que des paramètres géométriques de la cavité et rajoute un terme constant dans  $\phi(\omega)$ . Les miroirs de la cavité, en plus de contribuer avec une phase constante, sont potentiellement dispersifs au premier et au deuxième ordre, de même pour d'éventuels éléments insérés dans la cavité, comme les cristaux présents dans les OPOs. Les effets de dispersion intracavité sont de manière générale amplifiés par la finesse, de sorte que dans une cavité de finesse élevée, injectée par un peigne suffisamment large-bande, même l'effet de la dispersion du troisième ordre de l'air peut devenir important.

Du fait de toutes ces complications, il n'est pas toujours possible de satisfaire à la condition (1.2.8). Tous les modes ne vont donc plus pouvoir être parfaitement résonnants et si la cavité est réglée pour que le mode de fréquence  $\omega_0$  soit résonnant, alors les modes sur les ailes du spectre risquent d'être filtrés par la cavité. On cherche ici à comprendre et quantifier l'influence de tous ces facteurs dans la transmission d'un peigne à travers une cavité. On trouve une analyse très détaillée de ces phénomènes dans la thèse d'Olivier Pinel [Pinel 10]. Néanmoins, il est pertinent de développer ici quelques points importants.

Tout d'abord, il faut écrire une expression détaillée pour  $\phi(\omega)$ . Sur un tour complet de cavité on a

$$\phi(\omega) = \phi_{\text{Gouy}} + \frac{\omega L}{c} + \varphi(\omega), \quad (1.2.9)$$

où on met en évidence les contributions de la phase de Gouy et du chemin optique et on rassemble dans un seul terme,  $\varphi(\omega)$ , tous les autres éléments qui peuvent ajouter un déphasage. Ce terme contient notamment des informations sur la dispersion

(linéaire et non-linéaire) des miroirs et de l'air. Il peut être développé en série de Taylor, exactement comme dans (1.1.10), ce qui donne

$$\phi(\omega) = \phi_{\text{Gouy}} + \varphi_0 - \omega_0 \varphi'_0 + \frac{\omega}{c}(L + c\varphi'_0) + \frac{1}{2}\varphi''_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.2.10)$$

Les indices 0 sur les dérivées indiquent qu'elles sont calculées à  $\omega_0$ . On peut réécrire cette équation en rassemblant tous les termes constants dans

$$\boxed{\alpha = \phi_{\text{Gouy}} + \varphi_0 - \omega_0 \varphi'_0}, \quad (1.2.11)$$

de sorte que

$$\phi(\omega) = \alpha + \frac{\omega}{c}L_{\text{eff}} + \frac{1}{2}\varphi''_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.2.12)$$

où on voit apparaître un chemin optique effectif

$$\boxed{L_{\text{eff}} = L + c\varphi'_0} \quad (1.2.13)$$

dû à la dispersion de vitesse de phase<sup>2, 3</sup>. Quant à la dispersion de vitesse de groupe, elle joue un rôle à part, étant isolée dans le terme quadratique de (1.2.12).

Pour une analyse complète il faut tenir compte d'un paramètre qui provient non pas de la cavité, mais du peigne injecté lui-même : son décalage en fréquence,  $\omega_{\text{CE}}$ . On verra que pour assurer une transmission optimale du peigne à travers la cavité, il est nécessaire de trouver le bon jeu de paramètres entre  $\alpha$ ,  $L_{\text{eff}}$  et  $\omega_{\text{CE}}$ , mais qu'on ne peut rien faire pour compenser l'effet nuisible de  $\varphi''_0$  : il faut rendre la dispersion du deuxième ordre aussi petite que possible. Heureusement, ces conditions ne sont pas très contraignantes lorsqu'il s'agit de cavités à basse finesse, ce qui est le cas de notre OPO. Toutefois, pour des applications qui exigent des cavités haute finesse ( $\gtrsim 500$ ), comme le filtrage temporel en régime femtoseconde, le contrôle de ces paramètres devient crucial.

### 1.2.3 Couplage d'un peigne de fréquences sans CEO à une cavité sans dispersion et sans phase de Gouy : effet du chemin optique

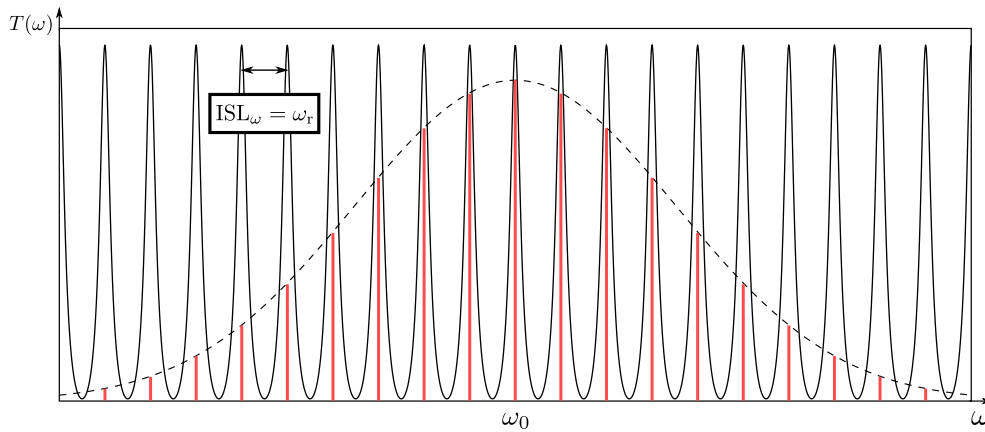
On s'intéresse au cas simple où on ne prend en compte que l'effet de la propagation libre dans une cavité de chemin optique total  $L$ . Le déphasage par tour de cavité vaut alors

$$\phi(\omega) = \frac{\omega L}{c}. \quad (1.2.14)$$

2. Le terme  $c\varphi'_0$  est en général très petit (de l'ordre de la longueur d'onde de la porteuse) devant  $L \simeq 4$  m.

3. On note que la dispersion de vitesse de phase contribue aussi avec un terme constant, compris dans  $\alpha$ .

## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones



**Figure 1.2.2:** Résonance totale d'un peigne de fréquences dans une cavité optique. Les composantes spectrales (traits rouges) du peigne gaussien (enveloppe en pointillés) sont parfaitement superposés aux pics de transmission de la cavité grâce à l'accord entre l'ISL de la cavité et le taux de répétition du train d'impulsions.

Les fréquences qui satisfont à (1.2.8) sont donc des multiples entiers de l'ISL de la cavité :

$$\boxed{\text{ISL}_{\omega} = \frac{2\pi c}{L}}. \quad (1.2.15)$$

### Résonance totale

Pour qu'un peigne sans CEO et de taux de répétition  $\omega_r$  soit résonnant dans la cavité, il suffit de régler la longueur de celle-ci pour que son ISL égale  $\omega_r$  (figure 1.2.2). La *seule* longueur qui permet une résonance totale est donc

$$\boxed{L_0 = \frac{2\pi c}{\omega_r}}, \quad (1.2.16)$$

qui est exactement la distance entre deux impulsions successives. La résonance totale correspond ainsi à la situation où l'impulsion qui pénètre la cavité se superpose parfaitement à celle qui y est déjà, produisant une interférence constructive dans toutes les composantes spectrales. On dit alors que le temps d'aller-retour dans la cavité est synchronisé avec l'intervalle de temps entre deux impulsions successives, d'où le terme "cavité synchrone". Dans le cas des peignes de fréquences utilisés au cours cette thèse, avec un taux de répétition de 76 MHz ( $\times 2\pi$ ),  $L_0$  vaut environ 4 m.

### Résonances partielles

Même s'il n'y a qu'une seule longueur de cavité qui est compatible avec la résonance totale, il en existe bien d'autres qui autorisent une résonance partielle. Ces longueurs s'écrivent

$$L_p = L_0 + p\lambda_0, \quad (1.2.17)$$

où  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$  est la longueur d'onde centrale du peigne. On parle alors de résonance partielle d'ordre  $p$ . Pour un  $p$  donné, la fréquence  $\omega_0$  est toujours résonnante et les fréquences  $\omega_n = \omega_0 + n\omega_r$  subissent un déphasage<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \phi(\omega_n) &= \frac{\omega_0 + n\omega_r}{c}(L_0 + p\lambda_0) \\ &= p \left( \frac{\omega_n - \omega_0}{\omega_0} \right) 2\pi. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

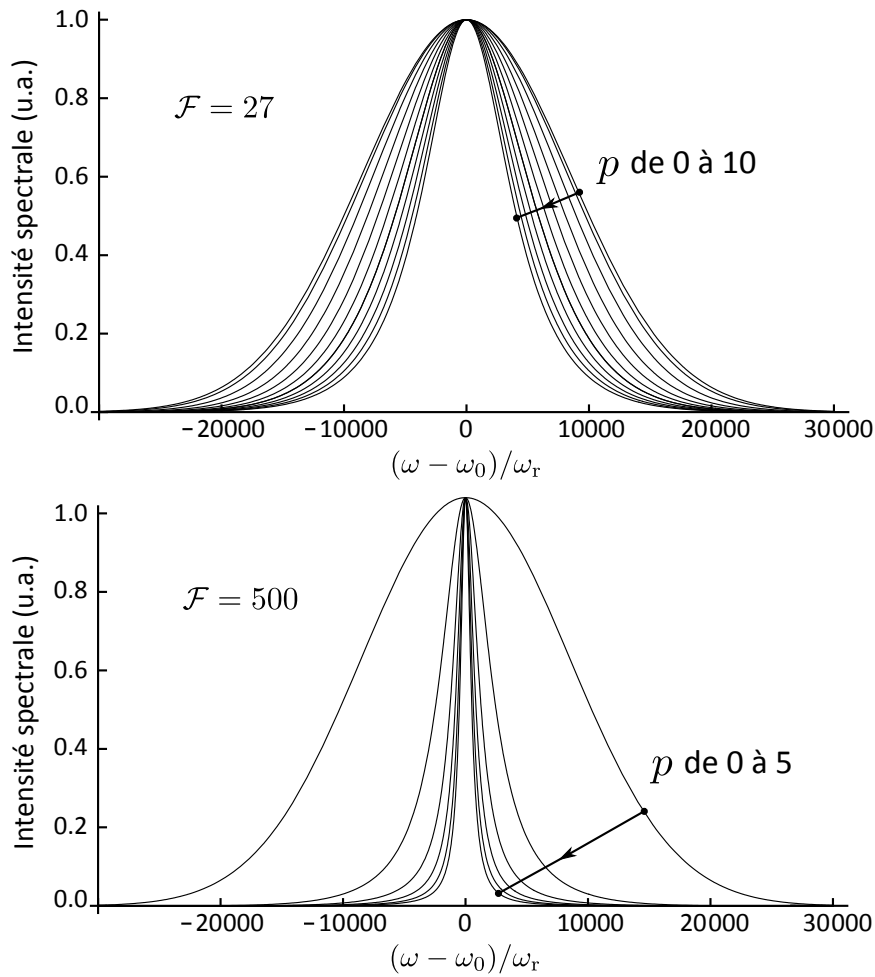
Afin d'estimer le taux de transmission du peigne à travers la cavité, ce déphasage doit être évalué en tenant compte de la largeur spectrale  $\Delta\omega$  du peigne et de la finesse  $\mathcal{F}$  de la cavité, comme indiqué en (1.2.6). Dans tous les cas, la transmission de la cavité est symétrique par rapport à  $\omega_0$ , c'est-à-dire  $T(\omega_n) = T(\omega_{-n})$ . La figure 1.2.3 montre une simulation sur les résonances partielles avec une cavité basse finesse et une cavité haute finesse.

Les résonances partielles s'interprètent aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel, pour  $L = L_p$ , la porteuse reste en phase avec elle-même après un tour de cavité, car ce sont les longueurs de résonance de la fréquence centrale. Néanmoins, ceci n'est pas vrai pour les enveloppes des impulsions, qui subissent un déphasage par tour de cavité qui est d'autant plus important que  $p$  est grand. Dans le cas d'une cavité à haute finesse, cela est critique car une grande quantité d'impulsions d'enveloppes déphasées entre elles (mais dont les porteuses sont en phase) s'accumulent dans la cavité, ce qui fait qu'on se retrouve avec une impulsion très large temporellement, et donc de spectre étroit, en sortie de cavité.

Dans le domaine fréquentiel, on peut se servir de la figure 1.2.2 pour comprendre ce qui se passe au niveau du recouvrement entre les pics de transmission et les dents du peigne lorsque l'on change lentement la longueur de la cavité en passant par les longueurs de résonance partielle. On peut imaginer les pics de transmission de la figure comme un énorme soufflet d'accordéon qui a un bout fixé à  $\omega = 0$  et qui s'étend jusqu'à la région de  $\omega_0$ . Lorsque l'on augmente doucement la longueur de la cavité, par exemple, ce soufflet est comprimé peu à peu vers la gauche (l'ISL diminue) jusqu'à ce que le pic de transmission qui coïncidait avec la dent  $\omega_0 + \omega_r$  vienne se superposer à la fréquence centrale. Ainsi, nous sommes arrivés à la première résonance

4. On sous-entendra dans les calculs que les phases spectrales sont définies modulo  $2\pi$ .

## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones



**Figure 1.2.3: Résonances partielles.** Spectre transmis par les différentes résonances partielles d'une cavité synchrone injectée par un peigne gaussien de largeur spectrale FWHM  $\Delta\omega = 18$  THz ( $\Delta\lambda = 6$  nm centré à 795 nm). La courbe  $p = 0$  correspond à la résonance totale. En haut : cavité à basse finesse (OPO). En bas : cavité à haute finesse. On voit que l'effet de coupure des ailes du spectre quand on passe aux résonances partielles d'ordres supérieurs est beaucoup plus important dans le deuxième cas.

partielle,  $p = 1$ , et l'ISL de la cavité a légèrement changé ( $L$  n'a varié que d'une longueur d'onde), mais il reste encore très proche de celui du départ. Ainsi, si les pics de transmission ne sont pas excessivement fins et que le peigne n'est pas trop large, celui-ci est toujours bien résonnant dans la cavité. Par contre, pour  $p$  suffisamment grand, le recouvrement entre les pics et les dents ne résiste plus au changement important de l'ISL, qui devient trop petit devant  $\omega_T$  pour assurer la résonance des ailes du spectre. On a donc un effet de *moiré de fréquence*.

### Transmission du peigne vs. Longueur de cavité

Si on néglige la largeur spectrale de chaque dent du peigne, on définit le *coefficient de transmission total en intensité* comme

$$T_{\text{peigne}} = \frac{\sum_n T(\omega_n) I(\omega_n)}{\sum_n I(\omega_n)}, \quad (1.2.19)$$

où  $I(\omega_n)$  est l'intensité spectrale de la fréquence  $\omega_n$  du peigne. La figure (1.2.4) représente la valeur, obtenue par simulation numérique, de  $T_{\text{peigne}}$  en fonction de  $L$  sur quelques dizaines de longueurs d'onde autour de  $L_0$ . Cela reproduit ce que l'on peut observer expérimentalement en plaçant une photodiode en sortie de cavité lorsqu'on balaye sa longueur. La cavité est, bien entendu, supposée alignée pour que seulement le mode TEM<sub>00</sub> soit résonnant. On observe alors une série de pics sous une enveloppe centrée en  $L = L_0$ . Le pic central, celui où l'intensité transmise est maximale, correspond à la situation où la résonance est totale, et les pics adjacents représentent les résonances partielles, à  $L = L_0 + p\lambda$ . On constate que la largeur des pics augmente avec  $p$ . On peut aussi montrer que les pics de transmission sont limités par une enveloppe dont la largeur varie avec l'inverse de la finesse de cavité.

#### 1.2.4 Couplage d'un peigne de fréquences avec CEO à une cavité avec phase de Gouy et dispersion linéaire

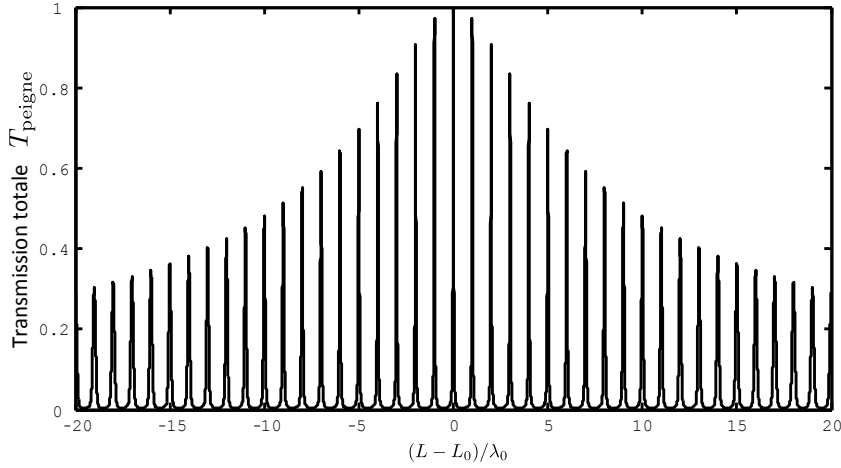
Admettons maintenant que les fréquences du peigne sont décalées de  $\omega_{\text{CE}}$  par rapport à l'origine, de sorte qu'on écrit, comme dans (1.1.6),

$$\omega_n = \omega_{\text{CE}} + n\omega_T, \quad (1.2.20)$$

et que, pour l'instant, on ne tient compte que des phases constantes et de la dispersion linéaire dans l'expression de  $\phi(\omega)$  :

$$\phi(\omega) = \alpha + \frac{\omega}{c} L_{\text{eff}}. \quad (1.2.21)$$

## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones



**Figure 1.2.4:** Transmission d'une cavité synchrone de finesse  $\mathcal{F} = 27$  en fonction de sa longueur (40 longueurs d'ondes, soit environ  $30 \mu\text{m}$ , autour de la longueur de résonance totale,  $L = L_0 \sim 4 \text{ m}$ ). La simulation a été réalisée avec un peigne de fréquences centré à  $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ , avec  $\Delta\lambda = 6 \text{ nm}$ .

### Résonance totale

On définit alors les fréquences  $\omega_n^{\text{cav}}$  comme celles qui sont parfaitement résonnantes dans la cavité. Elles doivent alors satisfaire  $\phi(\omega_n^{\text{cav}}) = 2\pi n$ . On trouve donc que l'ensemble des  $\omega_n^{\text{cav}}$  forme un "peigne de fréquences" avec son propre taux de répétition et son propre décalage par rapport à l'origine :

$$\omega_n^{\text{cav}} = -\frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{2\pi c}{L_{\text{eff}}} \right) + n \left( \frac{2\pi c}{L_{\text{eff}}} \right) \quad (1.2.22)$$

$$\equiv \omega_{\text{CE}}^{\text{cav}} + n\omega_r^{\text{cav}}. \quad (1.2.23)$$

Pour assurer la résonance du peigne (1.2.20) il faut alors imposer *simultanément*  $\omega_r^{\text{cav}} = \omega_r$  et  $\omega_{\text{CE}}^{\text{cav}} = \omega_{\text{CE}}$ , soit,

$$\boxed{L_{\text{eff}} = L_0 = \frac{2\pi c}{\omega_r}} \quad (1.2.24)$$

et

$$\boxed{\eta \equiv \frac{\omega_{\text{CE}}}{\omega_r} + \frac{\alpha}{2\pi} = 0}, \text{ modulo } 1. \quad (1.2.25)$$

Expérimentalement, il existe plusieurs stratégies pour satisfaire à ces conditions. De manière générale, on peut agir soit sur la cavité soit sur le peigne de fréquences. Pour satisfaire à (1.2.24), par exemple, on peut asservir  $L_{\text{eff}}$  sur  $\omega_r$  en rétroagissant sur la longueur physique de la cavité ou, inversement, on peut adapter le peigne à

la cavité en changeant la longueur de la *cavité laser* (qui est la source du peigne) pour contrôler  $\omega_r$ . Cela s'applique tout aussi bien au cas traité en section 1.2.3. Ici, la différence est que régler les taux de répétitions du peigne et de la cavité ne suffit pas. En effet, on peut même avoir une transmission nulle si on ne tient pas compte de (1.2.25). On doit donc aussi accorder les décalages en fréquence du peigne et de la cavité en agissant sur  $\omega_{CE}$  et/ou  $\alpha$ . La phase de Gouy étant fixée par les propriétés géométriques de la cavité, on peut contrôler  $\alpha$  à travers la dispersion linéaire  $\varphi'_0$  de la cavité, en y introduisant un coin de verre monté sur un actuateur piézo-électrique, par exemple.

Afin de satisfaire *exactement* aux conditions (1.2.24) et (1.2.25), on doit, en règle générale, choisir au moins deux paramètres à ajuster parmi  $\omega_{CE}$ ,  $\omega_r$ ,  $\varphi'_0$  et  $L$  (la longueur physique de la cavité), sachant que ces conditions sont couplées par  $\omega_r$  et  $\varphi'_0$ . Cependant, comme déjà évoqué précédemment, la précision avec laquelle on doit respecter ces équations dépend de la finesse de la cavité, du spectre à transmettre et, bien évidemment, du but de l'expérience.

### Résonances partielles

Si on écrit, cette fois-ci, les fréquences du peigne autour de la fréquence centrale

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega_r \quad (1.2.26)$$

avec

$$\omega_0 = N\omega_r + \omega_{CE}, \quad (1.2.27)$$

alors le déphasage accumulé par tour de cavité, pour une longueur effective  $L_{\text{eff}} = L_0 + \delta\lambda_0$ , s'écrit

$$\begin{aligned} \phi(\omega_n) &= \alpha + \frac{\omega_{CE} + (N+n)\omega_r}{c} (L_0 + \delta\lambda_0) \\ &= \left( \eta + \delta \frac{\omega_n}{\omega_0} \right) 2\pi. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Le déphasage de la fréquence centrale vaut alors

$$\phi(\omega_0) = (\eta + \delta) 2\pi. \quad (1.2.29)$$

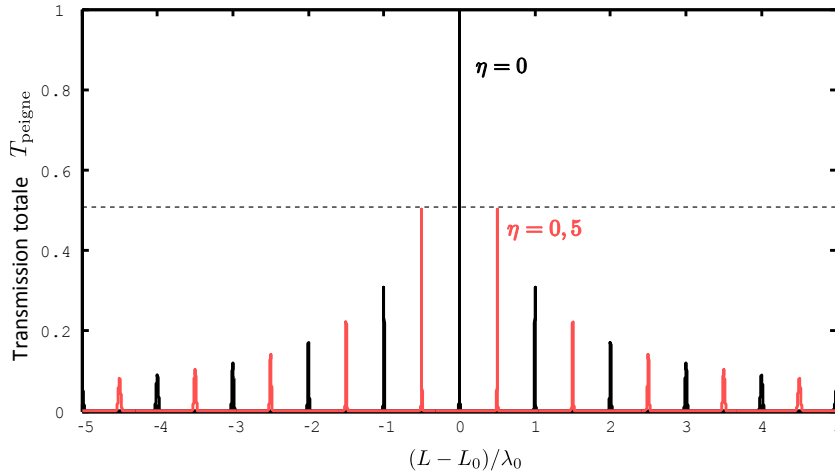
On peut donc généraliser la condition (1.2.17), qui donne les résonances partielles, en imposant que  $\eta + \delta$  soit un nombre entier :

$$(L_{\text{eff}})_p = L_0 + p\lambda_0 - \eta\lambda_0. \quad (1.2.30)$$

Notez que, si on n'a pas d'accord de décalage en fréquence entre la cavité et le peigne, c'est-à-dire si  $\eta \neq 0$ , alors il n'y a jamais de résonance totale, pour aucune



## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones



**Figure 1.2.5:** Transmission d'une cavité synchrone de finesse  $\mathcal{F} = 500$  en fonction de sa longueur (10 longueurs d'ondes autour de la longueur de résonance totale,  $L_{\text{eff}} = L_0$ ) pour un peigne de fréquences centré à  $\lambda_0 = 795$  nm, avec  $\Delta\lambda = 6$  nm. Pour  $\eta = 0,5$  (configuration la plus défavorable possible), on a au mieux 50% de la puissance du peigne qui est transmise, ce qui est atteint quand  $L_{\text{eff}} = L_0 \pm 0,5\lambda_0$ .

longueur de cavité  $L_{\text{eff}}$ . Ainsi, les résonances seront toutes partielles et décalées de  $\eta\lambda_0$  en longueur par rapport au cas où  $\eta = 0$ . Par contre, si  $\eta = 0$ , on est dans une situation complètement équivalente à celle où ni le peigne ni la cavité n'ont de décalage en fréquence. La figure 1.2.5 donne un exemple de comment les pics de transmission d'une cavité "glissent" sous leur enveloppe lorsqu'on change le paramètre  $\eta$ . Remarquons que, comme il s'agit d'une cavité d'assez haute finesse, la transmission totale de la cavité chute brusquement du pic de résonance totale au pic de résonance partielle  $p = 1$  (en opposition à la figure 1.2.4, où  $\mathcal{F} = 27$ ). Pour assurer la transmission de la totalité du peigne de fréquences, le contrôle du paramètre  $\eta$  devient alors d'autant plus important que la finesse de la cavité est haute.

### 1.2.5 Couplage d'un peigne de fréquences à une cavité avec GDD

Le rôle que joue la dispersion du deuxième ordre dans le couplage d'un peigne à une cavité peut être analysé de façon indépendante de la phase de Gouy ou de la dispersion linéaire. En effet, en supposant  $\eta = 0$ , on revient au cas abordé dans la section 1.2.3 et il suffit d'ajouter un terme quadratique dans l'équation (1.2.18), ce qui donne, dans le cas particulier où  $L = L_0$ ,

$$\phi(\omega_n) = \frac{1}{2}\varphi_0''(\omega_n - \omega_0)^2. \quad (1.2.31)$$

On voit que, même dans la configuration où on avait résonance totale, maintenant il y a un terme supplémentaire qui reste pour  $\omega_n \neq \omega_0$  et qui peut devenir non-négligeable pour des grandes valeurs de  $n$  et si la finesse est assez haute.

Basé sur (1.2.6), on peut établir un critère qui nous donne une limite supérieure pour  $\varphi_0''$ . Par exemple, on peut exiger que le taux de transmission en intensité à la fréquence  $\omega_0 + \Delta\omega$  soit plus grand que la moitié du taux de transmission à la fréquence centrale :

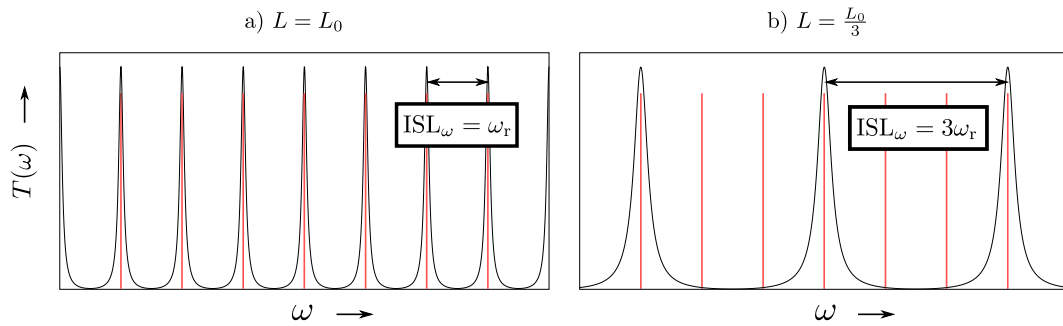
$$T(\omega_0 + \Delta\omega) > \frac{1}{2}T(\omega_0) \Rightarrow \varphi_0'' < \frac{2\pi}{\mathcal{F}(\Delta\omega)^2}. \quad (1.2.32)$$

Si on considère un peigne gaussien de longueur d'onde centrale 795 nm et de largeur 6 nm, le critère précédent conduit, pour une cavité telle quelle notre OPO, de finesse 27, à une limite supérieure de 718 fs<sup>2</sup>, tandis que si on prend  $\mathcal{F} = 500$ , la limite descend à 39 fs<sup>2</sup>. Afin de donner un ordre de grandeur caractéristique, le passage à travers 1 cm de silice fondue induit une GDD de 350 fs<sup>2</sup> à 800 nm.

**Dispersion de l'air** La dispersion de l'air peut devenir gênante pour une cavité longue à assez haute finesse. On peut utiliser l'équation d'Eidlén [Birch 93], qui donne l'indice de réfraction de l'air en fonction de la longueur d'onde, de la pression et de la température, pour accéder à ses propriétés dispersives. En effet, on trouve que, à pression et température ambiantes, la GVD de l'air à 800 nm est de 20 fs<sup>2</sup>/m, et à 400 nm cette valeur augmente à 50 fs<sup>2</sup>/m. On peut aussi montrer que les variations typiques de température dans le laboratoire ont une influence négligeable sur la GVD de l'air, et que celle-ci croît à peu près linéairement avec la pression, depuis  $P = 0$  jusqu'à la pression ambiante. Il est donc clair que concevoir une cavité de finesse 500 et longueur 4 m, par exemple, (GDD totale de l'air : 80 fs<sup>2</sup> à 800 nm) implique soit de la mettre sous vide, soit de compenser la dispersion intracavité. Dans des cas extrêmes (cavités longues de haute finesse et spectre de quelques dizaines de nanomètres de largeur), la dispersion de l'air du troisième ordre devient aussi non-négligeable, ce que l'on montre facilement avec des simulations numériques. Alors, compenser la GDD ne suffit pas et il convient de mettre la cavité sous vide.

**Dispersion des miroirs** À l'heure actuelle, des miroirs à différentes valeurs de GDD (y compris négatives) sont disponibles dans le marché. La dispersion de l'air dans une cavité peut alors, dans certains cas, être compensée par des miroirs à GDD négative. Une autre possibilité est de mettre la cavité sous vide et d'utiliser des miroirs à GDD nulle. Cette solution s'avère souvent plus efficace, car les fabricants ont actuellement du mal à garantir des miroirs avec une GDD négative plate sur tout le spectre, ce qui a pour conséquence de déformer le spectre transmis.

## 1 Peignes de fréquences et cavités synchrones



**Figure 1.2.6:** Passage d'une cavité synchrone de longueur (a)  $L = L_0$  à une cavité de longueur (b)  $L = L_0/q$ , avec  $q = 3$ . Les courbes noirs correspondent aux pics de résonance et les traits rouges représentent les fréquences du peigne, séparées de  $\omega_r$ . De (a) à (b), la finesse reste constante car elle ne dépend que des pertes, tandis que l'ISL et la bande passante de la cavité sont multipliés par 3.

### 1.2.6 Cavités synchrones à longueur réduite

La condition de résonance totale  $L = L_0 = \frac{2\pi c}{\omega_r}$  impose des contraintes spatiales importantes pour la construction de cavités synchrones si le taux de répétition  $\frac{\omega_r}{2\pi}$  est faible. En l'occurrence, le train d'impulsions généré par notre laser à verrouillage de modes a un taux de répétition de 76 MHz, ce qui fait qu'une cavité fonctionnant à résonance totale doit avoir une longueur d'environ 4 m. Si on les plie par souci de stabilité et de compacité (car, sur une table optique de taille moyenne, les différentes cavités peuvent vite prendre trop de place), alors le prix à payer est d'avoir un design plus complexe avec un plus grand nombre de miroirs, pouvant d'ailleurs induire plus de pertes.

Toutefois, il y a des régimes où des cavités assez courtes peuvent transmettre un certain nombre de fréquences du peigne tout en préservant son enveloppe. Si  $L = \frac{p}{q}L_0$ , avec  $p < q$  et  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , alors les fréquences  $\omega_n = \omega_0 + n\omega_r = (N + n)\omega_r$  sont résonantes quand  $(N + n)\frac{p}{q}$  est un entier. Dans le domaine temporel, cela signifie qu'une impulsion pénétrant la cavité effectue  $q$  tours complets avant d'interférer constructivement au niveau du miroir d'entrée avec la  $p$ -ième impulsion suivante. Dans le cas simple où  $p = 1$  et  $L$  devient un sous-multiple de  $L_0$  (figure 1.2.6), une fréquence du peigne sur  $q$  est transmise, et toutes les autres sont réfléchies. Comme l'impulsion intracavité rencontre le miroir de sortie  $q$  fois avant l'arrivée de l'impulsion suivante, le taux de répétition du train de sortie est multiplié par  $q$ . On démontre ainsi une des applications premières de ce genre de cavité : augmenter le taux de répétition d'un train d'impulsions (quitte à perdre environ  $\frac{q-1}{q}$  de l'intensité initiale).

Les cavités synchrones à longueur réduite évitent ainsi l'encombrement sur la table

optique et sont commodes dans des situations où il n'est pas essentiel de garder toutes les fréquences du peigne. Elles peuvent donc faire office de cavité d'analyse ou de cavité de référence, comme on le verra en section 5.2.3.

Lorsqu'on balaye la longueur d'une cavité autour de  $L = L_0/q$  et on essaye de reproduire la même sorte de graphique que celui de la figure 1.2.4, un effet nouveau apparaît : on a maintenant  $q$  pics de transmission par longueur d'onde balayée, et non seulement un, comme ce serait le cas si  $L = L_0$ . Ceci s'explique facilement dans le domaine fréquentiel. Prenons l'exemple de la figure 1.2.6b, où  $q = 3$ . Modifier la longueur de la cavité d'une fraction de longueur d'onde revient, grosso modo, à décaler les pics de résonance (vers la gauche si on l'augmente, vers la droite si on la diminue). Quand on passe de  $L = L_0$  à  $L = L_0 + \lambda_0/3$ , par exemple, les pics de résonance se décalent d'un taux de répétition vers la gauche et viennent se reposer sur les dents adjacentes à celles de départ. Donc, à cette longueur là, les fréquences résonnantes ne sont pas les mêmes que celles qui résonnent à  $L = L_0$ . La même chose arrive quand on passe à  $L = L_0 + 2\lambda_0/3$ , et on ferme la boucle à  $L = L_0 + \lambda_0$ , quand les fréquences résonnantes sont à nouveau celles de départ.



## 2 Optique non-linéaire du second ordre

### Sommaire

---

2.1	Champs électromagnétiques réel et complexe . . . . .	30
2.2	Équations de propagation pour l'optique non-linéaire . . . . .	31
2.3	Effets non-linéaires avec des impulsions ultra-rapides : généralités . . . . .	34
2.3.1	La polarisation d'ordre deux . . . . .	34
2.3.2	Le nombre d'onde autour de la fréquence centrale . . . . .	35
2.4	Doublage d'un peigne de fréquences . . . . .	35
2.4.1	Solution de l'équation de propagation . . . . .	36
2.4.2	L'accord de phase . . . . .	37
2.4.3	Doublage avec un cristal BIBO . . . . .	38
2.5	Conversion paramétrique "descendante" . . . . .	40
2.5.1	L'équation de propagation . . . . .	41
2.5.2	Solution simplifiée : hypothèse de l'enveloppe réelle . . . . .	42
2.5.3	L'accord de phase . . . . .	43
2.5.4	Conversion paramétrique vs. Doublage de fréquence . . . . .	44
2.5.5	Modes propres de la conversion paramétrique . . . . .	44
2.5.6	Solution générale de l'équation de propagation via développement de Magnus . . . . .	48
2.6	Somme de fréquences . . . . .	50
2.6.1	Équations de propagation . . . . .	51
2.6.2	Solution via Développement de Magnus . . . . .	52
2.6.3	L'accord de phase avec un cristal BIBO . . . . .	52
2.6.4	Forme de la distribution spectrale conjointe . . . . .	53
2.6.5	Modes propres de la somme de fréquences . . . . .	54

---

Les phénomènes non-linéaires sont des outils très importants pour la création d'états quantiques de la lumière. Dans cette thèse, on utilise les phénomènes du second ordre pour préparer ces états et on montre qu'ils constituent potentiellement un outil important pour leur manipulation.

L'optique non-linéaire (en particulier du second ordre) a déjà été abondamment abordée dans la littérature (voir [Grynberg 10] ou [Joffre 10], par exemple). On reprendra dans ce chapitre quelques notions et démonstrations bien connues (sections 2.1 et

## 2 Optique non-linéaire du second ordre

2.2), mais on présentera également des notions qui sont intrinsèquement liées au fait que l'on travaille avec un spectre large-bande et des notations qui sont importantes pour la bonne lecture des chapitres suivants (section 2.3).

### 2.1 Champs électromagnétiques réel et complexe

Considérons un champ électrique classique réel oscillant<sup>1</sup>  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . On écrit la décomposition de Fourier du champ sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.1.1)$$

Ce champ étant réel, on a nécessairement  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega)$ , ce qui implique que la décomposition de Fourier précédente contient une part d'information redondante. On introduit donc le champ complexe  $\mathbf{E}^{(+)}$ , aussi appelé *signal analytique*, que l'on définit par une intégration sur les fréquences positives du champ uniquement :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \equiv \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.1.2)$$

Le champ complexe contient les mêmes informations que le champ réel et tous deux sont liés par la relation

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.1.3)$$

où  $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \equiv [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^*$  correspond à l'intégration sur les fréquences négatives du champ.

On peut aussi définir un signal analytique dans le domaine spectral. Il suffit de prendre la transformée de Fourier du signal analytique temporel :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.1.4)$$

On a alors

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, -\omega)}, \quad (2.1.5)$$

où  $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, \omega) \equiv [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega)]^*$ .

---

1. D'une manière générale, dans tout ce manuscrit, les vecteurs et matrices seront notés en gras.

## 2.2 Équations de propagation pour l'optique non-linéaire

Au sein d'un milieu matériel non magnétique où les densités de charge et de courant sont nulles ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ), l'équation de propagation des signaux analytiques se déduit aisément à partir des équations de Maxwell. On trouve (voir, p. ex., [Grynberg 10])

$$\Delta \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.2.1)$$

où  $\mathbf{P}^{(+)}$  représente la polarisation du milieu. En passant dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier, on a

$$\Delta \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.2.2)$$

On supposera que la polarisation du milieu se prête bien à un développement en puissances du champ électrique, de sorte que l'on peut définir une partie linéaire et une partie non-linéaire :

$$\mathbf{P}^{(+)} = \mathbf{P}_L^{(+)} + \mathbf{P}_{NL}^{(+)}, \quad (2.2.3)$$

avec  $\mathbf{P}_L^{(+)} = \mathbf{P}^{(+,1)}$  et  $\mathbf{P}_{NL}^{(+)} = \mathbf{P}^{(+,2)} + \mathbf{P}^{(+,3)} + \dots$  où  $\mathbf{P}^{(+,n)}$  est proportionnel au champ électrique à la puissance  $n$ . Ceci est légitime quand le champ se propageant dans le matériau est beaucoup moins intense que le champ électrique caractéristique du système (le champ reliant l'électron au noyau atomique, par exemple)<sup>2</sup>. L'équation (2.2.2) prend alors la forme

$$\Delta \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_L^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_{NL}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.2.4)$$

L'équation ci-dessus peut être simplifiée si nous ne nous intéresserons qu'à des grandeurs scalaires. Les composantes du vecteur  $\mathbf{P} = \sum_i P_i \mathbf{e}_i$  dans l'espace des fréquences sont

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \epsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \epsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (2.2.5)$$

où  $\chi^{(n)}$  est la *susceptibilité électrique d'ordre  $n$* , décrite par un tenseur complexe d'ordre  $n + 1$ . L'équation (2.2.5) nous permet de voir que la partie linéaire  $P_i^{(1)}$  de

2. Ce qui est normalement le cas pour les faisceaux lasers ordinaires utilisés en laboratoire.



## 2 Optique non-linéaire du second ordre

$P_i$  est couplée en général à toutes les composantes du champ électrique. Toutefois,  $\chi^{(1)}$  est symétrique et diagonalisable. Il est donc toujours possible de trouver un changement de base où  $P_i^{(1)}$  ne dépend que de  $E_i$ . Il en va de même pour sa partie à fréquences positives,  $P_i^{(+,1)}$ , qui ne dépend que de  $E_i^{(+)}$ . Après ce changement de base, pour chaque polarisation du champ  $\mathbf{E}$ , on a une équation de propagation de la forme :

$$\Delta E^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi^{(1)}(\omega)) E^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_{\text{NL}}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.2.6)$$

Les champs couramment utilisés dans le laboratoire sont des faisceaux lasers avec une dimension transverse finie. Ces faisceaux peuvent être décrits comme une onde plane enveloppée par une fonction  $u(\mathbf{r}, \omega)$  liée à ses dimensions finies et à la diffraction :

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, \omega) = u(\mathbf{r}, \omega) e^{i\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.2.7)$$

Nous supposons que le vecteur d'onde est aligné avec la direction de propagation  $z$ , de sorte que l'exponentielle de l'onde plane ne dépend que de  $z$  :

$$e^{i\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r}} \longrightarrow e^{ik(\omega)z} \quad (2.2.8)$$

Le calcul du laplacien de  $E^{(+)}$  donne alors

$$\Delta E^{(+)} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{ikz},$$

où nous allons pouvoir négliger le terme  $\partial^2 u / \partial z^2$  si nous admettons que l'enveloppe du champ varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde, ce qui s'inscrit dans le cadre de l'*approximation paraxiale* et peut être exprimé comme la condition suivante :

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|, \quad (2.2.9)$$

où  $k = 2\pi/\lambda$ .

De plus, nous nous limiterons à l'analyse des effets longitudinaux (dépendance en  $z$ ), de sorte que les dérivées secondes en  $x$  et en  $y$  seront aussi négligées dans l'expression du laplacien du champ électrique. Cette approximation revient à considérer le mode transverse du faisceau laser comme "assez proche" d'une onde plane. Ces approximations simplifient très efficacement les calculs et restent d'autant plus raisonnables que la longueur d'interaction est courte devant la longueur de Rayleigh du faisceau.

Sous ces conditions, l'équation de propagation pour l'enveloppe du champ devient

## 2.2 Équations de propagation pour l'optique non-linéaire

$$2ik(\omega)\frac{\partial u}{\partial z}(z, \omega) - \left[ k^2(\omega) - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi^{(1)}(\omega)) \right] u(z, \omega) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_{\text{NL}}^{(+)}(z, \omega) e^{-ik(\omega)z}. \quad (2.2.10)$$

On peut définir la valeur de  $k(\omega)$  à partir du cas d'une onde plane se propageant dans un milieu linéaire, dont l'équation de propagation s'écrit, tout simplement,

$$\left[ k^2(\omega) - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi^{(1)}(\omega)) \right] u(\omega) = 0, \quad (2.2.11)$$

ce qui nous conduit à choisir

$$k^2(\omega) = n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \text{avec } n^2(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega), \quad (2.2.12)$$

où  $n(\omega)$  est l'indice de réfraction au premier ordre du milieu, qui peut avoir une partie complexe responsable de l'absorption.<sup>3</sup> La *relation de dispersion* (2.2.12) garantit des solutions non-triviales pour l'équation de propagation (2.2.11).

On conserve donc cette expression pour  $k(\omega)$  aussi dans le cas non-linéaire et on obtient une équation très simplifiée pour  $u(z, \omega)$  :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial z}(z, \omega) = \frac{i\omega}{2\epsilon_0 n c} P_{\text{NL}}^{(+)}(z, \omega) e^{-ik(\omega)z}} \quad (2.2.13)$$

que l'on peut encore écrire en termes de  $E^{(+)}(z, \omega)$  :

$$\boxed{\frac{\partial E^{(+)}}{\partial z}(z, \omega) = ik(\omega)E^{(+)}(z, \omega) + \frac{i\omega}{2\epsilon_0 n c} P_{\text{NL}}^{(+)}(z, \omega)}. \quad (2.2.14)$$

On constate que l'évolution de  $E^{(+)}$  suivant  $z$  est composée d'une partie liée à la propagation libre (terme en  $ik$ ) et d'une autre partie associée à l'effet non-linéaire, où intervient la polarisation du milieu.

Dans la suite du chapitre, nous allons étudier quelques phénomènes non-linéaires du second ordre avec des impulsions ultra-rapides. Nous allons essentiellement utiliser l'équation (2.2.13) avec l'écriture adéquate de la polarisation non-linéaire. Pour ce faire, comme les champs traités sont à spectre large, il faudra tenir compte du fait que la polarisation du milieu provient d'une intégrale sur les fréquences optiques du produit de deux champs électriques, pondérée par le bon coefficient non-linéaire.

3. Lorsqu'on étudie les phénomènes non-linéaires tels que la conversion ou l'amplification paramétriques (et bien d'autres effets non-linéaires), le cas intéressant expérimentalement est celui où l'absorption du matériau est nulle :  $\chi^{(1)}(\omega)$  et  $n$  sont réels.

## 2.3 Effets non-linéaires avec des impulsions ultra-rapides : généralités

Nous traiterons ici seulement des cas particuliers d'effets non-linéaires du second ordre qui nous seront utiles dans la suite du manuscrit. Tous les champs sont supposés non-monochromatiques. Nous allons donc développer un formalisme qui s'adapte naturellement à la description des phénomènes non-linéaires avec des impulsions ultra-rapides ou des peignes de fréquences.

Nous commencerons par étudier le doublage de fréquence, processus par lequel on crée le faisceau qui sert de pompe pour le SPOPO : un peigne de fréquences centré à 800 nm est converti en un peigne centré à 400 nm. Ensuite, on discutera de la conversion paramétrique, qui est à la base de la *production* d'états quantiques dans notre cas. Enfin, la somme de fréquences, dont le doublage est un cas particulier, nous servira comme moyen de *manipulation* d'états quantiques multimodes, ce qui est décrit en section 8.2.5.

### 2.3.1 La polarisation d'ordre deux

Les processus non-linéaires du second ordre résultent de la polarisation d'ordre deux induite dans le matériau :

$$P_i^{(2)}(t) = \epsilon_0 \int \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi}, \quad (2.3.1)$$

où  $j$  et  $k$  sont supposées les seules composantes du champ électrique. En fréquence, on a

$$\begin{aligned} P_i^{(2)}(\omega) &= \epsilon_0 \int \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 - \omega)t} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} dt \\ &= \epsilon_0 \int \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) 2\pi \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Comme on est systématiquement proche de la zone de transparence du matériau et que la bande de fréquence n'est pas trop large, la dépendance en fréquence du coefficient non-linéaire peut être légitimement négligée. On écrit donc  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \approx \chi^{(2)}$ , de sorte que l'on peut sortir ce facteur de l'intégrale. Cette hypothèse revient à affirmer que la réponse du matériau est instantanée, de sorte que, à une position donnée, sa polarisation à un instant  $t$  ne dépend que du champ électrique à cet instant :

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E(t)^2 \quad (2.3.3)$$

Pour l'application directe de la formule (2.2.13), on s'intéressera plutôt au *signal analytique* de la polarisation :

$$P_i^{(+,2)}(\omega) = 2\pi\epsilon_0\chi^{(2)} \int E_j^{(\pm)}(\omega_1)E_k^{(\pm)}(\omega_2)\delta(\pm\omega_1 \pm \omega_2 - \omega)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi} \quad (2.3.4)$$

où le choix des signes sera fait suivant le phénomène non-linéaire traité <sup>4</sup>.

### 2.3.2 Le nombre d'onde autour de la fréquence centrale

Le nombre d'onde  $k(\omega)$  joue un rôle très important dans l'équation de propagation et sa dépendance en fréquence est non-négligeable pour les largeurs spectrales rencontrées dans notre cas (typiquement d'une dizaine de nanomètres).

Pour prendre en compte quantitativement cette dépendance, on réécrit le développement (1.1.12) sous la forme

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{1}{v_g(\omega_0)}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\text{GVD}(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (2.3.5)$$

où

$$v_g(\omega) = \left(\frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega}\right)^{-1} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega}} \quad (2.3.6)$$

$$\text{GVD}(\omega) = \frac{\partial^2 k(\omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g}\right) \quad (2.3.7)$$

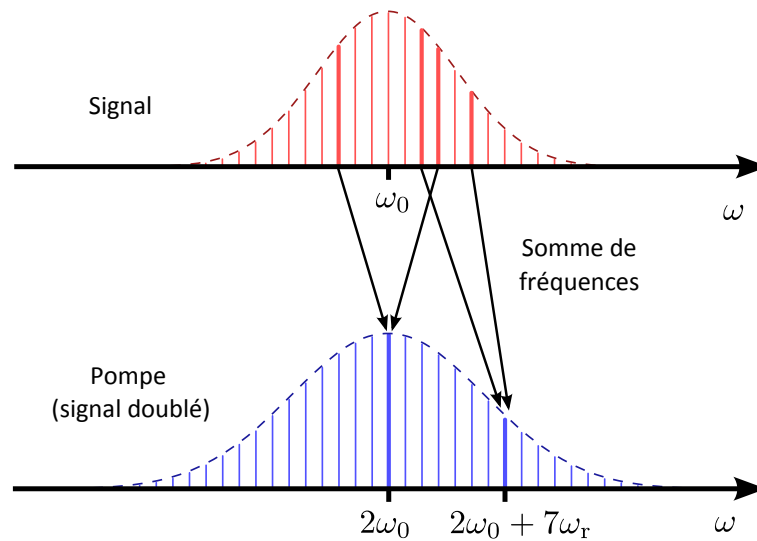
représentent respectivement la *vitesse de groupe* et la *dispersion de vitesse de groupe*, déjà abordées dans la Section 1.1.2.

## 2.4 Doublage d'un peigne de fréquences

Dans le cas monochromatique, le doublage de fréquence (aussi connu par SHG, de *Second Harmonic Generation*) n'est rien d'autre que la transformation d'une onde de fréquence  $\omega_0$  en une onde de fréquence double,  $2\omega_0$ , grâce au passage à travers un milieu non-linéaire. Lorsque, à l'entrée du milieu, on injecte à la place un peigne de fréquences (comme décrit en Section 1.1), le terme "doublage" n'est plus exactement rigoureux. Pour un peigne à l'entrée composé des fréquences  $\omega_n^s = \omega_0 + n\omega_r$ , avec  $\omega_0 = \omega_{\text{CE}} + N\omega_r$ , le doublage strict de chaque fréquence mènerait à un peigne de taux

4. En effet, le signal analytique n'est pas "stable" dans le sens où le produit de deux signaux analytiques de fréquences positives peut donner un signal de fréquence négative. Autrement dit, on peut avoir  $\omega = \omega_1 - \omega_2 < 0$  même si  $\omega_1 > 0$  et  $\omega_2 > 0$ .

## 2 Optique non-linéaire du second ordre



**Figure 2.4.1:** Doublage multimode en fréquence. Un photon à une fréquence pompe donnée peut avoir plusieurs "paires-sources" différentes, pourvu qu'il y ait conservation de l'énergie (somme de fréquences).

de répétition deux fois plus grand, car  $2\omega_n^s = 2\omega_0 + n(2\omega_r)$ , ce qui est absurde. En effet, un train d'impulsions "doublé" doit bien garder son taux de répétition original, car le doublage se produit aussi impulsion par impulsion. Le processus sous-jacent à ce doublage qui conserve le taux de répétition est la somme de toutes les paires possibles des fréquences du peigne signal (y compris le doublage de chaque fréquence), de sorte que les fréquences du peigne généré sont

$$\omega_{m+n}^p = \omega_m^s + \omega_n^s = 2\omega_0 + (m+n)\omega_r. \quad (2.4.1)$$

La figure 2.4.1 schématise ce processus<sup>5</sup>.

On remarque que la fréquence centrale est effectivement doublée, d'où l'usage courant du terme *doublage de fréquence*, même dans ce cas multimode en fréquence. Par conséquent, le décalage en fréquence du peigne (CEO) vaut aussi le double :  $2\omega_0 = 2\omega_{CE} + 2N\omega_r$ . Le taux de répétition reste inchangé.

### 2.4.1 Solution de l'équation de propagation

La polarisation d'ordre deux du matériau s'écrit à partir de l'équation (2.3.4), avec tous les signes pris positifs et les champs  $E$  correspondant au champ signal. On trouve

5. Pour éviter des confusions lorsqu'on passe d'un effet linéaire à l'autre, l'indice "s" (comme "signal") sera utilisé pour les fréquences des peignes infrarouge, et "p" (comme "pompe") quand il s'agit de peignes dans la région du bleu, même si, techniquement, le peigne infrarouge est la pompe du processus de doublage. On fait ce choix en référence au SPOPO, où l'infrarouge est le signal et le bleu est la pompe.

ainsi

$$P_p^{(+,2)}(z, \omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \int E_s^{(+)}(z, \omega') E_s^{(+)}(z, \omega - \omega') \frac{d\omega'}{2\pi} \quad (2.4.2)$$

et, comme  $E_s^{(+)}(z, \omega) = u_s(z, \omega) e^{ik_s(\omega)z}$ , l'équation de propagation de l'enveloppe  $u_p$  du peigne généré est

$$\frac{\partial u_p}{\partial z}(z, \omega) = \frac{i\omega \chi^{(2)}}{2nc} \int u_s(z, \omega') u_s(z, \omega - \omega') e^{i\Delta k(\omega, \omega')z} \frac{d\omega'}{2\pi}, \quad (2.4.3)$$

où

$$\Delta k(\omega, \omega') = k_s(\omega') + k_s(\omega - \omega') - k_p(\omega) \quad (2.4.4)$$

est appelé l'*accord de phase*. L'équation (2.4.3) est facilement soluble en intégrant directement suivant  $z$  sur toute la longueur du matériau : un cristal de longueur  $l_c$  et d'extrémités  $z_A = -l_c/2$  et  $z_B = l_c/2$ .

Si on suppose que le taux de conversion est faible, alors l'intensité du peigne fondamental varie très peu avec  $z$  :  $u_s(z, \omega) \approx u_s(\omega)$ . On obtient donc une solution analytique pour (2.4.3) de la forme :

$$u_p(z_B, \omega) = \frac{i\omega \chi^{(2)} l_c}{2nc} \int u_s(\omega') u_s(\omega - \omega') \Phi(\omega, \omega') \frac{d\omega'}{2\pi}, \quad (2.4.5)$$

où  $\Phi(\omega, \omega')$  est une fonction liée à l'accord de phase définie par

$$\Phi(\omega, \omega') = \text{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega, \omega') l_c}{2} \right). \quad (2.4.6)$$

Il est pertinent de souligner que, pour un accord de phase donné, cette fonction est d'autant plus étroite que le cristal est long, ce qui rend plus difficile la génération efficace de spectres larges, comme on le verra en détail avec l'exemple du cristal BIBO.

### 2.4.2 L'accord de phase

Dans le cas idéal, l'accord de phase est parfait et la fonction  $\Phi(\omega, \omega')$  prend la valeur unitaire quels que soient  $\omega$ ,  $\omega'$  et  $l_c$ , de sorte que l'enveloppe du champ pompe généré est une auto-convolution de l'enveloppe du champ signal. Avec un accord de phase parfait, un peigne gaussien centré à  $\omega_0$  et de largeur spectrale  $\Delta\omega$  génère un peigne aussi gaussien, mais centré à  $2\omega_0$  et avec une largeur spectrale de  $\sqrt{2}\Delta\omega$ , ce qui fait que, temporellement, les impulsions créées sont plus courtes d'un facteur  $\sqrt{2}$ . Curieusement, si on fait cette analyse en longueur d'onde, la largeur  $\Delta\lambda_p$  du peigne de sortie est plus petite que celle du peigne d'entrée ! En effet, si  $\omega_0 \ll \Delta\omega$ , alors un calcul simple montre que  $\Delta\lambda_p \simeq 0,3\Delta\lambda_s$ .

## 2 Optique non-linéaire du second ordre

Dans des cas plus réalistes, en revanche, l'accord de phase "parfait" n'est pas toujours facile à atteindre, en particulier quand il s'agit d'effets non-linéaires avec des impulsions ultracourtes, où les largeurs spectrales sont suffisantes pour faire ressortir les effets de la dispersion du matériau.

En développant chaque terme de (2.4.4) autour des fréquences centrales ( $\omega_0$  pour  $k_s$  et  $2\omega_0$  pour  $k_p$ ) jusqu'à l'ordre 2 à l'aide de (2.3.5), on trouve

$$\begin{aligned} \Delta k(\omega, \omega') = & \Delta k(2\omega_0, \omega_0) + \left( \frac{1}{v_{g,s}} - \frac{1}{v_{g,p}} \right) (\omega - 2\omega_0) \\ & + \frac{1}{2} (\text{GVD}_s - \text{GVD}_p) (\omega - 2\omega_0)^2 - \text{GVD}_s (\omega' - \omega_0) (\omega - \omega' - \omega_0), \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

où les indices "s" et "p" indiquent si la grandeur est calculée en  $\omega_0$  ou en  $2\omega_0$ , respectivement.

Le terme constant  $\Delta k(2\omega_0, \omega_0)$  est nul quand  $n(\omega_0) = n(2\omega_0)$ . Cette condition suffit pour un accord de phase parfait dans le cas des ondes monochromatiques et peut être satisfaite en jouant sur la biréfringence du matériau. En pratique, il faut choisir le bon angle de coupe du cristal par rapport à l'axe optique (ou un des axes optiques, s'il s'agit d'un milieu biaxe), et chercher la bonne orientation du cristal par rapport aux polarisations des faisceaux signal et pompe, qui doivent être croisées pour tirer parti de la biréfringence<sup>6</sup>.

Quand il s'agit de faisceaux de large bande spectrale, cette condition n'est plus suffisante, vu que les vitesses de groupe et les dispersions de vitesse de groupe entrent aussi dans le calcul pour des fréquences différentes de  $\omega_0$  et  $2\omega_0$ . La prise en compte de ces grandeurs dispersives fait l'objet de la suite.

### 2.4.3 Doublage avec un cristal BIBO

On s'intéresse maintenant aux effets quantitatifs de la dispersion dans un cristal BIBO [Ghotbi 04] lors du doublage d'un peigne centré à 800 nm en supposant l'accord de phase du type  $I e + e \rightarrow o$ , ce qui signifie que la polarisation du peigne signal est alignée sur l'axe extraordinaire et celle du peigne doublé, alignée sur l'axe ordinaire.

Dans la Section 4.3 de la thèse de Giuseppe Patera [Patera 08], on trouve les dérivées de  $k_s$  et  $k_p$  pour le BIBO calculées aux longueurs d'onde centrales. A partir de ces valeurs, on obtient

---

6. On peut aussi ajuster l'accord de phase par le biais d'autres paramètres comme la température, la pression, etc.

$$v_{g,s}/c = 0,5319, \quad \text{GVD}_s = 164 \text{ fs}^2/\text{mm}, \quad (2.4.8)$$

$$v_{g,p}/c = 0,5010, \quad \text{GVD}_p = 472 \text{ fs}^2/\text{mm}. \quad (2.4.9)$$

Si on compare les ordres de grandeurs suivants

$$\left| \frac{1}{v_{g,s}} - \frac{1}{v_{g,p}} \right| \Delta\omega \sim 10^3 \text{ m}^{-1} \quad (2.4.10)$$

$$|\text{GVD}_s - \text{GVD}_p| (\Delta\omega)^2 \sim 10^{-6} \text{ m}^{-1} \quad (2.4.11)$$

on constate que le désaccord entre les GVD ne contribue pas, en pratique, pour le désaccord de phase. On peut vérifier, d'ailleurs, grâce à des simulations numériques, que la GVD n'a pas d'influence significative sur l'allure du spectre généré, ce qui est vrai même pour des cristaux assez épais et est dû essentiellement à la largeur spectrale limitée du peigne infrarouge de départ. On prend donc, pour simplifier,

$$\Delta k(\omega, \omega') \simeq \Delta k(\omega) = \left( \frac{1}{v_{g,s}} - \frac{1}{v_{g,p}} \right) (\omega - 2\omega_0), \quad (2.4.12)$$

ce qui nous permet de sortir  $\Phi(\omega, \omega')$  de l'intégrale et retrouver le produit d'auto-convolution du champ signal, mais cette fois-ci enveloppé par un sinus cardinal qui diminue l'amplitude des fréquences éloignées du centre :

$$u_p(z_B, \omega) = \frac{i\omega\chi^{(2)}l_c}{2nc} \text{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega)l_c}{2} \right) \int u_s(\omega') u_s(\omega - \omega') \frac{d\omega'}{2\pi}, \quad (2.4.13)$$

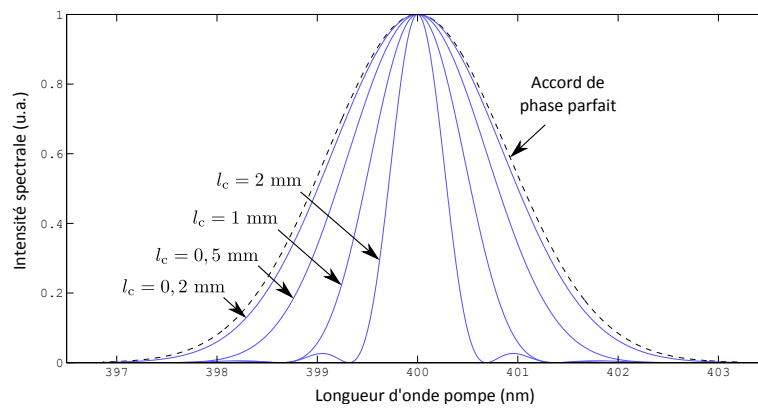
d'où l'intensité spectrale s'écrit

$$\boxed{I_p(z_B, \omega) \propto l_c^2 \text{sinc}^2 \left( \frac{\Delta k(\omega)l_c}{2} \right) (u_s \star u_s)^2(\omega)}. \quad (2.4.14)$$

On voit que si, d'une part, un cristal long favorise l'efficacité du doublage quand  $\Delta k(\omega) = 0$ , il est, d'autre part, nuisible pour les ailes du spectre si l'accord de phase n'est pas parfait, comme montre la figure 2.4.2, qui permet de comparer les profils d'intensité spectrale *normalisés* générés par le doublage en utilisant différentes longueurs de cristal. On rajoute que cet effet est d'autant plus marqué que le désaccord des vitesses de groupe est important, ce qui varie suivant le cristal.



## 2 Optique non-linéaire du second ordre



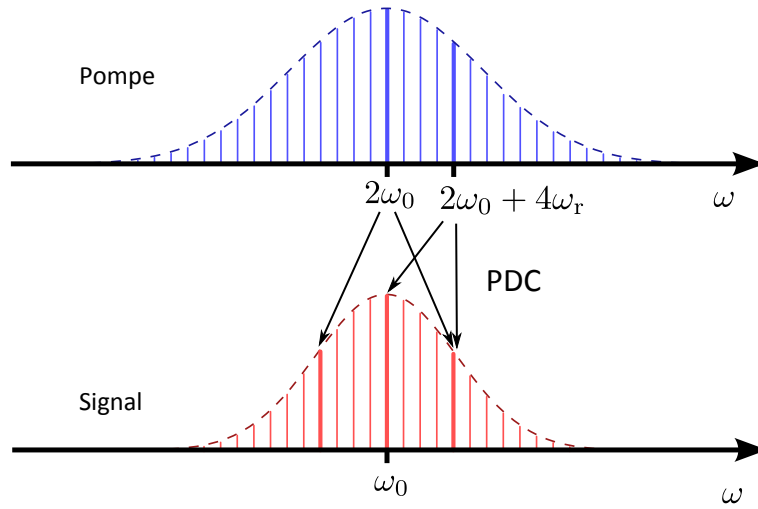
**Figure 2.4.2:** Spectre d'un peigne doublé en utilisant des cristaux de BIBO de différentes longueurs. Pour cette simulation, on emploie un peigne initial centré en 800 nm avec une largeur de 6 nm à mi-hauteur. La ligne pointillée correspond au cas où  $\Delta k(\omega) = 0$  sur tout le spectre. Dans cette situation, la longueur du cristal n'intervient plus dans l'allure du spectre, mais uniquement dans l'efficacité du doublage.

## 2.5 Conversion paramétrique "descendante"

La conversion paramétrique descendante (ou PDC, de l'anglais *Parametric Down Conversion*) correspond au processus non-linéaire au cours duquel un photon-pompe donne naissance à deux photons habituellement appelés signal et complémentaire (*signal* et *idler*, en anglais). Lorsque les photons signal et complémentaire sont à la même fréquence optique, on peut parler de conversion paramétrique dégénérée en fréquence. Si ces deux photons sont également dans le même mode spatial et de polarisation, on dira tout simplement *conversion paramétrique dégénérée*.

Ce processus peut aussi avoir lieu en régime femtoseconde, avec des peignes de fréquences. Chaque photon-pompe à une fréquence spécifique est converti en une paire de photons, mais pas nécessairement à la même fréquence (comme schématisé sur la figure 2.5.1). Les photons-pompe dans les modes monochromatiques subissent donc des conversions paramétriques qui peuvent être dégénérées ou non-dégénérées. Cette conversion paramétrique multimode en fréquence mène souvent à la création d'un seul peigne de fréquences, appelé signal. Pour cette raison, on parle aussi de conversion paramétrique *dégénérée*. On suit en quelque sorte le chemin inverse au doublage : le peigne de départ a une fréquence centrale qui est l'harmonique de la fréquence centrale du peigne généré.

Durant cette thèse, ce phénomène a été exploré expérimentalement en cavité, constituant ce que l'on appelle un *oscillateur paramétrique optique* (OPO) dégénéré pompé en régime femtoseconde. Comme pour les OPOs monomodes, on peut distinguer deux régimes de fonctionnement en ce qui concerne la puissance de pompe : en dessous



**Figure 2.5.1:** Conversion Paramétrique Descendante (PDC) d'un peigne de fréquences. Grâce à la pompe multimode, les photons signal sont tous couplés entre eux.

du seuil et au dessus du seuil. Dans le premier cas (à basse puissance de pompe), on génère des états comprimés dans les longueurs d'onde du signal, qu'il soit à l'état initial vide où qu'il soit injecté dans la cavité. Lorsqu'on dépasse une certaine valeur de puissance de pompe appelée le seuil, un faisceau signal brillant est émis par la cavité même en l'absence de signal injecté à l'entrée : c'est le régime d'oscillation. Dans la partie d'étude des propriétés quantiques de ce type d'OPO, on se limitera au cas où le dispositif est en dessous du seuil, mais le formalisme classique présenté dans la suite sert dans les deux cas.

### 2.5.1 L'équation de propagation

La polarisation d'ordre deux dans les fréquences du signal s'écrit

$$P_s^{(+,2)}(z, \omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \int E_p^{(+)}(z, \omega + \omega') E_s^{(-)}(z, \omega') \frac{d\omega'}{2\pi}, \quad (2.5.1)$$

où le choix des signes sur les composantes du champ vient du fait que la fréquence signal générée vient de la *différence* entre des fréquences pompe et des fréquences signal.

Dans l'équation (2.2.13), cela donne

$$\frac{\partial u_s}{\partial z}(z, \omega) = \frac{i\omega \chi^{(2)}}{2nc} \int u_p(z, \omega + \omega') u_s^*(z, \omega') e^{i\Delta k(\omega, \omega')z} \frac{d\omega'}{2\pi}, \quad (2.5.2)$$

avec

$$\Delta k(\omega, \omega') = k_p(\omega + \omega') - k_s(\omega') - k_s(\omega). \quad (2.5.3)$$

## 2 Optique non-linéaire du second ordre

On voit donc que, contrairement au cas du doublage de fréquence, la dérivé de l'enveloppe par rapport à l'espace dépend ici de l'enveloppe elle-même. Plus précisément, elle dépend de son complexe conjugué. On peut simplifier le problème en faisant l'hypothèse que l'enveloppe du signal est réelle :  $u^*(z, \omega) = u(z, \omega)$ . Cela signifie que la phase spectrale de l'enveloppe vaut soit 0 soit  $\pi$  (si on choisit judicieusement la référence de phase) sur tout le spectre, car ce sont les seules valeurs qui conduisent à des nombres réels :  $e^{i0} = 1$  et  $e^{i\pi} = -1$ . D'un point de vue plus expérimental, cette hypothèse revient à supposer l'absence de toute mise en forme d'impulsion qui introduise des phases autres que 0 ou  $\pi$ . En particulier, on suppose que toute phase linéaire ou quadratique (chirp) due à la traversée de matériaux dispersifs est annulée par un compensateur de dispersion.

Cette hypothèse nous conduit à un cas plus simple et proche des conditions expérimentales pour lequel on peut calculer assez facilement les profils spectraux des modes propres de l'interaction, ce qui nous suffit pour ce chapitre. Néanmoins, une analyse plus générale sera nécessaire dans le chapitre 4, où nous allons démontrer l'existence de corrélations quantiques entre peignes à CEO opposés générés par un SPOPO en configuration *quasi-dégénérée*. Ainsi, dans la suite de la section, on analysera en détail le premier cas et on finira par donner les bases pour l'étude du cas plus général, qui sera utile dans le chapitre ultérieur.

### 2.5.2 Solution simplifiée : hypothèse de l'enveloppe réelle

Si l'enveloppe du signal est réelle, alors l'équation de propagation (2.5.2) peut se réécrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire ordinaire :

$$\frac{\partial u_s}{\partial z}(z, \omega) = \mathcal{K}(z)u_s(z, \omega), \quad (2.5.4)$$

où  $\mathcal{K}(z)$  est une forme intégrale agissant sur l'enveloppe du champ de la manière suivante :

$$\mathcal{K}(z)u(z, \omega) = \int K(z, \omega, \omega')u(z, \omega')\frac{d\omega'}{2\pi} \quad (2.5.5)$$

et son noyau s'écrit

$$K(z, \omega, \omega') = \frac{i\omega\chi^{(2)}}{2nc}u_p(z, \omega + \omega')e^{i\Delta k(\omega, \omega')z}. \quad (2.5.6)$$

La solution de (2.5.4) est alors donnée *exactement* par

$$u_s(z_B, \omega) = e^{\mathcal{S}_0}u_s(z_A, \omega), \quad (2.5.7)$$

où  $z_A = -l_c/2$  et  $z_B = l_c/2$  sont les points où se situent les extrémités du cristal et  $\mathcal{S}_0$  est la forme intégrale

$$\mathcal{S}_0 = \int_{z_A}^{z_B} \mathcal{K}(z)dz. \quad (2.5.8)$$

## 2.5 Conversion paramétrique "descendante"

Son noyau,  $S_0(\omega, \omega')$ , s'obtient également par intégration de  $K(z, \omega, \omega')$  entre  $z_A$  et  $z_B$ . Si on fait l'hypothèse de non-déplétion de la pompe,  $u_p(z, \omega) \approx u_p(\omega)$ , l'intégrale se calcule très facilement et on trouve :

$$S_0(\omega, \omega') = \frac{i\omega\chi^{(2)}l_c}{2nc} u_p(\omega + \omega') \Phi(\omega, \omega'), \quad (2.5.9)$$

$\Phi(\omega, \omega')$  étant la fonction liée à l'accord de phase définie en (2.4.6).

Pour la suite, il sera également utile de définir la *fonction de distribution spectrale conjointe*

$$L(\omega, \omega') = u_p(\omega + \omega') \Phi(\omega, \omega'). \quad (2.5.10)$$

Pour des largeurs spectrales suffisamment petites, on peut faire l'approximation  $\omega/n \simeq \omega_0/n_0$ . Ainsi,  $S_0(\omega, \omega')$  et  $L(\omega, \omega')$  sont liées par une constante :

$$S_0(\omega, \omega') = \frac{i\omega_0\chi^{(2)}l_c}{2n_0c} L(\omega, \omega'). \quad (2.5.11)$$

On note que, comme l'enveloppe signal est supposée réelle, l'équation (2.5.7) nous dit que le noyau de  $S_0$  doit être réel. Ainsi, l'hypothèse initiale impose que  $u_p$  soit un imaginaire pur, c'est-à-dire la pompe a un déphasage de  $\pm\pi/2$  par rapport au signal. Ceci nous placera dans les situations d'amplification et déamplification maximales du signal, comme on le verra plus tard.

Avant de passer au calcul des modes propres de l'interaction, présentons d'abord quelques considérations sur l'accord de phase et les différences fondamentales entre la conversion paramétrique et le doublage de fréquence.

### 2.5.3 L'accord de phase

Le développement autour des fréquences centrales des termes de  $\Delta k(\omega, \omega')$  dans (2.5.3) donne, jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \Delta k(\omega, \omega') &= \Delta k(\omega_0, \omega_0) + \left( \frac{1}{v_{g,p}} - \frac{1}{v_{g,s}} \right) (\omega + \omega' - 2\omega_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{GVD}_p (\omega + \omega' - 2\omega_0)^2 - \frac{1}{2} \text{GVD}_s [(\omega - \omega_0)^2 + (\omega' - \omega_0)^2], \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

où, comme dans le cas du doublage, le terme constant  $\Delta k(\omega_0, \omega_0)$  s'annule quand  $n(2\omega_0) = n(\omega_0)$ .

### 2.5.4 Conversion paramétrique vs. Doublage de fréquence

Les conditions d'accord de phase de la conversion paramétrique sont strictement les mêmes que celles du doublage. On atteint donc la condition  $\Delta k(\omega_0, \omega_0) = 0$  via un accord de phase du type I ( $o \rightarrow e + e$ ), sur les mêmes plans du cristal, avec les mêmes angles de coupe. Néanmoins, on ne peut pas considérer la conversion paramétrique comme un processus parfaitement inverse à celui du doublage, dans le sens où, si on double le peigne généré par PDC, on ne retrouve pas la pompe de départ avec un cristal identique de même longueur.

Cette asymétrie existe pour une raison simple. Lors du doublage, si on prend un cristal d'épaisseur assez faible, afin qu'on puisse négliger l'effet de la dispersion, la largeur du peigne doublé dépend essentiellement de la largeur du peigne initial,  $\Delta\omega$ . En revanche, lors de la conversion paramétrique en utilisant ce même cristal fin, la conservation de l'énergie autorise qu'un photon à  $2\omega_0$ , par exemple, soit converti en deux photons aux fréquences  $\omega_0 + n\omega_r$  et  $\omega_0 - n\omega_r$ , même pour des valeurs de  $n$  telles que  $n\omega_r$  dépasse largement  $\Delta\omega$ . Le peigne infrarouge généré peut être donc beaucoup plus large que celui de départ, et sa largeur sera limitée seulement par les conditions d'accord de phase du cristal. Comme on suppose ici un cristal fin, les conditions d'accord de phase sont très favorables, mais peuvent rester assez peu contraignantes même pour des épaisseurs importantes.

Pour cette raison, contrairement au cas du doublage, on ne peut pas négliger l'influence de la GVD dans la conversion paramétrique afin de décrire correctement les propriétés spectrales du peigne généré. On conserve donc l'expression (2.5.12) avec, bien sûr,  $\Delta k(\omega_0, \omega_0) = 0$ .

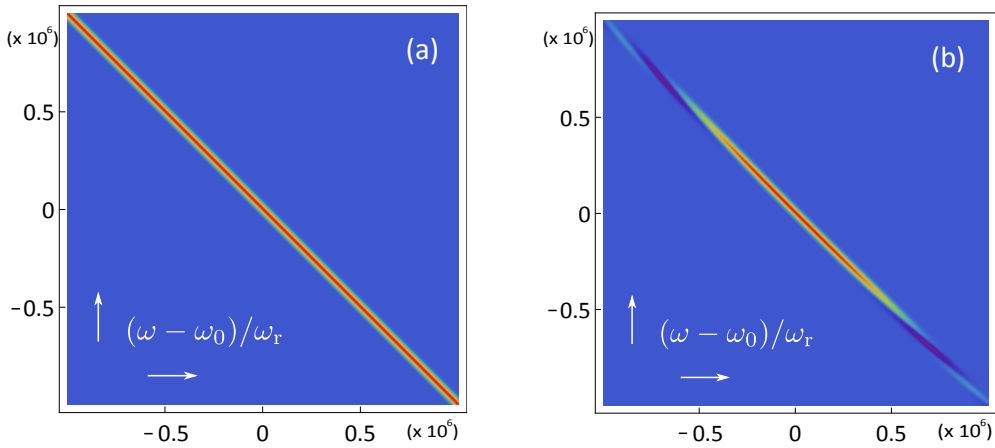
On peut alors calculer la fonction de distribution spectrale conjointe, qui dépend de l'accord de phase et du profil spectrale de la pompe. Le graphe (b) de la figure 2.5.2 montre le résultat de ce calcul pour un cristal BIBO de longueur  $l_c = 0,5$  mm et une pompe gaussienne de largeur spectrale  $\Delta\lambda = 2,1$  nm (FWHM en intensité) centrée à 400 nm. Le graphe (a) montre, à titre de comparaison, ce que l'on obtient si on ne prend pas en compte la GVD : c'est alors la dispersion du deuxième ordre qui limite la bande spectrale de la conversion paramétrique. Un calcul supplémentaire montre que l'effet des ordres supérieurs de la dispersion sur l'allure de  $L(\omega, \omega')$  est négligeable. L'allure antidiagonale des graphes montrés ici est résultat de la conservation de l'énergie, qui impose que la somme des fréquences d'une paire de photons créée,  $\omega + \omega'$ , doit rester dans la bande spectrale de la pompe.

### 2.5.5 Modes propres de la conversion paramétrique

Les modes propres de la transformation définie par (2.5.7) peuvent s'obtenir à partir de  $\mathcal{S}_0$ . En effet,

$$\mathcal{S}_0 u = \lambda u \Leftrightarrow e^{\mathcal{S}_0} u = e^\lambda u. \quad (2.5.13)$$

## 2.5 Conversion paramétrique "descendante"



**Figure 2.5.2:** Amplitude de la distribution spectrale conjointe  $|L(\omega, \omega')|$  de la conversion paramétrique avec un cristal BIBO (a) sans prendre en compte la GVD (b) avec la GVD. Les abscisses et les ordonnées donnent la distance de la fréquence  $\omega$  (ou  $\omega'$ ) à la fréquence centrale  $\omega_0$  en unités de  $\omega_r = 2\pi \times 76$  MHz.

Comme  $S_0(\omega, \omega')$  est proportionnelle à la distribution spectrale conjointe, ces modes propres sont entièrement déterminés par la fonction d'accord de phase et les propriétés spectrales de la pompe. Si on pompe avec un peigne de fréquences, les modes propres sont aussi des peignes de fréquence<sup>7</sup>, et leur largeur spectrale typique est limitée par l'accord de phase (GVD et longueur du cristal, essentiellement, dans le cas de la conversion paramétrique). On peut déduire l'enveloppe spectrale des modes propres de la conversion paramétrique en effectuant l'équivalent d'une décomposition de Schmidt sur la distribution spectrale conjointe. Or  $L(\omega, \omega')$  est une fonction symétrique dans ce cas. Donc cette décomposition prend la forme suivante :

$$L(\omega, \omega') = \sum_j \Lambda_j u_s^{(j)}(\omega) u_s^{(j)}(\omega'), \quad (2.5.14)$$

où les  $\Lambda_j$  sont les "coefficients de Schmidt" et les  $u_s^{(j)}$  sont les "modes de Schmidt". Si on ne considère que les fréquences  $\omega_n$  du peigne, la fonction  $L(\omega, \omega')$  devient une matrice  $\mathbf{L}$  d'éléments

$$L_{n,n'} = \sum_j \Lambda_j u_{s,n}^{(j)} u_{s,n'}^{(j)}, \quad (2.5.15)$$

7. Ce résultat, qui paraît évident, sera démontré en détail dans le chapitre 4.

## 2 Optique non-linéaire du second ordre

avec  $L_{n,n'} = L(\omega_n, \omega_{n'})$  et  $u_{s,n}^{(j)} = u_s^{(j)}(\omega_n)$ . On a donc

$$\mathbf{L} = \sum_j \Lambda_j |u_s^{(j)}\rangle \langle u_s^{(j)}|, \quad (2.5.16)$$

où on définit les vecteurs (**Attention ! Malgré la notation, ces calculs sont classiques.**)

$$|u_s^{(j)}\rangle = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_{s,n-1}^{(j)} \\ u_{s,n}^{(j)} \\ u_{s,n+1}^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle u_s^{(j)}| = |u_s^{(j)}\rangle^\dagger = |u_s^{(j)}\rangle^T. \quad (2.5.17)$$

Les "modes de Schmidt" sont les vecteurs propres de  $\mathbf{L}$  :

$$\mathbf{L} |u_s^{(j)}\rangle = \sum_j \Lambda_j |u_s^{(j)}\rangle \langle u_s^{(j)} | u_s^{(i)}\rangle = \Lambda_i |u_s^{(i)}\rangle. \quad (2.5.18)$$

Trouver les modes propres de la conversion paramétrique revient alors à diagonaliser cette matrice. Le vecteur propre  $|u_s^{(j)}\rangle$  donne le profil spectral du  $j$ -ème mode propre et  $\Lambda_j$  est sa valeur propre.

Si à l'entrée du cristal nous avons un mode propre de l'interaction, c'est-à-dire  $|u_s\rangle_A = |u_s^{(j)}\rangle$ , la relation d'entrée-sortie (2.5.7) s'écrit

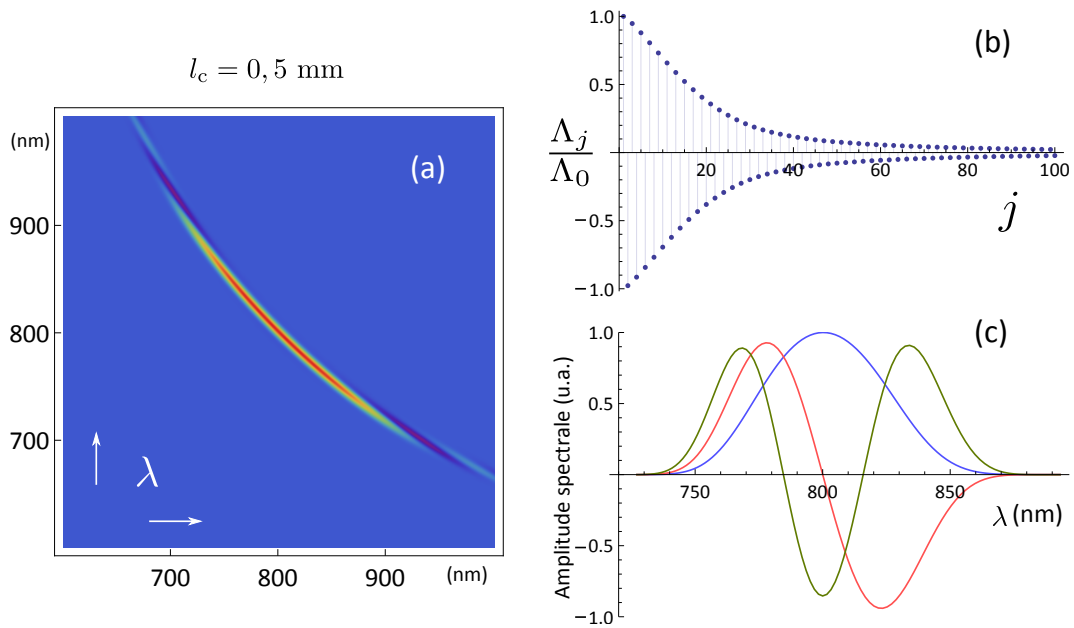
$$|u_s\rangle_B = e^{igl_c \mathbf{L}} |u_s^{(j)}\rangle = e^{igl_c \Lambda_j} |u_s^{(j)}\rangle \quad (2.5.19)$$

où nous avons utilisé (2.5.11) avec  $g \equiv \omega_0 \chi^{(2)} / 2n_0 c$ . On voit donc que le signal est amplifié (ou désamplifié) si la partie imaginaire de  $\Lambda_j$  est négative (ou positive). Or, d'après (2.5.10) et (2.5.14), et du fait que l'enveloppe du signal est supposée réelle, la phase de la pompe ( $u_p$ ) détermine la phase des  $\Lambda_j$ . On retrouve donc le phénomène connu par le nom d'*amplification sensible à la phase*.

D'une manière générale, quand la pompe a un profil gaussien, le calcul des modes propres donne des peignes de fréquences dont les profils s'assimilent à des fonctions d'Hermite-Gauss<sup>8</sup> et les valeurs propres sont toutes imaginaires pures. Ces modes propres sont souvent appelés *supermodes*, car ils consistent en des superpositions de plusieurs dizaines de milliers de modes monochromatiques. Le premier supermode, celui avec la plus grande valeur propre en valeur absolue,  $\Lambda_0$ , a un profil proche d'une gaussienne. Le deuxième a une valeur propre de signe inversé et qui correspond à la

8. Les modes propres seraient *exactement* des fonctions d'Hermite-Gauss si la fonction  $L(\omega, \omega')$  était gaussienne.

## 2.5 Conversion paramétrique "descendante"



**Figure 2.5.3:** Conversion paramétrique quasi-dégénérée avec un cristal BIBO de longueur 0,5 mm. (a) Distribution spectrale conjointe dans l'espace des longueurs d'onde. (b) 100 premières valeurs propres (normalisées). (c) Profils spectraux des trois premiers modes propres.

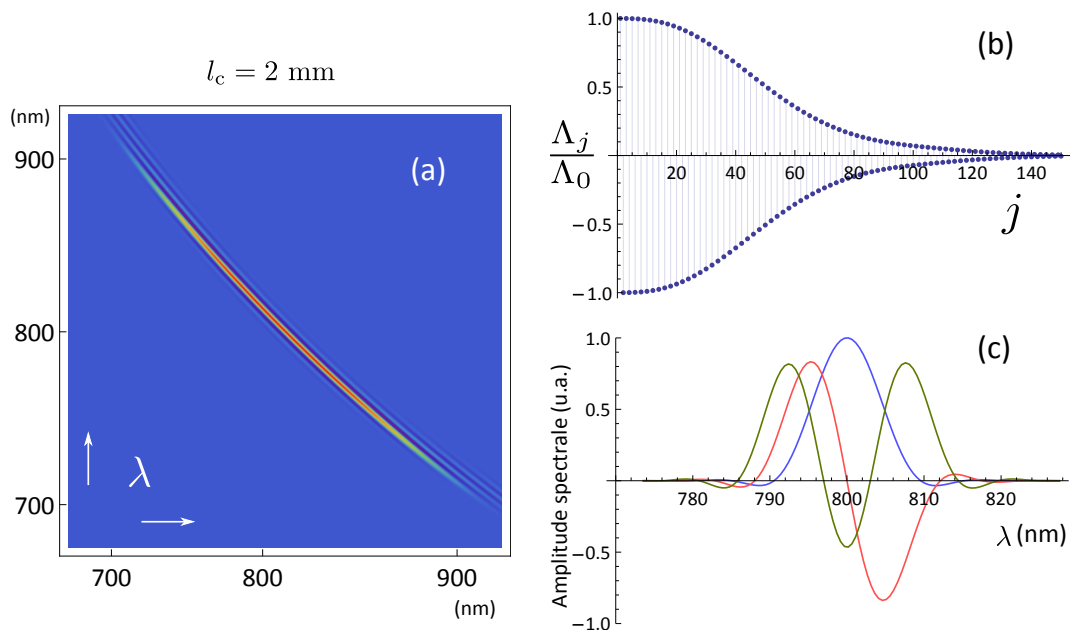
deuxième valeur propre la plus grande en valeur absolue. Son profil spectral est proche de la deuxième fonction d'Hermite-Gauss. Les supermodes suivants correspondent aux fonctions d'Hermite-Gauss d'ordres supérieurs et les signes des valeurs propres continuent de s'alterner, leurs valeurs absolues diminuant progressivement, comme on peut voir sur les figures 2.5.3 et 2.5.4, établies pour une pompe de largeur  $\Delta\lambda = 2, 1$  nm et des longueurs de cristal différentes. L'alternance de signe des valeurs propres montre que tandis que les modes paires ( $j = 0, 2, 4, \dots$ ) sont amplifiés (pour un choix judicieux de la phase relative de la pompe), les modes impaires ( $j = 1, 3, 5, \dots$ ) subissent une désamplification.

Dans le cas du cristal de longueur 0,5 mm (figure 2.5.3), les modes propres sont très larges spectralement :  $\Delta\lambda \gtrsim 50$  nm. Au delà de  $j = 100$ , les valeurs propres sont négligeables. Les supermodes correspondants ne se couplent donc pas à la pompe. Notez que la dimensionnalité du problème a été considérablement réduite : si au départ nous avons des dizaines de milliers de modes longitudinaux monochromatiques, on a affaire à moins d'une centaine de modes large-bande après la diagonalisation.

Lorsqu'on utilise un cristal plus large, l'accord de phase devient plus contraignant et les supermodes peuvent devenir substantiellement plus étroits spectralement. La figure 2.5.4 donne l'exemple d'un cristal de 2 mm de longueur, pour lequel la largeur du premier mode propre (7 nm, FWHM en intensité) est comparable à celle du mode



## 2 Optique non-linéaire du second ordre



**Figure 2.5.4:** Conversion paramétrique quasi-dégénérée avec un cristal BIBO de longueur 2 mm. (a) Distribution spectrale conjointe dans l'espace des longueurs d'onde. (b) 150 premières valeurs propres (normalisées). (c) Profils spectraux des trois premiers modes propres.

nécessaire pour générer la pompe par doublage à travers un cristal BIBO fin. On voit que la première quinzaine de supermodes se couple à la pompe avec à peu près la même intensité, ce qui n'est pas le cas pour le cristal de 0,5 mm, où les valeurs propres diminuent en valeur absolue assez rapidement. On remarque aussi que les valeurs propres deviennent virtuellement nulles seulement à partir de la 150ème environ. Si on explore des cristaux plus épais, une quantité encore plus grande de modes est couplée à la pompe avec la même intensité que le premier supermode et le nombre de valeurs propres non-négligeables devient aussi plus important. On a alors un processus très multimode, même si le couplage individuel de chaque supermode à la pompe est plus faible, car il est dilué dans une quantité plus élevée de modes.

### 2.5.6 Solution générale de l'équation de propagation via développement de Magnus

Lorsque l'on ne fait pas l'hypothèse de l'enveloppe réelle,  $u_s(z, \omega)$  peut prendre des valeurs complexes et on doit utiliser l'équation de propagation telle qu'elle est écrite en (2.5.2). Dans ce cas,  $u_s$  se couple<sup>9</sup> à  $u_s^*$  et nous devons traiter l'équation comme un

9. Lorsqu'on passera au traitement quantique des phénomènes non-linéaires, la dépendance de  $u_s$  en  $u_s^*$  (et vice-versa) se traduira par un couplage entre les opérateurs d'annihilation et de création.

## 2.5 Conversion paramétrique "descendante"

problème à deux dimensions, où il convient de définir le vecteur

$$\mathbf{u}_s(z, \omega) = \begin{pmatrix} u_s(z, \omega) \\ u_s^*(z, \omega) \end{pmatrix}. \quad (2.5.20)$$

Alors on peut réécrire l'équation de propagation sous la forme d'une équation matricielle différentielle linéaire ordinaire

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial z}(z, \omega) = \mathcal{K}(z) \mathbf{u}_s(z, \omega), \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}(z) \\ \mathcal{K}^*(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5.21)$$

où  $\mathcal{K}(z)$  est défini comme dans (2.5.5) et (2.5.6).

Afin de trouver la solution de l'équation ci-dessus, il faut tenir compte du fait que  $\mathcal{K}(z)$  et  $\mathcal{K}(z')$  ne commutent pas pour toute paire  $(z, z')$ . Ceci implique que l'on ne peut pas, en général, écrire la solution comme l'exponentielle de l'intégrale de  $\mathcal{K}(z)$ , le tout multiplié par la condition initiale. Dans ce cas, la solution exacte peut être écrite sous forme d'un développement de Magnus [Mukamel 95] :

$$\mathbf{u}_s(z_B, \omega) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k(z_B, z_A) \right) \mathbf{u}_s(z_A, \omega), \quad (2.5.22)$$

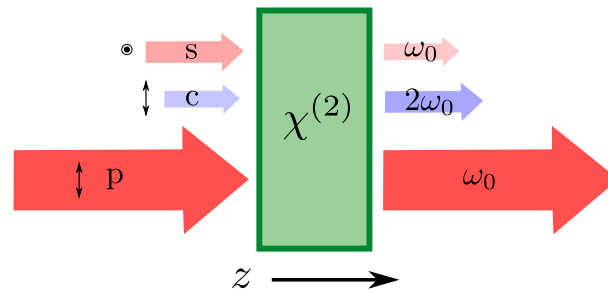
où

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(z_B, z_A) &= \int_{z_A}^{z_B} \mathcal{K}(z) dz \\ \mathcal{P}_2(z_B, z_A) &= \frac{1}{2} \int_{z_A}^{z_B} dz \int_{z_A}^z dz' [\mathcal{K}(z), \mathcal{K}(z')] \\ \mathcal{P}_3(z_B, z_A) &= \frac{1}{6} \int_{z_A}^{z_B} dz \int_{z_A}^z dz' \int_{z_A}^{z'} dz'' ([\mathcal{K}(z), [\mathcal{K}(z'), \mathcal{K}(z'')]] + \\ &\quad [\mathcal{K}(z''), [\mathcal{K}(z'), \mathcal{K}(z)]]]) \\ &\dots \end{aligned}$$

Un des avantages du développement de Magnus par rapport à d'autres méthodes réside dans le fait que la transformation reliant la solution obtenue et la condition initiale reste unitaire et elle conserve les relations de commutation à tous les ordres du développement, ce qui sera utile quand on passera à la description quantique.

À l'aide de l'équation (2.5.6), on voit que  $\mathcal{K}(z)$  est proportionnel au produit entre le coefficient non-linéaire et l'amplitude de la pompe,  $\chi^{(2)} u_p$ , quantité liée au gain paramétrique en simple passage à travers le cristal. Le terme  $\mathcal{P}_n(z_B, z_A)$  de la série est donc proportionnel à  $(\chi^{(2)} u_p)^n$ . Si on suppose le gain paramétrique suffisamment

## 2 Optique non-linéaire du second ordre



**Figure 2.6.1:** Schéma de la somme de fréquences dégénérée en fréquence.  $s$  : signal ;  $c$  : complémentaire ;  $p$  : pompe. Les faisceaux se propagent en configuration colinéaire suivant  $z$  et les faisceaux signal et pompe, tous deux centrés en  $\omega_0$ , sont discernables car ses polarisations sont croisées.

petit, on peut alors garder uniquement le premier terme de la série, ce qui conduit à la solution approximée :

$$\mathbf{u}_s(z_B, \omega) = \mathcal{G}_0 \mathbf{u}_s(z_A, \omega), \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_0 = \exp \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_0 \\ \mathcal{S}_0^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5.23)$$

où  $\mathcal{S}_0$  est définie comme dans (2.5.8). Quand l'interaction a lieu dans une cavité optique, le taux de conversion paramétrique par tour de cavité est généralement faible en dessous du seuil. Cette solution reste donc une bonne approximation dans le cas du SPOPO et sera utilisée pour établir les relations d'entrée-sortie de ce dispositif dans le chapitre 4.

## 2.6 Somme de fréquences

Passons maintenant à l'étude du phénomène de somme de fréquences (SFG, de l'anglais *Sum Frequency Generation*). D'une manière générale, trois ondes prennent part dans ce processus : un faisceau pompe, un mode signal et un mode complémentaire, dont on note les fréquences centrales, respectivement,  $\omega_p$ ,  $\omega_s$  et  $\omega_c = \omega_p + \omega_s$ . On s'intéresse au cas particulier dégénéré en fréquence, où  $\omega_s = \omega_p = \omega_0$ , mais pompe et signal sont discernables, ce qui le différencie du doublage traité en section (2.4). Une autre différence fondamentale entre le doublage ordinaire et la somme de fréquences traitée ici est le fait que la pompe, centrée en  $\omega_0$ , est supposée intense par rapport aux deux autres faisceaux, et elle n'est donc pas perturbée pendant la propagation.

Pour étudier cet effet non-linéaire, on choisit une configuration colinéaire du type II (pompe et signal ont des polarisations croisées, d'où leur discernabilité) où tous les faisceaux se propagent selon un axe  $z$  (figure 2.6.1).

### 2.6.1 Équations de propagation

On s'intéresse à la propagation des faisceaux signal et complémentaire dans le cas où la pompe est suffisamment intense devant ces deux faisceaux. On peut alors négliger la déplétion du faisceau pompe et supposer que son enveloppe  $u_p$  ne dépend pas de  $z$ . Comme dans les cas précédents, on exprime d'abord les polarisations non-linéaires :

$$P_s^{(+,2)}(z, \omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \int E_p^{(-)}(z, \omega' - \omega) E_c^{(+)}(z, \omega') \frac{d\omega'}{2\pi} \quad (2.6.1)$$

$$P_c^{(+,2)}(z, \omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \int E_p^{(+)}(z, \omega - \omega') E_s^{(+)}(z, \omega') \frac{d\omega'}{2\pi}. \quad (2.6.2)$$

On obtient ainsi, grâce à (2.2.13), les équations de propagation du signal et du complémentaire

$$\frac{\partial u_s}{\partial z}(z, \omega) = \frac{i\omega_0 \chi^{(2)}}{2n_s c} \int u_p^*(\omega' - \omega) u_c(z, \omega') e^{-i\Delta k(\omega', \omega)z} \frac{d\omega'}{2\pi} \quad (2.6.3)$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial z}(z, \omega) = \frac{i2\omega_0 \chi^{(2)}}{2n_c c} \int u_p(\omega - \omega') u_s(z, \omega') e^{i\Delta k(\omega, \omega')z} \frac{d\omega'}{2\pi} \quad (2.6.4)$$

où  $n_s \equiv n_s(\omega_0)$ ,  $n_c \equiv n_c(\omega_0)$  et l'accord de phase s'écrit

$$\Delta k(\omega, \omega') = k_p(\omega - \omega') + k_s(\omega') - k_c(\omega). \quad (2.6.5)$$

Dans (2.6.3) et (2.6.4), on suppose que les spectres du signal et du complémentaire sont suffisamment étroits pour qu'on puisse écrire  $\omega/n_s(\omega) \simeq \omega_0/n_s$  et  $\omega/n_c(\omega) \simeq 2\omega_0/n_c$ , ce qui est tout à fait raisonnable pour des impulsions d'une centaine de femtosecondes.

Pour résoudre ces équations il convient de les réécrire sous forme matricielle. On définit alors le vecteur

$$\mathbf{u}(z, \omega) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n_s}{\omega_0}} u_s(z, \omega) \\ \sqrt{\frac{n_c}{2\omega_0}} u_c(z, \omega) \end{pmatrix} \quad (2.6.6)$$

et on a une équation matricielle différentielle linéaire ordinaire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(z, \omega) = \mathcal{K}(z) \mathbf{u}(z, \omega), \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{K}^\dagger(z) \\ \mathcal{K}(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6.7)$$

où  $\mathcal{K}(z)$  est une forme intégrale de noyau

$$K(z, \omega, \omega') = \frac{i\omega_0 \chi^{(2)}}{c\sqrt{2n_s n_c}} u_p(\omega - \omega') e^{i\Delta k(\omega, \omega')z}. \quad (2.6.8)$$

## 2 Optique non-linéaire du second ordre

Notons que la définition du vecteur  $\mathbf{u}(z, \omega)$  comprend les enveloppes signal et complémentaire, tandis que l'équation différentielle matricielle de la conversion paramétrique a été établie précédemment pour un vecteur  $\mathbf{u}_s(z, \omega)$  contenant l'enveloppe signal et son complexe conjugué (cf. équation (2.5.20)). Dans chaque cas on décrit donc des phénomènes fondamentalement différents, mais avec des équations formellement très proches dans l'écriture matricielle. Afin de trouver la solution de l'équation (2.6.7), on applique alors la même technique qui a été utilisée dans le cas de la conversion paramétrique : le développement de Magnus.

### 2.6.2 Solution via Développement de Magnus

La solution de (2.6.7) peut s'exprimer de façon approximée, comme dans le cas de la conversion paramétrique, par un développement de Magnus tronqué au premier ordre. On intègre donc  $\mathcal{K}(z)$  suivant  $z$  entre les extrémités du cristal,  $z_A = -l_c/2$  et  $z_B = l_c/2$ . L'exponentielle du résultat donne la matrice de la transformation dans le cristal, qui relie les valeurs du vecteur  $\mathbf{u}(z, \omega)$  à l'entrée et à la sortie :

$$\mathbf{u}(z_B, \omega) = \mathcal{G}_0 \mathbf{u}(z_A, \omega), \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_0 = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{S}_0^\dagger \\ \mathcal{S}_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.9)$$

où le noyau de  $\mathcal{S}_0$  est établi par intégration de (2.6.8) suivant  $z$  :

$$S_0(\omega, \omega') = \frac{i\omega_0 \chi^{(2)} l_c}{c\sqrt{2n_s n_c}} u_p(\omega - \omega') \Phi(\omega, \omega'), \quad (2.6.10)$$

où  $\Phi(\omega, \omega')$  est défini en (2.4.6).

On voit donc apparaître la distribution spectrale conjointe de la somme de fréquences :

$$L(\omega, \omega') = u_p(\omega - \omega') \Phi(\omega, \omega') \quad (2.6.11)$$

qui diffère de celle de la conversion paramétrique (différence de fréquences), par le signe moins dans l'argument de l'enveloppe de la pompe. Nous verrons dans la suite de ce chapitre que ce signe joue un rôle fondamental dans la forme de la distribution spectrale conjointe et fait ressortir des phénomènes qui nous seront utiles dans la manipulation d'états quantiques.

### 2.6.3 L'accord de phase avec un cristal BIBO

Le développement de Taylor de l'accord de phase jusqu'au deuxième ordre donne

$$\begin{aligned} \Delta k(\Omega, \Omega') &= \Delta k_0 + (k'_p - k'_c) \Omega + (k'_p - k'_s) \Omega' \\ &+ \frac{1}{2} (k''_p - k''_c) \Omega^2 + \frac{1}{2} (k''_p + k''_s) \Omega'^2 + k''_p \Omega \Omega', \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

où  $\Omega = \omega - 2\omega_0$  et  $\Omega' = \omega' - \omega_0$  se réfèrent respectivement aux fréquences du mode complémentaire et du mode signal ;  $\Delta k_0 = k_p(\omega_0) + k_s(\omega_0) - k_c(2\omega_0)$  donne l'accord de phase aux fréquences centrales ;  $k'_i = 1/v_{g,i}$  et  $k''_i = \text{GVD}_i$ , avec  $i = s, c, p$ , sont des dérivées calculées aux fréquences  $\omega_0$  (pour le signal et la pompe) et  $2\omega_0$  (pour le complémentaire).

L'accord de phase au premier ordre,  $\Delta k_0 = 0$ , est atteint quand

$$n_c(2\omega_0) = \frac{n_p(\omega_0) + n_s(\omega_0)}{2}. \quad (2.6.13)$$

A l'aide du logiciel SNLO, on trouve facilement une configuration où cet accord de phase est possible avec un cristal BIBO pour une pompe centrée en 800 nm : accord type II ( $o + e \rightarrow o$ ) sur le plan principal  $xz$  du cristal. La pompe et complémentaire se propagent donc avec l'indice de réfraction ordinaire et le signal avec l'indice de réfraction extraordinaire. D'après ce logiciel, les angles de propagation du vecteur  $\mathbf{k}_p/|\mathbf{k}_p| = \sin \theta \cos \phi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z$  dans le cristal<sup>10</sup> sont  $\theta = 84,4^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$ . Le coefficient non-linéaire effectif vaut  $d_{\text{eff}} = 0,354$  pm/V (environ 10 fois plus petit que dans la configuration du doublage type I et de la conversion paramétrique quasi-dégénérée,  $d_{\text{eff}} = 3,72$  pm/V). Les dérivées des  $k_i$  sont aussi données :

$$\begin{aligned} k'_p &= 6127 \text{ fs/mm} & k''_p &= 155,2 \text{ fs}^2/\text{mm} \\ k'_s &= 6614 \text{ fs/mm} & k''_s &= 200,8 \text{ fs}^2/\text{mm} \\ k'_c &= 6898 \text{ fs/mm} & k''_c &= 579,6 \text{ fs}^2/\text{mm} \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

#### 2.6.4 Forme de la distribution spectrale conjointe

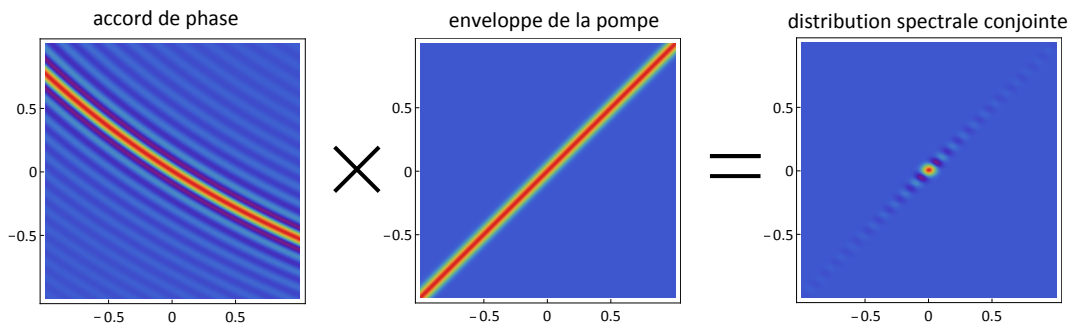
Considérons un cristal BIBO de longueur  $l_c = 0.5$  mm et une pompe gaussienne de largeur spectrale à mi-hauteur *en intensité* équivalente à  $\Delta\lambda = 6$  nm. La figure 2.6.2 donne la distribution spectrale conjointe dans ce cas particulier et explicite l'influence de l'accord de phase et de l'enveloppe de la pompe sur la forme de la distribution. La fonction d'accord de phase est pratiquement antidiagonale alors que l'enveloppe de la pompe est parfaitement diagonale, grâce au signe moins dans son argument :

$$u_p(\Omega - \Omega') = \exp \left[ -\frac{(\Omega - \Omega')^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (2.6.15)$$

Le croisement de ces deux fonctions réduit considérablement l'étendue de la distribution spectrale par rapport à la conversion paramétrique (si on compare les mêmes

10.  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_z$  sont les vecteurs orthonormaux qui définissent les axes propres du cristal. Attention à ne pas confondre l'axe  $z$  du cristal avec l'axe de propagation des faisceaux, aussi appelé  $z$ .

## 2 Optique non-linéaire du second ordre



**Figure 2.6.2:** Distribution spectrale conjointe de la somme de fréquences avec un cristal BIBO de longueur 0.5 mm et pompe gaussienne de largeur  $\Delta\lambda = 6$  nm. Les axes expriment les fréquences  $\Omega$  (en ordonnées) et  $\Omega'$  (en abscisses) en unités de  $10^6 \times \omega_T$ .

longueurs de cristal). Dans ce dernier cas, le graphe de l'enveloppe  $u_p(\Omega + \Omega')$  est antidiagonal et parfaitement aligné à celui de l'accord de phase au premier ordre, la limitation étant la dispersion d'ordre 2 (GVD). Ici, toutefois, le spectre de la pompe "coupe" la fonction d'accord de phase à des fréquences proches du centre, en annulant l'effet de la GVD. Donc seulement la partie linéaire du développement (2.6.12) est importante :

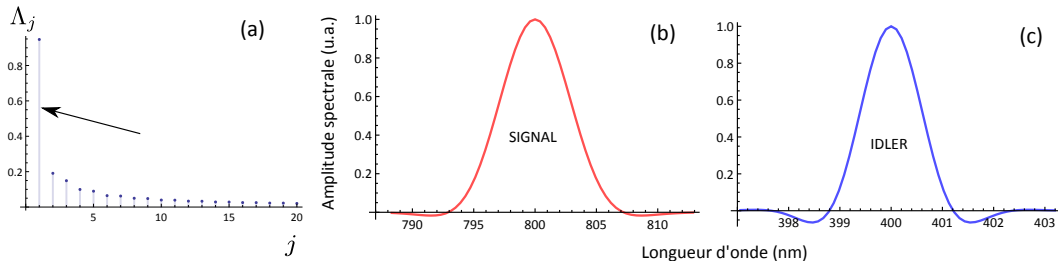
$$\Delta k(\Omega, \Omega') = (k'_p - k'_c) \Omega + (k'_p - k'_s) \Omega'. \quad (2.6.16)$$

### 2.6.5 Modes propres de la somme de fréquences

Quand nous avons traité la conversion paramétrique, le fait que la distribution spectrale conjointe était symétrique faisait que sa décomposition de Schmidt revenait à une simple diagonalisation de la matrice  $\mathbf{L}$ . Or, la distribution spectrale conjointe de la figure 2.6.2 n'est pas symétrique car sa projection sur l'axe horizontal est centrée en 800 nm et, sur l'axe vertical, en 400 nm. Il faut alors procéder à une décomposition en valeurs singulières (SVD, de l'anglais *Singular Value Decomposition*) de cette matrice. On a ainsi une décomposition du type (**On rappelle que tous les calculs de ce chapitre sont classiques.**)

$$\mathbf{L} = \sum_j \Lambda_j |u_c^{(j)}\rangle \langle u_s^{(j)}|. \quad (2.6.17)$$

Le résultat du calcul numérique de la SVD est montré dans la figure 2.6.3. Le graphe (a) montre les coefficients de Schmidt  $\Lambda_i$  obtenus, normalisés tels que  $\sum_i \Lambda_i^2 = 1$ . On voit que le premier coefficient est beaucoup plus grand que les suivants (on montre également en (b) et (c) les modes signal et idler couplés par le premier coefficient).



**Figure 2.6.3:** Décomposition de Schmidt de la somme de fréquences. Les modes signal et idler présentés sont ceux couplés par le premier coefficient de Schmidt, celui le plus grand.

L'interaction est alors presque monomode. En effet, si on oublie les oscillations dues au sinus cardinal de l'accord de phase, la distribution spectrale conjointe peut presque être écrite comme le produit de deux gaussiennes, l'une dépendante de  $\Omega$ , l'autre de  $\Omega'$ , et la décomposition de Schmidt n'a qu'un seul terme important. La distribution spectrale est alors *factorisable*. Cette propriété est intéressante car elle permet d'envisager la manipulation d'états quantiques multimodes en transférant au faisceau complémentaire les propriétés quantiques d'un mode choisi du signal, comme on le verra dans la section 8.2.5.

On précise que la factorisabilité est d'autant plus juste que l'accord de phase est proche de l'antidiagonale. On peut satisfaire à cette condition, du moins en principe, en accordant les vitesses de groupe du signal et du complémentaire, ce qui nous permettrait d'écrire :

$$\Delta k(\Omega, \Omega') = (k'_p - k'_s) (\Omega + \Omega'), \quad \text{si } k'_s = k'_c. \quad (2.6.18)$$

Pour disposer des accords de phase et de vitesse de groupe *simultanément*, on peut imaginer par exemple de passer en configuration non-colinéaire et jouer sur l'angle, supposé petit, entre la pompe et le signal. On se contentera néanmoins ici d'étudier la configuration colinéaire.

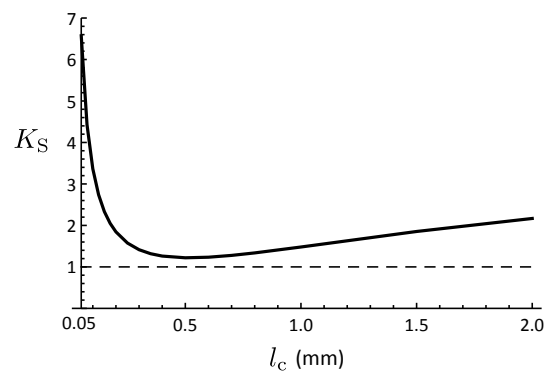
On peut quantifier le rang de cette transformation, c'est-à-dire le nombre de modes qui interviennent dans l'interaction, à travers le nombre de Schmidt [Eberly 06] :

$$K_S = \frac{1}{\sum_j \Lambda_j^4}. \quad (2.6.19)$$

Le calcul de  $K_S$  avec  $l_c = 0.5$  mm et  $\Delta\lambda = 6$  nm donne  $\simeq 1,24$ , qui est la valeur la plus basse qu'on puisse avoir avec toutes les longueurs possibles de cristal (à  $\Delta\lambda$  fixé), comme le montre la figure 2.6.4. En effet, changer la longueur fait que les largeurs de l'enveloppe de la pompe et de l'accord de phase ne sont plus les mêmes, de sorte que le produit des deux donne une distribution spectrale plutôt allongée sur une des diagonales, rendant difficile sa factorisation.



## 2 Optique non-linéaire du second ordre



**Figure 2.6.4:** Nombre de Schmidt pour la somme de fréquences en fonction de la longueur du cristal. On atteint le minimum à  $l_c = 0.5$  mm.

## 3 Description du champ quantique et outils pour l'optique quantique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Quantification du rayonnement libre</b>	<b>57</b>
3.1.1	Opérateurs d'annihilation et de création	58
3.1.2	Opérateurs de quadrature	59
3.1.3	Représentation de Schrödinger vs. Représentation de Heisenberg	59
<b>3.2</b>	<b>Les modes du champ</b>	<b>60</b>
3.2.1	Changement de base	61
3.2.2	Monomode vs. Multimode	62
<b>3.3</b>	<b>Représentation des états quantiques en variables continues</b>	<b>63</b>
3.3.1	Matrice densité et fonction de Wigner	63
3.3.2	États gaussiens et matrice de covariance	63
<b>3.4</b>	<b>Enveloppes lentement variables : représentation d'interaction</b>	<b>65</b>
3.4.1	Notion d'enveloppe lentement variable	65
3.4.2	Opérateurs quantiques lentement variables	65
<b>3.5</b>	<b>Relations d'entrée-sortie</b>	<b>66</b>
3.5.1	Transformations symplectiques	67
3.5.2	Forme générale d'une transformation symplectique en représentation d'interaction	68

---

Dans ce chapitre, nous allons introduire de façon très succincte le formalisme et les notations de l'optique quantique qui nous seront utiles dans cette thèse.

### 3.1 Quantification du rayonnement libre

La quantification du champ classique se fait par une procédure basée sur le formalisme hamiltonien et connue comme quantification canonique, introduite par Dirac en 1927 pour l'électrodynamique quantique. On développe d'abord le champ électromagnétique (radiation libre) sur une base de modes normaux de vibrations complètement découplés. La dynamique de chaque mode est décrite par deux variables qui correspondent aux parties réelle et imaginaire d'une variable normale à une constante multiplicative près. Ensuite, on montre que l'énergie totale du champ peut s'écrire

### 3 Description du champ quantique et outils pour l'optique quantique

sous la forme d'un hamiltonien qui est la somme des énergies associées à chaque mode normal, ce qui nous permet d'identifier des paires de variables canoniques conjuguées. Enfin, comme cet hamiltonien est formellement identique à celui qui décrit une assemblée d'oscillateurs harmoniques indépendants, on peut quantifier le champ et la notion de photon apparaît naturellement comme une excitation élémentaire d'un mode de ce champ, dont l'état fondamental est le vide. Cette procédure est développée en détail en [Grynberg 10] en représentation de Schrödinger. Nous en montrons ici les résultats pertinents et passons ensuite en représentation de Heisenberg.

#### 3.1.1 Opérateurs d'annihilation et de création

Le découplage des modes normaux nous permet d'écrire le signal analytique du champ électrique comme une somme discrète d'ondes planes indexées par  $\ell$ , indice qui définit la polarisation et les composantes du vecteur d'onde :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \alpha_{\ell}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.1.1)$$

Dans l'expression ci-dessus,  $\mathcal{E}_{\ell} = \sqrt{\hbar\omega_{\ell}/2\epsilon_0 L^3}$  (où  $L$  est la dimension de la boîte de quantification) pourra être interprété a posteriori comme l'amplitude du champ classique avec l'énergie équivalente à celle d'un photon unique dans le mode  $\ell$ ; le vecteur  $\epsilon_{\ell}$  est la polarisation du champ; et  $\alpha_{\ell}$  est la variable normale du mode  $\ell$ .

La quantification du champ consiste à associer à la variable normale  $\alpha_{\ell}(t)$  un opérateur indépendant du temps  $\hat{a}_{\ell}$  qui satisfait aux relations de commutation

$$\boxed{[\hat{a}_{\ell}, \hat{a}_{\ell'}^{\dagger}] = \delta_{\ell, \ell'} \quad \text{et} \quad [\hat{a}_{\ell}, \hat{a}_{\ell'}] = 0}. \quad (3.1.2)$$

$\hat{a}_{\ell}$  et  $\hat{a}_{\ell}^{\dagger}$  sont les *opérateurs d'annihilation et de création de photons* dans le mode  $\ell$ , parfois aussi appelés opérateurs bosoniques. Les états propres de l'opérateur d'annihilation sont appelés états cohérents. Ces états sont particulièrement présents dans le quotidien des expérimentateurs car ils correspondent à l'état d'un faisceau produit par un laser largement au-dessus du seuil. On note un état cohérent par  $|\alpha\rangle$ , où  $\alpha$  est sa valeur propre. Dans le mode  $\ell$ , on écrit alors

$$\hat{a}_{\ell} |\alpha\rangle_{\ell} = \alpha |\alpha\rangle_{\ell}. \quad (3.1.3)$$

L'opérateur nombre de photons est représenté par  $\hat{N}_{\ell} = \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell}$  et l'hamiltonien du champ libre s'écrit

$$\hat{H}_0 = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \left( \hat{N}_{\ell} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.1.4)$$

### 3.1.2 Opérateurs de quadrature

Les opérateurs bosoniques  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  ne sont pas hermitiens et ne sont donc pas des observables. On peut toutefois définir des opérateurs hermitiens de quadrature pour un mode donné

$$\begin{cases} \hat{x}_\ell &= \hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell \\ \hat{p}_\ell &= i(\hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell) \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Classiquement, les quadratures du champ correspondent, à facteur multiplicatif près, aux parties réelle et imaginaire du signal analytique.  $\hat{x}_\ell$  et  $\hat{p}_\ell$  sont des observables que l'on peut mesurer par exemple à l'aide d'une détection homodyne. Ils satisfont aux relations de commutation suivantes

$$[\hat{x}_\ell, \hat{p}_{\ell'}] = 2i\delta_{\ell\ell'} \quad \text{et} \quad [\hat{x}_\ell, \hat{x}_{\ell'}] = [\hat{p}_\ell, \hat{p}_{\ell'}] = 0 \quad (3.1.6)$$

d'où on peut déduire une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta x_\ell^2 \cdot \Delta p_\ell^2 \geq 1, \quad (3.1.7)$$

où  $\Delta x^2 = \langle (\delta\hat{x})^2 \rangle$  et  $\delta\hat{x} = \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$  représente les fluctuations de l'opérateur  $\hat{x}$ . Les états satisfaisant l'égalité dans l'équation ci-dessus avec  $\Delta x_\ell^2 = \Delta p_\ell^2 = 1$  sont dits "au bruit quantique standard" (ou *shot noise*, en anglais). Les *états cohérents*, en particulier le vide, sont des exemples d'états qui ont cette propriété. Les fluctuations du champ d'un état cohérent ne dépendent pas du nombre total moyen de photons  $N = \langle \hat{N} \rangle$ . En revanche, comme le nombre de photons d'un tel état suit une statistique poissonnienne, son écart-type vaut  $\sqrt{N}$ . Les fluctuations d'intensité sont donc croissantes avec le nombre total de photons pour un état cohérent, même si celles du champ restent constantes.

Plus généralement, on peut définir l'opérateur quadrature selon la direction fixée par l'angle  $\theta$  :

$$\hat{x}_\ell^\theta = e^{i\theta} \hat{a}_\ell^\dagger + e^{-i\theta} \hat{a}_\ell \quad (3.1.8)$$

et les relations (3.1.5) à (3.1.7) restent valables en remplaçant  $\hat{x}_\ell$  et  $\hat{p}_\ell$  par  $\hat{x}_\ell^\theta$  et  $\hat{x}_\ell^{\theta+\frac{\pi}{2}}$ .

### 3.1.3 Représentation de Schrödinger vs. Représentation de Heisenberg

En représentation de Schrödinger, l'opérateur champ électrique est défini en remplaçant la variable normale par l'opérateur d'annihilation dans l'équation (3.1.1). On a ainsi

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}) \\ &= i \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \left( e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_{\ell} - e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \right). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

### 3 Description du champ quantique et outils pour l'optique quantique

Il est souvent utile de passer en représentation de Heisenberg, où la dépendance temporelle est transférée des états aux opérateurs. À partir de l'équation de Heisenberg avec l'hamiltonien (3.1.4), on trouve l'expression de l'opérateur annihilation dans cette représentation

$$\hat{a}_{H,\ell}(t) = \hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t}. \quad (3.1.10)$$

La substitution de cette expression dans l'équation (3.1.9) nous donne alors le champ avec une dépendance temporelle (représentation de Heisenberg) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_H(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{E}}_H^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_H^{(-)}(\mathbf{r}, t) \\ &= i \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} \mathcal{E}_{\ell} \left( e^{i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\ell} t)} \hat{a}_{\ell} - e^{-i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\ell} t)} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \right). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Par la suite, on se placera en représentation de Heisenberg du champ et on oubliera l'indice H en l'absence d'ambiguïté.

## 3.2 Les modes du champ

La quantification canonique décrit le champ électrique comme une assemblée d'oscillateurs harmoniques dont les excitations élémentaires s'appellent les photons. En général, ces oscillateurs harmoniques correspondent à des ondes planes oscillant aux fréquences  $\omega_{\ell} = c \|\mathbf{k}_{\ell}\|$ . Rien ne nous empêche cependant d'effectuer la procédure de quantification du champ en le décomposant dans une autre base de modes (spatiaux, temporels ou spatio-temporels) qui soit plus adaptée à la réalité des expériences. Ici, on supposera que tous les modes du champ ont une polarisation linéaire et se propagent selon un axe  $z$ . On admettra également que tous les modes ont un spectre concentré autour d'une fréquence centrale moyenne  $\omega_0$ , avec une largeur spectrale  $\Delta\omega$  petite devant  $\omega_0$ , ce qui est raisonnable pour des impulsions produites par un laser femtoseconde de 100 fs de durée.

Soit  $\{v_i(\mathbf{r}, t)\}_i$  une base orthonormée de modes du champ, où  $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  représentant les coordonnées transverses. Si on appelle  $S$  la surface du détecteur et  $T$  la durée finie de la mesure, alors cette base vérifie les relations

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \int_S v_i^*(\mathbf{r}, t) v_j(\mathbf{r}, t) d\boldsymbol{\rho} dt = \delta_{ij}, \quad (3.2.1)$$

où  $t_0$  est quelconque car le temps de détection est très supérieur à l'intervalle entre deux impulsions successives.

Le signal analytique classique<sup>1</sup> s'écrit comme une combinaison linéaire des différents modes de la base

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i c_i v_i(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.2)$$

$$= i\mathcal{E}_0 \sum_i \alpha_i v_i(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.3)$$

où les  $\alpha_i$  sont les variables normales et  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\hbar\omega_0/2\epsilon_0 S c T}$  [Treprs 01]. L'opérateur quantique du champ s'écrit

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i\mathcal{E}_0 \sum_i \hat{a}_i v_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.2.4)$$

La définition des opérateurs de quadrature et les relations de commutation sont identiques à celles présentées dans la section précédente.

### 3.2.1 Changement de base

On peut écrire les champs classiques dans une autre base de modes  $\{w_i(\mathbf{r}, t)\}_i$ , qui est reliée à  $\{v_i(\mathbf{r}, t)\}_i$  par biais d'une transformation unitaire  $\mathbf{U}$  définie par

$$U_{ij} = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_S v_i^*(\mathbf{r}, t) w_j(\mathbf{r}, t) d\rho dt. \quad (3.2.5)$$

On a ainsi

$$w_j(\mathbf{r}, t) = \sum_i U_{ij} v_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.2.6)$$

Le mode  $w_i(\mathbf{r}, t)$  est alors associé à de nouveaux opérateurs bosoniques  $\hat{b}_i$  et  $\hat{b}_i^\dagger$ , et le champ quantique s'écrit

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i\mathcal{E}_0 \sum_i \hat{b}_i w_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.2.7)$$

Le lien entre les opérateurs de création des deux bases s'exprime aussi par biais de  $\mathbf{U}$

$$\hat{b}_j^\dagger = \sum_i U_{ij} \hat{a}_i^\dagger \quad (3.2.8)$$

et, comme  $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$ , les opérateurs d'annihilation se relient par :

$$\hat{b}_j = \sum_i U_{ij}^* \hat{a}_i = \sum_i (U^{-1})_{ji} \hat{a}_i. \quad (3.2.9)$$

1. Pour simplifier, on ne s'intéresse qu'à la valeur scalaire du champ.

### 3.2.2 Monomode vs. Multimode

Dans le cadre général de cette thèse, la notion d'état quantique monomode ou multimode est essentielle. Nous montrons ici quelques points importants liés à ce concept, traité plus en détails dans [Treps 05].

**Définition** Un état quantique pur  $|\psi\rangle$  est dit *monomode* s'il existe une base de modes  $\{v_0, v_1, \dots\}$  dans laquelle il s'écrit

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (3.2.10)$$

où  $|\phi\rangle$  est l'état du champ dans le premier mode de la base,  $v_0$ , et tous les autres modes sont dans l'état vide,  $|0\rangle$ . Un état quantique est dit *multimode* s'il n'est pas monomode.

On peut montrer qu'un état est monomode si et seulement si les actions, sur cet état, de tous les opérateurs d'annihilation  $\hat{a}_i$  d'une base donnée  $\{v_i\}_i$  donne des vecteurs qui sont colinéaires. Autrement dit, tous les  $\hat{a}_i |\psi\rangle$  sont parallèles<sup>2</sup>. Ainsi, une superposition quelconque d'états cohérents dans différents modes

$$|\psi\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_i\rangle \otimes \dots \quad (3.2.11)$$

est toujours monomode, car les vecteurs  $\hat{a}_i |\psi\rangle = \alpha_i |\psi\rangle$  sont colinéaires. En effet, pour écrire cet état sous la forme (3.2.10), il suffit de prendre n'importe quelle base dont le premier vecteur correspond au mode du champ moyen. L'état sera alors cohérent dans ce mode et vide dans tous les autres. Cet état est donc *intrinsèquement* monomode.

On appelle le degré  $n$  d'un faisceau multimode, le nombre minimal de modes nécessaires pour le décrire, c'est-à-dire le nombre de modes qui ne sont pas vides dans la décomposition modale de l'état. Toute base qui autorise cette écriture en nombre minimal de modes est appelée une base minimale de l'état. Pour un état  $|\psi\rangle$  de degré  $n$ , on peut toujours trouver une base minimale de l'état où la valeur moyenne du champ est non-nulle uniquement dans le premier mode (le mode du champ moyen, par définition). En guise d'exemple, l'état (multimode de degré 2)

$$|\psi\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes |0_{\text{sqz}}\rangle \otimes |0, \dots, 0, \dots\rangle, \quad (3.2.12)$$

où  $|0_{\text{sqz}}\rangle$  représente un état vide comprimé, est écrit dans une base minimale où le premier mode correspond au mode du champ moyen.

2. La démonstration de ce résultat se trouve dans [Treps 05], où une interprétation concrète en est également donnée.

### 3.3 Représentation des états quantiques en variables continues

#### 3.3.1 Matrice densité et fonction de Wigner

Dans certaines situations physiques, on a affaire à des systèmes qui sont dans états décrits par un mélange statistique d'états purs,  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$ , etc. Ces mélanges statistiques sont appelés des *états mixtes*. Pour les décrire, on utilise souvent le formalisme de la matrice densité, définie par

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (3.3.1)$$

où les  $p_i$  représentent les poids statistiques des différents états purs intervenant dans l'état mixte. Ces poids vérifient  $\sum_i p_i = 1$  et on peut définir la pureté de l'état par

$$P = \text{Tr} [\hat{\rho}^2]. \quad (3.3.2)$$

avec  $0 < P < 1$  pour un état mixte et  $P = 1$  pour un état pur.

La matrice densité est un outil assez général mais s'applique difficilement à l'optique quantique en variables continues car elle est difficile à manipuler et contient notamment une infinité d'éléments. À sa place, on utilise souvent la fonction de Wigner, qui est une fonction réelle dans l'espace des phases et dépend, dans le cas d'un champ décomposé sur une base de  $N$  modes, des  $2N$  quadratures du champ. Elle a pour expression [Fabre 08]

$$\begin{aligned} W(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int \text{Tr} \left[ \hat{\rho} e^{-i \sum_i (x_i x'_i + p_i p'_i)} \right] e^{i \sum_i (x_i x'_i + p_i p'_i)} dx'_1 dp'_1 \dots dx'_N dp'_N \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

La fonction de Wigner est normalisée pour que l'intégration sur toutes les quadratures  $(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N)$  donne 1. Si on intègre sur toutes les quadratures sauf une, le résultat est la distribution de probabilité de cette quadrature-là. Même si ces propriétés rapprochent la fonction de Wigner d'une distribution de probabilité de mesure sur les quadratures, elle ne l'est pas car elle peut notamment prendre des valeurs négatives. On dit alors que la fonction Wigner est une *distribution de quasi-probabilité*.

#### 3.3.2 États gaussiens et matrice de covariance

Les états gaussiens sont, par définition, ceux dont la fonction de Wigner est gaussienne. Ils sont déterminés de manière univoque par les deux premiers moments des observables de quadrature. Le premier correspond aux valeurs moyennes des quadratures du champ pour les différents modes considérés. Le second correspond



### 3 Description du champ quantique et outils pour l'optique quantique

aux valeurs moyennes des produits des fluctuations des quadratures, par exemple,  $\langle(\delta\hat{x})^2\rangle$ ,  $\langle(\delta\hat{p})^2\rangle$  et  $\langle\delta\hat{x}\delta\hat{p}\rangle$ .

Les fluctuations de quadratures d'un état gaussien décrit dans une base de  $N$  modes sont souvent représentées par une matrice de covariance  $\mathbf{V}$ , de taille  $2N \times 2N$ . Soit  $\mathbf{q} = (x_1, p_1, \dots, x_N, p_N)^T$  le vecteur des quadratures d'un tel état gaussien. Alors les éléments de sa matrice de covariance sont définis par

$$V_{ij} \text{ ou } V_{q_i, q_j} = \frac{\langle\delta\hat{q}_i\delta\hat{q}_j\rangle + \langle\delta\hat{q}_j\delta\hat{q}_i\rangle}{2} \quad (3.3.4)$$

où  $\delta\hat{q}_i = \hat{q}_i - \langle\hat{q}_i\rangle$ . La matrice de covariance est donc symétrique. Les éléments diagonaux sont les variances  $\langle(\delta\hat{x}_1)^2\rangle$ ,  $\langle(\delta\hat{p}_1)^2\rangle$ ,  $\langle(\delta\hat{x}_2)^2\rangle$ , ... et les éléments non-diagonaux contiennent les informations sur corrélations entre les quadratures. Ces corrélations peuvent être d'origine classique ou quantique, et parmi les états corrélés, on distingue les états intriqués, qui ne peuvent être décrits comme une superposition statistique de produits tensoriels.

L'inégalité de Heisenberg (3.1.7) impose des contraintes sur la matrice de covariance, à savoir [Simon 00, Werner 01]

$$\mathbf{V} + i\mathbf{\Omega} \geq 0, \quad (3.3.5)$$

où<sup>3</sup>

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & & & 0 \\ & \mathbf{J} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.6)$$

L'équation matricielle (3.3.5) signifie que toutes les valeurs propres de  $\mathbf{V} + i\mathbf{\Omega}$  sont non-négatives (et implique, en particulier, que  $\mathbf{V} > 0$ ). Cette équation s'applique non seulement à tous les états gaussiens, mais aussi, en général, à tous les états physiques.

La pureté d'un état peut se déduire [Adesso 04] à partir de sa matrice de covariance par l'expression :

$$P = \frac{1}{\sqrt{\det\mathbf{V}}}. \quad (3.3.7)$$

On peut citer deux exemples importants dans la classe des états gaussiens :

**États cohérents** Comme nous l'avons déjà vu dans ce chapitre, les états cohérents sont les états propres de l'opérateur annihilation. Les variances des quadratures sont

3. Puisque  $\mathbf{V}$  est symétrique, on peut remplacer le signe positif dans (3.3.5) par un signe négatif sans changer la contrainte. On note également que le facteur devant  $i\mathbf{\Omega}$  (dans notre cas, 1) change en fonction de la normalisation du bruit.

### 3.4 Enveloppes lentement variables : représentation d'interaction

toutes égales à l'unité, et les quadratures ne sont pas corrélées entre elles. La matrice de covariance d'un état cohérent est donc la matrice unité. Un cas particulier en est l'état vide, dont les valeurs moyennes des quadratures sont toutes nulles.

**États comprimés** Pour un mode donné, la relation de Heisenberg impose  $\Delta x_i^2 \Delta p_i^2 \geq 1$ . Si la quadrature  $\hat{x}_i$  (resp.  $\hat{p}_i$ ) a une variance inférieure à 1 et que les covariances sont nulles, alors on parle d'état comprimé suivant la quadrature  $\hat{x}_i$  (resp.  $\hat{p}_i$ ). Si l'état est pur, l'inégalité de Heisenberg devient une égalité. Un état comprimé de champ moyen nul est appelé *vide comprimé*. Il est important de préciser que le vide comprimé comporte tout de même des photons, d'autant plus nombreux que l'état est comprimé.

## 3.4 Enveloppes lentement variables : représentation d'interaction

### 3.4.1 Notion d'enveloppe lentement variable

Considérons un train d'impulsions (peigne de fréquences) tel que représenté dans la figure 1.1.1 du chapitre 1. Comme nous avons vu précédemment, le champ électrique a une porteuse à la pulsation  $\omega_0$  qui est enveloppée par une fonction qui donne la forme des impulsions. Si on se place à une position  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  bien définie et que l'on ne s'intéresse qu'à la dépendance temporelle du champ *classique*, celui-ci s'écrit, à une phase ajustable près,

$$\begin{aligned} E(t) &= E^{(+)}(t) + E^{(-)}(t) \\ &= A(t)e^{-i\omega_0 t} + A^*(t)e^{i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

où  $A(t)$  est appelé l'*enveloppe lentement variable* du champ, car son spectre garde la forme de celui de  $E^{(+)}$  mais est centré à la fréquence nulle. En effet, la transformée de Fourier de l'équation (3.4.1) donne

$$\begin{aligned} E(\omega) &= E^{(+)}(\omega) + E^{(-)}(-\omega) \\ &= A(\Omega) + A^*(-\Omega), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

où  $\Omega = \omega - \omega_0$  représente les (basses) fréquences de variation de  $A$ .

### 3.4.2 Opérateurs quantiques lentement variables

Une fois introduite la notion classique d'enveloppe lentement variable, le but à présent est de définir un opérateur quantique lentement variable en lien avec le signal

### 3 Description du champ quantique et outils pour l'optique quantique

analytique (3.2.4), ce qui nécessite une procédure plus propre prenant en compte la dépendance transverse du champ et le processus de détection.

On se place alors, pour simplifier, dans le cas monomode transverse, c'est-à-dire que la dépendance en  $\boldsymbol{\rho}$  de tous les modes  $v_i(\mathbf{r}, t)$  pertinents est la même (par exemple, le mode TEM<sub>00</sub>), les autres modes étant vides :

$$v_i(\mathbf{r}, t) = u_0(\boldsymbol{\rho})v'_i(z, t). \quad (3.4.3)$$

Le signal analytique (3.2.4) peut alors être redéfini en omettant la dépendance transverse :

$$\hat{E}^{(+)}(z, t) = i\mathcal{E}_0 \sum_i \hat{a}_i v'_i(z, t) \quad (3.4.4)$$

car elle n'intervient pas dans la définition des opérateurs liés à la détection, où on intègre sur  $\boldsymbol{\rho}$  le produit  $\hat{E}^{(+)}\hat{E}^{(-)}$ , faisant apparaître l'intégrale  $\int_S u_0(\boldsymbol{\rho})u_0^*(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}$ , qui vaut 1.

Si on se place à une position  $z$  fixée, le champ analytique dépend uniquement du temps :  $\hat{E}^{(+)}(z, t) \rightarrow \hat{E}^{(+)}(t)$ . On lui associe ainsi, comme dans [Kolobov 99], une expression comparable à (3.4.1) :

$$\boxed{\hat{E}^{(+)}(t) = i\mathcal{E}_0 \hat{a}(t)e^{-i\omega_0 t}}, \quad (3.4.5)$$

où, cette fois-ci,  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\hbar\omega_0/2\epsilon_0 S c}$ , le facteur  $1/\sqrt{T}$  étant inclus dans  $\hat{a}(t)$ . La formule (3.4.5) définit les opérateurs quantiques lentement variables  $\hat{a}(t)$  et  $\hat{a}^\dagger(t)$ . On parle aussi d'opérateurs bosoniques en *représentation d'interaction*. Sous l'hypothèse d'un spectre pas trop large, on peut faire l'approximation suivante :

$$\boxed{[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t')] = \delta(t - t')} \quad \text{et} \quad \boxed{[\hat{a}(t), \hat{a}(t')] = 0}. \quad (3.4.6)$$

On peut aussi écrire l'opérateur du champ électrique positif dans le domaine fréquentiel :

$$\boxed{\hat{E}^{(+)}(\omega) = i\mathcal{E}_0 \hat{a}(\Omega)}, \quad \Omega = \omega - \omega_0, \quad (3.4.7)$$

où  $\hat{a}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(t)e^{i\Omega t} dt$ . Les relations de commutation (approximées) s'écrivent alors

$$\boxed{[\hat{a}(\Omega), \hat{a}^\dagger(\Omega')] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega')} \quad \text{et} \quad \boxed{[\hat{a}(\Omega), \hat{a}(\Omega')] = 0}. \quad (3.4.8)$$

## 3.5 Relations d'entrée-sortie

Une expérience est en général composée de plusieurs éléments optiques linéaires et non-linéaires qui viennent après la source et qui génèrent des faisceaux en sortie qu'on pourra éventuellement détecter pour extraire des informations pertinentes. Si

on décompose le champ du faisceau en sortie sur une base de modes indexés  $i$ , en lien avec (3.2.4),

$$\hat{E}_{\text{out}}^{(+)} = \sum_i \hat{E}_{i,\text{out}}^{(+)}, \quad (3.5.1)$$

alors le champ  $\hat{E}_{i,\text{out}}^{(+)}$  sur chaque mode en sortie est fonction de tous les champs sur chaque mode en entrée et de leurs conjugués hermitiens,  $\hat{E}_{1,\text{in}}^{(+)}$ ,  $\hat{E}_{1,\text{in}}^{(-)}$ ,  $\hat{E}_{2,\text{in}}^{(+)}$ ,  $\hat{E}_{2,\text{in}}^{(-)}$ , etc... Cette relation d'entrée-sortie peut prendre de nombreuses formes suivant le schéma expérimental, mais elle doit obéir à des contraintes pour que les champs en sortie soient effectivement de vrais champs physiques. Autrement dit, elle doit conserver les relations de commutation. Si c'est le cas, on dit que la relation d'entrée-sortie est *canonique*. Le même raisonnement s'applique aux opérateurs d'annihilation et de création :  $\hat{a}_{i,\text{out}}$  sera en général une fonction de  $\hat{a}_{1,\text{in}}$ ,  $\hat{a}_{1,\text{in}}^\dagger$ ,  $\hat{a}_{2,\text{in}}$ ,  $\hat{a}_{2,\text{in}}^\dagger$ , etc...

### 3.5.1 Transformations symplectiques

Le cas le plus simple de transformation canonique est la propagation libre d'un point à l'autre dans l'espace, qui ne fait que rajouter une phase à l'opérateur d'un mode donné :

$$\hat{a}_{i,\text{out}} = e^{i\phi} \hat{a}_{i,\text{in}}. \quad (3.5.2)$$

Un exemple de transformation canonique qui mélange deux modes distincts 1 et 2 du champ est celui d'une lame séparatrice. En effet, si on appelle  $r$  et  $t$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude ( $r^2 + t^2 = 1$ ) de la lame, on a, sur les deux voies de sortie,

$$\hat{a}_{1,\text{out}} = t\hat{a}_{1,\text{in}} + r\hat{a}_{2,\text{in}} \quad (3.5.3)$$

$$\hat{a}_{2,\text{out}} = -r\hat{a}_{1,\text{in}} + t\hat{a}_{2,\text{in}}. \quad (3.5.4)$$

Comme dernier exemple, prenons le mélange à trois ondes, qui est à la rigueur un phénomène non-linéaire, mais qui donne des relations d'entrée-sortie linéaires si on suppose qu'un des champs (la pompe) est suffisamment intense pour que ses fluctuations quantiques n'interviennent pas dans les équations d'évolution des opérateurs. On peut alors parler de mélange à deux ondes. Les deux modes restants, dont la somme des fréquences optiques donne la fréquence de la pompe,  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ , sont couplés par interaction paramétrique dans un cristal non-linéaire à  $\chi^{(2)}$  en présence de la pompe. Comme résultat, on a les relations

$$\hat{a}_{1,\text{out}} = \hat{a}_{1,\text{in}} \cosh \gamma + \hat{a}_{2,\text{in}}^\dagger \sinh \gamma \quad (3.5.5)$$

$$\hat{a}_{2,\text{out}} = \hat{a}_{1,\text{in}}^\dagger \sinh \gamma + \hat{a}_{2,\text{in}} \cosh \gamma, \quad (3.5.6)$$

où  $\gamma$  est un paramètre proportionnel à  $\chi^{(2)}$ .



**Figure 3.5.1:** Système optique linéaire transformant les opérateurs d'annihilation et création : les opérateurs en sortie s'écrivent linéairement en termes des opérateurs initiaux.

Ce qui distingue le mélange à deux ondes des deux premiers exemples est le couplage entre les opérateurs de création et d'annihilation. Et ce qui est commun à tous les trois cas est le caractère linéaire des transformations. Ces transformations appartiennent alors au *groupe symplectique* [Dutta 95], qui rassemble toutes les transformations canoniques qui sont linéaires. On peut montrer que toute transformation symplectique peut être écrite comme une succession de transformations des trois types citées ci-dessus : propagation libre, lame séparatrice et mélange à deux ondes [Simon 88]. Ce résultat sera mis en évidence lorsqu'on sera en train d'établir les relations d'entrée-sortie du SPOPO, dans le chapitre 4.

### 3.5.2 Forme générale d'une transformation symplectique en représentation d'interaction

L'analyse du cas du SPOPO dans le chapitre suivant sera menée de manière complètement interchangeable entre temps et fréquence. Nous montrons ici une façon assez générale d'écrire une transformation symplectique qui agit sur des opérateurs bosoniques lentement variables, qu'ils soient écrits dans le domaine temporel,  $\hat{a}(t)$ , ou fréquentiel,  $\hat{a}(\Omega)$ .

Considérons un système optique linéaire et sans pertes. L'interaction du champ avec ce système peut être décrite par une transformation linéaire reliant les opérateurs bosoniques en sortie,  $\hat{a}_{\text{out}}$  et  $\hat{a}_{\text{out}}^\dagger$ , à ceux en entrée,  $\hat{a}_{\text{in}}$  et  $\hat{a}_{\text{in}}^\dagger$  (figure 3.5.1). La relation la plus générale qu'on puisse avoir entre ces opérateurs s'exprime par l'équation ci-dessous (et son hermitienne conjuguée) :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{out}}(t) &= \mathcal{C}\hat{a}_{\text{in}}(t) + \mathcal{S}\hat{a}_{\text{in}}^\dagger(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} C(t, t')\hat{a}_{\text{in}}(t')dt' + \int_{\mathbb{R}} S(t, t')\hat{a}_{\text{in}}^\dagger(t')dt' \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

où  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}$  sont des formes intégrales et les fonctions  $C(t, t')$  et  $S(t, t')$  sont leurs noyaux, qui peuvent aussi s'écrire dans le domaine spectrale en utilisant la transformée de Fourier à deux dimensions :

$$C(\Omega, \Omega') = \int_{\mathbb{R}^2} C(t, t') e^{-i(\Omega t + \Omega' t')} dt dt', \quad (3.5.8)$$

$$S(\Omega, \Omega') = \int_{\mathbb{R}^2} S(t, t') e^{-i(\Omega t + \Omega' t')} dt dt'. \quad (3.5.9)$$

Pour l'opérateur annihilation dans le domaine des fréquences on a une relation similaire

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\text{out}}(\Omega) &= \mathcal{C}\hat{a}_{\text{in}}(\Omega) + \mathcal{S}\hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\Omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} C(\Omega, -\Omega') \hat{a}_{\text{in}}(\Omega') \frac{d\Omega'}{2\pi} + \int_{\mathbb{R}} S(\Omega, \Omega') \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\Omega') \frac{d\Omega'}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

où  $\hat{a}_{\text{out}}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \hat{a}_{\text{out}}(t) e^{i\Omega t} dt$ . On note la présence des dénominateurs en  $2\pi$  et du signe négatif dans  $C(\Omega, -\Omega')$ . L'action des transformations  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}$  n'est donc pas définie de la même manière (vis-à-vis de ses noyaux) suivant le domaine où on se place (temporel ou fréquentiel).

On peut ainsi, de manière très compacte, écrire l'équation matricielle suivante, valable en temps et en fréquence<sup>4</sup> :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{out}} \\ \hat{a}_{\text{out}}^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in}} \\ \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^* & \mathcal{C}^* \end{pmatrix}.} \quad (3.5.11)$$

Comme  $\mathcal{R}$  est une transformation symplectique, elle doit préserver les relations de commutation. Une condition nécessaire et suffisante en est

$$\mathcal{R}^{-1} = \sigma \mathcal{R}^\dagger \sigma \quad \text{avec } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.12)$$

Dans le chapitre qui suit, on utilise ce formalisme pour décrire les relations d'entrée-sortie d'un SPOPO femtoseconde et en déduire ses propriétés quantiques.

4. Par convention, les caractères en gras désigneront des matrices ou des vecteurs, et ceux en police manuscrite seront utilisés pour les formes intégrales.  $\mathcal{R}$ , par exemple, est en gras et manuscrit, car il s'agit d'une matrice de formes intégrales.



## 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)

### Sommaire

---

<b>4.1 Définitions</b> . . . . .	<b>72</b>
4.1.1 OPO . . . . .	72
4.1.2 SPOPO . . . . .	72
<b>4.2 Relations d'entrée-sortie pour un OPO</b> . . . . .	<b>73</b>
4.2.1 Le miroir de couplage . . . . .	74
4.2.2 La propagation dans la cavité . . . . .	75
4.2.3 Le gain paramétrique . . . . .	77
<b>4.3 Peignes de fréquences : une base naturelle du SPOPO</b> . . . . .	<b>80</b>
4.3.1 Système quasi-périodique . . . . .	80
4.3.2 Problème aux valeurs propres de l'interaction paramétrique	80
4.3.3 Forme des fonctions propres . . . . .	83
<b>4.4 Transformation dans la base des supermodes</b> . . . . .	<b>84</b>
4.4.1 Réécriture de la transformation dans la base des supermodes	84
4.4.2 Seuil d'oscillation . . . . .	87
<b>4.5 Propriétés quantiques des peignes de fréquences</b> . . . . .	<b>88</b>
4.5.1 Cas dégénéré ( $\theta = 0$ ) . . . . .	88
4.5.2 Cas non-dégénéré ( $\theta \neq 0$ ) . . . . .	90
<b>4.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>92</b>

---

Les trois chapitres précédents fournissent les bases nécessaires pour l'analyse des propriétés classiques et quantiques d'un SPOPO (*Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator*). Les propriétés quantiques d'un SPOPO ont déjà été étudiées et établies grâce à une approche temporelle [Averchenko 10] et également avec une approche fréquentielle [Patera 09]. Nous proposons dans ce chapitre l'utilisation d'un formalisme symplectique qui permet le traitement à la fois en temps et en fréquence [Jiang 12].

Nous allons établir les relations d'entrée-sortie des opérateurs quantiques du champ à travers un SPOPO en dessous du seuil dans une base de peignes de fréquences (section 4.4) et en déduire les propriétés quantiques des faisceaux générés (section et 4.4).



## 4.1 Définitions

### 4.1.1 OPO

Un OPO (Oscillateur Paramétrique Optique) est une source lumineuse similaire à un laser. Comme celui-ci, un OPO est composé d'un résonateur optique et d'un milieu à gain. La différence est que le fonctionnement de ce dispositif est basé non pas sur l'émission stimulée, mais sur l'amplification paramétrique dans un cristal non-linéaire. Les premières démonstrations expérimentales de l'oscillation paramétrique optique ont été réalisées en 1965, aux Bell Telephone Laboratories [Giordmaine 65] et à Moscou [Akhmanov 66].

Dans le cas monochromatique, un OPO est pompé par un faisceau de pulsation  $\omega_p$  appelé *pompe*, qui génère par conversion paramétrique descendante deux faisceaux, appelés *signal* et *complémentaire*, de pulsations  $\omega_s$  et  $\omega_c$ , telles que  $\omega_p = \omega_s + \omega_c$ . Si les modes des faisceaux signal et complémentaire sont identiques, alors on parle d'OPO *dégénéré*. Un des intérêts d'un OPO est le fait que les longueurs d'onde signal et complémentaire (déterminées par les conditions d'accord de phase) peuvent être ajustées sur une large bande spectrale. Ainsi, avec un OPO, il est possible d'atteindre des longueurs d'onde qui sont difficiles (voire impossibles) à atteindre avec un laser. Les OPOs sont donc des instruments de grande valeur pour la spectroscopie. Une application militaire courante consiste à utiliser la lumière large bande (3-5  $\mu\text{m}$ ) des OPOs pour éblouir des missiles sensibles à la chaleur lors des attaques contre des avions.

Comme les lasers, les OPOs possèdent un seuil, qui correspond à la puissance de pompe nécessaire pour l'émission de faisceaux brillants dans les modes signal et complémentaire. Ces dispositifs sont très utiles dans le domaine de l'optique quantique : ils peuvent produire des états quantiques de la lumière, que ce soit en dessous ou au-dessus du seuil, en configuration dégénérée ou non-dégénérée. On peut, par exemple, créer des faisceaux jumeaux avec un OPO non-dégénéré au-dessus du seuil, ou des états cohérents comprimés avec un OPO dégénéré sous le seuil. Ces états comprimés peuvent être du vide comprimé (si on n'envoie que la pompe dans la cavité) ou des faisceaux brillants, auquel cas il faut également injecter dans la cavité un faisceau dans le mode signal.

### 4.1.2 SPOPO

Un SPOPO est un OPO pompé par un train d'impulsions ultracourtes dont le taux de répétition est (en général) égal à l'intervalle spectral libre de la cavité<sup>1</sup>. Dans le domaine temporel, cela signifie que le temps d'un tour de cavité correspond à l'inter-

---

1. Dans des cas plus rares, l'ISL de la cavité est un multiple ou une fraction du taux de répétition de la pompe.

valle entre deux impulsions consécutives. Un SPOPO est ainsi composé par une cavité synchrone (voir chapitre 1), une pompe de large bande spectrale et, bien évidemment, un cristal non-linéaire  $\chi^{(2)}$ . Les spectres associés aux modes pompe, signal et complémentaire ne sont plus monochromatiques, exactement comme pour les phénomènes non-linéaires traités dans le chapitre 2. En effet, les modes pertinents sont des peignes de fréquences et on note  $\omega_i$ ,  $i = p, s, c$ , les fréquences centrales correspondantes. Dans le domaine temporel, ce sont des trains d'impulsions de fréquences porteuses  $\omega_i$ . Un avantage des SPOPOs par rapport aux OPOs monochromatiques sont les relativement bas seuils, qui peuvent atteindre facilement les dizaines de milliwatts (même si la pompe n'est pas résonnante) dû aux hautes puissances crêtes des impulsions.

Les premiers SPOPOs, fonctionnant en régime picoseconde, ont été conçus dans les années 70 [Burneika 72, Tanaka 78], et les premières expériences en régime femtoseconde ont été construites à la fin des années 80 [Edelstein 89, Mak 92]. Aujourd'hui les SPOPOs sont disponibles commercialement et ont pour application principale la génération d'impulsions ultracourtes à longueurs d'onde accordables.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à la création d'états quantiques multimodes de la lumière à partir d'un **SPOPO femtoseconde dégénéré en dessous du seuil**. On utilise ici le mot "dégénéré" dans le sens présenté en section 2.5, où un peigne pompe génère, par conversion paramétrique, un peigne signal confondu avec le complémentaire. Nous établirons dans la suite les relations d'entrée-sortie de ce dispositif.

## 4.2 Relations d'entrée-sortie pour un OPO en anneau, dégénéré, sous le seuil et sans pertes

Prenons un OPO avec une cavité en anneau et un cristal  $\chi^{(2)}$  type I en configuration dégénérée, et admettons que la pompe n'est pas résonnante dans la cavité. M1 est le miroir d'entrée et D représente l'ensemble de composants utilisés pour compenser la dispersion intracavité (figure 4.2.1). On ignorera la dépendance spatiale transverse par souci de simplicité. Dans l'espace libre en dehors de la cavité et dans l'approximation des enveloppes lentement variables, les composantes à fréquences positives des champs quantiques peuvent s'écrire, comme dans (3.4.5),

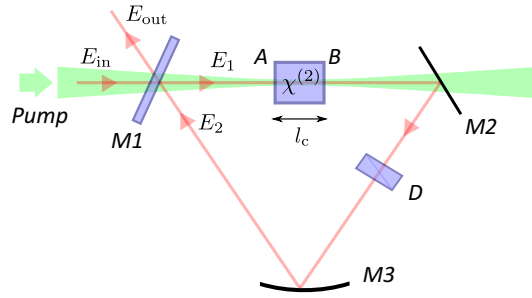
$$\hat{E}_{\text{in}}^{(+)}(t) = i\mathcal{E}_0\hat{a}_{\text{in}}(t)e^{-i\omega_0 t} \quad (4.2.1)$$

$$\hat{E}_{\text{out}}^{(+)}(t) = i\mathcal{E}_0\hat{a}_{\text{out}}(t)e^{-i\omega_0 t} \quad (4.2.2)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de la porteuse et les opérateurs (lentement variables) d'annihilation  $\hat{a}_{\text{in}}$  et  $\hat{a}_{\text{out}}$  doivent satisfaire aux relations de commutation (3.4.6).

Pour simplifier le modèle, on admettra que les pertes sont négligeables. Alors, comme la déplétion de pompe est négligeable en dessous du seuil, l'OPO peut être

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchroné (SPOPO)



**Figure 4.2.1:** Vue schématisé d'un OPO avec cavité en anneau. M1 fait office de miroir d'entrée et de sortie et D représente la compensation de dispersion intracavité.

considéré un système linéaire<sup>2</sup> sans pertes, où le champ de sortie ne dépend explicitement que du champ d'entrée. Dans ce cas, les équations linéaires les plus générales reliant ces deux champs sont (3.5.7) et (3.5.10), soit

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{out}} \\ \hat{a}_{\text{out}}^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in}} \\ \hat{a}_{\text{in}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (4.2.3)$$

où, comme dans (3.5.11),  $\mathcal{R}$  est une matrice  $2 \times 2$  de formes intégrales qui décrit une transformation symplectique.

Le problème qui se pose maintenant est de trouver ce que vaut  $\mathcal{R}$ . Puisque le système est linéaire et sans pertes, l'expression de  $\mathcal{R}$  peut être calculée à l'aide des relations entre les champs classiques [Walls 08]. Cela signifie que l'on pourra remplacer les opérateurs quantiques par les grandeurs classiques correspondantes pour déduire le contenu de la matrice de la transformation, ce qui simplifie la notation. Une fois la forme de  $\mathcal{R}$  trouvée, on calculera ses vecteurs propres et valeurs propres et on utilisera l'équation (4.2.3) pour analyser les propriétés quantiques du système.

Nous allons étudier dans la suite de cette section comment  $\mathcal{R}$  dépend des trois éléments indispensables de la cavité, à savoir, le **miroir de couplage**, la **propagation libre** et l'**interaction paramétrique**, qui constituent les briques fondamentales des transformations symplectiques.

##### 4.2.1 Le miroir de couplage

On exprime un tour complet de cavité par la transformation  $\mathcal{T}_{\text{RT}}$ , qui relie les champs intracavité avant et après le miroir de couplage M1, i.e.

2. Comme déjà évoqué en section (3.5.1), cela n'est pas contradictoire avec le fait que le processus d'oscillation paramétrique est essentiellement un phénomène d'optique non-linéaire. En effet, même si la polarisation du milieu va avec le carré du champ, les équations de propagation du champ signal sont toutes linéaires dans l'approximation de non-déplétion de pompe (voir aussi chapitre 2).

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_2^* \end{pmatrix} = \mathcal{T}_{\text{RT}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1^* \end{pmatrix}, \quad (4.2.4)$$

où  $A_j(t) = E_j^{(+)}(t)e^{i\omega_0 t}$ ,  $j = 1, 2$ , représentent les enveloppes temporelles lentement variables **classiques** du champ.

Au niveau du miroir M1, la condition de couplage sans perte des champs internes avec les champs externes s'écrit

$$\begin{aligned} A_1 &= tA_{\text{in}} + rA_2 \\ A_{\text{out}} &= -rA_{\text{in}} + tA_2 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

où  $r$  et  $t$  sont les coefficients de réflexion et transmission en amplitude ( $r^2 + t^2 = 1$ ), qu'on admet réels et constants sur la bande spectrale considérée.

Dans le but de trouver la relation entre  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{T}_{\text{RT}}$ ,  $r$  et  $t$  on peut regrouper (4.2.3), (4.2.4) et (4.2.5) dans un système d'équations reliant  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_{\text{in}}$  et  $\mathbf{A}_{\text{out}}$  (où on définit les vecteurs  $\mathbf{A}_i \equiv (A_i, A_i^*)^T$ ):

$$\mathbf{A}_{\text{out}} = \mathcal{R}\mathbf{A}_{\text{in}} \quad (4.2.6)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathcal{T}_{\text{RT}}\mathbf{A}_1 \quad (4.2.7)$$

$$\mathbf{A}_1 = t\mathbf{A}_{\text{in}} + r\mathbf{A}_2 \quad (4.2.8)$$

$$\mathbf{A}_{\text{out}} = -r\mathbf{A}_{\text{in}} + t\mathbf{A}_2 \quad (4.2.9)$$

En éliminant les champs de ses équations, on trouve  $\mathcal{R} = (\mathcal{T}_{\text{RT}} - r\mathbf{I})(\mathbf{I} - r\mathcal{T}_{\text{RT}})^{-1}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité, soit

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\mathcal{T}_{\text{RT}} - r}{1 - r\mathcal{T}_{\text{RT}}} = \frac{1}{r} \left( \frac{t^2}{1 - r\mathcal{T}_{\text{RT}}} - 1 \right)}. \quad (4.2.10)$$

Cette formule peut être considérée comme une généralisation de travaux précédents (voir, par exemple, l'équation (5.13b) de [Reynaud 92]). On note qu'elle est indépendante des conditions de pompage. Les informations relatives à ce qui se passe dans le cristal, ainsi qu'à la propagation libre dans la cavité, sont comprises dans la transformation  $\mathcal{T}_{\text{RT}}$ , qui est analysée dans la suite.

#### 4.2.2 La propagation dans la cavité

Si on appelle  $\mathcal{S}_{\text{BA}}$  la transformation relative au cristal et  $\mathcal{U}_{\text{A1}}$  et  $\mathcal{U}_{\text{1B}}$  les transformations de M1 au point A et de B à M1 (voir figure 4.2.1), on peut écrire

$$\mathcal{T}_{\text{RT}} = \mathcal{U}_{\text{1B}}\mathcal{S}_{\text{BA}}\mathcal{U}_{\text{A1}}.$$

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)

On montrera dans la section 4.2.3 suivante que  $\mathcal{S}_{BA}$  peut être exprimée comme le produit de deux matrices, l'une correspondant à la propagation à travers le cristal dans l'absence de pompe et l'autre liée au gain paramétrique :  $\mathcal{S}_{BA} = \mathcal{U}_{BA}\mathcal{G}_0$ . Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{T}_{RT} = \mathcal{U}_{1B}\mathcal{U}_{BA}\mathcal{G}_0\mathcal{U}_{A1} = \mathcal{U}_{RT}\mathcal{G}_{RT}} \quad (4.2.11)$$

où  $\mathcal{U}_{RT} = \mathcal{U}_{1B}\mathcal{U}_{BA}\mathcal{U}_{A1}$  correspond à un tour dans la cavité sans pompe et  $\mathcal{G}_{RT} = \mathcal{U}_{A1}^\dagger\mathcal{G}_0\mathcal{U}_{A1}$  est une transformation liée au gain paramétrique par tour de cavité. Dans la suite, on remplacera  $\mathcal{G}_{RT}$  par  $\mathcal{G}_0$ , ce qui revient à effectuer la transformation unitaire  $A \rightarrow \mathcal{U}_{A1}A$  sur les enveloppes lentement variables  $A_{in}$  et  $A_{out}$  simultanément. Il convient de souligner que cette transformation n'affecte pas le lien entre  $A_{in}$  et  $A_{out}$ . Ainsi, à partir de (4.2.11), on peut exprimer l'équation (4.2.10) sous la forme

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\mathcal{U}_{RT}\mathcal{G}_0 - r}{1 - r\mathcal{U}_{RT}\mathcal{G}_0} = \frac{1}{r} \left( \frac{t^2}{1 - r\mathcal{U}_{RT}\mathcal{G}_0} - 1 \right)}, \quad (4.2.12)$$

$\mathcal{U}_{RT}$  décrit une propagation linéaire dispersive et sans pertes qui transforme l'enveloppe initiale  $A_1(\Omega)$  en l'enveloppe finale  $A_1(\Omega)e^{i\phi_{RT}(\Omega)}$ , où  $\phi_{RT}(\Omega)$  est la phase spectrale accumulée par la fréquence optique  $\omega = \omega_0 + \Omega$  sur un tour de cavité. C'est une transformation unitaire et diagonale :

$$\mathcal{U}_{RT} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{RT} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{RT}^* \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

de noyau fréquentiel

$$\mathbf{U}_{RT}(\Omega, -\Omega') = \begin{pmatrix} U_{RT}(\Omega, -\Omega') & 0 \\ 0 & U_{RT}^*(\Omega, -\Omega') \end{pmatrix} \quad (4.2.14)$$

avec

$$U_{RT}(\Omega, -\Omega') = 2\pi\delta(\Omega - \Omega')e^{i\phi_{RT}(\Omega)}. \quad (4.2.15)$$

Nous avons ainsi, en effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{RT}A_1(\Omega) &= \int_{\mathbb{R}} 2\pi\delta(\Omega - \Omega')e^{i\phi_{RT}(\Omega)}A_1(\Omega')\frac{d\Omega'}{2\pi} \\ &= A_1(\Omega)e^{i\phi_{RT}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

La phase spectrale par tour de cavité peut être approximée autour de  $\omega_0$  par une fonction polynomiale en  $\Omega$ . Par souci de simplicité, nous admettons que les dispersions d'ordres supérieurs à 1 sont compensées (ou négligeables), de sorte que

$$\phi_{RT}(\Omega) = \Delta_{RT} + \Omega T_0, \quad (4.2.17)$$

où  $T_0$  est le temps d'un tour de cavité et  $\Delta_{\text{RT}}$  est le déphasage par tour, qui décale les pics de résonance.

On peut rendre l'écriture de (4.2.14) plus compacte en utilisant la matrice

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.18)$$

On écrit alors

$$\mathbf{U}_{\text{RT}}(\Omega, -\Omega') = 2\pi\delta(\Omega - \Omega')e^{i\boldsymbol{\sigma}(\Delta_{\text{RT}} + \Omega T_0)}. \quad (4.2.19)$$

Et le noyau correspondant dans le domaine temporel est donné par

$$\mathbf{U}_{\text{RT}}(t, t') = \delta(t - t' - T_0)e^{i\boldsymbol{\sigma}\Delta_{\text{RT}}}. \quad (4.2.20)$$

Il décrit précisément une translation dans le temps plus un déphasage de l'enveloppe du champ.

Nous avons donc établi, dans les domaines temporel et fréquentiel, la forme explicite de la transformation  $\mathbf{U}_{\text{RT}}$  décrivant la propagation libre dans la cavité. Examinons à présent ce qui se produit en présence de la pompe.

### 4.2.3 Le gain paramétrique

Dans le cristal de longueur  $l_c$  qui va de  $z_A = -l_c/2$  à  $z_B = l_c/2$ , dans l'approximation de non-déplétion de la pompe, on peut décrire la propagation du signal par une évolution linéaire de son enveloppe lentement variable :

$$\mathbf{A}_s(z) = \mathcal{S}(z)\mathbf{A}_s(z_A) \quad (4.2.21)$$

où

$$\mathbf{A}_s(z) = \begin{pmatrix} A_s(z) \\ A_s^*(z) \end{pmatrix}. \quad (4.2.22)$$

Alors la transformation qui décrit le passage complet à travers le cristal  $\chi^{(2)}$  vaut :

$$\mathcal{S}_{\text{BA}} = \mathcal{S}(z_B). \quad (4.2.23)$$

Pour montrer que  $\mathcal{S}_{\text{BA}} = \mathbf{U}_{\text{BA}}\mathcal{G}_0$ , on peut se servir d'un résultat du chapitre 2 qui établit la transformation de la conversion paramétrique pour l'amplitude  $\mathbf{u}_s$  du champ, lié à  $\mathbf{A}_s$  par la relation

$$\mathbf{A}_s(z, \Omega) = \mathbf{E}_s^{(+)}(z, \omega) = e^{i\boldsymbol{\sigma}k_s(\omega)z}\mathbf{u}_s(z, \omega). \quad (4.2.24)$$

On rappelle ici ce résultat (équation (2.5.23)) :

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)

$$\mathbf{u}_s(z_B, \omega) = \mathcal{G}_0 \mathbf{u}_s(z_A, \omega), \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_0 = \exp \left( \begin{array}{cc} 0 & \mathcal{S}_0 \\ \mathcal{S}_0^* & 0 \end{array} \right), \quad (4.2.25)$$

où le noyau de  $\mathcal{S}_0$  est, à une constante près, la distribution spectrale conjointe de la conversion paramétrique (voir équation (2.5.11)) :

$$S_0(\omega, \omega') = i\chi l_c u_p(\omega + \omega') \Phi(\omega, \omega'), \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{\omega_0 \chi^{(2)}}{2n_0 c} \quad (4.2.26)$$

On trouve ainsi

$$\mathcal{S}_{BA} = \mathcal{U}_{BA} e^{i\sigma_{k_s(\omega)} z_A} \mathcal{G}_0 e^{-i\sigma_{k_s(\omega)} z_A}, \quad (4.2.27)$$

où  $\mathcal{U}_{BA} = e^{i\sigma_{k_s(\omega)} l_c}$  est la transformation unitaire due au cristal en l'absence de pompe. En utilisant le même argument grâce auquel nous avons pu remplacer  $\mathcal{G}_{RT}$  par  $\mathcal{G}_0$  dans l'équation (4.2.12), on substitue ici  $\mathcal{G}_0$  à la place de  $e^{i\sigma_{k_s(\omega)} z_A} \mathcal{G}_0 e^{-i\sigma_{k_s(\omega)} z_A}$ .

De cette façon, on obtient le résultat annoncé précédemment :

$$\mathbf{A}_s(z_B, \Omega) = \mathcal{S}_{BA} \mathbf{A}_s(z_A, \Omega), \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}_{BA} = \mathcal{U}_{BA} \mathcal{G}_0, \quad (4.2.28)$$

qui montre que la transformation décrivant le passage à travers le cristal est composé d'une partie équivalente à une propagation libre et d'une deuxième responsable par le gain paramétrique.

Nous connaissons déjà la forme de  $\mathcal{G}_0$  grâce à (4.2.25). On s'intéresse maintenant à la forme explicite de  $\mathcal{S}_0$  tenant compte des **propriétés spectrales/temporelles de la pompe**.

On peut réexprimer (4.2.26) en termes de l'enveloppe lentement variable  $A_p$  évaluée au centre du cristal ( $z = 0$ ) :

$$S_0(\Omega, \Omega') = i\chi l_c A_p(\Omega + \Omega') \Phi_0(\Omega, \Omega'), \quad (4.2.29)$$

où  $\Phi_0(\Omega, \Omega') = \Phi(\Omega + \omega_0, \Omega' + \omega_0)$ .

Pour trouver le noyau de  $\mathcal{S}_0$  dans le domaine temporel, on doit évoquer les propriétés temporelles de la pompe. Dans le cas d'un SPOPO, l'intervalle de temps entre deux impulsions successives de la pompe est synchronisé avec le temps  $T_0$  que met la lumière pour réaliser un tour de cavité, de sorte que l'enveloppe de la pompe peut s'écrire :

$$A_p(t) = \mathcal{E}_p \sum_k e^{2ik\Delta_0} \alpha_p(t - kT_0). \quad (4.2.30)$$

#### 4.2 Relations d'entrée-sortie pour un OPO

Cette expression représente un train d'impulsions d'enveloppe individuelle  $\alpha_p(t)$ . D'une impulsion à la suivante, la porteuse prend un déphasage de  $2\Delta_0$  par rapport à l'enveloppe (le décalage en fréquence du peigne vaut donc  $2\Delta_0/T_0$ ). La fonction  $\alpha_p(t)$  a comme support l'intervalle  $\mathcal{T}_0 = [0, T_0]$  et est normalisée de telle sorte que  $\int_{\mathcal{T}_0} |\alpha_p(t)|^2 dt = 1$ .  $\mathcal{E}_p^2$  est l'énergie d'une impulsion.

La transformée de Fourier de  $A_p(t)$  vaut

$$A_p(\Omega) = \mathcal{E}_p \sum_k e^{ik(2\Delta_0 - \Omega T_0)} \alpha_p(\Omega), \quad (4.2.31)$$

ce qui nous permet de calculer  $S_0$  dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} S_0(t, t') &\stackrel{(4.2.29)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} i\chi l_c A_p(\Omega + \Omega') \Phi_0(\Omega, \Omega') e^{-i(\Omega t + \Omega' t')} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{d\Omega'}{2\pi} \\ &\stackrel{(4.2.31)}{=} \sum_k e^{2ik\Delta_0} \int_{\mathbb{R}^2} i\chi l_c \mathcal{E}_p \alpha_p(\Omega + \Omega') \Phi_0(\Omega, \Omega') \\ &\quad \times e^{-i[\Omega(t - kT_0) + \Omega'(t' - kT_0)]} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{d\Omega'}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0(t, t') = \sum_k S_c(t - kT_0, t' - kT_0) e^{2ik\Delta_0}} \quad (4.2.32)$$

où nous avons défini la forme intégrale  $\mathcal{S}_c$ , de noyau spectral

$$S_c(\Omega, \Omega') = i\chi l_c \mathcal{E}_p \alpha_p(\Omega + \Omega') \Phi_0(\Omega, \Omega'). \quad (4.2.33)$$

$S_0(t, t')$  représente l'interaction du cristal avec le train d'impulsions de la pompe, tandis que  $S_c(t, t')$  symbolise l'interaction d'une impulsion unique avec le cristal. On supposera pour la suite que

$$\boxed{S_c(t, t') = 0, \quad \forall t, t' \notin \mathcal{T}_0 = [0, T_0]}. \quad (4.2.34)$$

Pour que ce soit valable il faut que la largeur spectrale de la fonction d'accord de phase  $\Phi_0(\Omega, \Omega')$  soit beaucoup plus large que le taux de répétition  $T_0^{-1}$  et que les impulsions de la pompe soit localisées autour du centre de l'intervalle  $\mathcal{T}_0$ , leur durée étant beaucoup plus petite que  $T_0$ . La condition (4.2.34) est donc bien légitime dans le cas des impulsions ultracourtes du SPOPO, où on compare une centaine de femtosecondes à une dizaine de nanosecondes.



### 4.3 Peignes de fréquences : une base naturelle pour analyser les propriétés du SPOPO

Cette section est dédiée au calcul de la forme général des vecteurs propres de  $\mathcal{G}_0$ , soit de l'interaction paramétrique. Différemment de ce qui a été fait dans le chapitre 2, où nous ne donnons importance qu'aux enveloppes spectrales des champs impliqués, nous tenons compte ici du fait que la pompe est un train d'impulsions avec un certain taux de répétition. De plus, comme nous l'avons vu ci-dessus, les enveloppes des impulsions ne sont pas forcément en phase avec la porteuse, et le champ n'est donc pas périodique, mais *quasi-périodique*. La propriété de quasi-périodicité introduite par la pompe sera explicitement utilisée comme indice pour trouver les vecteurs propres du système, qui seront inévitablement des trains d'impulsions quasi-périodique générés par PDC (*conversion paramétrique descendante*).

Dans le domaine spectral, la quasi-périodicité, c'est-à-dire l'évolution de la CEP (*carrier-envelope phase*), correspond à un décalage en fréquence des dents du peigne, ou CEO (*carrier-envelope offset*), comme nous l'avons vu dans le chapitre 1. Nous verrons que cette approche fait apparaître naturellement un paramètre  $\theta$ , que nous pourrions interpréter à la fin comme le décalage en fréquence des vecteurs propres par rapport aux fréquences centrales de PDC.

#### 4.3.1 Système quasi-périodique

Comme l'enveloppe de la pompe est quasi- $T_0$ -périodique :  $A_p(t+kT_0) = A_p(t)e^{2ik\Delta_0}$  (cf. (4.2.30)), le système est quasi-périodique. En effet, on peut vérifier que les transformations  $\mathcal{S}_{BA}$  et  $\mathcal{G}_0$  sont quasi-invariantes par translation périodique, par exemple :

$$\mathbf{G}_0(t + T_0, t' + T_0) = e^{i\sigma\Delta_0} \mathbf{G}_0(t, t') e^{-i\sigma\Delta_0}. \quad (4.3.1)$$

Il est facile de montrer que, grâce à cette propriété,  $\mathcal{G}_0$  commute avec la pseudo-translation temporelle unitaire  $\mathbf{U}_0$ , définie comme

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(t, t') &= \delta(t - t' - T_0) e^{-i\sigma\Delta_0} \\ &\stackrel{(4.2.20)}{=} \mathbf{U}_{RT}(t, t') e^{-i\sigma(\Delta_{RT} + \Delta_0)}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Par conséquent,  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathbf{U}_0$  ont une base commune de vecteurs propres, ce qui nous aide à trouver les vecteurs et valeurs propres de  $\mathcal{G}_0$ .

#### 4.3.2 Problème aux valeurs propres de l'interaction paramétrique

Soient  $\mathbf{f}(\theta)$  des vecteurs propres communs à  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathbf{U}_0$ , et soit  $\mathcal{H}_0$  l'opérateur

### 4.3 Peignes de fréquences : une base naturelle du SPOPO

$$\mathcal{H}_0 = \ln \mathcal{G}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_0 \\ \mathcal{S}_0^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

On a ainsi :

$$\mathcal{H}_0 \mathbf{f}(\theta) = g(\theta) \mathbf{f}(\theta), \quad (4.3.4)$$

$$\mathcal{U}_0 \mathbf{f}(\theta) = e^{i\theta} \mathbf{f}(\theta), \quad (4.3.5)$$

où les valeurs propres de  $\mathcal{U}_0$  sont des complexes sur le cercle unité car il s'agit d'une transformation unitaire et  $g(\theta)$  est réel puisque  $\mathcal{H}_0$  est hermitien.

Si on écrit, de manière très générale,  $\mathbf{f}(\theta) = (f_A(\theta), f_B(\theta))^T$ , alors les équations (4.3.2) et (4.3.5) donnent

$$f_A(\theta, t - T_0) = f_A(\theta, t) e^{i(\Delta_0 + \theta)}, \quad (4.3.6)$$

$$f_B^*(\theta, t - T_0) = f_B^*(\theta, t) e^{i(\Delta_0 - \theta)}, \quad (4.3.7)$$

On peut alors montrer que, à un facteur près,  $f_B(\theta, t) = f_A^*(-\theta, t)$ . Le vecteur  $\mathbf{f}(\theta)$  a donc nécessairement la forme  $\mathbf{f}(\theta) = (f(\theta), f^*(-\theta))^T$ .

Comme  $\mathcal{H}_0 \boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma} \mathcal{H}_0$ , on vérifie que  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{f}(\theta) = (f(\theta), -f^*(-\theta))^T$  est également vecteur propre de  $\mathcal{H}_0$ , mais avec valeur propre  $-g(\theta)$ . On peut montrer que  $\mathcal{U}_0$  aussi admet  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{f}(\theta)$  comme vecteur propre, vu que  $\mathcal{U}_0 \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \mathcal{U}_0$ . Donc, si on définit les vecteurs

$$\mathbf{f}^{(\pm)}(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta) \\ \pm f^*(-\theta) \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

alors ils sont tous les deux vecteurs propres de  $\mathcal{H}_0$  et de  $\mathcal{U}_0$  et on écrit :

$$\mathcal{H}_0 \mathbf{f}^{(\pm)}(\theta) = \pm g(\theta) \mathbf{f}^{(\pm)}(\theta), \quad (4.3.9)$$

$$\mathcal{U}_0 \mathbf{f}^{(\pm)}(\theta) = e^{i\theta} \mathbf{f}^{(\pm)}(\theta). \quad (4.3.10)$$

Comme  $\mathcal{H}_0^2 \mathbf{f}^{(\pm)}(\theta) = g^2(\theta) \mathbf{f}^{(\pm)}(\theta)$ , (4.3.3) et (4.3.8) donnent

$$\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^* f(\theta) = g^2(\theta) f(\theta). \quad (4.3.11)$$

Si on développe le premier membre de cette équation à partir de (4.2.32), on trouve directement

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^* f(\theta, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k, k'} S_c(t - kT_0, t' - kT_0) S_c^*(t' - k'T_0, t'' - k'T_0) \\ &\quad \times e^{2i(k-k')\Delta_0} f(\theta, t'') dt' dt'' \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)

Or,  $S_c(t, t')$  est nulle en dehors de  $\mathcal{T}_0^2$  (cf. (4.2.34)). Alors les termes de la somme pour lesquels  $k$  est différent de  $k'$  s'annulent, ce qui simplifie l'équation précédente :

$$\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^* f(\theta, t) = \sum_k \int_{\mathcal{T}_k^2} S_c(t - kT_0, t' - kT_0) S_c^*(t' - kT_0, t'' - kT_0) f(\theta, t'') dt' dt'', \quad (4.3.13)$$

où on définit l'intervalle  $\mathcal{T}_k = [kT_0, (k+1)T_0]$ . Dans le cas particulier où  $t \in \mathcal{T}_0$ , seul  $k = 0$  contribue :

$$\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^* f(\theta, t \in \mathcal{T}_0) = \int_{\mathcal{T}_0^2} S_c(t, t') S_c^*(t', t'') f(\theta, t'') dt' dt''. \quad (4.3.14)$$

On voit à partir de l'équation (4.3.14) que  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^*$  et  $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_c^*$  ont les mêmes valeurs propres. Comme celles de  $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_c^*$  ne dépendent pas de  $\theta$ , on peut écrire

$$\mathcal{S}_c \mathcal{S}_c^* \psi_n(t) = g_n^2 \psi_n(t), \quad (4.3.15)$$

où on a défini les vecteurs propres  $\psi_n(t)$  et supprimé explicitement la dépendance en  $\theta$  de  $g$ . Comme  $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_c^*$  est une transformation Hermitienne  $L^2$  [Parker 00],  $\{\psi_n(t)\}$  est une base complète et orthonormale sur l'intervalle  $\mathcal{T}_0 = [0, T_0]$ .

**En résumé, ce qu'il faut retenir de cette section :**

---

$\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{U}_0$  ont des vecteurs propres  $\mathbf{f}_n^{(\pm)}(\theta)$  en commun, et les valeurs propres sont données par

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 \mathbf{f}_n^{(\pm)}(\theta) = e^{\pm g_n} \mathbf{f}_n^{(\pm)}(\theta) \\ \mathcal{U}_0 \mathbf{f}_n^{(\pm)}(\theta) = e^{i\theta} \mathbf{f}_n^{(\pm)}(\theta) \end{cases} \quad (4.3.16)$$

avec  $g_n$  réel et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Les vecteurs propres ont la forme suivante :

$$\mathbf{f}_n^{(\pm)}(\theta, t) = \begin{pmatrix} f_n(\theta, t) \\ \pm f_n^*(-\theta, t) \end{pmatrix}, \quad (4.3.17)$$

où  $f_n(\theta, t)$  sont les fonctions propres de  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^*$  :

$$\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^* f_n(\theta, t) = g_n^2 f_n(\theta, t). \quad (4.3.18)$$

$\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^*$  et  $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_c^*$  partages les mêmes valeurs propres, mais pas les mêmes vecteurs propres :

$$\mathcal{S}_c \mathcal{S}_c^* \psi_n(t) = g_n^2 \psi_n(t). \quad (4.3.19)$$

La transformation  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^*$  symbolise l'interaction avec des trains d'impulsions. Ses vecteurs propres  $f_n(\theta, t)$  sont donc aussi des trains d'impulsions (ou peignes de

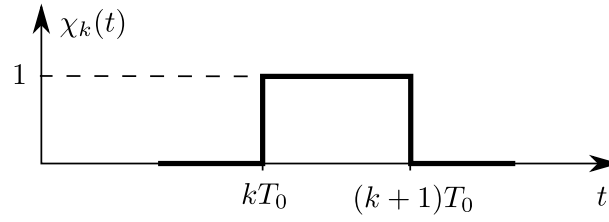


Figure 4.3.1: Fonction  $\chi_k(t)$  qui sélectionne la  $k$ -ième impulsion du train.

fréquences).  $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_c^*$ , à son tour, représente l'interaction avec une impulsion pompe unique, et ses vecteurs propres  $\psi_n(t)$  doivent évoquer des enveloppes d'impulsion unique. Il ne nous reste plus qu'à trouver la relation entre les  $f_n(\theta, t)$  et les  $\psi_n(t)$ .

### 4.3.3 Forme des fonctions propres

Dans cette partie, nous allons établir une équation reliant  $f_n(\theta, t)$  et  $\psi_n(t)$ . Cette relation sera analogue à l'équation (4.2.30) reliant  $A_p(t)$  et  $\alpha_p(t)$  (train d'impulsions et impulsion unique). Pour cela, on introduit la fonction  $\chi_k(t)$  de la figure 4.3.1 :

$$\chi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathcal{T}_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (4.3.20)$$

Comme  $\{\psi_n(t - kT_0)\}$  est une base complète et orthonormale sur l'intervalle  $\mathcal{T}_k$ , la restriction de  $f_n$  à  $\mathcal{T}_k$  peut être décomposée sur cette base, de manière très générale, comme suit :

$$\chi_k(t) f_n(\theta, t) = \sum_m a_{mn,k}(\theta) \psi_m(t - kT_0). \quad (4.3.21)$$

Ainsi,

$$f_n(\theta, t) = \sum_k \sum_m a_{mn,k}(\theta) \psi_m(t - kT_0). \quad (4.3.22)$$

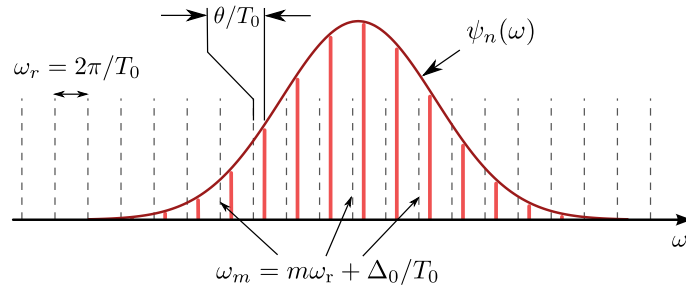
Lorsqu'on injecte l'équation ci-dessus dans (4.3.13), on obtient, d'une part

$$\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^* f_n(\theta, t) \stackrel{(4.3.15)}{=} \sum_k \sum_m a_{mn,k}(\theta) g_m^2 \psi_m(t - kT_0), \quad (4.3.23)$$

et d'autre part, si on combine (4.3.18) et (4.3.22),

$$\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^* f_n(\theta, t) = g_n^2 \sum_k \sum_m a_{mn,k}(\theta) \psi_m(t - kT_0). \quad (4.3.24)$$

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)



**Figure 4.3.2:** Peigne de fréquences décalé de  $\theta/T_0$  par rapport aux fréquences centrales de la conversion paramétrique, avec enveloppe spectrale  $\psi_n(\omega)$ .

Pour que (4.3.23) et (4.3.24) soient simultanément vraies, il faut que  $a_{mn,k}(\theta) = a_{n,k}(\theta)\delta_{mn}$ . L'équation (4.3.22) se simplifie donc :

$$f_n(\theta, t) = \sum_k a_{n,k}(\theta)\psi_n(t - kT_0). \quad (4.3.25)$$

Et comme  $f_n(\theta, t)$  doit respecter la propriété de quasi- $T_0$ -périodicité (4.3.6), on trouve

$$f_n(\theta, t) = \sum_k \psi_n(t - kT_0)e^{ik(\theta + \Delta_0)}. \quad (4.3.26)$$

On voit que chaque  $f_n(\theta, t)$  représente un train d'impulsions avec un  $\Delta$ CEP de  $\theta + \Delta_0$ . Dans le domaine fréquentiel,  $f_n(\theta, \omega)$  est un peigne de fréquences décalé de  $\theta/T_0$  par rapport aux fréquences centrales de la conversion paramétrique descendante,  $\omega_m = (2m\pi + \Delta_0)/T_0$  (voir figure 4.3.2). Les enveloppes  $\{\psi_n\}$  sont ce que l'on appelle les "supermodes" [Patera 09] et ont déjà été étudiées en simple passage à travers le cristal et également dans le cas où la pompe est une impulsion individuelle [Law 00, Wasilewski 06], i.e.  $T_0 \rightarrow \infty$ . Une des différences de l'approche présentée ici est le fait que l'on prend en compte le décalage en fréquence supplémentaire du peigne, représenté par le paramètre  $\theta$ .

Les enveloppes spectrales des supermodes correspondent aux enveloppes spectrales des modes propres de la conversion paramétrique descendante, qui ont été calculées dans le chapitre 2 dans le cas du cristal BIBO et pour deux épaisseurs différentes de cristal (voir figures 2.5.3 et 2.5.4).

### 4.4 Transformation dans la base des supermodes

#### 4.4.1 Réécriture de la transformation dans la base des supermodes

L'ensemble des fonctions  $f_n(\theta, t)$  forme une base orthonormale complète sur l'axe temporel réel (voir annexe B de [Jiang 12]), de sorte que les opérateurs des enveloppes

lentement variables se décomposent dans la base des peignes de fréquences comme suit :

$$\hat{a}(t) = \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} \hat{a}_n(\theta) f_n(\theta, t) d\theta, \quad (4.4.1)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} \hat{a}_n^\dagger(-\theta) f_n^*(-\theta, t) d\theta, \quad (4.4.2)$$

où<sup>3</sup>  $\hat{a}_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(\theta, t) \hat{a}(t) dt$  est l'opérateur annihilation d'un peigne de fréquences d'enveloppe spectrale définie par l'indice  $n$  et de CEO égal à  $\theta/T_0$ . Les relations de commutations de cet opérateur s'écrivent

$$[\hat{a}_n(\theta), \hat{a}_m(\theta')] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{a}_n(\theta), \hat{a}_m^\dagger(\theta')] = \delta_{nm} \delta(\theta - \theta'). \quad (4.4.3)$$

On cherche maintenant à écrire la transformation (4.2.3) dans la base  $\{\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\}_n$  des vecteurs

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} f_n(\theta, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ f_n^*(-\theta, t) \end{pmatrix}. \quad (4.4.4)$$

Dans cette nouvelle base, les vecteurs définis en (4.3.17) s'écrivent

$$\mathbf{f}_n^{(\pm)}(\theta, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}_n, \quad (4.4.5)$$

de sorte que nous pouvons exprimer le vecteur colonne des opérateurs bosoniques (4.4.1) et (4.4.2) de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \end{pmatrix} \rightarrow \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \hat{a}_n(\theta) \\ \hat{a}_n^\dagger(-\theta) \end{pmatrix} d\theta. \quad (4.4.6)$$

L'équation (4.2.3) devient alors

$$\boxed{\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{out},n}(\theta) \\ \hat{a}_{\text{out},n}^\dagger(-\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{R}_n \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in},n}(\theta) \\ \hat{a}_{\text{in},n}^\dagger(-\theta) \end{pmatrix}}, \quad (4.4.7)$$

où  $\mathbf{R}_n$  est la restriction de la transformation<sup>4</sup>  $\mathbf{R}$  au sous-espace engendré par  $\mathbf{u}_n$  et  $\mathbf{v}_n$  :

3. On choisit d'écrire  $-\theta$  au lieu de  $\theta$  dans l'intégrand de (4.4.2) (ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale) pour faire plus directement le lien avec (4.3.17).

4. Dans cette partie, on renonce aux caractères manuscrits en faveur des lettres majuscules pour souligner le fait que les transformations ne sont plus exprimées par des formes intégrales, mais par des matrices ordinaires.

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}_n \oplus \dots \quad (4.4.8)$$

$\mathbf{R}$  est donc *diagonale par blocs* dans la base  $\{\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\}_n$ . On vient ainsi d'effectuer ce que l'on appelle une réduction de Bloch-Messiah [Braunstein 05b], dans le sens où le dispositif (SPOPO), représenté par la transformation  $\mathbf{R}$ , est maintenant décomposé en une assemblée de dispositifs qui agissent chacun sur un mode différent et de façon indépendante.

À l'aide des équations (4.3.2) et (4.3.16), on peut facilement trouver l'écriture de  $\mathcal{G}_0$  et de  $\mathbf{U}_{\text{RT}}$  sous forme matricielle dans cette nouvelle base :

$$\mathbf{G}_{0,n} = \begin{pmatrix} \cosh g_n & \sinh g_n \\ \sinh g_n & \cosh g_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_{\text{RT},n} = e^{i\theta} e^{i\sigma\Delta}, \quad (4.4.9)$$

avec

$$\Delta \equiv \Delta_{\text{RT}} + \Delta_0. \quad (4.4.10)$$

Cela nous donne, à partir de (4.2.12),

$$\mathbf{R}_n = \frac{e^{i\theta} \mathbf{T}_n - r}{1 - r e^{i\theta} \mathbf{T}_n}, \quad (4.4.11)$$

où

$$\mathbf{T}_n = e^{i\sigma\Delta} \begin{pmatrix} \cosh g_n & \sinh g_n \\ \sinh g_n & \cosh g_n \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

La relation d'entrée-sortie (4.4.7) impose des contraintes entre les éléments de  $\mathbf{R}_n$ , qui doit, par conséquent, avoir la forme suivante :

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} C_n(\theta) & S_n(\theta) \\ S_n^*(-\theta) & C_n^*(-\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

Le calcul explicite des éléments de cette matrice donne

$$C_n(\theta) = \frac{r e^{i\Delta} (1 + e^{2i\theta}) - e^{i\theta} (r^2 + e^{2i\Delta}) \cosh g_n}{-e^{i\Delta} (1 + r^2 e^{2i\theta}) + r e^{i\theta} (1 + e^{2i\Delta}) \cosh g_n} \quad (4.4.14)$$

$$S_n(\theta) = \frac{e^{i(2\Delta+\theta)} (r^2 - 1) \sinh g_n}{-e^{i\Delta} (1 + r^2 e^{2i\theta}) + r e^{i\theta} (1 + e^{2i\Delta}) \cosh g_n} \quad (4.4.15)$$

On vérifie que

$$|C_n(\theta)|^2 - |S_n(\theta)|^2 = 1, \quad (4.4.16)$$

ce qui confirme que les relations de commutation (4.4.3) sont préservées en sortie.

À partir de (4.4.7) et (4.4.13) on obtient l'équation

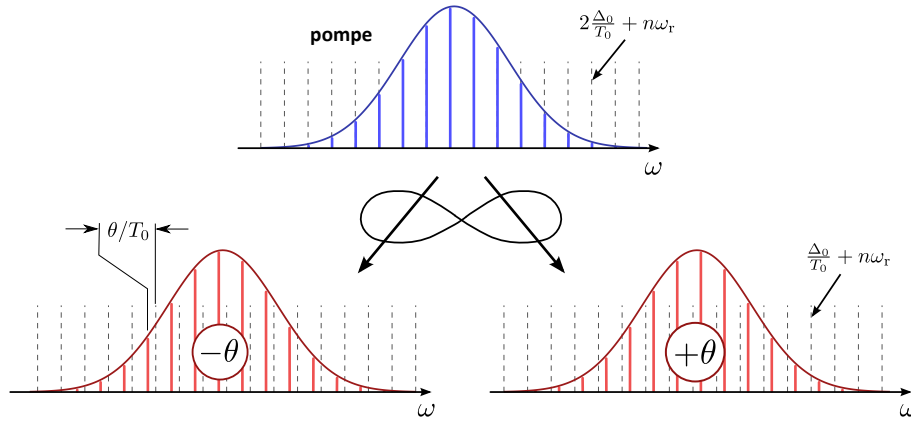


Figure 4.4.1: Dans un SPOPO, les peignes de fréquences à CEO opposés sont intriqués.

$$\hat{a}_{\text{out},n}(\theta) = C_n(\theta)\hat{a}_{\text{in},n}(\theta) + S_n(\theta)\hat{a}_{\text{in},n}^\dagger(-\theta), \quad (4.4.17)$$

qui couple deux peignes de fréquences ayant la même enveloppe spectrale (déterminée par la transformée de Fourier de  $\psi_n(t)$ ) mais CEOs opposés. On montrera dans les pages à suivre que cette équation décrit la génération d'un état comprimé si  $\theta = 0$  ou d'une paire de faisceaux jumeaux si  $\theta \neq 0$ . Comme il y a une équation du type (4.4.17) pour chaque mode  $n$ , on voit que le SPOPO est un générateur multimode d'états comprimés pour des peignes de fréquences qui n'ont pas de décalage par rapport aux fréquences centrales de PDC, c'est-à-dire tels que  $\Delta_{\text{CEP}} = \Delta_0$ . Pour  $\theta \neq 0$ , le SPOPO génère une paire intriquée de peignes de fréquences à CEOs opposés, comme schématise la figure 4.4.1 (ou, dans le domaine temporel, une paire intriquée de trains d'impulsions à  $\Delta_{\text{CEP}}$  symétriques par rapport à  $\Delta_0$ , i.e.  $\Delta_0 \pm \theta$ ). Ceci est l'équivalent du phénomène observé avec des OPOs continus, où les modes longitudinaux aux fréquences  $\omega_0 \pm \Omega$  sont intriqués. Ces paires intriquées sont appelées des *états comprimés bimodes*, et chaque part d'une paire, si observée individuellement, se trouve dans un *état thermique*.

#### 4.4.2 Seuil d'oscillation

Avant de passer à l'étude des propriétés quantiques du SPOPO, il est utile de calculer le seuil d'oscillation du système. La puissance de seuil est définie comme la puissance de pompe nécessaire pour que la cavité se mette à émettre un faisceau signal brillant, même si l'état initial injecté est le vide. Mathématiquement, on définit le seuil comme le point singulier de la transformation (4.4.7) où les éléments de la matrice  $\mathbf{R}_n$  prennent une valeur infinie, et il est exprimé en termes des  $g_n$ , qui dépendent logarithmiquement de la puissance de la pompe dans le supermode  $n$ . Le seuil du système est le seuil du supermode  $m$  avec le plus grand gain paramétrique en valeur



#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)

absolue :  $|g_m| = \max |g_n|$ . Il est atteint quand le dénominateur de  $C_m(\theta)$  et  $S_m(\theta)$  s'annule (voir équations (4.4.14) et (4.4.15)), soit quand

$$\cosh g_m = \frac{(r^2 + 1) \cos \theta + i(r^2 - 1) \sin \theta}{2r \cos \Delta}. \quad (4.4.18)$$

Comme  $\cosh g_m$  est réel et positif, et en supposant  $r > 0$ , le seuil ne peut être atteint que dans deux situations : 1)  $\theta = 0$  et  $\cos \Delta > 0$ ; 2)  $\theta = \pi$  et  $\cos \Delta < 0$ . On arrive donc au seuil quand

$$g_m = g_{\text{seuil}} \equiv \cosh^{-1} \left( \frac{1 + r^2}{2r |\cos \Delta|} \right). \quad (4.4.19)$$

Le seuil est donc minimum pour  $\Delta = 0$  ou  $\Delta = \pi$ .

L'origine de ces deux régimes de fonctionnement de l'OPO au-dessus du seuil ( $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ ) est détaillée dans [Wong 10]. Dans le premier cas, la cavité émet un peigne aux fréquences centrales de PDC ( $\text{CEO} = \Delta_0/T_0$ ), tandis que, dans le deuxième, le peigne émis a un décalage en fréquence de  $(\Delta_0 + \pi)/T_0$ , soit  $\Delta_0/T_0 + \omega_r/2$ , où  $\omega_r$  est le taux de répétition de la pompe.

### 4.5 Propriétés quantiques des peignes de fréquences en dessous du seuil

On passe à présent à l'étude des propriétés quantiques de l'OPO **en dessous du seuil**, traitées dans les cas  $\theta = 0$  et  $\theta \neq 0$ . Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, nous omettrons l'indice  $n$  pour alléger la notation, en sous-entendant que l'analyse se fait pour un supermode quelconque donné. Du fait de (4.4.16), il sera pratique de réexprimer (4.4.14) et (4.4.15) comme suit

$$C = e^{i\varphi_c} \cosh \gamma \quad \text{et} \quad S = e^{i\varphi_s} \sinh \gamma \quad (4.5.1)$$

où  $\gamma > 0$  et  $\varphi_c$  et  $\varphi_s$  sont les arguments des nombres complexes  $C$  et  $S$ .

#### 4.5.1 Cas dégénéré ( $\theta = 0$ )

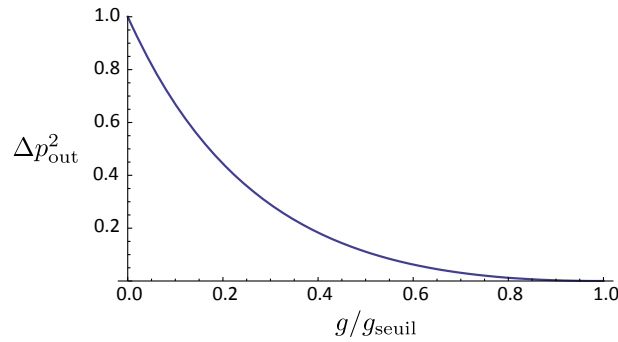
Quand  $\theta = 0$ , l'équation (4.4.17) devient

$$\hat{a}_{\text{out}} = \hat{a}_{\text{in}} e^{i\varphi_c} \cosh \gamma + \hat{a}_{\text{in}}^\dagger e^{i\varphi_s} \sinh \gamma \quad (4.5.2)$$

soit

$$\hat{a}_{\text{out}} e^{-i\varphi_0} = \hat{a}_{\text{in}} e^{i\Delta\varphi} \cosh \gamma + \hat{a}_{\text{in}}^\dagger e^{-i\Delta\varphi} \sinh \gamma, \quad (4.5.3)$$

où on définit  $\varphi_0 = (\varphi_c + \varphi_s)/2$  et  $\Delta\varphi = (\varphi_c - \varphi_s)/2$ . Cette équation est donc l'équivalent de (3.5.5) dans le cas dégénéré si on ajoute un déphasage  $-\Delta\varphi$  au mode



**Figure 4.5.1:** Variance de la quadrature comprimée en fonction de la valeur propre  $g$  normalisée au seuil (ou, de façon équivalente, de la puissance de la pompe normalisée au seuil).

d'entrée et un déphasage  $\varphi_0$  au mode de sortie. On montre alors qu'il s'agit d'une transformation de squeezing. En effet, si on définit les opérateurs de quadrature en entrée comme

$$\hat{x}_{\text{in}} = \hat{a}_{\text{in}}^\dagger e^{-i\Delta\varphi} + \hat{a}_{\text{in}} e^{i\Delta\varphi} \quad (4.5.4)$$

$$\hat{p}_{\text{in}} = i \left( \hat{a}_{\text{in}}^\dagger e^{-i\Delta\varphi} - \hat{a}_{\text{in}} e^{i\Delta\varphi} \right) \quad (4.5.5)$$

et en sortie comme

$$\hat{x}_{\text{out}} = \hat{a}_{\text{out}}^\dagger e^{i\varphi_0} + \hat{a}_{\text{out}} e^{-i\varphi_0} \quad (4.5.6)$$

$$\hat{p}_{\text{out}} = i \left( \hat{a}_{\text{out}}^\dagger e^{i\varphi_0} - \hat{a}_{\text{out}} e^{-i\varphi_0} \right), \quad (4.5.7)$$

alors les relations d'entrée-sortie pour les quadratures se déduisent très simplement à partir de l'équation (4.5.3) et son hermitienne conjuguée. On trouve :

$$\hat{x}_{\text{out}} = e^\gamma \hat{x}_{\text{in}} \Rightarrow \Delta x_{\text{out}}^2 = e^{2\gamma} \Delta x_{\text{in}}^2 \quad (4.5.8)$$

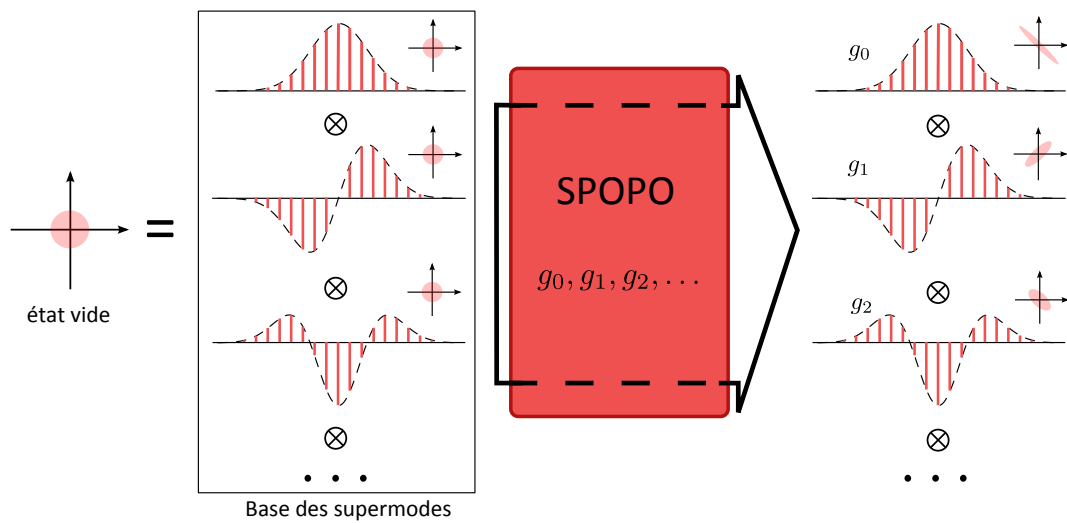
$$\hat{p}_{\text{out}} = e^{-\gamma} \hat{p}_{\text{in}} \Rightarrow \Delta p_{\text{out}}^2 = e^{-2\gamma} \Delta p_{\text{in}}^2 \quad (4.5.9)$$

Ainsi, si on a un état cohérent à l'entrée, on obtient, à la sortie, un état comprimé en quadrature limité par la relation de Heisenberg (3.1.7), c'est-à-dire satisfaisant  $\Delta x_{\text{out}} \Delta p_{\text{out}} = 1$ . La variance de la quadrature  $\hat{p}_{\text{out}}$ , est d'autant plus comprimée que l'on est proche du seuil et vaut théoriquement zéro au seuil, comme on le voit sur la figure 4.5.1.

En analysant les formules (4.4.14) et (4.4.15), on voit que si on change le signe de  $g$ , alors  $C$  reste inchangé et  $S$  change de signe (sa phase est accrue de  $\pi$ ). Ainsi,

$$g \rightarrow -g \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 + \frac{\pi}{2}, \quad (4.5.10)$$

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)



**Figure 4.5.2:** SPOPO dégénéré créant un état comprimé multimode dans la base des supermodes à partir d'un état vide à l'entrée. La quantité de squeezing dans le supermode  $n$  dépend essentiellement de sa valeur propre  $g_n$ .

ce qui signifie, dans le cas  $\theta = 0$ , que l'ellipse de bruit tourne de  $\pi/2$  : la quadrature comprimée devient anti-comprimée et vice versa. Pour comprendre pourquoi cette propriété est intéressante, il faut revenir aux figures 2.5.3 et 2.5.4 du chapitre 2, où on voit que les signes des valeurs propres de l'interaction paramétrique s'alternent selon que l'on passe d'un supermode au suivant dans le cas d'une pompe gaussienne. Dans le cas où  $\Delta = 0$  (résonance parfaite des fréquences centrales de PDC),  $\varphi_0$  ne dépend pas de  $g$  et donc ne dépend pas de la puissance de la pompe normalisée au seuil. Alors, tous les supermodes pairs sont comprimés selon la même quadrature et les supermodes impairs sont comprimés selon la quadrature orthogonale. À une puissance de pompe fixée, en dessous du seuil, le premier supermode est celui le plus proche du seuil et donc celui qui présente la plus grande quantité de squeezing. Le niveau de compression diminue progressivement pour les supermodes d'ordres supérieurs et le nombre de modes qui sont dans des états comprimés, lié au nombre de Schmidt, donne le degré (section 3.2.2) de l'état quantique multimode créé. La figure 4.5.2 schématise l'effet du SPOPO sur un état vide à l'entrée.

#### 4.5.2 Cas non-dégénéré ( $\theta \neq 0$ )

Pour traiter le cas non-dégénéré, on se place, pour simplifier, dans la situation où la résonance des fréquences centrales de PDC dans la cavité est parfaite ( $\Delta = 0$ ). Alors, on montre que les coefficients  $C$  et  $S$  de la transformation se simplifient et

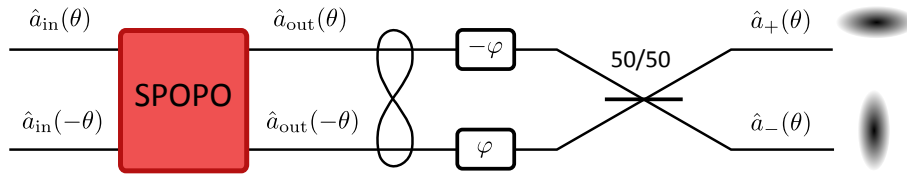


Figure 4.5.3: État comprimé bimode généré par le SPOPO.

deviennent des nombres complexes avec la même phase :

$$\varphi_c = \varphi_s \equiv \varphi = -\arctan \left[ \frac{(r^2 - 1) \sin \theta}{(r^2 + 1) \cos \theta - 2r \cosh g} \right], \quad (4.5.11)$$

de sorte que (4.4.17) s'écrit

$$\hat{a}_{\text{out}}(\theta) = e^{i\varphi} \left[ \hat{a}_{\text{in}}(\theta) \cosh \gamma + \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(-\theta) \sinh \gamma \right] \quad (4.5.12)$$

et, comme  $\varphi(-\theta) = -\varphi(\theta)$ ,

$$\hat{a}_{\text{out}}(-\theta) = e^{-i\varphi} \left[ \hat{a}_{\text{in}}(-\theta) \cosh \gamma + \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\theta) \sinh \gamma \right]. \quad (4.5.13)$$

Les deux dernières équations correspondent à une transformation de squeezing bimode (cf. (3.5.5) et (3.5.6)) impliquant deux peignes de fréquences à CEO opposés. Les modes comprimés à bruits décorrélés sont un mélange des deux modes "out" déphasés l'un de  $-\varphi$  et l'autre de  $\varphi$  comme schématisé sur la figure 4.5.3. En effet, si on définit les opérateurs

$$\hat{a}_\pm(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\varphi} \hat{a}_{\text{out}}(\theta) \pm e^{i\varphi} \hat{a}_{\text{out}}(-\theta) \right), \quad (4.5.14)$$

on voit que les variances des quadratures,

$$\hat{x}_\pm(\theta) = \hat{a}_\pm^\dagger(\theta) + \hat{a}_\pm(\theta) = e^{\pm\gamma} \left( \frac{\hat{x}_{\text{in}}(\theta) \pm \hat{x}_{\text{in}}(-\theta)}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.5.15)$$

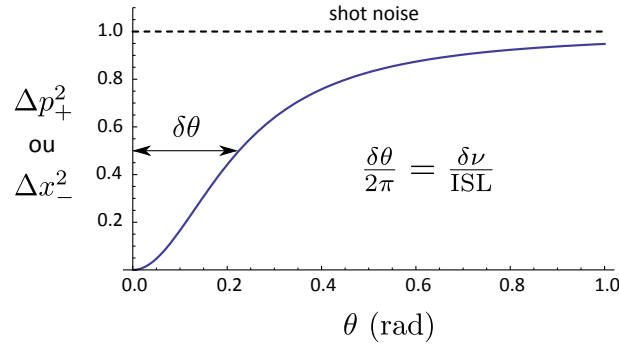
$$\hat{p}_\pm(\theta) = i \left( \hat{a}_\pm^\dagger(\theta) - \hat{a}_\pm(\theta) \right) = e^{\mp\gamma} \left( \frac{\hat{p}_{\text{in}}(\theta) \pm \hat{p}_{\text{in}}(-\theta)}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.5.16)$$

sont soit comprimées soit anti-comprimées si on a des états cohérents à l'entrée :

$$\Delta x_\pm^2(\theta) = e^{\pm 2\gamma} \left( \frac{\Delta x_{\text{in}}^2(\theta) + \Delta x_{\text{in}}^2(-\theta)}{2} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta x_\pm^2(\theta) = e^{\pm 2\gamma}}, \quad (4.5.17)$$

$$\Delta p_\pm^2(\theta) = e^{\mp 2\gamma} \left( \frac{\Delta x_{\text{in}}^2(\theta) + \Delta x_{\text{in}}^2(-\theta)}{2} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta p_\pm^2(\theta) = e^{\mp 2\gamma}}. \quad (4.5.18)$$

#### 4 Oscillateur Paramétrique Optique Pompé en mode Synchrone (SPOPO)



**Figure 4.5.4:** Variance des quadratures comprimées de l'état bimode produit par le SPOPO, avec  $r = 0,9$ . L'effet de la bande passante de la cavité,  $\delta\nu$ , est mis en évidence.

On note que les ellipses de bruit des modes décorrélés  $\hat{a}_+(\theta)$  et  $\hat{a}_-(\theta)$  tournent avec  $\theta$  et que le niveau de compression de ces modes (ou de corrélation entre les modes  $\hat{a}_{\text{out}}(\theta)$  et  $\hat{a}_{\text{out}}(-\theta)$ ) diminue avec  $\theta$ , témoignant l'effet de la bande passante de la cavité (figure 4.5.4). Ces corrélations entre peignes de fréquences à décalages opposés dans un SPOPO sont complètement analogues aux corrélations entre les bandes latérales de la porteuse dans un OPO continue, qui subissent d'ailleurs également l'effet de la bande passante.

Enfin, on voit que l'état bimode produit par le SPOPO en configuration quasi-dégénérée satisfait le critère d'inséparabilité de Duan [Duan 00, Simon 00] pour toutes les valeurs de  $\gamma$  :

$$\Delta x_+^2 + \Delta p_-^2 = e^{2\gamma} + e^{-2\gamma} \geq 2, \quad \forall \gamma > 0. \quad (4.5.19)$$

## 4.6 Conclusion

Nous avons montré que les propriétés quantiques d'un SPOPO sont naturellement décrites dans une base de peignes de fréquences à différents profils spectraux, appelée la base des supermodes. Chaque supermode interagit de façon indépendante des autres avec la pompe dans le cristal non-linéaire, de sorte que le SPOPO se comporte comme une assemblée d'OPOs dégénérés capable de produire des états quantiques fortement multimodes. On retrouve bien donc, avec cette nouvelle approche, les résultats obtenus précédemment [Patera 09]. De plus, cette approche permet de traiter le cas non-dégénéré où on prévoit la génération d'états comprimés bimodes non-séparables. L'approche symplectique développée ici est également capable d'intégrer les domaines temporel et fréquentiel dans un même formalisme.

Le caractère multimode des états générés se manifeste expérimentalement, comme on le verra dans la deuxième partie du manuscrit, par la présence de fortes corrélations

de quadrature entre les différentes régions du spectre optique.



## Deuxième partie

### Expérience





## 5 Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux

### Sommaire

---

<b>5.1 Principe général de l'expérience</b>	<b>97</b>
5.1.1 Objectifs	97
5.1.2 Dispositif expérimental	98
<b>5.2 Sources laser</b>	<b>99</b>
5.2.1 Laser de pompe	99
5.2.2 Laser femtoseconde	102
5.2.3 Asservissements du laser femtoseconde	103
<b>5.3 Préparation des faisceaux</b>	<b>107</b>
5.3.1 Correction de l'astigmatisme	107
5.3.2 Compensation de la dispersion	107
5.3.3 Doublage de fréquence	109
5.3.4 Délai entre les impulsions signal et pompe	110

---

Dans ce chapitre introductif à l'expérience, on décrit d'abord son principe général (section 5.1), d'une part en posant les objectifs et stratégies, d'autre part en donnant une vue d'ensemble du schéma expérimental et un bref aperçu de la façon dont son design a évolué au cours de cette thèse. Enfin, on donne les détails concernant les sources lumineuses (Section 5.2) et la préparation des différents faisceaux principaux utilisés dans l'expérience (Section 5.3).

### 5.1 Principe général de l'expérience

#### 5.1.1 Objectifs

Le but principal de l'expérience est résumé par le titre de cette thèse : génération et caractérisation de peignes de fréquences quantiques multimodes. On souhaite donc générer des états quantiques de la lumière qui sont intrinsèquement multimodes<sup>1</sup> ainsi qu'analyser le contenu de ces états. Plus précisément, le but est de créer des états comprimés multimodes dans une base de peignes de fréquences en utilisant un Oscillateur Paramétrique Optique pompé en mode synchrone (SPOPO).

---

1. Au sens présenté en Section 3.2.2

## 5 Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux

Les états multimodes créés sont inclus dans un seul faisceau et ont comme origine un seul dispositif (le SPOPO **en dessous du seuil**). Le profil spatial est déterminé par la cavité résonnante, qui filtre tous les modes transverses sauf le  $TEM_{00}$ . On a ainsi des faisceaux quantiques qui sont monomodes transverses et multimodes longitudinaux (en temps ou en fréquence de manière équivalente). Les faisceaux produits peuvent être brillants (les modes sont occupés par des états intenses comprimés) ou avec très peu de photons (les états sont du vide comprimé), selon que l'état du signal à l'entrée de la cavité est brillant ou vide, respectivement.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, un SPOPO dégénéré sous le seuil se comporte comme une assemblée d'OPOs qui compriment le bruit quantique dans une base de modes que l'on appelle les supermodes. Les profils spectraux des supermodes sont déterminés essentiellement par les conditions d'accord de phase et par le profil spectral de la pompe. Le faisceau signal à l'entrée, qu'il soit vide ou brillant, peut être décomposé dans la base des supermodes de façon à ce que son interaction avec la pompe dans la cavité puisse être analysée vis-à-vis de chaque supermode de manière complètement indépendante des autres. Chaque supermode subit alors une compression de bruit optimale sur une des quadratures et présente de l'excès de bruit sur la quadrature orthogonale, en respectant l'inégalité de Heisenberg. Le niveau de compression est lié à la valeur propre de l'interaction associée au supermode correspondant.

Les techniques de mesure pour caractériser le contenu multimode des états générés sont diverses et incluent la détection équilibrée (ici, on dira plutôt "balancée") sans oscillateur local, la détection homodyne avec mise en forme d'impulsion et la détection multipixel. Nous aborderons chacune de ces possibilités en détail dans les chapitres à venir.

### 5.1.2 Dispositif expérimental

Dans cette expérience, nous pouvons distinguer au moins trois grands blocs qui s'articulent de façon plus ou moins indépendante, à savoir, un premier qui comprend les sources lasers et la préparation des faisceaux, un deuxième relatif à la production d'états quantiques et un troisième lié au système de détection (figure 5.1.1). Tous les trois ont évolué de façon considérable au cours de cette thèse, mais seul le premier a gardé son esprit original. On dédie les deux sections suivantes à la discussion des différents éléments du premier bloc.

En ce qui concerne la partie production d'états quantiques, essentiellement constituée par la cavité OPO, nous avons essayé deux montages différents : d'abord une cavité linéaire et ensuite une cavité en anneau. Le passage de l'un à l'autre (après le déménagement du laboratoire, fin 2010) a demandé un changement important du design général de l'expérience en ce qui concerne les chemins des divers faisceaux et la disposition des différents éléments sur la table optique. Ce remaniement de

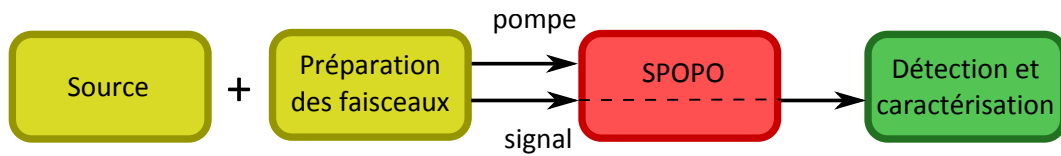


Figure 5.1.1: Schéma de principe de l'expérience.

l'expérience a non seulement changé la façon dont on crée des états quantiques, mais aussi les types d'états quantiques créés et a ouvert de nouvelles possibilités de mesure qui ont également transformé le troisième bloc de l'expérience, celui de la détection.

En guise de référence pour les chapitres à suivre, où on discutera des détails expérimentaux de la production d'états quantiques et du système de détection, on présente ici les deux schémas complets de l'expérience : le premier et plus ancien, avec une cavité linéaire (figure 5.1.2), et celui le plus récent, comportant une cavité en anneau et un nouveau système de détection (figure 5.1.3).

## 5.2 Sources laser

Deux sources laser sont utilisées sur la table optique. La première, qui émet de la lumière continue à une longueur d'onde de 532 nm, sert de pompe à la deuxième, qui fonctionne en régime femtoseconde émettant dans l'infrarouge proche.

### 5.2.1 Laser de pompe

Nous utilisons comme pompe pour laser femtoseconde le modèle VERDI V-18 [Coherent 05] de l'entreprise Coherent, pouvant émettre, en fonctionnement optimal, jusqu'à 18 W de vert monochromatique à 532 nm. Le laser, composé d'une cavité en anneau avec un cristal d'*orthovanadate d'yttrium dopé au néodyme* ( $\text{Nd}^{3+} : \text{YO}_4$ ), est pompé par de la lumière fibrée provenant d'une paire de barrettes de diodes délivrant une puissance totale de 70 W à la longueur d'onde de 808 nm. L'émission laser crée ainsi une puissance intracavité d'environ 100 W à 1064 nm. Un processus de doublage intracavité avec un cristal de *triborate de lithium* (LBO) permet de générer le faisceau vert (non résonnant dans la cavité) de sortie du Verdi. Le faisceau de sortie présente le profil spatial du mode  $\text{TEM}_{00}$  et un *waist*  $w_0$  proche du millimètre. Nous réglons la puissance de sortie à 13 W, suffisante pour le pompage de la source femtoseconde.

Cette source est équipée d'une alimentation refroidie à air (qui fournit aux diodes lasers un courant entre 40 et 50 A) et d'un circuit à eau qui refroidit la plaque dissipatrice de chaleur (dissipant typiquement 60-80 W) sur laquelle est montée la tête du laser. Le système consomme typiquement une puissance électrique totale d'environ 1,3 kW pour notre modèle, produit en 2005.

5 Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux

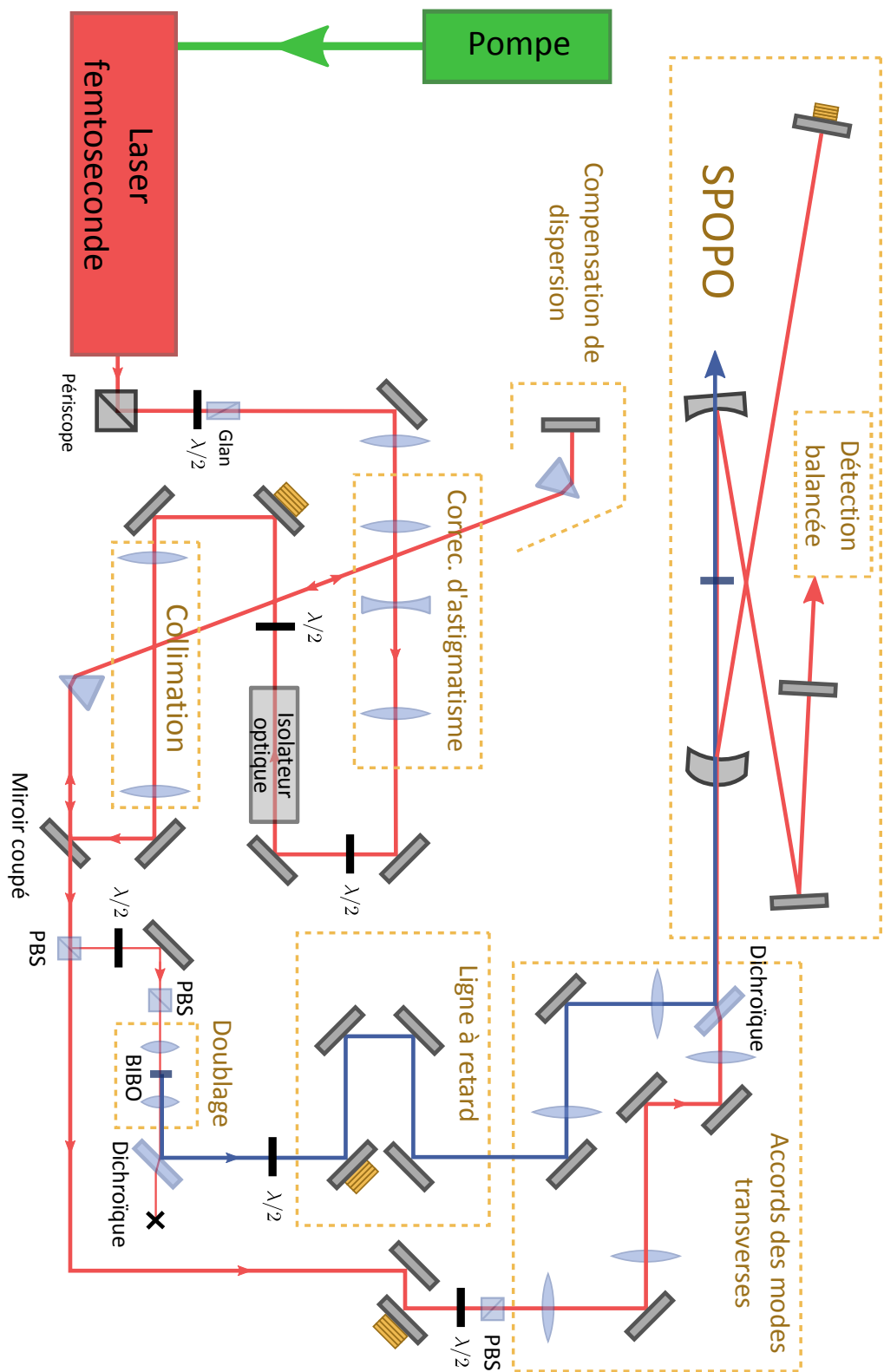


Figure 5.1.2: Schéma de la première génération de l'expérience, avec cavité OPO linéaire.

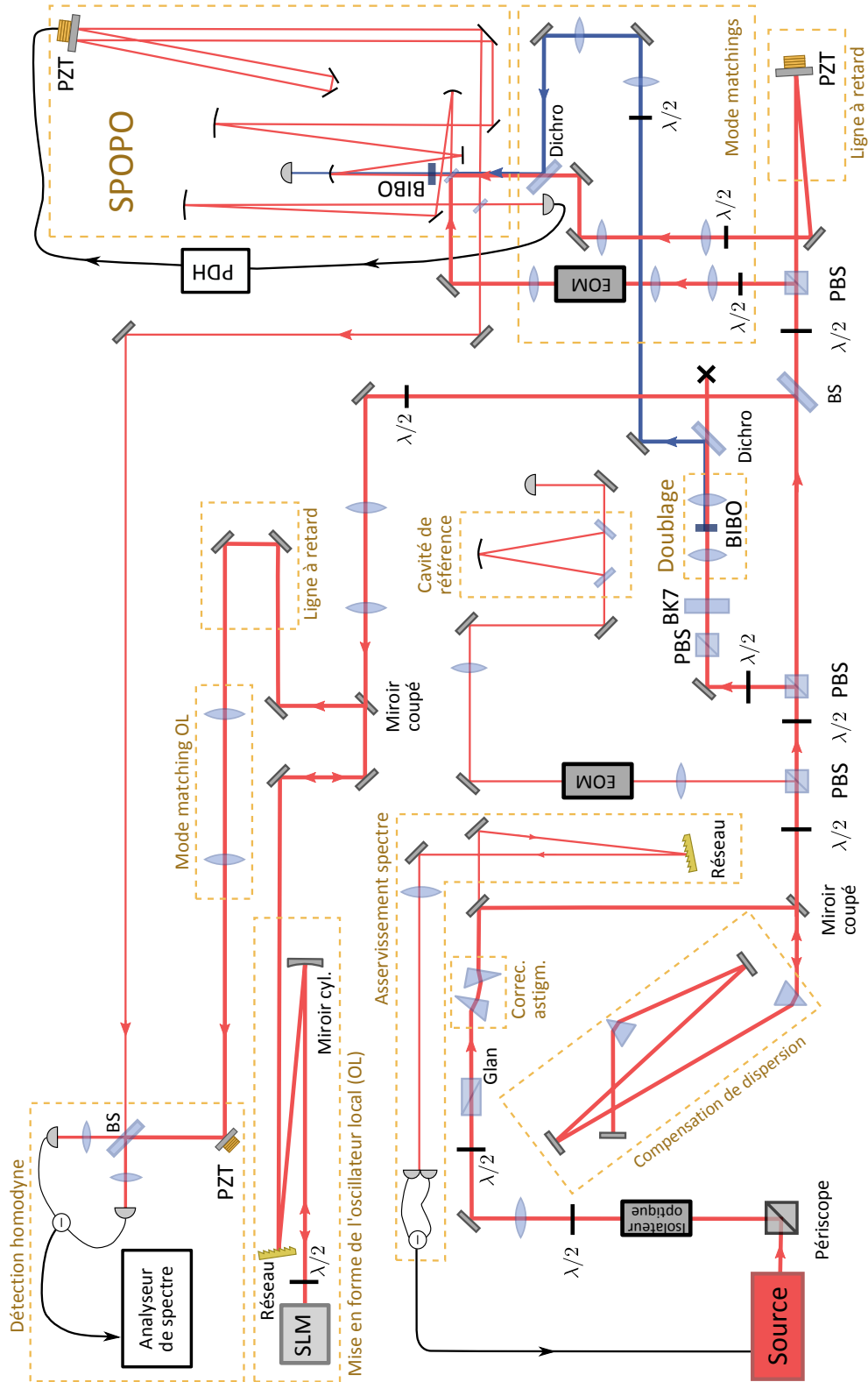
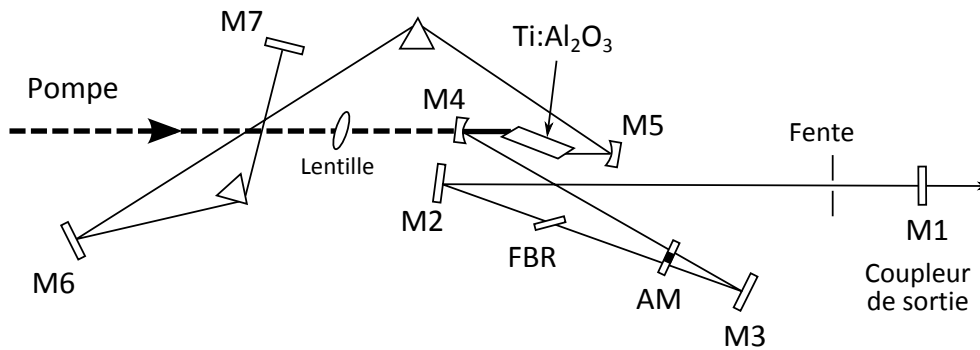


Figure 5.1.3: Schéma de la nouvelle expérience, avec cavité en anneau (source laser non-détaillée).

## 5 Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux



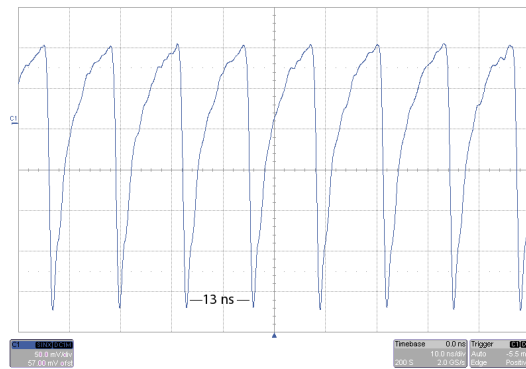
**Figure 5.2.1:** Schéma de la cavité laser Titane Saphir. FBR : filtre biréfringent réglable qui permet de choisir la longueur d'onde centrale. AM : système amorceur du verrouillage de modes.

### 5.2.2 Laser femtoseconde

La source femtoseconde de l'expérience est un laser Titane Saphir à verrouillage de modes, de modèle MIRA-900 [Coherent 93], réglé pour délivrer un spectre (ni parfaitement gaussien, ni parfaitement en sécante hyperbolique carrée, mais proche des deux) de largeur à mi-hauteur en intensité  $\Delta\lambda = 6$  à  $7$  nm, centré à  $795$  nm (transition  $D_1$  du rubidium). Les impulsions créées ont alors une largeur temporelle à mi-hauteur en intensité entre  $120$  et  $150$  fs environ, limitées par transformée de Fourier. Le taux de répétition des impulsions vaut environ  $76,6$  MHz (longueur de cavité  $\simeq 3,92$  m). En fonctionnement normal, pompé à  $13$  W, le laser peut délivrer de  $1,8$  W jusqu'à plus de  $2$  W de puissance moyenne en régime femtoseconde et plus de  $3$  W en régime continu.

La cavité laser (figure 5.2.1) est une cavité linéaire disposant d'un cristal épais de Titane Saphir ( $Ti : Al_2O_3$ ), qui a une courbe de gain très large spectralement. Un filtre de Lyot dans la cavité est utilisé pour sélectionner la longueur d'onde centrale entre  $710$  nm et  $910$  nm environ. Une ligne à prismes pour la compensation de la dispersion permet de régler la largeur du spectre : nous pouvons au mieux obtenir un spectre de  $10$  nm, soit  $\sim 80$  fs à  $795$  nm, au prix d'une certaine instabilité. À l'intérieur de la cavité nous avons également un système pour amorcer le verrouillage de modes, composé d'une barrette de verre montée sur un système agitateur qui oscille par application d'une tension externe et par une fente qui sélectionne le mode spatial correspondant au régime femtoseconde (en opposition au régime continu).

La stabilité du verrouillage de modes dépend fortement de la position du miroir M5, que l'on peut régler avec une vis micrométrique. Le fonctionnement optimal est atteint dans une plage de réglage d'une dizaine de microns. Ce réglage ne fait pas partie du quotidien de l'expérience et on ne l'effectue que dans des cas extrêmes. Cependant, on doit constamment vérifier la qualité du verrouillage de modes. Le MIRA dispose d'une



**Figure 5.2.2:** Signal détecté par la photodiode rapide interne du MIRA, observé à l'aide d'un oscilloscope.

photodiode interne rapide qui détecte une petite fraction de puissance prélevée de la sortie du laser et qui nous permet de contrôler les propriétés temporelles/spectrales des impulsions. On divise le signal de la photodiode en deux parties : l'une envoyée sur un oscilloscope, ce qui nous permet de voir le profil temporel du signal de la photodiode (figure 5.2.2), et l'autre envoyée sur un analyseur de spectre.

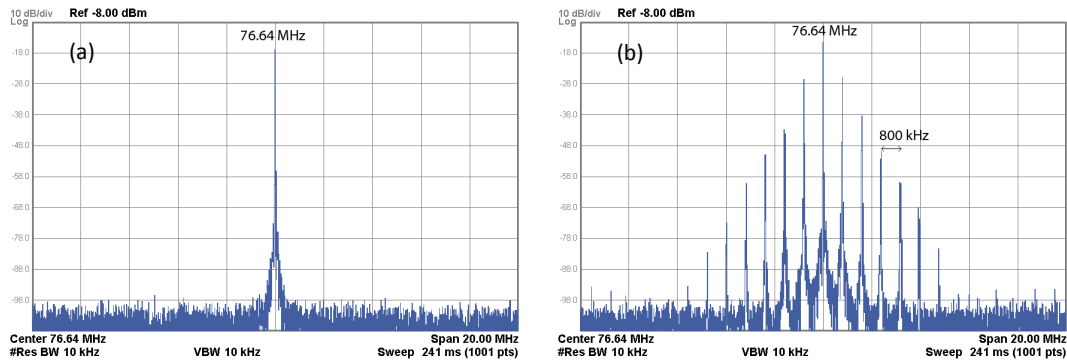
Avec l'analyseur de spectre, on s'attend à voir un peigne de radio-fréquences correspondant à la fréquence du taux de répétition et ses harmoniques (grosso modo, la transformée de Fourier de l'enveloppe du train d'impulsions). En faisant un zoom aux alentours de 76 MHz on doit pouvoir observer le pic du taux de répétition de façon claire et nette comme dans la figure 5.2.3a. Si la fente intracavité est un peu trop ouverte, le pic devient instable ; si elle est un peu trop fermée, on observe des bandes latérales indicatrices du régime dit de *Q-switched mode-locking* [Hönninger 99] : le paramètre d'absorption saturable devient trop fort dans la cavité et les impulsions successives voient leur puissance fluctuer à la fréquence de relaxation du laser, proche de 800 kHz dans notre cas (figure 5.2.3b).

### 5.2.3 Asservissements du laser femtoseconde

Quatre paramètres suffisent pour décrire le spectre d'un peigne de fréquences gaussien : largeur du spectre, longueur d'onde centrale, taux de répétition et décalage en fréquence. Les fluctuations de la largeur du spectre sont en général imperceptibles sur un spectromètre et ne jouent pas de rôle important dans l'expérience. On se contente de la régler à la valeur souhaitée à l'aide de la ligne à compensation de dispersion intracavité, sans nécessité de contrôle fin. En revanche, l'expérience peut être très sensible aux variations de la longueur d'onde centrale, du taux de répétition et du décalage en fréquence du peigne, en particulier lorsqu'on s'intéresse à observer les pics de transmission d'une cavité femtoseconde. Nous présentons ici les stratégies



## 5 Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux



**Figure 5.2.3:** Signal de la photodiode interne du MIRA observé à l'aide d'un analyseur de spectre autour du pic du taux de répétition (a) sans Q-switching (b) avec Q-switching.

utilisées pour la stabilisation de ces paramètres.

### Longueur d'onde centrale

L'asservissement de la longueur d'onde centrale s'effectue très simplement à l'aide d'un réseau de diffraction et une photodiode à quadrant. On règle par défaut la longueur d'onde centrale à 795 nm en touchant au filtre biréfringent. Avec le réseau (1200 traits/mm), on disperse spatialement le spectre d'une partie du faisceau prélevée proche à la sortie du laser. Le spectre dispersé est ensuite focalisé ( $f = 30$  cm) et centré sur la photodiode à quadrants (modèle PDP90A, Thorlabs). La photodiode nous fournit directement un signal d'erreur correspondant à la différence entre les puissances des deux côtés du spectre.

On rétroagit dans le laser à travers un actuateur piézoélectrique installé au niveau du miroir de fond (M7, sur la figure 5.2.1), à la fin de la ligne à prismes. Nous avons conçu une monture métallique (figure 5.2.4) qui effectue une légère rotation sur le miroir lorsqu'une tension est appliquée à la piézo. Cette rotation est insignifiante pour l'alignement de la cavité, mais décale de façon perceptible la plage de longueurs d'onde sélectionnée par le filtre biréfringent. On obtient ainsi un asservissement très robuste et qui reste stable typiquement pendant des heures, jusqu'à ce que la piézo arrive en bout de course à cause des dérives thermiques lentes. Cette stabilisation a contribué *grandement* à la qualité de l'expérience dans la mesure où les pics de transmission du SPOPO sont devenus plus stables et la cavité plus facile à asservir.

### Taux de répétition

Le MIRA dispose d'un actuateur piézo-électrique monté sur le miroir M2 permettant de régler finement la longueur de cavité et ainsi asservir le taux de répétition. Une



**Figure 5.2.4:** Photo du dispositif conçu pour incliner horizontalement le miroir de fond de la cavité laser. Lorsqu'on applique une tension à l'actuateur piézoélectrique (PZT), les bras de la pièce métallique sont écartés et le miroir subit une rotation horizontale.

technique assez simple consiste à asservir une des harmoniques du signal de la photodiode interne à une référence de fréquence par la méthode de verrouillage de phase (*phase-locking*, en anglais), où le battement entre les deux fréquences fait office de signal d'erreur. Le signal d'erreur va dans un régulateur proportionnel-intégral (LB1005 High-Speed Servo Controller) et la sortie est amplifiée pour s'adapter aux tensions limites de la piézo interne du MIRA (de -20 à 120 V).

Le fait de prendre une harmonique élevée du signal au lieu du taux de répétition lui-même offre une plus grande précision à la méthode. On a donc intérêt à utiliser une harmonique aussi lointaine que possible avec le compromis d'un bon niveau de signal. Nous filtrons alors le signal provenant de la photodiode interne avec un filtre passe-bande passif (marque K&L, modèle 5BT-500/1000) et sélectionnons typiquement la 11<sup>e</sup> harmonique.

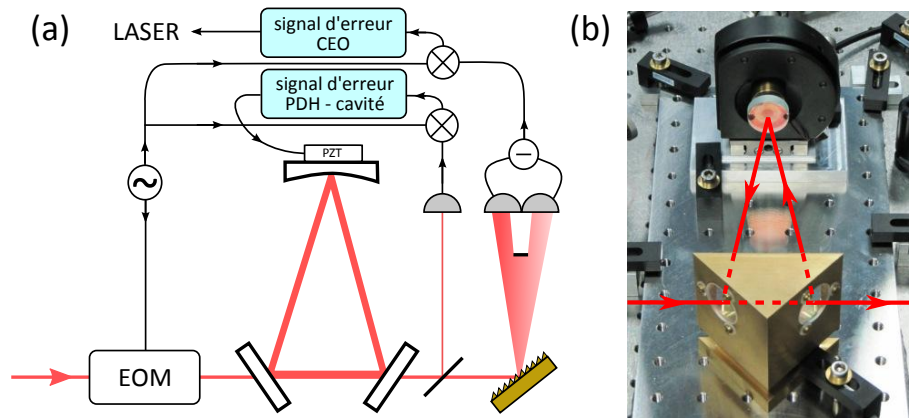
Nous arrivons à stabiliser le taux de répétition du laser assez facilement. Cependant, on constate que l'étape d'amplification rajoute un fort bruit autour de 50 kHz qui se répercute sur le faisceau laser et est très nuisible pour l'expérience. Ce problème n'est pas encore résolu au moment de la rédaction de ce manuscrit et on préfère, pour l'instant, ne pas asservir du tout le taux de répétition.

### Décalage en fréquence

Avec la piézo de la figure 5.2.4, on peut envisager également l'asservissement du CEO du peigne délivré par le laser. En effet, comme le spectre se trouve spatialement dispersé sur le miroir M7, une rotation horizontale pure du miroir rajoute une phase linéaire au spectre. Le contrôle fin de l'angle du miroir (et donc de la pente de la phase linéaire) permet de compenser les fluctuations du CEO, qui vient, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, de la dispersion linéaire dans la cavité.

Il existe plusieurs techniques pour obtenir un peigne de fréquences de CEO stabilisé (p. ex. [Jones 00, Udem 02, Koke 10]). Cependant il en existe très peu qui marchent de

## 5 Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux



**Figure 5.2.5:** (a) Schéma simplifié du montage pour asservir le CEO du laser. EOM : modulateur électro-optique. PDH : Asservissement Pound-Drever-Hall. PZT : actuateur piézo-électrique. (b) Photographie de la cavité femtoseconde de référence.

manière satisfaisante pour des impulsions qui sont aussi longues que les nôtres ( $> 100$  fs). Une méthode, inspirée de [Jason Jones 01], utilise la lumière transmise par une cavité femtoseconde de référence pour générer un signal d'erreur pour asservir le CEO. Le schéma du montage (mis en place par Valérian Thiel, alors en M2), ainsi qu'une photo de la cavité, est montré sur la figure 5.2.5. Le spectre transmis par la cavité est dispersé par un réseau de diffraction et les ailes du spectre sont détectées par une photodiode à quadrants, qui fait la différence entre les signaux provenant des hautes et des basses fréquences. Dans son rapport de stage [Thiel 12], Valérian Thiel montre que, si la longueur de la cavité est suffisamment stable et que les autres paramètres du laser sont aussi asservis (taux de répétition et longueur d'onde centrale), alors les fluctuations du CEO sont visibles par cette procédure avec une cavité d'assez haute finesse et on peut en extraire un signal d'erreur. Dans notre cas, la cavité a une longueur réduite<sup>2</sup> ( $L_0/11 \simeq 32$  cm) par souci de compacité et stabilité. Il s'agit d'une cavité triangulaire adaptée en impédance ( $R_1 = R_2 = 99,4\%$ , en intensité) avec des miroirs conçus pour être peu dispersifs. Afin de réduire les fluctuations thermiques de la longueur, elle est également montée sur une plaque d'INVAR, qui est à son tour posée sur une couche de Sorbotane pour amortir les vibrations mécaniques.

Pour que la méthode marche, la cavité doit être bien évidemment en résonance. Comme l'asservissement du taux de répétition rajoute trop de bruit, nous avons décidé d'asservir la cavité au peigne de fréquences au lieu de l'inverse. Pour cela, on utilise une piézo collée au miroir courbe de la cavité et une boucle d'asservissement Pound-Drever-Hall [Black 01], en modulant la phase du faisceau d'entrée avec un modulateur électro-optique.

2. (Re)voir section 1.2.6 pour plus de détails concernant les cavités synchrones à longueur réduite.

Pour tester cette technique d'asservissement du CEO, on éteint l'asservissement de la longueur d'onde centrale  $\lambda_0$ , car il utilise aussi la piézo de la figure 5.2.4. Le signal d'erreur obtenu pour le CEO présente les mêmes dérives lentes que celles que l'on observe sur le signal d'erreur de  $\lambda_0$ , ce qui nous indique que les fluctuations de  $\lambda_0$  masquent celles du CEO. Idéalement, il faudrait trouver un moyen d'asservir  $\lambda_0$  d'abord, pour ensuite pouvoir asservir le CEO avec la méthode présentée ici. Une seule piézo ne suffit pas pour asservir la longueur d'onde centrale et le décalage en fréquence. Deux voies de rétroaction sur le laser se font alors nécessaires. La solution technique pour le problème reste en suspens au moment de la rédaction.

En l'état actuel de l'expérience et en ce qui concerne la source laser, l'asservissement de la longueur centrale semble suffire pour assurer la stabilité de l'expérience. Chronologiquement, il a d'ailleurs été le dernier asservissement à être essayé et mis en place, parmi les trois cités. L'asservissement du CEO ne semble donc pas essentiel pour cette expérience, mais la technique décrite ici sera sûrement utile dans un autre projet développé au sein du groupe, portant sur la métrologie avec des peignes de fréquences.

## 5.3 Préparation des faisceaux

### 5.3.1 Correction de l'astigmatisme

Le faisceau en sortie du laser Ti :Saph est très astigmatique : il y a un facteur 2 environ entre le rayon du faisceau selon l'axe horizontal et celui selon l'axe vertical au niveau du coupleur de sortie (M1). On peut le mesurer en imageant ce miroir avec une ligne  $2f$ . Après le périscope (premier élément sur la table optique après le laser), c'est le rayon selon l'horizontale qui est le plus petit.

Dans le montage ancien de l'expérience, nous utilisons trois lentilles cylindriques pour corriger l'astigmatisme. Actuellement, on utilise une paire de prismes anamorphosés, montage moins cher et très compact. Les prismes sont disposés de sorte à élargir horizontalement le profil transverse du faisceau. On contrôle le facteur d'agrandissement en ajustant les angles horizontaux des deux prismes (tout en faisant attention pour que le faisceau sorte bien parallèle) et en surveillant la qualité de la correction avec un analyseur de faisceau.

### 5.3.2 Compensation de la dispersion

À la sortie du laser femtoseconde, les impulsions n'ont a priori aucun chirp, ou très peu. On souhaite que ce soit le cas également en un lieu bien défini : le centre du cristal non-linéaire présent dans l'OPO. Cependant, le faisceau s'"imprègne" de chirp tout au long de sa propagation, que ce soit à cause des différentes optiques qu'il traverse ou même de l'air.

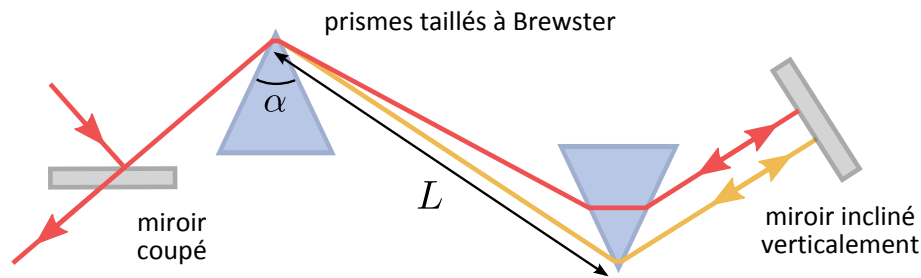


Figure 5.3.1: Ligne de compensation de dispersion à 2 prismes et un miroir.

### Éléments dispersifs : ordres de grandeur

D'après l'équation (1.1.13), la GDD nécessaire pour qu'une impulsion gagne un facteur  $\sqrt{2}$  en largeur est liée à sa durée initiale par

$$\phi''(\omega_0) = \frac{\Delta t^2}{4 \ln 2} \simeq 0,4 \Delta t^2, \quad (5.3.1)$$

ce qui fournit une limite pour le chirp, bien en dessous de laquelle on envisage de rester. Pour des impulsions de 120-130 fs de durée, par exemple, cette limite correspond à une GDD totale d'environ 6000 fs<sup>2</sup>.

L'élément le plus dispersif de notre montage est de loin l'isolateur optique (modèle IO-5-795 HP, de chez OFR, groupe Thorlabs). En mesurant la durée des impulsions avant et après l'isolateur optique à l'aide d'un autocorrélateur, on a calculé la dispersion de délai de groupe qu'il introduit : environ 2700 fs<sup>2</sup>.

Nos cubes polariseurs, faits soit de BK7 (51 fs<sup>2</sup>/mm @ 795 nm) soit de silice fondue (36 fs<sup>2</sup>/mm @ 795 nm), ont deux épaisseurs possibles : 1/4" ou 1/2". Chaque PBS introduit donc une GDD entre 230 et 650 fs<sup>2</sup>, qui dépend de sa taille et du matériau. Les lames séparatrices à 45°, la plupart en BK7 et 1/4" d'épaisseur, contribuent avec 460 fs<sup>2</sup> chaque environ. Les lentilles sphériques, de largeurs comprises typiquement entre 2 et 4 mm, introduisent une GDD moyenne approximée de 150 fs<sup>2</sup>. On peut aussi inclure l'effet de l'air, qui contribue avec 20 fs<sup>2</sup>/m.

### Ligne à prismes

Pour compenser l'influence de tous ces éléments dispersifs, nous avons construit une ligne à compensation de dispersion, composée de deux prismes en SF10 et un miroir plan (figure 5.3.1). Dans le schéma original [Fork 84], on propose l'utilisation de 4 prismes, sans miroir. Dans le montage à deux prismes et un miroir, que nous avons choisi car plus compact, le faisceau traverse chaque prisme deux fois et le miroir de fond nécessite un léger angle vertical.

Comme on peut le voir sur la figure 5.3.1, le chemin optique des plus hautes fréquences sur un aller-retour du dispositif est plus long que celui des basses fréquences. La ligne à prismes a donc pour effet de rajouter au faisceau une GDD négative *d'origine géométrique*.

On rappelle que pour un faisceau incident sur un prisme au minimum de déviation, les faisceaux incident et transmis ont la même incidence par rapport aux faces d'entrée et de sortie du prisme. Il est donc possible, en taillant correctement les prismes, que toutes les réfractions sur les faces des prismes se fassent à l'angle de Brewster, c'est-à-dire sans pertes pour de la lumière polarisée horizontalement. C'est cette configuration qui est choisie en pratique pour l'expérience. Pour le SF10, l'angle de Brewster vaut  $\theta_B = 59,7^\circ$ , ce qui correspond à un sommet faisant un angle  $\alpha = 60,6^\circ$ .

On peut montrer [Fork 84] que, pour des prismes taillés à Brewster, la GDD introduite s'exprime essentiellement en fonction de la longueur  $L$  entre les sommets des prismes et de la dispersion *linéaire* du matériau à la longueur d'onde centrale  $\lambda_0$  :

$$\phi''_{\text{ligne}}(\omega_0) \simeq -\frac{2L\lambda_0^3}{\pi c^2} \left( \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_0} \right)^2. \quad (5.3.2)$$

La quantité de dispersion négative ajoutée est réglée expérimentalement en ajustant la longueur  $L$  de la ligne jusqu'à ce que les impulsions soient limitées par transformée de Fourier au point désiré de la table optique. On note que l'endroit où la ligne est insérée dans l'expérience n'a pas d'importance, l'essentiel étant que  $\phi''_{\text{ligne}}$  compense la dispersion qui vient de l'ensemble de tous les éléments entre la source et le cristal non-linéaire du SPOPO.

Dans la configuration actuelle de l'expérience (figure 5.1.3), la ligne de compensation de dispersion a une longueur  $L \simeq 75$  cm, correspondant à une GDD totale d'environ  $-6700$  fs<sup>2</sup>. La ligne est pliée à l'aide de deux miroirs à angle d'incidence proche de  $0^\circ$  placés entre les prismes, ce qui rend le montage plus compact.

### 5.3.3 Doublage de fréquence

Après la ligne de compensation de dispersion, une fraction de la puissance du faisceau est prélevée à l'aide d'une lame demi-onde et un cube polariseur. Ce nouveau faisceau est doublé en fréquence en simple passage (figure 5.3.2) par un cristal de *triborate de bismuth*, de formule brute  $\text{BiB}_3\text{O}_6$ , appelé couramment BIBO, déjà introduit et exploité en section 2.3 pour les différents effets non-linéaires pertinents dans cette expérience. Il s'agit d'un cristal biaxe aux propriétés dispersives similaires à celles du BBO (*béta borate de baryum*,  $\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$ ), qui est uniaxe. Les avantages du BIBO sont une plus grande non-linéarité, une meilleure résistance aux contraintes mécaniques et peu de sensibilité à l'humidité.

## 5 Principe de l'expérience, sources lumineuses et préparation des faisceaux

Le design de l'expérience et la position de la ligne de compensation de dispersion font que le faisceau à 795 nm approche le cristal avec un chirp négatif. Pour que les impulsions soient limitées par transformée de Fourier au niveau du cristal, on a inséré une lame de BK7 de 1/2" de longueur, qui contribue avec une dispersion de délai de groupe positive.

Nos cristaux de BIBO ont été achetés à l'entreprise chinoise Fujian Castech Crystals. Leur coupe est effectuée selon les angles  $\theta = 152^\circ$  et  $\phi = 90^\circ$ , ce qui correspond à une non-linéarité théorique de 3,72 pm/V, pour une interaction à deux ondes de type I ( $e + e \rightarrow o$ ). Ils sont traités anti-reflet sur les deux côtés pour les longueurs d'onde autour de 397 et 795 nm. Leur dimension transverse est de 3 x 3 mm<sup>2</sup> et les épaisseurs varient entre 100  $\mu\text{m}$  et 2 mm. Un cristal de 200  $\mu\text{m}$  d'épaisseur a été choisi pour le doublage, car il fournit assez de puissance doublée sans trop être épais, pour éviter les effets de dispersion. Avec une puissance infrarouge de 1,6 W, on produit typiquement 400 mW de bleu (soit une efficacité de 25%), puissance qui est largement suffisante pour pomper le SPOPO.

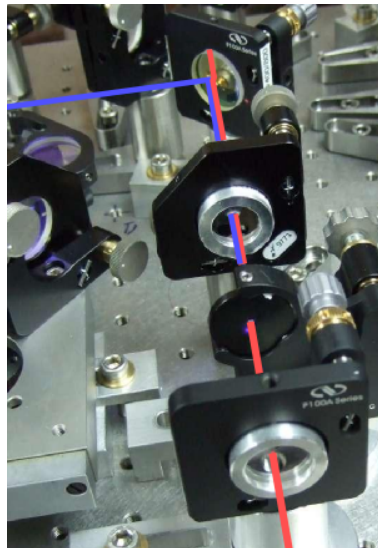


Figure 5.3.2: Photographie du montage du doublage de fréquence en simple passage.

### 5.3.4 Délai entre les impulsions signal et pompe

Après ce processus de préparation de faisceaux, nous disposons d'un faisceau à 795 nm et d'un deuxième à 397 nm cohérents entre eux qui peuvent être utilisés comme signal et pompe du SPOPO, respectivement. (Dans le nouveau design de l'expérience le faisceau à 795 nm est encore divisé en trois parties, qui vont devenir le signal, l'oscillateur local pour la détection homodyne et le faisceau utilisé pour l'asservissement de la cavité SPOPO.)

### 5.3 Préparation des faisceaux

Les dernières étapes avant l'injection dans la cavité sont l'adaptation des modes spatiaux au mode de la cavité (*mode matching*, en anglais) et le réglage du délai entre les impulsions de la pompe et du signal. Pour optimiser le couplage entre pompe et signal dans le cristal intracavité, le délai doit être, en effet, nul. Étant donné que les impulsions font typiquement quelques dizaines de micromètres de longueur, un des bras de l'interféromètre doit disposer d'une ligne à retard réglable à quelques micromètres près. Dans les chapitres suivants, nous verrons plus en détail comment cet ajustement de délai est fait, grâce aux interférences entre la pompe et le bleu généré intracavité par doublage du signal.





## 6 Réalisation expérimentale d'états non-classiques avec un SPOPO femtoseconde en cavité linéaire

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>La cavité linéaire</b> . . . . .	<b>114</b>
6.1.1	Géométrie et design . . . . .	114
6.1.2	Mode transverse résonnant . . . . .	114
6.1.3	Obtention des pics de résonance et effets thermiques . . . . .	115
6.1.4	Asservissement de la longueur . . . . .	116
<b>6.2</b>	<b>SPOPO en dessous du seuil</b> . . . . .	<b>116</b>
6.2.1	Alignement du cristal non-linéaire et du faisceau pompe . . . . .	116
6.2.2	Amplification sensible à la phase et obtention du seuil . . . . .	117
6.2.3	Asservissement de la phase relative . . . . .	117
<b>6.3</b>	<b>Détection balancée et mesures d'états non-classiques</b> . . . . .	<b>118</b>
6.3.1	Détection balancée et mesure du bruit d'amplitude de faisceaux brillants . . . . .	118
6.3.2	Réduction du bruit quantique d'amplitude . . . . .	119
6.3.3	Détection balancée à filtrage spectral . . . . .	121
6.3.4	Caractérisation d'états non-classiques multimodes . . . . .	122
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>127</b>

---

Dans ce chapitre nous décrivons d'une part le montage expérimental de la première génération de l'expérience en ce qui concerne la cavité OPO (linéaire, cf. figure 5.1.2) et le système de détection. D'autre part, nous montrons les résultats obtenus en utilisant ce montage. En particulier, nous avons pu observer pour la première fois, en fin 2010, la génération de peignes de fréquences multimodes en régime femtoseconde à l'aide d'un SPOPO[Pinel 12a].

Cette version de l'expérience a été développée dans la cadre de la thèse d'Olivier Pinel et donc toutes les procédures de mise en place et d'alignement, ainsi que les techniques d'asservissement employées, sont décrites et discutées de manière très détaillée dans son manuscrit de thèse [Pinel 10]. Nous nous contentons ici d'en donner les éléments essentiels.

## 6 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité linéaire

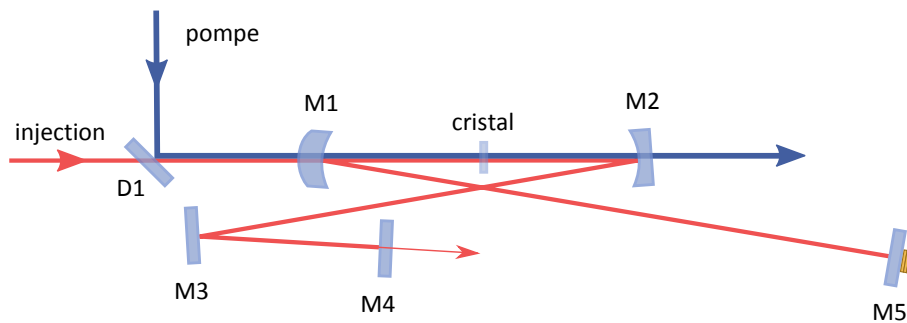


Figure 6.1.1: Schéma de la cavité OPO en géométrie linéaire pliée.  $D_1$  : miroir dichroïque.  $M_1$  : coupleur d'entrée.  $M_4$  : coupleur de sortie.

### 6.1 La cavité linéaire

#### 6.1.1 Géométrie et design

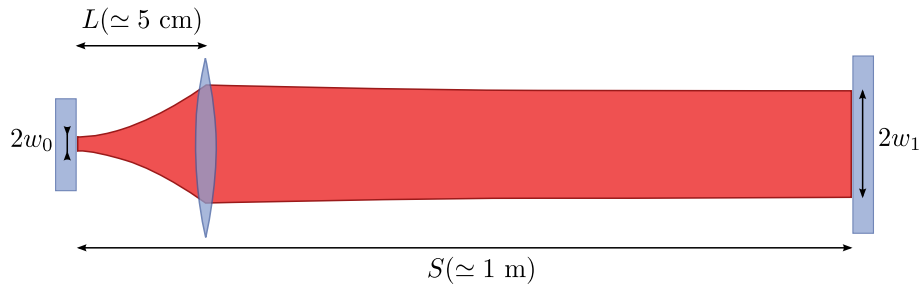
La cavité OPO a été construite en géométrie linéaire pliée, comme montré sur la figure 6.1.1. Deux miroirs sphériques ( $M_1$  et  $M_2$ ) de rayon de courbure  $R_c = 10$  cm sont placés à une distance d'environ 10 cm l'un de l'autre avec le cristal non-linéaire (BIBO) au centre.  $M_3$ ,  $M_4$  et  $M_5$  sont des miroirs plans. Les longs bras allant de  $M_2$  à  $M_4$  et de  $M_1$  à  $M_5$ , d'environ 93 cm chaque permettent que la distance totale d'aller-retour dans la cavité soit équivalente à la distance entre deux impulsions successives du train d'impulsions, soit environ 392 cm. Le miroir  $M_3$ , qui plie un des bras, permet à la cavité d'être plus compacte et plus facile à manipuler.

La cavité est résonnante pour le signal (faisceau infrarouge à 795 nm polarisé horizontalement) et non-résonnante pour la pompe (faisceau bleu à 397 nm polarisé verticalement). Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont alors traités anti-reflet à 397 nm. Le coupleur d'entrée  $M_1$  a une réflectivité  $R = 99,9\% @ 795$  nm. Pour le coupleur de sortie,  $M_4$ ,  $R = 80\% @ 795$  nm. Tous les autres miroirs possèdent des traitements haute réflectivité (HR) à 795 nm.

#### 6.1.2 Mode transverse résonnant

Le mode résonnant dans la cavité doit avoir trois waists, un au niveau du cristal,  $w_0$ , et deux autres de même rayon  $w_1$  sur les miroirs  $M_4$  et  $M_5$ . Comme la cavité est symétrique par rapport au cristal, on peut considérer le schéma équivalent de cavité de la figure 6.1.2, où on ne prend qu'un des bras de la cavité et une lentille de distance focale  $f = 5$  cm est substituée au miroir de rayon de courbure 10 cm.

En fixant la distance totale  $S$  de la cavité équivalente, on peut calculer  $w_0$  en fonction de  $L$  (la distance entre le waist et la lentille) et en déduire la zone de stabilité de cette cavité, c'est-à-dire l'intervalle auquel doit appartenir  $L$  pour qu'il existe un



**Figure 6.1.2:** Cavité équivalente à la cavité OPO, où le miroir courbe de rayon de courbure  $R_c$  est remplacé par une lentille de distance focale  $f = R_c/2$ .

mode transverse résonnant dans la cavité.

Si on considère le cas sans astigmatisme, on trouve facilement [Pinel 10]

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left( \frac{(L-f)(Sf-L(S-L))}{S-L-f} \right)^{1/4}. \quad (6.1.1)$$

On peut donc montrer que le waist  $w_0$  n'est défini que pour  $50 \text{ mm} = L_1 < L < L_2 \simeq 52,8 \text{ mm}$  et qu'il atteint sa valeur maximale,  $w_0 \simeq 17 \mu\text{m}$ , pour  $L = L_{\text{max}} \simeq 51,4 \text{ mm}$ . Pour une autre valeur de  $L$ , très proche de  $L_{\text{max}}$ , à  $2 \mu\text{m}$  près environ, tous les modes transverses pairs (resp. impairs) accumulent la même phase de Gouy sur un tour : la cavité est alors équivalente à une cavité confocale.

En principe, comme les miroirs sphériques sont inclinés horizontalement par rapport à l'axe d'injection, on doit prendre en compte les effets de l'astigmatisme, qui rend le waist du mode résonnant elliptique. En revanche, on peut montrer que, comme notre angle d'inclinaison des miroirs est petit (environ  $4^\circ$ ), le waist reste à peu près circulaire, de valeur maximale  $17 \mu\text{m}$ , et que l'intervalle de stabilité est juste légèrement décalé :  $50,2 \text{ mm} \lesssim L \lesssim 53,0 \text{ mm}$ . On cherche donc à se placer à peu près au centre de cet intervalle en essayant d'éviter la configuration confocale, de sorte qu'on puisse isoler le pic de résonance du mode  $\text{TEM}_{00}$ . Dans notre configuration, le faisceau au niveau des miroirs plans est approximativement circulaire et de waist  $0,5 \text{ mm}$ .

### 6.1.3 Obtention des pics de résonance et effets thermiques

Une fois la cavité mise en place à peu près à la bonne longueur, avec un signal de transmission visible sur une photodiode placée en sortie de cavité, l'étape suivante est d'observer le schéma d'interférences typique d'une cavité Fabry-Pérot synchrone, qui n'est visible que sur une plage de longueur petite (de l'ordre de la longueur des impulsions) devant l'étendue totale de la cavité. Pour ce faire, nous déplaçons le miroir M5 selon l'axe du faisceau à l'aide d'une translation à vis micrométrique, jusqu'à l'obtention des interférences. Ce miroir est également monté sur un actuateur piézo-électrique avec lequel il est possible de balayer la longueur de la cavité sur une zone

## 6 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité linéaire

d'environ  $10 \mu\text{m}$  ( $2 \times 5 \mu\text{m}$ ), permettant l'observation des pics de résonance sur un oscilloscope. On optimise alors la position de  $M_5$  et on joue à la fois sur l'alignement de la cavité et sur les miroirs d'injection pour supprimer les pics des modes autres que le  $\text{TEM}_{00}$ .

Du fait de sa taille importante, la cavité est très sensible aux fluctuations thermiques de longueur. En effet, un changement relatif de température aussi petit que  $0,2^\circ\text{C}$  entre la cavité laser et la cavité SPOPO est suffisant pour entraîner un désaccord de longueur entre les deux cavités qui est de l'ordre de la course de la piézo. Nous devons donc réajuster constamment la longueur de la cavité, typiquement deux ou trois fois par heure.

### 6.1.4 Asservissement de la longueur

La cavité est asservie à résonance à travers la méthode de Pound-Drever-Hall en transmission. Une modulation de phase est donc introduite dans le faisceau à injecter. Pour minimiser les effets de dispersion, on module la phase de l'injection non pas avec un modulateur électro-optique, mais avec un actuateur piézo-électrique attaché à un des miroirs sur le chemin du faisceau. Pour atteindre des amplitudes de modulation raisonnables à des fréquences entre 1 et 2 MHz, nous avons placé une bobine en parallèle à la piézo. La fréquence de modulation doit être suffisamment haute pour s'affranchir des bruits techniques à basses fréquences, mais suffisamment basse pour qu'elle ne soit pas coupée complètement par la bande passante de la cavité.

La cavité ayant un intervalle spectral libre de 76 MHz et une finesse de 27, sa bande passante, c'est-à-dire la largeur d'un pic de résonance à mi-hauteur en intensité, vaut environ 2,8 MHz. Elle transmet donc 50% de l'intensité maximale à 1,4 MHz. Cette dernière a été choisie comme fréquence de modulation typique.

La modulation de phase est convertie en modulation d'amplitude lors du passage à travers la cavité et devient détectable par une photodiode. Le photocourant est alors démodulé et ensuite on lui applique un filtre-passe bas. Cette procédure permet de repérer la longueur de la cavité par rapport au pics de résonances en fonction du signe du signal d'erreur généré, qui est ensuite amplifié et envoyé à la piézo du miroir  $M_5$ , fermant la boucle de rétroaction. La cavité reste alors asservie sur un des pics de résonance. En pratique, on s'arrange pour que l'asservissement soit sur le pic de résonance central, pour lequel l'intensité transmise est maximale.

## 6.2 SPOPO en dessous du seuil

### 6.2.1 Alignement du cristal non-linéaire et du faisceau pompe

L'alignement du cristal non-linéaire, milieu d'interaction entre la pompe et le signal dans la cavité, se fait en absence d'asservissement de cavité. Lorsque l'on insère

le cristal entre les deux miroirs sphériques, le chemin optique total du résonateur augmente sensiblement (quelques centaines de microns) dû à l'indice de réfraction du cristal. On doit donc récompenser la longueur en ajustant le miroir M5 jusqu'à ce que l'on retrouve les pics de résonance. Ensuite, on règle la position et l'angle du cristal pour observer du doublage intracavité, qui génère un faisceau bleu intense facilement visible à l'œil. Ce faisceau sert de référence pour l'alignement spatial de la pompe et pour la synchronisation des impulsions entre la pompe et le signal. L'alignement spatial est réalisé en réglant les miroirs d'injection de la pompe. Le recouvrement temporel est obtenu grâce à une ligne à retard motorisée mise en place sur le chemin de la pompe (figure 5.1.2). On l'atteint lorsqu'on observe des interférences spatiales entre le faisceau pompe et le bleu produit intracavité, la cavité étant asservie.

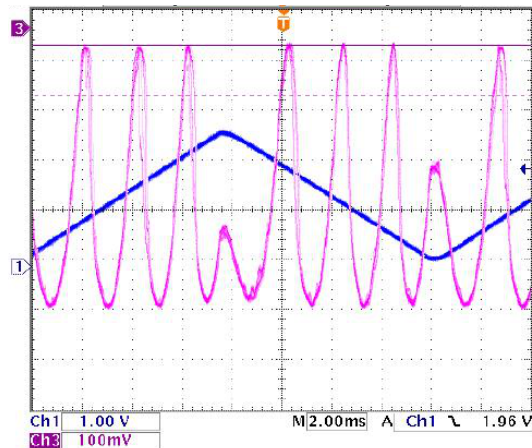
### 6.2.2 Amplification sensible à la phase et obtention du seuil

Une fois le recouvrement spatio-temporel accompli, nous pouvons observer, en l'absence d'injection dans la cavité et pour une puissance de pompe assez élevée, l'émission d'infrarouge. On atteint alors le seuil de la cavité. En dessous du seuil, il n'y a pas d'émission, mais si l'infrarouge est injecté, on observe l'amplification du signal sensible à la phase. Cela signifie que l'intensité du faisceau signal transmis dépend de la phase de la pompe. La figure 6.2.1 montre la courbe d'amplification-désamplification du signal lorsqu'on balaye la phase de la pompe avec une cale piézo-électrique, la puissance de pompe étant très proche du seuil.

Nous avons mesuré la puissance de seuil du SPOPO en utilisant deux cristaux d'épaisseurs différentes. Pour un cristal de  $500 \mu\text{m}$ , le seuil est obtenu pour une puissance de pompe (moyenne) de 32 mW (puissance crête de 4 kW). Pour un cristal de  $350 \mu\text{m}$  d'épaisseur, le seuil est obtenu pour une puissance moyenne de 50 mW (puissance crête de 6 kW). Ces valeurs sont compatibles avec les prédictions théoriques. On a observé une émission de faisceau intense au-dessus du seuil, prenant la forme de pics de cavité quand on balaye la longueur de celle-ci. Il a été possible d'asservir cette cavité sur un mode d'émission au-dessus du seuil. L'asservissement restait néanmoins très instable et la caractérisation du mode émis n'a pas été effectuée.

### 6.2.3 Asservissement de la phase relative

Il a été possible d'asservir la phase relative entre la pompe et le signal par une technique similaire à celle utilisée pour asservir la cavité à résonance. Une modulation de phase est introduite sur le faisceau pompe à 1,8 MHz pour extraire un signal d'erreur dont l'allure correspond à la dérivée de la courbe d'amplification dépendante de la phase. Cette phase est ainsi asservie de sorte que le signal reste au minimum de désamplification.



**Figure 6.2.1:** Écran d'oscilloscope témoignant l'amplification sensible à phase. Le signal est négatif sur la courbe rose : l'amplification se trouve alors en bas de la figure. Nous observons un gain maximal en amplification égal à 4,3 et un gain minimal en désamplification de 0,25 selon la phase de la pompe (courbe bleue). L'OPO se trouve donc très proche du seuil.

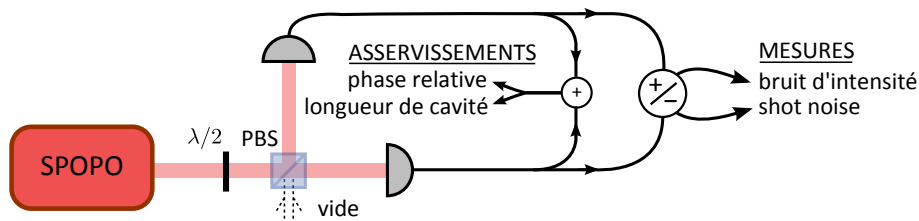
### 6.3 Détection balancée et mesures d'états non-classiques

La théorie du SPOPO développée au chapitre 4 (pour une autre approche, voir p.ex. [Pinel 10]) relie le phénomène d'amplification sensible à la phase au changement des propriétés de bruit du faisceau transmis. Pour un faisceau brillant au maximum d'amplification, la quadrature phase est maximale comprimée, tandis qu'au minimum de désamplification, c'est la quadrature d'amplitude qui subit une réduction maximale de bruit.

On passe maintenant à une description succincte du système de détection et des résultats obtenus pour les mesures d'états non-classiques.

#### 6.3.1 Détection balancée et mesure du bruit d'amplitude de faisceaux brillants

La détection balancée est une façon simple d'accéder aux propriétés quantiques de l'amplitude de faisceaux brillants. Elle consiste à séparer le faisceau en deux parties de puissances égales, détectées par deux photodiodes parfaitement équilibrées. On effectue ensuite la somme et la différence des deux photocourants. Le signal somme équivaut au signal que l'on obtiendrait s'il n'y avait qu'une photodiode qui détecte la totalité du faisceau initial. L'analyse spectrale de ce signal donne ainsi accès au bruit d'intensité de l'état. La différence des photocourants, en revanche, fournit le bruit quantique standard (shot noise) à la puissance du faisceau, quelque soit l'état d'entrée.



**Figure 6.3.1:** Montage expérimental de la détection balancée. Dans notre cas, une partie des signaux de photocourant est destinée aux asservissements et le restant aux mesures de spectre de bruit.

En comparant qualitativement les spectres de bruit des signaux somme et différence de la détection balancée, trois situations sont possibles :

1. Les signaux sont au même niveau de bruit. Le bruit *d'intensité* de l'état est donc au shot noise, ce qui est le cas pour un faisceau cohérent, par exemple.
2. Le bruit de la somme est supérieur au bruit de la différence. L'état possède alors un excès de bruit d'intensité. Cela peut correspondre à un état comprimé en phase ou bien, tout simplement, à un état avec excès de bruit.
3. Le bruit de la somme est inférieure au bruit de la différence. Dans ce cas, le bruit d'intensité est en deçà de la limite quantique standard : on a alors une *preuve* du caractère non-classique de l'état.

La figure 6.3.1 montre un schéma du montage expérimental de la détection balancée, où nous prélevons une partie du photocourant de chaque photodiode pour asservir à la fois la longueur de la cavité et la phase de la pompe. Avec l'autre partie du signal, nous extrayons la somme et la différence des photocourants pour la mesure des spectres de bruit avec un analyseur de spectre. Les photodiodes utilisées ont une efficacité quantique supérieure à 90% et le taux d'extinction entre la paire de détecteurs est d'environ 30 dB.

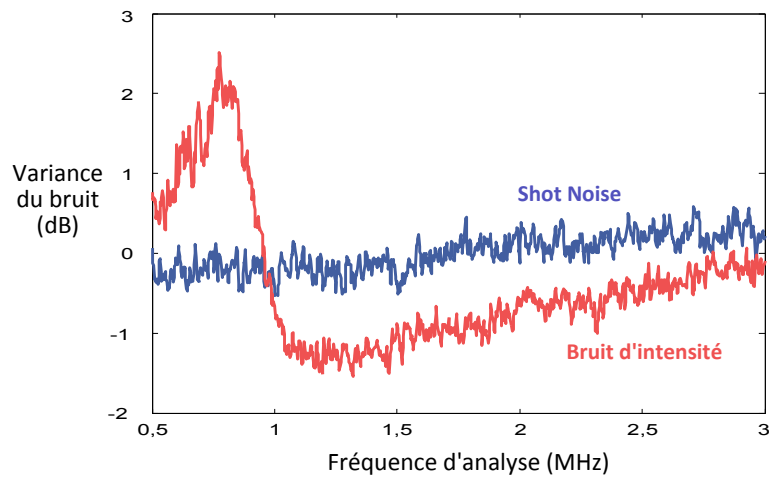
### 6.3.2 Réduction du bruit quantique d'amplitude

La phase de la pompe étant asservie pour que le signal soit désamplifié, nous avons pu observer une réduction du bruit d'intensité (et donc d'amplitude) du faisceau signal transmis ( $\sim 100 \mu\text{W}$ ) au delà de la limite quantique standard entre 1 et 3 MHz (figure 6.3.2, obtenue avec un cristal de  $500 \mu\text{m}$  d'épaisseur). La production d'un état comprimé en quadrature avec un SPOPO femtoseconde est un résultat qui n'avait jamais été observé<sup>1</sup>. La variance du bruit est comprimée d'environ 1,2 dB en puissance par rapport au shot noise entre 1 et 1,5 MHz et s'égale au shot noise à partir de 3 MHz environ. Cette chute du squeezing avec la fréquence est un effet de la bande passante

1. Le résultat avait déjà été obtenu en régime picoseconde [Shelby 92].



## 6 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité linéaire



**Figure 6.3.2:** Réduction du bruit d'amplitude du faisceau signal en dessous de la limite quantique standard entre 1 et 3 MHz avec un SPOPO. Le pic à 800 kHz correspond aux oscillations de relaxation du laser. La bande passante de détection est ici de 30 kHz et la bande passante vidéo est de 10 Hz.

de la cavité<sup>2</sup>. Le pic proche de 800 kHz provient des oscillations de relaxation du laser, qui provoque un excès de bruit classique à cette fréquence. La hauteur de ce pic peut être minimisée en ajustant finement la largeur de la fente dans la cavité laser, mais nous ne l'avons jamais vu s'annuler complètement. On rappelle que 800 kHz est aussi la fréquence des *fortes* modulations d'amplitude qui apparaissent quand le laser est en *Q-switched mode-locking* (cf. figure 5.2.3b).

Nous avons pu observer la réduction du bruit d'amplitude plusieurs fois au cours d'un an de manipulations, sans réussir à obtenir des quantités de squeezing plus conséquentes, naturellement attendues grâce au facteur de désamplification et l'efficacité de couplage avec la sortie (*escape efficiency*), qui consiste en le rapport entre les pertes du miroir de sortie et les pertes totales (en intensité). Les raisons pour lesquelles nous n'avons pas observé plus de compression de bruit, même si l'on prend en compte la bande passante de la cavité, n'ont jamais été complètement comprises, mais nous avons une explication possible (développée dans la thèse d'Olivier Pinel [Pinel 10]) liée à une instabilité observée lors du balayage de la phase relative entre la

2. Dans la figure 6.3.2, on note l'absence des pics de modulation à 1,4 MHz et 1,8 MHz (pour les asservissements de la longueur de la cavité et de la phase de la pompe, respectivement). En effet, pour ces mesures-là, nous avons utilisé des fréquences de modulation au delà de 3 MHz, qui donnent un bon aspect pour les courbes de bruit prises sur une grande plage de fréquences. En revanche, les asservissements deviennent assez instables dans cette configuration car les modulations sont fortement atténuées par la cavité (effet de la bande passante). Nous avons donc donné préférence aux basses fréquences de modulation pour les mesures de la suite, où on regardera, par exemple, le bruit à une fréquence d'analyse donnée (*zero span*).

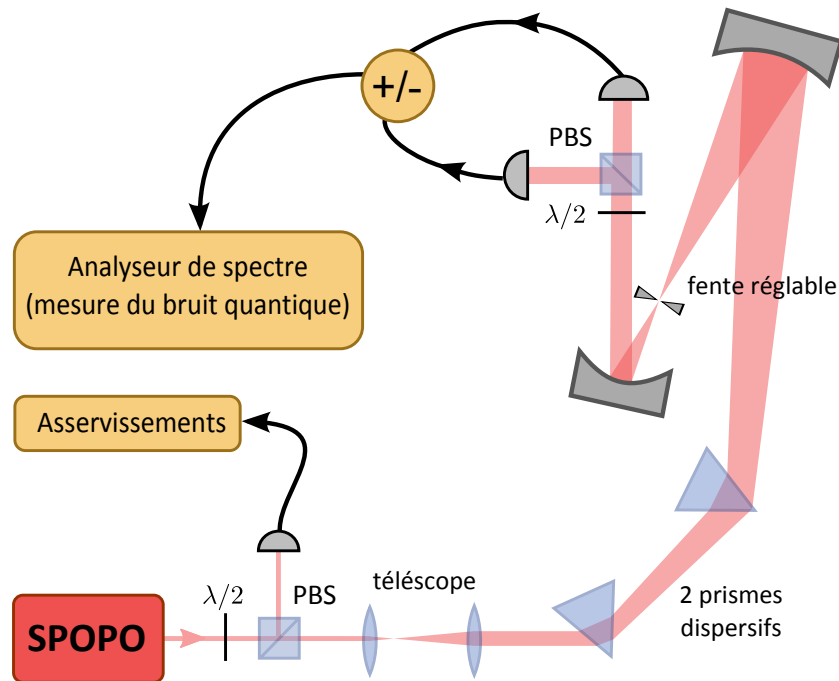


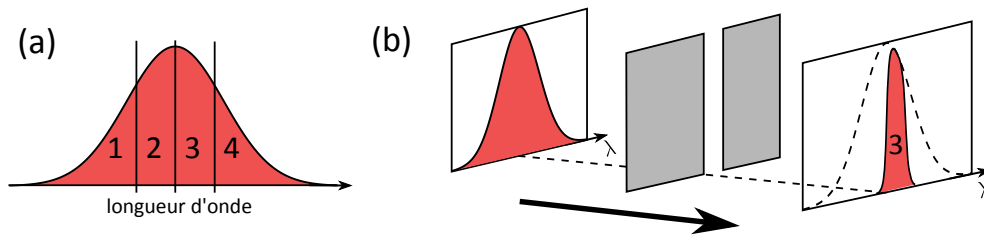
Figure 6.3.3: Détection balancée avec filtrage spectral permettant de sélectionner la zone du spectre optique à mesurer.

pompe et l'injection. Comme on le verra dans le chapitre suivant, les états produits par la nouvelle génération de l'expérience (avec une cavité en anneau) sont du vide comprimé, car on peut se permettre d'"injecter du vide" dans la cavité tout en l'ayant asservie. On n'aura donc plus les mêmes problèmes d'instabilité et les niveaux de compression obtenus sont bien meilleurs.

### 6.3.3 Détection balancée à filtrage spectral

Pour interroger l'état produit par le SPOPO quant à sa nature multimode, au sens présenté en section 3.2.2, nous avons étudié la distribution des fluctuations quantiques d'intensité au long du spectre optique du peigne de fréquence, d'une manière similaire à ce qui a été fait en [Spälter 98] et [Opatrny 02], où on relève les corrélations de bruit entre les différentes régions du spectre.

Dans ce but, nous avons mis en place une détection balancée avec filtrage spectral, schématisée sur la figure 6.3.3. Les composantes fréquentielles du faisceau sont d'abord dispersées spatialement à l'aide de deux prismes taillés à Brewster (évitant ainsi des pertes). Ensuite, une lentille sphérique focalise le faisceau sur son plan de Fourier, où nous plaçons une fente réglable à lames de rasoir dont on peut régler la position et la largeur. Le faisceau est ensuite recollimaté et envoyé dans une détection balancée.



**Figure 6.3.4:** (a) Spectre divisé en 4 pixels de puissances égales. (b) Filtrage spectral : les fréquences sont dispersées spatialement et les zones spectrales sont sélectionnées par la fente réglable.

Le filtre spectral avait une résolution théorique d'environ 2 nm, calculée à partir du rayon du faisceau, la dispersion des prismes et de la distance focale du premier miroir sphérique. La résolution mesurée a été de 1,8 nm. Avec une telle résolution nous avons pu diviser le spectre du peigne (d'une largeur FWHM d'environ 6 nm) en quatre parties de puissances égales, appelées pixels, symétriques par rapport au centre du spectre et numérotées de 1 à 4 (voir figure 6.3.4). De cette manière, il est possible de sélectionner le pixel (ou la somme de pixels) sur laquelle on réalise la détection balancée. Nous verrons dans la prochaine sous-section, comment cela nous aide en pratique à extraire des informations sur le caractère multimode de l'état.

Une dernière remarque par rapport au montage concerne la façon dont nous asservissons la cavité et la phase de la pompe en présence du filtrage spectral. Les signaux d'erreur sont produits à partir d'une petite fraction de puissance (environ 10%) prélevée juste après la sortie de la cavité par un cube polariseur. On note que, dans la figure 6.3.1, la séparation était faite au niveau électronique, donc après la détection, tandis que, dans le cas de la figure 6.3.3, la séparation est optique et induit des pertes qui dégradent les propriétés quantiques de l'état.<sup>3</sup> Néanmoins, le dernier montage a l'avantage de nous permettre de régler le filtre spectral (et ainsi passer d'un pixel à l'autre) sans perdre les asservissements de la cavité et de la phase ni changer le niveau des signaux d'erreur, ce qui fait que les mesures des différents pixels sont réalisées sous les mêmes conditions en termes de stabilité d'asservissement.

### 6.3.4 Caractérisation d'états non-classiques multimodes

Nous pouvons caractériser un état quantique multimode en termes des modes de détection, plus précisément à travers les corrélations quantiques entre ces modes. Ici, les modes de détection sont les quatre pixels que nous venons de définir, qui peuvent être mesurés séparément par la détection balancée grâce au filtrage spectral.

3. On rappelle, par contre, que l'on peut naturellement corriger le squeezing des pertes, et que pour 1 dB de réduction de bruit, 10% de pertes ne changent pas brutalement la quantité de squeezing finale.

### Principe

Le point de départ pour reconstruire une matrice de corrélation des pixels consiste à mesurer les covariances

$$\text{cov}(n_i, n_j) = \langle \hat{n}_i \hat{n}_j \rangle - \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle \quad (6.3.1)$$

où  $\hat{n}_i$  est le nombre de photons dans le pixel  $i$ .  $\text{cov}(n_i, n_j)$  est la fonction de corrélation en nombre de photons entre les pixels  $i$  et  $j$  (pour  $i \neq j$ ) et  $\text{cov}(n_i, n_i)$  donne la variance du nombre de photons dans le pixel  $i$  :

$$\text{cov}(n_i, n_i) = \Delta n_i^2 = \langle \hat{n}_i^2 \rangle - \langle \hat{n}_i \rangle^2. \quad (6.3.2)$$

$\Delta n_i^2$  est obtenu directement à partir du signal somme de la détection balancée pour le pixel  $i$ . Or,

$$\boxed{\Delta(n_i + n_j)^2 = \Delta n_i^2 + \Delta n_j^2 + 2\text{cov}(n_i, n_j)}. \quad (6.3.3)$$

Les  $\text{cov}(n_i, n_j)$  peuvent donc être obtenues, en principe, à partir de la mesure de trois variances : celles des pixels  $i$  et  $j$  séparément plus la variance de la somme des ces pixels.

Ainsi, avec l'équation (6.3.3), un système à une fente unique réglable permet d'accéder directement à  $\text{cov}(n_1, n_2)$ ,  $\text{cov}(n_2, n_3)$  et  $\text{cov}(n_3, n_4)$ . Pour déterminer, disons,  $\text{cov}(n_1, n_3)$ , on peut alors utiliser l'équation

$$\begin{aligned} \Delta(n_1 + n_2 + n_3)^2 &= \Delta n_1^2 + \Delta n_2^2 + \Delta n_3^2 \\ &+ 2\text{cov}(n_1, n_2) + 2\text{cov}(n_2, n_3) + 2\text{cov}(n_1, n_3). \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Et de manière similaire on obtient toutes les covariances restantes. Au total, nous effectuons donc des mesures de bruits sur 10 zones spectrales : {1}, {2}, {3}, {4}, {12}, {23}, {34}, {123}, {234} et {1234} (où {123}, par exemple, représente la somme des pixels 1, 2 et 3). Pour chaque zone  $\{i_1 \dots i_m\}$  mesurée, les fluctuations d'intensité détectées s'écrivent

$$\Delta \left( \sum_{i=i_1, \dots, i_m} n_i \right)^2 = \sum_{i, j=i_1, \dots, i_m} \text{cov}(n_i, n_j) \quad (6.3.5)$$

et, au final, en résolvant un système linéaire de dix équations du type (6.3.5), on retrouve toutes les covariances.

À partir de ces valeurs, on reconstruit la *matrice de corrélation d'intensité*, définie comme

$$\boxed{C(i, j) = \frac{\text{cov}(n_i, n_j)}{\sqrt{\Delta n_i^2 \Delta n_j^2}} - \delta_{ij} \frac{\Delta n_{i, \text{shot}}^2}{\Delta n_i^2}}. \quad (6.3.6)$$

## 6 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité linéaire

Cette matrice est normalisée de sorte que  $|C(i, j)| \leq 1$  et l'élément diagonal  $C(i, i)$  contient la différence (normalisée) entre le bruit d'intensité  $\Delta n_i^2$  et le shot noise  $\Delta n_{i, \text{shot}}^2$  mesurés pour le pixel  $i$  :

$$C(i, i) = \frac{\Delta n_i^2 - \Delta n_{i, \text{shot}}^2}{\Delta n_i^2}. \quad (6.3.7)$$

Si l'état est monomode, comme les pixels ont tous la même puissance, alors tous les éléments diagonaux de la matrice de corrélation doivent avoir la même valeur, et les éléments non-diagonaux doivent avoir tous une autre valeur. Si ce n'est pas le cas, alors l'état est multimode.

### Résultats

Nous avons effectué les mesures de covariance sur un état avec un bruit normalisé global d'intensité  $\Delta n^2 / \Delta n_{\text{shot}}^2 = 0,84 \pm 0,02$  à 1,5 MHz, soit environ 0,7 dB de squeezing d'intensité sur la totalité du spectre optique. Sur chaque zone de détection  $\{i_1 \dots i_m\}$ , nous avons mesuré le bruit d'intensité et le shot noise à la fréquence de 1,5 MHz pendant 5 s, pour un total de 1000 points pour chaque mesure. Pendant tout le processus de mesure des 10 zones, la cavité et la phase sont restées asservies et l'intensité totale transmise par la cavité était surveillée.

Les valeurs moyennes de chaque ensemble de 1000 points ont été utilisées pour reconstruire la matrice de corrélation, montrée dans la figure 6.3.5. Dans le cas monomode, on montre facilement que toutes les fonctions de corrélation (6.3.6) entre pixels devraient être égales à -0,035. La présence d'un élément diagonal (1,1) avec moins de squeezing local et d'un élément non-diagonal présentant plus d'anti-corrélation que les autres coefficients suggère que le faisceau de sortie du SPOPO est de fait dans un état non-classique multimode. Néanmoins, l'incertitude des éléments non-diagonaux ne nous permet pas d'affirmer sans ambiguïté que l'état généré est multimode. En effet, l'écart-type des éléments diagonaux était 0,014, mais les écarts-type des éléments non-diagonaux se distribuent entre 0,022 et 0,133.

Pour démontrer l'aspect multimode, nous avons effectué une autre analyse qui consistait à calculer les modes propres impliqués dans cet ensemble de données et vérifier si ces modes sont effectivement excités. Nous avons donc reconstruit la matrice de covariance d'amplitude dans la base des quatre pixels :

$$V_{x_i, x_j} = \frac{1}{2} \langle \delta \hat{x}_i \delta \hat{x}_j + \delta \hat{x}_j \delta \hat{x}_i \rangle, \quad (6.3.8)$$

où  $\hat{x}_i = \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger$  est la quadrature d'amplitude et  $\delta \hat{x} = \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$ . Les informations sur la quadrature de phase ne peuvent pas être relevées avec notre technique, puisque nous procédons uniquement à des mesures du bruit d'intensité. Nous faisons donc

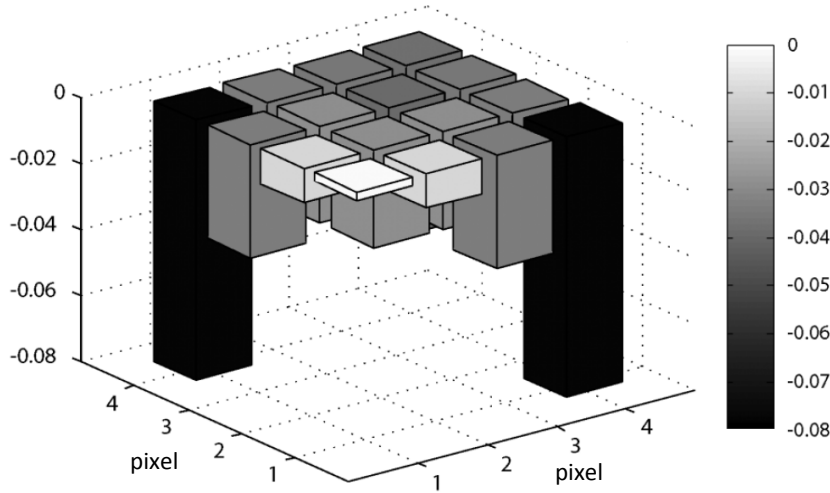


Figure 6.3.5: Matrice de corrélation d'intensité entre les pixels,  $C(i, j)$ , reconstruite à partir des données expérimentales.

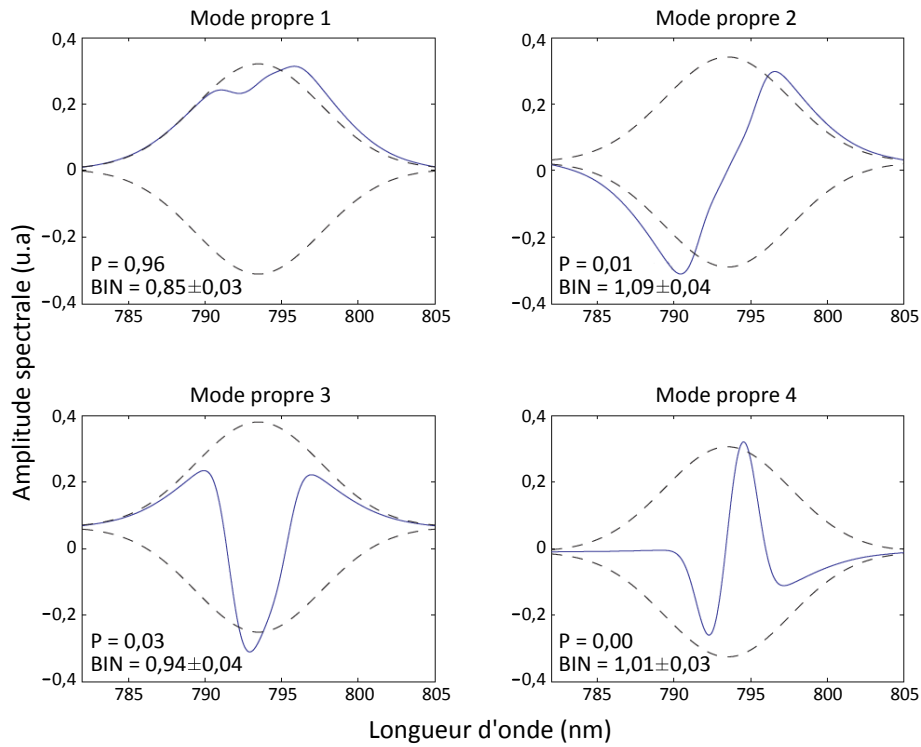
l'hypothèse que toutes les composantes du spectre ont la même phase, de sorte que l'on peut les prendre toutes réelles, ce qui est tout à fait raisonnable dans le contexte de l'expérience (et a d'ailleurs été vérifié par la suite). On montre alors, comme dans [Opatrny 02], que  $\text{cov}(n_i, n_j) \approx \langle \hat{x}_i \rangle \langle \hat{x}_j \rangle V_{x_i, x_j}$ . Le nombre moyen de photons dans un pixel vaut alors  $\langle \hat{n}_i \rangle \approx \langle \hat{x}_i \rangle^2$  et on obtient une expression simple pour les éléments de la matrice de covariance d'amplitude :

$$V_{x_i, x_j} = \frac{\text{cov}(n_i, n_j)}{\sqrt{\Delta n_{i, \text{shot}}^2 \Delta n_{j, \text{shot}}^2}}. \quad (6.3.9)$$

La diagonalisation de la matrice de covariance  $V$  nous permet d'inférer que la lumière générée par le SPOPO est constituée d'un ensemble de quatre modes *décorrélés* (les vecteurs propres de  $V$ ) à bruits d'intensité donnés (les valeurs propres de  $V$ ). On trouve que, parmi ces quatre mode propres  $S_\ell$ , il y en a deux avec valeur propre inférieure à 1 (la limite quantique standard) et un avec valeur propre supérieure à 1, comme on peut le voir sur la figure 6.3.6. L'incertitude de la mesure est suffisamment petite pour conclure que le premier et le troisième mode propre sont comprimés en amplitude et que le deuxième a de l'excès de bruit en amplitude, mais pas suffisamment petite pour pouvoir affirmer que le quatrième mode propre est excité. Cela montre que le faisceau de sortie du SPOPO est décrit par au moins trois modes indépendants et au moins deux d'entre eux sont dans un état comprimé, donc non-classique ; le quatrième mode peut être considéré comme du vide.

L'incertitude du bruit d'intensité des modes propres a été estimée de la manière suivante : on génère 10000 matrices de covariance à partir d'éléments pris hasards

6 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité linéaire



**Figure 6.3.6:** Profil spectral des modes propres  $S_\ell$ , qui sont des combinaisons linéaires des modes-pixel. Les modes-pixel sont lissés prenant en compte la résolution du filtre passe-bande spectral : 1,8 nm. Lignes continues : modes propres. Lignes interrompues : mode du champ moyen. P = fraction de la puissance totale. BIN = bruit d'intensité normalisé au shot noise.

dans l'ensemble de nos données expérimentales. Après rotation dans la base des  $S_\ell$ , les éléments non-diagonaux de ces matrices fluctuent autour de  $0 \pm 0,03$ , ce qui montre que les modes  $S_\ell$  sont bien les modes propres de ces champs générés aléatoirement. Les éléments diagonaux donnent le bruit d'intensité normalisé de ces modes, et leur étalement autour de la moyenne fournit l'incertitude.

Le mode propre  $S_1$ , dans lequel on trouve presque la totalité de la puissance du faisceau, possède environ la même quantité de squeezing que le mode du champ moyen. On observe également que les profils des modes propres calculés sont proches des quatre premières fonctions Hermite-Gauss, ce qui est compatible avec la théorie, qui prédit encore que le deuxième supermode du SPOPO est comprimé en phase et présente donc de l'excès de bruit en amplitude.

La procédure que nous venons de décrire montre que l'état généré est décrit par au moins trois modes (deux d'entre eux dans un état comprimé en amplitude). Néanmoins, une description complète du champ généré par le SPOPO implique potentiellement plus de modes : une séparation du spectre en plus de quatre pixels (il faudrait alors un filtrage spectral avec une meilleure résolution) pourrait révéler des corrélations d'intensité qui nécessitent plus de trois modes pour être décrites. De plus, cette technique ne prend pas en compte la possibilité de corrélations avec les fluctuations de phase,  $\delta\hat{p}_i$ . Une caractérisation complète de l'état quantique en sortie du SPOPO nécessite la connaissance de  $V_{p_i,p_j}$  et  $V_{x_i,p_j}$ , qui demande la mise en place d'une détection homodyne avec mise en forme de l'oscillateur local, ce que nous avons fait dans la deuxième génération de l'expérience (chapitre suivant).

## 6.4 Conclusion

Nous avons observé pour la première fois à notre connaissance l'amplification sensible à la phase avec un SPOPO femtoseconde. En régime de désamplification maximale, nous avons démontré, à travers de mesures de bruit d'intensité, le caractère non-classique du faisceau brillant produit par le SPOPO, ce qui constitue également un résultat nouveau. De plus, nous avons (partiellement) caractérisé le contenu multimode de l'état du faisceau en termes de modes propres décorrélés en bruit avec des profils spectraux bien définis. On a donc une preuve expérimentale du fait que le SPOPO est une source d'états quantiques multimodes.





## 7 Réalisation expérimentale d'états non-classiques avec un SPOPO femtoseconde en cavité en anneau

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>La cavité en anneau</b>	<b>130</b>
7.1.1	Pourquoi une cavité en anneau ?	130
7.1.2	Conception et géométrie	130
7.1.3	Mode transverse résonnant	132
7.1.4	Mise en place et alignement	133
7.1.5	Asservissement de la longueur	134
<b>7.2</b>	<b>SPOPO en dessous du seuil</b>	<b>134</b>
7.2.1	Alignement du cristal non-linéaire et de la pompe	134
7.2.2	Amplification sensible à la phase et obtention du seuil	134
<b>7.3</b>	<b>SPOPO au-dessus du seuil</b>	<b>134</b>
7.3.1	Régimes de fonctionnement	134
7.3.2	Spectre du premier supermode	135
<b>7.4</b>	<b>Détection homodyne avec mise en forme d'impulsions</b>	<b>137</b>
7.4.1	Principe de la détection homodyne : mesure projective	137
7.4.2	Mise en forme de l'oscillateur local avec un SLM	138
<b>7.5</b>	<b>Observation du vide comprimé sans mise en forme de l'oscillateur local</b>	<b>141</b>
7.5.1	Mode matching de l'oscillateur local	141
7.5.2	Mesure du bruit quantique	142
<b>7.6</b>	<b>Mise en évidence et caractérisation d'états non-classiques multimodes</b>	<b>144</b>
7.6.1	Matrice de covariance et protocole expérimental	145
7.6.2	Résultats obtenus avec le cristal d'épaisseur 0,5 mm	147
7.6.3	Résultats obtenus avec le cristal d'épaisseur 2 mm	151
<b>7.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>153</b>

---

Dans ce chapitre nous présentons le montage expérimental de la nouvelle génération de l'expérience (figure 5.1.3) ainsi que les nouveaux résultats obtenus. Nous discutons en particulier des améliorations apportées à l'expérience grâce au nouveau design de

## 7 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau

cavité en anneau et au système de détection avec mise en forme d'impulsions, mis en place récemment par le post-doctorant Jonathan Roslund.

Dans la première section, nous décrivons les caractéristiques géométriques de la nouvelle cavité. Les propriétés classiques du SPOPO sont présentées dans les sections 7.2 et 7.3. Le système de détection et les mesures d'états non-classiques sont décrits dans les sections 7.4, 7.5 et 7.6.

### 7.1 La cavité en anneau

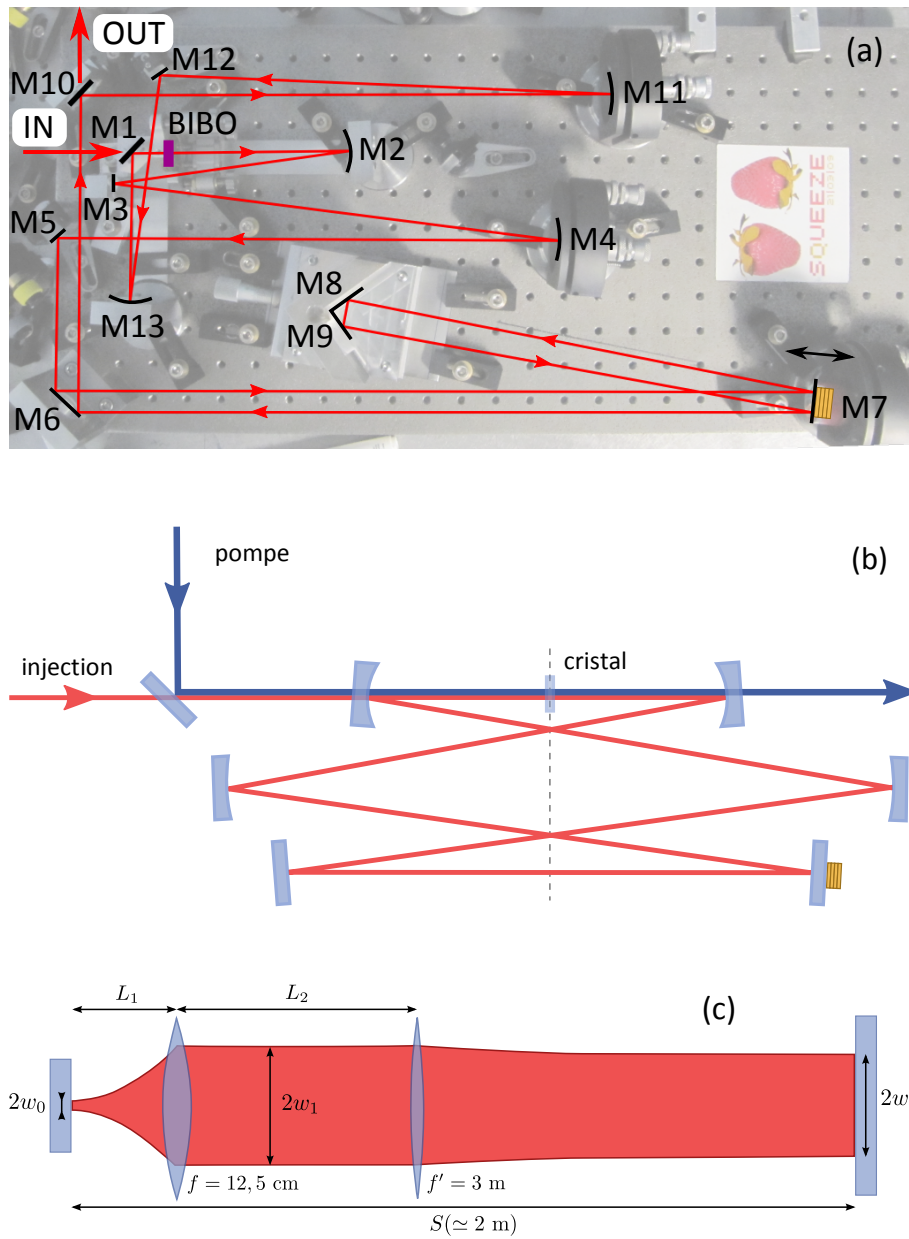
#### 7.1.1 Pourquoi une cavité en anneau ?

Dans une cavité en anneau, par opposition à une cavité linéaire, il est possible d'avoir deux faisceaux indépendants (qui n'interagissent pas si les impulsions ne sont pas synchrones) circulant dans des sens opposés. Cette propriété nous permet d'avoir un faisceau utilisé exclusivement pour l'asservissement de la cavité, ce qui n'était pas le cas dans le montage précédent. En effet, dans la première version de l'expérience, pour avoir un signal d'erreur et asservir la cavité nous étions obligés de prélever de la puissance (optique ou électronique) provenant du faisceau signal. Ceci à la fois détériore la qualité de la mesure et impose des contraintes sur quelle type d'états on peut produire (impossible d'asservir la cavité à partir d'un état vide, p.ex.) et, comme nous l'avons vu, sur comment on peut effectuer des mesures.

Outre découpler l'asservissement et la mesure, la cavité en anneau permet aussi un asservissement plus robuste. D'une part, on peut contrôler librement la puissance du faisceau d'asservissement et, d'autre part, comme le chirp du faisceau contrepropageant n'intervient pas dans la détection, on peut se permettre de moduler la phase du faisceau avec un modulateur électro-optique (EOM).

#### 7.1.2 Conception et géométrie

La cavité linéaire de l'ancienne version de l'expérience présentait quelques difficultés de mise place et d'alignement liées à la taille des montures des miroirs courbes et à la grande sensibilité à la distance entre ces deux miroirs, qui nécessitait donc un réglage très fin. Aussi, dû à des contraintes géométriques, nous n'avions pas de référence visuelle claire pour le réglage du faisceau d'injection après la mise en place des optiques, ce qui rendait l'alignement de la cavité souvent pénible. À cela se rajoute le fait que, le waist du mode résonnant étant très petit ( $17 \mu\text{m}$ ) et le miroir d'entrée faisant office de lentille divergente, les lentilles de mode matching étaient positionnées très proches de la cavité et cela rendait également difficile l'alignement du faisceau d'injection. Nous avons donc conçu une nouvelle cavité pour contourner toutes ces difficultés.



**Figure 7.1.1:** Cavité OPO en anneau. (a) Mise en place expérimentale. (b) Schéma simplifié équivalent. (c) Schéma linéaire équivalent, où on remplace les miroirs courbes par des lentilles, et représentation du mode spatial résonant.

## 7 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau

Nous sommes notamment passé à un waist du mode propre plus grand ( $39 \mu\text{m}$  au niveau du cristal), diminuant les effets d'astigmatisme et rendant le mode matching moins contraignant. Nous avons aussi adopté comme coupleur d'entrée un miroir plan et assez proche du cristal (figure 7.1.1a). Avec ces deux modifications, on a réussi à découpler le mode matching et les miroirs d'injection, ce qui facilite grandement la tâche d'aligner le faisceau par rapport à la cavité, celle-ci étant préalablement alignée. La mise en place de la cavité et son pré-alignement ont été les plus grandes complications, du fait de sa géométrie. Cependant, tout a été conçu pour que, une fois la cavité alignée, le bon angle d'injection du faisceau se trouve très aisément à travers une méthode simple et systématique d'alignement. Ceci consiste en une amélioration importante par rapport au design précédent.

La cavité est montée sur une plaque d'INVAR (qui réduit considérablement les fluctuations en longueur d'origine thermique) de 1 cm d'épaisseur et de dimensions 30 cm x 60 cm environ. Celle-ci est posée sur de la Sorbotane, dans le but de minimiser l'influence des vibrations acoustiques.

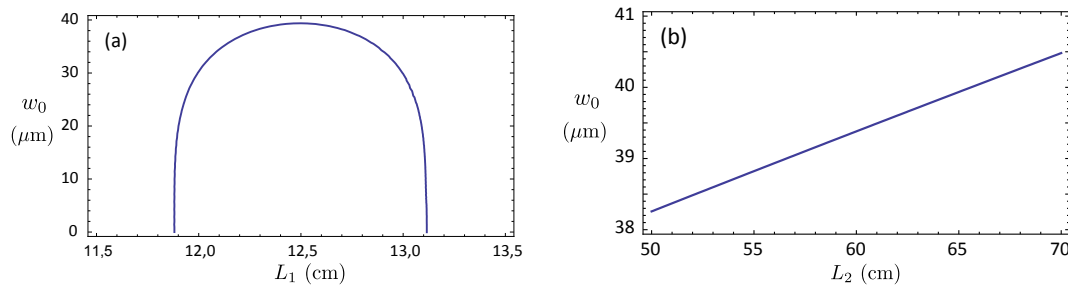
Comme le montre la figure 7.1.1a, la cavité est constituée de 13 miroirs et le faisceau laser subit 15 réflexions par tour (deux miroirs font double réflexion). Elle est parfaitement équivalente à la cavité en anneau schématisée sur la figure 7.1.1b, mais repliée par de nombreux miroirs pour qu'elle soit davantage compacte et puisse être couverte et ainsi être plus stable. Des 13 miroirs, seulement 5 sont réglables (M4, M5, M7, M11 et M12). On gagne donc en robustesse et encore en stabilité.

La cavité est résonnante pour le signal (faisceau infrarouge à 795 nm polarisé verticalement) et non-résonnante pour la pompe (faisceau bleu à 397 nm polarisé horizontalement). Le coupleur d'entrée M1 a une réflectivité  $R = 99\% @ 795 \text{ nm}$ . Pour le coupleur de sortie, M10,  $R = 80\% @ 795 \text{ nm}$ . Tous les autres miroirs possèdent des traitements haute réflectivité (HR) à 795 nm.

Les miroirs M2 et M13 possèdent un rayon de courbure  $R_c = 25 \text{ cm}$ . M4 et M11 sont aussi des miroirs sphériques, avec  $R'_c = 6 \text{ m}$ . La cavité est symétrique par rapport à l'axe représenté en pointillés dans la figure 7.1.1b, ce qui nous permet de l'identifier, pour simplifier, à la cavité linéaire de la figure 7.1.1c où on remplace les miroirs sphériques par des lentilles de distances focales  $f = R_c/2$  et  $f' = R'_c/2$ .

### 7.1.3 Mode transverse résonnant

Nous avons conçu et construit la cavité de telle sorte que M2 et M13 sont à une distance  $f$  du cristal, au millimètre près. En effet, du fait de la plus grande distance focale des miroirs sphériques proches du cristal, cette cavité est stable sur une plage bien plus large que celle de la cavité linéaire. À  $L_2$  fixé (figure 7.1.2a), on voit que l'on peut varier  $L_1$  sur plus de 1,2 cm autour de 12,5 cm tout en gardant la stabilité de la cavité et que le waist  $w_0$  reste à peu près constant et égal à  $39 \mu\text{m}$  pour  $12,4 \text{ cm} < L_1 < 12,6 \text{ cm}$ . La figure 7.1.2b montre que, à  $L_1$  fixé, la position des



**Figure 7.1.2:** Waist du mode propre de la cavité au niveau du cristal en fonction de :  
 (a)  $L_1$ , à  $L_2$  fixé et égal à 60 cm ; (b)  $L_2$ , avec  $L_1 = 12,5$  cm.

miroirs M4 et M11 a peu d'influence sur le waist du mode propre : il faut varier  $L_2$  de presque 10 cm pour obtenir une variation de  $1 \mu\text{m}$  sur  $w_0$ .

Le mode propre transverse de la cavité possède trois autres waists : deux de même rayon  $w_1 \simeq 830 \mu\text{m}$  (l'un à proximité du miroir M3, l'autre, du miroir M12) et un troisième proche de M9 et de rayon  $w_2 \simeq 670 \mu\text{m}$ .

#### 7.1.4 Mise en place et alignement

On commence la mise en place de la cavité en positionnant les miroirs M1 et M2 et en s'assurant que le faisceau passe bien par le centre la face intérieure de M1 et est réfléchi au centre de M2. Ensuite on le dirige vers le centre du miroir M4 en utilisant M3 et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il réalise un tour complet de cavité. Les miroirs réglables M4 et M5 permettent que le faisceau soit bien aligné sur la ligne à retard et avec les miroirs M11 et M12 on assure le bouclage du faisceau, qui doit se superposer à lui-même à partir du miroir d'entrée.

Du moment où nous avons un signal en transmission correspondant à plusieurs tours de cavité, nous réglons la longueur de la cavité grâce à la ligne à retard des miroirs M8 et M9 et cherchons à obtenir les pics de résonance, en balayant la longueur avec une piézo, exactement comme dans le cas de la cavité linéaire. Cette piézo, collée sur un miroir qui fait double réflexion (M7), permet de balayer la longueur sur une plage de  $4 \times 5 \mu\text{m}$ .

Une fois la cavité et le faisceau d'injection optimisés pour que seul le mode  $\text{TEM}_{00}$  soit transmis, nous alignons le faisceau contra-propageant de sorte qu'il soit parfaitement superposé au premier. Nous optimisons les pics de résonance sans toucher à la cavité : on n'a qu'à redresser le faisceau avec les miroirs d'injection car la cavité est déjà alignée. Le faisceau contrepropageant est injecté dans la cavité par le miroir M1 également, mais en faisant un angle droit par rapport au faisceau signal, ce qui fait qu'il sort par M10 aussi dans une direction orthogonale au signal.

### 7.1.5 Asservissement de la longueur

Le faisceau contrepropageant est celui utilisé pour asservir la cavité à résonance. Comme dans le cas de la cavité linéaire, on utilise la méthode PDH avec modulation de phase à 1,4 MHz, la seule différence étant que la modulation est réalisée par un EOM, au lieu d'un actuateur piézo-électrique.

## 7.2 SPOPO en dessous du seuil

### 7.2.1 Alignement du cristal non-linéaire et de la pompe

Les procédures d'alignement du cristal et de la pompe sont similaires à celles décrites en section 6.2.1. Le recouvrement temporel est obtenu cette fois-ci grâce à une ligne à retard manuelle réglable par vis micrométrique mise en place sur le chemin du faisceau signal, comme on le voit dans la figure 5.1.3. Le recouvrement est atteint lorsque l'on observe, derrière le miroir M2, des interférences spatiales entre le faisceau pompe et le bleu résultant du doublage intracavité, la cavité étant asservie. L'alignement de la pompe est alors optimisé pour que l'interférence soit en teinte plate, tandis que le délai est réglé pour optimiser le contraste entre les régions d'interférence destructive et constructive. Le contraste peut être observé en balayant lentement la piézo de la ligne à retard.

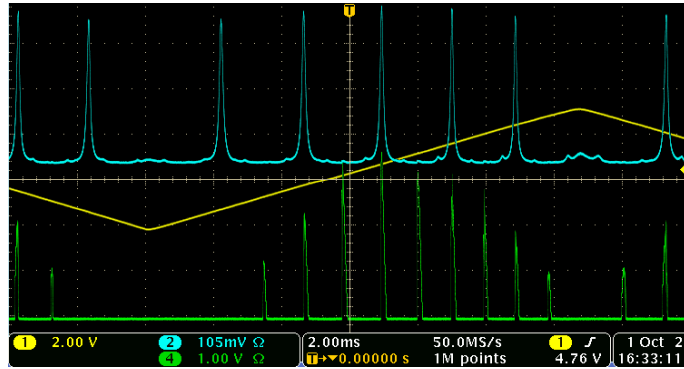
### 7.2.2 Amplification sensible à la phase et obtention du seuil

Le recouvrement spatio-temporel entre la pompe et le signal entraîne naturellement l'amplification sensible à la phase, comme dans la figure 6.2.1 du chapitre précédent. On optimise le contraste entre l'amplification et la désamplification et ensuite on augmente la puissance de la pompe pour obtenir le seuil du SPOPO. Avec un cristal BIBO d'épaisseur 0,5 mm, nous mesurons typiquement un seuil de 85 mW. Nous l'avons aussi mesuré pour un miroir de sortie de réflectivité  $R = 90\%$ , transmettant donc deux fois moins. Comme prédit par la théorie, nous avons obtenu une puissance de seuil environ 4 fois plus basse (20 mW), car elle est proportionnelle au carré des pertes totales en intensité. Nous soulignons le fait que la valeur de la puissance de seuil est *très* sensible au mode matching et à l'alignement du faisceau pompe.

## 7.3 SPOPO au-dessus du seuil

### 7.3.1 Régimes de fonctionnement

Au-dessus du seuil, l'OPO émet de l'infrarouge même s'il n'y a pas de signal injecté. Dans ce cas, en balayant la longueur de la cavité, on peut comparer les pics de résonance en l'absence de pompe et les pics d'émission au-dessus du seuil (figure 7.3.1).



**Figure 7.3.1:** Pics observés lorsque l'on balaye la longueur de la cavité. Dans la partie supérieure (en bleu) : pics de transmission du faisceau d'asservissement (qui n'interagit pas avec la pompe). Dans la partie inférieure (en vert) : pics d'émission SPOPO au-dessus du seuil (sans injection).

Sur cette figure, la ligne jaune représente la longueur de la cavité (plus précisément, la tension appliquée à l'actuateur piézoélectrique du miroir M7) et les pics correspondent à l'intensité lumineuse en sortie de la cavité. On voit que la distance entre deux pics d'émission consécutifs est deux fois plus petite que la distance entre deux pics de résonance sous le seuil, soit la moitié de l'intervalle spectral libre (ISL) de la cavité.

On observe donc, dans la partie inférieure de la figure, les deux régimes de fonctionnement de l'OPO au-dessus du seuil décrits en section 4.4.2. Les pics d'émission qui coïncident avec les pics de transmission de la partie supérieure correspondent à l'émission d'un peigne de fréquences possédant un décalage  $\omega_{CE}$  qui vaut la moitié de celui de la pompe,  $2\omega_{CE}$ . Le peigne transmis lorsque l'on est sur un pic intermédiaire, à son tour, a un décalage en fréquence de  $\omega_{CE} + \omega_T/2$ . Le profil spatial du mode émis est un  $TEM_{00}$ .

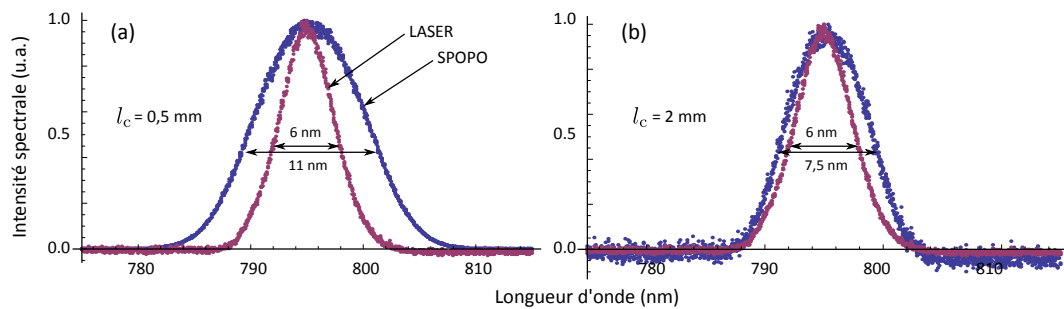
### 7.3.2 Spectre du premier supermode

Nous avons également mesuré le spectre de la lumière émise par le SPOPO au-dessus du seuil, qui doit correspondre au profil spectral du premier supermode. Cela a été possible en asservissant la cavité sur le pic central de résonance et en augmentant suffisamment la puissance de pompe. Dans la figure 7.3.2a, on compare le spectre émis au-dessus du seuil (en utilisant un cristal d'épaisseur 0,5 mm) avec le spectre émis par le laser.

La largeur du spectre du premier supermode dépend essentiellement de la largeur spectrale de la pompe et de la fonction d'accord de phase. D'après ce que nous avons vu en section 2.4, pour un cristal doubleur assez fin et des spectres d'enveloppes gaussiennes, comme dans notre cas, le spectre de la pompe a une largeur donnée par celle du spectre laser multipliée par  $\sqrt{2}$ . Des spectres plus étroits peuvent être



## 7 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau



**Figure 7.3.2:** Spectre laser et spectre d'émission du SPOPO au-dessus du seuil avec un cristal d'épaisseur (a) 0,5 mm ; (b) 2 mm. Les largeurs indiquées sont prises à mi-hauteur (FWHM).

générés en utilisant des cristaux plus épais, où les effets de la GVD deviennent non-négligeables (figure 2.4.2). Quant à l'accord de phase de la conversion paramétrique descendante, il dépend aussi uniquement de l'épaisseur du cristal (si on le suppose parfaitement aligné). Pour une pompe de largeur 2,1 nm (FWHM en intensité) et un cristal d'épaisseur 500  $\mu\text{m}$ , on s'attendrait (figure 2.5.3) à un premier supermode de 40 nm bande spectrale environ (FWHM en intensité), alors que l'on ne mesure que 11 nm.

Nous avons réalisé très récemment que cela vient probablement du fait que les miroirs de la cavité ne sont pas HR sur une bande spectrale assez large. En effet, sur un ensemble de 15 réflexions par tour de cavité, cela pourrait entraîner suffisamment de pertes pour que les longueurs d'ondes des ailes du spectre soient "coupées" du spectre d'émission du SPOPO. Deux faits corroborent cette hypothèse. Le premier : une analyse des courbes de transmission des différents miroirs fournies par le fabricant (CVI Melles Griot) montre que les régions où la transmission est à peu près plate (et proche de zéro) ne dépassent jamais une largeur de 30 nm, pouvant être plus petites que 20 nm. Le deuxième fait vient d'une mesure de spectre émis au-dessus du seuil réalisée avec un miroir de sortie à réflectivité  $R = 10\%$ . Nous avons observé un spectre presque identique à celui émis par le laser, c'est-à-dire avec une largeur d'environ 6 nm (FWHM en intensité). La finesse plus élevée a donc amplifié l'effet de coupure des ailes du spectre, mettant en évidence le fait que les courbes de transmission des miroirs de la cavité ne sont pas suffisamment plates autour de la longueur d'onde centrale. Les modes propres de la cavité ne sont donc pas nécessairement les modes propres de la conversion paramétrique : les miroirs de cavité jouent un rôle du fait de la dépendance spectrale des pertes et de la dépendance spectrale de la transmission du miroir de sortie.

On peut envisager deux solutions pour ce problème :

1. Changer les miroirs de la cavité pour qu'elle soit résonnante pour une plage de fréquences suffisamment large ;

2. Modifier les propriétés de la pompe et/ou du cristal intracavité pour produire des supermodes de largeur comparable à celle du spectre laser, qui résonne sans difficultés dans la cavité.

La deuxième option est préférable car avoir un supermode de spectre plus étroit permet de réaliser la mesure de ces propriétés quantiques par une détection homodyne (voir section 7.4) où l'oscillateur local est un faisceau provenant directement du laser, sans avoir recours à des techniques d'élargissement spectral. En effet, si, à la place d'un cristal de 0,5 mm d'épaisseur, on utilise un cristal de 2 mm, on montre (figure 2.5.4) que la largeur spectrale théorique du premier supermode (7 nm) devient comparable à celle du faisceau délivré par le laser (6 nm), qui peut donc être utilisé comme oscillateur local. Nous avons donc expérimenté un cristal doubleur d'épaisseur 2 mm pour optimiser le recouvrement des deux spectres<sup>1</sup>. Le spectre émis au-dessus du seuil, d'une largeur mesurée à mi-hauteur d'environ 7,5 nm, est en effet très proche de celui prédit par la théorie (figure 7.3.2b). Avec ce cristal, le seuil est atteint pour une puissance de pompe de 75 mW environ.

Dans les sections 7.5 et 7.6, où nous mettons en évidence la génération d'états non-classiques, nous comparons les résultats obtenus avec ces deux différents cristaux.

## 7.4 Détection homodyne avec mise en forme d'impulsions

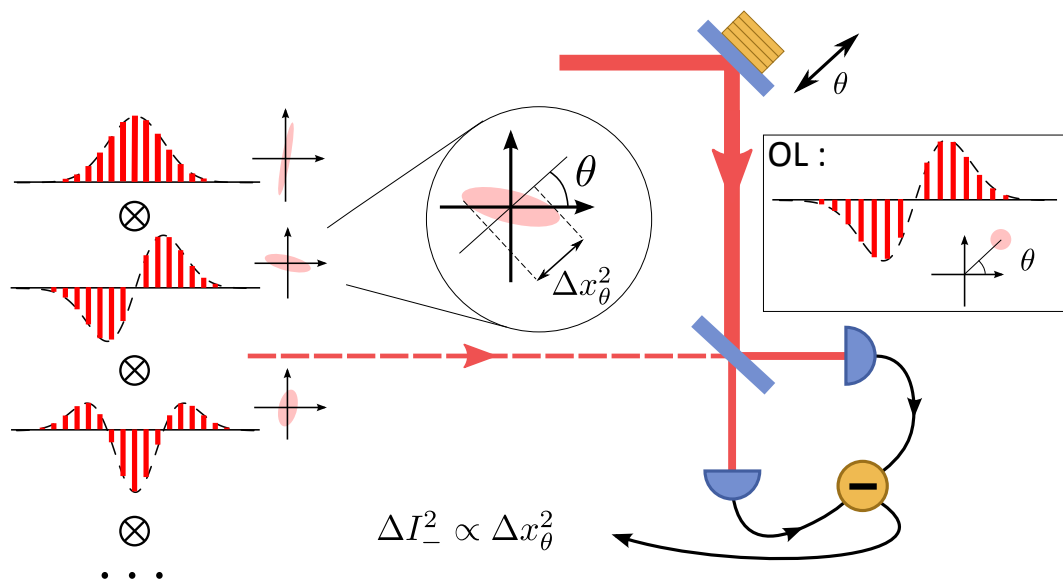
### 7.4.1 Principe de la détection homodyne : mesure projective

La détection homodyne est une procédure très répandue en optique quantique, dans le régime des variables continues, qui permet d'accéder aux quadratures du champ. Il s'agit de faire interférer le champ quantique à mesurer (signal) avec un champ de référence, "classique", intense et de phase ajustable  $\theta$ , appelé *oscillateur local* (OL). Étant une technique interférométrique, la détection homodyne est projective, dans le sens où la mesure est réalisée sur la projection du champ signal sur le mode de l'OL.

Expérimentalement, les deux champs sont mélangés par une lame séparatrice 50/50 et on vient mesurer l'intensité lumineuse sur chaque voie de sortie avec des photodiodes sensibles au bruit quantique. Si l'intensité moyenne de l'OL est très supérieure à celle du champ à mesurer, alors la différence des deux photocourants,  $\hat{I}_1$  et  $\hat{I}_2$ , est proportionnelle à la quadrature  $\hat{x}_\theta$  du champ signal *projeté sur le mode de l'oscillateur local* (voir, par exemple, [Welsch 99]) :

$$\hat{I}_- = \hat{I}_1 - \hat{I}_2 = \sqrt{2I_{OL}}\hat{x}_\theta, \quad (7.4.1)$$

1. On pourrait également envisager de rétrécir le spectre de la pompe (donc rallonger la durée des impulsions) avec des filtres interférentiels.



**Figure 7.4.1:** Détection homodyne : le profil spectral/temporel de l'oscillateur local (OL) détermine sur quel mode on réalise la mesure et sa phase définit la quadrature mesurée.

où  $I_{OL}$  est l'intensité moyenne de l'oscillateur local et la quadrature  $\hat{x}_\theta$  est déterminée par la phase ajustable  $\theta$  (figure 7.4.1).

Lorsqu'il s'agit d'analyser les propriétés quantiques d'un état multimode tel que celui produit par un SPOPO dégénéré, on peut adapter la forme temporelle/spectrale de l'oscillateur local pour choisir le mode à mesurer<sup>2</sup>. Pour *mettre en forme*, ou *façonner*, les impulsions de l'OL, nous utilisons un dispositif appelé *Spatial Light Modulator* (SLM), qui sera décrit dans la section suivante. La figure 7.4.1 schématise une détection homodyne avec un oscillateur local mis en forme pour la mesure du bruit de quadrature du deuxième supermode, par exemple.

#### 7.4.2 Mise en forme de l'oscillateur local avec un SLM

Un SLM consiste en un écran composé de plusieurs pixels adressés individuellement souvent utilisé en imagerie pour changer arbitrairement le front d'onde d'un faisceau avec un certain profil transverse. Allié à une ligne  $4f$  à dispersion nulle, un SLM peut être employé pour contrôler de façon arbitraire les propriétés temporelles d'impulsions femtosecondes. Dans ce cas, il fonctionne comme un masque de phase placé au plan de Fourier du faisceau, dont le spectre optique est préalablement dispersé par un réseau de diffraction. La figure 7.4.2 montre le schéma d'une ligne  $4f$  pour la mise en forme

2. Les deux faisceaux mélangés (OL et signal) doivent, bien évidemment, avoir le même profil transverse pour maximiser le recouvrement spatial et donc l'efficacité de la détection.

#### 7.4 Détection homodyne avec mise en forme d'impulsions

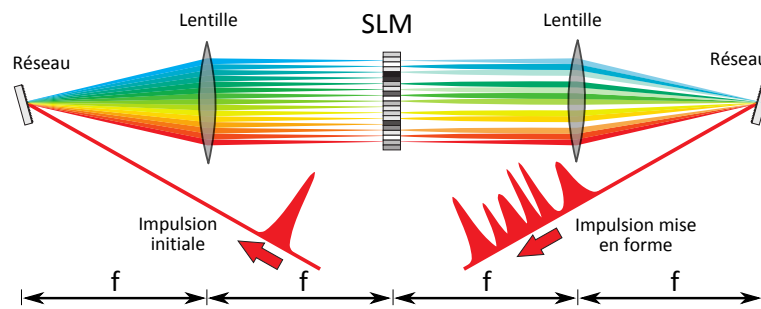


Figure 7.4.2: Ligne  $4f$  pour mise en forme d'impulsions avec un SLM en transmission.

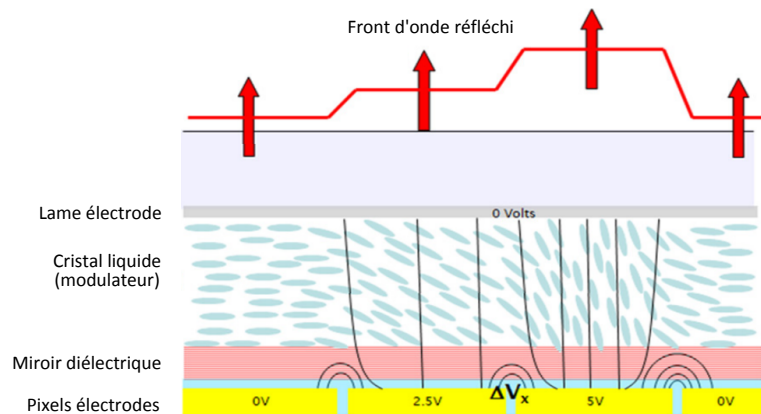


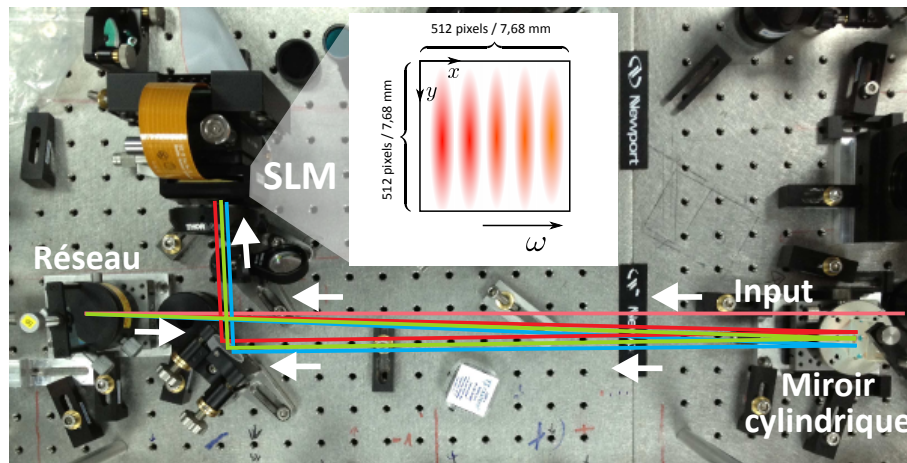
Figure 7.4.3: Schéma de fonctionnement d'un SLM à cristal liquide en réflexion. Source : <http://www.bnonlinear.com/products/xyslm/XYSeriesDS0909.pdf>

d'impulsions avec un SLM fonctionnant en transmission. Après passage par le masque, le faisceau est recollimaté et les différentes composantes spectrales transmises sont rassemblées par un deuxième réseau de diffraction.

Il existe plusieurs types de SLM (adressés optiquement ou électroniquement, en transmission ou en réflexion, 2D ou 1D, etc...). Dans [Weiner 00], on trouve une description assez détaillée de ces différentes configurations et des techniques employées pour le façonnage d'impulsions femtosecondes. Pour mettre en forme l'oscillateur local, nous utilisons un SLM modèle XY Series de chez Boulder Nonlinear Systems. Il s'agit d'un SLM 2D, à cristal liquide, fonctionnant en réflexion et adressé électroniquement par des pixels électrodes (figure 7.4.3). La tension appliquée change l'orientation des molécules du cristal liquide, modifiant l'indice de réfraction du milieu et donc la phase accumulée par l'onde réfléchi, qui traverse deux fois la couche de cristal liquide.

L'écran du SLM est composée de  $512 \times 512$  pixels et d'une surface totale d'environ  $60 \text{ mm}^2$ . Avant de venir interagir avec le SLM, le faisceau de l'OL est dispersé par

## 7 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau



**Figure 7.4.4:** Montage expérimental de la ligne  $4f$  avec un miroir cylindrique au lieu d'une lentille. Encadré : schéma montrant le spectre dispersé sur l'écran du SLM.

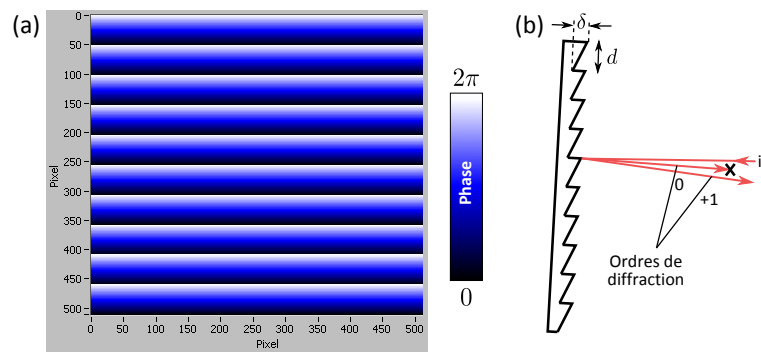
un réseau de diffraction (600 traits/mm) et focalisé horizontalement par une lentille cylindrique de distance focale 500 mm. Le schéma sur la figure 7.4.4 montre une vue de face de l'écran et la disposition spatiale de différentes couleurs du spectre dispersé. Le faisceau réfléchi (possédant un très léger angle vertical par rapport au faisceau incident) repasse par la lentille et par le réseau, étant ensuite réfléchi par un miroir coupé pour être utilisé comme oscillateur local (figure 5.1.3, chapitre 5).

Avec un SLM en 2D, comme le nôtre, il est possible d'implémenter à la fois un masque de phase et un masque d'amplitude. Ajouter une phase constante sur toute une plage de fréquences consiste à appliquer un voltage constant sur la zone de pixels correspondante. Pour réaliser un masque d'amplitude, la procédure est un peu plus subtile : sur la région de fréquences d'intérêt on vient graver un masque de phase diffracteur en forme de réseau de traits horizontaux (figure 7.4.5). Le SLM est légèrement incliné vers le bas pour que les faisceaux diffractés soit réfléchis par le miroir coupé. Quand la profondeur  $\delta$  des "rainures" du réseau gravé vaut 1 (phase variant de 0 à  $2\pi$ ), la puissance réfléchi dans l'ordre +1 est maximale. Si  $\delta = 0$ , alors l'écran équivaut à un miroir plan et la puissance réfléchi dans l'ordre +1 est nulle. Le paramètre  $\delta$  permet donc de contrôler la puissance réfléchi. L'angle entre l'ordre 0 et l'ordre +1 est donné en fonction du pas du réseau,  $d$ . Celui-ci est choisi grand ( $d \simeq 0,8$  mm), de sorte que l'angle est très petit (inférieur à une dizaine de mrad). Le faisceau de l'ordre 0 est filtré par un *pinhole*<sup>3</sup> (positionné après le miroir coupé et entre les lentilles d'un télescope) qui ne laisse passer que le faisceau de l'ordre +1.

Avec cette technique, des impulsions femtosecondes peuvent, en principe, être

3. Pinhole : "trou d'aiguille" micrométrique.

## 7.5 Observation du vide comprimé sans mise en forme de l'oscillateur local



**Figure 7.4.5:** Implémentation d'un masque d'amplitude en utilisant un SLM 2D. (a) Masque diffracteur (avec  $\delta = 1$ ) appliqué sur la totalité de l'écran. (b) L'écran (légèrement incliné) agit comme un réseau, dont l'ordre de diffraction qui nous intéresse est le +1.

mises en forme de façon presque arbitraire (sauf élargir le spectre en créant de nouvelles fréquences), dans la limite de la résolution spectrale du montage. Il suffit d'implémenter un masque d'amplitude avec  $\delta$  variant en fonction de  $\omega$  (soit dans la direction  $x$  de l'écran) et sur lequel on ajoute un masque de phase aussi variant avec  $\omega$ .

En ce qui concerne les types de mise en formes présentés dans ce manuscrit, la profondeur  $\delta$  des rainures vaut toujours soit 1 ("mode on", transmission maximale) soit 0 ("mode off", transmission nulle). Lorsque  $\delta = 1$  et que l'on souhaite ajouter une phase constante au masque, cela revient à changer son origine sur l'écran, comme on le montrera plus loin (figure 8.2.1, pour illustration).

## 7.5 Observation du vide comprimé sans mise en forme de l'oscillateur local

Dans un premier temps, nous avons réalisé des mesures du bruit quantique du faisceau de sortie du SPOPO en utilisant une détection homodyne sans mise en forme d'impulsion : le SLM est donc réglé pour se comporter comme un miroir plan et l'OL passe par la ligne  $4f$  sans modification de ses propriétés spectrales/temporelles.

### 7.5.1 Mode matching de l'oscillateur local

Le mode spatial de l'oscillateur local doit être adapté pour un recouvrement maximal avec le mode transmis par la cavité. La qualité du recouvrement spatial peut être évaluée en observant la visibilité des franges d'interférences entre l'oscillateur local et un faisceau brillant (a priori avec les mêmes propriétés temporelles) transmis par la cavité. Nous obtenons typiquement une visibilité de 90-92%. Songeant à déterminer

si cette "basse" visibilité provenait d'un mauvais recouvrement temporel ou d'un mauvais recouvrement spatial, nous avons placé un filtre interférentiel avant la photodiode utilisée pour mesurer les franges. Cela éliminerait en principe l'influence d'un mauvais matching temporel. Nous avons toutefois obtenu le même résultat : il s'agit donc d'un problème lié aux modes transverses. Au moment de la rédaction, nous n'avons pas encore identifié la source exacte de ce mauvais matching spatial, même si nous y avons engagé beaucoup d'efforts (caractérisation complète du mode transverse des deux faisceaux, correction d'astigmatisme, placement d'un pinhole entre les lentilles de mode matching de l'OL, mesure automatique de la visibilité par ordinateur (ce qui facilite son optimisation), etc...). Dans un avenir proche, une cavité de basse finesse et adaptée en impédance sera mise en place sur le chemin de l'OL afin de mieux nettoyer son profil transverse. Tant que le problème n'est pas résolu, nous devons corriger des pertes (15-20%) toute mesure de bruit réalisée dans ces conditions <sup>4</sup>.

### 7.5.2 Mesure du bruit quantique

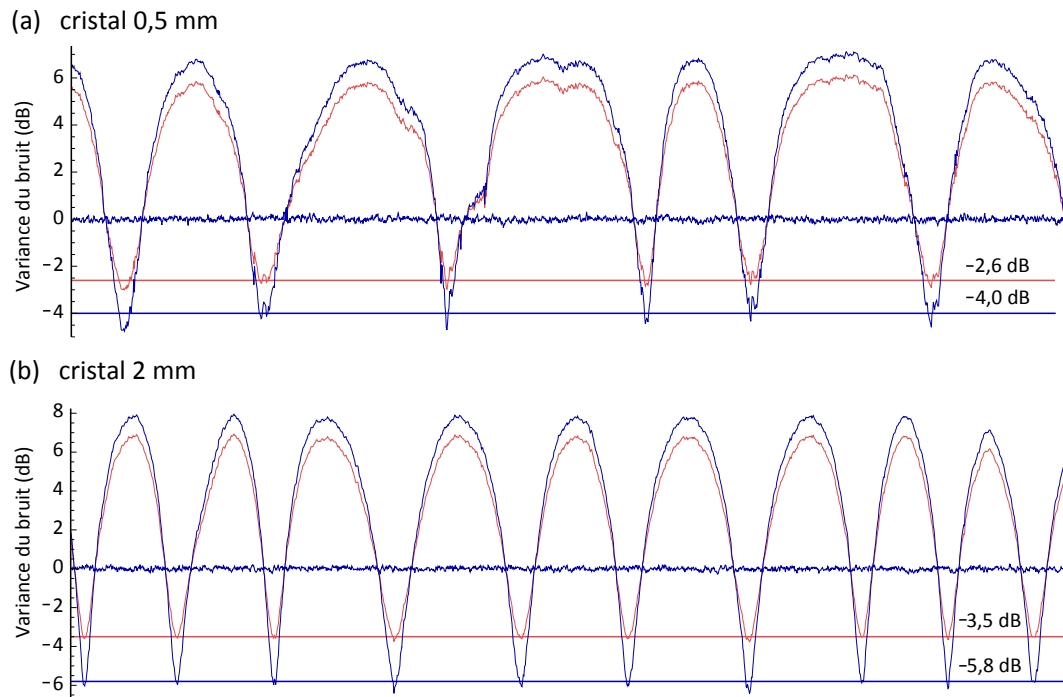
Le signal de différence de la détection homodyne est obtenu en mélangeant les parties hautes fréquences des signaux des photodiodes avec un *Power Splitter ZSCJ-2-2* (Minicircuits) et est envoyé dans un analyseur de spectre. Pendant la mesure, la phase de l'OL est balayée lentement grâce à un actuateur piézoélectrique contrôlé par haute tension. Ce balayage permet d'effectuer une caractérisation complète de l'état <sup>5</sup> projeté sur le mode de l'OL en mesurant le bruit de toutes les quadratures. Pour un état comprimé dans la voie signal de la détection, on obtient ainsi les arches montrées sur la figure 7.5.1. Le niveau de compression de l'état est déterminé en comparant cette courbe au niveau du shot noise, obtenu en bloquant physiquement la voie signal. On a donc une mesure du bruit de quadrature de l'état comprimé relative au bruit de quadrature de l'état vide.

La compression de quadrature optimale est obtenue typiquement à 20-30% de la puissance du seuil. Pour le cristal d'épaisseur 0,5 mm, nous mesurons  $2,6 \pm 0,3$  dB de squeezing (sans corrections des pertes) à une fréquence d'analyse de 1 MHz. Nous estimons des pertes totales d'environ 25% : 15-20% provenant du mauvais mode matching spatial, les autres 5-10% dus aux pertes sur les optiques et à l'efficacité quantique limitée des photodiodes. Le niveau de compression corrigé des pertes arrive à  $4,0 \pm 0,5$  dB. Les résultats sont sensiblement meilleurs avec le cristal de 2 mm :  $3,50 \pm 0,05$  dB de squeezing sans corrections, soit  $5,8 \pm 0,1$  dB après corrections ! En effet, ceci était attendu, car le profil spectral du premier supermode avec un cristal de

4. Une détection homodyne de visibilité  $0 \leq \eta \leq 1$  réalisée sur un état quantique qui n'a pas subi de pertes équivaut à une détection homodyne de visibilité 1 réalisée sur un état quantique qui a subi  $1 - \eta^2$  de pertes.

5. Si on suppose que l'état est gaussien.

### 7.5 Observation du vide comprimé sans mise en forme de l'oscillateur local



**Figure 7.5.1:** Mesure du bruit des quadratures et mise en évidence de la réduction de bruit en deçà de la limite quantique standard. Les arches rouges représentent le bruit de l'état non-classique mesuré par les photodiodes. Les arches bleues correspondent aux courbes rouges corrigées des pertes. (a) Cristal d'épaisseur 0,5 mm. (b) Cristal d'épaisseur 2 mm. Fréquence d'analyse : 1 MHz. Bande passante de détection : 100 kHz. Bande passante vidéo : 10 Hz. Le temps de mesure est de 10 s pour les deux courbes.



2 mm s'approche de celui de l'oscillateur local (cf. figure 7.3.2).

Des fluctuations lentes de phase sont visibles principalement sur la courbe 7.5.1a. Elles proviennent potentiellement d'une instabilité de phase du laser et des turbulences sur les chemins des faisceaux.

On observe que les minima et maxima des arches de squeezing dans chacun des deux cas ne sont pas symétriques par rapport au bruit quantique standard. La quadrature maximalement amplifiée a donc plus d'excès de bruit que la quadrature orthogonale n'est comprimée. L'état généré est donc un mélange statistique. La pureté  $P$  de l'état généré (plus précisément, de sa restriction au mode de l'OL) peut être calculée simplement à partir des variances des quadratures maximalement et minimalement comprimées, tenant compte de la formule (3.3.7). Si on considère les états corrigés des pertes, on obtient  $P \simeq 0,7$  dans le cas du cristal de 0.5 mm et  $P \simeq 0,8$  pour celui de 2 mm.

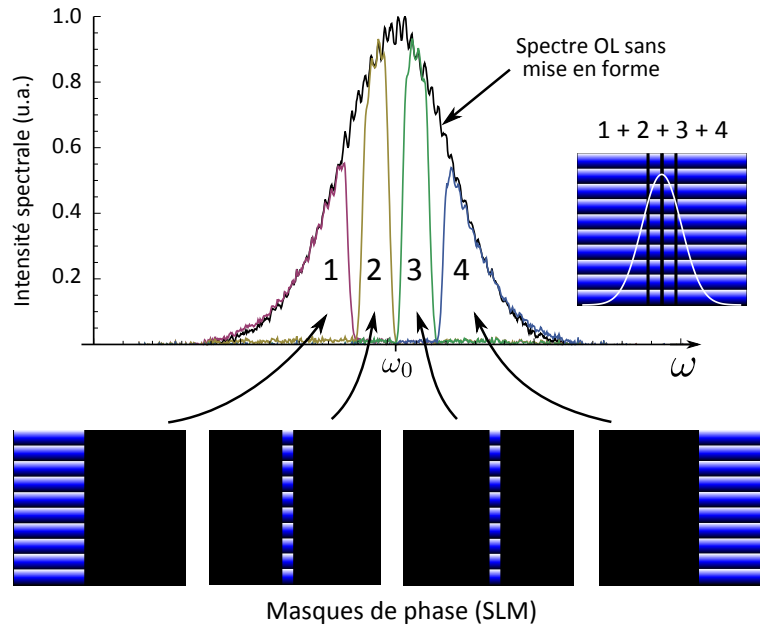
## 7.6 Mise en évidence et caractérisation d'états non-classiques multimodes

Pour dévoiler les propriétés quantiques multimodes de l'état créé par le SPOPO en cavité en anneau, nous avons utilisé le même principe qu'au chapitre précédent : à partir de mesures de corrélation de bruit entre les différentes régions du spectre optique, plus précisément entre 4 "pixels" spectraux de puissances égales, on reconstruit une matrice de corrélation que l'on diagonalise pour en extraire des modes décorrélés. Dans cette deuxième génération de l'expérience, il y a toutefois au moins deux "nouveauautés" :

1. Pour réaliser les mesures de bruit de quadrature sur un mode-pixel, au lieu de filtrer le spectre du faisceau comprimé, nous le mélangeons avec un oscillateur local mis en forme par le SLM (figure 7.6.1).
2. Les mesures de bruit sont effectuées sur toutes les quadratures en balayant la phase de l'oscillateur local, et non seulement sur la quadrature d'amplitude, ce qui donne accès à une description plus complète de l'état car on peut avoir accès à tous les éléments de la matrice de covariance (Section 3.3).

Du fait de la résolution spectrale limitée et pour éviter le recouvrement entre les modes-pixels, nous avons dû introduire des espaces "vides" entre les masques de phase (figure 7.6.1), de sorte que si les masques sont tous mis ensemble, on crée des trous dans le spectre gaussien de départ. Autrement dit, le spectre laser n'est pas reconstitué par la somme des 4 pixels. Cette résolution limitée est due essentiellement aux optiques la ligne  $4f$ , qui seront bientôt remplacées pour améliorer la résolution. Cela ne nous empêche cependant pas d'observer de fortes corrélations entre les pixels spectraux, comme on le verra dans la suite.

## 7.6 Mise en évidence et caractérisation d'états non-classiques multimodes



**Figure 7.6.1:** Mise en forme de l'oscillateur local avec le SLM : les 4 "pixels" à puissances égales et les masques de phase correspondantes.

### 7.6.1 Matrice de covariance et protocole expérimental

Comme nous décrivons l'état généré dans une base de 4 modes-pixels, la matrice de covariance  $V$  à reconstruire est de taille  $8 \times 8$ . Puisque le champ moyen dans tous les modes est nul (on travaille en dessous du seuil du SPOPO), on peut écrire les éléments de cette matrice comme (cf. équation (3.3.4))

$$V_{q_i, q_j} = \langle \{\hat{q}_i, \hat{q}_j\} \rangle, \quad \text{avec} \quad \{\hat{q}_i, \hat{q}_j\} = \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j + \hat{q}_j \hat{q}_i}{2} \quad (7.6.1)$$

où  $q$  peut être remplacé par  $x$  et  $p$ , les indices  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . La matrice de covariance prend alors la forme générale :

$$V = \begin{pmatrix} \Delta x_1^2 & \langle \{\hat{x}_1, \hat{p}_1\} \rangle & \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle & \langle \hat{x}_1 \hat{p}_2 \rangle & & \\ \langle \{\hat{x}_1, \hat{p}_1\} \rangle & \Delta p_1^2 & \langle \hat{x}_2 \hat{p}_1 \rangle & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle & \cdots & \\ \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle & \langle \hat{x}_2 \hat{p}_1 \rangle & \Delta x_2^2 & \langle \{\hat{x}_2, \hat{p}_2\} \rangle & & \\ \langle \hat{x}_1 \hat{p}_2 \rangle & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle & \langle \{\hat{x}_2, \hat{p}_2\} \rangle & \Delta p_2^2 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}. \quad (7.6.2)$$

Le but est de déterminer tous les éléments de cette matrice pour une caractérisation complète de l'état. Comme la matrice est symétrique, il y a 36 termes à déterminer, au lieu de 64.

On peut aisément mesurer les éléments diagonaux à partir d'une série de détections homodynes où l'oscillateur local est sous la forme des modes-pixels. On peut également vérifier que tous les modes-pixels sont comprimés suivant la même quadrature à partir de la procédure suivante : d'abord on détermine l'échelle temporelle typique de fluctuation de la phase de l'OL à partir d'une trace de détection homodyne où on ne balaye pas la phase ; ensuite, on réalise une détection sur un des modes-pixels en balayant de  $2\pi$  la phase de l'OL sur un intervalle de temps bien inférieur à cette échelle typique, et, immédiatement après, on réalise exactement la même mesure sur un autre pixel ; enfin, on n'a qu'à comparer les deux traces et vérifier que les minima (resp. maxima) des deux courbes correspondent à la même phase de l'OL. Cela est faisable grâce à l'adressage programmable du SLM et au contrôle par ordinateur de la tension appliquée à la piézo qui balaye la phase.

Pour un pixel  $i$  donné, on appelle  $x_i$  la quadrature de niveau de bruit le plus faible et  $p_i$  celle la plus bruitée. Grâce à ce choix,  $x_i$  et  $p_i$  sont décorrélés : les éléments  $\langle \{\hat{x}_i, \hat{p}_i\} \rangle$  sont tous nuls. Comme la quadrature comprimée est la même pour tous les modes, on peut encore montrer que les éléments  $\langle \hat{x}_i \hat{p}_j \rangle$  avec  $i \neq j$  s'annulent également [Braunstein 05a]. La matrice de covariance prend alors la forme simplifiée :

$$V = \begin{pmatrix} \Delta x_1^2 & 0 & \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle & 0 & \langle \hat{x}_1 \hat{x}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{x}_1 \hat{x}_4 \rangle & 0 \\ 0 & \Delta p_1^2 & 0 & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle & 0 & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_4 \rangle \\ \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle & 0 & \Delta x_2^2 & 0 & \langle \hat{x}_2 \hat{x}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{x}_2 \hat{x}_4 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle & 0 & \Delta p_2^2 & 0 & \langle \hat{p}_2 \hat{p}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{p}_2 \hat{p}_4 \rangle \\ \langle \hat{x}_1 \hat{x}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{x}_2 \hat{x}_3 \rangle & 0 & \Delta x_3^2 & 0 & \langle \hat{x}_3 \hat{x}_4 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{p}_2 \hat{p}_3 \rangle & 0 & \Delta p_3^2 & 0 & \langle \hat{p}_3 \hat{p}_4 \rangle \\ \langle \hat{x}_1 \hat{x}_4 \rangle & 0 & \langle \hat{x}_2 \hat{x}_4 \rangle & 0 & \langle \hat{x}_3 \hat{x}_4 \rangle & 0 & \Delta x_4^2 & 0 \\ 0 & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_4 \rangle & 0 & \langle \hat{p}_2 \hat{p}_4 \rangle & 0 & \langle \hat{p}_3 \hat{p}_4 \rangle & 0 & \Delta p_4^2 \end{pmatrix} \quad (7.6.3)$$

Il n'y a donc plus que 20 termes à déterminer en utilisant la détection homodyne, 10 concernant les quadratures  $x$  et 10 concernant les quadratures  $p$ .

En réordonnant la base dans laquelle s'écrit la matrice  $V$ , nous pouvons la réexprimer comme :

$$V = \begin{pmatrix} V_{xx} & 0 \\ 0 & V_{pp} \end{pmatrix}, \quad (7.6.4)$$

où

$$V_{qq} = \begin{pmatrix} \Delta q_1^2 & \langle \hat{q}_1 \hat{q}_2 \rangle & \langle \hat{q}_1 \hat{q}_3 \rangle & \langle \hat{q}_1 \hat{q}_4 \rangle \\ \langle \hat{q}_1 \hat{q}_2 \rangle & \Delta q_2^2 & \langle \hat{q}_2 \hat{q}_3 \rangle & \langle \hat{q}_2 \hat{q}_4 \rangle \\ \langle \hat{q}_1 \hat{q}_3 \rangle & \langle \hat{q}_2 \hat{q}_3 \rangle & \Delta q_3^2 & \langle \hat{q}_3 \hat{q}_4 \rangle \\ \langle \hat{q}_1 \hat{q}_4 \rangle & \langle \hat{q}_2 \hat{q}_4 \rangle & \langle \hat{q}_3 \hat{q}_4 \rangle & \Delta q_4^2 \end{pmatrix}. \quad (7.6.5)$$

Les termes non-diagonaux de  $V$ , du type  $\langle \hat{x}_i \hat{x}_j \rangle$  et  $\langle \hat{p}_i \hat{p}_j \rangle$ , sont obtenus à partir d'une mesure où l'oscillateur local est une superposition des modes  $i$  et  $j$ , appelée mesure  $\{i,j\}$ . Ceci est réalisé expérimentalement en appliquant un masque de phase sur le SLM qui est la somme des masques de phase des modes  $i$  et  $j$ , tel que représentés

## 7.6 Mise en évidence et caractérisation d'états non-classiques multimodes

sur la figure 7.6.1. Cette mesure nous donne accès aux variances  $\Delta(x_i + x_j)^2$  et  $\Delta(p_i + p_j)^2$ , qui permettent de calculer les éléments diagonaux grâce à l'expression

$$\Delta(q_i + q_j)^2 = \Delta q_i^2 + \Delta q_j^2 + 2 \langle \hat{q}_i \hat{q}_j \rangle, \quad (7.6.6)$$

similaire à (6.3.3). Ainsi, tous les termes non-diagonaux sont calculés à partir du résultat de seulement trois mesures, même si les modes en question ne sont pas adjacents spectralement. (On note que ceci n'était pas possible avec la technique de filtrage spectral sans oscillateur local employée dans la première génération de l'expérience : le calcul de  $\text{cov}(n_1, n_4)$ , par exemple, dépendait du résultat de 8 mesures, ce qui rajoutait beaucoup d'incertitude à la valeur finale.)

Au total, nous devons effectuer 10 mesures : {11}, {12}, {13}, {14}, {22}, {23}, {24}, {33}, {34} et {44}. {11}, par exemple, correspond à la mesure où l'OL est dans le mode-pixel 1, et {24} à celle où l'OL est dans une superposition des pixels 2 et 4. Dans chacune de ces mesures, l'OL a la même puissance totale, ce qui fait que le shot noise est toujours au même niveau (à de petites fluctuations de puissance près, qui sont d'ailleurs enregistrées et prises en compte). Pour chaque mesure, nous enregistrons la trace de la détection homodyne pendant 20 s (tout en balayant la phase de l'OL) et nous en extrayons deux valeurs : le minimum et le maximum de la trace, qui correspondent aux variances  $\Delta(x_i + x_j)^2$  et  $\Delta(p_i + p_j)^2$ , respectivement (ou  $\Delta x_i^2$  et  $\Delta p_i^2$ ). Une fois complète, la matrice de covariance expérimentale est ensuite diagonalisée et on obtient les modes propres (décorrélés) du système, décrits dans la base des pixels. On réalise également une mesure complémentaire sur l'ensemble des pixels, {1234}, afin de pouvoir comparer les propriétés de bruit de chaque mode propre avec celles de l'ensemble.

Nous passons à présent aux résultats obtenus avec chacun des cristaux BIBO, d'épaisseurs 0,5 mm et 2 mm.

### 7.6.2 Résultats obtenus avec le cristal d'épaisseur 0,5 mm

La figure 7.6.2 contient les traces des 10 détections homodynes nécessaires pour la caractérisation complète de l'état. La mesure complémentaire montre que le mode "1234" est dans un état comprimé de -3,4 dB (quadrature  $x$ , par définition) et présente un excès de bruit de 6,2 dB sur la quadrature orthogonale.

Les lignes horizontales sur les graphes de la figure indiquent :

- le shot noise (ligne noire);
- le niveau de bruit maximal, soit de la quadrature  $p$  (ligne rouge);
- le niveau de bruit minimal, soit de la quadrature  $x$  (ligne verte).

Les lignes rouges sont tracées à l'aide d'un algorithme qui identifie les pics des traces, ajuste un polynôme sur les points qui sont autour de chaque pic et prend la moyenne des valeurs maximales de tous les polynômes. La même idée est utilisée pour définir

les valeurs minimales, et leur moyenne donne la position des lignes vertes. Les dix valeurs données par les lignes rouges (resp. vertes) sont enregistrées et utilisées pour le calcul des éléments de la matrice de covariance relative aux quadratures  $p$  (resp.  $x$ ).

Avant de reconstruire cette matrice de covariance expérimentale et en déduire les modes à bruits décorrélés du système, analysons qualitativement les graphes de la figure 7.6.2, qui contiennent des informations intéressantes sur la distribution du bruit au long du spectre optique et les corrélations entre les différents pixels.

Les 8 premiers graphes, analysés par paires ({11} et {44}, {22} et {33}, {12} et {34}, {13} et {24}) mettent en évidence une symétrie par rapport à la fréquence centrale, qui vient des propriétés de symétrie de la distribution spectrale conjointe de la conversion paramétrique (produit entre l'enveloppe spectrale de la pompe et la fonction d'accord de phase, cf. section 2.5). On voit, par exemple, que les pixels extrêmes, 1 et 4, possèdent les mêmes niveaux d'excès de bruit de quadrature (entre 1,6 dB et 3,2 dB environ). Ces pixels manifestent par contre de fortes corrélations, comme on peut le voir sur la graphe de la mesure {14} : le bruit de la quadrature  $x$  de la somme des deux modes est presque 2 dB en deçà de la limite quantique standard. Cette analyse qualitative s'applique aussi aux modes 2 et 3, même si leur niveau de corrélation est plus faible. À la troisième ligne de graphes, nous comparons les propriétés de bruit des deux parties du spectre : basses fréquences, {12}, et hautes fréquences, {34}. Chaque partie, isolée, démontre un fort excès de bruit selon la quadrature  $p$  et un bruit proche du shot noise selon  $x$ , alors que les deux mises ensembles (mesure {1234}) sont comprimées de 3,4 dB selon  $x$ , comme déjà mentionné. Les propriétés de symétrie sont évidentes et on pourrait en effet s'y attendre, vu la symétrie de la matrice de couplage entre les fréquences dans le processus de conversion paramétrique. Il y a également des corrélations non-triviales entre des paires de pixels qui ne sont pas symétriques par rapport au centre du spectre : 1 et 3, 2 et 4, 3 et 4, etc... Nous passons donc à une analyse quantitative en utilisant la matrice de covariance.

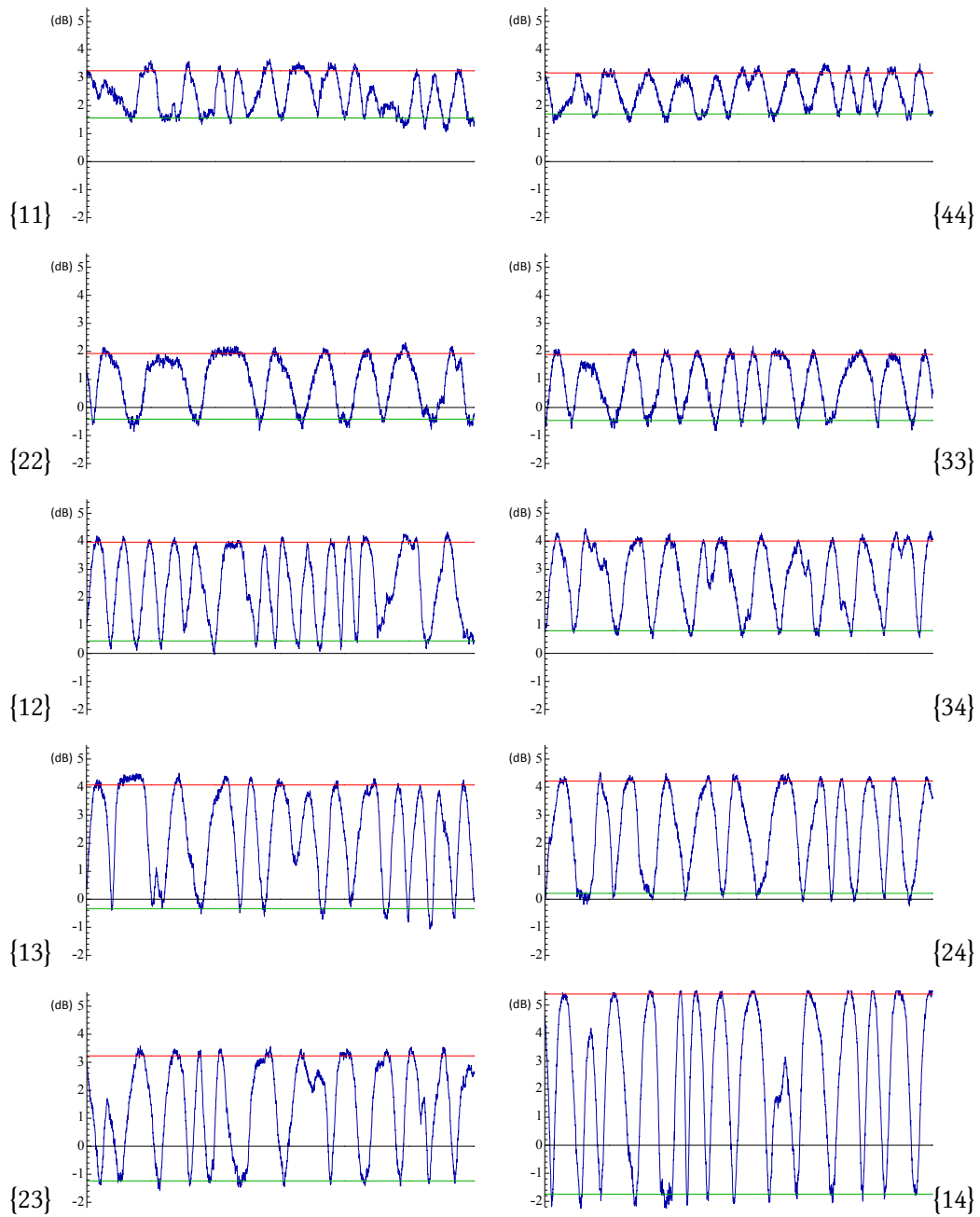
Les blocs de la matrice de covariance mesurée expérimentalement (écrite sous la forme (7.6.4)) valent :

$$V_{xx} = \begin{pmatrix} 1,43 & -0,07 & -0,24 & -0,79 \\ -0,07 & 0,91 & -0,15 & -0,18 \\ -0,24 & -0,15 & 0,90 & -0,01 \\ -0,79 & -0,18 & -0,01 & 1,48 \end{pmatrix}, \quad V_{pp} = \begin{pmatrix} 2,11 & 0,65 & 0,72 & 1,38 \\ 0,65 & 1,56 & 0,55 & 0,80 \\ 0,72 & 0,55 & 1,54 & 0,68 \\ 1,38 & 0,80 & 0,68 & 2,07 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de la matrice de covariance et les valeurs propres respectives (en dB) sont montrés sur la figure 7.6.3, qui doit être interprétée comme suit : 1) la première (resp. deuxième) rangée horizontale montre les vecteurs propres liés à la quadrature  $x$  (resp.  $p$ ) ; 2) le profil spectral d'un vecteur propre donné est obtenu en sommant les enveloppes des modes-pixels pondérées par les valeurs indiquées par les colonnes.

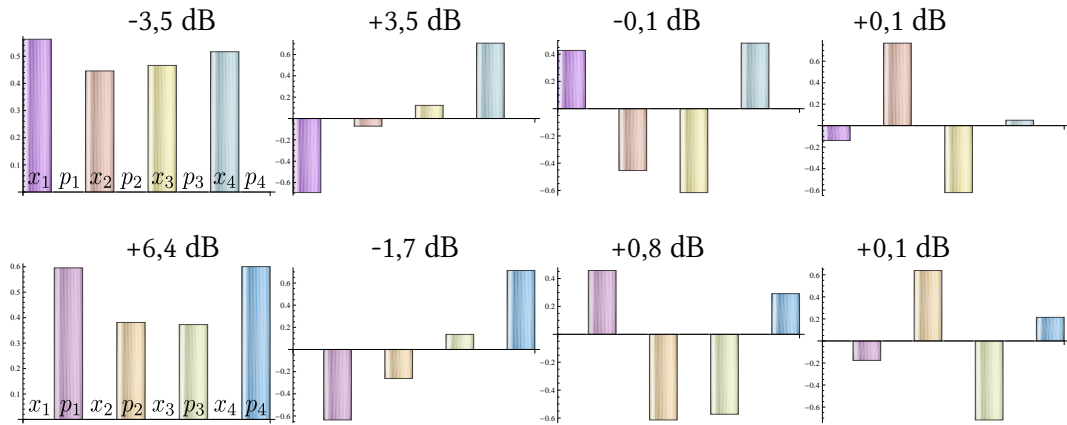
Idéalement, les graphiques sur la même rangée verticale devrait être identiques, et on pourrait les associer à un même "peigne propre". On aurait donc 4 peignes de

## 7.6 Mise en évidence et caractérisation d'états non-classiques multimodes



**Figure 7.6.2:** Traces de détection homodyne (corrigées des pertes) pour toutes les paires de modes-pixels. État produit avec un cristal d'épaisseur 0,5 mm. Fréquence d'analyse : 1 MHz. Bande passante de détection : 100 kHz. Bande passante vidéo : 10 Hz. Temps de mesure : 20 s.

## 7 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau



**Figure 7.6.3:** Vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de covariance pour le cristal d'épaisseur 0,5 mm. Le spectre correspondant à chaque vecteur propre est obtenu en multipliant les amplitudes spectrales des pixels par les valeurs indiquées par les colonnes.

fréquences complètement décorrélés, les valeurs propres de la  $n$ -ième rangée verticale indiquant le niveau de bruit des quadratures  $x$  et  $p$  du  $n$ -ième peigne. Le fait que les graphiques ne sont pas identiques (mais très proches) indique donc que pour toute tentative de décrire l'état dans une base de peignes de fréquences, il existera toujours de (légères) corrélations entre eux. Pour l'illustrer, réécrivons la matrice  $V_{pp}$  dans la base des vecteurs propres de  $V_{xx}$  (première rangée horizontale de la figure 7.6.3). On obtient

$$V'_{pp} = \begin{pmatrix} 4,30 & -0,12 & -0,45 & -0,03 \\ -0,12 & 0,70 & -0,05 & 0,06 \\ -0,45 & -0,05 & 1,26 & -0,02 \\ -0,03 & 0,06 & -0,02 & 1,02 \end{pmatrix}. \quad (7.6.7)$$

La diagonale de cette matrice contient donc les variances des quadratures  $p$  des peignes de fréquences associés aux modes propres de  $V_{xx}$ . Exprimées en dB (+ 6,3 dB, - 1,6 dB, + 1,0 dB et + 0,1 dB), on voit qu'elles sont très proches de celles des modes propres de  $V_{pp}$ . Les éléments non-diagonaux correspondent aux corrélations entre les peignes. On voit que des corrélations non-négligeables persistent entre le premier et le troisième peigne, ainsi qu'entre le premier et le deuxième.

Décrit dans cette base de peignes de fréquences, l'état est donc composé par un premier mode dans un état comprimé de 3,5 dB selon la quadrature  $x$  et anti-comprimé de 6,3 dB selon la quadrature  $p$  (on retrouve approximativement les bruits de quadrature du mode "1234"). Le deuxième mode, à son tour, se trouve dans un état comprimé de 1,6 dB selon  $p$ . Le troisième mode est peut être dans un état très légèrement comprimé selon  $x$  (il faudrait une analyse des incertitudes pour en être sûr) et le dernier présente un très léger excès de bruit sur les deux quadratures (il est très proche d'un mode vide). Les quadratures  $x$  des peignes sont complètement décorrélées, mais on observe des

corrélations entre les quadratures  $p$ , surtout entre le premier et le troisième peignes.

On voit que les vecteurs propres reproduisent grosso modo l'allure des *polynômes d'Hermite*. L'allure des profils spectraux des modes propres doivent donc s'approcher des *fonctions d'Hermite-Gauss* (comme prévoit la théorie du chapitre 2) quand le nombre de pixels spectraux est très grand.

### 7.6.3 Résultats obtenus avec le cristal d'épaisseur 2 mm

Ces mesures ont été refaites avec un cristal d'épaisseur 2 mm (figure 7.6.4)<sup>6</sup>. La mesure complémentaire montre que le mode "1234" est dans un état comprimé avec un bruit de -4,4 dB selon la quadrature  $x$  et +7,2 dB selon la quadrature  $p$ .

Les propriétés de symétrie par rapport au centre du spectre sont également visibles dans cette série de mesures, et de façon encore plus marquée (figure 7.6.4). On note en particulier que les pixels 1 et 4, si isolés, présentent un excès de bruit constant sur toutes les quadratures. La mesure {14} montre, cependant, que les bruits de ces modes sont fortement corrélés. On observe donc des signaux claires d'intrication entre les modes 1 et 4, qui, analysés individuellement, évoquent des propriétés d'états thermiques. En effet, le calcul de la matrice de covariance montre, par rapport au cas précédent, une augmentation de l'*anticorrélation* de bruit entre de  $x_1$  et  $x_4$  et de la *corrélation* de bruit entre  $p_1$  et  $p_4$  :

$$V_{xx} = \begin{pmatrix} 2,19 & 0,34 & -0,37 & -1,78 \\ 0,34 & 1,03 & -0,52 & -0,57 \\ -0,37 & -0,52 & 0,92 & 0,24 \\ -1,78 & -0,57 & 0,24 & 2,28 \end{pmatrix}, V_{pp} = \begin{pmatrix} 2,19 & 0,59 & 0,69 & 1,83 \\ 0,59 & 2,19 & 1,39 & 0,85 \\ 0,69 & 1,39 & 2,25 & 0,68 \\ 1,83 & 0,85 & 0,68 & 2,28 \end{pmatrix}.$$

La diagonalisation de la matrice de covariance mène à des résultats qualitativement comparables à ceux obtenus avec le cristal de 0,5 mm (vecteurs propres visuellement proches des polynômes d'Hermite), mais quantitativement plus conséquents en termes de squeezing (figure 7.6.5). La ressemblance entre les modes propres de  $V_{xx}$  et de  $V_{pp}$  est aussi plus marquante. En réexprimant, comme dans la section précédente, la matrice  $V_{pp}$  dans la base des modes propres de  $V_{xx}$ , on retrouve, en effet, une matrice où il n'y a qu'un élément non-diagonal non-négligeable et les éléments diagonaux sont pratiquement identiques aux valeurs propres de  $V_{pp}$  :

$$V'_{pp} = \begin{pmatrix} 5,24 & 0,03 & -0,23 & -0,04 \\ 0,03 & 0,36 & -0,01 & 0,01 \\ -0,23 & -0,01 & 2,43 & 0,06 \\ -0,04 & 0,01 & 0,06 & 0,87 \end{pmatrix}, \quad (7.6.8)$$

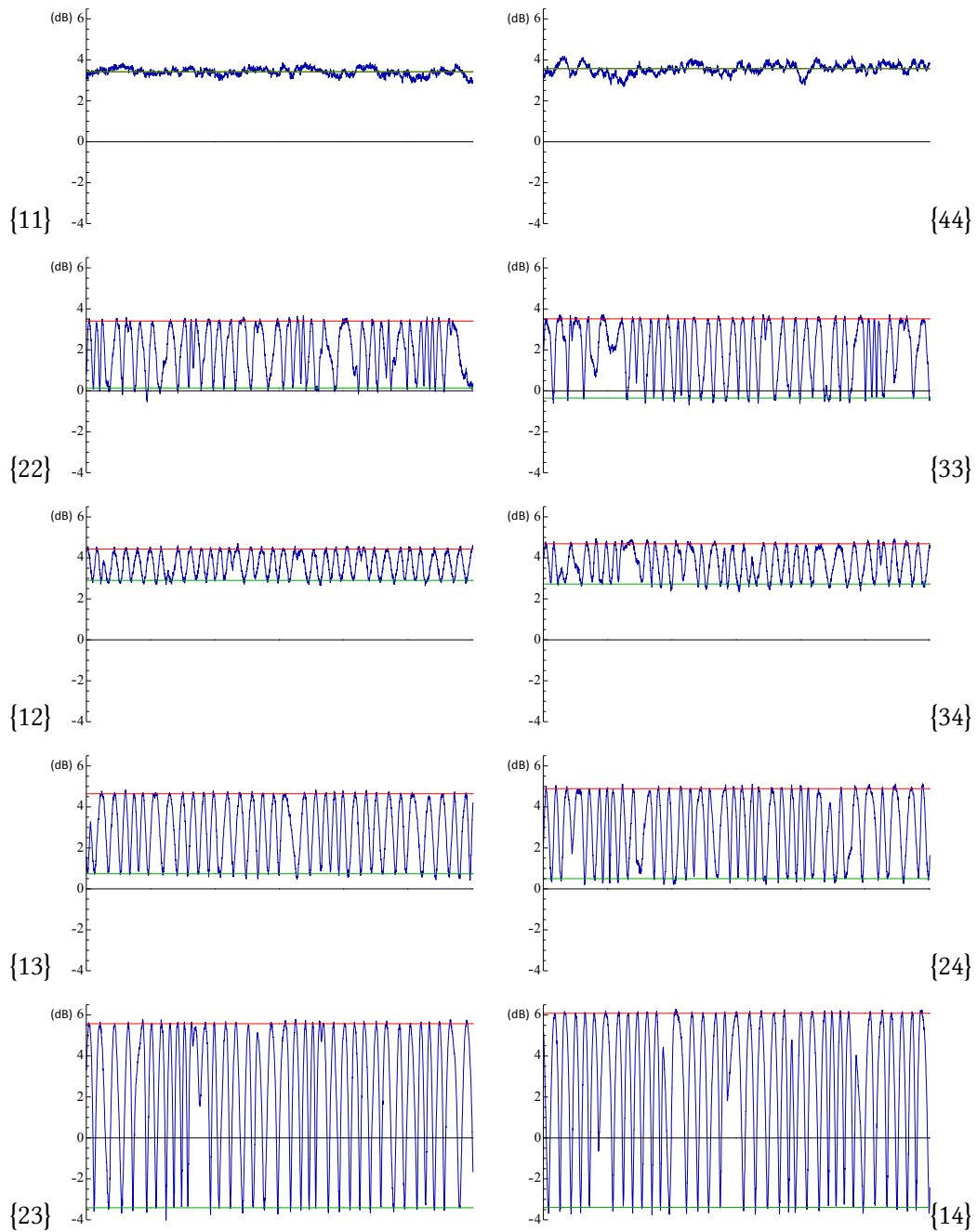
où, en dB, les éléments diagonaux s'expriment : + 7,2 dB, - 4,4 dB, + 3,9 dB et - 0,6 dB.

On observe cette fois-ci que tous les 4 peignes de fréquences se trouvent dans des états comprimés (et à des quadratures inversées, en accord avec les prévisions

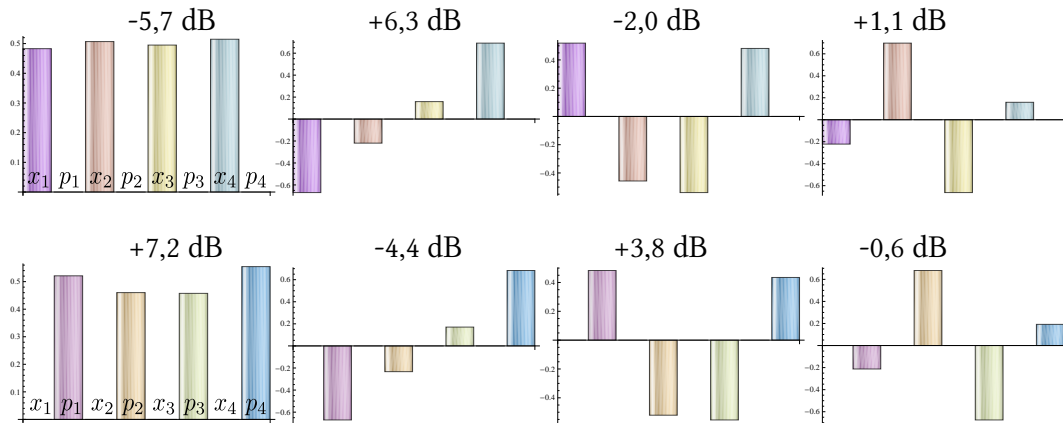
6. Le temps de mesure pour chaque trace a été doublé (40 s) pour améliorer la statistique dans la détermination de minima et maxima des courbes de bruit de quadrature.



7 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau



**Figure 7.6.4:** Traces de détection homodyne (corrigées des pertes) pour toutes les paires de modes-pixels. État produit avec un cristal d'épaisseur 2 mm. Fréquence d'analyse : 1 MHz. Bande passante de détection : 100 kHz. Bande passante vidéo : 10 Hz. Temps de mesure : 40 s.



**Figure 7.6.5:** Vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de covariance pour le cristal d'épaisseur 2 mm. Le spectre correspondant à chaque vecteur propre est obtenu en multipliant les amplitudes spectrales des pixels par les valeurs indiquées par les colonnes.

théoriques présentées dans le chapitre 4). Le premier est d'ailleurs plus comprimé (5,7 dB) que le mode "1234" (4,4 dB). Cette dernière valeur correspond au niveau de compression du bruit de la quadrature  $p$  du deuxième peigne. Le troisième peigne est comprimé de 2,0 dB selon  $x$  et le dernier, de 0,6 dB selon  $p$ . Dans cette base particulière, les 4 peignes sont tous décorrélés en  $x$ , mais on observe un certain niveau de corrélation entre le premier et le troisième peignes selon la quadrature  $p$ .

## 7.7 Conclusion

En utilisant un dispositif expérimental amélioré (SPOPO avec cavité en anneau et détection homodyne avec mise en forme d'impulsions) nous avons sensiblement augmenté le niveau de compression des états générés par rapport à l'expérience précédente, passant de peu plus de 1 dB à presque 6 dB. Nous avons également réalisé une caractérisation complète et précise du contenu multimode de l'état grâce à la détection homodyne avec mise en forme de l'oscillateur local. En effet, nous avons pu témoigner la génération d'un état décrit par au moins 4 modes comprimés en quadrature partageant le même mode spatial. Ce résultat ouvre les portes pour la génération extensive (à partir d'une seule source) d'états fortement multimodes.

En effet, les mesures plus récentes réalisées au sein de notre équipe montrent qu'avec 6 à 8 pixels, un nombre encore plus grand de modes dans des états comprimés (limité par le nombre de pixels) est nécessaire pour décrire toutes les corrélations observées entre les pixels, une première en optique quantique.

On rajoute que ce sont des résultats très récents n'ayant pas encore reçu l'analyse détaillée qu'ils méritent en ce qui concerne les divers critères d'intrication, comme

## *7 Réalisation expérimentale d'états classique avec SPOPO en cavité en anneau*

le critère EPR [[Reid 88](#)], le critère de Duan et Simon [[Duan 00](#), [Simon 00](#)] et leur caractérisation en termes de valeurs propres symplectiques [[Simon 94](#), [Arvind 95](#)]. D'autre part, nous avons encore beaucoup de progrès techniques à faire pour améliorer la pureté de ces états.

## 8 Bilan et perspectives

### Sommaire

---

<b>8.1 Bilan</b>	<b>155</b>
<b>8.2 Perspectives</b>	<b>156</b>
8.2.1 Améliorations à court terme	156
8.2.2 Détection multipixel	157
8.2.3 Façonnage d'états clusters	159
8.2.4 Détection adaptative	159
8.2.5 Manipulation d'états quantiques multimodes	161

---

### 8.1 Bilan

Au niveau expérimental, cette thèse s'est appuyée sur deux versions d'une expérience utilisant un OPO pompé par des impulsions femtosecondes. Grâce au premier montage, conçu et mis en place principalement dans le contexte de la thèse d'Olivier Pinel [Pinel 10], nous avons pu démontrer pour la première fois la génération de peignes de fréquences quantiques multimodes avec un SPOPO en dessous du seuil. Celui-ci était constitué d'une cavité linéaire et d'un cristal non-linéaire BIBO, pompé par un train d'impulsions femtosecondes à 400 nm. Nous avons observé l'amplification (sensible à la phase) du train d'impulsions infrarouges injecté et, en se plaçant en régime de désamplification, nous avons mesuré son bruit d'intensité (qui était un peu plus de 1 dB en deçà de la limite quantique standard) avec une détection balancée sans oscillateur local. Ensuite, une analyse spectrale nous a permis d'explorer les corrélations d'intensité entre différentes parties du spectre optique (pixels). Ce montage nous a servi comme une expérience de validation de principe qui a permis de vérifier le caractère multimode quantique des états (dans ce cas, brillants) produits par le SPOPO, analysés naturellement dans une base de peignes de fréquences.

Après le déménagement du laboratoire, en fin 2010, nous avons trouvé le moment propice pour apporter des modifications importantes à l'expérience : montage général plus compact, cavité en anneau, détection homodyne avec mise en forme de l'oscillateur local. Avec la deuxième version de l'expérience, en marche depuis environ un an, nous avons pu obtenir des résultats plus conséquents tant quantitativement que qualitativement, cette-fois ci en travaillant uniquement avec des états quantiques à champ moyen nul (vide comprimé). Outre une augmentation considérable du niveau

de compression des états générés (presque 6 dB), nous avons réalisé une analyse plus complète des quadratures grâce à la détection homodyne et à la mise en place et l'automatisation du SLM, pour contrôler la forme de l'oscillateur local.

À l'aide de quatre modes pixels en fréquence, nous avons montré expérimentalement que notre SPOPO produisait des états quantiques dont les corrélations spectrales ne peuvent être décrites que par la présence d'au moins 4 peignes de fréquences comprimés. Les derniers résultats (qui ne sont pas exposés dans ce manuscrit) montrent la production d'états multimodes de degré encore plus élevé lorsque l'on passe à des dimensions supérieures (6 à 8, pour l'instant, avec des perspectives encore plus ambitieuses). En effet, comme ce type de mesure n'est pas sensible aux corrélations qui peuvent exister entre les parties du spectre situées à l'intérieur d'un pixel, l'augmentation du degré (mesuré) de l'état multimode pour des mesures de plus haute dimensionnalité n'est pas étonnante. Elle est tout à fait naturelle et attendue jusqu'à une certaine limite. D'autre part, plus on fait croître le nombre de pixels, plus les modes propres obtenus après la mesure doivent s'approcher des modes propres théoriques.

## 8.2 Perspectives

### 8.2.1 Améliorations à court terme

Afin d'effectuer des mesures de qualité avec une **dimensionnalité supérieure à 8-10 pixels**, la résolution spectrale sur le SLM devient critique. Elle dépend de la distance focale du miroir cylindrique et du nombre de traits par unité de longueur du réseau de diffraction (actuellement :  $f = 500$  mm,  $n = 600$  traits/mm). Ces deux éléments seront bientôt remplacés ( $f = 250$  mm,  $n = 1500$  traits/mm) et on espère augmenter ainsi la résolution d'un facteur 2.

La **escape efficiency** de la cavité OPO est actuellement estimée à environ 95%, qui constitue le rapport entre les pertes actives (transmission du miroir de sortie : 20%) et les pertes totales (miroir de sortie + miroir d'entrée : 21%). On note que les valeurs de squeezing corrigées des pertes présentées dans cette thèse ne prennent pas en compte la escape efficiency. Avec un miroir d'entrée de coefficient de transmission 0,1% (au lieu de 1%), on estime une augmentation de plus de 0,5 dB dans la quantité de squeezing *générée* (on peut donc aisément envisager les 7 dB).

Pour améliorer l'**efficacité de la détection**, et donc la quantité de squeezing *mesurée*, on envisage de mettre en place une cavité de filtrage de mode spatial destinée à l'oscillateur local. Cette cavité aurait naturellement une longueur d'environ 4 m, pour assurer la résonance du peigne, et une basse finesse (comparable à celle de l'OPO) pour faciliter l'asservissement de sa longueur. Le mode en sortie devra donc être un TEM<sub>00</sub> qui se recouvrera parfaitement au mode transmis par l'OPO. La cavité sera également adaptée en impédance (miroir d'entrée et de sortie de même réflectivité)

afin de maximiser la puissance totale transmise.

Enfin, deux modifications importantes (en cours) pourront améliorer significativement la qualité des données. La première est la **stabilisation de la puissance laser** à travers le contrôle du pointé de la pompe (Verdi). Le pointé sera mesuré à l'intérieur du MIRA avec une photodiode à quadrants et un signal d'erreur amplifié sera envoyé aux miroirs d'injection de la pompe. Les fluctuations de la puissance laser (fréquence typique de l'ordre du hertz), qui se répercutent directement sur la puissance de l'oscillateur local, génèrent de petites oscillations indésirables sur les traces de détection homodyne, rendant plus difficile la détermination précise des variances des quadratures maximales comprimées (surtout) et anti-comprimées.

La deuxième modification porte sur un **protocole de mesure différent** de celui décrit dans ce manuscrit où le calcul des termes non-diagonaux de la matrice de covariance ne nécessitent que 2 mesures (au lieu de 3, cf. section 7.6.1), ce qui augmente la précision du résultat. De fait, les covariances entre les pixels  $i$  et  $j$  peuvent être déterminées sans passer par la mesure des termes diagonaux, car on a la relation

$$\text{cov}(q_i, q_j) = \frac{\Delta(q_i + q_j)^2 - \Delta(q_i - q_j)^2}{4}. \quad (8.2.1)$$

Pour mesurer le terme  $\Delta(q_i - q_j)^2$  il suffit de réaliser une mesure  $\{ij\}$  avec un déphasage de  $\pi$  sur le masque de phase du pixel  $j$ , par exemple, ce qui revient à décaler verticalement d'une demi-période le masque gravé sur le SLM (figure 8.2.1). Nous pouvons aussi envisager de mesurer les covariances croisées,  $\text{cov}(x_i, p_j)$ , supposément nulles, à partir de  $\Delta(x_i + p_j)^2$  (mesure avec déphasage de  $\pi/2$ ) et de  $\Delta(x_i - p_j)^2$  (mesure avec déphasage de  $3\pi/2$ ).

On note que dans ce protocole, le nombre total de mesures à effectuer est plus grand que dans le cas précédent, même si le nombre de mesures nécessaires pour déterminer chaque covariance est plus petit.

On peut aussi envisager de mesurer directement le taux d'intrication entre deux modes en déterminant directement le critère de Duan relatif à ces deux modes à travers la mesure de  $\Delta(x_i + x_j)^2 + \Delta(p_i - p_j)^2$ .

### 8.2.2 Détection multipixel

La détection multipixel est, en ce qui nous concerne, une façon rapide et compacte d'extraire toutes les informations de corrélation entre "modes-pixels" sans passer par une série exhaustive de détections homodynes où l'oscillateur local est façonné sous différentes formes. En effet, tandis que le nombre de mesures nécessaires pour reconstruire une matrice de covariance  $2n \times 2n$  croît, grosso modo, en  $n^2$  avec la méthode habituel décrite ici, la détection homodyne multipixel ne demande qu'une mesure, qui peut prendre seulement quelques secondes.

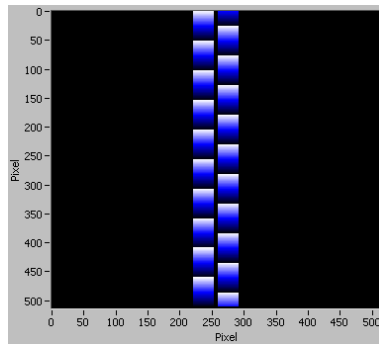


Figure 8.2.1: Masque du SLM réglé pour une mesure directe de  $\Delta(q_2 - q_3)^2$ .

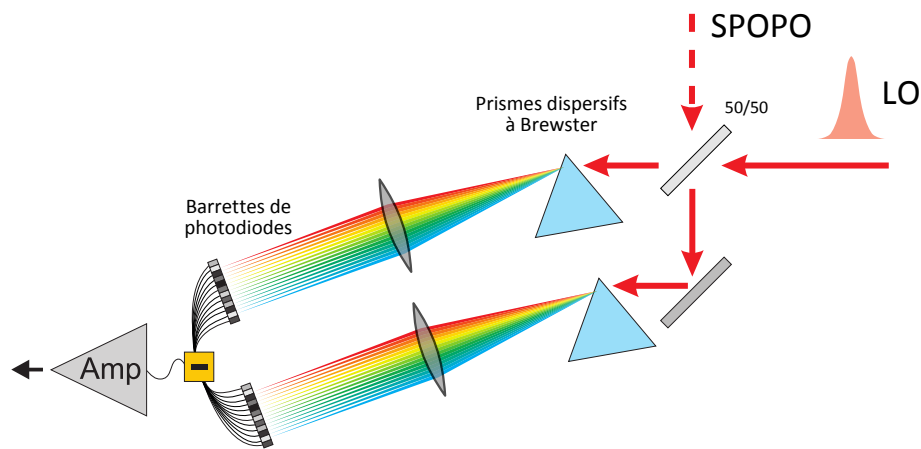


Figure 8.2.2: Détection multipixel dans le domaine spectral.

Ce type de détection a été employé récemment pour la caractérisation d'états quantiques multimodes spatiaux [Armstrong 12]. Nous allons, dans un futur proche, adapter cette technique au domaine tempore/fréquentiel. Le schéma du montage est montré sur la figure 8.2.2. L'oscillateur local et l'état provenant du SPOPO sont mélangés par une lame 50/50 et ensuite dispersés spatialement par des prismes, coupés à Brewster pour minimiser les pertes. Les faisceaux dispersés sont alors imagés sur deux barrettes de 16 photodiodes chacune (acquises chez Hamamatsu). Ainsi, chaque photodiode détecte une région spécifique du spectre. Comme la puissance n'est pas également répartie sur les barrettes, chaque photodiode doit avoir un amplificateur à gain réglable pour assurer une détection parfaitement équilibrée. Les signaux de différence entre les photodiodes correspondant à la même région spectrale seront obtenus à partir de l'électronique analogique. Les 16 signaux de différence seront alors amplifiés pour raccorder avec un convertisseur analogique-numérique et les corrélations entre ces signaux seront calculées par un ordinateur. Cette technique permettra donc une reconstruction "en temps réel" de la matrice de covariance.

Si la détection multipixel dispense la mise en forme de l'oscillateur local, elle exige un effort technique considérable en matière d'électronique, mais reste parfaitement faisable.

### 8.2.3 Façonnage d'états clusters

Nous avons vu que, lorsque l'on analyse dans une base de modes-pixels un état multimode produit par le SPOPO, on observe des corrélations entre ces modes qui sont représentées par les éléments non-diagonaux de la matrice de covariance. Le fait d'avoir plusieurs modes corrélés quantiquement entre eux pourrait conduire à ce que l'on appelle un *cluster state* [Briegel 01]. Les états clusters constitue une importante ressource pour le calcul quantique en variables continues [Menicucci 06].

Dans le chapitre 2, nous avons vu que les modes propres de la conversion paramétrique (et donc du SPOPO) sont entièrement déterminés par le profil spectral de la pompe et l'accord de phase au niveau du cristal non-linéaire. En modifiant la forme et la durée des impulsions de pompe, on peut donc façonner l'état quantique multimode de la lumière produite par le SPOPO [Patera 12], créant des états clusters diversifiés (caractérisés par les corrélations entre les différents modes).

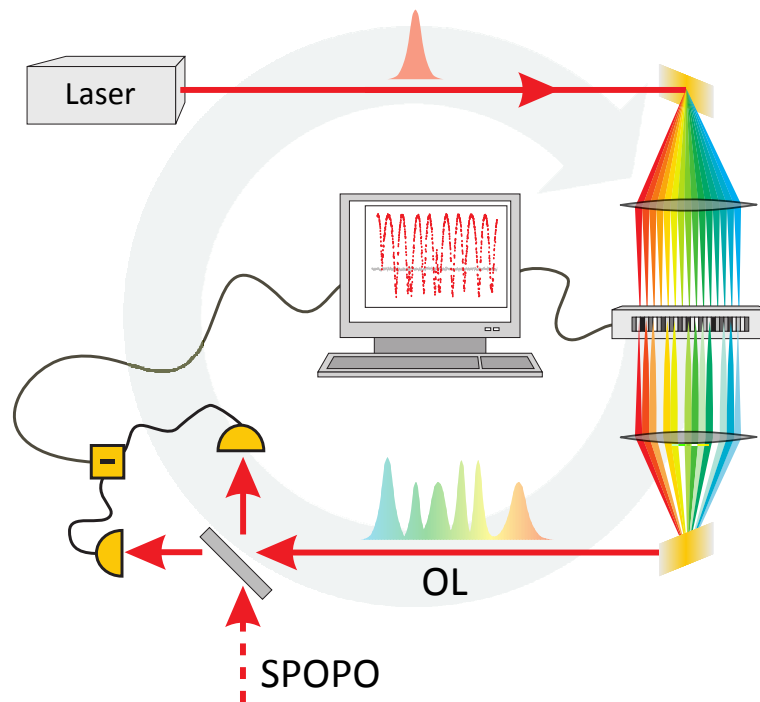
Supposons maintenant que nous avons un état cluster cible à générer (pour l'utilisation dans un algorithme de calcul quantique, p.ex.) et que nous pouvons contrôler la forme de la pompe grâce à un SLM intégré à une ligne 4f. En partant d'une pompe de profil gaussien, par exemple, on peut envisager de mesurer la matrice de corrélation en utilisant la détection multipixel décrite ci-dessus et la faire converger vers l'état cible par biais d'un algorithme génétique. Avec des barrettes de 16 photodiodes, on pourrait a priori créer des états à 16 modes intriqués dont les corrélations sont ajustables à partir du profil de la pompe.

### 8.2.4 Détection adaptative

Des algorithmes génétiques peuvent être employés non seulement pour le façonnage d'états quantiques avec détection multipixel, mais aussi pour optimiser l'oscillateur local dans le cadre d'une détection homodyne avec mise en forme d'impulsion. L'optimisation du mode de l'OL en fonction du résultat de la mesure peut apporter des informations précieuses sur la structure de l'état. Ceci a déjà été réalisé pour déduire les propriétés spectrales/temporelles d'un photon unique [Polycarpou 12].

Pour un état multimode donné produit par un SPOPO, on peut s'intéresser, par exemple, à retrouver le mode dans lequel se trouve le plus de squeezing. Dans ce cas, le squeezing mesuré avec la détection homodyne servirait de paramètre d'entrée de l'algorithme génétique et, après plusieurs mesures, le mode de l'OL convergerait vers celui qui minimise le bruit détecté (normalisé au shot noise). La figure 8.2.3 montre un schéma illustratif du montage.





**Figure 8.2.3:** Schéma d'une détection adaptative où l'oscillateur local est corrigé pour optimiser le squeezing mesuré.

Avec la procédure actuelle, où nous observons des corrélations entre des modes-pixels, nous pouvons déduire, en effet, un mode maximalelement comprimé dans l'espace engendré par la base de ces modes-pixels. Cependant, dû aux limitations imposées par la résolution spectrale, ce mode ne constitue qu'une approximation de celui qui est maximalelement comprimé dans un espace plus large. Comme nous l'avons vu, la théorie prédit que, pour une pompe gaussienne, le premier supermode (celui le plus comprimé) a un profil spectral gaussien, qui est effectivement en dehors de l'espace engendré par la base des modes-pixels. Le résultat d'une telle mesure adaptative, c'est-à-dire le mode de l'OL optimisé, pourrait ensuite être comparé au mode émis par cavité au-dessus du seuil, comme une façon de confirmer la théorie.

On peut spéculer qu'il serait aussi envisageable de déduire la forme exacte du deuxième mode contenant le plus de réduction de bruit si on fait la supposition qu'il ressemble à la deuxième fonction d'Hermite-Gauss. On pourrait ainsi imposer certaines contraintes à l'algorithme génétique pour qu'il trouve une solution qui converge autour de cette fonction. Une autre possibilité consisterait à prélever du faisceau multimode le mode le plus comprimé (et uniquement ce mode-là). Cela n'est pas évident car tous les modes partagent les mêmes propriétés spatiales et de polarisation et sont centrés sur la même longueur d'onde. Si l'on suppose tout de même que l'on peut le faire, une fois que le premier supermode est vide, le deuxième devient celui le plus comprimé et on peut appliquer l'algorithme génétique, sans imposer spécialement de contraintes, pour optimiser la forme temporel de l'OL jusqu'à ce qu'elle converge vers le deuxième supermode.

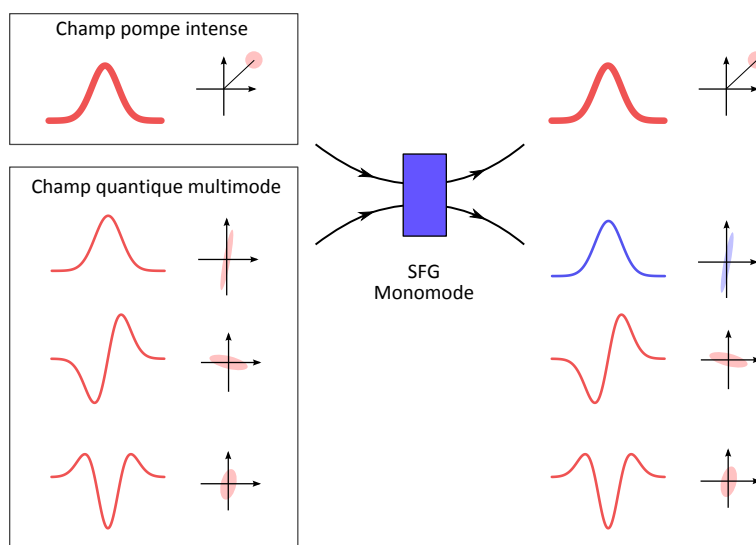
En fait, comme nous le verrons dans la prochaine et dernière section, cette manipulation monomode d'états multimodes est possible via certains type de processus non-linéaires spécialement conçus, comme la somme de fréquences avec accord de vitesse de groupe, abordée (classiquement) en section 2.6 du chapitre 2.

### 8.2.5 Manipulation d'états quantiques multimodes

D'une manière générale, un processus de somme de fréquences, faisant intervenir deux modes initiaux  $\hat{a}_1$  et  $\hat{a}_2$ , signal et complémentaire, associées aux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ,  $\omega_2 > \omega_1$ , est formellement équivalent au mélange avec une lame semi-réfléchissante lorsque la pompe, de fréquence  $\omega_3$  telle que  $\omega_1 + \omega_3 = \omega_2$ , est suffisamment intense pour que ses fluctuations n'interviennent pas. En effet, dans ce cas, la relation entre les opérateurs initiaux  $\hat{a}_i$  et finaux  $\hat{b}_i$  s'écrit [Kumar 90] :

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= \cos \theta \hat{a}_1 - \sin \theta \hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 &= \sin \theta \hat{a}_1 + \cos \theta \hat{a}_2\end{aligned}\tag{8.2.2}$$

où le paramètre  $\theta$  dépend essentiellement de la puissance de pompe. On note que pour  $\theta = \pi/2$ , par exemple, on a  $\hat{b}_1 = -\hat{a}_2$  et  $\hat{b}_2 = \hat{a}_1$ . Cela signifie que, pour



**Figure 8.2.4:** Somme de fréquences monomode pour la manipulation d'états quantiques multimodes.

certaines valeurs de la puissance de pompe, l'état du mode 1, avec toutes ses propriétés quantiques, est transféré au mode 2 et vice-et-versa.

Quand la somme de fréquences implique des impulsions courtes (spectres optiques larges centrés aux fréquences  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$ ), le processus devient multimode dans le cas général, les différents modes étant associés à de différents profils spectraux, et (8.2.2) s'écrit pour chacun de ces modes, indexés par  $n$  :

$$\begin{aligned}\hat{b}_{1,n} &= \cos \theta_n \hat{a}_{1,n} - \sin \theta_n \hat{a}_{2,n} \\ \hat{b}_{2,n} &= \sin \theta_n \hat{a}_{1,n} + \cos \theta_n \hat{a}_{2,n}\end{aligned}\quad (8.2.3)$$

où les  $\theta_n$  sont en général différents pour une puissance de pompe donnée.

Néanmoins, dans des cas spéciaux où la distribution spectrale conjointe de la transformation est séparable (voir chapitre 2), la transformation devient monomode. La figure 8.2.4 illustre cette situation dans le cas où le faisceau signal est un état multimode produit par le SPOPO et la pompe est un faisceau intense de profil gaussien et aussi centré à 800 nm. Seul le premier mode du faisceau signal est converti, dans ce cas vers 400 nm, et tous les autres modes traversent le cristal sans interagir avec la pompe. Le faisceau complémentaire à 400 nm, initialement vide, porte en sortie l'état comprimé du premier mode. Le premier mode du faisceau signal, à son tour, est maintenant vide.

Grâce à cette la conversion de fréquences monomode, le premier mode a changé de couleur et peut être facilement prélevé avec un miroir dichroïque. Il peut maintenant être analysé et manipulé individuellement ou encore utilisé comme lien avec un autre

système nécessitant une source quantique à cette longueur d'onde. Quant au restant du faisceau signal, nous pouvons, par exemple, y effectuer une détection adaptative avec un algorithme génétique pour déterminer la forme exacte du deuxième supermode, qui est maintenant celui qui porte le plus de squeezing, contribuant pour la caractérisation de l'état.

Dans [Eckstein 10] et [Brecht 11], cette idée est explorée également dans des cas où la pompe est dans un mode autre que celui de profil gaussien. On peut alors montrer que, quand la pompe et soit le signal soit le complémentaire ont la même vitesse de groupe, alors la distribution spectrale conjointe est parallèle à un des axes lorsque représentée sur un diagramme  $(\omega^{\text{signal}}, \omega^{\text{idler}})$  et est donc séparable. Dans ce cas, le processus est monomode et on montre également que la forme de la pompe détermine le mode signal qui est converti. Ainsi, en mettant la pompe judicieusement en forme on peut choisir quel mode sera extrait. Si un tel processus est réalisé en cascade, on peut alors séparer autant de modes que l'on souhaite de l'état multimode initial !

Une des difficultés expérimentales pour atteindre le régime monomode de la somme de fréquences réside dans l'accord simultané de vitesse de phase et de vitesse de groupe dans le cristal non-linéaire. Dans le chapitre 2, nous avons montré une configuration avec un cristal BIBO où nous atteignons l'accord de phase avec un accord de vitesse de groupe qui n'est pas parfait, et il est donc possible de rendre la conversion monomode uniquement dans le cas d'une pompe gaussienne. Un autre inconvénient est le fait que le coefficient non-linéaire semble être bas. Une alternative pour l'avenir sera de trouver un cristal périodiquement polarisé, comme proposé en [Brecht 11], fonctionnant un quasi-accord de phase et pour lequel l'accord de vitesse de groupe est atteint en ajustant la période des couches polarisées.



## Bibliographie

- [Adesso 04] G. Adesso, A. Serafini & F. Illuminati. *Extremal entanglement and mixedness in continuous variable systems*. Physical Review A, vol. 70, no. 2, page 022318, 2004. Cité p. 64
- [Akhmanov 66] SA Akhmanov, AI Kovrigin, VA Kolosov, AS Piskarskas, VV Fadeev & RV Khokhlov. *Tunable parametric light generator with KDP crystal*. JETP Lett, vol. 3, pages 241--245, 1966. Cité p. 72
- [Armstrong 12] S. Armstrong, J.F. Morizur, J. Janousek, B. Hage, N. Treps, P.K. Lam & H.A. Bachor. *Programmable multimode quantum networks*. Nature Communications, vol. 3, page 1026, 2012. Cité p. 158
- [Arvind 95] Arvind, B. Dutta, N. Mukunda & R. Simon. *Two-mode quantum systems : Invariant classification of squeezing transformations and squeezed states*. Phys. Rev. A, vol. 52, pages 1609--1620, Aug 1995. Cité p. 154
- [Averchenko 10] VA Averchenko, Y.M. Golubev, C. Fabre & N. Treps. *Quantum correlations and fluctuations in the pulsed light produced by a synchronously pumped optical parametric oscillator below its oscillation threshold*. The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, pages 1--8, 2010. Cité p. 71
- [Birch 93] KP Birch & MJ Downs. *An updated Edlén equation for the refractive index of air*. Metrologia, vol. 30, page 155, 1993. Cité p. 25
- [Black 01] E.D. Black. *An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*. American Journal of Physics, vol. 69, page 79, 2001. Cité p. 106
- [Boyer 08] V. Boyer, AM Marino & PD Lett. *Generation of spatially broadband twin beams for quantum imaging*. Physical review letters, vol. 100, no. 14, page 143601, 2008. Cité p. 2
- [Braunstein 98] S.L. Braunstein & H.J. Kimble. *Teleportation of continuous quantum variables*. Physical Review Letters, vol. 80, no. 4, pages 869--872, 1998. Cité p. 1
- [Braunstein 05a] Samuel L. Braunstein & Peter van Loock. *Quantum information with continuous variables*. Rev. Mod. Phys., vol. 77, pages 513--577, Jun 2005. Cité p. 146

## Bibliographie

- [Braunstein 05b] S.L. Braunstein. *Squeezing as an irreducible resource*. Physical Review A, vol. 71, no. 5, page 055801, 2005. Cité p. 86
- [Brecht 11] B. Brecht, A. Eckstein, A. Christ, H. Suche & C. Silberhorn. *From quantum pulse gate to quantum pulse shaper-engineered frequency conversion in nonlinear optical waveguides*. New Journal of Physics, vol. 13, no. 6, page 065029, 2011. Cité p. 163
- [Briegel 01] H.J. Briegel & R. Raussendorf. *Persistent entanglement in arrays of interacting particles*. Physical Review Letters, vol. 86, no. 5, pages 910--913, 2001. Cité p. 159
- [Burneika 72] K. Burneika, M. Ignatavicius, V. Kabelka, A. Piskarskas & A. Stabinis. *Parametric light amplification and oscillation in KDP with mode-locked pump*. Quantum Electronics, IEEE Journal of, vol. 8, no. 6, pages 574--574, 1972. Cité p. 73
- [Cerf 07] N.J. Cerf, G. Leuchs & E.S. Polzik. *Quantum information with continuous variables of atoms and light*. Imperial College Pr, 2007. Cité p. 1
- [Chalopin 10] B. Chalopin, F. Scazza, C. Fabre & N. Treps. *Multimode nonclassical light generation through the optical-parametric-oscillator threshold*. Physical Review A, vol. 81, no. 6, page 61804, 2010. Cité p. 2
- [Cheung 90] EC Cheung & JM Liu. *Theory of a synchronously pumped optical parametric oscillator in steady-state operation*. Journal of the Optical Society of America B, vol. 7, no. 8, page 1385, 1990. Cité p. 3
- [Coddington 08] Ian Coddington, William C. Swann & Nathan R. Newbury. *Coherent Multiheterodyne Spectroscopy Using Stabilized Optical Frequency Combs*. Phys. Rev. Lett., vol. 100, page 013902, Jan 2008. Cité p. 8
- [Coherent 93] Coherent. *Operator's Manual. The Coherent Mira Model 900-B Laser*, 1993. Cité p. 102
- [Coherent 05] Coherent. *Operator's Manual. Verdi V-18 Diode-Pumped Lasers*, 2005. Cité p. 99
- [de Valcarcel 06] GJ de Valcarcel, G. Patera, N. Treps & C. Fabre. *Multimode squeezing of frequency combs*. Physical Review A, vol. 74, no. 6, page 61801, 2006. Cité p. 3
- [Duan 00] L.M. Duan, G. Giedke, J.I. Cirac & P. Zoller. *Inseparability criterion for continuous variable systems*. Physical Review Letters, vol. 84, no. 12, pages 2722--2725, 2000. Cité p. 92, 154
- [Dutta 95] B. Dutta, N. Mukunda & R. Simon. *The real symplectic groups in quantum mechanics and optics*. Pramana, vol. 45, no. 6, pages 471--497, 1995. Cité p. 68

- [Eberly 06] JH Eberly. *Schmidt analysis of pure-state entanglement*. Laser physics, vol. 16, no. 6, pages 921--926, 2006. Cité p. 55
- [Eckstein 10] A. Eckstein, B. Brecht & C. Silberhorn. *A quantum pulse gate based on spectrally engineered sum frequency generation*. arXiv preprint arXiv :1007.3215, 2010. Cité p. 163
- [Edelstein 89] DC Edelstein, ES Wachman & CL Tang. *Broadly tunable high repetition rate femtosecond optical parametric oscillator*. Applied Physics Letters, vol. 54, no. 18, pages 1728--1730, 1989. Cité p. 3, 73
- [Ekert 91] A.K. Ekert. *Quantum cryptography based on Bell's theorem*. Physical Review Letters, vol. 67, no. 6, pages 661--663, 1991. Cité p. 1
- [Fabre 08] C. Fabre. *Quantum Optics, from one to many modes*. Lectures from Ecole Prédoctorale des Houches, session XXIV, Quantum Optics, September 10-21, 2007, 2008. Cité p. 63
- [Fork 84] RL Fork, OE Martinez & JP Gordon. *Negative dispersion using pairs of prisms*. Optics letters, vol. 9, no. 5, pages 150--152, 1984. Cité p. 108, 109
- [Gherman 02] T. Gherman & D. Romanini. *Modelocked Cavity-Enhanced Absorption Spectroscopy*. Optics Express, vol. 10, no. 19, pages 1033--1042, 2002. Cité p. 14
- [Ghotbi 04] M. Ghotbi & M. Ebrahim-Zadeh. *Optical second harmonic generation properties of BiB3O6*. Optics Express, vol. 12, no. 24, pages 6002--6019, 2004. Cité p. 38
- [Giordmaine 65] J. A. Giordmaine & Robert C. Miller. *Tunable Coherent Parametric Oscillation in LiNbO<sub>3</sub> at Optical Frequencies*. Phys. Rev. Lett., vol. 14, pages 973--976, Jun 1965. Cité p. 72
- [Giovannetti 11] V. Giovannetti, S. Lloyd & L. Maccone. *Advances in quantum metrology*. Nature Photonics, vol. 5, no. 4, pages 222--229, 2011. Cité p. 1
- [Glauber 63] R.J. Glauber. *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Physical Review, vol. 131, no. 6, page 2766, 1963. Cité p. 1
- [Grynberg 10] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre & C. Cohen-Tannoudji. *Introduction to quantum optics : from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge Univ Pr, 2010. Cité p. 29, 31, 58
- [Holzwarth 00] R. Holzwarth, T. Udem, TW H "ansch, JC Knight, WJ Wadsworth & P.S.J. Russell. *Optical frequency synthesizer for precision spectroscopy*. Physical Review Letters, vol. 85, no. 11, pages 2264--2267, 2000. Cité p. 2



## Bibliographie

- [Hönninger 99] C. Hönninger, R. Paschotta, F. Morier-Genoud, M. Moser & U. Keller. *Q-switching stability limits of continuous-wave passive mode locking*. JOSA B, vol. 16, no. 1, pages 46--56, 1999. Cité p. 103
- [Janousek 09] J. Janousek, K. Wagner, JF Morizur, N. Treps, PK Lam, CC Harb & HA Bachor. *Optical entanglement of co-propagating modes*. Nature photonics, vol. 3, no. 7, pages 399--402, 2009. Cité p. 2
- [Jason Jones 00] R. Jason Jones, J.C. Diels, J. Jasapara & W. Rudolph. *Stabilization of the frequency, phase, and repetition rate of an ultra-short pulse train to a Fabry-Pérot reference cavity*. Optics Communications, vol. 175, no. 4-6, pages 409--418, 2000. Cité p. 14
- [Jason Jones 01] R. Jason Jones & Jean-Claude Diels. *Stabilization of Femtosecond Lasers for Optical Frequency Metrology and Direct Optical to Radio Frequency Synthesis*. Phys. Rev. Lett., vol. 86, pages 3288--3291, Apr 2001. Cité p. 106
- [Jiang 12] S. Jiang, N. Treps & C. Fabre. *A time/frequency quantum analysis of the light generated by synchronously pumped optical parametric oscillators*. New Journal of Physics, vol. 14, page 043006, 2012. Cité p. 3, 71, 84
- [Joffre 10] M. Joffre. *Optique non-linéaire en régimes continu et femtoseconde*. 2010. Cité p. 29
- [Jones 00] D.J. Jones, S.A. Diddams, J.K. Ranka, A. Stentz, R.S. Windeler, J.L. Hall & S.T. Cundiff. *Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis*. Science, vol. 288, no. 5466, page 635, 2000. Cité p. 105
- [Koke 10] S. Koke, C. Grebing, H. Frei, A. Anderson, A. Assion & G. Steinmeyer. *Direct frequency comb synthesis with arbitrary offset and shot-noise-limited phase noise*. Nature Photonics, 2010. Cité p. 105
- [Kolobov 99] Mikhail I. Kolobov. *The spatial behavior of nonclassical light*. Rev. Mod. Phys., vol. 71, pages 1539--1589, Oct 1999. Cité p. 66
- [Kumar 90] P. Kumar. *Quantum frequency conversion*. Optics letters, vol. 15, no. 24, pages 1476--1478, 1990. Cité p. 161
- [Lamine 08] B. Lamine, C. Fabre & N. Treps. *Quantum improvement of time transfer between remote clocks*. Physical review letters, vol. 101, no. 12, page 123601, 2008. Cité p. 2, 8
- [Laurat 04] J. Laurat, T. Coudreau, G. Keller, N. Treps & C. Fabre. *Compact source of Einstein-Podolsky-Rosen entanglement and squeezing at very low noise frequencies*. Phys. Rev. A, vol. 70, page 042315, Oct 2004. Cité p. 1

- [Law 00] C. K. Law, I. A. Walmsley & J. H. Eberly. *Continuous Frequency Entanglement : Effective Finite Hilbert Space and Entropy Control*. Phys. Rev. Lett., vol. 84, pages 5304--5307, Jun 2000. Cité p. 84
- [Lloyd 99] Seth Lloyd & Samuel L. Braunstein. *Quantum Computation over Continuous Variables*. Phys. Rev. Lett., vol. 82, pages 1784--1787, Feb 1999. Cité p. 2
- [Mak 92] G. Mak, Q. Fu & H.M. van Driel. *Externally pumped high repetition rate femtosecond infrared optical parametric oscillator*. Applied physics letters, vol. 60, no. 5, pages 542--544, 1992. Cité p. 73
- [Menicucci 06] N.C. Menicucci, P. Van Loock, M. Gu, C. Weedbrook, T.C. Ralph & M.A. Nielsen. *Universal quantum computation with continuous-variable cluster states*. Physical review letters, vol. 97, no. 11, page 110501, 2006. Cité p. 2, 159
- [Menicucci 08] N.C. Menicucci, S.T. Flammia & O. Pfister. *One-way quantum computing in the optical frequency comb*. Physical review letters, vol. 101, no. 13, page 130501, 2008. Cité p. 2
- [Mukamel 95] S. Mukamel. Principles of nonlinear optical spectroscopy, volume 106. 1995. Cité p. 49
- [O'Brien 09] J.L. O'Brien, J.V. Akira Furusawa & J. Vuckovic. *Photonic quantum technologies*. Nature Photonics, vol. 3, no. 12, pages 687--695, 2009. Cité p. 2
- [Opatrny 02] T. Opatrny, N. Korolkova & G. Leuchs. *Mode structure and photon number correlations in squeezed quantum pulses*. Physical Review A, vol. 66, no. 5, page 53813, 2002. Cité p. 121, 125
- [Parker 00] S. Parker, S. Bose & M. B. Plenio. *Entanglement quantification and purification in continuous-variable systems*. Phys. Rev. A, vol. 61, page 032305, Feb 2000. Cité p. 82
- [Patera 08] G. Patera. *Quantum properties of ultra-short pulses generated by SPOPOs : multi-mode squeezing and entanglement*. PhD thesis, 2008. Cité p. 38
- [Patera 09] G. Patera, N. Treps, C. Fabre & G.J. De Valcarcel. *Quantum theory of Synchronously Pumped type I Optical Parametric Oscillators : characterization of the squeezed supermodes*. The European Physical Journal D, vol. 56, no. 1, pages 123--140, 2009. Cité p. 3, 71, 84, 92
- [Patera 12] G. Patera, C. Navarrete-Benlloch, G.J. de Valcárcel & C. Fabre. *Quantum coherent control of highly multipartite continuous-variable entangled states by tailoring parametric interactions*. The European Physical Journal D, vol. 66, no. 9, page 214, 2012. Cité p. 159

## Bibliographie

- [Pinel 10] O. Pinel. *Optique quantique multimode avec des peignes de fréquence*. PhD thesis, 2010. Cité p. 16, 113, 115, 118, 120, 155
- [Pinel 12a] O. Pinel, P. Jian, R. Medeiros de Araújo, J. Feng, B. Chalopin, C. Fabre & N. Treps. *Generation and Characterization of Multimode Quantum Frequency Combs*. Phys. Rev. Lett., vol. 108, page 083601, Feb 2012. Cité p. 113
- [Pinel 12b] Olivier Pinel, Julien Fade, Daniel Braun, Pu Jian, Nicolas Treps & Claude Fabre. *Ultimate sensitivity of precision measurements with intense Gaussian quantum light : A multimodal approach*. Phys. Rev. A, vol. 85, page 010101, Jan 2012. Cité p. 2
- [Polycarpou 12] C. Polycarpou, KN Cassemiro, G. Venturi, A. Zavatta & M. Bellini. *Adaptive Detection of Arbitrarily Shaped Ultrashort Quantum Light States*. Physical Review Letters, vol. 109, no. 5, page 53602, 2012. Cité p. 159
- [Pyscher 11] M. Pyscher, Y. Miwa, R. Shahrokhshahi, R. Bloomer & O. Pfister. *Parallel Generation of Quadripartite Cluster Entanglement in the Optical Frequency Comb*. Physical Review Letters, vol. 107, no. 3, page 030505, 2011. Cité p. 2
- [Reichert 99] J. Reichert, R. Holzwarth, T. Udem & TW Hänsch. *Measuring the frequency of light with mode-locked lasers*. Optics communications, vol. 172, no. 1-6, pages 59--68, 1999. Cité p. 7
- [Reid 88] MD Reid & PD Drummond. *Quantum correlations of phase in non-degenerate parametric oscillation*. Physical review letters, vol. 60, no. 26, pages 2731--2733, 1988. Cité p. 154
- [Reynaud 92] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino & C. Fabre. *Quantum Fluctuations in Optical Systems*. Progress in optics, vol. 30, pages 1--85, 1992. Cité p. 75
- [Schibli 06] TR Schibli, K. Minoshima, Y. Bitou, F.L. Hong, H. Inaba, A. Onae & H. Matsumoto. *Displacement metrology with sub-pm resolution in air based on a fs-comb wavelength synthesizer*. Optics Express, vol. 14, no. 13, pages 5984--5993, 2006. Cité p. 8
- [Schnatz 96] H. Schnatz, B. Lipphardt, J. Helmcke, F. Riehle & G. Zinner. *First phase-coherent frequency measurement of visible radiation*. Physical Review Letters, vol. 76, no. 1, pages 18--21, 1996. Cité p. 8
- [Shelby 92] RM Shelby & M. Rosenbluh. *Generation of pulsed squeezed light in a mode-locked optical parametric oscillator*. Applied Physics B : Lasers and Optics, vol. 55, no. 3, pages 226--232, 1992. Cité p. 3, 119

- [Simon 88] R. Simon, ECG Sudarshan & N. Mukunda. *Gaussian pure states in quantum mechanics and the symplectic group*. Physical Review A, vol. 37, no. 8, pages 3028--3038, 1988. Cité p. 68
- [Simon 94] R. Simon, N. Mukunda & Biswadeb Dutta. *Quantum-noise matrix for multimode systems :  $U(n)$  invariance, squeezing, and normal forms*. Phys. Rev. A, vol. 49, pages 1567--1583, Mar 1994. Cité p. 154
- [Simon 00] R. Simon. *Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems*. Phys. Rev. Lett., vol. 84, pages 2726--2729, Mar 2000. Cité p. 64, 92, 154
- [Slusher 85] R.E. Slusher, LW Hollberg, B. Yurke, JC Mertz & JF Valley. *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity*. Physical Review Letters, vol. 55, no. 22, pages 2409--2412, 1985. Cité p. 1
- [Slusher 87] R.E. Slusher, P. Grangier, A. LaPorta, B. Yurke & MJ Potasek. *Pulsed squeezed light*. Physical review letters, vol. 59, no. 22, pages 2566--2569, 1987. Cité p. 1, 2
- [Spälter 98] S. Spälter, N. Korolkova, F. König, A. Sizmann & G. Leuchs. *Observation of multimode quantum correlations in fiber optical solitons*. Physical Review Letters, vol. 81, no. 4, pages 786--789, 1998. Cité p. 2, 121
- [Tanaka 78] Y. Tanaka, T. Kushida & S. Shionoya. *Broadly tunable, repetitive, picosecond parametric oscillator*. Optics Communications, vol. 25, no. 2, pages 273--276, 1978. Cité p. 73
- [Thiel 12] V. Thiel. *Stabilisation d'un peigne de fréquences pour des mesures d'états non-classiques*. Master's thesis, 2012. Cité p. 106
- [Thorpe 08] M.J. Thorpe, D. Balslev-Clausen, M.S. Kirchner & J. Ye. *Cavity-enhanced optical frequency comb spectroscopy : application to human breath analysis*. Opt. Express, vol. 16, pages 2387--2397, 2008. Cité p. 14
- [Treps 01] N. Treps. *Effets quantiques dans les images optiques*. PhD thesis, 2001. Cité p. 61
- [Treps 05] N. Treps, V. Delaubert, A. Maître, J.M. Courty & C. Fabre. *Quantum noise in multipixel image processing*. Physical Review A, vol. 71, no. 1, page 13820, 2005. Cité p. 2, 62
- [Udem 97] T. Udem, A. Huber, B. Gross, J. Reichert, M. Prevedelli, M. Weitz & T.W. Hänsch. *Phase-coherent measurement of the hydrogen 1S-2S transition frequency with an optical frequency interval divider chain*. Physical Review Letters, vol. 79, no. 14, pages 2646--2649, 1997. Cité p. 8

## Bibliographie

- [Udem 99] T. Udem, J. Reichert, R. Holzwarth & TW Hänsch. *Accurate measurement of large optical frequency differences with a mode-locked laser*. Optics letters, vol. 24, no. 13, pages 881--883, 1999. Cité p. 7
- [Udem 02] T. Udem, R. Holzwarth & T.W. Hänsch. *Optical frequency metrology*. Nature, vol. 416, no. 6877, pages 233--237, 2002. Cité p. 2, 105
- [Vaidman 94] Lev Vaidman. *Teleportation of quantum states*. Phys. Rev. A, vol. 49, pages 1473--1476, Feb 1994. Cité p. 1
- [van Driel 95] HM van Driel. *Synchronously pumped optical parametric oscillators*. Applied Physics B : Lasers and Optics, vol. 60, no. 5, pages 411--420, 1995. Cité p. 3
- [Walls 08] D.F. Walls & G.J. Milburn. Quantum optics. Springer, 2008. Cité p. 74
- [Wasilewski 06] W. Wasilewski, AI Lvovsky, K. Banaszek & C. Radzewicz. *Pulsed squeezed light : simultaneous squeezing of multiple modes*. Physical Review A, vol. 73, no. 6, page 63819, 2006. Cité p. 84
- [Weiner 00] AM Weiner. *Femtosecond pulse shaping using spatial light modulators*. Review of scientific instruments, vol. 71, no. 5, pages 1929--1960, 2000. Cité p. 139
- [Welsch 99] D.G. Welsch, W. Vogel & T. Opatrny. *II Homodyne Detection and Quantum-State Reconstruction*. Progress in Optics, vol. 39, pages 63--211, 1999. Cité p. 137
- [Wenger 05] J. Wenger, A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Time-resolved homodyne characterization of individual quadrature-entangled pulses*. The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, vol. 32, no. 3, pages 391--396, 2005. Cité p. 2
- [Werner 01] RF Werner & MM Wolf. *Bound entangled Gaussian states*. Physical Review Letters, vol. 86, no. 16, pages 3658--3661, 2001. Cité p. 64
- [Wong 10] S.T. Wong, K.L. Vodopyanov & R.L. Byer. *Self-phase-locked divide-by-2 optical parametric oscillator as a broadband frequency comb source*. JOSA B, vol. 27, no. 5, pages 876--882, 2010. Cité p. 88
- [Yukawa 08] Mitsuyoshi Yukawa, Ryuji Ukai, Peter van Loock & Akira Furusawa. *Experimental generation of four-mode continuous-variable cluster states*. Phys. Rev. A, vol. 78, page 012301, Jul 2008. Cité p. 2
- [Zhang 06] Jing Zhang & Samuel L. Braunstein. *Continuous-variable Gaussian analog of cluster states*. Phys. Rev. A, vol. 73, page 032318, Mar 2006. Cité p. 2