Équations de Schrödinger à données aléatoires : construction de solutions globales pour des équations sur-critiques

Aurélien Poiret

UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
École Doctorale de Mathématiques de la région Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Discipline : Mathématiques

par Aurélien POIRET

Équations de Schrödinger à données aléatoires : construction de solutions globales pour des équations sur-critiques

Soutenue le 19 décembre 2012 devant la commission d'examen :

M.	Nicolas	**Burq**	Université Paris XI	Directeur de thèse
M.	Rémi	**Carles**	Université Montpellier 2	Examinateur
Mme.	Isabelle	**Gallagher**	Université Paris Diderot	Rapporteur
M.	Patrick	**Gérard**	Université Paris XI	Président du jury
M.	Massimiliano	**Gubinelli**	Université Paris Dauphine	Rapporteur
M.	Nikolay	**Tzvetkov**	Université Cergy Pontoise	Examinateur

Aurélien Poiret
aurelien.poiret@math.u-psud.fr
`https://sites.google.com/site/aurelienpoiret/home`

Département de Mathématiques d'Orsay

Thèse préparée au Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de mathématiques (UMR 8628), Bât 425
Université Paris-Sud 11
91405 Orsay Cedex

Équations de Schrödinger à données aléatoires : construction de solutions globales pour des équations sur-critiques

Résumé

Dans cette thèse, on construit un grand nombre de solutions globales pour de nombreuses équations de Schrödinger sur-critiques. Le principe consiste à rendre la donnée initiale aléatoire, selon les mêmes méthodes que Nicolas Burq, Nikolay Tzvetkov et Laurent Thomann afin de gagner de la dérivabilité.
On considère d'abord l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3. En partant de variables aléatoires gaussiennes et de la base de $L^2(\mathbb{R}^3)$ formée des fonctions d'Hermite tensorielles, on construit des ensembles de solutions globales pour des données initiales qui sont moralement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Les points clefs de la démonstration sont l'existence d'une estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique et la transformation de lentille qui permet de se ramener à prouver l'existence locale de solutions à l'équation de Schrödinger avec potentiel harmonique.
On étudie ensuite l'effet régularisant pour prouver un théorème analogue où le gain de dérivée vaut $\frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$ où p correspond à la non linéarité de l'équation. Le gain est donc plus faible que précédemment mais la base de fonctions propres quelconques. De plus, la méthode s'appuyant sur des estimées linéaires, on établit le résultat pour des variables aléatoires dont la queue de distribution est à décroissance exponentielle.
Enfin, on démontre des estimées multilinéaires en dimension 2 pour une base de fonctions propres quelconques ainsi que des inégalités de types chaos de Wiener pour une classe générale de variables aléatoires. Cela nous permet d'établir le théorème pour l'équation de Schrödinger quintique, avec un gain de dérivée égal à $\frac{1}{3}$, dans le même cadre que la partie précédente.

Mots-clefs : Données aléatoires, équations de Schrödinger sur-critiques, estimées bilinéaires de type Bourgain, oscillateur harmonique, solutions globales.

Random data for Schrödinger equations: construction of global solutions for supercritical equations

Abstract

In this thesis, we build a large number of global solutions for many supercritical Schrödinger equations. The method is to make the random initial data, using the same methods that Nicolas Burq, Nikolay Tzvetkov and Laurent Thomann in order to obtain differentiability.
First, we consider the cubic Schrödinger equation in three dimensional. Using Gaussian random variables and the basis of $L^2(\mathbb{R}^3)$ consists of tensorial Hermite functions, we construct sets of solutions for initial data that are morally in $L^2(\mathbb{R}^3)$. The main ingredients of the proof are the existence of Bourgain type bilinear estimates for the harmonic oscillator and the lens transform which can be reduced to prove a local existence of solutions for the Schrödinger equation with harmonic potential.
Next, we study the smoothing effect to prove an analogous theorem which the gain of differentiability is equal to $\frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$ which p is the nonlinearity of the equation. This gain is lower than previously but the basis of eigenfunctions are general. As the method uses only linear estimates, we establish the result for a general class of random variables.
Finally, we prove multilinear estimates in two dimensional for a basis of ordinaries eigenfunctions and Wiener chaos type inequalities for classical random variables. This allows us to establish the theorem for the quintic Schrödinger equation, with a gain of differentiability equals to $\frac{1}{3}$, in the same context as the previous chapter.

Keywords : Bourgain type bilinear estimates, global solutions, harmonic oscillator, random data, supercritical non linear Schrödinger equations.

À Papa
et Maman

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Nicolas Burq, pour qui j'éprouve une extrême reconnaissance. Nicolas, je te remercie de m'avoir accordé ta confiance en me proposant ce sujet de thèse que j'ai trouvé extrêmement intéressant et de m'avoir laissé cette chance de travailler avec quelqu'un d'aussi formidable que toi. Merci pour ta disponibilité, ta gentillesse, ta bonne humeur constante, ton efficacité hors du commun, ton optimisme à toute épreuve et ton expérience des mathématiques qui m'a tellement émerveillé et fasciné. Merci également d'avoir toujours été à mon écoute lorsque j'en avais besoin. Toutes les qualités humaines que tu possèdes ont marqué mon esprit à jamais et j'espère sincèrement réussir à me servir, dans mon futur métier, de toutes ces valeurs que tu m'as transmises.

Je tiens ensuite à remercier particulièrement Patrick Gérard pour tout ce qu'il a fait pour moi. Patrick Gérard, merci pour vos nombreux cours si pédagogues et si intéressants qui m'ont tant passionné, merci pour vos précieux conseils qui m'ont permis de rentrer à l'ens Cachan et surtout merci de m'avoir redirigé vers Nicolas Burq pour mon stage de M2 et ma thèse. Je suis très honoré de votre présence dans mon jury.

Sincères remerciements à Isabelle Gallagher et Massimiliano Gubinelli d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce manuscrit. Merci pour vos remarques qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce texte. Merci également à Rémi Carles et Nikolay Tzvetkov d'avoir accepté si généreusement de faire partie de mon jury.

L'occasion est parfaite pour remercier tous les professeurs que j'ai pu avoir dans ma scolarité et qui ont conforté mon envie de faire des Mathématiques, en particulier Catherine Lepez pour son amour indétrônable de la matière. Merci à toute l'équipe ANEDP d'Orsay pour sa bonne humeur et en particulier à Claude Zuily pour son intérêt constant de mon devenir que ce soit sur le plan scientifique ou sur le plan humain. Merci à Laurent Thomann pour les quelques discussions mathématiques que nous avons pu avoir et ton invitation très chaleureuse à Nantes.

Un très grand remerciement à Valérie Lavigne pour son efficacité exemplaire concernant les démarches administratives et sa bonne humeur quotidienne. Merci également à Catherine Poupon pour sa disponibilité et les conversations réconfortantes que nous avons pu avoir.

Merci à Tsonga, Federer et Lens pour m'avoir distrait (et empêché de travailler !) durant ces trois années et surement pendant encore longtemps.

Merci aux anciens doctorants Shweta, Eddy, Robin, Sébastien, Camille, Richard et doctorants actuels Benoit, Emmanuel, Lionel, Pierre-Antoine, Igor, Vincent, Nina, Tristan, Pierre pour avoir favorisé la bonne ambiance au sein de l'école doctorale.

Merci à mes amis du Nord, Maurice, Dominique, Jean Jacques et Evelyne qui, très très loin du monde des mathématiques m'ont toujours encouragé et soutenu dans mes études.

Merci à mes amis "Orcéen dans mon coeur" (oui, parce que plus personne n'habite Orsay maintenant), Laure, Olivier, Thierry, Robbi et bien évidement Caroline, pour tous les moments que nous avons pu passer ensemble. Je vous souhaite le meilleur avenir possible !

Enfin, je remercie ma famille sans qui je ne sais pas ce que je serais. Mémé, merci pour tes confitures qui m'ont donné la force nécessaire pour accomplir cette thèse. Valentin, Corentin, merci pour tous les parcours du combattant, les parties de jeux vidéos, les compétitions sportives (course à pied Et équitation), les guignolettes parties qui m'ont permis de me détendre durant ces trois années de stress intensif. Papa, maman, merci pour l'amour incommensurable que vous portez à mes frères ainsi qu'à moi même. Merci pour votre soutien, votre confiance et votre générosité. Je vous dois absolument tout ce que j'ai accompli, c'est pourquoi ce travail vous est dédié.

Table des matières

Notations de cette thèse

d	dimension d'espace
u_0	donnée initiale
H	oscillateur harmonique
$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$	base de fonctions propres de H
λ_n^2	valeur propre associée à h_n
σ	régularité de la donnée initiale u_0
$\overline{H}^s$	espace de Sololev Harmonique avec s dérivées dans L^2
H^s	espace de Sololev usuel avec s dérivées dans L^2
$\overline{W}^{s,p}$	espace de Sololev Harmonique avec s dérivées dans L^p
$W^{s,p}$	espace de Sololev usuel avec s dérivées dans L^p
$\overline{X}_T^s$	espace de Strichartz harmonique avec s dérivées sur l'intervalle de temps $[-T,T]$
X_T^s	espace de Strichartz pour le laplacien avec s dérivées sur l'intervalle de temps $[-T,T]$
X^s	espace de Strichartz global pour le laplacien avec s dérivées
$\overline{X}^{s,b}$	espace de Bourgain harmonique avec s dérivées
$\overline{X}_T^{s,b}$	espace de Bourgain harmonique avec s dérivées restreint à l'intervalle de temps $[-T,T]$

Introduction

L'objectif principal de cette thèse est de construire des solutions globales pour des équations de Schrödinger sur-critiques, en utilisant la théorie des équations à données aléatoires développée dans [BT2], [BTT] ou encore [BT4].
Partir d'une donnée initiale aléatoire afin de résoudre globalement presque surement des équations sur-critiques est une méthode qui a déjà montré ses preuves dans plusieurs situations. Citons,
- [BTT] qui démontrent que toutes les équations de Schrödinger défocalisantes en dimension 1 sont presque surement globalement bien posées sur $L^2(\mathbb{R})$ (alors que le problème est $H^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p-1}}(\mathbb{R})$ critique),
- [D] qui établit que toutes les équations de Schrödinger défocalisantes en dimension 2 radiale sont presque surement globalement bien posées sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ (alors que le problème est $H^{1-\frac{2}{p-1}}(\mathbb{R})$ critique),
- [BT4] qui prouvent que l'équation des ondes cubique sur le tore en dimension 3 est presque surement globalement bien posée sur $L^2(\mathbb{T}^3)$ (alors que le problème est $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^3)$ critique),
- [Bou4] qui prouve que l'équation de Schrödinger cubique sur le tore en dimension 2 "avec une non-linéarité non usuelle" est presque surement globalement bien posée sur $L^2(\mathbb{T}^2)$ (alors que le problème est $L^2(\mathbb{T}^2)$ critique),
pour ne citer que quelques travaux. Ces résultats sont basés sur la preuve d'une existence locale presque sûre et sur un argument de globalisation de type conservation d'énergie ou de type mesure de Gibbs invariante sous l'action du flot. Pour l'équation de Schrödinger, en dimension plus grande que 2, la situation ne semble pas aussi bonne. En effet, de nombreuses estimations ne sont à priori plus vraies (l'estimation L^∞ des fonctions propres de l'oscillateur harmonique, qui est un des points clef de l'analyse en dimension 1, se détériore notablement) et le problème n'est plus $H^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p-1}}$ critique mais au moins $H^{1-\frac{2}{p-1}}$ critique.

Cette thèse est consacrée à l'étude de ce problème en dimension quelconque, en utilisant un argument de globalisation de type transformation de lentille. On établit que la probabilité de l'ensemble des données initiales pour lequel le problème est globalement bien posé n'est plus égal à 1 mais est strictement positif, cela permet de construire des solutions globales pour des équations sur-critiques. De plus, on démontre que cet ensemble est de mesure de probabilité d'autant plus proche de 1 que $||u_0||_{H^\sigma}$ est petit, sachant que dans notre situation, on prouvera que $||u_0||_{H^\sigma}$ petit n'implique pas forcément $||u_0||_{H^{\sigma+\epsilon}}$ petit. Cela signifie, d'une part, que les solutions construites sont valables pour des équations sur-critiques à données initiales non petites, et d'autre part, que la mesure de probabilité des données initiales concernées peut être choisie aussi proche de 1 qu'on le souhaite. L'avantage de cette méthode est qu'elle convient à toutes les données initiales et à une très grande classe de variables aléatoires (ce qui n'est pas le cas lorsque l'on utilise l'argument mesure de Gibbs). On propose également dans ces travaux une analyse de type multilinéaire, les résultats cités plus haut se limitant à une analyse linéaire.

Ce manuscrit est organisé comme suit. Le chapitre 1 est un chapitre préliminaire. On commencera par présenter les équations de Schrödinger (section 1.1), puis, afin de motiver notre démarche, on présentera le cas des séries de Fourier aléatoires (section 1.2). Les sections suivantes sont consacrées à un état de l'art général des résultats récents établis dans ce domaine (section 1.3) et à l'énoncé des résultats contenus dans cette thèse (section 1.4). Dans le chapitre 2, l'objectif est de construire des solutions globales à l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3 pour des données L^2. Après quelques notions sur les espaces de Bourgain, la transformation de lentille (section 2.1) et le calcul pseudo-différentiel (section 2.2), on démontre une estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique (section 2.3). Ensuite, on établit l'existence de solutions globales, sous certaines conditions sur la donnée initiale, à l'aide d'un argument de contraction (sections 2.4 et 2.5). On estime ensuite la régularité de la donnée initiale (section 2.6) pour prouver le théorème (section 2.7). Dans la section 2.8, on vérifie que le problème reste bien sur-critique en passant par l'aléatoire. On termine avec la section 2.9 qui donne une généralisation du résultat. Dans le chapitre 3, on établit un théorème complémentaire à celui du chapitre 2. De manière analogue à la section 2.8, on commence par montrer en section 3.1 que les données aléatoires ne permettent pas de gain de dérivées dans L^2. Ensuite, en section 3.2, on effectue une preuve plus courte de l'effet régularisant pour l'oscillateur harmonique que celle proposée dans la littérature. Puis, on suit le même schéma que le chapitre 2 pour prouver un théorème de construction de solutions globales, en toute dimension, pour un grand nombre d'équations de Schrödinger sur-critiques avec une non linéarité assez grande. Dans le quatrième et dernier chapitre, on s'intéresse à l'équation de Schrödinger quintique en dimension 2. On établit des estimées multilinéaires pour des fonctions propres quelconques de l'oscillateur harmonique (section 4.1) et une inégalité de type chaos de Wiener pour une grande classe de variables aléatoires (section 4.2). Cela nous permet d'en déduire le même genre de théorème, que les deux chapitres précédents, pour cette dernière équation (section 4.3).

Chapitre 1

Historique, État de l'art et Résultats de cette thèse

Sommaire

1.1 Présentation des équations de Schrödinger

Dans ce manuscrit, on s'intéressera aux équations de Schrödinger suivantes :

$$\begin{cases} i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \Delta \tilde{u} & = K|\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u}, \\ \quad \tilde{u}(0,.) & = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{NLS}$$

avec $s \geq 0$, $K \in \{-1, 1\}$ et $p > 1$. Pour simplifier les énoncés, on supposera souvent que p est un entier impair strictement plus grand que 1 (même s'il est souvent possible de supposer que $p - 1 > [s]$ dans le cas p non entier impair). Si $K = 1$, on parle d'équation de Schrödinger défocalisante et si $K = -1$ d'équation de Schrödinger focalisante.

1.1.1 Le problème de l'existence locale

Définition 1.1.1 *On dit que le problème (NLS) est localement bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ si, pour toute partie bornée B de $H^s(\mathbb{R}^d)$, il existe $T > 0$ et un espace de Banach de fonctions X_T continûment inclus dans l'espace $C^0([-T,T], H^s(\mathbb{R}^d))$ tels que l'on ait les trois propriétés suivantes :*
i) Pour toute donnée de Cauchy $u_0 \in B$, le problème (NLS) admet une unique solution $\tilde{u} \in X_T$.
ii) S'il existe $\sigma > s$ tel que $u_0 \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$, alors $\tilde{u} \in C^0([-T,T], H^\sigma(\mathbb{R}^d))$.
iii) L'application $u_0 \in B \mapsto \tilde{u} \in X_T$ est continue.

En remarquant que pour $s > \frac{d}{2}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre, on établit le théorème suivant :

Théorème 1.1.2 *Si p est impair alors le problème (NLS) est localement bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s > \frac{d}{2}$, avec $X_T = C^0([-T,T], H^s(\mathbb{R}^d))$.*

Dans le cas $s \leq \frac{d}{2}$, ce que l'on supposera être le cas dans la suite, introduisons les définitions suivantes qui proviennent de l'invariance de l'équation. Rappelons que si $\tilde{u}(t,x)$ est solution de l'équation de Schrödinger linéaire alors $\tilde{u}_\lambda(t,x) = \tilde{u}(\lambda^2 t, \lambda x)$ est aussi solution pour tout λ.

Définition 1.1.3 *Soit $(q,r) \in [2,\infty]^2$ alors on dira que (q,r) est un couple admissible si*

$$(q,r,d) \neq (2,\infty,2) \quad et \quad \frac{2}{q} = \frac{d}{2} - \frac{d}{r}.$$

Définition 1.1.4 *Pour $s \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, on définit*

$$\begin{aligned} X_T^s &= \bigcap_{(q,r)\ admissible} L^q([-T,T], W^{s,r}(\mathbb{R}^d)) \quad et \quad Y_T^s = \sum_{(q,r)\ admissible} L^q([-T,T], W^{s,r}(\mathbb{R}^d)), \\ X^s &= \bigcap_{(q,r)\ admissible} L^q(\mathbb{R}, W^{s,r}(\mathbb{R}^d)) \quad\quad\quad et \quad Y^s = \sum_{(q,r)\ admissible} L^q(\mathbb{R}, W^{s,r}(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

On peut alors énoncer les estimées de Strichartz, dues à Strichartz, Ginibre, Velo, Keel, Tao, Yajima et dont on peut trouver une démonstration en Théorème 2.3 dans [Ta1], qui jouent un rôle crucial pour la résolution locale de l'équation (NLS).

Théorème 1.1.5 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et toutes fonctions $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $F \in Y^s$, on ait les estimations suivantes :*

$$\begin{array}{lll} i) & ||e^{it\Delta}u_0||_{X^s} & \leq C||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\ ii) & \left|\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta}F(s)\ ds \right|\right|_{H^s(\mathbb{R}^d)} & \leq C||F||_{Y^s}, \\ iii) & \left|\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta}F(s)\ ds \right|\right|_{X^s} & \leq C||F||_{Y^s}. \end{array}$$

Enfin, on donne une dernière définition qui va permettre de caractériser les équations (NLS) en fonction de leurs résolubilités.

Définition 1.1.6 *Soient $s \in \left[0, \frac{d}{2}\right]$ et $p > 1$ définis dans l'équation (NLS).*
i) On dira que p est ***sous-critique*** *au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$ si l'invariance d'échelle de l'équation (NLS) est supérieure à l'invariance d'échelle de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire si* $\boxed{p < 1 + \dfrac{4}{d-2s}}$.
ii) On dira que p est ***critique*** *au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$ si l'invariance d'échelle de l'équation (NLS) est égale à l'invariance d'échelle de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire si* $\boxed{p = 1 + \dfrac{4}{d-2s}}$.
iii) On dira que p est ***sur-critique*** *au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$ si l'invariance d'échelle de l'équation (NLS) est inférieure à l'invariance d'échelle de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire si* $\boxed{p > 1 + \dfrac{4}{d-2s}}$.

Dans [Bou5], on a la preuve du théorème suivant :

Théorème 1.1.7 *Si p est sous critique au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$ et si p est un entier impair alors le problème (NLS) est localement bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $X_T = X_T^s$.*

Ce théorème permet de dire que la théorie locale des équations de Schrödinger sous-critiques est abouti.

Pour le cas des équations critiques, la situation est différente. On montre que l'on a toujours existence locale d'une solution mais le temps d'existence T ne dépend plus uniquement de B. Le théorème, tiré de [Ta1], est le suivant :

Théorème 1.1.8 *Si p est critique au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$ et si p est un entier impair alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $T > 0$ et tout $u_0 \in B_T$ où*

$$B_T = \left\{ u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) /\ ||e^{it\Delta}u_0||_{L^{\frac{2(d+2)}{d}}([-T,T], W^{s,\frac{2(d+2)}{d}}(\mathbb{R}^d))} \leq \epsilon \right\},$$

on ait une unique solution $\tilde{u} \in X_T^s$ à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0.
De plus, pour tout $T > 0$, l'application $u_0 \in B_T \mapsto \tilde{u} \in X_T^s$ est continue.

Enfin, il reste à énoncer le théorème pour les équations sur-critiques qui est dû à Christ, Tao et Colliander et dont la preuve se trouve dans [CCT].

Théorème 1.1.9 *Si p est sur-critique au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$ et si p est un entier impair alors, il existe une suite (t_n) de réels strictement positifs et une suite de fonctions régulières $(u_n)_n$ solutions de (NLS) sur $[0, t_n]$ telles que*

$$i) \lim_{n\to\infty} ||u_n(0,.)||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0,$$
$$ii) \lim_{n\to\infty} ||u_n(t_n,.)||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \infty.$$

Cela prouve que le flot de l'équation (NLS) n'est pas continu en 0 et que le problème n'est pas bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, la théorie locale des équations de Schrödinger sur-critiques est ouverte. Par conséquent, construire des solutions locales pour ce types d'équations, ce que l'on fera dans ce manuscrit (et même mieux) est un résultat intéressant.

1.1.2 Le problème de l'existence globale

Définition 1.1.10 *On dit que le problème (NLS) est globalement bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'il est localement bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ et que toute solution locale $\tilde{u}$ se prolonge en une solution globale $\tilde{u} \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$.*

Les théorèmes suivants peuvent être trouvés dans [Bou2].

Proposition 1.1.11 *Soient $1 \leq p \leq 1 + \frac{4}{d}$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $I = [-T, T]$ un intervalle et $\tilde{u}$ une solution de (NLS) dans X^0_T avec donnée u_0, alors pour tout $t \in I$,*

$$||\tilde{u}(t,.)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = ||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Cela permet d'établir un premier théorème de globalisation.

Théorème 1.1.12 *Si p est sous critique au niveau $L^2(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire $1 < p < 1+\frac{4}{d}$ alors le problème (NLS) est globalement bien posé sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

On énonce ensuite le théorème de conservation d'énergie.

Proposition 1.1.13 *On suppose que $p > 1$ avec $d = 1$ ou $1 < p \leq 1 + \frac{4}{d-2}$ avec $d \geq 2$, alors si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $I = [-T, T]$ est un intervalle et $\tilde{u}$ une solution de (NLS) dans X^1_T avec donnée u_0, on a pour tout $t \in I$,*

$$||\tilde{u}(t,.)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = ||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$
$$E(\tilde{u}(t,.)) := \frac{1}{2}||\nabla\tilde{u}(t,.)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{K}{p+1}||\tilde{u}(t,.)||^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = E(u_0).$$

Cela permet d'établir un second théorème de globalisation.

Théorème 1.1.14 *Si est p sous critique au niveau $H^1(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire $d \geq 2$, $1 < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ et si $K = 1$, alors le problème (NLS) est globalement bien posé sur $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Bourgain a établi un résultat bien plus général que le Théorème 1.1.14 qui est le suivant :

Théorème 1.1.15 *Soit p un entier impair et notons s_0 son indice critique. On suppose que $s_0 < 1$ et que K=1, alors il existe $s_1 \in]s_0, 1[$ tel que pour tout $s > s_1$, le problème (NLS) est globalement bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Donnons quelques exemples : - Pour $d = 2$ et $p = 3$, on a $s_1 = \frac{3}{5}$.
- Pour $d = 3$ et $p = 3$, on a $s_1 = \frac{11}{13}$.

Pour les équations critiques, on a vu dans la partie précédente que le problème n'était, à priori, pas bien posé mais qu'on avait tout de même existence locale de solutions pour toute donnée initiale. On énonce deux derniers théorèmes qui permettent de construire des solutions globales dans ce cas.

Théorème 1.1.16 *Soit $s \geq 0$ et p un entier impair qui est sous-critique ou critique au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$. Si $p \geq 1 + \frac{4}{d}$ alors il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que si $||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon$ alors il existe une unique solution globale dans X^s à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0 .*

Théorème 1.1.17 *On suppose que $K = 1,\ d = 3,\ p = 5$ ou $K = 1,\ d = 4,\ p = 3$. Alors pour toute donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ radiale, il existe une unique solution globale dans X^1 à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0 .*

En revanche, pour l'équation de Schrödinger focalisante, même dans le cas $H^1(\mathbb{R}^d)$ sous critique, on sait qu'il existe des solutions qui explosent en temps fini. Dans ces cas, le problème de globalisation est assez complexe, on pourra regarder [Bou2] pour avoir plus de détails.

Ceci donne un panorama des théorèmes acquis pour le problème de globalisation des solutions. Que ce soit dans le cas focalisant ou défocalisant, sous-critique ou critique, les questions ouvertes restent nombreuses. Ainsi, construire des solutions globales pour l'équation (NLS) dans des contextes différents des théorèmes cités précédemment, ce que l'on fera dans ce manuscrit, est un résultat intéressant.

1.1.3 La question du scattering

On suppose dans cette partie que la donnée initiale $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ admet une solution globale $\tilde{u} \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ à l'équation (NLS). Dans cette situation, une question naturelle est d'étudier le comportement à l'infini de la solution. On introduit alors la définition suivante :

Définition 1.1.18 *On dira que $\tilde{u}$ diffuse en ∞, s'il existe $u_+ \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tel que*

$$\lim_{t \to \infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_+||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

De même, on dira que $\tilde{u}$ diffuse en $-\infty$, s'il existe $u_- \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\lim_{t \to -\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_-||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Les théorèmes suivants, qui peuvent être trouvés dans [Bou2] ou dans [Bou5], résument les situations dans lesquelles on est capable de prouver que les solutions diffusent.

Théorème 1.1.19 *Soient $d \geq 2$, $1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ et $K = 1$ alors toutes les solutions de (NLS) diffusent en $+\infty$ et $-\infty$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 1.1.20 *Soient $s \geq 0$ et p un entier impair qui est sous-critique ou critique au niveau $H^s(\mathbb{R}^d)$. Si $p \geq 1 + \frac{4}{d}$ alors il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que si $||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon$ alors la solution globale à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0 diffuse en $+\infty$ et $-\infty$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 1.1.21 *On suppose que $K = 1,\ d = 3,\ p = 5$ ou $K = 1,\ d = 4,\ p = 3$. Alors pour toute donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ radiale, la solution globale à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0 diffuse en $+\infty$ et $-\infty$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 1.1.22 *On suppose que $K = 1,\ d \geq 2$ et $1 < p \leq 1+\frac{2}{d}$, alors la seule solution à l'équation (NLS) qui diffuse en $+\infty$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ est la solution nulle.*

En étant dans une situation différente des théorèmes énoncés, on prouvera que les solutions globales que nous construiront dans ce manuscrit diffusent en $+\infty$ et en $-\infty$.

1.2 Motivations et intérêts des données aléatoires : exemple avec les séries de Fourier

L'objectif de cette partie est d'expliquer l'intérêt de rendre la donnée initiale aléatoire. On donne les résultats obtenus pour les séries de Fourier et on explique comment les appliquer pour gagner de la dérivabilité sur la donnée initiale de notre équation.

1.2.1 Un théorème prometteur

On considère une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$ et on définit la fonction

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}.$$

D'après l'égalité de Parseval, on sait que $f \in L^2([0,2\pi])$ et donc $f \in L^p([0,2\pi])$ pour tout $p \in [1,2]$. En revanche, le problème de savoir si $f \in L^p([0,2\pi])$ pour $p > 2$ est un problème délicat et d'ailleurs ce résultat est faux sous la seule hypothèse $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Néanmoins Zygmund, Paley, Kolmogorov et Rademacher ont démontré que ce résultat était vrai en probabilité en partant de variables aléatoires Bernoulli. Pour énoncer le théorème, introduisons quelques notations. On suppose donnés $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de mêmes lois que X. On définit

$$f(\omega,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n(\omega) e^{in\theta}.$$

Théorème 1.2.1 *On suppose que la loi de X suit une Bernoulli d'epérance nulle, c'est à dire $P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$ et on notera $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, alors $f(\omega,.) \in L^p([0,2\pi])$ ω presque surement pour tout p fini.*

Dans [BT2], on peut trouver une amélioration de ce résultat.

Théorème 1.2.2 *On suppose qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$E(e^{\alpha X}) \leq e^{\delta \alpha^2} \tag{1.1}$$

alors $f(\omega, .) \in L^p([0, 2\pi])$ ω presque surement pour tout p fini.
Plus précisément, pour tout p fini, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$,

$$P\bigg(\omega \in \Omega / ||f(\omega, .)||_{L^p([0,2\pi])} \geq t\bigg) \leq C e^{-\frac{ct^2}{||c_n||^2_{l^2(\mathbb{Z})}}}.$$

Remarques
-L'intérêt de ce théorème est flagrant, en partant à priori d'une fonction uniquement dans $L^2([0, 2\pi])$ et pas mieux, on obtient une fonction qui est dans tous les espaces $L^p([0, 2\pi])$.
-On verra une preuve de ce résultat dans le chapitre 3. Les outils de bases pour établir un tel théorème sont l'inégalité de Markov, l'inégalité de Minkowski et le fait que $||e^{inx}||_{L^p_x([0,2\pi])} \leq C_p$. D'ailleurs, on pourrait oublier cette dernière information et obtenir l'estimation de type grande déviation suivante :

$$P\bigg(\omega \in \Omega / ||f(\omega, .)||_{L^p([0,2\pi])} \geq t\bigg) \leq C \exp\left(-\frac{ct^2}{\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 ||e^{inx}||^2_{L^p_x([0,2\pi])}}\right). \tag{1.2}$$

-Il est également possible d'énoncer ce théorème dans les espaces de Sobolev $W^{s,p}([0, 2\pi])$ à condition de supposer que $(n^s.c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Enfin, pour vérifier que l'hypothèse (1.1) n'est pas vide, on donne quelques exemples de variables aléatoires la vérifiant. On remarque déjà que si X vérifie (1.1) alors $E(X) = 0$. En effet pour α proche de 0, on a $E(e^{\alpha X}) = 1 + \alpha E(X) + o(\alpha) \leq e^{\delta \alpha^2} = 1 + \delta \alpha^2 + o(\alpha^2)$ qui implique $E(X) = 0$.

Proposition 1.2.3 *Si $X \backsim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ alors X vérifie l'hypothèse (1.1).*

Preuve

$$E(e^{\alpha X}) = \frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} = \ ch(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k!} = e^{\alpha^2}.$$

Proposition 1.2.4 *Si $X \backsim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors X vérifie l'hypothèse (1.1).*

Preuve

$$E(e^{\alpha X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx \ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}} e^{-\frac{(x-\sigma^2\alpha)^2}{2\sigma^2}} \, dx \ = e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}.$$

1.2.2 Application aux espaces de Sobolev harmoniques

Dans cette partie, on applique les résultats de la partie précédente à la donnée initiale. On note

$$H = -\Delta + |x|^2, \tag{1.3}$$

l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que cet opérateur est à résolvante compacte sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe donc une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ formée de fonctions propres pour H. Notons (h_n, λ_n^2) un couple fonction propre/valeur propre, que l'on va indexer par $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a

$$Hh_n = \lambda_n^2 h_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

En dimension $d = 1$, on sait que $\lambda_n^2 = 2n + 1$, que chaque espace propre est de dimension 1 et que $h_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{-x^2})e^{\frac{x^2}{2}}$ est appelée la n-ième fonction d'Hermite.
En dimension $d \geq 2$, on peut remarquer que H est une somme de d oscillateurs harmoniques de dimensions 1. Ainsi, les valeurs propres sont de la forme $2k + d$ avec $k \in \mathbb{N}$ et l'espace propre associé est de dimension $N_k \underset{k\to\infty}{\sim} C(d)k^{d-1}$. On peut remarquer qu'un exemple très simple de base hilbertienne en dimension d est celle formée par les fonctions tensorielles des fonctions d'Hermite en dimension 1.

On introduit ensuite les espaces de Sobolev harmoniques.

Définition 1.2.5 *On définit l'espace $\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ comme la fermeture de l'espace de Schwartz sous la norme*

$$||u||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} = ||H^{s/2}u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Remarquons que,

$$\begin{aligned}
u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad &\text{si et seulement si} \quad u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n h_n(x) \quad \text{avec} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty, \\
u_0 \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d) \quad &\text{si et seulement si} \quad u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n h_n(x) \quad \text{avec} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{2s}|c_n|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Définition 1.2.6 *De manière similaire, on définit l'espace $\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ comme la fermeture de l'espace de Schwartz sous la norme*

$$||u||_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} = ||H^{s/2}u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dans [DG], on peut trouver la proposition suivante qui nous servira à maintes reprises dans ce manuscrit.

Proposition 1.2.7 *Pour tous $1 < p < \infty$ et $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\frac{1}{C}||u||_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \leq ||\nabla^s u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} + ||<x>^s u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Cela permet d'établir que $u \in \overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ et $|x|^s u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. L'espace de Sobolev harmonique est plus fort que Sobolev usuel et cela aura son importance dans les prochains chapitres.

Une fois ces différentes notations établies, on peut rendre aléatoire la donnée initiale et expliquer le résultat qu'on obtient. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de mêmes lois que X qui vérifie l'hypothèse (1.1). Remarquons que $g_n \in L^2(\Omega)$, puis que si $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ alors la variable aléatoire

$$\begin{aligned} U_0 : \Omega &\longrightarrow \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d) \\ \omega &\longmapsto u_0^\omega(x) = u_0(\omega, x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) h_n(x) \end{aligned}$$

est dans $L^2\left(\Omega, \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)\right)$. À l'aide de (1.2), on obtient donc le théorème suivant :

Théorème 1.2.8 *Il existe C, c deux constantes positives telles que pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$ vérifiant*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 ||h_n(x)||^2_{W_x^{s,4}(\mathbb{R}^2)} < \infty,$$

on a

$$P\left(\omega \in \Omega / ||u_0(\omega, .)||_{W^{s,4}(\mathbb{R}^2)} \geq t\right) \leq C \exp\left(-\frac{ct^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 ||h_n(x)||^2_{W_x^{s,4}(\mathbb{R}^2)}}\right).$$

Pour comprendre l'intérêt de ce résultat, énonçons une dernière estimation qui peut être trouvée dans [KT].

Théorème 1.2.9 *Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$||h_n||_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq C \lambda_n^{-1/6}.$$

Il suffit ensuite d'appliquer successivement le Théorème 1.2.8 à $s = \sigma + 1/6$ et le Théorème 1.2.9 pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 1.2.10 *Il existe C, c deux constantes positives telles que pour tous $t \geq 0$, $\sigma \geq 0$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)$,*

$$P\left(\omega \in \Omega / ||u_0(\omega, .)||_{W^{\sigma+1/6,4}(\mathbb{R}^2)} \geq t\right) \leq C \exp\left(-\frac{ct^2}{||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}}\right).$$

Ainsi, en partant de $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)$, on obtient que $u_0(\omega, .) \in \overline{W}^{\sigma+1/6,4}(\mathbb{R}^2)$ ω presque surement, puis à l'aide de la Proposition 1.2.7 que $u_0(\omega, .) \in W^{\sigma+1/6,4}(\mathbb{R}^2)$ ω presque surement. Cela signifie qu'on a obtenu un gain de $\frac{1}{6}$ de dérivées sur notre donnée initiale et qu'il est possible de résoudre localement l'équation (NLS) si le nombre de dérivées sur-critiques n'est pas supérieur à $\frac{1}{6}$. Ces résultats sont la base de la théorie locale des équations aux dérivées partielles aléatoires et ce sera notre point de départ. Ce résultat énoncé, il en ressort diverses questions naturelles. Est-ce que le problème reste sur-critique en rendant la donnée initiale aléatoire ? Comment faire pour globaliser les solutions ? Peut-on gagner plus de $\frac{1}{6}$ de dérivées ? Peut-on généraliser ce résultat à d'autres classes de variables aléatoires que celles vérifiant l'hypothèse (1.1) ? Nous répondrons à toutes ces questions dans ce manuscrit. Avant d'énoncer les principaux théorèmes de cette thèse, on donne un état de l'art général sur le problème.

1.3 État de l'art

1.3.1 Équation de Schrödinger en dimension 1

Le but de cette partie est d'énoncer et d'expliquer le résultat de [BTT]. On suppose dans l'équation (NLS) que $d = 1$, que p est un entier impair supérieur à 5 et que $K = 1$. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de mêmes lois gaussiennes standards complexes (c'est à dire $X = \frac{Y+iZ}{\sqrt{2}}$ avec Y et Z indépendantes de lois gaussiennes centrées réduites, et on notera $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$). Comme $g_n \in L^2(\Omega)$, en notant $\Sigma := \underset{\epsilon>0}{\cap} \overline{H}^{-\epsilon}(\mathbb{R})$ que l'on munit de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, alors on peut définir la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} U_0 : \Omega &\longrightarrow \Sigma \\ \omega &\longmapsto u_0^\omega(x) = u_0(\omega, x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n(\omega) h_n(x) \end{aligned}$$

qui est dans $L^2(\Omega, \overline{H}^{-\epsilon}(\mathbb{R}))$ pour tout $\epsilon > 0$. Enfin, on définit μ comme la probabilité image de P par l'application U_0, c'est à dire la loi de U_0. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Il existe $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ tel que l'équation (NLS) admet pour $\mu-$presque toute donnée initiale u_0, une unique solution globale qui vérifie*

$$\tilde{u}(t,.) - e^{it\Delta} u_0 \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R})).$$

De plus, $\mu-$presque surement, il existe deux fonctions L^+ et L_- $\in \overline{H}^s(\mathbb{R})$ telles que

$$\lim_{t\to\pm\infty} ||\tilde{u}(t,.) - e^{it\Delta}(u_0 + L_-^+)||_{H^s(\mathbb{R})} = 0.$$

La mesure de probabilité μ est supportée dans Σ. Pour $p \geq 5$, l'équation (NLS) est critique sur $H^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p-1}}(\mathbb{R})$. Le passage par les données initiales aléatoires aboutit donc à un gain de $\frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$ dérivées et permet de montrer que le problème (NLS) est globalement bien posé en probabilité sur Σ, ce qui n'est pas le cas avec la théorie déterministe.

Expliquons brièvement le procédé de démonstration du Théorème 1.3.1 :
-En utilisant la transformation de lentille (on détaillera ce principe dans le chapitre 2), on se ramène à montrer l'existence locale d'une solution u sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ à l'équation

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} - Hu &= \cos(2t)^{\frac{p-5}{2}} |u|^{p-1} u, \\ u(0,.) &= u_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

qui vérifie

$$u(t,.) - e^{-itH} u_0 \in C^0\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[, \overline{H}^s(\mathbb{R})\right).$$

-En utilisant le principe de la partie 1.2.2, on établit une existence locale presque sûre pour l'équation (1.5).

-Il reste à montrer que les solutions se prolongent à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ presque surement (on peut même montrer que les solutions se prolongent à $\mathbb{R}$ tout entier). Pour établir un tel résultat, il suffit essentiellement de montrer qu'il existe une mesure finie ρ, absolument continue par rapport à μ et qui est "croissante" sous l'action du flot, c'est à dire que

$$\rho(u(t)A) \geq \rho(u(0)A), \text{ pour tous } |t| \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } A \in \mathcal{B}.$$

Enfin, pour établir l'existence d'une telle mesure, on remarque que grâce à un théorème de Liouville, la mesure de Lebesgue λ sur Σ est invariante sous l'action du flot. Puis, on utilise que $K = 1$, que $c_n = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n}$ et que $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$. En effet dans cette situation, comme

$$d\mu(u) = \exp\left(-\frac{1}{2} \times ||\sqrt{H}u||^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) d\lambda(u),$$

en utilisant la "décroissance" de l'énergie de l'équation (1.5), on obtient que la mesure finie

$$d\rho(u) = \exp\left(-\frac{\cos^{\frac{p-5}{2}}(2t)}{p+1} \times ||u||^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R})}\right) d\mu(u)$$

est "croissante" sous l'action du flot.

L'avantage de cette méthode et qu'elle permet de récupérer des solutions globales à partir de simples solutions locales. En revanche, elle ne convient que pour une seule donnée initiale u_0, puisque la valeur de c_n est imposée. Cela a pour conséquence de fixer la régularité de u_0, à être très faible dans de nombreux cas.

1.3.2 Équation de Schrödinger en dimension 2 radiale

De manière très similaire, on présente le résultat de [D]. On suppose dans l'équation (NLS) que $d = 2$ radiale, que p est un entier impair supérieur à 3 et que $K = 1$. Les fonctions propres pour l'oscillateur harmonique H sont moins nombreuses et on a $\lambda_n^2 = 4n + 2$, que le sous espace propre associé est de dimension 1 et que les fonctions propres sont liées aux fonctions de Laguerre. Plus précisément,

$$h_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \times e^{\frac{r^2}{2}} \times \frac{\partial^n}{\partial t^n}(t^n e^{-t})\bigg|_{t=r^2}.$$

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de mêmes lois gaussiennes complexes. Avec $\Sigma = \underset{\epsilon<0}{\cap} \overline{H}^{-\epsilon}_{rad}(\mathbb{R}^2)$ et les mêmes notations que la partie précédente, on définit la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} U_0 : \Omega &\longrightarrow \Sigma \\ \omega &\longmapsto u_0^\omega(x) = u_0(\omega, x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} g_n(\omega) h_n(r) \end{aligned}$$

qui est dans $L^2(\Omega, \overline{H}^{-\epsilon}_{rad}(\mathbb{R}^2))$ pour tout $\epsilon > 0$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.2 *Il existe $s \in [0,1[$ tel que l'équation (NLS) admet pour $\mu-$presque toute donnée initiale u_0, une unique solution globale qui vérifie*

$$\tilde{u}(t,.) - e^{it\Delta}u_0 \in C^0(\mathbb{R}, H^s_{rad}(\mathbb{R}^2)).$$

De plus, $\mu-$presque surement, il existe deux fonctions L^+ et $L_- \in \overline{H}^s_{rad}(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\lim_{t \to \underline{+}\infty} ||\tilde{u}(t,.) - e^{it\Delta}(u_0 + L^+_-)||_{H^s_{rad}(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Pour $p \geq 3$, l'équation (NLS) est critique dans $H^{1-\frac{2}{p-1}}(\mathbb{R}^2)$. Encore une fois, le passage par les données initiales aléatoires aboutit à un gain de $1 - \frac{2}{p-1}$ dérivées et permet de montrer que le problème (NLS) est globalement bien posé en probabilité sur Σ, ce qui n'est pas le cas avec la théorie déterministe. La preuve de ce théorème est la même que celle de [BTT] sauf que les fonctions de Laguerre ont des estimations "deux fois" meilleures que les fonctions de Hermite, ce qui explique que l'on gagne "deux fois" plus de dérivées.

1.3.3 Équation des ondes en dimension 3 sur le tore

Le but de cette partie est d'énoncer et d'expliquer le résultat de [BT4]. On rappelle que l'équation cubique des ondes,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbb{T}^3}\ u & + u^3 = 0, \\ \quad u(0,.) & = u_0 \in H^s(\mathbb{T}^3), \\ \frac{\partial}{\partial t}u(0,.) & = u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{T}^3), \end{cases} \tag{1.6}$$

est localement (respectivement globalement) bien posée sur $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$ pour $s > \frac{1}{2}$ (respectivement pour $s \geq \frac{3}{4}$).
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de mêmes lois gaussiennes réelles, centrées et réduites. Pour $u_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{0,n}e^{inx} \in H^\sigma(\mathbb{T}^3)$ et $u_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{1,n}e^{inx} \in H^{\sigma-1}(\mathbb{T}^3)$, ces deux espaces étant munis de leurs tribus boréliennes, on définit la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} U_0 : \Omega &\longrightarrow H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{T}^3) \\ \omega &\longmapsto \left(u_0^\omega(x) = u_0(\omega,x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{0,n}g_n(\omega)e^{inx}\ ;\ u_1^\omega(x) = u_1(\omega,x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{1,n}g_n(\omega)e^{inx} \right) \end{aligned}$$

qui est dans $L^2(\Omega, H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{T}^3))$. Enfin, comme pour les résultats précédents, on définit μ comme étant la loi de U_0. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 *Soit $\sigma \in]0,1[$, alors l'équation (1.6) admet pour $\mu-$presque toute donnée initiale $(u_0,u_1) \in H^\sigma(\mathbb{T}^3) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{T}^3)$, une unique solution globale qui vérifie*

$$u(t,.) - S(t)(u_0,u_1) \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}^3)),$$

où $S(t)(u_0,u_1)$ désigne la solution de l'équation linéaire des ondes.

Ce théorème est très intéressant car il permet de résoudre des équations ayant jusqu'à une demi dérivée sur-critique. Expliquons brièvement le procédé de démonstration :
-En utilisant le principe de la partie 1.2.2, on établit une existence locale presque sûre pour l'équation (1.6). En posant $v(t) = u(t) - S(t)(u_0, u_1)$, on établit même que $v(t) \in C^0([-T, T], H^1(\mathbb{T}^3))$ puisque dans cette situation, gagner une dérivée pour l'équation des ondes est plus facile que pour l'équation de Schrödinger. Il suffit de regarder les estimées de Strichartz pour s'en convaincre.
-Il reste à montrer que les solutions sont globales. Pour cela, on utilise l'énergie de l'équation (1.6),

$$E(u) = \frac{1}{2}||\partial_t u||^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \frac{1}{4}||u||^4_{L^4(\mathbb{T}^3)}.$$

Le modèle choisi implique que

$$\frac{\partial}{\partial t}(E(v(t))) \leq E(v(t))^{1/2} \times (f(t) + g(t)E(v(t))^{1/2}), \tag{1.7}$$

avec $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Il suffit de conclure par un lemme de Gronwall pour montrer que l'énergie $E(v(t))$ est bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$ et que $||v(t)||_{H^1(\mathbb{T}^3)}$ n'explose pas en temps fini.

Un autre point positif de ce théorème est que les données initiales de départ sont quelconques (contrairement aux deux théorèmes précédents) et qu'il n'est pas nécessaire de supposer que les variables aléatoires sont des gaussiennes. Néanmoins, la démonstration n'est toujours pas valide pour le cas focalisant. De plus, comme nous l'expliquerons dans la section suivante, cette démarche est très spécifique à l'équation des ondes cubiques.

1.3.4 Autres résultats

On peut aussi citer [Bou4] qui considère l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rl} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta_{\mathbb{T}^2}\ u & = u|u|^2 - 2\left(\int_{\mathbb{T}^2}|u|^2dx\right)u = 0, \\ u(0,.) & = u_0 \in H^s(\mathbb{T}^2). \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de mêmes lois gaussiennes standards complexes. Pour $u_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}} \frac{1}{|n|}\ e^{in.x} \in \bigcap_{\epsilon>0} H^{-\epsilon}(\mathbb{T}^2) := \Sigma$, on définit la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} U_0 : \Omega &\longrightarrow \Sigma \\ \omega &\longmapsto u_0^\omega(x) = u_0(\omega, x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}} \frac{1}{|n|}\ g_n(\omega)\ e^{in.x} \end{aligned}$$

qui est dans $L^2(\Omega, H^{-\epsilon}(\mathbb{T}^2))$ pour tout $\epsilon > 0$. Puis, on définit μ comme étant la loi de U_0. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.4 *Soit $s > 0$, alors l'équation (1.8) admet pour $\mu-$presque toute donnée initiale u_0, une unique solution globale qui vérifie*

$$u(t,.) - e^{it\Delta_{\mathbb{T}^2}}u_0 \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{T}^2)).$$

La non-linéarité de l'équation (1.8) est non usuelle mais est fondamentale ici. En particulier, elle permet de construire une mesure de Gibbs qui est de masse totale finie. Le problème considéré est $L^2(\mathbb{T}^2)$ critique, ainsi le théorème énoncé permet de montrer que ce problème critique est globalement presque surement bien posé.

Enfin, pour conclure, on peut citer [Th1] qui s'intéresse à l'équation (NLS) en toute dimension et qui montre une existence locale presque sûre avec un gain de dérivée égal à $\frac{1}{d+3}$. Pour énoncer ce résultat, on suppose donnés $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ formée de fonctions propres pour H, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de mêmes lois gaussiennes standards complexes. Soit $\sigma \geq 0$, on munit $\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Alors pour $u_0 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n h_n(x) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$, on peut définir la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} U_0 : \Omega &\longrightarrow \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d) \\ \omega &\longmapsto u_0^\omega(x) = u_0(\omega, x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) h_n(x) \end{aligned}$$

qui est dans $L^2(\Omega, \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d))$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.3.5 *On suppose que p=3 dans (NLS). Pour tout* $\sigma > \frac{d}{2} - 1 - \frac{1}{d+3}$, *il existe* $s > \frac{d}{2} - 1$ *tel que pour* P *presque tout* $\omega \in \Omega$, *il existe* T_ω *et une unique solution locale sur* $[-T_\omega, T_\omega]$ *à l'équation (NLS) qui vérifie*

$$\tilde{u}(t, .) - e^{it\Delta} u_0^\omega \in C^0([-T_\omega, T_\omega], H^s(\mathbb{R}^d)).$$

Cela prouve que le problème (NLS) est localement presque surement bien posé avec un gain de dérivée égal à $\frac{1}{d+3}$. Comme on l'expliquera au chapitre 3, les résultats de constructions de solutions globales de ce manuscrit permettent également de montrer que le problème (NLS) est localement presque surement bien posé. On donnera une méthode permettant de gagner jusqu'à $\frac{1}{2}$ dérivée, ce qui complètera le Théorème 1.3.5

Pour d'autres résultats aléatoires sur des équations aux dérivées partielles, on pourra également consulter [Bou3] et [CO] pour l'équation de Schrödinger, [BT2] et [BT3] pour l'équation des ondes, [O] pour l'équation de Korteweg-de Vries.

1.4 Résultats principaux de cette thèse

Dans cette section, on introduit les notations que l'on conservera tout au long du manuscrit et on énonce les théorèmes principaux que nous avons établis.

1.4.1 Notations et objectifs

On considère l'équation (NLS) avec p un entier impair. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui vérifie l'hypothèse suivante :

$$\boxed{\text{il existe une constante } C > 0 \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\ E(|g_n|^2) \leq C}\,. \qquad (\circledast)$$

On suppose donné $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ formée de fonctions propres pour H avec valeurs propres λ_n^2. Soit $\sigma \geq 0$, on munit $\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. D'après $(\circledast)$, pour $u_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n h_n(x) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$, on peut définir la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} U_0 : \Omega &\longrightarrow \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d) \\ \omega &\longmapsto u_0^\omega(x) = u_0(\omega, x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) h_n(x) \end{aligned}$$

qui est dans $L^2(\Omega, \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d))$. Enfin, on définit μ comme la probabilité image de P par l'application U_0, c'est à dire la loi de U_0.

On utilisera à bon escient le théorème de transfert suivant :

Théorème 1.4.1 *Pour toute fonction F : $(\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et tout ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a*

$$P\left(\omega \in \Omega / F(u_0^\omega) \in A\right) = \mu\Big(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d) / F(u_0) \in A\Big).$$

La problématique est la suivante, on cherche une base $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sigma \leq \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$ tels qu'il existe un ensemble $\Sigma \subset \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les conditions suivantes :
i) $\mu(\Sigma) = 1$.
ii) Pour tout $u_0 \in \Sigma$, il existe une unique solution globale à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0.

Comme rappelé en section 1.3, cette problématique a déjà été étudiée dans de nombreux cas. Néanmoins, pour (NLS), dès la dimension 2, les méthodes usuelles ont l'air d'être impuissantes. C'est ce que nous expliquons dans la partie suivante.

1.4.2 L'échec des méthodes standards présentées en section 1.3

Avec les résultats présentés en section 1.3, on constate qu'il existe essentiellement deux méthodes pour répondre à notre problématique et pouvoir globaliser les solutions locales aléatoires : la mesure de Gibbs et la conservation de l'énergie.

i) Pour utiliser une mesure de Gibbs, on a vu qu'il faut imposer $c_n = \frac{1}{\lambda_n}$. Mais dans ce cas,

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{h_n(x)}{\lambda_n} \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d) \text{ ssi } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^{d-1}}{(2n+d)^{1-\sigma}} < \infty \text{ ssi } \sigma < 1 - d.$$

Ainsi, dès que $d \geq 2$, il faudrait gagner au moins une dérivée sur la donnée initiale aléatoire pour avoir un théorème intéressant, ce qui ne semble pas très raisonnable.

ii) Pour utiliser la méthode de [BT4], il faut avoir une inégalité de la forme (1.7) pour l'équation (NLS). Mais si

$$i\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta v = |v + e^{it\Delta}u_0|^{p-1}(v + e^{it\Delta}u_0),$$

alors

$$\begin{aligned}
\partial_t E(v(t)) &= \Re\left[\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \nabla v(t).\overline{\nabla v}(t)dx \ + \ \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t v(t).\overline{v}(t).|v|^{p-1}(t)dx\right] \\
&= \Re\left[\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t v(t).\left(\overline{v}(t)|v|^{p-1}(t) - \overline{(v+e^{it\Delta}u_0)}(t)|v+e^{it\Delta}u_0|^{p-1}(t)\right)dx\right] \\
&\leq \ ||\partial_t v(t)||_{L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \times \left(g(t) + f(t)E(v(t))^{\frac{p-1}{p+1}}\right).
\end{aligned}$$

Mais pour l'équation (NLS), $||\partial_t v(t)||_{L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \not\lesssim E(v(t))^{\frac{2}{p+1}}$, même pour p=3. Cette démarche a donc l'air d'être très spécifique à l'équation cubique des ondes.

iii) Dans le même genre d'idée, on pourrait s'inspirer de la preuve du Théorème 1.1.15 pour répondre à la problématique. Le théorème que nous avons obtenu est le suivant :

Théorème 1.4.2 *Supposons que $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, que $d=2$, $K=1$ et que p est un entier impair dans l'équation (NLS). Il existe une base $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\sigma \in [0,1]$ vérifiant*

$$\frac{p}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{p-1}{p+1}\right) - \sigma\left(\frac{p+1}{2} + \frac{p-1}{p+1}\right) < 0, \tag{1.9}$$

si $u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^2)$ alors il existe un ensemble $\Sigma \subset \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant les conditions suivantes :
i) $\mu(\Sigma) = 1$.
ii) Pour tout $u_0 \in \Sigma$, il existe une unique solution globale dans l'espace $e^{it\Delta}u_0 + X^1$ à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0.

Ce théorème n'est pas intéressant car déjà il ne convient que pour des équation sous-critiques mais en plus, il se situe dans le cadre du Théorème 1.1.15. En effet, pour p=3, la condition (1.9) donne $\sigma > \frac{3}{4}$ contre $\frac{3}{5}$ pour le Théorème 1.1.15. On peut effectuer des calculs supplémentaires et voir que c'est le cas pour tout entier p impair.
De plus, comme le Théorème 1.4.2 est démontré uniquement à l'aide d'estimées linéaires, on en déduit que les méthodes probabilistes linéaires donnent des résultats moins satisfaisants que les méthodes déterministes multilinéaires, ce qui n'est pas le cas pour les résultats cités en section 1.3.
Par conséquent, pour globaliser nos solutions, on utilisera une autre méthode qui repose sur la transformation de lentille. Le désavantage de cet argument est qu'il ne donnera plus un ensemble de données aléatoires de probabilité égal à 1 mais strictement positif. En revanche, cela aura pour mérite d'exhiber des solutions globales pour l'équation (NLS).

1.4.3 Résultats de cette thèse

Présentation des résultats du chapitre 2

On suppose que la base $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée des fonctions tensorielles des fonctions d'Hermite en dimension 1, c'est à dire

$$h_n(x) = h_{n_1}(x_1) \times \ldots \times h_{n_d}(x_d) \text{ avec } \lambda_n^2 = \lambda_{n_1}^2 + \ldots + \lambda_{n_d}^2, \tag{$\otimes$}$$

que d=3 et que p=3.

Si la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement distribuée avec $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ (on peut noter que l'hypothèse ($\circledast$) est alors satisfaite) alors on établit les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.4.3 *Soient $\sigma \in]0,\frac{1}{2}[$ avec $u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)$ et $s \in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sigma[$, alors il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ vérifiant les conditions suivantes :*
i) $P(\Omega') > 0$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^{s}(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Théorème 1.4.4 *Si $\frac{1}{2} > \sigma > 0$ et $u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)$ alors*

$$\lim_{\eta\to 0} \mu\Big(u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)/ \text{ on ait existence globale et scattering } \mid ||u_0||_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)} \le \eta\Big) = 1.$$

De plus, si $(u_0^1,u_0^2) \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)\times\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)$ alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta\to 0} \mu_1\otimes\mu_2\Big((u_0^1,u_0^2) \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)\times\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)/\tilde{u}_1 \text{ et } \tilde{u}_2 \text{ sont globales avec } ||\tilde{u}_1-\tilde{u}_2||_{X^0}\le\epsilon \mid ||u_0^1||_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}\le\eta,\ ||u_0^2||_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}\le\eta\Big) = 1,$$

où μ_i correspond à la loi de la variable aléatoire $\omega \to u_0^i(\omega,.)$.

Si la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement distribuée avec $\frac{g_n}{\epsilon} \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, où ϵ est une constante strictement positive (on peut remarquer que l'hypothèse ($\circledast$) est encore satisfaite), alors on établit le théorème suivant :

Théorème 1.4.5 *Soient $\sigma \in]0,\frac{1}{2}[$ avec $u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)$ et $s \in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sigma[$ alors pour tout $\alpha \in]0,1]$ il existe une constante $\epsilon > 0$ et un ensemble $\Omega_{\epsilon,\alpha}$ vérifiant les conditions suivantes :*
i) $P(\Omega_{\epsilon,\alpha}) \ge 1-\alpha$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega_{\epsilon,\alpha}$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega_{\epsilon,\alpha}$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^{s}(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Enfin, dans ces deux situations, on établit le théorème suivant :

Théorème 1.4.6
Pour tout $s \geq 0$, si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ alors $u_0^\omega \notin H^s(\mathbb{R}^3)$ ω presque surement.

De plus, sous les conditions du théorème 2.0.12, pour tout $M \geq 1$, il existe au moins une donnée initiale $u_0 \in \overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$- P\Big(\Omega' \cap ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)} \geq M\Big) > 0,$$
$$- u_0 \notin \overline{H}^{\sigma+\delta+0}(\mathbb{R}^3) \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Enfin, sous les conditions du théorème 2.0.14, pour tout $t > 0$, pour tout $M \geq 1$ et tout $\alpha \in]0,1]$, il existe au moins une donnée initiale $u_0 \in \overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$- P\Big(\Omega_{\epsilon,\alpha} \cap ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)} \geq M\Big) > 1 - \alpha - t,$$
$$- u_0 \notin \overline{H}^{\sigma+\delta+0}(\mathbb{R}^3) \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Commentaires : Ainsi, d'après le Théorème 1.4.3, pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3, on est capable de construire des solutions globales pour des données initiales qui sont moralement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, alors que le problème est $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ critique.
Le Théorème 1.4.4 donne une version probabiliste de ce résultat.
L'ensemble des données initiales pour lesquelles on ait existence globale d'une solution est de mesure de probabilité d'autant plus proche de 1 que $||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}$ est petit. Le Théorème 1.4.5 donne un exemple de variable aléatoire pour laquelle l'ensemble en question est de mesure de probabilité aussi proche de 1 qu'on le souhaite, sans supposer $||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}$ petit.
Le Théorème 1.4.6 précise que les théorèmes précédents ne sont pas triviaux, au sens où les solutions globales construites concernent des équations sur-critiques pour l'espace de Sobolev usuel, éventuellement pour des données initiales très grandes.

Présentation des résultats du chapitre 3

On suppose que la base $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque, que d est quelconque et que p est un entier impair plus grand que 5. Ensuite, définissons les conditions suivantes :

$$\boxed{\text{Il existe } C, c > 0 \text{ tels que pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } \rho \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{-\rho} dP_{g_n} + \int_{\rho}^{\infty} dP_{g_n} \leq Ce^{-c|\rho|^\gamma}.} \qquad (H_\gamma)$$

$$\boxed{\text{Pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N},\ E\left(g_n^{2p+1}\right) = 0.} \qquad (H_{E_1})$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ E\left(g_n\right) = 0.} \qquad (H_{E_2})$$

$$\boxed{\text{Pour tous } \rho > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N},\ P\left(|g_n| < \rho\right) > 0.} \qquad (H_{01})$$

$$\boxed{\text{Il existe } c > 0, \text{ telle que pout tout } n \in \mathbb{N},\ E\left(|g_n|^2\right) \geq c.} \tag{H_{02}}$$

Si la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(H_\gamma)(H_{E_1})(H_{01})(H_{02})$ ou $(H_\gamma)(H_{E_2})(H_{01})(H_{02})$ (on montrera que l'hypothèse (⊛) est alors satisfaite) alors on établit les trois théorèmes suivants :

Théorème 1.4.7 *Soit $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}, \frac{d}{2}[$ et un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tels que les conditions suivantes soient réalisées :*
i) $P(\Omega') > 0$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega, .) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega, .)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe $L^+ \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega, .) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega, .) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

De plus, si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ alors $P\left(\omega \in \Omega/u_0(\omega, .) \in H^s(\mathbb{R}^d)\right) = 0$.

Théorème 1.4.8 *Soit $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}, \frac{d}{2}[$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe T_ω et une unique solution à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega, .) + X^s_{T_\omega}$ avec donnée initiale $u_0(\omega, .)$.*

Plus précisément, il existe $C, c, \delta > 0$ et pour tout temps $0 < T < \infty$ un ensemble Ω_T tels que

$$P(\Omega_T) \geq 1 - Ce^{-c/\arctan(2T)^\delta},$$

et tels que pour tout élément $\omega \in \Omega_T$, il existe une unique solution à l'équation (NLS) avec donnée initiale $u_0(\omega, .)$ dans un espace continûment inclus dans $C^0([-T, T], H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d))$.

Théorème 1.4.9 *Si de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n a une distribution symétrique, alors*

$$\lim_{\eta\to 0} \mu\left(u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)/ \text{ on ait existence globale et scattering } \mid ||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta\right) = 1.$$

Commentaires : Le Théorème 1.4.7 est un complément du Théorème 1.4.3. En effet il permet de construire des solutions globales pour toutes les équations de Schrödinger avec des données initiales qui sont dans $H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, alors que le problème est $H^{\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}}(\mathbb{R}^d)$ critique. De plus, les variables aléatoires de départs sont supposées très générales et la base de fonctions propres quelconque.
Le Théorème 1.4.8 permet d'établir que le problème est localement presque surement bien posé sur $H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$.
Enfin, le Théorème 1.4.9 est l'analogue du Théorème 1.4.4 dans cette situation.

Présentation des résultats du chapitre 4

On suppose que la base $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque, que $d = 2$, $p = 5$ et que la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(H_\gamma)(H_{E_1})(H_{01})(H_{02})$ ou $(H_\gamma)(H_{E_2})(H_{01})(H_{02})$, alors on établit le résultat suivant :

Théorème 1.4.10 *Soient $\sigma \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$ et $s \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\sigma\right[$, alors pour tout $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)$, il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
i) $P(\Omega') > 0$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^2)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

De plus si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^2)$ alors $\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/\ u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)\right) = 0$.

Commentaires : Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1.4.7, le Théorème 1.4.10 permet, pour l'équation de Schrödinger quintique en dimension 2, de construire des solutions globales pour des données initiales qui sont moralement dans $H^{\frac{1}{6}}(\mathbb{R}^2)$, alors que le problème est $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ critique. Cela complète le Théorème 1.4.7 qui était vide pour $p = 5$.

1.4.4 Lien avec un théorème de Kakutani

Pour terminer ce chapitre, on énonce un théorème de Kakutani qui permet d'expliquer que le nombre de solutions globales indépendantes construites pour l'équation (NLS) est infini non dénombrable (et très grand). Dans [BT4], en Proposition B.1, on trouve le théorème suivant :

Théorème 1.4.11 *On suppose que g_n^1 et $g_n^2 \sim \mathcal{N}_\mathbb{R}(0,1)$ alors pour*

$$u_0^1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^1 h_n(x) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d) \text{ et } u_0^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^2 h_n(x) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d),$$

notons μ_1 et μ_2 les deux mesures construites à partir de u_0^1 et u_0^2 selon le même principe que la section 1.4.1. Alors,

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left|\frac{c_n^1}{c_n^2}\right| - 1\right)^2 < \infty \quad \text{alors} \quad \mu_1 \ll \mu_2 \ll \mu_1, \\ &\text{et si} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left|\frac{c_n^1}{c_n^2}\right| - 1\right)^2 = \infty \quad \text{alors} \quad \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ sont singulières l'une par rapport à l'autre.} \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de choisir $c_n^2 = tc_n^1$ avec $t \neq 1$ pour obtenir la seconde condition et construire un nombre non dénombrable de mesures singulières les unes par rapports aux autres.

Chapitre 2

Solutions globales pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3

Sommaire

Dans ce chapitre, on construit un grand nombre de solutions globales pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3 pour des données initiales qui sont moralement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, alors que le problème est $H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ critique. On montre également que les solutions construites diffusent en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme rappelé dans le chapitre 1, pour prouver un tel résultat, on utilise les idées de N.Burq, L.Thomann et N.Tzvetkov développées dans [BT2] et [BTT] en rendant la donnée initiale aléatoire pour gagner de la dérivabilité dans un certain espace L^p.

Il est à noter deux résultats fondamentaux intermédiaires :
-La transformation de lentille (introduite par [N] et [C], utilisée en dimension 1 dans [BTT] et dont nous rappelons les propriétés utiles en section 2.1.3) qui permet de se ramener à prouver l'existence locale de solutions sur $]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}[$ pour l'équation de Schrödinger avec potentiel harmonique.
-L'existence d'une estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique qui va nous permettre de gagner la demi dérivée manquante sur les termes d'ordre 1 en u_0. Cette estimée est analogue à l'estimée bilinéaire pour le laplacien prouvée par Bourgain (voir [S] pour avoir une démonstration). On utilisera cette dernière ainsi que la transformation de lentille pour obtenir l'estimée bilinéaire version oscillateur harmonique en section 2.3.

On passe ensuite à la démonstration des théorèmes. En sections 2.4 et 2.5, par analogie aux Théorèmes 1 de [CG1] ou 2 de [CG2], on démontre que si la donnée initiale est petite pour une certaine norme, alors on peut appliquer un théorème de point fixe et obtenir des solutions globales. Puis, pour conclure à la démonstration, on évalue en section 2.6 la régularité de la donnée initiale, pour enfin montrer, en section 2.7, que l'ensemble des données initiales pour lesquelles la norme en question soit petite est de probabilité non nulle. Pour cela, on utilise les méthodes de N.Burq et N.Tzevtkov développées dans les paragraphes 3 et 4 de [BT2].

En section 2.8, on vérifie que la donnée initiale rendue aléatoire ne permet pas un gain de dérivées dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et que le problème reste bien sur-critique de même indice. En analogie avec le Théorème 2 dans [CGP], on montre également que la donnée initiale est "assez grande" dans $H^s(\mathbb{R}^3)$ pour $0 < s \ll 1$. Ainsi les solutions globales construites seront valables pour des équations sur-critiques à données initiales grandes.

Pour simplifier les calculs, on suppose que $(d,p) = (3,3)$ dans l'énoncé du théorème et une grosse partie de la démonstration. Mais, pour les lemmes préliminaires sans calculs, on supposera la dimension d quelconque. Cela nous permettra, dans la partie 2.9, d'expliquer pourquoi la preuve s'adapte en dimension $d \geq 2$.

Dans tout ce chapitre, on suppose que la base $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse $(\otimes)$. Si la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement distribuée avec $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, alors on établit les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.0.12 *Soient $\sigma \in]0,\frac{1}{2}[$ avec $u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)$ et $s \in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sigma[$, alors il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ vérifiant les conditions suivantes :*
i) $P(\Omega') > 0$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace

$e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Théorème 2.0.13 *Si $\frac{1}{2} > \sigma > 0$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ alors*

$$\lim_{\eta\to 0} \mu\Big(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)/ \text{ on ait existence globale et scattering } \mid ||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta\Big) = 1. \tag{2.1}$$

De plus, si $(u_0^1, u_0^2) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) \times \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta\to 0} \mu_1 \otimes \mu_2\Big((u_0^1, u_0^2) \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) \times \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)/\tilde{u}_1 \text{ et } \tilde{u}_2 \text{ sont globales avec } ||\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2||_{X^0} \le \epsilon \mid ||u_0^1||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta,\ ||u_0^2||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta\Big) = 1, \tag{2.2}$$

où μ_i correspond à la loi de la variable aléatoire $\omega \to u_0^i(\omega,.)$.

Si la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement distribuée avec $\frac{g_n}{\epsilon} \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, où ϵ est une constante strictement positive, alors on établit le théorème suivant :

Théorème 2.0.14 *Soient $\sigma \in]0, \frac{1}{2}[$ avec $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ et $s \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sigma[$ alors pour tout $\alpha \in]0,1]$ il existe une constante $\epsilon > 0$ et un ensemble $\Omega_{\epsilon,\alpha}$ vérifiant les conditions suivantes :*
i) $P(\Omega_{\epsilon,\alpha}) \ge 1 - \alpha$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega_{\epsilon,\alpha}$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega_{\epsilon,\alpha}$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Enfin, dans ces deux situations, on établit le théorème suivant :

Théorème 2.0.15
Pour tout $s \ge 0$, si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ alors $u_0^\omega \notin H^s(\mathbb{R}^3)$ ω presque surement.

De plus, sous les conditions du théorème 2.0.12, pour tout $M \ge 1$, il existe au moins une donnée initiale $u_0 \in \overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$- P\Big(\Omega' \cap ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)} \ge M\Big) > 0,$$
$$- u_0 \notin \overline{H}^{\sigma+\delta+0}(\mathbb{R}^3) \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Enfin, sous les conditions du théorème 2.0.14, pour tout $t > 0$, pour tout $M \geq 1$ et tout $\alpha \in]0,1]$, il existe au moins une donnée initiale $u_0 \in \overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$- P\Big(\Omega_{\epsilon,\alpha} \cap ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{\sigma+0}(\mathbb{R}^3)} \geq M\Big) > 1-\alpha-t,$$
$$- u_0 \notin \overline{H}^{\sigma+\delta+0}(\mathbb{R}^3) \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Remarque : Dans le cas gaussien, il est à noter que l'ensemble $P(\Omega')$ peut être choisi aussi proche de 1 qu'on le souhaite (mais jamais égal à 1) si l'on suppose $||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}$ petit.
En revanche, de manière générale, $P(\Omega')$ est petit. En effet, on peut démontrer (à l'aide des remarques figurant dans la section 2.7.1) que pour tous $\sigma' > \sigma$ et $\alpha \in]0,1]$, il existe deux constantes R et $C > 0$ telles que

$$\text{si } u_0 \in \overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3) \text{ avec } ||u_0||_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \geq R \text{ alors } P(\Omega') \geq (1-\alpha) \times e^{-C||u_0||^{\frac{6}{\sigma'-\sigma}}_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \log ||u_0||_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)}}.$$

2.1 Résultats préliminaires

Dans cette section, excepté dans la quatrième partie, on suppose la dimension d'espace d quelconque.

2.1.1 Les estimées de Strichartz pour l'oscillateur harmonique

Dans ce premier paragraphe, on établit les estimées de Strichartz pour l'oscillateur harmonique.

Définition 2.1.1 *Soit $(q,r) \in [2,\infty]^2$ alors on dit que (q,r) est admissible si et seulement si*

$$(q,r,d) \neq (2,\infty,2) \quad et \quad \frac{2}{q} = \frac{d}{2} - \frac{d}{r}.$$

Définition 2.1.2 *Pour $s \in \mathbb{R}$ et $T \geq 0$, on définit*

$$\overline{X}_T^s = \bigcap_{(q,r) \text{ admissible}} L^q([-T,T], \overline{W}^{s,r}(\mathbb{R}^d)).$$

Proposition 2.1.3 *Pour tout temps $T \geq 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour toute fonction $u \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$,*

$$||e^{-itH}u||_{\overline{X}_T^s} \leq C_T ||u||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve
Quitte à remplacer u par $e^{iTH}u$, il suffit de prouver l'estimation pour un certain $T > 0$, par exemple pour $T = \frac{\pi}{4}$. De même, quitte à remplacer u par $H^{\frac{s}{2}}u$, on peut limiter la preuve au cas où $s = 0$.

Dans [Ta2], nous avons que

$$e^{-itH}u(t,x) = \left(\frac{1}{\cos 2t}\right)^{d/2} \times e^{it\Delta}u\left(\frac{1}{2}\tan 2t, \frac{x}{\cos 2t}\right) \times e^{-\frac{ix^2\tan 2t}{2}}.$$

Ainsi, si le couple (q,r) est admissible, on obtient

$$\begin{aligned}||e^{-itH}u||_{L^q(]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[,L^r(\mathbb{R}^d))} &= \left|\left|\left(\frac{1}{\cos 2t}\right)^{d/2} \times e^{it\Delta}u\left(\frac{1}{2}\tan 2t, \frac{x}{\cos 2t}\right) \times e^{-\frac{ix^2\tan 2t}{2}}\right|\right|_{L^q(]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[,L^r(\mathbb{R}^d))} \\ &= ||e^{it\Delta}u||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

Puis, nous pouvons utiliser les estimées de Strichartz pour le laplacien, soit le Théorème 1.1.5, pour conclure. ⊠

Proposition 2.1.4 *Pour tout temps $T \geq 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout couple (q,r) admissible, réel s et fonction $F \in L^{q'}([T,T], \overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))$,*

$$\left|\left|\int_0^t e^{-i(t-s)H}F(s)ds\right|\right|_{\overline{X}^s_T} \leq C||F||_{L^{q'}([-T,T],\overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Preuve
Il s'agit de la même preuve que celle des estimées de Strichartz pour le laplacien que l'on peut trouver dans [Ta1]. En utilisant la Proposition 2.1.3, par dualité, on obtient

$$\left|\left|\int_{-T}^T e^{isH}F(s)\right|\right|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq C||F||_{L^{q'}([-T,T],\overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Et finalement, on établit que

$$\left|\left|\int_{-T}^T e^{-i(t-s)H}F(s)ds\right|\right|_{\overline{X}^s_T} \leq C||F||_{L^{q'}([-T,T],\overline{W}^{s,r'}(\mathbb{R}^d))},$$

puis nous pouvons conclure en utilisant le lemme de Christ-Kiselev. ⊠

2.1.2 Quelques propriétés des espaces de Bourgain

Dans ce second paragraphe, on définit les espaces de Bourgain puis on établit leurs différentes propriétés.

Définition 2.1.5 *On définit l'espace $\overline{X}^{s,b} = \overline{X}^{s,b}(\mathbb{R} * \mathbb{R}^d)$ comme le complété de $C_0^\infty(\mathbb{R} * \mathbb{R}^d)$ pour la norme*

$$\begin{aligned}||u||^2_{\overline{X}^{s,b}} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} || < t + \lambda_n^2 >^b \lambda_n^s \widehat{P_n u}(t)||^2_{L^2_t(\mathbb{R},L^2_x(\mathbb{R}^d))} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} ||H^{s/2}e^{itH}P_n u(t,.)||^2_{L^2_x(\mathbb{R}^d,H^b_t(\mathbb{R}))},\end{aligned}$$

où $\widehat{P_n u}(t)$ désigne la transformée de Fourier de $P_n u := < u, h_n >_{L^2(\mathbb{R}^d)\times L^2(\mathbb{R}^d)} * h_n$ par rapport à la variable temps.

Remarque : Au vu de cette définition, il est important de noter que

$$||H^{s/2}e^{itH}u(t,.)||_{L^2_x(\mathbb{R}^d,H^b_t(\mathbb{R}))} \leq ||u||_{\overline{X}^{s,b}}.$$

Dans les propositions suivantes 2.1.6, 2.1.7, 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10 et 2.1.12, quitte à remplacer u par $H^{s/2}u$, il sera légitime de limiter la preuve au cas où $s=0$.

Proposition 2.1.6 *Pour tout temps $T \geq 0$ et tout entier $b > \frac{1}{2}$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout entier $s \in \mathbb{R}$ et pour tout couple admissible (q,r), si $u \in \overline{X}^{s,b}$ alors $u \in L^q([-T,T],\overline{W}^{s,r}(\mathbb{R}^d))$ et*

$$||u||_{L^q([-T,T],\overline{W}^{s,r}(\mathbb{R}^d))} \leq C_T||u||_{\overline{X}^{s,b}}.$$

Preuve
Par la transformée de Fourier inverse, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{it\tau}\widehat{P_n(u)}(\tau)\ d\tau.$$

On pose

$$f_{\tau_0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widehat{P_n(u)}(\tau_0 - \lambda_n^2)$$

et on a alors

$$e^{-itH}f_{\tau_0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-it\lambda_n^2}\widehat{P_n(u)}(\tau_0 - \lambda_n^2).$$

Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau_0}(e^{-itH}f_{\tau_0})\ d\tau_0 &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}} e^{it(\tau_0-\lambda_n^2)}\widehat{P_n(u)}(\tau_0-\lambda_n^2)\ d\tau_0\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\widehat{P_n(u)}(\tau)\ d\tau\\ &= u(t,x).\end{aligned}$$

Puis, comme $b > \frac{1}{2}$, en utilisant la Proposition 2.1.3 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on établit que

$$\begin{aligned}||u||_{L^q([-T,T],L^r(\mathbb{R}^d))} &\leq C_T\int_{\mathbb{R}} ||f_{\tau_0}||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\ d\tau_0\\ &\leq C_T\left(\int_{\mathbb{R}} <\tau_0>^{2b}||f_{\tau_0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\ d\tau_0\right)^{1/2} \leq C||u||_{\overline{X}^{0,b}}.\end{aligned}$$

⊠

Proposition 2.1.7 *Pour tout $\theta \in [0,1]$, si $b > \frac{1-\theta}{2}$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier s et toute fonction $u \in \overline{X}^{s,b}$,*

$$||u||_{L^{\frac{2}{\theta}}(\mathbb{R},\overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \leq C||u||_{\overline{X}^{s,b}}.$$

Preuve
À l'aide de la transformée de Fourier inverse, on a

$$P_n u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{<\tau + \lambda_n^2>^b}{<\tau + \lambda_n^2>^b} \times e^{it\tau} \times \widehat{P_n u}(\tau)\, d\tau.$$

Puis, pour $b > \frac{1}{2}$, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|P_n u(t)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} <\tau + \lambda_n^2>^{2b} |\widehat{P_n u}(\tau)|^2\, d\tau \right)^{1/2}.$$

Ainsi, en élevant au carré, en intégrant sur $\mathbb{R}^d$ puis en sommant pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient pour tout réel $b > \frac{1}{2}$ et fonction $u \in \overline{X}^{0,b}$,

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C ||u||_{\overline{X}^{0,b}}.$$

Mais, par définition,

$$||u||_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} = ||u||_{\overline{X}^{0,0}}$$

donc le résultat suit par interpolation. ⊠

Proposition 2.1.8 *Pour toute constante $1 > \delta > 0$, il existe deux constantes $b' < \frac{1}{2}$ et $C > 0$ telles que pour tout entier $s \in \mathbb{R}$ et toute fonction $u \in L^{1+\delta}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))$,*

$$||u||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq C ||u||_{L^{1+\delta}(\mathbb{R}, \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))}.$$

Preuve
D'après la Proposition 2.1.7, on a par dualité que pour tout $\theta \in [0,1]$ et $b > \frac{1-\theta}{2}$, il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in L^{\frac{2}{2-\theta}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$

$$||u||_{\overline{X}^{0,-b}} \leq C ||u||_{L^{\frac{2}{2-\theta}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

Puis on choisit $\theta = \frac{2\delta}{1+\delta}$ et $b = \frac{1-\theta+\delta}{2} < \frac{1}{2}$ pour obtenir la proposition. ⊠

Proposition 2.1.9 *Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors pour tout $b \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et toute fonction $u \in \overline{X}^{s,b}$,*

$$||\psi(t) u||_{\overline{X}^{s,b}} \leq C ||u||_{\overline{X}^{s,b}}$$

Preuve
En utilisant que

$$<\tau + \lambda_n^2 + \tau_0>^b \leq\ 2^{\frac{b}{2}} <\tau_0>^b \times <\tau + \lambda_n^2>^b,$$

on obtient

$$\begin{aligned} ||e^{it\tau_0} u||^2_{\overline{X}^{0,b}} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} ||\ <\tau + \tau_0 + \lambda_n^2>^b \widehat{P_n u}(\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq 2^b <\tau_0>^{2b} \times \sum_{n \in \mathbb{N}} ||\ <\tau + \lambda_n^2>^b \widehat{P_n u}(\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq 2^b <\tau_0>^{2b} ||u||^2_{\overline{X}^{0,b}}. \end{aligned}$$

Puis, nous pouvons écrire

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\tau_0) e^{it\tau_0}\ d\tau_0$$

pour établir

$$||\psi(t)u||_{\overline{X}^{0,b}} \leq \frac{1}{2\pi} \times 2^{\frac{b}{2}} \times \left(\int_{\mathbb{R}} < \tau_0 >^b |\hat{\psi}(\tau_0)| d\tau_0\right) \times ||u||_{\overline{X}^{0,b}}.$$

Ainsi, la proposition est établie en utilisant que la fonction ψ est à décroissance rapide. ⊠

Proposition 2.1.10 *Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors pour tout $1 \geq b > \frac{1}{2}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et toute fonction $F \in \overline{X}^{s,b-1}$,*

$$\left|\left|\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H} F(s)\ ds\right|\right|_{\overline{X}^{s,b}} \leq C||F||_{\overline{X}^{s,b-1}}.$$

Preuve
On utilise la même preuve que celle du Lemme 3.2 de [G] avec $b' = 1-b$ et $T = 1$. En utilisant la définition de $\overline{X}^{0,b}$, on remarque qu'il suffit de prouver que

$$\left|\left|\psi(t)\int_0^t g(s)ds\right|\right|_{H^b(\mathbb{R})} \leq C||g||_{H^{b-1}(\mathbb{R})},\ \forall g \in H^{b-1}(\mathbb{R}). \tag{2.3}$$

En effet, nous pouvons appliquer (2.3) à $g(s) = P_n(e^{isH}F)$, élever au carré, intégrer sur $x \in \mathbb{R}^d$ et sommer sur $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir la Proposition 2.1.10.

On a

$$\begin{aligned}\int_0^t g(s)ds &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{\tau\in\mathbb{R}} e^{is\tau}\hat{g}(\tau)d\tau ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\tau\in\mathbb{R}} \hat{g}(\tau)\int_0^t e^{is\tau} ds d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\tau\in\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\hat{g}(\tau)d\tau := \frac{1}{2\pi}\ J.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\left|\psi(t)\int_0^t g(s)ds\right|\right|_{H^b(\mathbb{R})} \leq ||\psi(t)J||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\nabla^b(\psi)J||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\psi\nabla^b(J)||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En utilisant que $b > \frac{1}{2}$, par l'inégalité de Hölder, on établit

$$\begin{aligned}
||\psi(t)J||_{L_t^2(\mathbb{R})} &\leq \int_{\tau\in\mathbb{R}} ||\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \times \psi(t) \times \hat{g}(\tau)||_{L_t^2(\mathbb{R})}\ d\tau \\
&\leq \int_{|\tau|\leq 1} ||\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \times \psi(t) \times \hat{g}(\tau)||_{L_t^2(\mathbb{R})}\ d\tau + \int_{|\tau|\geq 1} ||\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \times \psi(t) \times \hat{g}(\tau)||_{L_t^2(\mathbb{R})}\ d\tau \\
&\leq \int_{|\tau|\leq 1} |\hat{g}(\tau)|\ d\tau + \int_{|\tau|\geq 1} \tau^{-1}\ |\hat{g}(\tau)|\ d\tau \\
&\leq ||g||_{H^{b-1}(\mathbb{R})} + \left(\int_{|\tau|\geq 1} \frac{1}{|\tau|^2 * (1+|\tau|^2)^{b-1}}\ d\tau\right)^{1/2} \times ||g||_{H^{b-1}(\mathbb{R})} \\
&\leq ||g||_{H^{b-1}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Et comme $\frac{1}{2} < b$, on a également

$$\begin{aligned}
||\psi\nabla^b(J)||_{L_t^2(\mathbb{R})} &= ||\psi(t) \int_{\tau\in\mathbb{R}} \tau^{b-1} e^{it\tau} \hat{g}(\tau)\ d\tau||_{L_t^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||\psi(t)\ \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{|\tau|\geq 1}\ \tau^{b-1}\hat{g}(\tau))(t)||_{L_t^2(\mathbb{R})} + \int_{|\tau|\leq 1} |\tau|^{b-1}|\hat{g}(\tau)|\ d\tau \\
&\leq ||\ \mathbb{1}_{|\tau|\geq 1}\ \tau^{b-1}\hat{g}(\tau)||_{L_\tau^2(\mathbb{R})} + \left(\int_{|\tau|\leq 1} \left(\frac{|\tau|^2}{1+|\tau|^2}\right)^{b-1} d\tau\right)^{1/2} \times ||g||_{H^{b-1}(\mathbb{R})} \\
&\leq ||g||_{H^{b-1}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

À partir de maintenant, on pose $T = \frac{\pi}{4}$ jusque la fin du chapitre, puis on définit un nouvel espace de Bourgain qui va nous intéresser.

Définition 2.1.11 *On définit l'espace* $\overline{X}_T^{s,b} = \overline{X}^{s,b}([-T;T] * \mathbb{R}^d)$ *comme le sous ensemble de* $\overline{X}^{s,b}$ *pour lequel la norme suivante*

$$||u||_{\overline{X}_T^{s,b}} = \inf_{w\in\overline{X}^{s,b}} \left\{ ||w||_{\overline{X}^{s,b}} \text{ avec } w|_{[-T,T]} = u \right\}$$

est finie.

Proposition 2.1.12 *Soient* $b > \frac{1}{2}$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\overline{X}_T^{s,b} \hookrightarrow C^0([-T,T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)).$$

Preuve
Soient une fonction $u \in \overline{X}_T^{0,b}$, un réel $t \in [-T,T]$ et une suite $t_k \in [-T,T]$ avec $\lim_{t\to\infty} t_k = t$ et montrons que

$$\lim_{k\to\infty} ||u(t_k) - u(t)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Soit $w \in \overline{X}^{0,b}$ telle que $w|_{[-T,T]} = u$, il suffit d'établir que

$$\lim_{k\to\infty} ||w(t_k) - w(t)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

On a

$$P_n w(t) - P_n w(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{< \tau + \lambda_n^2 >^b}{< \tau + \lambda_n^2 >^b} \times (e^{it\tau} - e^{it_k\tau}) \times \widehat{P_n w}(\tau)\ d\tau.$$

Puis, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$||w(t) - w(t_k)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{4\pi^2} \times \sum_{n\in\mathbb{N}} || < \tau + \lambda_n^2 >^b \times (e^{it\tau} - e^{it_k\tau}) \times \widehat{P_n w}(\tau)||^2_{L^2_\tau(\mathbb{R}, L^2_x(\mathbb{R}^d))}.$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{k\to\infty} ||w(t) - w(t_k)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

⊠

2.1.3 La transformation de Lentille

Dans ce troisième paragraphe, on définit la transformation de lentille puis on établit ses propriétés fondamentales.

Définition 2.1.13 *Pour $u(t,x)$ une fonction mesurable de $]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}[\times\mathbb{R}^d$, on définit pour $t\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}^d$, la fonction $\tilde{u}(t,x)$ de la façon suivante :*

$$\tilde{u}(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{d/2} \times u\left(\frac{1}{2}\arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right) \times e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}}.$$

Dans [N], [C] ou [Ta2], on peut trouver la proposition suivante :

Proposition 2.1.14 *Soit $K\in\mathbb{R}$ alors,*

$$\begin{array}{rll} & u \text{ est solution de} & i\frac{\partial u}{\partial t} - Hu = K\cos(2t)^{\frac{d}{2}(p-1)-2}|u|^{p-1}u \\ \text{si et seulement si} & \tilde{u} \text{ est solution de} & i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \Delta\tilde{u} = K|\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u}\ . \end{array}$$

Proposition 2.1.15 *Soit $s\geq 0$ alors il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $p\in[1,+\infty]$ et $q\in[1,+\infty]$ vérifiant $\frac{2}{p}+\frac{d}{q}-\frac{d}{2}\leq 0$, on a pour toute fonction $u\in L^p([-T,T],\overline{W}^{s,q}(\mathbb{R}^d))$,*

$$||\tilde{u}||_{L^p(\mathbb{R},W^{s,q}(\mathbb{R}^d))} \leq C||u||_{L^p([-T,T],\overline{W}^{s,q}(\mathbb{R}^d))}.$$

Preuve
Par interpolation, il suffit de prouver le résultat pour $s=n\in\mathbb{N}$. Soit $\alpha\in\mathbb{N}^d$ avec $|\alpha|\leq n$, alors grâce à la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \tilde{u}(t,x) &= \partial_x^\alpha\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{d/2} \times u\left(\frac{1}{2}\arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right) \times e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{d/2} \times \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_x^\beta\left(u\left(\frac{1}{2}\arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right)\right) \times \partial_x^{\alpha-\beta}\left(e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}}\right). \end{aligned}$$

Puis, comme

$$| \ \partial_x^{\alpha-\beta}(e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}})| \leq C_{\alpha,\beta}\left(1+|\frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}|^{|\alpha-\beta|}\right),$$

on établit

$$| \ \partial_x^{\alpha}\tilde{u}(t,x)| \leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{d/2+|\beta|} \times|\partial_x^{\beta}u|\left(\frac{1}{2}\arctan(2t),\frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right)\times\left(1+|\frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}|^{|\alpha-\beta|}\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}||\partial_x^{\alpha}\tilde{u}||_{L^p(\mathbb{R},L^q(\mathbb{R}^d))} &\leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta}||\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{d/2+d/q+|\beta|} \times ||u\left(\frac{1}{2}\arctan(2t),.\right)||_{\overline{W}^{|\alpha|,q}(\mathbb{R}^d)}||_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta}||\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2t}}\right)^{d/2+d/q-2/p+|\beta|} \times u(t,x)||_{L^p([-T,T],\overline{W}^{|\alpha|,q}(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\frac{d}{2}+\frac{d}{q}-\frac{2}{p}+|\beta|\geq 0$ pour $\beta\in\mathbb{N}^d$. ⊠

Finalement on a établi la proposition suivante :

Proposition 2.1.16 *Soient $s\geq 0$ et $u\in\overline{X}_T^s$ alors $\tilde{u}\in X^s$ et il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $u\in\overline{X}_T^s$,*

$$||\tilde{u}||_{X^s}\leq C||u||_{\overline{X}_T^s}.$$

Remarque : On peut énoncer une version locale de ce résultat. Soit $s\geq 0$, alors il existe une constante $C>0$ telle que pour tout temps $T\geq 0$ et toute fonction $u\in\overline{X}^s_{1/2\times\arctan(2T)}$,

$$||\tilde{u}||_{X_T^s}\leq C||u||_{\overline{X}^s_{1/2\times\arctan(2T)}}.$$

Ainsi, grâce à la Proposition 2.1.6, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.1.17 *Soient $b>\frac{1}{2}$, $s\geq 0$ et $u\in\overline{X}_T^{s,b}$ alors $\tilde{u}\in X^s$ et il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $u\in\overline{X}_T^{s,b}$,*

$$||\tilde{u}||_{X^s}\leq c||u||_{\overline{X}_T^{s,b}}.$$

Enfin, on conclut cette section par un dernier lemme qui nous permettra d'établir que les solutions globales construites diffusent en $-\infty$ et en $+\infty$.

Lemme 2.1.18 *Pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}^3$, on a*

$$\begin{aligned}&\left(e^{it\Delta}F(\frac{1}{2}\arctan 2t,.)\right)(t,x) \\ &=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{3/2}\times(e^{-itH}F(t,.))\left(\frac{1}{2}\arctan(2t),\frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right)\times e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}}.\end{aligned}$$

Preuve
Rappelons la formule de Mehler, pour $t \in]-T, T[$ et $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(e^{-itH}f)(t,x) = \left(\frac{1}{2\pi i \sin 2t}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\cos 2t}{\sin 2t}x^2 - \frac{xy}{\sin 2t} + \frac{\cos 2t}{\sin 2t}y^2\right)} f(y)\, dy.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{3/2} \times (e^{-itH}F(t,.))\left(\frac{1}{2}\arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right) \times e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}} \\
&= \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{\frac{3}{2}} \times \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} F\left(\frac{1}{2}\arctan(2t), y\right)\, dy \\
&= \left(e^{it\Delta}F(\frac{1}{2}\arctan 2t, .)\right)(t,x).
\end{aligned}$$

⊠

2.1.4 Propriétés basiques des fonctions propres de l'oscillateur harmonique

Dans ce quatrième paragraphe, on donne quelques estimations classiques des fonctions propres de l'oscillateur harmonique. Rappelons que l'hypothèse ($\otimes$) est satisfaite et que les estimations écrites sont valables, à priori, uniquement dans ce cadre.

Proposition 2.1.19 *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}^3$,*

$$||h_n||_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq C\lambda_n^{-1/4}(\log \lambda_n)^3, \tag{2.4}$$

$$||h_n||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\lambda_n^{-1/6}, \tag{2.5}$$

$$||h_n h_m||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_\delta \max(\lambda_n, \lambda_m)^{-1/2+\delta}, \tag{2.6}$$

$$||h_n h_m h_k||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_\delta \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{-1/2+\delta}. \tag{2.7}$$

Preuve
Les estimations (2.4) et (2.5) sont très connues en dimension 1 (voir [KT] pour une démonstration). Dans ce cadre en dimension 3, comme $\lambda_n^2 = \lambda_{n_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 + \lambda_{n_3}^2$ alors il existe $i \in (1,2,3)$ tel que $\lambda_{n_i}^2 \geq \frac{\lambda_n^2}{3}$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
||h_n||_{L^4(\mathbb{R}^3)} &= ||h_{n_1}||_{L^4_x(\mathbb{R})}||h_{n_2}||_{L^4_y(\mathbb{R})}||h_{n_3}||_{L^4_z(\mathbb{R})} \\
&\leq C\lambda_{n_1}^{-1/4}\lambda_{n_2}^{-1/4}\lambda_{n_3}^{-1/4}\log(\lambda_{n_1})\log(\lambda_{n_2})\log(\lambda_{n_3}) \\
&\leq C\lambda_n^{-1/4}(\log \lambda_n)^3,
\end{aligned}$$

car $\lambda_{n_1} \leq \lambda_n,\ \lambda_{n_2} \leq \lambda_n$ et $\lambda_{n_3} \leq \lambda_n$.
Nous pouvons faire la même preuve pour l'estimation (2.5).

Ensuite, l'estimation (2.6) est démontrée en dimension 1 dans [BTT].

On peut supposer que $\max(\lambda_n, \lambda_m) = \lambda_n$ et $\max(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \lambda_{n_3}) = \lambda_{n_1}$, alors $\lambda_{n_1}^2 \geq \frac{\lambda_n^2}{3} \geq \frac{\lambda_m^2}{3} \geq \frac{\lambda_{m_1}^2}{3}$.
Puis, grâce à (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}
||h_n h_m||_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= ||h_{n_1} h_{m_1}||_{L^2_x(\mathbb{R})} ||h_{m_2} h_{m_2}||_{L^2_y(\mathbb{R})} ||h_{n_3} h_{m_3}||_{L^2_z(\mathbb{R})} \\
&\leq ||h_{n_1} h_{m_1}||_{L^2_x(\mathbb{R})} ||h_{n_2}||_{L^4_y(\mathbb{R})} ||h_{m_2}||_{L^4_y(\mathbb{R})} ||h_{n_3}||_{L^4_z(\mathbb{R})} ||h_{m_3}||_{L^4_z(\mathbb{R})} \\
&\leq C_\delta \lambda_{n_1}^{-1/2+\delta} \\
&\leq C_\delta \lambda_n^{-1/2+\delta}.
\end{aligned}$$

Pour l'estimation (2.7), supposons que $\max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k) = \lambda_n$. Alors, en utilisant (2.5) et (2.6), on trouve

$$\begin{aligned}
||h_n h_m h_k||_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq ||h_n h_m||_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||h_k||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C_\delta \lambda_n^{-1/2+\delta} \\
&\leq C_\delta \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{-1/2+\delta}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. ⊠

Lemme 2.1.20 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes fonctions $f, g, h \in \overline{H}^s(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned}
||f(x)g(y)h(z)||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq C \times \big(&||f||_{\overline{H}^s(\mathbb{R})} ||g||_{L^2(\mathbb{R})} ||h||_{L^2(\mathbb{R})} + ||f||_{L^2(\mathbb{R})} ||g||_{\overline{H}^s(\mathbb{R})} ||h||_{L^2(\mathbb{R})} \\
&+ ||f||_{L^2(\mathbb{R})} ||g||_{L^2(\mathbb{R})} ||h||_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}\big).
\end{aligned}$$

Preuve
Il suffit d'établir le résultat dans le cas où $f(x) = h_n(x),\ g(y) = h_m(y),\ h(z) = h_k(z)$.
Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
||f(x)g(y)h(z)||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} &= ||\ H^{s/2}[f(x)g(y)h(z)]\ ||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= ||\ (\lambda_n^2 + \lambda_m^2 + \lambda_k^2)^{s/2}[h_n(x)h_m(y)h_k(z)]\ ||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \lambda_n^s ||h_n(x)h_m(y)h_k(z)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \lambda_m^s ||h_n(x)h_m(y)h_k(z)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad + \lambda_k^s ||h_n(x)h_m(y)h_k(z)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq ||h_n||_{\overline{H}^s(\mathbb{R})} ||h_m||_{L^2(\mathbb{R})} ||h_k||_{L^2(\mathbb{R})} + ||h_n||_{L^2(\mathbb{R})} ||h_m||_{\overline{H}^s(\mathbb{R})} ||h_k||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad + ||h_n||_{L^2(\mathbb{R})} ||h_m||_{L^2(\mathbb{R})} ||h_k||_{\overline{H}^s(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

⊠

Proposition 2.1.21 *Pour tout $\delta > 0$ et tout $s \in [0, 1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}^3$,*

$$\begin{aligned}
||\ h_n h_m||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{s-1/2+\delta}, \\
||\ h_n h_m h_k||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{s-1/2+\delta}.
\end{aligned}$$

Preuve
Grâce à (2.6) et (2.7), par interpolation, il suffit d'établir les inégalités pour $s = 1$.
Pour la première inégalité, on peut supposer que $\max(\lambda_n, \lambda_m) = \lambda_n$ et $\max(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \lambda_{n_3}) = \lambda_{n_1}$.
En utilisant le Lemme 2.1.20, (2.4) et le Lemme A.8 de [BTT] avec $\theta = 1$, on trouve

$$\begin{aligned}||h_n h_m||_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^3)} &\leq C \times (||h_{n_1} h_{m_1}||_{\overline{H}^1(\mathbb{R})} + ||h_{n_2} h_{m_2}||_{\overline{H}^1(\mathbb{R})} + ||h_{n_3} h_{m_3}]||_{\overline{H}^1(\mathbb{R})}) \\ &\leq C \times (\max(\lambda_{n_1}, \lambda_{m_1})^{1/2+\delta} + \max(\lambda_{n_2}, \lambda_{m_2})^{1/2+\delta} + \max(\lambda_{n_3}, \lambda_{m_3})^{1/2+\delta}) \\ &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{1/2+\delta}.\end{aligned}$$

Pour le seconde inégalité, on peut supposer que $\max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k) = \lambda_n$ alors, grâce à l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}||h_n h_m h_k||_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^3)} &\leq ||h_n h_m||_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^3)} ||h_k||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||h_n h_m||_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||h_k||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{1/2+\delta} \lambda_k^{-1/6} + C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{-1/2+\delta} \lambda_k^{5/6} \\ &\leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k)^{1/2+\delta}.\end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. ⊠

Proposition 2.1.22 *Soient $\delta > 0$, $l \geq 4$ et $N \geq 1$, alors il existe une constante $C_N > 0$ telle que si on suppose*

$$\lambda_{n_1} \geq \lambda_{n_2}^{1+\delta} \text{ et } \lambda_{n_2} \geq \lambda_{n_3} \geq ... \geq \lambda_{n_l}, \text{ cela implique que } \left| \int_{\mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^{l} h_{n_i}(x) dx \right| \leq C_N \lambda_{n_1}^{-N}.$$

Preuve
En utilisant (2.4) et (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^{l} h_{n_i}(x) dx \right| &\leq \lambda_{n_1}^{-2k} \times ||H^k (\prod_{i=2}^{l} h_{n_i}) h_{n_1}||_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \lambda_{n_1}^{-2k} \times || \prod_{i=2}^{l} h_{n_i} ||_{H^{2k}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C_k \times \lambda_{n_1}^{-2k} \lambda_{n_2}^{2k} \times \prod_{i=2}^{l} ||h_{n_i}||_{L^{2(l-1)}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C_k \times \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} \right)^{2k} \\ &\leq C_k \times \lambda_{n_1}^{\frac{-k\delta}{1+\delta}}, \ \forall k \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

⊠

Soit $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\eta(0) = \eta(1) = 1$ et $\eta(2) = 0$, alors on définit pour $N = 2^k$ la suite d'opérateurs suivante :

$$\Delta_N(u) = \begin{cases} (\eta(\frac{H}{N^2}) - \eta(\frac{4H}{N^2}))u & \text{pour } N \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que si $\lambda_n \notin [\frac{N}{2}, \sqrt{2}N]$ alors $\Delta_N(h_n) = 0$ et que $\sum\limits_N \Delta_N(u) = u$.

Lemme 2.1.23 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $\delta > 0$ et $K \geq 1$, on ait l'existence d'une constante $C_K > 0$ telle que si on suppose $N_1 \geq N_2^{1+\delta}$ et $N_2 \geq N_3 \geq N_4$ alors pour tous $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \overline{X}^{0,b'}$,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(u_1)\Delta_{N_2}(u_2)\Delta_{N_3}(u_3)\Delta_{N_4}(u_4) \right| \leq C_K N_1^{-K} \prod_{i=1}^{4} ||\Delta_{N_i}(u_i)||_{\overline{X}^{0,b'}}.$$

Preuve
On commence par étudier le cas où $u_i(t,x) = c_i(t)h_{n_i}(x)$. D'après les Propositions 2.1.22 et 2.1.7, on trouve

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(u_1)\Delta_{N_2}(u_2)\Delta_{N_3}(u_3)\Delta_{N_4}(u_4) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \prod_{i=1}^{4} \phi(\frac{\lambda_{n_i}^2}{N_i^2}) c_i(t) h_{n_i}(x)\ dt\ dx \right| \\
&\leq \prod_{i=1}^{4} \phi(\frac{\lambda_{n_i}^2}{N_i^2}) \times \int_{\mathbb{R}} |c_1(t)...c_4(t)|\ dt \times \left| \int_{\mathbb{R}^3} h_{n_1}(x)...h_{n_4}(x)\ dx \right| \\
&\leq C_K N_1^{-K} \times \prod_{i=1}^{4} \phi(\frac{\lambda_{n_i}^2}{N_i^2}) \times \prod_{i=1}^{4} ||c_i(.)||_{L_t^4(\mathbb{R})} \\
&\leq C_K N_1^{-K} \prod_{i=1}^{4} ||\Delta_{N_i}(u_i)||_{L^4(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))} \\
&\leq C_K N_1^{-K} \prod_{i=1}^{4} ||\Delta_{N_i}(u_i)||_{\overline{X}^{0,b'}}.
\end{aligned}$$

Pour le cas général, on pose $u_i(t,x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} c_{i,k}(t) h_k(x)$, alors

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(u_1)\Delta_{N_2}(u_2)\Delta_{N_3}(u_3)\Delta_{N_4}(u_4) \right| \\
&\leq \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} \left| \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(c_{1,k_1}h_{k_1})\Delta_{N_2}(c_{2,k_2}h_{k_2})\Delta_{N_3}(c_{3,k_3}h_{k_3})\Delta_{N_4}(c_{4,k_4}h_{k_4}) \right| \\
&\leq C_K N_1^{-K} \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} \prod_{i=1}^{4} ||\Delta_{N_i}(c_{i,k_i}h_{k_i})||_{\overline{X}^{0,b'}} \\
&\leq C_K N_1^{-K+12} \sqrt{\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} \prod_{i=1}^{4} ||\Delta_{N_i}(c_{i,k_i}h_{k_i})||^2_{\overline{X}^{0,b'}}}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k_i} ||\Delta_{N_i}(c_{i,k_i}h_{k_i})||^2_{\overline{X}^{0,b'}} &= \sum_{k_i}\sum_n || < \tau + \lambda_n >^{b'} \ P_n(\widehat{c_{i,k_i}h}_{k_i})||^2_{L^2_t(\mathbb{R},L^2_x(\mathbb{R}^d))} \\ &= \sum_n || < \tau + \lambda_n >^{b'} \ P_n(\widehat{c_{i,n}h}_n)||^2_{L^2_\tau(\mathbb{R},L^2_x(\mathbb{R}^d))} \\ &= ||u_i||_{\overline{X}^{0,b'}}.\end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. ⊠

Proposition 2.1.24 *Pour tout $s \geq 0$, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$C_1\lambda_n^s \leq ||\nabla^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_2\lambda_n^s.$$

Preuve
En utilisant la Proposition 1.2.7, on a

$$C'\left(||\nabla^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + || < x >^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right) \leq \lambda_n^s = ||h_n||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq C\left(||\nabla^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + || < x >^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right),$$

puis

$$C'||\nabla^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda_n^s \leq C\left(||\nabla^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||\nabla^s(\hat{h_n})||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||h_n||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Mais comme l'hypothèse ($\otimes$) est vérifiée alors $|h_n(x)| = |\hat{h_n}(x)|$, car cette égalité est vraie en dimension 1, et le résultat suit. ⊠

2.2 Outils sur les opérateurs pseudo-différentiels et applications aux fonctions propres

L'objectif de cette section est de présenter quelques notions de calcul pseudo-différentiel qui nous serviront à montrer l'estimée bilinéaire de type Bourgain dans la prochaine section. On démontre également une propriété de décroissance rapide que vérifie toutes bases de fonctions propres de H.

Définition 2.2.1 *Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit T^m comme l'espace vectoriel des symboles $q(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifient pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$, l'existence d'une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on ait*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |x| + |\xi|)^{m-\beta}.$$

Définition 2.2.2 *Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit S^m comme l'espace vectoriel des symboles $q(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifient pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$, l'existence d'une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on ait*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\beta}.$$

Définition 2.2.3 *Pour $q \in S^m \cup T^m$ et $h > 0$, on pose $Op_h(q)$ l'opérateur défini par*

$$\begin{aligned} Op_h(q)f(x) &= (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi/h} q(x,\xi) f(y)\ dyd\xi \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{ix\xi} q(x, h\xi) \hat{f}(\xi)\ d\xi. \end{aligned}$$

Dans [M], on peut alors trouver les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.2.4 *Soient $q_1 \in S^{m1}$ (respectivement T^{m1}) et $q_2 \in S^{m2}$ (respectivement T^{m2}) alors il existe un symbole $q \in S^{m_1+m_2}$ (respectivement $T^{m_1+m_2}$) tel que*

$$Op_h(q_1) \circ Op_h(q_2) = Op_h(q)$$

avec

$$q = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}}\ \partial_\xi^\alpha q_1 \partial_x^\alpha q_2 + h^{N+1} r_N \ \text{ où } r_N \in S^{m1+m2-(N+1)} \ (\text{respectivement } T^{m1+m2-(N+1)}).$$

Théorème 2.2.5 *Si $q(x,\xi) \in S^0$ alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0,1]$ et toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$,*

$$||Op_h(q(x,\xi))u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

On énonce ensuite la propriété suivante qui va permettre d'inverser l'oscillateur harmonique modulo un terme de reste très régularisant.

Proposition 2.2.6 *Soit $\delta > 0$ et définissons la fonction $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \ si \ |x| \leq 1 + \delta, \\ 1 \ si \ |x| \geq 1 + 2\delta. \end{cases}$$

Posons $p(x,\xi) = \xi^2 + x^2 - 1$ et définissons $H_h = Op_h(p) \in Op_h(T^2)$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe deux opérateurs pseudo-différentiels $E_N \in Op_h(T^{-2})$ et $R_N \in Op_h(T^{-(N+1)})$ tels que

$$E_N \circ H_h = \eta + h^{N+1} R_N.$$

Preuve
On pose

$$e_0 = \frac{\eta}{p} \in T^{-2}.$$

et pour $n \geq 1$, on définit e_n par récurrence de la façon suivante :

$$e_n = -\frac{1}{p} \sum_{|\alpha|+j=n, j\neq n} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p \quad \in T^{-2-n}.$$

Enfin, on pose

$$E_N = Op_h\left(\sum_{0\leq j\leq N} h^j e_j\right).$$

Alors, par la Proposition 2.2.4,

$$\begin{aligned}
E_N \ o\ H_h &= Op_h\left(\sum_{0\leq j\leq N} h^j e_j\right) \ o\ Op_h(p)\\
&= Op_h\left(\sum_{|\alpha|+j\leq N} \frac{h^{|\alpha|+j}}{i^{|\alpha|}}\ \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p + h^{N+1} r_N\right)\\
&= Op_h\left(\sum_{|\alpha|+j\leq N} \frac{h^{|\alpha|+j}}{i^{|\alpha|}}\ \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p\right) + h^{N+1} R_N
\end{aligned}$$

avec $R_N = Op_h(r_N) \in Op_h\left(T^{-(N+1)}\right)$.

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|+j\leq N} \frac{h^{|\alpha|+j}}{i^{|\alpha|}}\ \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p &= e_0 p + \sum_{1\leq l\leq N}\ \sum_{|\alpha|+j=l} \frac{h^l}{i^{|\alpha|}}\ \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p\\
&= \eta + \sum_{1\leq l\leq N} h^l \left(\sum_{|\alpha|+j=l, j\neq l} \frac{1}{i^{|\alpha|}}\ \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\alpha p + e_l . p\right)\\
&= \eta.
\end{aligned}$$

⊠

On peut donc maintenant établir une propriété fondamentale de décroissance rapide que vérifie n'importe quelle base de fonctions propres de l'oscillateur harmonique.

Proposition 2.2.7 *Pour tous entiers K et N, pour $c > 1$ et $1 \leq p \leq \infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$|| < x >^K h_n||_{L^p(|x|\geq c\lambda_n)} \leq C\lambda_n^{-N}.$$

Preuve
Comme $(-\Delta + x^2 - \lambda_n^2)h_n = 0$, en posant $h = \frac{1}{\lambda_n^2}$ et $\Phi(x) = h_n(\lambda_n x)$ alors $(-h^2\Delta + x^2 - 1)\Phi = 0$.

Soient $\delta \ll 1$ et $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & |x| \leq 1,\\ 1 \text{ si } & |x| \geq 1+\delta,\end{cases}$$

et $\overline{\chi} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\overline{\chi}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| \leq 1+2\delta, \\ 1 \text{ si } |x| \geq 1+3\delta. \end{cases}$$

Alors

$$H_h(\chi\Phi) = -h^2\Delta\chi\Phi - 2h^2\ \nabla\chi.\nabla\Phi.$$

Puis, grâce à la Proposition 2.2.6, on trouve

$$\eta\chi\Phi = -E_N(h^2\Delta\chi\Phi + 2h^2\nabla\chi.\nabla\Phi) - h^{N+1}R_N(\chi\Phi).$$

Et finalement,

$$< x >^K \overline{\chi}\eta\chi\Phi = - < x >^K \overline{\chi}E_N(h^2\Delta\chi\Phi + 2h^2\nabla\chi.\nabla\Phi) - h^{N+1} < x >^K \overline{\chi}R_N(\chi\Phi).$$

Estimation de $< x >^K \overline{\chi}E_N(\Delta\chi\Phi)$:
On a

$$\overline{\chi}(x)(E_N\Delta\chi\Phi)(x) = \frac{\overline{\chi(x)}}{(2\pi h)^d}\int_{\xi,1\leq|y|\leq 1+\delta} e^{i(x-y)\xi/h}E_N(x,\xi)(\Delta\chi\Phi)(y)\ dyd\xi.$$

Comme $|x| > 1+2\delta$ alors $|x-y| > \delta$. Puis comme $\int_{|x-y|>\delta} \leq \int_{|x_1-y_1|>\delta} + \int_{|x_2-y_2|>\delta} + ... + \int_{|x_d-y_d|>\delta}$, on peut se ramener à traiter le terme où $|x_1-y_1| > \delta$.

De $\frac{h^M}{(i(x_1-y_1))^M}\partial_{\xi_1}^M e^{i(x-y)\xi/h} = e^{i(x-y)\xi/h}$ et d'une intégration par parties, on déduit

$$\begin{aligned} &< x >^K \overline{\chi}(x)(E_N\Delta\chi\Phi)(x) \\ &=^{+}_{-} \frac{\overline{\chi}(x)}{(2\pi h)^d} \times \int_{\xi,1\leq|y|\leq 1+\delta} \frac{h^M}{i^M(x_1-y_1)^M} e^{i(x-y)\xi/h} < x >^K \partial_{\xi_1}^M E_N(x,\xi)(\Delta\chi\Phi)(y)\ dyd\xi. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $E_N \in T^{-2}$, on trouve

$$| < x >^K \overline{\chi}(x)(E_N\Delta\chi\Phi)(x)| \leq C \times h^{M-d} \times |\overline{\chi}(x)| \times \int_{\xi,1\leq|y|\leq 1+\delta} \frac{|(\Delta\chi\Phi|)(y)}{(1+|x|+|\xi|)^{2+M-K}}\ d\xi dy.$$

On peut ensuite supposer que $2+M-K > 2d$ (ce qui est possible puisque dans le cas où $2+M-K \leq 2d$, on refait le même calcul avec $M' > M$ vérifiant $2+M'-K > 2d$ puis il suffira de majorer $h^{M'}$ par h^M) pour obtenir

$$| < x >^K \overline{\chi}(x)(E_N\Delta\chi\Phi)(x) \times | \leq C \times h^{M-d} \times ||\Delta\chi\Phi||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \frac{|\overline{\chi}(x)|}{(1+|x|)^{2+M-K-d}}.$$

Et finalement, pour tous entiers M et K, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0,1]$,

$$|| < x >^K \overline{\chi}E_N(\Delta\chi\Phi)||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \times h^{M-d}||\Phi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Estimation de $< x >^K \overline{\chi} E_N(\nabla\chi.\nabla\Phi)$ **:**

Comme Φ satisfait $-h^2\Delta\Phi + x^2\Phi = \Phi$ alors $h||\nabla\Phi||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ||\Phi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ puis nous pouvons procéder comme le premier terme pour obtenir le même genre d'estimation.

Estimation de $h^{N+1} < x >^K \overline{\chi} R_N(\chi\Phi)$ **:**
On a

$$\begin{aligned} & h^{N+1} < x >^K \overline{\chi}(x) R_N(\chi\Phi)(x) \\ &= h^{N+1} \times \frac{1}{(2\pi)^d} \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} < x >^K \overline{\chi}(x) r_N(x, h\xi) \mathcal{F}(\chi\Phi)(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

avec

$$< x >^K \overline{\chi}(x) r_N(x,\xi) \in T^{-N-1+K} \subset T^0 \subset S^0 \text{ pour } N \geq K-1.$$

En utilisant le Théorème 2.2.5 et les injections de Sobolev, on trouve donc

$$\begin{aligned} & ||h^{N+1} < x >^K \overline{\chi}(x) R_N(\chi\Phi)(x)||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq ||h^{N+1} < x >^K \overline{\chi}(x) R_N(\chi\Phi)(x)||_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times h^{N+1} \times ||\chi\Phi||_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times h^{N+1} \times ||\Phi||_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient pour tous entiers K et N, pour tous $p \in [1,\infty]$ et $c > 1$, l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 < h \leq 1$, on ait

$$|| < x >^K \Phi||_{L^p(|x|\geq c)} \leq C \times h^N \times ||\Phi||_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Puis, en retournant à la variable initiale, on trouve pour tous entiers K et N, pour tous $p \in [1,\infty]$ et $c > 1$, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $0 < h \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $h = \frac{1}{\lambda_n^2}$, on ait

$$\begin{aligned} || < \sqrt{h}x >^K h_n||_{L^p(|x|\geq c\lambda_n)} &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/4-1/2} \times ||h_n||_{H^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/4-1/2} \times ||h_n||_{\overline{H}^{d/2+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/2-1} \times ||h_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} || < x >^K h_n||_{L^p(|x|\geq c\lambda_n)} &\leq ||h_n||_{L^p(|x|\geq c\lambda_n)} + h^{-K/2}|| < \sqrt{h}x >^K h_n||_{L^p(|x|\geq c\lambda_n)} \\ &\leq C \times h^{N-d/(2p)-d/2-1-K/2} \times ||h_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times \lambda_n^{-2N+d/p+d+K+2} \times ||h_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre la proposition. ⊠

Remarque : Comme conséquence du Théorème 2.2.7, on en déduit que si $c > 2$ alors pour tous entiers K, N et tout réel $p \geq 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous M et u,

$$|| < x >^K \Delta_M(u)||_{L^p(|x|\geq cM)} \leq CM^{-N}||\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.8}$$

On termine la section avec une propriété de calcul fonctionnel qui explique que certains opérateurs peuvent être approximés par des opérateurs pseudo-différentiels.

Proposition 2.2.8 *Soient $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi_2(x) = 1$ pour $x \in B(0, 1^+)$. Alors pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $s \geq 0$, il existe une constante $C_{N,s} > 0$ telle que pour tous $h \in]0, 1]$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$||\Phi(x^2 + (hD)^2)u - \sum_{j=0}^{N-1} h^j Op_h(\Psi_j(x, \xi))\chi_2 u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,s} h^{N-s}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où $\Psi_0(x, \xi) = \Phi(x^2 + \xi^2)$, $Supp(\Psi_j) \subset ((x, \xi)/x^2 + \xi^2 \in Supp(\Phi))$ et $\Psi_j \in T^{-j} \subset S^0$.

Preuve
On se sert de la Proposition 2.1 de [BGT2].
Si $\chi_1\chi_2 = \chi_1$ alors

$$||\Phi(x^2 + (hD)^2)\chi_1 u - \sum_{j=0}^{N-1} h^j Op_h(\Psi_j(x, \xi))\chi_2 u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,s} h^{N-s}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

avec $\Psi_0(x, \xi) = \Phi(x^2 + \xi^2)$, $Supp(\Psi_j) \subset ((x, \xi)/x^2 + \xi^2 \in Supp(\Phi))$ et $\Psi_j \in T^{-j}$.

Puis, il suffit de choisir correctement χ_1 pour avoir

$$||\Phi(x^2 + (hD)^2)(1 - \chi_1)u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq h^\infty ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Il suffit alors d'utiliser la Proposition 2.2.7 avec $\chi_1 = 1$ sur $B(0, 1^+)$. ⊠

2.3 L'estimée bilinéaire pour l'oscillateur harmonique

L'objectif de cette section est d'établir une estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique. On suppose la dimension d'espace $d \geq 2$ et on propose de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous N, M, u et v,*

$$\begin{aligned}||e^{itH}\Delta_N(v)\ e^{itH}\Delta_M(u)||_{L^2([-1;1],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \times \min(N, M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N, M)}{\max(N, M)}\right)^{1/2-\delta} ||\Delta_N(v)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

On remarque que pour prouver le Théorème 2.3.1, il suffit de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.3.2 *Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que pour tous N, M, u et v,*

$$\begin{aligned}||e^{itH}\Delta_N(v)\ e^{itH}\Delta_M(u)||_{L^2([-\epsilon;\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} ||\Delta_N(v)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

En effet, on peut remplacer u par $e^{i\epsilon H}u$ et v par $e^{i\epsilon H}v$ pour obtenir

$$\begin{aligned}||e^{i(t+\epsilon)H}\Delta_N(v)\ e^{i(t+\epsilon)H}\Delta_M(u)||_{L^2([-\epsilon;\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} ||\Delta_N(v)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Puis, on utilise le changement de variable $t \longleftrightarrow t+\epsilon$ et le Théorème 2.3.2 pour trouver que

$$\begin{aligned}||e^{itH}\Delta_N(v)\ e^{itH}\Delta_M(u)||_{L^2([-\epsilon;2\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} ||\Delta_N(v)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

On peut ainsi itérer le procédé $2E(\frac{1}{\epsilon})$ fois pour établir le Théorème 2.3.1 et on cherche donc à montrer le Théorème 2.3.2.

Soit $r \ll 1$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [1/4; 2], \\ 0 & \text{pour } x \in [0, 1/4 - r] \cup [2+r, \infty[, \end{cases}$$

et posons $\Delta'_N = \phi(\frac{H}{N^2})$. Alors en utilisant que $\phi(x) * (\eta(x) - \eta(4x)) = \eta(x) - \eta(4x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.3 *Pour tout N, on a*

$$\Delta'_N o \Delta_N = \Delta_N.$$

Par conséquent, pour prouver le Théorème 2.3.2, il suffit de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.3.4 *Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que pour tous N, M, u et v,*

$$\begin{aligned}||e^{itH}\Delta'_N(v)\ e^{itH}\Delta'_M(u)||_{L^2([-\epsilon;\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} ||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

En effet, si le Théorème 2.3.4 est vérifié, nous pouvons appliquer cette inégalité à v remplacé par $\Delta_N(v)$ et u remplacé par $\Delta_M(u)$ puis nous pouvons utiliser la Proposition 2.3.3 pour obtenir le Théorème 2.3.2.

Cas $M \sim N$ avec $M \geq N$:

Pour $d = 2$, nous pouvons utiliser les inégalités de Strichartz (soit le Théorème 2.1.3) pour trouver que

$$\begin{aligned}
||e^{itH}\Delta'_N(v)\ e^{itH}\Delta'_M(u)||_{L^2([-\epsilon;\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq ||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^4([-\epsilon;\epsilon],L^4(\mathbb{R}^d))} \times ||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^4([-\epsilon;\epsilon],L^4(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq ||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^4(]-\pi;\pi[,L^4(\mathbb{R}^d))} \times ||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^4(]-\pi;\pi[,L^4(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C||\Delta'_N(v)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times ||\Delta'_N(v)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq C||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Pour $d \geq 3$, en utilisant encore le Théorème 2.1.3 et les injections de Sobolev, on établit que

$$\begin{aligned}
||e^{itH}\Delta'_N(v)\ e^{itH}\Delta'_M(u)||_{L^2([-\epsilon;\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq ||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^\infty([-\epsilon;\epsilon],L^d(\mathbb{R}^d))} \times ||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^2([-\epsilon;\epsilon],L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq ||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^\infty(]-\pi;\pi[,\overline{W}^{\frac{d-2}{2},2}(\mathbb{R}^d))}||e^{itH}\Delta'_N(v)||_{L^2(]-\pi;\pi[,L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C||\Delta'_N(v)||_{\overline{H}^{\frac{d-2}{2}}(\mathbb{R}^d)} \times ||\Delta'_N(v)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq CN^{\frac{d-2}{2}}||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Finalement, si nous posons $u_M = \Delta'_M(u)$ et $v_N = \Delta'_N(v)$, on se ramène à démontrer que pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que pour tous N, M, u et v,

$$||e^{itH}v_N\ e^{itH}u_M||_{L^2([-\epsilon,\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CN^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{N}{M}\right)^{1/2-\delta}||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \text{ pour } M > 10N. \tag{2.9}$$

On peut écrire

$$u_M = \chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M + (1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M$$

avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq \frac{15}{32},\\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Et, par l'inégalité triangulaire, nous devons estimer les deux termes suivants :

$$\left|\left|e^{itH}\left[\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M\right]\ e^{itH}v_N\right|\right|_{L^2([-\epsilon,\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))} \tag{2.10}$$

et

$$\left|\left|e^{itH}\left[(1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M\right]\ e^{itH}v_N\right|\right|_{L^2([-\epsilon,\epsilon],L^2(\mathbb{R}^d))}. \tag{2.11}$$

2.3.1 Estimation du premier terme : (2.10)

L'objectif de cette partie est donc de montrer le résultat suivant :

Proposition 2.3.5 *Pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour tous N, M, u et v,*

$$||e^{itH}v_N\ e^{itH}\left[\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M\right]||_{L^2([-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_\delta N^{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{N}{M}\right)^{1/2-\delta}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \text{ pour } M \geq N.$$

Pour établir cette proposition, nous utilisons l'estimée bilinéaire de type Bourgain pour le laplacien due à Sogge que nous transposons, via la transformation de lentille, à l'oscillateur harmonique H. Le Théorème 2.4 de [S] nous donne le résultat suivant :

Proposition 2.3.6 *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C_δ telle que pour tous $u \in H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)$ et $v \in H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)$,*

$$||e^{it\Delta}u\ e^{it\Delta}v||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_\delta||u||_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)}||v||_{H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, à l'aide de la transformation de lentille, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.3.7 *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C_δ telle que pour tous $u \in H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)$,*

$$||e^{itH}u\ e^{itH}v||_{L^2([-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_\delta||u||_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)}||v||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve
D'après la Proposition 2.1.14, nous avons la formule suivante :

$$e^{-itH}u(t,x) = \frac{1}{\cos(2t)^{\frac{d}{2}}}\ e^{it\Delta}u\left(\frac{\tan(2t)}{2}, \frac{x}{cos(2t)}\right) \times e^{\frac{-ix^2\tan(2t)}{2}}.$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition 2.3.6, on obtient que

$$\begin{aligned}
||e^{itH}u\ e^{itH}v||^2_{L^2([-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}],L^2(\mathbb{R}^d))} &= ||e^{-itH}u\ e^{-itH}v||^2_{L^2([-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&= \int_{]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}[}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{|\cos(2t)|^{2d}} \times |e^{it\Delta}u\ e^{it\Delta}v|^2\left(\frac{\tan(2t)}{2}, \frac{x}{\cos(2t)}\right)\ dtdx \\
&= \int_{]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}[}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{|\cos(2t)|^{d}} \times |e^{it\Delta}u\ e^{it\Delta}v|^2\left(\frac{\tan(2t)}{2}, x\right)\ dtdx \\
&= \int_{-1/2}^{1/2}\int_{\mathbb{R}^d}(1+(2t)^2)^{d/2-1} \times |e^{it\Delta}ue^{it\Delta}v|^2(t,x)\ dtdx \\
&\leq C \times \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}|e^{it\Delta}u\ e^{it\Delta}v|^2(t,x)\ dtdx \\
&\leq C \times ||u||^2_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)} \times ||v||^2_{H^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C \times ||u||^2_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)} \times ||v||^2_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}-\delta}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité on utilise la Proposition 1.2.7. ⊠

Preuve de la Proposition 2.3.5
En utilisant la Proposition 2.3.7, il suffit de prouver que pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour tous M et u

$$||\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M||_{H^{-1/2+\delta}(\mathbb{R}^d)} \leq CM^{-1/2+\delta}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Trivialement, nous avons que

$$||\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ||u_M||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, par interpolation, il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout M et u,

$$||\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq CM^{-1}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.12}$$

On utilise alors le calcul semi classique. Pour une fonction u, on définit $\mathfrak{u} : x \longmapsto u(\frac{x}{\sqrt{h}})$ où $h = \frac{1}{M^2}$.

Remarquons que

$$\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)\left[\frac{H}{M^2}\right](u)(x) = [\chi(4x^2)(-h^2\Delta + |x|^2)](\mathfrak{u})(\sqrt{h}x) \tag{2.13}$$

et que

$$\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)\left[\phi\left(\frac{H}{M^2}\right)\right](u)(x) = [\chi(4x^2)\phi(-h^2\Delta + |x|^2)](\mathfrak{u})(\sqrt{h}x). \tag{2.14}$$

Ainsi, pour prouver (2.12), il suffit d'établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tous $h \in]0, 1]$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$||\chi\left(4x^2\right)\phi(x^2 + (hD)^2)u||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq Ch||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.15}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
||\chi\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\leq ||\ [\chi(4x^2)\phi(-h^2\Delta + |x|^2)](\mathfrak{u})(\sqrt{h}.)||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq h^{-\frac{1}{2}-\frac{d}{4}}||[\chi(4x^2)\phi(-h^2\Delta + x^2)](\mathfrak{u})||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq Ch^{\frac{1}{2}-\frac{d}{4}}||\mathfrak{u}||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq Ch^{1/2}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq CM^{-1}||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Démontrons ensuite (2.15). Grâce à la Proposition 2.2.8, on a

$$\begin{aligned}
&||\chi(4x^2)\phi(x^2 + (hD)^2)u||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= ||\chi(4x^2)[\phi(x^2 + (hD)^2)u - Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u + Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u]||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq h||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + ||\chi(4x^2)Op_h(\phi(x^2 + \xi^2))\chi_2 u||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit d'évaluer $||\chi(4x^2)Op_h(\phi(x^2+\xi^2))\chi_2 u||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}$. On a

$$\begin{aligned}
&\chi(4x^2)Op_h(\phi(x^2+\xi^2))\chi_2 u\\
=&\frac{\chi(4x^2)}{(2\pi)^d}\times\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\\
=&\frac{1}{(2\pi)^d}\times\int_{\mathbb{R}^d}\frac{ih\xi}{ih\xi}e^{ix\xi}\chi(4x^2)\phi(x^2+(h\xi)^2)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\\
=&\frac{h}{(2\pi)^d}\times\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x(e^{ix\xi})\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\\
=&\frac{h}{(2\pi)^d}\times\left(\nabla_x\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\right)\right.\\
&\qquad\left.-\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\nabla_x\left(\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\right)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\right).
\end{aligned}$$

Puis, comme $4x^2\leq\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}^-\leq x^2+\xi^2\leq 2^+$ implique $\frac{1}{8}^-\leq\xi^2$, on en déduit que

$$(x,\xi)\longrightarrow\frac{\chi(4x^2)}{i\xi}\phi(x^2+\xi^2)\ \in S^0 \text{ et } (x,\xi)\longrightarrow\nabla_x\left(\frac{\chi(4x^2)}{i\xi}\phi(x^2+\xi^2)\right)\ \in S^0.$$

Ainsi, par le Théorème 2.2.5, on a alors

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{h}{(2\pi)^d}\times\left(\nabla_x\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\right)\right)\right|\right|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\\
\leq&\frac{h}{(2\pi)^d}\times\left|\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
\leq&Ch||\chi_2 u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
\leq&Ch||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{h}{(2\pi)^d}\times\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\nabla_x\left(\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\right)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\right|\right|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\\
\leq&\left|\left|\frac{h}{(2\pi)^d}\times\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\nabla_x\left(\frac{\chi(4x^2)}{ih\xi}\phi(x^2+(h\xi)^2)\right)\mathcal{F}(\chi_2 u)(\xi)\ d\xi\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
\leq&Ch||\chi_2 u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
\leq&Ch||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre (2.15). ⊠

2.3.2 Estimation du second terme : (2.11)

L'objectif de cette partie est donc de montrer le résultat suivant :

Proposition 2.3.8 *Il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que pour tout $R \geq 0$, il existe une constante $C_R > 0$ telle que pour tous N, M, u, v,*

$$||e^{itH} v_N \; e^{itH} \left[(1-\chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M \right] ||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_R M^{-R} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} ||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \text{ pour } M \geq 10N.$$

Pour démontrer cette proposition, on montre, dans un premier temps, qu'il est possible "d'intervertir" la fonction de non troncature $(1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)$ et l'opérateur e^{itH}, puis, dans on second temps, on établit l'inégalité pour ce nouveau terme. Cela revient à démontrer les deux propositions suivantes :

Proposition 2.3.9 *Il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que pour tout $R \geq 0$, il existe une constante $C_R > 0$ telle que pour tous N, M, u, v, si $M \geq 10N$ alors*

$$||e^{itH} v_N \times \chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} \left[(1-\chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M \right] ||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_R M^{-R} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} ||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposition 2.3.10 *Pour tout temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et pour tout réel $R \geq 0$, il existe une constante $C_R > 0$ telle que pour tous N, M, u, v, si $M \geq 10N$ alors*

$$||e^{itH} v_N \times (1-\chi) \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} \left[(1-\chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M \right] ||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_R M^{-R} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} ||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve de la Proposition 2.3.9

Il suffit d'établir la proposition suivante :

Proposition 2.3.11 *Il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que pour tout $N \geq 0$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tous $M \geq 1$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$||\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} \left[(1-\chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M \right] ||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N M^{-N} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En effet, la Proposition 2.3.11 implique la Proposition 2.3.9.

De

$$||u||_{L^\infty([a,b],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \leq C||u||_{L^\infty([a,b],\overline{H}^{\frac{d}{2}+1}(\mathbb{R}^d))}$$

et la Proposition 2.3.11, on déduit pour $M \geq 10N$ que

$$\begin{aligned}
&||\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} \left[(1-\chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M \right] \times e^{itH} v_N ||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq ||\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} \left[(1-\chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M \right] ||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \times ||e^{itH} v_N||_{L^\infty([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq C \times ||\chi \left(\frac{8x^2}{M^2} \right) e^{itH} \left[(1-\chi) \left(\frac{4x^2}{M^2} \right) u_M \right] ||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \times ||v_N||_{\overline{H}^{\frac{d}{2}+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C_R M^{-R} N^{\frac{d}{2}+1} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} ||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C_R M^{-R+\frac{d}{2}+1} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} ||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

On cherche donc à prouver la Proposition 2.3.11. En utilisant l'analyse semi classique comme pour (2.14), il suffit de prouver l'existence d'un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que pour tout $N \geq 1$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tous $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $h \in]0, 1]$,

$$||\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)\phi(x^2+(hD)^2)u||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N h^N ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.16}$$

En utilisant la Proposition 2.2.8, il suffit d'établir le résultat suivant :
Pour toute fonction $g(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ vérifiant $Supp(g) \subset \{\frac{1}{8} \leq \xi^2 + x^2 \leq 4\}$ et tout entier $N \geq 1$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tous $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $h \in]0, 1]$,

$$||\chi(8x^2)e^{ihH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(g(x,\xi))u||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N h^N ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.17}$$

En effet, par la Proposition 2.2.8,

$$\begin{aligned}
&||\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)\phi(x^2+(hD)^2)u||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))}\\
\leq\ & ||\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)[\phi(x^2+(hD)^2)u - \sum_{j=0}^{N-1} h^j Op_h(\Psi_j(x,\xi))u]||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))}\\
&+ \sum_{j=0}^{N-1} h^j ||\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(\Psi_j(x,\xi))u||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))}\\
\leq\ & C_N h^N ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j=0}^{N-1} h^j ||\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(\Psi_j(x,\xi))u||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))}\\
\leq\ & C_N h^N ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

On se ramène donc à montrer le lemme suivant :

Lemme 2.3.12 *Il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que si g est une fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ vérifiant $Supp(g) \subset \{\frac{1}{8} \leq \xi^2 + x^2 \leq 4\}$ alors pour tout entier $N \geq 1$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tous $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $h \in]0, 1]$,*

$$||\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(g(x,\xi))u||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_N h^N ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve
On définit

$$w(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}\Phi(s,x,\xi)} a(s,x,\xi,h)\hat{u}(\frac{\xi}{h})\frac{d\xi}{(2\pi h)^d}$$

où

$$a(s,x,\xi,h) = \sum_{j=0}^{N} h^j a_j(s,x,\xi).$$

Supposons que

$$\begin{cases} \Phi(0,x,\xi) = x.\xi, \\ \partial_s \Phi - |\nabla\Phi|^2 - x^2 = 0, \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0(0,x,\xi) = (1-\chi)(4x^2)g(x,\xi), \\ \partial_s a_0 - 2\nabla\Phi.\nabla a_0 - \Delta(\Phi)a_0 = 0, \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} a_j(0,x,\xi) = 0, \\ \partial_s a_j - 2\nabla\Phi.\nabla a_j - \Delta(\Phi)a_j = -i\Delta(a_{j-1}), \end{array}\right.$$
$$\text{pour } 1 \leq j \leq N.$$

Alors

$$\begin{aligned} ih\partial_s w - h^2\Delta w + x^2 w &= -h^{N+2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}\Phi(s,x,\xi)}\Delta(a_N(s,x,\xi))\hat{u}(\frac{\xi}{h})\frac{d\xi}{(2\pi h)^d} \\ &:= h^{N+2}f. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op(g(x,h\xi))u \\ &= \chi(8x^2)w(t,x) - ih^{N+2}\chi(8x^2)\int_0^t e^{i(t-s)H_h/h}f(s)ds. \end{aligned}$$

Remarquons que si Ψ est solution de l'équation $\partial_t\Psi + |\nabla\Psi|^2 = 0$ avec donnée initiale $\Psi(0,x,\xi) = x.\xi$ alors $\Phi(t,x,\xi) = \Psi(\frac{-\tan 2t}{2}, \frac{x}{\cos 2t}, \xi) + \frac{x^2\tan 2t}{2}$ est solution de l'équation $\partial_s\Phi - |\nabla\Phi|^2 - x^2 = 0$ avec même donnée initiale.

Par la méthode des caractéristiques, on trouve

$$\Psi(t,x,\xi) = -t|\xi|^2 + x.\xi,$$

puis on déduit que

$$\Phi(t,x,\xi) = \frac{\tan(2t)}{2}(\xi^2 + x^2) + \frac{x.\xi}{\cos(2t)}.$$

Ainsi

$$\nabla\Phi = \frac{\xi}{\cos(2t)} + x\tan(2t) \text{ et } \Delta\Phi = d\tan(2t).$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, on trouve

$$a_0\left(t, x - 2\int_0^t \nabla\Phi, \xi\right) = \frac{a_0(0,x,\xi)}{|\cos 2t|^{\frac{d}{2}}}, \tag{2.18}$$

et

$$a_j\left(t, x - 2\int_0^t \nabla\Phi, \xi\right) = -i\int_0^t \left|\frac{\cos(2s)}{\cos(2t)}\right|^{\frac{d}{2}} \Delta a_{j-1}\left(s, x - 2\int_0^s \nabla\Phi, \xi\right) ds. \tag{2.19}$$

Or, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $|x| \leq \frac{1}{2}$,

$$a_0(0,x,\xi) = 0$$

Par conséquent, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $|x| \leq \frac{\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$a_j\left(t, x - 2\int_0^t \nabla\Phi, \xi\right) = 0.$$

Or $\int_0^t \nabla\Phi = \xi F(t) - \frac{x \log\cos(2t)}{2}$ avec F une fonction continue vérifiant $F(0) = 0$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un temps $T \in]0, \frac{\pi}{4}]$ tel que si $|t| \leq T$ alors $|F(t)| \leq \epsilon$ et $|\log\cos 2t| \leq \epsilon$.

Remarquons que

$$\begin{aligned} & y = x - 2\int_0^t \nabla\Phi = x(1+\log\cos 2t) - 2\xi F(t) \\ \Leftrightarrow \qquad & x = \frac{y + 2\xi F(t)}{1+\log\cos 2t} \end{aligned}$$

et que si $|y| \leq \frac{1}{4}$, $\xi^2 \leq 4$ et $|t| \leq T$ alors $|x| \leq \frac{1/4+4\epsilon}{1-\epsilon} \leq \frac{\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}$, si ϵ choisi correctement.

Cela implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $|t| \leq T$

$$Supp(a_j(t)) \subset B_x\left(0, \frac{1}{4}\right)^c \times B_\xi(0,2).$$

Par conséquent, si $|t| \leq T$, comme $Supp(\chi(8x^2)) \subset B_x(0, \frac{1}{4})$, on déduit que

$$\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(g(x,\xi))u = -ih^{N+2}\chi(8x^2)\int_0^t e^{i(t-s)H_h/h}f(s)\ ds.$$

Puis, par le Théorème 2.1.4, on trouve

$$\begin{aligned} & ||\chi(8x^2)e^{itH_h/h}(1-\chi)(4x^2)Op_h(g(x,\xi))u||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\ \leq\ & h^{N+2}\left|\left|\chi(8x^2)\int_0^t e^{i(t-s)H_h/h}f(s)\ ds\right|\right|_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\ \leq\ & h^{N+2}||f||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\ \leq\ & h^{N+2}||\Delta a_N||_{L^1_t([-T,T],L^2_x(\mathbb{R}^d,L^2_\xi(\mathbb{R}^d)))} \times ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré si $\Delta a_N \in L^1_t([-T,T], L^2_x(\mathbb{R}^d, L^2_\xi(\mathbb{R}^d)))$.

On démontre par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$, que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial_x^\alpha a_N \in L^1_t([-T,T], L^2_x(\mathbb{R}^d, L^2_\xi(\mathbb{R}^d)))$.

Pour $N = 0$, à l'aide de (2.18), on voit par changement de variable que $\partial_x^\alpha a_0 \in L^1_t([-T,T], L^2_x(\mathbb{R}^d, L^2_\xi(\mathbb{R}^d)))$ si $\partial_x^\alpha a_0(0) \in L^2_x(\mathbb{R}^d, L^2_\xi(\mathbb{R}^d))$.
Or $a_0(0) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ avec $Supp(a_0(0)) \subset \{(x,\xi)/x^2 \leq 1, \xi^2 \leq 4\}$ et le cas $N = 0$ est évident.

Supposons le résultat établi au rang $N-1$ et montrons le au rang N. À l'aide de (2.19), on note que $\partial_x^\alpha a_N \in L^1_t([-T,T], L^2_x(\mathbb{R}^d, L^2_\xi(\mathbb{R}^d)))$ si $\partial_x^{\alpha+2} a_{N-1} \in L^1_t([-T,T], L^2_x(\mathbb{R}^d, L^2_\xi(\mathbb{R}^d)))$. Cette dernière affirmation étant claire par hypothèse de récurrence. ⊠

Preuve de la Proposition 2.3.10

Grâce au Théorème 2.1.3, on trouve pour tout $R \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&||e^{itH}\ v_N \times (1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right) e^{itH}\left[(1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M\right]||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq ||<x>^R\ e^{itH}v_N\times <x>^{-R}\ (1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right) e^{itH}\left[(1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M\right]||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq M^{-R}\times ||<x>^R\ e^{itH}v_N\times (1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right)\ e^{itH}\left[(1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M\right]||_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq M^{-R}\times ||(1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right)\ <x>^R\ e^{itH}v_N||_{L^4([-T,T],L^4(\mathbb{R}^d))} \\
&\qquad\qquad \times ||e^{itH}(1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M||_{L^4([-T,T],L^4(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq M^{-R}\times ||(1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right)<x>^R\ e^{itH}v_N||_{L^4([-T,T],L^4(\mathbb{R}^d))} \\
&\qquad\qquad \times ||e^{itH}(1-\chi)\left(\frac{4x^2}{M^2}\right)u_M||_{L^4([-T,T],\overline{W}^{\frac{d-2}{4},\frac{2d}{d-1}}(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq M^{-R}\times ||<x>^R\ (1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right)e^{itH}v_N||_{L^\infty([-T,T],L^4(\mathbb{R}^d))}\times M^{\frac{d-2}{4}}||u_M||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Puis, comme $Supp\left\{(1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right)\right\}\subset\left\{|x|^2\geq\frac{M^2}{8}\times\frac{15}{16}\right\}\subset\left\{|x|^2\geq 5N^2\right\}$ alors par la Proposition 2.2.7, on déduit

$$||(1-\chi)\left(\frac{8x^2}{M^2}\right)<x>^R\ e^{itH}v_N||_{L^\infty([-T,T],L^4(\mathbb{R}^d))}\leq C||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

2.3.3 Estimées bilinéaires et espaces de Bourgain

L'objectif de cette section consiste à écrire l'estimée bilinéaire du Théorème 2.3.1 dans les espaces de Bourgain. Plus précisément, on cherche à établir les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.3.13 *Il existe $\delta_0\in]0,\frac{1}{2}]$ tel que pour tout $\delta\in]0,\delta_0]$, il existe $b'<\frac{1}{2}$ et une constante $C>0$ tels que pour tous u,v,M,N,*

$$\begin{aligned}
||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))}\leq & C\times\min(N,M)^{\frac{d-2}{2}+\delta} \\
&\times\left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta}\times||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,b'}}||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b'}}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.3.14 *Soit $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors il existe $\delta_0\in]0,\frac{1}{2}]$ tel que pour tout $\delta\in]0,\delta_0]$, il existe $b'<\frac{1}{2}$ et une constante $C>0$ tels que pour tous u,u_0,M,N,*

$$\begin{aligned}
||\Delta_N(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))}\leq & C\times\min(N,M)^{\frac{d-2}{2}+\delta} \\
&\times\left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta}\times||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b'}}.
\end{aligned}$$

Pour démontrer ces théorèmes, on adapte la preuve du Lemme 4.4 de [BGT3]. Commençons par remarquer qu'il suffit de démontrer les deux propositions suivantes :

Proposition 2.3.15 *Pour tout $b \in]\frac{1}{2},1]$ et $\delta \in]0,\frac{1}{2}]$, il existe une constante $C>0$ telle que pour tous u, v, M, N,*

$$\begin{aligned}||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b}}.\end{aligned}$$

Proposition 2.3.16 *Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors pour tout $b \in]\frac{1}{2},1]$ et $\delta \in]0,\frac{1}{2}]$, il existe une constante $C>0$ telle que pour tous u_0, v, M, N,*

$$\begin{aligned}||\Delta_N(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b}}.\end{aligned}$$

En effet, pour tout $\epsilon>0$, d'après la Proposition 2.1.7 (avec $\theta=\frac{1}{2}$), on obtient

$$\begin{aligned}||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq ||\Delta_N(v)||_{L^4(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \times ||\Delta_M(u)||_{L^4(\mathbb{R},L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,1/4+\epsilon}} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{d/2+\epsilon,1/4+\epsilon}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq ||\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)||_{L^4(\mathbb{R},L^\infty(\mathbb{R}^d))} \times ||\Delta_M(u)||_{L^4(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C||\Delta_N(u_0)||_{\overline{H}^{d/2-1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,1/4+\epsilon}(\mathbb{R}*\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C||\Delta_N(u_0)||_{\overline{H}^{d/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,1/4+\epsilon}(\mathbb{R}*\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}||\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq ||\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)||_{L^4(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \times ||\Delta_M(u)||_{L^4(\mathbb{R},L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C||\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)||_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{d/2+\epsilon,1/4+\epsilon}} \\ &\leq C||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{d/2+\epsilon,1/4+\epsilon}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, par interpolation, pour tout $\theta \in [0,1]$, on trouve

$$\begin{aligned}||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq C \times \min(M,N)^{\frac{d-2}{2}+\theta(1+\epsilon)} \\ \times \left(\frac{\min(M,N)}{\max(M,N)}\right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} & \times ||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,b(1-\theta)+\theta(1/4+\epsilon)}}||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b(1-\theta)+\theta(1/4+\epsilon)}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}||\Delta_N(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq C \times \min(M,N)^{\frac{d-2}{2}+\theta(1+\epsilon)} \\ \times \left(\frac{\min(M,N)}{\max(M,N)}\right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} & \times ||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b(1-\theta)+\theta(1/4+\epsilon)}}.\end{aligned}$$

Choisissons $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ et $\theta = \frac{\epsilon}{4}$ alors

$$\begin{aligned} b(1-\theta) + \theta(\frac{1}{4}+\epsilon) &= b - \frac{b\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}(\frac{1}{4}+\epsilon) \\ &\leq b - \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{16} + \frac{\epsilon^2}{4} \leq b - \frac{\epsilon}{17}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $b = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{34}$ et de poser $b' = b(1-\theta) + \theta(\frac{1}{4}+\epsilon) < \frac{1}{2}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} ||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}+\epsilon} \\ &\times \left(\frac{\min(M,N)}{\max(N,M)}\right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} \times ||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,b'}} ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b'}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ||\Delta_N(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}+\epsilon} \\ &\times \left(\frac{\min(M,N)}{\max(M,N)}\right)^{(1/2-\delta)(1-\theta)} \times ||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b'}}. \end{aligned}$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{1}{2} - \delta\right)(1-\theta) = \frac{1}{2} - \frac{5\epsilon}{8} + \frac{\epsilon^2}{8} \geq \frac{1}{2} - \epsilon$$

et les Théorèmes 2.3.13 et 2.3.14 suivent avec $\delta_0 = \epsilon$.

Dès lors, on démontre donc les Propositions 2.3.15 et 2.3.16. Pour obtenir la Proposition 2.3.15, il suffit d'établir la proposition suivante :

Proposition 2.3.17 *Pour tout $b \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous u, v, M, N,*

$$\begin{aligned} ||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2([0,1],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq & C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ & \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,b}} ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b}}. \end{aligned}$$

En effet, si la Proposition 2.3.17 est vérifiée alors pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} ||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2([\frac{k}{2},1+\frac{k}{2}],L^2(\mathbb{R}^d))} &= ||\Delta_N(v(.-\frac{k}{2}))\Delta_M(u(.-\frac{k}{2}))||_{L^2([0,1],L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \\ &\quad \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||\Delta_N(v(.-\frac{k}{2}))||_{\overline{X}^{0,b}} ||\Delta_M(u(.-\frac{k}{2}))||_{\overline{X}^{0,b}} \\ &\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,b}} ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b}}. \end{aligned}$$

Ensuite, utilisons une partition de l'unité. Soit $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée dans $[0,1]$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(t-\frac{n}{2}) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\Delta_N(v)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(t-\frac{n}{2})\Delta_N(v(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta_N(\Phi(t-\frac{n}{2})v(t)).$$

Comme les éléments $(\Phi(.-\frac{n}{2}))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont à supports presque disjoints deux à deux, on établit

$$\begin{aligned}
||\Delta_N(v)\Delta_M(u)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} &= \left|\left|\sqrt{\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta_N(\Phi(t-\frac{n}{2})v(t))\right]^2} \times \Delta_M(u)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq \left|\left|\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta_N(\Phi(t-\frac{n}{2})v(t))^2}\Delta_M(u)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq ||\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta_N(\Phi(t-\frac{n}{2})v(t))^2\Delta_M(u)^2||^{1/2}_{L^1(\mathbb{R},L^1(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\Delta_N(\Phi(t-\frac{n}{2})v(t))^2\Delta_M(u)^2||_{L^1([\frac{n}{2},1+\frac{n}{2}],L^1(\mathbb{R}^d))}\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\Delta_N(\Phi(t-\frac{n}{2})v(t))\Delta_M(u)||^2_{L^2([\frac{n}{2},1+\frac{n}{2}],L^2(\mathbb{R}^d))}\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})\Delta_N(v)||^2_{\overline{X}^{0,b}}\right)^{1/2} \times ||\Delta_M(v)||_{\overline{X}^{0,b}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit d'obtenir pour $b \in [0,1]$ que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})f||^2_{\overline{X}^{0,b}} \leq C||f||^2_{\overline{X}^{0,b}}$$

pour conclure.

Or comme la famille $(\Phi(.-\frac{n}{2}))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(t-\frac{n}{2})^2 f(t)^2 \leq Cf(t)^2$$

ainsi que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi'(t-\frac{n}{2})^2 f(t)^2 \leq Cf(t)^2,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})f(t)||^2_{\overline{X}^{0,0}} &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})f(t)||^2_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^d} \Phi(t-\frac{n}{2})^2 f(t,x)^2 \; dt \; dx \\
&\leq \int_{t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi(t-\frac{n}{2})^2 f(t,x)^2 \; dt \; dx \\
&\leq C \int_{t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^d} f(t,x)^2 \; dt \; dx \\
&\leq C||f||^2_{\overline{X}^{0,0}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})f(t)||^2_{\overline{X}^{0,1}} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})e^{itH}P_k f(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d,H^1(\mathbb{R}))} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})e^{itH}P_k f(t)||^2_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} ||\Phi'(t-\frac{n}{2})e^{itH}P_k f(t)||^2_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\qquad + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{N}} ||\Phi(t-\frac{n}{2})\partial_t(e^{itH}P_k f(t))||^2_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq ||f||^2_{\overline{X}^{0,0}} + \sum_{k\in\mathbb{N}} ||\partial_t(e^{itH}P_k f(t))||^2_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq ||f||^2_{\overline{X}^{0,1}}.
\end{aligned}$$

Puis, le résultat suit par interpolation. On peut donc passer aux preuves des Théorèmes 2.3.17 et 2.3.16.

Preuve de la Propostion 2.3.17
Nous pouvons supposer que u et v sont supportées en temps dans l'intervalle $[0,1]$. On peut écrire

$$\Delta_M(u(t)) = e^{-itH}e^{itH}\Delta_M(u(t)) = e^{-itH}\Delta_M(U(t))$$

et

$$\Delta_N(v(t)) = e^{-itH}e^{itH}\Delta_N(v(t)) = e^{-itH}\Delta_N(V(t)).$$

Alors

$$\Delta_M(u(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}e^{-itH}\widehat{\Delta_M(U)}(\tau)\; d\tau \text{ et } \Delta_N(v(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\sigma}e^{-itH}\widehat{\Delta_N(V)}(\sigma)\; d\sigma.$$

Par conséquent, si $b > 1/2$, alors par le Théorème 2.3.1, on trouve

$$\begin{aligned}
&||\Delta_M(u)\Delta_N(v)||_{L^2([0,1],L^2(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C \times \left|\left| \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}} e^{it(\tau+\sigma)} e^{-i(t+t)H} \widehat{\Delta_M(U)}(\tau)\widehat{\Delta_N(V)}(\sigma)\ d\tau d\sigma \right|\right|_{L^2_t([0,1],L^2_x(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C \times \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}} ||e^{-itH}\widehat{\Delta_M(U)}(\tau)e^{-itH}\widehat{\Delta_N(V)}(\sigma)||_{L^2_t([0,1],L^2_x(\mathbb{R}^d))}\ d\tau d\sigma\\
&\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}} ||\widehat{\Delta_M(U)}(\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\widehat{\Delta_N(V)}(\sigma)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\ d\tau d\sigma\\
&\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||<\tau>^b\ \widehat{\Delta_M(U)}(\tau)||_{L^2_\tau(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times ||<\sigma>^b\ \widehat{\Delta_N(V)}(\sigma)||_{L^2_\sigma(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b}} \times ||\Delta_N(v)||_{\overline{X}^{0,b}}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Preuve de la Proposition 2.3.16
On peut supposer que $Supp(\psi) \subset [-1,1]$. On écrit

$$\Delta_M(u(t)) = e^{-itH}e^{itH}\Delta_M(u(t)) = e^{-itH}\Delta_M(U(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}e^{-itH}\widehat{\Delta_M(U)}(\tau)\ d\tau.$$

Par conséquent, si $b > 1/2$, alors par le Théorème 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}
&||\Delta_N(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(u)||_{L^2([0,1],L^2(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C \times \left|\left| \psi(t) \times \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} e^{-i(t+t)H} \widehat{\Delta_M(U)}(\tau)\Delta_N(u_0)\ d\tau \right|\right|_{L^2_t([-1,1],L^2_x(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C \times \int_{\mathbb{R}} ||e^{-itH}\widehat{\Delta_M(U)}(\tau)e^{-itH}\Delta_N(u_0)||_{L^2_t([-1,1],L^2_x(\mathbb{R}^d))}\ d\tau d\sigma\\
&\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times \int_{\mathbb{R}} ||\widehat{\Delta_M(U)}(\tau)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\ d\tau\\
&\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||<\tau>^b\ \widehat{\Delta_M(U)}(\tau)||_{L^2_\tau(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \times ||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq C \times \min(N,M)^{\frac{d-2}{2}} \times \left(\frac{\min(N,M)}{\max(N,M)}\right)^{1/2-\delta} \times ||\Delta_M(u)||_{\overline{X}^{0,b}} \times ||\Delta_N(u_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

2.4 L'argument de point fixe

Dans cette partie, on établit les estimées qui vont nous servir à appliquer un théorème de point fixe. ψ désigne une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et supportée dans $[-2\pi, 2\pi]$.

Proposition 2.4.1 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence de deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$ et tous $N_1 \geq N_2 \geq N_3$,*

$$||\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa}||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}. \tag{2.20}$$

Preuve
Par dualité, il suffit de montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \leq CN_1^{-\kappa}M^{-\delta}||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}.$$

Grâce au Lemme 2.1.23, nous pouvons nous ramener au cas où $M \leq N_1^{1+\delta}$.

Cas $N_3 \leq M \leq N_1^{1+\delta}$ **:**

En utilisant le Théorème 2.3.13, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w)\\
&\leq ||\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_M(w)\Delta_{N_3}(v)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq (N_2N_3)^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{N_1})^{1/2-\delta}(\frac{N_3}{M})^{1/2-\delta}||\Delta_{N_1}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{0,b'}}\\
&\leq (\frac{N_2}{N_1})^{1/2-\delta}(\frac{N_3}{M})^{1/2-\delta}(N_2N_3)^{1/2+\delta-s}(\frac{M}{N_1})^s \times ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq (N_2N_3)^{1-s}M^{-1/2+\delta}N_1^{-1/2+(1+s)\delta} \times ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq M^{-\delta}M^{1/2-s+2\delta}N_1^{1/2-s+(1+s)\delta} \times ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq M^{-\delta}N_1^{1-2s+(3+s)\delta} \times ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}.
\end{aligned}$$

Cas $M \leq N_3$ **:**

En utilisant le Théorème 2.3.13, on établit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w)\\
&\leq ||\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_M(w)\Delta_{N_3}(v)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq (N_2M)^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{N_1})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_3})^{1/2-\delta} \times ||\Delta_{N_1}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{0,b'}}\\
&\leq N_2M(\frac{1}{N_3N_1})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_1N_2N_3})^s \times ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq M^{-\delta}N_2^{1-s}N_3^{1/2+2\delta}(\frac{1}{N_1})^{1/2+s-\delta} \times ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq M^{-\delta}N_1^{1-2s+3\delta} \times ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Proposition 2.4.2 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence de deux constantes $C, \kappa > 0$ telles que si pour un certain $\lambda > 0$, on a pour tout N,*

$$||\Delta_N(e^{itH}u_0)||_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6}$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$ et tous $N_1 \geq N_2 \geq N_3$,

$$||\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa} \times (||v||^3_{\overline{X}^{s,b}} + \lambda^3), \tag{2.21}$$

$$||\Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa} \times (||v||^3_{\overline{X}^{s,b}} + \lambda^3). \tag{2.22}$$

Preuve
On montre (2.21), la preuve de (2.22) étant similaire.
Par dualité, il suffit de montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(w) \leq CN_1^{-\kappa}M^{-\delta} \times (||v||^3_{\overline{X}^{s,b}} + \lambda^3) \times ||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}.$$

Grâce au Lemme 2.1.23, nous pouvons nous ramener au cas où $M \leq N_1^{1+\delta}$.

Cas $N_2 \leq M \leq N_1^{1+\delta}$:

En utilisant le Théorème 2.3.13 et la Proposition 2.1.6, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(w)\\
&\leq ||\Delta_{N_2}(v)\Delta_M(w)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)||_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_{N_1}(v)||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq N_2^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{M})^{1/2-\delta} \times ||\Delta_{N_1}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_3}(e^{itH}u_0)||_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{0,b'}}\\
&\leq N_2^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{M})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_1N_2})^s N_3^{-1/6} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq N_2^{1-s}M^{s-1/2+\delta}N_1^{-s}N_3^{-1/6} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq M^{-\delta}N_2^{1-s}N_1^{-1/2+(3+s)\delta}N_3^{-1/6} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq M^{-\delta}N_1^{1/2-s+(3+s)\delta} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}.
\end{aligned}$$

Cas $M \leq N_2$:

En utilisant le Théorème 2.3.13 et la Proposition 2.1.6, on établit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(v)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_M(w)\\
&\leq ||\Delta_{N_2}(v)\Delta_M(w)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_{N_3}(\psi(t)e^{-itH}u_0)||_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_{N_1}(v)||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq M^{1/2+\delta}(\frac{M}{N_2})^{1/2-\delta} \times ||\Delta_{N_1}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_3}(e^{itH}u_0)||_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{0,b'}}\\
&\leq M^{1/2+\delta}(\frac{M}{N_2})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_1N_2})^s N_3^{-1/6} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq N_2^{-1/2-s+\delta}M^{1+s}N_1^{-s}N_3^{-1/6} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq N_2^{1/2+\delta}N_1^{-s}N_3^{-1/6} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}\\
&\leq M^{-\delta}N_1^{1/2-s+2\delta} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}.
\end{aligned}$$

⊠

Proposition 2.4.3 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que si pour un certain $\lambda > 0$, on a pour tout N,*

$$||\Delta_N(e^{itH}u_0)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6} \ \textit{et} \ || \ [e^{itH}u_0]^2 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],H^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^2$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$,

$$||v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq C(||v||^3_{\overline{X}^{s,b}} + \lambda^3). \tag{2.23}$$

Preuve
En utilisant les Propositions 2.1.8 et 2.1.6, on trouve

$$\begin{aligned}
&||v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0||_{\overline{X}^{s,-b'}}\\
&\leq ||v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0||_{L^{1+\delta}(\mathbb{R},\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq ||v * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0||_{L^{1+\delta}([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq ||v||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \times ||e^{itH}u_0||^2_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}\\
&\qquad + ||v||_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \times || \ [e^{itH}u_0]^2 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq \lambda^2||v||_{\overline{X}^{s,b}} + \lambda^2||v||_{L^2(\mathbb{R},\overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))}\\
&\leq C(||v||^3_{\overline{X}^{s,b}} + \lambda^3).
\end{aligned}$$

⊠

Proposition 2.4.4 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$, on ait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que si pour un certain $\lambda > 0$, on a*

$$|| \ [e^{itH}u_0]^3||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^3$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$,

$$||\psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq C\lambda^3. \tag{2.24}$$

Preuve
En utilisant la Proposition 2.1.8, on établit

$$\begin{aligned} & ||\psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0||_{\overline{X}^{s,-b'}} \\ \leq & ||\psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0 * \psi(t)e^{-itH}u_0||_{L^{1+\delta}(\mathbb{R},\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\ \leq & C|| \ [e^{itH}u_0]^3 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\ \leq & C\lambda^3. \end{aligned}$$

⊠

Proposition 2.4.5 *Il existe $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tous $b > \frac{1}{2}$ et $s \in]\frac{1}{2}, 1[$, on ait l'existence de deux constantes $C > 0$, $\kappa > 0$ et d'un réel $R \in [2, \infty[$ tels que si pour un certain $\lambda > 0$, on a pour tout N,*

$$\left\{ \begin{array}{l} ||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda, \\ ||\Delta_N(e^{itH}u_0)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6}, \\ ||\Delta_N(e^{itH}u_0)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{s-1/4}, \end{array} \right.$$

alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$ et tous $N_1 \geq N_2 \geq N_3$,

$$||\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq CN_1^{-\kappa} \times (\lambda^3 + ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}). \tag{2.25}$$

Preuve
Soit $\delta > 0$ assez petit, fixé par la suite.

Cas $N_1 \geq (N_2N_3)^{\frac{1-s}{1-s-4\delta}}$ **:**

Par dualité, il suffit d'établir

$$\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(\psi(t)e^{itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \leq CN_1^{-\kappa}M^{-\delta} \times ||w||_{\overline{X}^{-s,b'}} \times (\lambda^3 + ||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}).$$

Grâce au Lemme 2.1.23, on peut se ramener au cas où $M \leq N_1^{1+\delta}$.

Si $N_3 \leq M$ alors en utilisant les Théorèmes 2.3.13 et 2.3.14, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \\ \leq & ||\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \\ \leq & (N_2N_3)^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{N_1})^{1/2-\delta}(\frac{N_3}{M})^{1/2-\delta} \times ||\Delta_{N_1}(u_0)||_{L^2}||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{0,b'}} \\ \leq & (N_2N_3)^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{N_1})^{1/2-\delta}(\frac{N_3}{M})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_2N_3})^s \times \lambda||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{s,b}}||\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{s,b}}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ \leq & M^{-\delta}N_1^{-\delta}N_1^{-1+s+4\delta}(N_2N_3)^{1-s} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}} \\ \leq & M^{-\delta}N_1^{-\delta} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}. \end{aligned}$$

Puis, si $N_3 \geq M$, en utilisant les Théorèmes 2.3.13 et 2.3.14, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}*\mathbb{R}^3} \Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w) \\
&\leq ||\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \times ||\Delta_{N_3}(v)\Delta_M(w)||_{L^2(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))} \\
&\leq (N_2M)^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{N_1})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_3})^{1/2-\delta} \times ||\Delta_{N_1}(u_0)||_{L^2}||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{0,b}}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{0,b'}} \\
&\leq (N_2M)^{1/2+\delta}(\frac{N_2}{N_1})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_3})^{1/2-\delta}(\frac{M}{N_2N_3})^s \times \lambda||\Delta_{N_2}(v)||_{\overline{X}^{s,b}}||\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{s,b}}||\Delta_M(w)||_{\overline{X}^{-s,b'}} \\
&\leq M^{-\delta}N_1^{-\delta}N_1^{-1+s+4\delta}(N_2N_3)^{1-s} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}} \\
&\leq M^{-\delta}N_1^{-\delta} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}}||w||_{\overline{X}^{-s,b'}}.
\end{aligned}$$

Cas $N_1 \leq (N_2N_3)^{\frac{1-s}{1-s-4\delta}}$ **:**

En utilisant les Propositions 2.1.8 et 2.1.6, on établit

$$\begin{aligned}
&||\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)||_{\overline{X}^{s,-b'}} \\
&\leq ||\Delta_{N_1}(\psi(t)e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)||_{L^{1+\delta}(\mathbb{R},\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
&\leq ||\Delta_{N_1}(e^{-itH}u_0)\Delta_{N_2}(v)\Delta_{N_3}(v)||_{L^{1+\delta}([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
&\leq ||\Delta_{N_1}(e^{itH}u_0)||_{L^{\frac{(1+\delta)(1+2\delta)}{\delta}}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))}||\Delta_{N_2}(v)||_{L^{2(1+2\delta)}(\mathbb{R},L^8(\mathbb{R}^3))}||\Delta_{N_3}(v)||_{L^{2(1+2\delta)}(\mathbb{R},L^8(\mathbb{R}^3))} \\
&\qquad + ||\Delta_{N_1}(e^{itH}u_0)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}||\Delta_{N_2}(v)||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}||\Delta_{N_3}(v)||_{L^2([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))} \\
&\qquad + ||\Delta_{N_1}(e^{itH}u_0)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}||\Delta_{N_2}(v)||_{L^2([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))}||\Delta_{N_3}(v)||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
&\leq N_1^{s-1/4}(N_2N_3)^{\frac{9}{8}-\frac{1}{1+2\delta}-s}\lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}} + N_1^{-1/6} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}} \\
&\leq (N_2N_3)^{\frac{(1-s)(s-1/4+\delta)}{1-s-4\delta}}(N_2N_3)^{\frac{9}{8}-\frac{1}{1+\delta}-s}N_1^{-\delta} \times \lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}} + N_1^{-1/6}\lambda||v||^2_{\overline{X}^{s,b}},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{(1-s)(s-1/4+\delta)}{1-s-4\delta} + \frac{9}{8} - \frac{1}{1+2\delta} - s &= s - \frac{1}{4} + \delta + \frac{4\delta(s-\frac{1}{4}+\delta)}{1-s-4\delta} + \frac{9}{8} - \frac{1}{1+2\delta} - s \\
&= \frac{7}{8} + \frac{4\delta(s-\frac{1}{4}+\delta)}{1-s-4\delta} - \frac{1}{1+2\delta} \\
&= -\frac{1}{8} + \circ(\delta) < 0.
\end{aligned}$$

Et finalement la proposition est démontrée avec $R = \frac{(1+\delta)(1+2\delta)}{\delta}$. ⊠

Définition 2.4.6 *Soit $\lambda > 0$ et définissons $E_0(\lambda)$ comme l'ensemble des fonctions $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ qui* *vérifient*

$$\begin{cases} ||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda \\ ||\ [e^{itH}u_0]^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^2 \\ ||\ [e^{itH}u_0]^3\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda^3 \\ ||\Delta_N(e^{itH}u_0)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{-1/6}\ ,\ \forall N \\ ||\Delta_N(e^{itH}u_0)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda N^{s-1/4}\ ,\ \forall N \end{cases}$$

où R est fixé par la Proposition 2.4.5.

Théorème 2.4.7 *Soient $\frac{1}{2} < s < 1$ et $K \in \{-1,1\}$ alors il existe une constante $C > 0$ et un réel $b > 1/2$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}$,*

$$\left|\left|\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}\psi(s)K\cos(2s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+v|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v)\ ds\right|\right|_{\overline{X}^{s,b}} \leq C\times(\lambda^3+||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}).$$

Preuve
Pour tout $b > \frac{1}{2}$, en utilisant les Propositions 2.1.9 et 2.1.10, on trouve

$$\begin{aligned} &||\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+v|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v)\ ds||_{\overline{X}^{s,b}} \\ \leq\ & C||\ K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+v|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v)||_{\overline{X}^{s,b-1}} \\ \leq\ & C||\ |\psi(s)e^{-isH}u_0+v|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v)||_{\overline{X}^{s,b-1}}. \end{aligned}$$

Puis en utilisant (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), on établit l'existence d'un entier $b' < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $u_0 \in E_0(\lambda)$,

$$||\ |\psi(s)e^{-isH}u_0+v|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v)||_{\overline{X}^{s,-b'}} \leq C(\lambda^3+||v||^3_{\overline{X}^{s,b}}).$$

Il suffit alors de choisir $b = 1-b' > \frac{1}{2}$ et la proposition est démontrée. ⊠

Théorème 2.4.8 *Soient $\frac{1}{2} < s < 1$ et $K \in \{-1,1\}$ alors il existe une constante $C > 0$ et un réel $b > 1/2$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors pour tout $v \in \overline{X}^{s,b}_T$,*

$$\left|\left|\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)\ |\psi(s)e^{-isH}u_0+v|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v)\ ds\right|\right|_{\overline{X}^{s,b}_T} \leq C(\lambda^3+||v||^3_{\overline{X}^{s,b}_T}).$$

Preuve
Soit $w \in \overline{X}^{s,b}$ telle que $w|_{[-T,T]} = v$ alors

$$\begin{aligned} &||\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+v|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v)\ ds||_{\overline{X}^{s,b}_T} \\ \leq\ & ||\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+w|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+w)\ ds||_{\overline{X}^{s,b}} \\ \leq\ & C(\lambda^3+||w||^3_{\overline{X}^{s,b}}) \text{ pour tout } w. \end{aligned}$$

Puis le théorème est démontré par définition de la borne inférieure. ⊠

De manière similaire, on pourrait démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.4.9 *Soient* $\frac{1}{2} < s < 1$ *et* $K \in \{-1, 1\}$ *alors il existe une constante* $C > 0$ *et un réel* $b > 1/2$ *tels que si* $u_0 \in E_0(\lambda)$ *avec* $\lambda > 0$, *alors pour tous* $v_1, v_2 \in \overline{X}_T^{s,b}$,

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\Bigg|\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+v_1|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v_1)\;ds\\
&\qquad -\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+v_2|^2\times(\psi(s)e^{-isH}u_0+v_2)\;ds\Bigg|\Bigg|_{\overline{X}_T^{s,b}}\\
&\leq\; C||v_1-v_2||_{\overline{X}_T^{s,b}}\times(\lambda^2+||v_1||^2_{\overline{X}_T^{s,b}}+||v_2||^2_{\overline{X}_T^{s,b}}).
\end{aligned}$$

2.5 Solutions globales pour l'équation (NLS)

Dans cette partie, on applique un théorème de point fixe pour établir l'existence de solutions globales pour l'équation (NLS). On démontre également l'unicité des solutions, ainsi que quelques propriétés qu'elles vérifient comme le scattering.
Commençons par établir l'existence, pour cela considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}-Hu=K\cos(2t)|u|^2u,\\ \quad u(0,x)=u_0(x). \end{cases} \tag{NLSH}$$

Théorème 2.5.1 *Soit* $\frac{1}{2} < s < 1$ *alors il existe une constante* $C > 0$ *et un réel* $b > 1/2$ *tels que si* $u_0 \in E_0(\lambda)$ *avec* $\lambda < \frac{1}{2\sqrt{C}}$ *alors il existe unique solution à l'équation (NLSH) avec donnée initiale* u_0 *dans l'espace* $e^{-itH}u_0 + B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{C}})$.

Preuve
On définit

$$L : v \to -i\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0+v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0+v(s))\;ds,$$

$u = e^{-itH}u_0 + v$ est l'unique solution de (NLSH) dans l'espace $e^{-itH}u_0 + B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, R)$ si et seulement v est l'unique point fixe de L dans l'espace $B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, R)$.

Selon les Théorèmes 2.4.8 et 2.4.9, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
&||L(v)||_{\overline{X}_T^{s,b}} \leq C(\lambda^3+||v||^3_{\overline{X}_T^{s,b}}),\\
&||L(v_1)-L(v_2)||_{\overline{X}_T^{s,b}} \leq C||v_1-v_2||_{\overline{X}_T^{s,b}}(\lambda^2+||v_1||^2_{\overline{X}_T^{s,b}}+||v_2||^2_{\overline{X}_T^{s,b}}).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda < \frac{1}{2\sqrt{C}}$ alors L est une application contractante de l'espace complet $B_{\overline{X}_T^{s,b}}(0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{C}})$ et admet donc un unique point fixe. ⊠

Théorème 2.5.2 *Soit $\frac{1}{2} < s < 1$ alors il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda < \frac{1}{2\sqrt{C}}$ alors il existe une unique solution globale à l'équation (NLS) avec donnée initiale u_0 dans l'espace $e^{it\Delta}u_0 + B_{X^s}(0, \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{C}})$.*
La constante C est donnée par les Théorèmes 2.4.8 et 2.4.9 et la constante c par la Proposition 2.1.17.

Preuve
Soit u donnée par le Théorème 2.5.1 et définissons

$$\tilde{u}(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{3/2} \times u\left(\frac{1}{2}\arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right) \times e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}}.$$

D'après le Théorème 2.1.14, comme u est solution de (NLSH) sur $]-T,T[$ alors $\tilde{u}$ est solution globale de (NLS).

Ainsi, pour obtenir le théorème, il suffit de remarquer que

$$(e^{it\Delta}u_0)(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^{3/2} \times (e^{-itH}u_0)\left(\frac{1}{2}\arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}}\right) \times e^{\frac{ix^2t}{1+4t^2}},$$

et d'utiliser la Proposition 2.1.17. ⊠

L'existence de solutions étant prouvée, on démontre ensuite que les solutions sont uniques.

Théorème 2.5.3 *Soient $\frac{1}{2} < s < 1$ et $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors si $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ sont deux solutions de (NLS) de l'espace $e^{it\Delta}u_0 + X^s$, alors*

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \text{ dans } C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$$

Preuve
Il suffit de montrer que $\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t)$ pour $t \geq 0$ (on remarque que $x_i(t) := \tilde{u}_i(-t)$ vérifie $i\frac{\partial x_i}{\partial t} - \Delta x_i = -K|x_i|^2 x_i$ et on pourra faire la même preuve pour obtenir que $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t \geq 0$, c'est à dire $\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t)$ pour $t \leq 0$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\partial_t ||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= 2\Re\left(< \partial_t(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) >_{L^2(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)}\right) \\
&\leq 2| < |\tilde{u}_1(t)|^2\tilde{u}_1(t) - |\tilde{u}_2(t)|^2\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) >_{L^2(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)} | \\
&\leq 2||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \times || \, |\tilde{u}_1(t)|^2\tilde{u}_1(t) - |\tilde{u}_2(t)|^2\tilde{u}_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq 4||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \times (||\tilde{u}_1(t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||\tilde{u}_2(t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}).
\end{aligned}$$

Par le Lemme de Grönwall, le théorème est démontré si $||\tilde{u}_1(t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||\tilde{u}_2(t)||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ car $||\tilde{u}_1(0) - \tilde{u}_2(0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$.

Le théorème est donc clair puisque grâce à la Proposition 2.1.15,

$$\begin{aligned}
||\tilde{u}_i||_{L^2(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3))} &\leq ||e^{it\Delta}u_0||_{L^2(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3))} + ||\tilde{v}_i||_{L^2(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3))} \\
&\leq C(||e^{itH}u_0||_{L^4([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^3))} + ||\tilde{v}_i||_{X^s}) \\
&\leq C(\lambda + ||\tilde{v}_i||_{X^s}).
\end{aligned}$$

⊠

On prouve ensuite que les solutions construites diffusent en ∞ et $-\infty$.

Théorème 2.5.4 *Soit $\tilde{u}$ l'unique solution de (NLS) construite dans le Théorème 2.5.2, alors il existe $L^+ \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ deux fonctions telles que*

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Preuve
On a montré que

$$-i\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s))\ ds \in \overline{X}_T^{s,b}.$$

Ainsi, par le Lemme 2.1.12,

$$-ie^{-itH}\int_0^t e^{isH}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s))\ ds \in C^0([-T,T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)).$$

Et donc, il existe une fonction $L \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to T} || - ie^{-itH}\int_0^t e^{isH}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s))\ ds - L||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
&= \lim_{t\to T} || - i\int_0^t e^{isH}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s))\ ds - e^{itH}L||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \\
&= \lim_{t\to T} || - i\int_0^t e^{isH}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s))\ ds - e^{iTH}L||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}.
\end{aligned}$$

Or, pour $t \in [-T, T]$,

$$u(t) = e^{-itH}u_0 - ie^{-itH}\int_0^t e^{isH}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s))\ ds.$$

Donc, par le Lemme 2.1.18, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= e^{it\Delta}u_0 + e^{it\Delta}\left[-i\int_0^{\frac{1}{2}\arctan 2t} e^{isH}K\cos(2s)\psi(s)|\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0 + v(s))\ ds\right] \\
&= e^{it\Delta}u_0 + e^{it\Delta}F(t),
\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{t\to\infty} ||F(t) - e^{iTH}L||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Et le théorème est démontré avec

$$L^+ = e^{iTH}L \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3),$$

car

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} ||e^{it\Delta}F(t) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^3)} &= \lim_{t\to\infty} ||F(t) - L^+||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \lim_{t\to\infty} ||F(t) - L^+||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} = 0.\end{aligned}$$

⊠

Enfin, pour conclure cette partie, on démontre que le flot de l'équation est lipschitzien en un certain sens.

Théorème 2.5.5 *Soient $u_0^1, u_0^2 \in E_0(\lambda)$ avec λ donné par le Théorème 2.5.2 et soient $\tilde{u_1}, \tilde{u_2}$ les solutions de (NLS), alors il existe une constante $C_\lambda > 0$ telle que*

$$||\tilde{u_1} - \tilde{u_2}||_{X^0} \leq C_\lambda ||u_0^1 - u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Preuve
Grâce à la Proposition 2.1.16, il suffit d'établir que

$$||u_1 - u_2||_{\overline{X}_T^0} \leq C_\lambda ||u_0^1 - u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned}&u_1(t) - u_2(t) = e^{-itH}(u_0^1 - u_0^2) - i\psi(t)\int_0^t e^{-i(t-s)H}\psi(s)K\cos 2s \\ &\times (|\psi(s)e^{-isH}u_0^1 + v_1(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0^1 + v_1(s)) - |\psi(s)e^{-isH}u_0^2 + v_2(s)|^2(\psi(s)e^{-isH}u_0^2 + v_2(s)))ds.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les estimées de Strichartz et par la Proposition 2.1.6, le fait que

$$||v_i||_{L^2([T,T],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq ||v_i||_{L^2([-T,T],\overline{W}^{s,6}(\mathbb{R}^3))} \leq C||v_i||_{\overline{X}_T^{s,b}} \leq C\lambda,$$

on obtient

$$\begin{aligned}||u_1 - u_2||_{\overline{X}_T^0} &\leq C(||u_0^1 - u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||v_1 - v_2||_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbb{R}^3))}) \\ &\qquad \times \left(1 + \sum_{j=1,2} ||e^{itH}u_0^j||^2_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} + ||v_j||^2_{L^2([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^3))}\right) \\ &\leq C\lambda^2(||u_0^1 - u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||v_1 - v_2||_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbb{R}^3))}).\end{aligned}$$

Ainsi, pour prouver le résultat, il suffit de montrer que

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C||u_0^1 - u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Mais comme

$$i\partial_t v_i - Hv_i = K\cos 2t|e^{-itH}u_0^i + v_i|^2 * (e^{-itH}u_0^i + v_i),$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
&\partial_t ||v_1(t)-v_2(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= 2\Re\left(\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t(v_1(t)-v_2(t)) \ . \ \overline{v_1(t)-v_2(t)}\right) \\
&= 2\Re(-iK\cos 2t * \int_{\mathbb{R}^3} (|e^{-itH}u_0^1+v_1|^2(e^{-itH}u_0^1+v_1) \\
&\qquad\qquad - |e^{-itH}u_0^2+v_2|^2(e^{-itH}u_0^2+v_2)) \ . \ \overline{v_1(t)-v_2(t)}\ dx) \\
&\le ||v_1(t)-v_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad \times ||\ |e^{-itH}u_0^1+v_1(t)|^2 * (e^{-itH}u_0^1+v_1(t)) - |e^{-itH}u_0^2+v_2(t)|^2 * (e^{-itH}u_0^2+v_2(t))\ ||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\le ||v_1(t)-v_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \times (||v_1(t)-v_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||u_0^1-u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \\
&\qquad \times \left(\sum_{j=1,2} ||e^{itH}u_0^j||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||v_j||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a établi

$$\begin{aligned}
\partial_t ||v_1(t)-v_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\le (||v_1(t)-v_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||u_0^1-u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \\
&\qquad \times \left(\sum_{j=1,2} ||e^{itH}u_0^j||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||v_j||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le Lemme de Grönwall, on obtient

$$\begin{aligned}
||v_1-v_2||_{L^\infty([0,T,]L^2(\mathbb{R}^3))} &\le C||u_0^1-u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad \times e^{\sum_{j=1,2} ||e^{itH}u_0^j||^2_{L^2([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} + ||v_j||^2_{L^2([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^3))}} \\
&\le Ce^{C\lambda^2} \times ||u_0^1-u_0^2||_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

⊠

2.6 Estimation de la régularité de la donnée initiale aléatoire

Dans cette partie, on estime la régularité de la donnée aléatoire en démontrant des estimées de types grandes déviations. En particulier, on établit que $u_0^\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_0(n)$ ω presque surement. On supposera que $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ car dans ce dernier cas, il suffira de remplacer u_0 par $\epsilon * u_0$ pour revenir au cas où $\frac{g_n}{\epsilon} \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

On définit pour $t>0$,

$$\begin{aligned}
\Omega_t = \Big(&\omega \in \Omega / ||u_0^\omega||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le t, ||\ [e^{itH}u_0^\omega]^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \le t^2\ , ||\ [e^{itH}u_0^\omega]^3\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \le t^3, \\
&\bigcap_N ||\Delta_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \le tN^{-1/6},\ \bigcap_N ||\Delta_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \le tN^{s-1/4}\Big),
\end{aligned}$$

et l'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.6.1 *Il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$ et tout $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$,*

$$P(\Omega_t^c) \leq Ce^{-\frac{ct^2}{||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}}. \tag{2.26}$$

On commence par établir des inégalités de types chaos de Wiener dans le cas où $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Pour cela, on introduit deux définitions et on démontre 3 lemmes préliminaires.

Définition 2.6.2 *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit*

$$\mathcal{A}_{2p} = \left\{\sigma \in \mathcal{S}_{2p} \ / \ \sigma^2 = Id \ et \ \sigma(i) \neq i, \ \forall i\{1,..,2p\}\right\},$$

et pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{A}_{2p}$, on pose

$$\mathcal{I}(\sigma, p) = \{i \in \{1, ..., p\} \ / \ \sigma(2i) = 2i - 1\}.$$

Lemme 2.6.3 *Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$ une suite de variables indépendantes telles que $E(X_i^{2k+1}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors pour tout 2p-upplet $(n_1, ...n_{2p}) \in \mathbb{N}^{2p}$,*
si $E(X_{n_1} \times ... \times X_{n_{2p}}) \neq 0$ alors il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{A}_{2p}$ telle que $n_{\sigma(i)} = n_i, \ \forall i \in \{1,..,2p\}$.

Preuve Le lemme se démontre facilement par récurrence sur p. ⊠

Lemme 2.6.4 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$Card(\mathcal{A}_{2p}) \leq (Cp)^p.$$

Preuve
Il suffit d'utiliser la formule de Sterling. En effet, on a

$$Card(\mathcal{A}_{2p}) = (2p-1) \times .... \times 3 \times 1 = \frac{(2p)!}{2^p.p!} \leq (Cp)^p.$$

⊠

Définition 2.6.5 *On définit*

$$l^2 = \left\{c = (c_{n,m})_{n,m} \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \ / \ ||c||_{l^2} := \sqrt{\sum_{m,n} |c_{m,n}|^2} < \infty\right\},$$

et

$$\tilde{l}^1 = \left\{c = (c_{n,m})_{n,m} \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \ / \ ||c||_{\tilde{l}^1} := \sum_n |c_{n,n}| < \infty\right\}.$$

Lemme 2.6.6 *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, toute permutation $\sigma \in \mathcal{A}_{2p}$ et toutes suites $c^1, c^2, ...c^p$ dans $\tilde{l}^1 \cap l^2$,*

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \;...\; |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| \leq \prod_{\substack{i=1,\\ i\in\mathcal{I}(\sigma,p)}}^{p} ||c^i||_{\tilde{l}^1} \;\times\; \prod_{\substack{i=1,\\ i\notin\mathcal{I}(\sigma,p)}}^{p} ||c^i||_{l^2}$$
$$\leq \prod_{i=1}^{p} \left(\; ||c^i||_{\tilde{l}^1} + ||c^i||_{l^2} \right).$$

Preuve
La seconde inégalité est triviale à partir de la première. On démontre cette dernière par récurrence sur p. Les cas $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$ sont clairs. Soit $p \geq 4$ et supposons le résultat établi pour $q \in \{1, ..., p-1\}$.

-Cas $\mathcal{I}(\sigma, p) \neq \varnothing$.
Si $p \in \mathcal{I}(\sigma, p)$ alors il existe une permutation $\sigma' = \sigma|_{\{1,...,2(p-1)\}} \in \mathcal{A}_{2(p-1)}$ telle que

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \;...\; |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| = \left(\sum_{\substack{n_1,...,n_{2(p-1)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \;...\; |c^{p-1}_{n_{2p-3},n_{2p-2}}| \right) \times ||c^p||_{\tilde{l}^1}.$$

et le résultat est prouvé par récurrence en remarquant que $\mathcal{I}(\sigma', p-1) = \mathcal{I}(\sigma, p) \setminus \{p\}$.
Sinon $p \notin \mathcal{I}(\sigma, p)$ et il existe un entier $i \in \{1, ..., p-1\}$ tel que $i \in \mathcal{I}(\sigma, p)$.
Dans cette situation, posons

$$\begin{array}{rccccl} \gamma : & \{1,...,2p\} \setminus \{2i-1, 2i\} & \to & \{1,...,2p-2\} & & \\ & k & \mapsto & k & & \text{si } k \notin \{2p-1, 2p\}, \\ & 2p-1 & \mapsto & 2i-1, & & \\ & 2p & \mapsto & 2i, & & \end{array}$$

$\tau = \sigma|_{\{1,...,2p\}\setminus\{2i-1,2i\}}$ et $\sigma' = \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$ pour obtenir que

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \;...\; |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| = \left(\sum_{\substack{n_1,...,n_{2(p-1)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \;...\cancel{|c^i_{n,n}|}...|c^{p-1}_{n_{2p-3},n_{2p-2}}| \; |c^p_{n_{2i-1},n_{2i}}| \right) \times ||c^i||_{\tilde{l}^1}.$$

Remarquons que $\sigma' \in \mathcal{A}_{2(p-1)}$ et que $\mathcal{I}(\sigma', p-1) = \mathcal{I}(\sigma, p) \setminus \{i\}$. Ainsi, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $c^1 = c^1, ..., c^i = c^p, ..., c^{p-1} = c^{p-1}$ et le résultat suit.

Cas $\mathcal{I}(\sigma, p) = \varnothing$:
Nous devons prouver que

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \;...\; |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| \leq \prod_{i=1}^{p} ||c^i||_{l^2}.$$

Ainsi, on remarque que le rôle des c^i est symétrique et qu'il est donc possible d'intervertir leurs positions. Par conséquent, il est possible de supposer que $\sigma(2p) = 2p-2$ et $\sigma(2p-1) = 2p-3$ ou $2p-4$.

Sous-cas $\sigma(2p) = 2p-2$ et $\sigma(2p-1) = 2p-3$:
Il existe une permuation $\sigma' = \sigma|_{\{1,...,2(p-2)\}} \in \mathcal{A}_{2(p-2)}$ telle que

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| = \left(\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2(p-2)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^{p-2}_{n_{2p-3},n_{2p-2}}| \right) \times \sum_{n,k} c^{p-1}_{n,k} c^p_{n,k}.$$

Puis, il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse de récurrence pour prouver le résultat.

Sous-cas $\sigma(2p) = 2p-2$ et $\sigma(2p-1) = 2p-4$:
Posons $\tau = \sigma|_{\{1,..,2p-5\}\cup\{2p-3\}}$,

$$\begin{array}{cccc} \gamma: & \{1,...,2(p-2)\} & \to & \{1,..,2p-5\} \cup \{2p-3\} \\ & k & \mapsto & k \text{ si } k \in \{1,...,2p-5\}, \\ & 2p-4 & \mapsto & 2p-3, \end{array}$$

et $\sigma' = \gamma^{-1} \circ \tau \circ \gamma \in \mathcal{A}_{2(p-2)}$.
Comme $2p-4 = \sigma'(2p-4) \Leftrightarrow 2p-3 = \sigma(2p-3)$ et $\sigma' = \sigma$ sur $\{1,...,2p-5\}$, alors

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2(p-2)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} \sum_{n,m} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^{p-2}_{n_{2p-5},m}| \, |c^{p-1}_{n_{2p-4},n}| \, |c^p_{m,n}|.$$

Puis, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sum_{n,m} |c^{p-2}_{n_{2p-5},m}| \, |c^{p-1}_{n_{2p-4},n}| \, |c^p_{m,n}| \leq \sqrt{\sum_m |c^{p-2}_{n_{2p-5},m}|^2 . \sum_n |c^{p-1}_{n_{2p-4},n}|^2} \times ||c^p||_{l^2},$$

pour ensuite appliquer l'hypothèse de récurrence à $p-2$, $\sigma' \in \mathcal{A}_{2(p-2)}$ et $c^1 = c^1, ..., c^{p-3} = c^{p-3}$ et

$$\tilde{c}^{p-2}_{k,l} = \sqrt{\sum_m |c^{p-2}_{k,m}|^2 \times \sum_n |c^{p-1}_{l,n}|^2}.$$

Il est important de remarquer qu'il n'est pas clair que $\mathcal{I}(\sigma', p-2) = \varnothing$ et qu'il est possible que $p-2 \in \mathcal{I}(\sigma', p-2)$. On obtient alors

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| \leq \prod_{i=1}^{p-3} ||c^i||_{l^2} \times ||\tilde{c}^{p-2}||_{l^?_i} \times ||c^p||_{l^2},$$

où $l_i^?$ désigne la norme l^2 ou $\tilde{l}^1$.

Finalement, pour conclure, on note que

$$||\tilde{c}^{p-2}||_{l^2} = ||\sqrt{\sum_m |c_{k,m}^{p-2}|^2 \times \sum_n |c_{l,n}^{p-1}|^2}||_{l^2} = ||c^{p-2}||_{l^2} \times ||c^{p-1}||_{l^2},$$

et par l'inégalité de Cauchy Schwarz que

$$||\tilde{c}^{p-2}||_{\tilde{l}^1} = ||\sqrt{\sum_m |c_{k,m}^{p-2}|^2 . \sum_n |c_{l,n}^{p-1}|^2}||_{\tilde{l}^1} \leq ||c^{p-2}||_{l^2} \times ||c^{p-1}||_{l^2}.$$

Ce qui achève la récurrence. ⊠

Maintenant, grâce aux Lemmes 2.6.3, 2.6.4 et 2.6.6, on peut démontrer les estimées du chaos de Wiener qui nous serviront à estimer $P(\Omega_t^c)$.

Proposition 2.6.7 *Supposons que $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \geq 2$ et toutes suites $(c_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$, $(c_{n,m})_{n,m} \in l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et $(c_{n,m,k})_{n,m,k} \in l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$,*

$$\Big\|\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \times g_n(\omega)\Big\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2}, \tag{2.27}$$

$$\Big\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \Big\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q \times \left(\sqrt{\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + L \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \right), \tag{2.28}$$

$$\Big\| \sum_{n,m,k \in \mathbb{N}} c_{n,m,k} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times g_k(\omega) \Big\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{3}{2}} \times \Bigg(\sqrt{\sum_{n,m,k \in \mathbb{N}} |c_{n,m,k}|^2} + \tag{2.29}$$

$$+ L \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{N}} |c_{n,n,m}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{N}} |c_{n,m,n}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{N}} |c_{m,n,n}|^2} \right) \Bigg),$$

où

$$L = \begin{cases} 0 \text{ dans le cas Gaussien complexe,} \\ 1 \text{ dans le cas Bernoulli (ou Gaussien réel).} \end{cases}$$

Preuve
1- Dans [BT2], il est montré que si

$$\exists \delta > 0 / \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \ E(e^{\alpha g_n}) \leq e^{\delta \alpha^2}, \tag{2.30}$$

alors (2.27) est satisfait. Ainsi, (2.27) est vérifié puisque (2.30) est satisfait si $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ ou $g_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

2- Pour le cas Gaussien, d'après [TT], Proposition 2.4 (Wiener chaos estimates), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \geq 2$,

$$\Big\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \Big\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q \times \Big\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \Big\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.31}$$

Or

$$\begin{aligned} & \Big\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \\ = & \sum_{n,n',m,m' \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times \overline{c_{n',m'}} \times E\left(g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times \overline{g_{n'}(\omega) \times g_{m'}(\omega)}\right) \\ \leq & \sum_{n=n'=m=m' \in \mathbb{N}} |\ | + \sum_{n=n',m=m' \in \mathbb{N}} |\ | + \sum_{n=m,n'=m' \in \mathbb{N}} |\ | + \sum_{n=m',n'=m \in \mathbb{N}} |\ |. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} & \sum_{n=n'=m=m' \in \mathbb{N}} \left| c_{n,m} \times \overline{c_{n',m'}} \times E\left(g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times \overline{g_{n'}(\omega) \times g_{m'}(\omega)}\right) \right| \\ = & \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}|^2 E(|g_n(\omega)|^4) \\ \leq & \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2, \end{aligned}$$

et en utilisant que $E(g_n(\omega)^2) = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m,n'=m' \in \mathbb{N}} \left| c_{n,m} \times \overline{c_{n',m'}} \times E\left(g_n(\omega) \times g_m(\omega) \times \overline{g_{n'}(\omega) \times g_{m'}(\omega)}\right) \right| \\ = & \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \times |c_{m,m}| \times \left| E\left(g_n(\omega)^2 \times \overline{g_m(\omega)^2}\right) \right| \\ = & \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}|^2 \times E\left(|g_n(\omega)|^4\right) \\ \leq & \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2. \end{aligned}$$

Ainsi (2.28) est démontré dans le cas $g_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$. Nous pouvons procéder de la même manière pour obtenir (2.29) puisque l'inégalité (2.31) est vraie pour un produit quelconque de variables aléatoires.

3- Dans le cas Bernoulli, démontrons (2.28). Nous pouvons limiter la preuve au cas où $q = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Il suffit alors de montrer que

$$\Big\| \sum_{n,m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \Big\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \leq (Cp)^{2p} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{n,n}| \right)^{2p}.$$

Nous pouvons utiliser successivement les Lemmes 2.6.3, 2.6.6 et 2.6.4 pour obtenir

$$\begin{aligned}
\Big|\Big| \sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \Big|\Big|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} &= \sum_{n_1,\ldots,n_{4p}} c_{n_1,n_2}\ldots c_{n_{2p-1},n_{2p}}.\overline{c_{n_{2p+1},n_{2p+2}}}\ldots\overline{c_{n_{4p-1},n_{4p}}} \times E\left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i}\right)\\
&\leq \sum_{n_1,\ldots,n_{4p}} |c_{n_1,n_2}|\ldots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}| \times \left|E\left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i}\right)\right|\\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{4p}} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{4p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1,n_2}|\ldots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}|\\
&\leq Card(\mathcal{A}_{4p}) \times \left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{n,n}|\right)^{2p}\\
&\leq (Cp)^{2p} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{n,n}|\right)^{2p}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre (2.28). Pour obtenir (2.29), on peut remarquer que le Lemme 2.6.6 reste vrai pour un produit de 3 variables aléatoires (il suffit de faire la preuve avec des suites de 3 variables). On peut aussi regarder le Théorème 4.2.3 du chapitre 4. ⊠

Remarque
La preuve dans le cas Bernoulli peut être facilement adaptée au cas de variables aléatoires vérifiant l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$,

$$E(|g_n|^p) \leq C^p.$$

On peut maintenant passer à la démonstration du Théorème 2.6.1. On remarque que

$$\begin{aligned}
P(\Omega_t^c) &\leq P\left(\omega\in\Omega/||u_0^\omega||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \geq t\right)\\
&+ P\left(\omega\in\Omega/||\ [e^{itH}u_0^\omega]^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \geq t^2\right)\\
&+ P\left(\omega\in\Omega/||\ [e^{itH}u_0^\omega]^3\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \geq t^3\right)\\
&+ P\left(\bigcup_N \left\{\omega\in\Omega/||\Delta_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6}\right\}\right)\\
&+ P\left(\bigcup_N \left\{\omega\in\Omega/||\Delta_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{s-1/4}\right\}\right)
\end{aligned}$$

ainsi il suffit d'établir la majoration (2.26) pour chacun des termes. Effectuons la démonstration pour le second et le quatrième terme (pour les autres termes, la démarche est identique).

I/ Cas $||\ [e^{itH}u_0^\omega]^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \geq t^2$ **:**

Comme $s \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\sigma[$, il suffit d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 2.6.8 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe 2 constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$ et $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$,*

$$P\left(\omega \in \Omega / \| \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2\right) \leq C e^{-\frac{ct^2}{\|u_0\|^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}}.$$

Preuve du Lemme 2.6.8
Remarquons qu'il suffit d'obtenir l'estimation pour $t \geq C\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}$.
Grâce aux inégalités de Markov et Minkowski, on obtient pour $q \geq 4$,

$$\begin{aligned}
&P\left(\omega \in \Omega / \| \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2\right) \\
&\leq P\left(\omega \in \Omega / \| \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|^q_{L^4([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3))} \geq t^{2q}\right) \\
&\leq t^{-2q} \times E_\omega\left(\| \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|^q_{L^4([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3))}\right) \\
&\leq t^{-2q} \times \| \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|^q_{L^q(\Omega,L^4([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3)))} \\
&\leq t^{-2q} \times \| \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|^q_{L^4([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3,L^q(\Omega)))}.
\end{aligned}$$

Puis, par (2.28), on établit

$$\begin{aligned}
&\| \, H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \left\| \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \left[\sum_{n,m\in\mathbb{N}} e^{it(\lambda_n^2+\lambda_m^2)} c_n c_m h_n(x) h_m(x) g_n(\omega) g_m(\omega)\right] \; \right\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \left\| \sum_{n,m\in\mathbb{N}} e^{it(\lambda_n^2+\lambda_m^2)} c_n c_m \times H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [h_n(x)h_m(x)] \times g_n(\omega) g_m(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C \times q \times \left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_n|^2 |c_m|^2 | \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [h_n(x)h_m(x)] \; |^2} + L \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 |H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [h_n^2(x)]|\right).
\end{aligned}$$

Prenons $L = 0$ pour simplifier les calculs (le terme avec L=1 s'estime de la même façon). Par l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\begin{aligned}
&P\left(\omega \in \Omega / \| \, [e^{itH} u_0^\omega]^2 \, \|_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2\right) \\
&\leq \left(\frac{Cq}{t^2}\right)^q \times \left(\left\| \sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \times |c_m|^2 \times | \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [h_n(x)h_m(x)] \; |^2 \right\|_{L^2([-2\pi,2\pi],L^1(\mathbb{R}^3))}\right)^{q/2} \\
&\leq \left(\frac{Cq}{t^2}\right)^q \times \left(\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \times |c_m|^2 \times \| \; H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \, [h_n(x)h_m(x)] \; \|^2_{L^4([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3))}\right)^{q/2}.
\end{aligned}$$

Puis grâce à la Proposition 2.1.21 avec $\delta = \epsilon$, on arrive à

$$|| \ H^{\sigma/2+1/4-\epsilon} \ [h_n(x)h_m(x)] \ ||^2_{L^4([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C_\epsilon \times \max(\lambda_n,\lambda_m)^{2(\sigma-\epsilon)} \leq C \times \max(\lambda_n,\lambda_m)^{2\sigma}.$$

Et finalement, on a

$$\begin{aligned}
& P\left(\omega \in \Omega / || \ [e^{itH}u_0^\omega]^2 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/2-2\epsilon}(\mathbb{R}^3))} \geq t^2\right) \\
\leq & \left(\frac{Cq}{t^2}\right)^q \times \left(\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \times |c_m|^2 \times \max(\lambda_n,\lambda_m)^{2\sigma}\right)^{q/2} \\
\leq & \left(\frac{Cq||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}{t^2}\right)^q .
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de choisir $q = \frac{t^2}{2C||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}} \geq 4$ pour conclure . ⊠

II/ Cas $||\Delta_N[e^{itH}u_0^\omega]||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \geq N^{-1/6}t$ **:**
Commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 2.6.9 *Pour tous* $p_1, p_2 \in [2,\infty[$ *et* $\epsilon > 0$*, il existe deux constantes* $C, c > 0$ *telles que pour tous* $t > 0$*,* $N \geq 1$ *et* $u_0 \in \overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)$,

$$P\left(\omega \in \Omega / ||\Delta_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi],W^{\epsilon,p_2}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right) \leq Ce^{-\frac{ct^2}{||\Delta_N(u_0)||^2_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}}}.$$

Preuve du Lemme 2.6.9
Quitte à remplacer u_0 par $\Delta_N(u_0)$, on se ramène à démontrer que

$$P\left(\omega \in \Omega / ||\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi],W^{\epsilon,p_2}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right) \leq Ce^{-\frac{ct^2}{||u_0||^2_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}}}.$$

Comme pour le Lemme 2.6.8, il suffit de prouver l'estimation pour $t \geq C||u_0||_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}$.

Grâce aux inégalités de Markov et Minkowski, on obtient pour $q \geq p_1, p_2$,

$$\begin{aligned}
& P\left(\omega \in \Omega / ||\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi],W^{\epsilon,p_2}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right) \\
\leq & \left(\frac{N^{1/6+\sigma-2\epsilon} \times E_\omega(||\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi],W^{\epsilon,p_2}(\mathbb{R}^3))})}{t}\right)^q \\
\leq & \left(\frac{N^{1/6+\sigma-2\epsilon}}{t}\right)^q \times ||H^{\epsilon/2}\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||^q_{L^q(\Omega),L^{p_1}([-2\pi,2\pi]),L^{p_2}(\mathbb{R}^3)} \\
\leq & \left(\frac{N^{1/6+\sigma-2\epsilon}}{t}\right)^q \times ||H^{\epsilon/2}\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||^q_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi]),L^{p_2}(\mathbb{R}^3),L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or, d'après (2.27),

$$
\begin{aligned}
||H^{\epsilon/2}\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^q(\Omega)} &\leq \left|\left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^\epsilon e^{it\lambda_n^2}c_nh_n(x)g_n(\omega)\right|\right|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \left|\left| \sum_{\lambda_n\sim N} \phi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^\epsilon e^{it\lambda_n^2}c_nh_n(x)g_n(\omega)\right|\right|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C\times\sqrt{q}\times\sqrt{\sum_{\lambda_n\sim N}\phi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^{2\epsilon}\times|c_n|^2\times|h_n(x)|^2}.
\end{aligned}
$$

Alors, par (2.4) et (2.5), on trouve

$$
\begin{aligned}
&||H^{\epsilon/2}\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi]),L^{p_2}(\mathbb{R}^3),L^q(\Omega)} \\
&\leq C\times\sqrt{q}\times\left|\left|\sum_{\lambda_n\sim N}\phi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\times\lambda_n^{2\epsilon}\times|c_n|^2\times|h_n(x)|^2\right|\right|^{1/2}_{L^{p_1/2}([-2\pi,2\pi]),L^{p_2/2}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C\times\sqrt{q}\times\sqrt{\sum_{\lambda_n\sim N}\phi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\times\lambda_n^{2\epsilon}\times|c_n|^2\times||h_n(x)||^2_{L^{p_2}(\mathbb{R}^3)}} \\
&\leq C\times\sqrt{q}\times\sqrt{\sum_{\lambda_n\sim N}\phi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\times\lambda_n^{2\epsilon-1/3}\times|c_n|^2} \\
&\leq C\times\sqrt{q}\times N^{-\sigma-1/6+2\epsilon}\times\sqrt{\sum_{\lambda_n\sim N}\phi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\times\lambda_n^{2(\sigma-\epsilon)}\times|c_n|^2} \\
&\leq C\times\sqrt{q}\times N^{-\sigma-1/6+2\epsilon}\times||\Delta'_N(u_0)||_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C\times\sqrt{q}\times N^{-\sigma-1/6+2\epsilon}\times||u_0||_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

Finalement, on a pour tout $q\geq p_1,p_2$,

$$
P\left(\omega\in\Omega/||\Delta'_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi],W^{\epsilon,p_2}(\mathbb{R}^3))}\geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right)\leq\left(\frac{C\times\sqrt{q}\times||u_0||_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}}{t}\right)^q.
$$

Il suffit alors de choisir $q=\left(\frac{t}{4C||u_0||_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}}\right)^2\geq p_1,p_2$ pour prouver le Lemme 2.6.9. ⊠

Ensuite, pour $p_2=\frac{3}{\epsilon}+\epsilon$, on a

$$
W^{\epsilon,p_2}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3).
$$

Ainsi pour tous $p_1\in[2,\infty[$ et $\epsilon>0$, il existe deux constantes C,c telles que pour tous $t>0$, $N\geq1$ et $u_0\in\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)$,

$$
P\left(\omega\in\Omega/||\Delta_N(e^{itH}u_0^\omega)||_{L^{p_1}([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}\geq tN^{-1/6-\sigma+2\epsilon}\right)\leq Ce^{-\frac{ct^2}{||\Delta_N(u_0)||^2_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)}}}.
$$

Ensuite, nous pouvons choisir $p_1 = 4$ et utiliser que $||\Delta_N(u_0)||^2_{\overline{H}^{\sigma-\epsilon}(\mathbb{R}^3)} \leq N^{-2\epsilon}||u_0||^2_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}$ pour obtenir pour tout $\epsilon > 0$ l'existence de deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tous $t > 0$, $N \geq 1$ et $u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)$,

$$P\left(\omega \in \Omega / ||\Delta_N(e^{itH}u_0^{\omega})||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^{\infty}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6}\right) \leq Ce^{-\frac{cN^{2(\sigma-\epsilon)}t^2}{||u_0||^2_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}}}. \tag{2.32}$$

Nous devons prouver qu'il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tous $t > 0$, $N \geq 1$ et $u_0 \in \overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)$,

$$P\left(\bigcup_N \left\{\omega \in \Omega / ||\Delta_N(e^{itH}u_0^{\omega})||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^{\infty}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6}\right\}\right) \leq Ce^{-\frac{ct^2}{||u_0||^2_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}}}. \tag{2.33}$$

Depuis

$$P\left(\bigcup_N \left\{\omega \in \Omega / ||\Delta_N(e^{itH}u_0^{\omega})||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^{\infty}(\mathbb{R}^3))} \geq tN^{-1/6}\right\}\right) \leq 1,$$

il suffit de montrer (2.33) pour $t \geq C||u_0||_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}$.

On pose $\alpha = \left(\frac{t}{C||u_0||_{\overline{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^3)}}\right)^2$ et en choisissant $\epsilon < \sigma$ dans (2.32), il suffit de montrer que

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, C, c > 0 / \ \forall \alpha \geq 1,\ \sum_N e^{-\alpha N^{\delta}} \leq Ce^{-c\alpha}. \tag{2.34}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_N e^{-\alpha N^{\delta}} &= \sum_{k\geq 1} e^{-\alpha(2^{k-1})^{\delta}} \leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha(2^{x-1})^{\delta}}dx \leq \int_{1/2}^{\infty} \frac{e^{-\alpha y^{\delta}}}{y}dy \\ &\leq \int_{(1/2)^{\delta}}^{\infty} \frac{e^{-\alpha z}}{z}\frac{dz}{\delta} \leq \int_{\alpha(1/2)^{\delta}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\frac{dt}{\delta} \leq \frac{2^{\delta}}{\delta\alpha}e^{-\frac{\alpha}{2^{\delta}}} \leq Ce^{-c\alpha},\end{aligned}$$

et (2.33) est prouvé ainsi que l'estimation du terme dans le cas **II**. Nous pouvons procéder de manière similaire pour estimer les autres termes et montrer le Théorème 2.6.1.

2.7 Preuves des théorèmes

2.7.1 Preuve du Théorème 2.0.12

Pour montrer le Théorème 2.0.12, il suffit de montrer que pour tout $t > 0$, $P(\Omega_t) > 0$. Pour cela, on commence par établir qu'il suffit de montrer le résultat pour un nombre fini de termes dans la donnée initiale. On commence par introduire la définition suivante :

Définition 2.7.1 *Pour* $u_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n h_n(x)$ *une fonction de* $L^2(\mathbb{R}^3)$*, on définit pour* $K \in \mathbb{N}^*$*,*

$$[u_0]_K = \sum_{\lambda_n < K} c_n h_n(x),$$
$$[u_0]^K = \sum_{\lambda_n \geq K} c_n h_n(x).$$

Pour ensuite énoncer le théorème.

Théorème 2.7.2 *Pour tous* $t > 0$ *et* $\alpha \in]0,1]$*, il existe un entier* $K \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$P(\Omega_t) \geq (1-\alpha) \times \mu\Bigg(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3) / || \ [u_0]_K ||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2}, \ || \ (e^{itH}[u_0]_K)^2 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2},$$
$$|| \ (e^{itH}[u_0]_K)^3 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2}, \ \bigcap_N \left\{ ||\Delta_N(e^{itH}[u_0]_K)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{-1/6}}{2} \right\},$$
$$\bigcap_N \left\{ ||\Delta_N(e^{itH}[u_0]_K)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{s-1/4}}{2} \right\} \Bigg).$$

Preuve
Par indépendance, on trouve

$$P(\Omega_t) \geq \mu\Bigg(|| \ [u_0]^K ||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2}, \ || \ (e^{itH}[u_0]^K)^2 ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2},$$
$$|| \ (e^{itH}[u_0]^K)^3 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2}, \ \bigcap_N \left\{ ||\Delta_N(e^{itH}[u_0]^K)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{-1/6}}{2} \right\},$$
$$\bigcap_N \left\{ ||\Delta_N(e^{itH}[u_0]^K)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{s-1/4}}{2} \right\} \Bigg)$$
$$\times \mu\Bigg(|| \ [u_0]_K ||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2}, \ || \ (e^{itH}[u_0]_K)^2 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2},$$
$$|| \ (e^{itH}[u_0]_K)^3 \ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2}, \ \bigcap_N \left\{ ||\Delta_N(e^{itH}[u_0]_K)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{-1/6}}{2} \right\},$$
$$\bigcap_N \left\{ ||\Delta_N(e^{itH}[u_0]_K)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{tN^{s-1/4}}{2} \right\} \Bigg).$$

Notons par $P_{t,K}$ le premier terme probabiliste de cette inégalité. Alors par le Théorème 2.6.1, pour tous $t \geq 0$ et $K \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{t,K} \geq 1 - Ce^{-\frac{ct^2}{|| \ [u_0]^K \ ||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}},$$

avec

$$\lim_{K\to\infty} || \ [u_0]^K \ ||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Par conséquent, il existe bien un entier non nul K tel que

$$Ce^{-\frac{ct^2}{||\ [u_0]^K\ ||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}} \leq \alpha.$$

⊠

Remarque :
Dans ce théorème, s'il existe $\sigma' > \sigma$ avec $u_0 \in \overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)$ alors nous pouvons choisir $M \geq ||u_0||_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \times \sqrt{\frac{\log(\frac{C}{\alpha})}{c}}$ pour avoir $P_{MK^{-(\sigma'-\sigma)},K} \geq 1-\alpha$.

Puis, nous pouvons choisir $K \geq \left(\frac{M}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma'-\sigma}}$ pour obtenir

$$P_{t,K} \geq P_{MK^{-(\sigma'-\sigma)},K} \geq 1-\alpha.$$

Et finalement $K = \left(\frac{||u_0||_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)}}{t} \times \sqrt{\frac{\log(\frac{C}{\alpha})}{c}}\right)^{\frac{1}{\sigma'-\sigma}}$ satisfait le Théorème 2.7.2.

Enfin, on démontre le résultat pour un nombre fini de termes dans la donnée initiale.

Proposition 2.7.3 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $K \in \mathbb{N}$,*

$$\left\{\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma}|c_n|^2|g_\lambda(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{4}\right\} \subset \left\{\omega \in \Omega / ||\ [u_0^\omega]_K||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{t}{2}\right\}, \tag{2.35}$$

$$\left\{\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6}\right\} \subset \left\{\omega \in \Omega / ||\ (e^{itH}[u_0^\omega]_K)^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^2}{2}\right\}, \tag{2.36}$$

$$\left\{\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6}\right\} \subset \left\{\omega \in \Omega / ||\ (e^{itH}[u_0^\omega]_K)^3\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t^3}{2}\right\}, \tag{2.37}$$

$$\left\{\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6}\right\} \subset \bigcap_N \left\{\omega \in \Omega / ||\Delta_N(e^{itH}[u_0^\omega]_K)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t}{2}N^{-1/6}\right\}, \tag{2.38}$$

$$\left\{\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6}\right\} \subset \bigcap_N \left\{\omega \in \Omega / ||\Delta_N(e^{itH}[u_0^\omega]_K)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))} \leq \frac{t}{2}N^{s-1/4}\right\}. \tag{2.39}$$

Preuve
On remarque qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1 n^{\frac{1}{3}} \leq \lambda_n^2 \leq C_2 n^{\frac{1}{3}}$ puis que

$|\{\lambda_n \leq K\}| \leq CK^6$. Le résultat suit alors grâce à la Proposition 2.1.19 et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ⊠

Preuve du Théorème 2.0.12
Par le Théorème 2.7.2 et la Proposition 2.7.3, il suffit de montrer que pour tout entier $K \geq 1$ et tout réel $t > 0$,

$$P\left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6}\right) > 0.$$

Mais, par indépendance,

$$\begin{aligned} P\left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^6}\right) &\geq P\left(\bigcap_{\lambda_n \leq K} \left\{\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^{12} ||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}\right\}\right) \\ &\geq \prod_{\lambda_n \leq K} P\left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^{12} ||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}\right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

car pour tout $R > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)| \leq R) > 0$. ⊠

Remarque
Dans le cas Gaussien, comme

$$P\left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq R\right) = 1 - e^{-R},$$

on en déduit

$$P\left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n \leq K} \lambda_n^{2\sigma} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{t^2}{CK^2}\right) \geq \left(1 - e^{-\frac{t^2}{CK^{12} ||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}}\right)^{K^6}.$$

Par conséquent, pour $\sigma' > \sigma$, en utilisant la remarque du Théorème 2.7.2, on obtient qu'il existe deux constantes $R > 0$ et $C > 0$ telles que si $||u_0||_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \geq R$ alors

$$P(\Omega') \geq (1 - \alpha) \times e^{-C ||u_0||^{\frac{6}{\sigma' - \sigma}}_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)} \log ||u_0||_{\overline{H}^{\sigma'}(\mathbb{R}^3)}}.$$

2.7.2 Preuve du Théorème 2.0.13

On démontre ici les deux assertions du Théorème 2.0.13.
En utilisant les Théorèmes 2.5.2, 2.5.3 et 2.5.4, pour prouver (2.1), il suffit d'établir que pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} P\left(\omega \in \Omega_\lambda | \; ||u_0^\omega||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \leq \eta\right) = 1. \tag{2.40}$$

On adapte ici la preuve de l'Appendice A.2 de [BT4]. On commence par établir deux lemmes préliminaires.

Lemme 2.7.4 *Pour $j=1,2$, soient E_j deux espaces de Banach munis d'une mesure μ_j. Soient $f_1, f_2, f_3, (f_4^N)_N, (f_5^N)_N : E_1 \times E_2 \to \mathbb{C}$ et $g : E_2 \to \mathbb{C}$ une famille de fonctions mesurables alors*

$$\mu_1 \otimes \mu_2\Big((x_1,x_2) \in E_1 \times E_2 \ / \quad |f_1(x_1,x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_2(x_1,x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_3(x_1,x_2)| > \lambda$$
$$\underset{N}{\cup} |f_4^N(x_1,x_2)| > \lambda \ \underset{N}{\cup} \ |f_5^N(x_1,x_2)| > \lambda \mid |g(x_2)| \leq \eta\Big)$$
$$\leq \sup_{x_2 \in E_2/|g(x_2)| \leq \eta} \mu_1\Big(x_1 \in E_1/ \quad |f_1(x_1,x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_2(x_1,x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_3(x_1,x_2)| > \lambda$$
$$\underset{N}{\cup} |f_4^N(x_1,x_2)| > \lambda \ \underset{N}{\cup} \ |f_5^N(x_1,x_2)| > \lambda\Big).$$

Preuve
On peut écrire

$$\int_{E_1} \mathbb{1}_{\{(x_1,x_2)\ /\ |f_1(x_1,x_2)|>\lambda \ \cup\ |f_2(x_1,x_2)|>\lambda \ \cup\ |f_3(x_1,x_2)|>\lambda \ \underset{N}{\cup}\ |f_4^N(x_1,x_2)|>\lambda \underset{N}{\cup}\ |f_5^N(x_1,x_2)|>\lambda\}}$$
$$\times \mathbb{1}_{\{x_2 \in E_2\ /\ g(x_2) \leq \eta\}} d\mu_1(x_1)$$

$$\leq \sup_{x_2 \in E_2/|g(x_2)| \leq \eta} \mu_1\Big(x_1 \in E_1/|f_1(x_1,x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_2(x_1,x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_3(x_1,x_2)| > \lambda$$
$$\underset{N}{\cup} \ |f_4^N(x_1,x_2)| > \lambda \ \underset{N}{\cup} \ |f_5^N(x_1,x_2)| > \lambda\Big) \times \mathbb{1}_{\{x_2 \in E_2\ /\ g(x_2) \leq \eta\}}.$$

Puis il suffit d'intégrer l'inégalité sur $x_2 \in E_2$ contre la mesure μ_2. ⊠

Lemme 2.7.5 *Soit g une variable aléatoire avec une distribution symétrique et soit h une variable aléatoire de loi Bernoulli indépendante de g alors hg a la même loi que g.*

Preuve
Pour toute fonction ϕ continue bornée, on a

$$E(\phi(hg)) = \frac{1}{2}E(\phi(g)) + \frac{1}{2}E(\phi(-g)) = E(\phi(g)).$$

Cela suffit à montrer que g et hg ont mêmes lois. ⊠

Ces différents lemmes étant établis, on peut alors démontrer (2.1). On définit

$$Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

qui, muni de la norme $l^\infty(\mathbb{N})$, donne un espace de Banach. On munit Y de la mesure de probabilité μ_0, définie comme la loi de la variable aléatoire

$$\omega \longrightarrow (b_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}},$$

où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires Bernoulli indépendantes et indépendante de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Enfin, pour $y=(y_n)_n \in Y$ et $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n h_n(x)$, on définit l'opération $\odot$ de la façon suivante :

$$y\odot f=\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n c_n h_n(x).$$

En utilisant le Lemme 2.7.5, on obtient

$$P\Big(\omega\in\Omega_\lambda^c \mid ||u_0^\omega||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\leq\eta\Big)$$

$$\begin{aligned}
=\mu\otimes\mu_0\Big(f\in\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3), y\in X/|\ ||y\odot f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\geq\lambda \cup ||\ [e^{itH}y\odot f]^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda^2 \\
\cup ||\ [e^{itH}y\odot f]^3\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda^3 \\
\bigcup_N ||\Delta_N(e^{itH}y\odot f)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda N^{-1/6} \\
\bigcup_N ||\Delta_N(e^{itH}y\odot f)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda N^{s-1/4}\mid ||y\odot f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\leq\eta\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\mu\otimes\mu_0\Big(f\in\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3), y\in Y/|\ ||y\odot f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\geq\lambda \cup ||\ [e^{itH}y\odot f]^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda^2 \\
\cup ||\ [e^{itH}y\odot f]^3\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda^3 \\
\bigcup_N ||\Delta_N(e^{itH}y\odot f)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda N^{-1/6} \\
\bigcup_N ||\Delta_N(e^{itH}y\odot f)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda N^{s-1/4}\mid ||f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\leq\eta\Big),
\end{aligned}$$

puisque

$$||y\odot f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}=||f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)},\ \text{pour tout } y\in Y \text{ et } f\in\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3).$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 2.7.4 (appliqué à $E_1=Y$, $\mu_1=\mu_0$, $E_2=\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ et $\mu_2=\mu$) et la Proposition 2.6.1 (dans le cas Bernoulli avec $\epsilon=1$), on trouve

$$P\Big(\omega\in\Omega_\lambda^c \mid ||u_0^\omega||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\leq\eta\Big)$$

$$\begin{aligned}
\leq \sup_{f\in\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)/||f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\leq\eta}\mu_0\Big(y\in Y\ /||y\odot f||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}\geq\lambda\cup||\ [e^{itH}y\odot f]^2\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda^2 \\
\cup||\ [e^{itH}y\odot f]^3\ ||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^s(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda^3\bigcup_N||\Delta_N(e^{itH}y\odot f)||_{L^4([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda N^{-1/6} \\
\bigcup_N||\Delta_N(e^{itH}y\odot f)||_{L^R([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^3))}\geq\lambda N^{s-1/4}\Big)
\end{aligned}$$

$$\leq Ce^{-c\frac{\lambda^2}{\eta^2}},$$

et (2.1) est démontré.

Ensuite, pour obtenir (2.2), il suffit de montrer que pour tous $\lambda > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \Big(u_0^1 \in E_0(\lambda), u_0^2 \in E_0(\lambda), ||\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2||_{X^0} \le \epsilon | \ ||u_0^1||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta, ||u_0^2||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta \Big) = 1.$$

En utilisant le Théorème 2.5.5, il suffit de démontrer que pour tous $\lambda > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \Big(u_0^1 \in E_0(\lambda), u_0^2 \in E_0(\lambda) | \ ||u_0^1||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta, ||u_0^2||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta \Big) = 1.$$

Ainsi, il suffit d'établir que pour tous $\lambda > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \Big(u_0^1 \in E_0(\lambda)^c | \ ||u_0^1||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta, ||u_0^2||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta \Big) = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} &\lim_{\eta \to 0} \mu_1 \otimes \mu_2 \Big(u_0^1 \in E_0(\lambda)^c | \ ||u_0^1||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta, ||u_0^2||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta \Big) \\ = &\lim_{\eta \to 0} \mu_1 \Big(u_0^1 \in E_0(\lambda)^c | \ ||u_0^1||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} \le \eta \Big) = 0, \end{aligned}$$

et (2.2) est démontré.

2.7.3 Preuve du Théorème 2.0.14

Pour prouver le Théorème 2.0.14, il suffit de montrer que pour tout $t > 0$ et tout $\alpha \in]0, 1]$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $P(\Omega_t^\epsilon) \ge 1 - \alpha$. Ce résultat est clair en vu du Théorème 2.6.1 puisque

$$P(\Omega_t^\epsilon) \ge 1 - C_1 e^{-\frac{C_2}{\epsilon^2 ||u_0||^2_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)}}} \ge 1 - \alpha \text{ si } \epsilon \ll 1.$$

2.8 Données initiales aléatoires et espaces de Sobolev

L'objectif de cette partie est de montrer le Théorème 2.0.15. En particulier, cela établira que les Théorèmes 2.0.12 et 2.0.14 ne sont pas triviaux et concernent bien des équations sur-critiques.

2.8.1 Gain de régularité dans $L^2(\mathbb{R}^3)$

Le but de cette partie est de montrer que la donnée initiale rendue aléatoire ne permet pas de gagner de dérivées dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Tout d'abord, on s'intéresse au cas des espaces de Sobolev harmoniques.

Théorème 2.8.1 *Soit $s \ge 0$ alors,*

$$u_0 \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3) \textit{ si et seulement si } u_0(\omega, .) \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^3) \ \omega \textit{ presque surement.}$$

Preuve
Par indépendance, on a

$$\begin{aligned}
E\left(e^{-||u_0||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}}\right) &= E\left(e^{-\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{2s}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2}\right) \\
&= E\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n^{2s}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2}\right) \\
&= \prod_{n\in\mathbb{N}} E\left(e^{-\lambda_n^{2s}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2}\right) \\
&= \begin{cases} \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{1}{1+\lambda_n^{2s}|c_n|^2}\right) & \text{dans le cas Gaussien,} \\ \\ \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(e^{-\epsilon^2\lambda_n^{2s}|c_n|^2}\right) & \text{dans le cas Bernoulli.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned}
u_0(\omega,.) \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)\ \omega \text{ presque surement } &\Leftrightarrow E(e^{-||u_0||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{2s}|c_n|^2 = \infty \\
&\Leftrightarrow u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

⊠

Puis, on s'intéresse au cas des espaces de Sobolev usuels.

Théorème 2.8.2 *Pour tout $s \geq 0$, si*

$$u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$$

alors

$$u_0(\omega,.) \notin H^s(\mathbb{R}^3)\ \omega \ \text{ presque surement.}$$

Soit X une variable aléatoire ayant la même distribution que les variables aléatoires g_n, $n \in \mathbb{N}$. Pour prouver le théorème, il suffit de considérer les cas où $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ ou $X \backsim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ et $0 \leq \chi \leq 1$ et définissons $\sigma_N^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \chi^2\left(\dfrac{\lambda_n^2}{N^2}\right)|c_n|^2\lambda_n^{2s}$. Comme $\sigma_N^2 \geq \sum\limits_{\lambda_n\leq N} |c_n|^2\lambda_n^{2s}$ alors $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N^2 = \infty$.

Lemme 2.8.3 *Soit X une variable aléatoire dans $L^2(\Omega)$ alors pour tout $\lambda \geq 0$,*

$$P(X \geq \lambda E(X)) \geq (1-\lambda)^2\frac{E(X)^2}{E(X^2)}.$$

Preuve
Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz, on pose $A = \{X \geq \lambda E(X)\}$ et on obtient

$$E(X) = E(X\mathbb{1}_A + X\mathbb{1}_{A^c}) \leq \sqrt{E(X^2)P(A)} + \lambda E(X).$$

Donc

$$(1-\lambda)E(X) \leq \sqrt{E(X^2)P(A)},$$

et le résultat suit en élevant au carré. ⊠

Proposition 2.8.4 *Pour tout $s \geq 0$, on a*

$$P\left(\omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0^\omega||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty\right) = 1 \ ou \ = 0.$$

Preuve
Rappelons que $u_0^\omega = \sum_i X_i(\omega)$ avec $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $X_i(\omega) \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ω presque surement.

Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left|\left|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0^\omega\right|\right|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty \text{ si et seulement si } \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left|\left|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)\left(\sum_{i \geq K} X_i(\omega)\right)\right|\right|_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty,$$

donc si nous posons $F_i = \sigma(X_i, X_{i+1}, ...)$ on a que

$$\left\{\omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0^\omega||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty\right\} \in \bigcap_{K \in N} F_K.$$

Par conséquent $\left\{\omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0^\omega||_{H^s} = \infty\right\}$ est dans la tribu asymptotique et le lemme est prouvé par la loi du 0-1. ⊠

Proposition 2.8.5 *Pour $s \geq 0$, si*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \lambda_n^{2s} = +\infty$$

alors

$$P\left(\omega \in \Omega / \sup_{N \in \mathbb{N}^*} ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0^\omega||_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \infty\right) = 1.$$

Preuve

On pose $M = \sup_{N \in \mathbb{N}^*} ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0||_{H^s(\mathbb{R}^3)}$ et $S_N = ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0||_{H^s(\mathbb{R}^3)}$.

En utilisant le Lemme 2.8.3, on obtient

$$\begin{aligned}
P\left(M^2 \geq \frac{1}{2}\, E(X^2) \times C_1^2\, \sigma_N^2\right) &\geq P\left(S_N^2 \geq \frac{1}{2}\, E(X^2) \times C_1^2\, \sigma_N^2\right) \\
&\geq P\left(S_N^2 \geq \frac{1}{2}\, E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right)\right) \\
&\geq \frac{1}{4} \frac{E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right)^2}{E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0||^4_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right)}.
\end{aligned}$$

En effet, grâce à la Proposition 2.1.24, nous avons

$$\begin{aligned}
E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right) &\geq E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n\overline{c_m} g_n(\omega)\overline{g_m(\omega)} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla|^s(h_n).|\nabla|^s(h_m)\, dx\right) \\
&\geq E(|X|^2) \times \sum_n \chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) |c_n|^2 ||\nabla^s(h_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\geq E(|X|^2) \times C_1^2 \sigma_N^2.
\end{aligned}$$

De plus, grâce encore une fois à la Proposition 2.1.24, on établit

$$\begin{aligned}
&E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0||^4_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right) \\
&\leq E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n\overline{c_m}\, g_n(\omega)\overline{g_m(\omega)} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^s(h_n)\nabla^s(h_m)\, dx\right)^2 \\
&\qquad + E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n\overline{c_m}\, g_n(\omega)\overline{g_m(\omega)}\right)^2 \\
&\leq E\left(\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4} \chi\left(\frac{\lambda_{n_1}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_2}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_3}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_4}^2}{N^2}\right) c_{n_1}\overline{c_{n_2}}c_{n_3}\overline{c_{n_4}}\right. \\
&\qquad \left.\times\, g_{n_1}(\omega)\overline{g_{n_2}(\omega)}g_{n_3}(\omega)\overline{g_{n_4}(\omega)} \times \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^s(h_{n_1})\nabla^s(h_{n_2}) \times \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^s(h_{n_3})\nabla^s(h_{n_4})\right) \\
&\quad + E\left(\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4} \chi\left(\frac{\lambda_{n_1}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_2}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_3}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_4}^2}{N^2}\right) c_{n_1}\overline{c_{n_2}}c_{n_3}\overline{c_{n_4}} \times g_{n_1}(\omega)\overline{g_{n_2}(\omega)}g_{n_3}(\omega)\overline{g_{n_4}(\omega)}\right) \\
&\leq 4E(|X|^4) \times \sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)^2 \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right)^2 |c_n|^2|c_m|^2 ||\nabla^s(h_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} ||\nabla^s(h_m)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\qquad + 4E(|X|^4) \times \sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)^2 \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right)^2 |c_n|^2|c_m|^2 \\
&\leq 4E(|X|^4) \times C_2^4 \sigma_N^4 + 4E(|X|^4) \times \sigma_N^4.
\end{aligned}$$

Et, par conséquent,

$$P\left(M^2 \geq \frac{1}{2}\, E(|X|^2) \times C_1\, \sigma_N^2\right) \geq \frac{E(|X|^2)^2}{E(|X|^4)} \times \left(\frac{C_1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{C_2^4+1}\right).$$

Puis en utilisant le théorème de convergence monotone, on trouve

$$P(M=\infty) \geq \frac{E(|X|^2)^2}{E(|X|^4)} \times \left(\frac{C_1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{C_2^4+1}\right).$$

Et finalement d'après la Proposition 2.8.4, on a $P(M=\infty)=1$. ⊠

Théorème 2.8.6 *Pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$,*

$$||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C||u||_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

Le Théorème 2.8.6 et la Proposition 2.8.5 impliquent le Théorème 2.8.2.

En effet, si nous supposons que $u_0^\omega \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ω presque surement alors par la Proposition 2.8.5, on obtient

$$\sup_{N\in\mathbb{N}^*} ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0^\omega||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C||u_0^\omega||_{H^s(\mathbb{R}^3)},$$

puis

$$\sup_{N\in\mathbb{N}^*} ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0^\omega||_{H^s(\mathbb{R}^3)} < \infty \ \omega \text{ presque surement.}$$

Ce résultat contredit la Proposition 2.8.5 et finalement il suffit de prouver le Théorème 2.8.6.

Preuve du Théorème 2.8.6
En utilisant (2.13) et (2.14), il suffit de montrer que :
$\forall s \geq 0,\ \exists\, C>0$ et h_0 tels que $\forall\ 0<h\leq h_0,\ \forall u \in H^s(\mathbb{R}^3)$

$$||\ \chi(x^2+(hD)^2)u||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C||u||_{H^s(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.41}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u||_{H^s(\mathbb{R}^3)} &\leq ||\ [\chi(x^2+(hD)^2)]\mathfrak{u}(\sqrt{h}.)||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq ||\ [\chi(x^2+(hD)^2)]\mathfrak{u}(\sqrt{h}.)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||\nabla^s\ [\chi(x^2+(hD)^2)]\mathfrak{u}(\sqrt{h}.)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq h^{-3/4}||\mathfrak{u}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + h^{s/2-3/4}||\ [\chi(x^2+(hD)^2)]\mathfrak{u}||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + h^{s/2-3/4}||\mathfrak{u}||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq ||u||_{H^s(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Par interpolation, on peut limiter la preuve au cas où s est un entier. Grâce à la Proposition 2.2.8 (avec $N = s$), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in]0,1]$ et toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$, on a

$$||\chi(x^2 + (hD)^2)u - \sum_{j=0}^{N} h^j Op_h(\Psi_j(x,\xi))u||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

avec $Supp(\Psi_j(x,\xi)) \subset \big((x,\xi)/x^2 + \xi^2 \in Supp(\chi)\big)$.

Ainsi, pour obtenir (2.41), il suffit d'obtenir que pour tout $s \geq 0$, il existe deux constantes $C > 0$ et $h_0 \geq 1$ telles que pour tout $h \in]0, h_0]$ et toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$,

$$||Op_h(\Psi_j(x,\xi))u||_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C||u||_{H^s(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.42}$$

Enfin, pour établir (2.42), il suffit d'utiliser le Théorème 2.2.5 et de remarquer que

$$(x,\xi) \longrightarrow \chi(x^2 + \xi^2) \in S^0 \text{ et } (x,\xi) \longrightarrow \Psi_j(x,\xi) \in S^0. \qquad \boxtimes$$

2.8.2 Données initiales grandes

L'objectif de cette partie est de démontrer que les Théorèmes 2.0.12 et 2.0.14 sont valides pour des équations sur-critiques à données initiales grandes. Pour cela, on commence par établir la proposition suivante :

Proposition 2.8.7 *Soit $\sigma \geq 0$, $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ et $s \geq \sigma$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_n^{2s}\ |c_n|^2 \leq 1$$

alors pour tout $t \geq 0$,

$$\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)/||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq t\right) \leq \begin{cases} e^{t^2 - \frac{1}{2}||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}} & \textit{dans le cas Gaussien,} \\ e^{t^2 - \epsilon^2||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}} & \textit{dans le cas Bernoulli.} \end{cases}$$

Preuve
Effectuons la preuve dans le cas Gaussien. En utilisant que $-\ln(1+u) \leq -\frac{u}{2}$ pour tout $u \in [0,1]$ et

l'inégalité de Markov, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)/||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq t\right) &= P\left(\omega \in \Omega/e^{-||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0^\omega||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}} \geq e^{-t^2}\right) \\
&\leq e^{t^2} E\left(e^{-||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}}\right) \\
&\leq e^{t^2} \prod_{n\in\mathbb{N}} E\left(e^{-\chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^{2s}|c_n|^2|X|^2}\right) \\
&\leq e^{t^2} \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{1+\chi^2(\frac{\lambda_n^2}{N^2})\lambda_n^{2s}|c_n|^2}\right) \\
&\leq e^{t^2} \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(e^{-\frac{1}{2}\chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\lambda_n^{2s}|c_n|^2}\right) \\
&\leq e^{t^2-\frac{1}{2}||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Remarques :
1- L'hypothèse $\lambda_n^{2s}\ |c_n|^2 \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ peut être remplacée par $\lambda_n^{2s}\ |c_n|^2 \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Il suffit alors de remarquer que $-\ln(1+u) \leq -\frac{u}{1+C}$ pour tout $u \in [0, C]$ et que la constante $\frac{1}{2}$ est remplacée par $\frac{1}{1+C}$ dans la majoration.
2- Par exemple, pour $\epsilon \ll 1$, on peut choisir $c_n = \frac{\epsilon}{\lambda_n^s} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ et obtenir pour $t \geq 0$,

$$\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)/||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq t\right) \leq \exp\left(t^2 - C'\epsilon^2 \ln^2 N\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors que $||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)} = C''\epsilon \ll 1$.
3- Par exemple, si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ et $\lambda_n^{2s}\ |c_n|^2 \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N}$, on obtient pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)/||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)} \leq t\right) = 0.$$

Encore une fois, cela signifie bien que la norme Sobolev de la donnée initiale n'est pas "petite".
4- Enfin, remarquons que l'hypothèse précédente n'est pas vide et qu'il existe un très grand nombre de fonctions u_0 vérifiant $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$ et $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ avec $\lambda_n^{2s}\ |c_n|^2 \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Néanmoins, ce n'est pas le cas pour tout $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$, on peut choisir

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } n = k^k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $\sigma = 0$ pour s'en convaincre.

Preuve du théorème 2.0.15

Encore une fois, limitons la preuve au cas gaussien. Choisissons $s=\sigma+0$ et $c_n=\frac{1}{\lambda_n^s}\times\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour avoir $u_0\in\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, en effectuant la même démarche que dans la section 2.7.1, nous avons

$$P\left(\omega/u_0^\omega\in E_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)=\delta>0,$$

où λ est choisi de tel sorte que

$$\Omega'=\left(\omega/u_0^\omega\in E_0(\lambda)\right).$$

Alors, par la remarque 3 précédente, nous avons l'existence de N tel que

$$P\left(\omega\in\Omega/||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0^\omega||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}\geq M\right)\geq 1-\frac{\delta}{2}.$$

Ainsi, nous avons

$$P\left(\omega\in\Omega/u_0^\omega\in E_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cap||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0^\omega||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}\geq M\right)\geq\frac{\delta}{2}>0.$$

Soit maintenant $v_0\in\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ tel que $v_0\notin\overline{H}^{s+\delta}(\mathbb{R}^3)$ pour tout $\delta>0$.
Posons enfin, $w_0=\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0+R(1-\chi)\left(\frac{H}{N^2}\right)v_0$ avec R fixé plus tard assez petit.
Alors $w_0\in\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)$ mais $w_0\notin\overline{H}^{s+\delta}(\mathbb{R}^3)$ pour tout $\delta>0$. Et, par indépendance,

$$\begin{aligned}
&P\left(\omega\in\Omega/w_0^\omega\in E_0\left(\lambda\right)\cap||w_0^\omega||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}\geq M\right)\\
\geq\ &P\left(\omega\in\Omega/\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0^\omega\in E_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cap(1-\chi)\left(\frac{H}{N^2}\right)v_0^\omega\in E_0\left(\frac{\lambda}{2R}\right)\cap||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0^\omega||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}\geq M\right)\\
\geq\ &P\left(\omega\in\Omega/\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0^\omega\in E_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cap||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0^\omega||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}\geq M\right)\\
&\qquad\times\underbrace{P\left(\omega\in\Omega/(1-\chi)\left(\frac{H}{N^2}\right)v_0^\omega\in E_0\left(\frac{\lambda}{2R}\right)\right)}_{\xrightarrow[R\to 0]{}1}.
\end{aligned}$$

Donc $P\left(\omega\in\Omega/w_0^\omega\in E_0\left(\lambda\right)\cap||w_0^\omega||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^3)}\geq M\right)>0$ si R choisi assez petit.

2.9 Généralisation du résultat

Dans cette partie, on suppose la dimension d'espace $\boxed{d\geq 2}$ et on donne une généralisation du théorème 2.0.12. Si l'on suppose que les variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et de mêmes lois gaussiennes $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, et que p est un entier impair dans l'équation (NLS), alors on peut alors établir le théorème suivant :

Théorème 2.9.1 *Soient $\sigma\in]\frac{d-1}{2}-\frac{2}{p-1},\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}[$, $u_0\in\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ et $s\in]\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1},\sigma+\frac{1}{2}[$ alors il existe un ensemble $\Omega'\subset\Omega$ vérifiant les conditions suivantes :*

i) $P(\Omega') > 0$,
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, *il existe une unique solution globale* $\tilde{u}$ *à l'équation (NLS) dans l'espace* $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ *avec donnée initiale* $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, *il existe* L^+ *et* $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ *tels que*

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Les points clefs de la démonstration du Théorème 2.0.12 sont l'existence de l'estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur harmonique et la transformation de lentille, propriétés vraies en dimensions quelconques plus grandes que 2. Rappelons que les inégalités du chaos de Wiener pour les variables aléatoires gaussiennes sont établies pour une n-linéarité quelconque dans [TT]. Ainsi, dans la preuve du Théorème 2.0.12, le fait que $p = 3$ intervient surtout dans l'application du théorème de point fixe de Picard. Vu que les arguments de bases restent vrais en dimension $d \geq 2$, ce dernier reste applicable pour p quelconque impair à condition de vérifier que $u_0(\omega,.) \in L^\infty(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))$ ω presque surement (si on utilise deux fois l'estimée bilinéaire, les termes restants sont à évaluer dans L^∞_t, mais pour $p = 3$, il n'y a pas de termes restants), ce que nous expliquons ici. On peut montrer que

$$e^{itH}u_0(\omega,.) \in L^\infty([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{6}+\sigma-,\infty}(\mathbb{R}^d)) \ \omega \text{ presque surement.}$$

Grâce à l'inégalité de Minkowsky et les injections de Sobolev, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
||e^{itH}u_0||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],L^p(\mathbb{R}^d))} &\leq ||e^{itH}u_0||_{L^p(\mathbb{R}^d,L^\infty([-2\pi,2\pi]))}\\
&\leq C||e^{itH}u_0||_{L^p(\mathbb{R}^d,W^{1/p+\epsilon,p}([-2\pi,2\pi]))}\\
&\leq C||H^{1/p+\epsilon}e^{itH}u_0||_{L^p(\mathbb{R}^d,L^p([-2\pi,2\pi]))}.
\end{aligned}$$

Puis nous pouvons remplacer u_0 par $H^{\frac{s}{2}}u_0$ pour obtenir que

$$\begin{aligned}
||e^{itH}u_0||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d))} &\leq C||H^{\frac{s}{2}+1/p+\epsilon}e^{itH}u_0||_{L^p(\mathbb{R}^d,L^p([-2\pi,2\pi]))}\\
&\leq C||H^{\frac{s}{2}+1/p+\epsilon}e^{itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],L^p(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C||e^{itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{s+2/p+2\epsilon,p}(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\epsilon > \frac{d}{p}$ alors

$$\begin{aligned}
||e^{itH}u_0||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\sigma+1/6-4\epsilon,\infty}(\mathbb{R}^d))} &\leq C||e^{itH}u_0||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\sigma+1/6-3\epsilon,p}(\mathbb{R}^d))}\\
&\leq C||e^{itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\sigma+1/6,p}(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Solutions globales pour des équations de Schrödinger sur-critiques en toutes dimensions

Sommaire

Dans le chapitre précédent, on a expliqué comment construire un grand nombre de solutions globales pour des équations de Schrödinger sur-critiques, en toutes dimensions plus grandes que 2. Dans ce chapitre, on propose de compléter ce résultat, en particulier, en établissant le théorème en dimension 1.

En dimension 1, dans [BTT], il est montré que l'effet régularisant permet de gagner la $\frac{1}{2}-\frac{2}{p-1}$ dérivée manquante. Cette méthode est spécifique à la dimension 1 et ne se généralise pas en dimension plus grande pour des données initiales peu régulières. Néanmoins, on remarque que pour $p \geq 5$ et $u_0 \in \overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)$, la preuve s'adapte en dimension quelconque et permet de gagner la $\frac{1}{2}-\frac{2}{p-1}$ dérivée manquante.

Ce résultat est très intéressant car il n'est plus nécessaire de supposer que les fonctions propres soient les fonctions propres tenseurs. Une base de fonctions propres quelconques convient et le théorème reste vrai pour un plus grand nombre de mesures de probabilité. De plus, comme il s'agit de termes linéaires à estimer en probabilité, il n'est plus nécessaire de montrer des estimées de types chaos de Wiener. On propose donc une preuve dans un contexte plus général que pour des variables aléatoires de types Gaussiennes ou Bernoullis.

Ainsi, dans ce chapitre, la base de fonctions propres $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque et p désigne un entier impair supérieur à 5 dans l'équation (NLS). On suppose que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses $(H_\gamma)(H_{E_1})(H_{01})(H_{02})$ ou $(H_\gamma)(H_{E_2})(H_{01})(H_{02})$ et on établit les trois théorèmes suivants :

Théorème 3.0.2 *Soit $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors il existe $s \in]\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1},\frac{d}{2}[$ et un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tels que les conditions suivantes soient réalisées :*
i) $P(\Omega') > 0$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe $L^+ \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

De plus, si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ alors $P\left(\omega \in \Omega/u_0(\omega,.) \in H^s(\mathbb{R}^d)\right) = 0$.

Théorème 3.0.3 *Soit $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors il existe $s \in]\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1},\frac{d}{2}[$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe T_ω et une unique solution à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s_{T_\omega}$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.*

Plus précisément, il existe $C, c, \delta > 0$ et pour tout temps $0 < T < \infty$, un ensemble Ω_T tels que

$$P(\Omega_T) \geq 1 - Ce^{-c/\arctan(2T)^\delta},$$

et tels que pour tout élément $\omega \in \Omega_T$, il existe une unique solution à l'équation (NLS) avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$ dans un espace continûment inclus dans $C^0([-T,T], H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d))$.

Théorème 3.0.4 *Si de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n a une distribution symétrique, alors*

$$\lim_{\eta \to 0} \mu \left(u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d) / \text{ on ait existence globale et scattering } \mid ||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta \right) = 1.$$

3.1 Données initiales aléatoires et espaces de Sobolev

De manière analogue à la section 2.8, on démontre que la donnée initiale rendue aléatoire ne permet pas de gagner de dérivées dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On commence par établir un lemme très simple :

Lemme 3.1.1 *Sous l'hypothèse (H_γ), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$E(|g_n|^2)^2 \leq E(|g_n|^4) \leq C.$$

Preuve

$$E(|g_n|^4) = 4 \int_0^\infty \rho^3 P\left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)| \geq \rho\right) d\rho \leq 4C \int_0^\infty \rho^3 e^{-c\rho^\gamma} d\rho < \infty. \qquad \boxtimes$$

Puis on peut établir le résultat pour les espaces de Sobolev harmoniques ainsi que les espaces de Sobolev usuels.

Théorème 3.1.2 *Sous les hypothèses (H_γ), (H_{E_1}) et (H_{02}), pour tout $s \geq 0$,*

$$u_0 \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d) \text{ si et seulement si } u_0^\omega \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d) \ \omega \text{ ps.}$$

Preuve

Grâce au Lemme 3.1.1, on obtient

$$E(||u_0^\omega||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)}) \leq C||u_0||^2_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, si $u_0 \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ alors $u_0^\omega \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ ω *ps*. Puis, nous obtenons la réciproque grâce au théorème qui suit. ⊠

Théorème 3.1.3 *Sous les hypothèses (H_γ), (H_{E_1}) et (H_{02}), pour tout $s \geq 0$,*

$$\text{si } u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^d) \text{ alors } u_0^\omega \notin H^s(\mathbb{R}^d) \ \omega \text{ ps.}$$

Pour établir ce résultat, en analogie au Théorème 2.8.2, nous devons montrer le même type d'estimation que la Proposition 2.1.24 pour des fonctions propres quelconques de l'oscillateur harmonique. Cela justifie la proposition suivante :

Proposition 3.1.4 *Pour tout $s \geq 0$, il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$C_1 \lambda_n^s \leq ||\nabla^s h_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \lambda_n^s. \tag{3.1}$$

Preuve
Nous posons $h = \frac{1}{\lambda_n^2}$ et $\Phi_h(x) = \frac{1}{h^{d/4}} \times h_n(\lambda_n x)$ pour que $(-h^2\Delta + x^2 - 1)\Phi_h = 0$ et $||\Phi_h||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Pour démontrer (3.1), il suffit d'établir qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $h > 0$,

$$h^s||\nabla^s\Phi_h||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq C_1.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\lim_{h\to 0} h^s||\nabla^s\Phi||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0. \tag{3.2}$$

D'après le Théorème 2 de [Bu], il existe une mesure positive $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{h\to 0} < a(x, hD_x)\Phi_h, \Phi_h >_{L^2(\mathbb{R}^d)*L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} tr(a(x,\xi))\ \mu(dxd\xi).$$

Rappelons la définition suivante :

Définition 3.1.5 *On dit que* $(x,\xi) \in Supp(\mu)^c$ *si et seulement si il existe* $r > 0$ *tel que pour tout* $\phi \in C_0^\infty(B(x,r) \times B(\xi,r))$,

$$\int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} \phi(x,\xi)\ \mu(dx,d\xi) = 0.$$

De manière similaire à la Proposition 2.2.6, si $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d)$ avec $Supp(a) \cap \{(x,\xi)/x^2+\xi^2 = 1\} = \varnothing$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $E_N \in Op(T^{-2})$ et $R_N \in Op(T^{-(N+1)})$ tels que

$$E_N \circ (-h^2\Delta + |x|^2 - 1) = a(x, hD_x) - h^{N+1}R_N.$$

Par conséquent

$$< a(x, hD_x)\Phi_h, \Phi_h >_{L^2(\mathbb{R}^d)*L^2(\mathbb{R}^d)} = h^{N+1} < R_N\Phi_h, \Phi_h >_{L^2(\mathbb{R}^d)*L^2(\mathbb{R}^d)},$$

puis

$$\int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} a(x,\xi)\mu(dxd\xi) = 0.$$

Et finalement, nous établissons que

$$Supp(\mu) \subset \{(x,\xi)/x^2 + \xi^2 = 1\}.$$

Toujours de manière similaire à la Proposition 2.2.6, si $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ avec $Supp(a) \cap \{(x,\xi)/\xi^2 = 0\} = \varnothing$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $E_N \in Op(S^{-s})$ et $R_N \in Op(S^{-(N+1)})$ tels que

$$E_N \circ \sum_{i=1}^{d} |hD_{x_i}|^s = a(x, hD_x) - h^{N+1}R_N.$$

Or d'après le Théorème 2.2.5 et (3.2), on trouve

$$\lim_{h\to 0} | < E_N \circ \sum_{i=1}^{d} |hD_{x_i}|^s \Phi_h, \Phi_h >_{L^2(\mathbb{R}^d)*L^2(\mathbb{R}^d)} | \leq \lim_{h\to 0} ||E_N \circ \sum_{i=1}^{d} |hD_{x_i}|^s \Phi_h||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leq \lim_{h\to 0} || \sum_{i=1}^{d} |hD_{x_i}|^s \Phi_h||_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} a(x,\xi)\mu(dxd\xi) = 0,$$

et nous établissons que

$$Supp(\mu) \subset \{(x,\xi)/\xi^2 = 0\}.$$

Ensuite, pour $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^d} [-h^2\Delta + |x|^2 - 1; h^{-1}Op_h(a)]\Phi_h\overline{\Phi_h} \\ &= \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}^d} \{-h^2\Delta + |x|^2 - 1; Op_h(a)\}\Phi_h\overline{\Phi_h} + h \times \int_{\mathbb{R}^d} Op_h(R)\Phi_h\overline{\Phi_h}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons que pour toute fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} (\xi\partial_x a - x\partial_\xi a) \; d\mu(x,\xi) = 0. \tag{3.3}$$

Soit alors $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d$ et posons, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = x\cos(t) + \xi\sin(t), \\ \xi(t) = \xi\cos(t) - x\sin(t). \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \xi(t) \text{ avec } x(0) = x, \\ \dot{\xi}(t) = -x(t) \text{ avec } \xi(0) = \xi. \end{cases}$$

D'après (3.3), on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} a(x\cos(t) + \xi\sin(t), \xi\cos(t) - x\sin(t)) \; d\mu(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} a(x,\xi) \; d\mu(x,\xi).$$

Par conséquent, si $(x_0,\xi_0) \in Supp(\mu)$ alors pour tout $r > 0$, il existe $a \in C_0^\infty(B((x_0,\xi_0),r))$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d} a(x\cos(t) + \xi\sin(t), \xi\cos(t) - x\sin(t)) \; d\mu(x,\xi) \neq 0.$$

Mais

$$
\begin{aligned}
& Supp\,(a(x\cos(t)+\xi\sin(t),\xi\cos(t)-x\sin(t))) \\
& \quad \subset \left\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^d*\mathbb{R}^d/(x\cos(t)+\xi\sin(t),\xi\cos(t)-x\sin(t))\in B((x_0,\xi_0),r)\right\} \\
& \quad \subset B(\cos(t)x_0-\sin(t)\xi_0,2r)\times B(\sin(t)x_0+\cos(t)\xi_0,2r),
\end{aligned}
$$

et donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $(\cos(t)x_0-\sin(t)\xi_0,\sin(t)x_0+\cos(t)\xi_0)\in Supp(\mu)$.

Mais pour $\xi_0=0, x_0^2=1$ alors $\sin(t)x_0+\cos(t)\xi_0=\sin(t)x_0=0$ est impossible et donc la proposition est démontrée par l'absurde. ⊠

Reprenons les notations de la section 2.8. Pour une fonction $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(x)=1$ si $|x|\leq 1$, $\chi(x)=0$ si $|x|\geq 2$ et $0\leq\chi\leq 1$, définissons

$$
\begin{aligned}
\sigma_N^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)|c_n|^2\lambda_n^{2s}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty, \\
S_N &= ||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\
M &= \sup_{N\in\mathbb{N}^*} S_N.
\end{aligned}
$$

Passons à la preuve du Théorème 3.1.3. En analogie à la preuve du Théorème 2.8.2, il suffit d'établir que

$$P(M=\infty)>0.$$

Grâce à (3.1) et aux hypothèses (H_{E_2}) et (H_{02}), on trouve

$$
\begin{aligned}
E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right) &\geq E\left(\sum_{n,m}\chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right)c_n\overline{c_m}\;g_n(\omega)\overline{g_m(\omega)}\;\int_{\mathbb{R}^d}\nabla^s(h_n)\nabla^s(h_m)\,dx\right) \\
&\geq E\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)|c_n|^2|g_n(\omega)|^2||\nabla^s(h_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) \\
&\geq C_1\sigma_N^2.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, grâce à l'inégalité de Zygmound, soit le Lemme 2.8.3 , on établit

$$
\begin{aligned}
P\left(M^2\geq\frac{C_1\sigma_N^2}{2}\right)\geq P\left(S_N^2\geq\frac{C_1\sigma_N^2}{2}\right) &\geq P\left(S_N^2\geq\frac{||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}}{2}\right) \\
&\geq\frac{1}{4}\times\frac{E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right)^2}{E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^4_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right)}.
\end{aligned}
$$

Puis, grâce à (3.1), au Lemme 3.1.1 et l'hypothèse (H_{E_2}), on a

$$\begin{aligned}
&E\left(||\chi\left(\frac{H}{N^2}\right)u_0||^4_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right)\\
&\leq E\left(\sum_{n,m}\chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right)c_n\overline{c_m}\ g_n(\omega)\overline{g_m(\omega)}\ \int_{\mathbb{R}^d}\nabla^s(h_n)\nabla^s(h_m)\ dx\right)^2\\
&\qquad\qquad+E\left(\sum_{n,m}\chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right)c_n\overline{c_m}\ g_n(\omega)\overline{g_m(\omega)}\right)^2\\
&\leq CE\left(\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4}\chi\left(\frac{\lambda_{n_1}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_2}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_3}^2}{N^2}\right)\chi\left(\frac{\lambda_{n_4}^2}{N^2}\right)\times c_{n_1}\overline{c_{n_2}}c_{n_3}\overline{c_{n_4}}\right.\\
&\qquad\left.\times||\nabla^s(h_{n_1})||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\nabla^s(h_{n_2})||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\nabla^s(h_{n_3})||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\nabla^s(h_{n_4})||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)\\
&\qquad\qquad+CE\left(\sum_n\chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right)|c_n|^2\right)^2\\
&\leq C_2\sigma_N^4.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P\left(M^2\geq\frac{C_1\sigma_N^2}{2}\right)\geq\frac{1}{4}\times\frac{C_1^2}{C_2},$$

puis, en utilisant un théorème de convergence monotone, on trouve

$$P\left(M=\infty\right)\geq\frac{1}{4}\times\frac{C_1^2}{C_2}.$$

Et le théorème est démontré. ⊠

3.2 L'effet régularisant pour l'oscillateur harmonique

Dans cette section, on donne une preuve de l'effet régularisant, plus courte et différente de [YZ1] et [YZ2]. Cet effet régularisant se révèlera fondamental pour appliquer le théorème de point fixe de Picard. L'objectif de cette partie est donc de prouver le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit $\epsilon\in]0,\frac{1}{2}[$ alors il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\left|\left|\frac{1}{<x>^{1/2-\epsilon}}\sqrt{H}^{1/2-2\epsilon}e^{itH}u_0\right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)}\leq C||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)},\tag{3.4}$$

et pour tout $u_0\in\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|\left|\frac{1}{<x>^{1/2-\epsilon}}|\nabla|^{d/2-2\epsilon}e^{itH}u_0\right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)}\leq C||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}.\tag{3.5}$$

3.2.1 Quelques résultats préliminaires

On commence par établir 4 lemmes préliminaires.

Lemme 3.2.2 *Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tel que $\nabla a \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}^d))$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} a(x).\nabla u(x)\overline{u}(x)\ dx \right| \leq C||u||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve
On définit

$$b(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x).\nabla u(x) v(x)\ dx.$$

Alors, clairement, on a

$$|b(u,v)| \leq C||u||_{H^1(\mathbb{R}^d)}||v||_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

ainsi que

$$|b(u,v)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \sum_{i=1}^d \partial_i \left(a_i(x)v(x)\right)\ dx \right| \leq C||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}||v||_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Par conséquent, par interpolation, pour tout $s \in [0,1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|b(u,v)| \leq C||u||_{H^s(\mathbb{R}^d)}||v||_{H^{1-s}(\mathbb{R}^d)}.$$

Le lemme est donc démontré en choisissant $s = 1/2$. ⊠

Lemme 3.2.3 *Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que $|a(x)| \leq |x|^{2\epsilon}$ et $|\nabla a(x)| \leq 1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} a(x).\nabla u(x)\overline{u}(x)\ dx \right| \leq C||u||^2_{\overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve
Il s'agit essentiellement de la même preuve que le Lemme 3.2.2.

On définit

$$b(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x).\nabla u(x) v(x)\ dx.$$

Alors, on trouve

$$|b(u,v)| \leq C||u||_{H^1(\mathbb{R}^d)}||v||_{\overline{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^d)}||v||_{\overline{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)},$$

ainsi que

$$\begin{aligned} |b(u,v)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \sum_{i=1}^d \partial_i \left(a_i(x)v(x)\right)\ dx \right| &\leq C||u||_{\overline{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)}||v||_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C||u||_{\overline{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)}||v||_{\overline{H}^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Puis, par interpolation, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in [0,1]$,

$$|b(u,v)| \leq C||u||_{\overline{H}^{(1-2\epsilon)s+2\epsilon}(\mathbb{R}^d)}||v||_{\overline{H}^{1-s(1-2\epsilon)}(\mathbb{R}^d)}.$$

Le lemme est donc prouvé en prenant $s = 1/2$. ⊠

Lemme 3.2.4 *Soient s_1 et s_2 deux réels.*
- Si $\max(s_2, s_1+s_2) \leq 1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$||\ [\sqrt{H}^{s_1+s_2}; < x >^{-s_1}]u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

- Si $s_2 \geq -1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^{s_1-1}(\mathbb{R}^d)$,

$$||\ [\ |\nabla|^{s_1}; < x >^{-s_2}]u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{H^{s_1-1}(\mathbb{R}^d)},$$

- Si $s_2 \leq 1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{H}^{s_1-s_2}(\mathbb{R}^d)$,

$$||\ [\sqrt{H}^{s_1}; < x >^{-s_2}]u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{\overline{H}^{s_1-s_2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve
Pour évaluer la régularité du commutateur, on utilise le calcul pseudo-différentiel de Wey-Hörmander associé à la métrique $\frac{dx^2}{1+x^2} + \frac{d\xi^2}{1+\xi^2}$.

La classe des symboles $S(\mu, m)$ associée à la métrique précédente est l'espace des fonctions régulières sur $\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d$ qui vérifient $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} < x >^{\mu-\alpha} < \xi >^{m-\beta}$.

Ainsi, nous avons (voir [H] section 18.5, [R] ou [Bou1]) que si $a_1 \in S(\mu_1, m_1)$ et $a_2 \in S(\mu_2, m_2)$ alors le commutateur $[Op(a_1), Op(a_2)]$ est un opérateur pseudo-différentiel avec un symbole dans la classe $S(\mu_1 + \mu_2 - 1, m_2 + m_2 - 1)$.

Par conséquent,

$$[\sqrt{H}^{s_1+s_2}, < x >^{-s_1}] \in S(s_2 - 1, s_1 + s_2 - 1) \subset S(0, s_1 + s_2 - 1).$$

De plus, comme rappelé dans [M], si $q \in S(0, \mu)$ alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||Op(q)u||_{H^{s-\mu}(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, nous pouvons prendre $s = \mu = s_1 + s_2 - 1$ pour obtenir que

$$||[\sqrt{H}^{s_1+s_2}, < x >^{-s_1}]u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{H^{s_1+s_2-1}(\mathbb{R}^d)} \leq ||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

De manière similaire,

$$[\ |\nabla|^{s_1}; < x >^{-s_2}] \in S(-s_2 - 1, s_1 - 1) \subset S(0, s_1 - 1),$$

et nous pouvons conclure de la même façon pour le second point.

Pour le dernier point, nous avons

$$[\sqrt{H}^{s_1}; < x >^{-s_2}]\sqrt{H}^{s_2-s_1} \in S(-1, s_2 - 1) \subset S(0, s_2 - 1).$$

Puis

$$||[\sqrt{H}^{s_1}; < x >^{-s_2}]\sqrt{H}^{s_2-s_1} u||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

et il suffit de remplacer u par $\sqrt{H}^{s_1-s_2}u$ pour obtenir le résultat désiré. ⊠

Lemme 3.2.5 *Soit $s \geq 0$ alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$,*

$$C_1 \times ||\ |\nabla|^s(f)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ||\nabla^s(f)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \times ||\ |\nabla|^s(f)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve
En utilisant l'égalité de Plancherel, il suffit de remarquer que la fonction

$$b(\xi_1,\ \ldots, \xi_d) = \frac{\left(\sum_i \xi_i^2\right)^{s/2}}{\sqrt{\sum_i \xi_i^{2s}}},$$

est positive, continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et homogène (c'est à dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $b(\lambda\xi) = b(\xi)$). ⊠

Ces différents lemmes établis, nous pouvons passer à la preuve de l'effet régularisant.

3.2.2 Preuve de (3.4)

Étape 1 :

À l'aide du calcul pseudo différentiel, soit le Théorème 2.2.4, on trouve

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x.D_x}{< x >^\alpha}; \Delta\right] &= \frac{x.D_x}{< x >^\alpha}\Delta - \Delta\frac{x.D_x}{< x >^\alpha} \\
&= Op\left(\frac{x.\xi}{< x >^\alpha}\right) Op\left(-\xi^2\right) - Op\left(-\xi^2\right) Op\left(\frac{x.\xi}{< x >^\alpha}\right) \\
&= Op\left(-2i \times \left(\frac{\xi^2}{< x >^\alpha} - \alpha\frac{(x.\xi)^2}{< x >^{\alpha+2}}\right) + 2\alpha(d+2)\frac{x.\xi}{< x >^{\alpha+2}} + 2\alpha(\alpha+2)\frac{x.\xi\ x^2}{< x >^{\alpha+4}}\right).
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant que $\alpha < 1$, on obtient

$$\Re\left(i\int_{\mathbb{R}^d} Op\left(-2i\times\left(\frac{\xi^2}{<x>^\alpha}-\alpha\frac{(x.\xi)^2}{<x>^{\alpha+2}}\right)u(x)\quad\times\overline{u}(x)\,dx\right)\right)$$

$$=2\Re\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{-\Delta u}{<x>^\alpha}\;\;\overline{u}-\alpha\frac{(x.D_x)^2u+i(x.D_x)u}{<x>^{\alpha+2}}\;\;\overline{u}\,dx\right)$$

$$=2\Re\left(\int_{\mathbb{R}^d}\nabla u.\nabla(\frac{\overline{u}}{<x>^{\alpha+2}})-\alpha(x.\nabla u)\times\; div\left(\frac{x\overline{u}}{<x>^{\alpha+2}}\right)-i\alpha\frac{(x.D_x)u}{<x>^{\alpha+2}}\;\;\overline{u}\,dx\right)$$

$$=2\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{|\nabla u|^2}{<x>^\alpha}-\alpha\frac{(x.\nabla u)^2}{<x>^{\alpha+2}}\,dx\right)+2\alpha\,\Re\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\alpha+2)\frac{x^2(x.\nabla u)}{<x>^{\alpha+4}}\;\;\overline{u}-(d+1)\frac{x.\nabla u}{<x>^{\alpha+2}}\;\;\overline{u}\,dx\right)$$

$$\geq 2(1-\alpha)\times\left|\left|\frac{1}{<x>^{\alpha/2}}\nabla u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+2\alpha\,\Re\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\alpha+2)\frac{x^2(x.\nabla u)}{<x>^{\alpha+4}}\;\;\overline{u}-(d+1)\frac{x.\nabla u}{<x>^{\alpha+2}}\;\;\overline{u}\,dx\right).$$

Grâce au Lemme 3.2.2, on établit

$$\begin{aligned}\Re\bigg(i\int_{\mathbb{R}^d} Op\left(2\alpha(d+2)\frac{x.\xi}{<x>^{\alpha+2}}+2\alpha(\alpha+2)\frac{x.\xi\;x^2}{<x>^{\alpha+4}}\right)u\;\;\overline{u}\,dx\bigg)&\\ +2\alpha\,\Re\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\alpha+2)\frac{x^2(x.\nabla u)}{<x>^{\alpha+4}}\;\;\overline{u}-(d+1)\frac{x.\nabla u}{<x>^{\alpha+2}}\;\;\overline{u}\,dx\right)&\leq C||u||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\alpha < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Re\bigg(i\int_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{x.D_x}{<x>^\alpha},\Delta\right]u(x)\overline{u}(x)dx\bigg)\geq 2(1-\alpha)\left|\left|\frac{1}{<x>^{\alpha/2}}\nabla u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-C||u||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}.$$

De manière similaire, on a

$$\left[\frac{x.D_x}{<x>^\alpha};-x^2\right]=Op\left(\frac{2ix^2}{<x>^\alpha}\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}\Re\bigg(i\int_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{x.D_x}{<x>^\alpha};-x^2\right]u(x)\;\;\overline{u(x)}\bigg)\,dx&=-2\int_{\mathbb{R}^d}\frac{x^2}{<x>^\alpha}|u(x)|^2\,dx\\&\geq -C||u||^2_{\overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Finalement, nous avons montré que pour tout $\alpha < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)$

$$\Re\bigg(i\int_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{x.D_x}{<x>^\alpha},-H\right]u(x)\overline{u}(x)dx\bigg)\geq 2(1-\alpha)\left|\left|\frac{1}{<x>^{\alpha/2}}\nabla u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-C||u||^2_{\overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)}.\qquad(3.6)$$

Étape 2 :

Si nous choisissons $u = e^{-itH}u_0$ alors on trouve

$$\begin{aligned}
&- i\int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{x.D_x}{< x >^{\alpha}}, H\right] u(t,x)\ \ \overline{u}(t,x)\ dx \\
=&\ - i\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x.\nabla\partial_t u(t,x)}{< x >^{\alpha}}\ \ \overline{u(t,x)}\ dx + i\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x.D_x}{< x >^{\alpha}} u(t,x)\ \ \overline{Hu(t,x)}\ dx \\
=&\ - i\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x.\nabla_x\partial_t u(t,x)}{< x >^{\alpha}}\ \ \overline{u(t,x)}\ dx - i\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x.\nabla_x}{< x >^{\alpha}} u(t,x)\ \ \overline{\partial_t u(t,x)}\ dx \\
=&\ - i\partial_t\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x.\nabla_x}{< x >^{\alpha}} u(t,x)\ \ \overline{u(t,x)}\ dx\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à (3.6), on obtient pour $T \geq 0$,

$$\begin{aligned}
2(1-\alpha)\int_0^T \left|\left|\frac{1}{< x >^{\alpha/2}}\nabla(e^{-itH}u_0)\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \leq CT||u_0||^2_{H^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)} \\
+ \Re\left(i\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x.\nabla_x u_0}{< x >^{\alpha}}\ \ \overline{u_0} - \frac{x.\nabla_x e^{-iTH}u_0}{< x >^{\alpha}}\ \ \overline{e^{-iTH}u_0}\ dx\right).
\end{aligned}$$

Puis, par le Lemme 3.2.3, on trouve pour tout $\alpha \in]0,1[$, l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $T \geq 0$ et $u_0 \in \overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_0^T \left|\left|\frac{1}{< x >^{\alpha/2}}\nabla e^{-itH}u_0\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \leq CT||u_0||^2_{\overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Étape 3 :

On prend $\alpha = 1 - 2\epsilon$ avec $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ pour avoir

$$\int_0^T \left|\left|\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}}\nabla e^{-itH}u_0\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \leq CT||u_0||^2_{\overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}.$$

En utilisant le Lemme 3.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\left|\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}}H^{1/2-\epsilon/2}e^{itH}u_0\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\
\leq&\ \int_0^T \left|\left|H^{1/2-\epsilon/2}\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}}e^{itH}u_0\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \left|\left|\ \left[\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}}; H^{1/2-\epsilon/2}\right]e^{itH}u_0\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
\leq&\ \int_0^T \left|\left|H^{1/2-\epsilon/2}\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}}e^{itH}u_0\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + T||u_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la Proposition 1.2.7, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\left| H^{1/2-\epsilon/2} \frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \int_0^T \left|\left| < x >^{1/2+\epsilon/2} e^{itH} u_0 \right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt + \int_0^T \left|\left| \nabla^{1-\epsilon} \left(\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\
&\leq CT ||u_0||^2_{\overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \left|\left| \nabla \left(\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\
&\leq CT ||u_0||^2_{\overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \left|\left| \frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} \nabla \left(e^{itH} u_0 \right) \right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\
&\leq CT ||u_0||^2_{\overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous trouvons

$$\int_0^T \left|\left| \frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} H^{1/2-\epsilon/2} e^{-itH} u_0 \right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \leq CT ||u_0||^2_{\overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}.$$

Et nous pouvons remplacer u_0 par $H^{-1/4-\epsilon/2} u_0$ pour prouver le théorème. ⊠

3.2.3 Preuve de (3.5)

En utilisant le Lemme 3.2.4 et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\left| \sqrt{H}^{d/2-2\epsilon} \frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \left|\left| \frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} \sqrt{H}^{d/2-2\epsilon} e^{itH} u_0 \right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)} + \left|\left| \left[\sqrt{H}^{d/2-2\epsilon}; \frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} \right] e^{itH} u_0 \right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C ||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la Proposition 1.2.7, on établit

$$\left|\left| \nabla^{d/2-2\epsilon} \left(\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)} \leq C ||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Et finalement, en utilisant les Lemmes 3.2.4 et 3.2.5, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned}
&\left|\left| \frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} |\nabla|^{d/2-2\epsilon} (e^{itH} u_0) \right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \left|\left| \left[\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}}; |\nabla|^{d/2-2\epsilon} \right] e^{itH} u_0 \right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)} + \left|\left| \nabla^{d/2-2\epsilon} \left(\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right|\right|_{L^2([-2\pi,2\pi]*\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C ||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

⊠

3.3 L'argument de point fixe

Dans cette partie, on établit des estimées qui seront utiles pour appliquer un théorème de point fixe de Picard. On commence par montrer deux lemmes préliminaires.

Lemme 3.3.1 *Soient* $(q,r) \in [2,\infty[\times[2,\infty]$, $s, s_0 \geq 0$ *et supposons que* $s - s_0 > \frac{d}{2} - \frac{2}{q} - \frac{d}{r}$, *alors il existe deux constantes* $\kappa, C > 0$ *telles que pour tous* $T \geq 0$ *et* $u \in \overline{X}^s_T$,

$$||u||_{L^q([-T,T],\overline{W}^{s_0,r}(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa ||u||_{\overline{X}^s_T}.$$

Preuve
Soit $\epsilon > 0$ alors il existe $\kappa_\epsilon > 0$ tel que

$$||u||_{L^q([-T,T],\overline{W}^{s_0,r}(\mathbb{R}^d))} \leq T^{\kappa_\epsilon} ||u||_{L^{q+\epsilon}([-T,T],\overline{W}^{s_0,r}(\mathbb{R}^d))}.$$

Or le couple $(q+\epsilon, \frac{2d(q+\epsilon)}{dq+d\epsilon-4})$ est admissible avec

$$\overline{W}^{s,\frac{2d(q+\epsilon)}{dq+d\epsilon-4}}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \overline{W}^{s_0,r}(\mathbb{R}^d) \text{ si } s - s_0 \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{q+\epsilon} - \frac{d}{r}.$$

Mais, comme $s - s_0 > \frac{d}{2} - \frac{2}{q} - \frac{d}{r}$ alors il existe $0 < \epsilon \ll 1$ tel que $s - s_0 \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{q+\epsilon} - \frac{d}{r}$. ⊠

Lemme 3.3.2 *Soit* $s \geq 0$ *alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour toutes fonctions* f *et* g *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$||\nabla^s(fg)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \times \Big(||\ |\nabla|^s(f) \times g||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + ||f \times |\nabla|^s(g)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Big).$$

Preuve
Par la transformée de Fourier et le Lemme 3.2.5, on obtient

$$\begin{aligned} ||\nabla^s(fg)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq C \times ||\ |\xi|^s \mathcal{F}(fg)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times ||\ |\xi|^s (\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Or pour tous ξ et η dans $\mathbb{R}^d$,

$$|\xi|^s \leq (|\eta| + |\xi - \eta|)^s \leq C_s \times (|\eta|^s + |\xi - \eta|^s).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} ||\nabla^s(fg)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_s \times \Big(||(|.|^s \mathcal{F}(f)) * \mathcal{F}(g)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + ||\mathcal{F}(f) * (|.|^s \mathcal{F}(g))||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Big) \\ &\leq C_s \times \Big(||\mathcal{F}(|\nabla|^s f \times g)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + ||\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(|\nabla|^s g)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Big) \\ &\leq C_s \times \Big(||\ |\nabla|^s f \times g||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + ||f \times |\nabla|^s g||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Big). \end{aligned}$$ ⊠

Puis, on établit les estimées attendues.

Proposition 3.3.3 *Soit $s > \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$ alors il existe deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que si nous supposons*

$$||e^{-itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda$$

pour un certain λ, alors pour tous $0 < T \leq 1$, $v \in \overline{X}_T^s$ et $f_i = v$ ou $f_i = e^{-itH}u_0$,

$$||\ |\nabla|^s(v) \times \prod_{i=2}^p f_i||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa(\lambda^p + ||v||^p_{\overline{X}_T^s}),$$

et

$$||<x>^s \times v \times \prod_{i=2}^p f_i||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa(\lambda^p + ||v||^p_{\overline{X}_T^s}).$$

Preuve
D'après l'inégalité de Hölder et la Proposition 1.2.7,

$$\begin{aligned} ||\ |\nabla|^s(v) \times \prod_{i=2}^p f_i||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq ||\ |\nabla|^s(v)||_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p ||f_i||_{L^{p-1}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C||v||_{L^\infty([-T,T],\overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p ||f_i||_{L^{p-1}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ||<x>^s \times v \times \prod_{i=2}^p f_i||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq ||<x>^s v||_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p ||f_i||_{L^{p-1}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq ||v||_{L^\infty([-T,T],\overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p ||f_i||_{L^{p-1}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

Si $f_i = v$ alors comme $s > \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$, nous pouvons utiliser le Lemme 3.3.1 pour obtenir

$$||v||_{L^{p-1}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa||v||_{\overline{X}_T^s}.$$

Si $f_i = e^{-itH}u_0$ alors d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} ||e^{-itH}u_0||_{L^{p-1}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} &\leq T^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}}||e^{-itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq T^{\frac{1}{p(p-1)}}\lambda. \end{aligned}$$

⊠

Proposition 3.3.4 *Soit $\frac{d}{2} > s > 0$ alors il existe deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que si nous supposons que*

$$||e^{-itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{8},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda,$$

et

$$||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda$$

pour un certain λ, alors pour tout $0 < T \leq 1$,

$$||<x>^s \times (e^{-itH}u_0)^p||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa\lambda^p.$$

Preuve
D'après l'inégalité de Hölder et la Proposition 1.2.7, on obtient

$$\begin{aligned}
&|| < x >^s \times (e^{-itH}u_0)^p||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
\leq\ & || < x >^{\frac{d}{2}} \times (e^{-itH}u_0)^p||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
\leq\ & || < x >^{\frac{d-1}{2}} \times e^{-itH}u_0||_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \times || < x >^{\frac{1}{2(p-1)}} \times e^{-itH}u_0||^{p-1}_{L^{p-1}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\
\leq\ & CT^{1/p}||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d))} \times ||e^{-itH}u_0||^{p-1}_{L^p([-T,T],\overline{W}^{\frac{1}{8},\infty}(\mathbb{R}^d))} \\
\leq\ & CT^{1/p}\lambda^p.
\end{aligned}$$

⊠

Proposition 3.3.5 *Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que si nous supposons que*

$$||e^{-itH}u_0||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda,$$

et

$$||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda$$

pour un certain λ, alors pour tous $0 < T \leq 1$, $v \in \overline{X}^s_T$ et $f_i = v$ ou $f_i = e^{-itH}u_0$,

$$|| \ |\nabla|^s(e^{-itH}u_0) \times \prod_{i=2}^p f_i||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa(\lambda^p + ||v||^p_{\overline{X}^s_T}).$$

Preuve
Pour tout $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&|| \ |\nabla|^s(e^{-itH}u_0) \times \prod_{i=2}^p f_i||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \\
\leq\ & \left|\left|\frac{1}{< x >^{1/2-\epsilon}}|\nabla|^s(e^{-itH}u_0)\right|\right|_{L^2([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p || < x >^{\frac{1}{p-1}*(\frac{1}{2}-\epsilon)} f_i||_{L^{2(p-1)}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}$$

Puis, nous choisissons $s = \frac{d}{2} - 2\epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$ pour obtenir en utilisant (3.5) que

$$\begin{aligned}
|| \ |\nabla|^s(e^{-itH}u_0) \times \prod_{i=2}^p f_i||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} &\leq \lambda \times \prod_{i=2}^p || < x >^{\frac{1}{p-1}*(\frac{1}{2}-\epsilon)} f_i||_{L^{2(p-1)}([-T,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq \lambda \times \prod_{i=2}^p ||f_i||_{L^{2(p-1)}([-T,T],\overline{W}^{\frac{1}{p-1}*(\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon,\frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))},
\end{aligned}$$

Si $f_i = e^{-itH}u_0$, par interpolation, nous pouvons trouver l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\begin{aligned}&||e^{-itH}u_0||_{L^{2(p-1)}([-T,T],\overline{W}^{\frac{1}{p-1}*(\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon,\frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))}\\ &\leq C \times T^\kappa \times ||e^{-itH}u_0||^\theta_{L^{2p}([-T,T],\overline{W}^{s_0,\infty}(\mathbb{R}^d))} \times ||e^{-itH}u_0||^{1-\theta}_{L^\infty([-T,T],\overline{W}^{\frac{d-1}{2},2}(\mathbb{R}^d))}\end{aligned}$$

où $\theta = \frac{d-\epsilon}{d+\epsilon}$ et $s_0 = (\frac{1-\theta}{\theta})(\frac{d-1}{2}) + \frac{1}{\theta(p-1)}(\frac{1}{2}-\epsilon) + \frac{\epsilon}{\theta}$.

Or $||e^{-itH}u_0||_{L^\infty([-T,T],\overline{W}^{\frac{d-1}{2},2}(\mathbb{R}^d))} \leq ||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda$, puis comme

$$s_0 = \frac{1}{2(p-1)} + C\epsilon + o(\epsilon) \leq \frac{1}{7}$$

alors $||e^{-itH}u_0||_{L^{2p}([-T,T],\overline{W}^{s_0,\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda$ et donc $||e^{-itH}u_0||_{L^{2(p-1)}([-T,T],\overline{W}^{\frac{1}{p-1}*(\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon,\frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda$.

Si $f_i = v$, comme $s - \frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2} - \epsilon) > \frac{d}{2} - \frac{1}{p-1} - \frac{d\epsilon}{d+\epsilon}$ (si $\epsilon \ll \frac{1}{2(p-2)}$) alors par le Lemme 3.3.1, on trouve

$$||v||_{L^{2(p-1)}([-T,T],\overline{W}^{\frac{1}{p-1}*(\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon,\frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa ||v||_{\overline{X}^s_T}. \qquad \boxtimes$$

En analogie à la partie 2.4, on introduit la définition suivante :

Définition 3.3.6 *Soit $\lambda \geq 0$ et définissons $E_0(\lambda)$ comme l'ensemble des fonctions $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ qui vérifient*

$$\begin{cases} ||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} & \leq \lambda, \\ ||e^{-itH}u_0||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} & \leq \lambda. \end{cases}$$

Enfin, on peut établir les deux théorèmes principaux de cette partie.

Théorème 3.3.7 *Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$ alors pour tout $v \in \overline{X}^s_T$ et $0 < T \leq 1$,*

$$\begin{aligned}&\left|\left| \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)\ ds \right|\right|_{\overline{X}^s_T}\\ &\qquad \leq C \times T^\kappa \times (\lambda^p + ||v||^p_{\overline{X}^s_T}).\end{aligned}$$

Preuve

En utilisant les Propositions 2.1.4 et 1.2.7, on obtient

$$\begin{aligned}&\left|\left| \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)\ ds \right|\right|_{\overline{X}^s_T}\\ &\leq C||\ K\cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} \times |e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)||_{L^1([-T,T],\overline{H}^s(\mathbb{R}^d))}\\ &\leq C||\ |e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)||_{L^1([-T,T],\overline{H}^s(\mathbb{R}^d))}\\ &\leq C||\ \nabla^s \left(\ |e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)\right) ||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))}\\ &\qquad + C||\ < x >^s \times |e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

Puis, en utilisant le Lemme 3.3.2 et les Propositions 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5, nous pouvons trouver une constante $\kappa > 0$ telle que pour tous $u_0 \in E_0(\lambda)$, $0 < T \leq 1$ et $v \in \overline{X}^s_T$,

$$|| \ \nabla^s \left(|e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)\right) ||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa(\lambda^p + ||v||^p_{\overline{X}^s_T}),$$

et

$$|| \ < x >^s \times |e^{-isH}u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v)||_{L^1([-T,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa(\lambda^p + ||v||^p_{\overline{X}^s_T}).$$

⊠

De manière similaire, on démontre le théorème suivant :

Théorème 3.3.8 *Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$ (le même que dans le théorème 3.3.7), $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$ alors pour tous $0 < T \leq 1$ et $v_1, v_2 \in \overline{X}^s_T$,*

$$\begin{aligned}\Bigg|\Bigg| \int_0^t & e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH}u_0 + v_1|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v_1) \ ds \\ & - \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH}u_0 + v_2|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v_2) \ ds \Bigg|\Bigg|_{\overline{X}^s_T} \\ \leq & \ CT^\kappa \times ||v_1 - v_2||_{\overline{X}^s_T} \times (\lambda^{p-1} + ||v_1||^{p-1}_{\overline{X}^s_T} + ||v_2||^{p-1}_{\overline{X}^s_T}).\end{aligned}$$

3.4 Solutions globales pour l'équation (NLS)

Dans cette partie, on applique un théorème de point fixe pour établir l'existence de solutions globales pour l'équation (NLS). De manière analogue à la section 2.5, on introduit l'équation suivante :

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} - Hu = K\cos(2t)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} \times |u|^{p-1}u, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{NLSH}$$

où $p \geq 5$ désigne un entier impair et $K \in \{-1, 1\}$.

Théorème 3.4.1 *Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $0 < T \leq 1$, si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda < C \times T^{-\delta}$ alors il existe une unique solution à l'équation (NLSH) sur $[-T, T]$ dans l'espace $e^{-itH}u_0 + B_{\overline{X}^s_T}(0, \lambda)$.*

Preuve
Définissons

$$L(v) = -i\int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1}(e^{-isH}u_0 + v(s)) \ ds,$$

et remarquons que $u = e^{-itH}u_0 + v$ est l'unique solution de (NLSH) sur $[-T, T]$ dans l'espace $e^{-itH}u_0 + B_{\overline{X}^s_T}(0, R)$ si et seulement si v est l'unique point fixe de L sur $B_{\overline{X}^s_T}(0, R)$.

Selon les Propositions 3.3.7 et 3.3.8, il existe deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que

$$||L(v)||_{\overline{X}^s_T} \leq CT^\kappa(\lambda^p + ||v||^p_{\overline{X}^s_T})$$
$$||L(v_1) - L(v_2)||_{\overline{X}^s_T} \leq CT^\kappa||v_1 - v_2||_{\overline{X}^s_T}(\lambda^{p-1} + ||v_1||^{p-1}_{\overline{X}^s_T} + ||v_2||^{p-1}_{\overline{X}^s_T}).$$

Par conséquent, si $\lambda < (\frac{1}{8CT^\kappa})^{\frac{1}{p-1}}$ alors L est une application contractante de $B_{\overline{X}^s_T}(0, \lambda)$ et le théorème suit. ⊠

Théorème 3.4.2 *Il existe* $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C_1, C_2 > 0$ *tels que si* $u_0 \in E_0(\lambda)$ *avec* $\lambda < C_1$ *alors il existe une solution globale à (NLS) dans l'espace* $e^{it\Delta}u_0 + B_{X^s}(0, C_2)$.

Preuve
Soit u donnée par le Théorème 3.4.1 avec $T = \frac{\pi}{4}$. On applique à u la transformation de lentille définie en section 2.1.3 pour obtenir une fonction $\tilde{u}$ qui, d'après les Propositions 2.1.14 et 2.1.16, vérifie les conditions du théorème. ⊠

Théorème 3.4.3 *Il existe* $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C_1, C_2 > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que pour tout* $0 < T \leq 1$, *si* $u_0 \in E_0(\lambda)$ *avec* $\lambda < C_1(\arctan 2T)^{-\delta}$ *alors il existe une solution à (NLS) sur* $[-T, T]$ *dans l'espace* $e^{it\Delta}u_0 + B_{X^s_T}(0, C_2\lambda^p)$.

Preuve
Soit u donnée par le Théorème 3.4.1 à T remplacé par $\frac{1}{2}\arctan 2T$. Puis, comme pour le théorème précédent, on applique à u la transformation de lentille définit en section 2.1.3 pour obtenir une fonction $\tilde{u}$ qui, d'après la Proposition 2.1.14 et la remarque de la Proposition 2.1.16, vérifie les conditions du théorème. ⊠

On démontre ensuite l'unicité des solutions construites.

Théorème 3.4.4 *Soient* $\frac{d}{2} > s > \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$, $u_0 \in E_0(\lambda)$ *et* $T \in]0, 1]$. *Supposons donnés* $\tilde{u}_1$ *et* $\tilde{u}_2$ *deux solutions de (NLS) sur [-T,T] de l'espace* $e^{it\Delta}u_0 + X^s_T$ *alors,*

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t) \ \textit{dans} \ L^2(\mathbb{R}^d), \ \forall t \in [-T, T].$$

Preuve
Comme pour le Théorème 2.5.3, il suffit de prouver le théorème pour $t \in [0, T]$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_t||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= 2\Re(< \partial_t(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) >_{L^2(\mathbb{R}^d)\times L^2(\mathbb{R}^d)}) \\
&= 2| < |\tilde{u}_1(t)|^{p-1}\tilde{u}_1(t) - |\tilde{u}_2(t)|^{p-1}\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) >_{L^2(\mathbb{R}^d)\times L^2(\mathbb{R}^d)} | \\
&\leq 2||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times || \, |\tilde{u}_1(t)|^{p-1}\tilde{u}_1(t) - |\tilde{u}_2(t)|^{p-1}\tilde{u}_2(t)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq 2(p-1)||\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \left(||\tilde{u}_1(t)||^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + ||\tilde{u}_2(t)||^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right).
\end{aligned}$$

Puis, par le Lemme de Grönwall, le théorème est prouvé si $||\tilde{u}_1(t)||^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + ||\tilde{u}_2(t)||^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \in L^1_{loc}$ puisque $||\tilde{u}_1(0) - \tilde{u}_2(0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Mais, en utilisant les Propositions 2.1.15 et 3.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}||\tilde{u}_i||_{L^{p-1}([0,T]),L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq ||e^{it\Delta}u_0||_{L^{p-1}([0,T]),L^\infty(\mathbb{R}^d))} + ||\tilde{v}_i||_{L^{p-1}([0,T]),L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C_T \times (||e^{-itH}u_0||_{L^{p-1}([-2\pi,2\pi]),L^\infty(\mathbb{R}^d))} + ||\tilde{v}_i||_{X_T^s}) \\ &\leq C_T \times (\lambda + ||\tilde{v}_i||_{X_T^s}).\end{aligned}$$

et le théorème est démontré. ⊠

Enfin, on démontre que les solutions globales construites diffusent en ∞ et en $-\infty$.

Théorème 3.4.5 *Soit $\tilde{u}$ l'unique solution globale de (NLS) construite dans le Théorème 3.4.2 alors il existe $L^+ \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tels que*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0, \\ \lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.\end{aligned}$$

Preuve
On pose $T = \frac{\pi}{4}$, alors grâce aux Propositions 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5, on obtient

$$\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\left[\,|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0+v(s))\right]\,ds \in \overline{X}_T^s \hookrightarrow C^0([-T,T],\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)).$$

Ainsi, il existe $L \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\lim_{t\to T}\left|\left|\int_0^t e^{-i(t-s)H}K\cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\left[\,|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} * (e^{-isH}u_0+v(s))\right]\,ds - L\right|\right|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

puis

$$\lim_{t\to T}\left|\left|\int_0^t e^{isH}K\cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\left[\,|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} * (e^{-isH}u_0+v(s))\right]\,ds - e^{iTH}L\right|\right|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Or, d'après le Lemme 2.1.18, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t) &= e^{-itH}\int_0^t e^{isH}K\cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\left[\,|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} * (e^{-isH}u_0+v(s))\right]\,ds \\ &= e^{it\Delta}\int_0^{\frac{1}{2}\arctan 2t} e^{isH}K\cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\left[\,|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} * (e^{-isH}u_0+v(s))\right]\,ds,\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{v}(t) - e^{it\Delta}e^{iTH}L||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

⊠

3.5 Estimation de la régularité de la donnée initiale aléatoire

Définition 3.5.1 *Pour $t > 0$, définissons*

$$\Omega_t = (\omega \in \Omega / u_0^\omega \in E_0(t)) .$$

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant :

Théorème 3.5.2 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_1}) ou (H_{E_2}), il existe des constantes $m(\gamma), C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$,*

$$P(\Omega_t^c) \leq C \exp\left(-c \left(\frac{t}{||u_0||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}} \right)^{m(\gamma)} \right),$$

où

$$m(\gamma) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{2+\gamma} & \textit{sous } (H_{E_1}) \quad \textit{si } \gamma \in]0,1], \\ \frac{2\gamma}{2\gamma+2} & \textit{sous } (H_{E_2}) \quad \textit{si } \gamma \in]0,1], \\ \gamma & \textit{sous } (H_{E_2}) \quad \textit{si } \gamma \in]1,2], \\ 2 & \textit{sous } (H_{E_2}) \quad \textit{si } \gamma \geq 2. \end{cases}$$

Par l'inégalité triangulaire, nous pouvons écrire

$$P(\Omega_t^c) \leq P\left(\omega \in \Omega / \ ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq t\right) + P\left(\omega \in \Omega / \ ||e^{-itH}u_0||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \geq t\right) \quad (3.7)$$

et il suffit de montrer la majoration du Théorème 3.5.2 pour chacun de ces deux termes. On commence par évaluer les moments de nos variables aléatoires à travers le lemme suivant :

Lemme 3.5.3 *Sous l'hypothèse (H_γ), il existe des constantes $C_1, C_2, c > 0$ telles que pour tous $p \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$E(|g_n|^p) \leq \begin{cases} C_1 \times \left(\frac{p}{\gamma c}\right)^{\frac{p}{\gamma}} & \textit{si } p \geq \gamma, \\ C_2 & \textit{si } p \leq \gamma. \end{cases}$$

Preuve
On a

$$\begin{aligned} E(|g_n|^p) &= p \int_0^\infty \rho^{p-1} \times P\left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)| \geq \rho\right) \, d\rho \\ &\leq p \int_0^\infty \rho^{p-1} \times C e^{-c\rho^\gamma} \, d\rho \\ &\leq \frac{Cp}{\gamma} \times \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{p}{\gamma}} \times \int_0^\infty \mu^{\frac{p-\gamma}{\gamma}} \times e^{-\mu} \, d\mu \\ &\leq \frac{Cp}{\gamma} \times \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{p}{\gamma}} \times \Gamma\left(\frac{p}{\gamma}\right), \end{aligned}$$

où Γ désigne la fonction gamma d'Euler. En utilisant les estimées de la fonction Γ suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Gamma(x) \le (Cx)^{x-1} & \text{pour } x \ge 1, \\ \Gamma(x) \le \frac{C}{x} & \text{pour } x \le 1, \end{array}$$

on prouve le résultat. ⊠

Puis, grâce à ce dernier lemme, nous pouvons estimer le premier terme de (3.7).

Proposition 3.5.4 *Sous l'hypothèse (H_γ), il existe des constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$,*

$$P\left(\omega \in \Omega \ / \ ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \ge t\right) \le C \exp\left(-\frac{ct^\gamma}{||u_0||^\gamma_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}}\right).$$

Preuve
Il suffit d'établir l'estimation pour $t \ge C||u_0||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}$.

Soit $q \ge \max(1, \frac{\gamma}{2})$ alors d'après l'inégalité de Markov et le Lemme 3.5.3, on trouve

$$\begin{aligned} P\left(\omega \in \Omega \ / \ ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \ge t\right) &= P\left(\omega \in \Omega \ / \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{d-1}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2 \ge t^2\right) \\ &\le t^{-2q} \times E_\omega\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{d-1}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2\right)^q \\ &\le t^{-2q} \times \left|\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{d-1}|c_n|^2|g_n(.)|^2\right|\right|^q_{L^q(\Omega)} \\ &\le t^{-2q} \times \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{d-1}|c_n|^2||g_n(.)||^2_{L^{2q}(\Omega)}\right)^q \\ &\le \left(C \times \frac{||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}}{t} \times \left(\frac{2q}{\gamma c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{2q}. \end{aligned}$$

Puis, nous pouvons choisir $q = \frac{\gamma c}{2} \times \left(\frac{t}{2C||u_0||_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}}\right)^\gamma \ge \max(1, \frac{\gamma}{2})$ pour obtenir

$$\begin{aligned} P\left(\omega \in \Omega \ / \ ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \ge t\right) &\le \frac{1}{2^{2q}} \\ &\le e^{-2\ln(2)q} \le \exp\left(-\frac{ct^\gamma}{||u_0||^\gamma_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}}\right). \end{aligned}$$

⊠

Dès lors, il reste le second terme de (3.7) à estimer. Pour cela, rappelons les estimées des fonctions propres de l'oscillateur harmonique dont la preuve peut être trouvée en Corollaire 3.2 de [KT].

Proposition 3.5.5 *Pour tout $p \in [4, \infty]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$||h_n||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\lambda_n^{-\frac{1}{6}} \qquad \text{si } d = 1,$$
$$||h_n||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\lambda_n^{-1+\frac{d}{2}} \qquad \text{si } d \geq 2.$$

On établit ensuite la proposition fondamentale suivante qui permet d'estimer le second terme de (3.7).

Proposition 3.5.6 *On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et tout $q \geq \max(2, \gamma)$,*

$$\Big|\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\Big|\Big|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{1}{m(\gamma)}} \times \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2}, \tag{E_γ}$$

alors, sous cette condition, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$,

$$P\left(\omega \in \Omega \;/\; ||e^{-itH}u_0^\omega||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \geq t\right) \leq C\exp\left(-c\left(\frac{t}{||u_0||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}}\right)^{m(\gamma)}\right).$$

Preuve
Comme

$$\overline{W}^{\frac{1}{6},r}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{si} \qquad \frac{1}{6} - \frac{1}{7} > \frac{d}{r},$$

on se ramène à démontrer l'existence de deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tous $t \geq 0$ et $r \geq 2$,

$$P\left(\omega \in \Omega \;/\; ||e^{-itH}u_0^\omega||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{6},r}(\mathbb{R}^d))} \geq t\right) \leq C\exp\left(-c\left(\frac{t}{||u_0||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}}\right)^{m(\gamma)}\right). \tag{3.8}$$

Il suffit de montrer l'estimation pour $t \geq C||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)}$. D'après les inégalités de Markov et Minkowsky, on obtient pour $q \geq \max(2p, r, \gamma)$,

$$\begin{aligned} P\left(\omega \in \Omega \;/\; ||e^{-itH}u_0^\omega||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{6},r}(\mathbb{R}^d))} \geq t\right) &\leq t^{-q} \times ||e^{-itH}u_0^\omega||^q_{L^q(\Omega,L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{6},r}(\mathbb{R}^d)))} \\ &\leq t^{-q} \times ||H^{\frac{1}{12}}e^{-itH}u_0^\omega||^q_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],L^r(\mathbb{R}^d,L^q(\Omega)))}. \end{aligned}$$

Puis, grâce à l'hypothèse (E_γ), on obtient

$$\begin{aligned} ||H^{\frac{1}{12}}e^{-itH}u_0^\omega||^q_{L^q(\Omega)} &= \Big|\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{6}} c_n e^{-it\lambda_n^2} h_n(x) g_n(\omega)\Big|\Big|^q_{L^q(\Omega)} \\ &\leq Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}} \times \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{3}} |c_n|^2.|h_n(x)|^2}. \end{aligned}$$

Et finalement, par l'inégalité triangulaire et la Proposition 3.5.5, on a

$$\begin{aligned} P\left(\omega\in\Omega\ /\ \|e^{-itH}u_0^\omega\|_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{6},r}(\mathbb{R}^d))}\geq t\right) &\leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}}}{t}\right)^q\times\left\|\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^{\frac{1}{3}}|c_n|^2.|h_n(x)|^2}\right\|^q_{L^r(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}}}{t}\right)^q\times\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^{\frac{1}{3}}|c_n|^2.|h_n(x)|^2\right\|^{q/2}_{L^{r/2}(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}}}{t}\right)^q\times\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^{\frac{1}{3}}|c_n|^2\ \|h_n(x)\|^2_{L^r(\mathbb{R}^d)}\right)^{q/2}\\ &\leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}}\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}}{t}\right)^q. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de choisir $q=\left(\frac{t}{2C\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}}\right)^{m(\gamma)}$ pour obtenir (3.8). ⊠

Dès lors, on se ramène donc à démontrer (E_γ) pour obtenir le Théorème 3.5.2.

3.5.1 Preuve de (E_γ) sous l'hypothèse (H_{E_1}) si $\gamma\in]0,1]$

On commence par énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.5.7 *Sous l'hypothèse (H_{E_1}), il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $q\geq 1$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{N})$,*

$$E\left(\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}c_n*g_n(\omega)\right)^{2q}\right)\leq (Cq)^q\times E\left(\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(c_n*g_n(\omega))^2\right)^q\right).$$

Preuve
La démonstration de ce résultat est faite en Théorème 4.6 de [QL] et repose sur les inégalités de Khintchine. ⊠

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire et le Lemme 3.5.3, on obtient pour $q\geq\frac{\gamma}{2}$,

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}}c_ng_n(\omega)\right\|^{2q}_{L^{2q}(\Omega)} &\leq (Cq)^q\times\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}}c_n^2g_n(\omega)^2\right\|^q_{L^q(\Omega)}\\ &\leq (Cq)^q\times\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2\times\|g_n\|^2_{L^{2q}(\Omega)}\right)^q\\ &\leq \left(C\times q^{1+\frac{2}{\gamma}}\times\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2\right)^q. \end{aligned}$$

Ce qui démontre (E_γ).

On peut également utiliser les Lemmes 2.6.3 et 2.6.4 pour obtenir ce même résultat. En effet, à l'aide du Lemme 3.5.3, on trouve

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \Big\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} &= \sum_{n_1,\dots,n_{2p}} c_{n_1}\dots c_{n_p}.\overline{c_{n_{p+1}}}\dots\overline{c_{n_{2p}}} \times E\left(\prod_{i=1}^{2p} g_{n_i}\right) \\
&\leq \sum_{n_1,\dots,n_{2p}} |c_{n_1}|\dots|c_{n_{2p}}| \times \left| E\left(\prod_{i=1}^{2p} g_{n_i}\right)\right| \\
&\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{2p}} \sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1}|\dots|c_{n_{2p}}| \right) \times \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|g_n|^{2p}\right) \\
&\leq Card(\mathcal{A}_{2p}) \times (Cp)^{\frac{2p}{\gamma}} \times \sup_{\sigma\in\mathcal{A}_{2p}} \left(\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1}|\dots|c_{n_{2p}}| \right) \\
&\leq (Cp)^{2p(\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma})} \times \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^p.
\end{aligned}$$

3.5.2 Preuve de (E_γ) sous l'hypothèse (H_{E_2}) si $\gamma \in]0,1]$

On commence par démontrer deux lemmes fondamentaux.

Lemme 3.5.8 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et positives, alors pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,*
$\forall\ k \in \{1..2q\},\ \forall\ \alpha_1,\dots,\alpha_k \geq 2$ tel que $\alpha_1+\dots+\alpha_k = 2q$,

$$\sum_{i_1} E(u_{i_1}^{\alpha_1}) \times \dots \times \sum_{i_k} E(u_{i_k}^{\alpha_k}) \leq E\ (\ (\ \sum_k u_k^2\ )^q\ ).$$

Preuve
On prouve le résultat par récurrence forte sur q. L'inégalité est claire pour $q = 1$ et $q = 2$. Soit donc $q \geq 3$ et supposons la propriété établie pour tout $1 \leq q' < q$.

Si les $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sont tous pairs alors par l'inégalité de Jensen, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1} E(u_{i_1}^{\alpha_1}) \times ... \times \sum_{i_k} E(u_{i_k}^{\alpha_k}) &\leq E\Big(\sum_{i_1} u_{i_1}^{\alpha_1}\Big) \times ... \times E\Big(\sum_{i_k} u_{i_k}^{\alpha_k}\Big) \\
&\leq E\bigg(\Big(\sum_{i_1} u_{i_1}^2\Big)^{\frac{\alpha_1}{2}}\bigg) \times ... \times E\bigg(\Big(\sum_{i_k} u_{i_k}^2\Big)^{\frac{\alpha_k}{2}}\bigg) \\
&\leq E\bigg(\Big(\sum_{i_1} u_{i_1}^2\Big)^{q}\bigg)^{\frac{\alpha_1}{2q}} \times ... \times E\bigg(\Big(\sum_{i_k} u_{i_k}^2\Big)^{q}\bigg)^{\frac{\alpha_k}{2q}} \\
&\leq E\ (\ (\sum_k u_k^2\ )^q\ ).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons supposer que α_1 et α_2 sont impairs. On a donc $\alpha_1 = 2\beta_1 + 1$, $\alpha_2 = 2\beta_2 + 1$ avec $\beta_1, \beta_2 \geq 1$.

I/Cas $\alpha_1 + \alpha_2 = 2q$ (i.e $\beta_1 + \beta_2 = q - 1$).

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_i E(u_i^{\alpha_1}) \times \sum_j E(u_j^{\alpha_2}) \\
&\leq \sum_{i,j} \sqrt{E(u_i^{\alpha_1+1}) \times E(u_i^{\alpha_1-1}) \times E(u_j^{\alpha_1+1}) \times E(u_j^{\alpha_2-1})} \\
&\leq \sqrt{\bigg(\sum_{i,j} E(u_i^{\alpha_1+1}) \times E(u_j^{\alpha_2-1})\bigg) \times \bigg(\sum_{i,j} E(u_i^{\alpha_1-1}) \times E(u_j^{\alpha_2+1})\bigg)} \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j} E(u_i^{\alpha_1+1}) \times E(u_j^{\alpha_2-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} E(u_i^{\alpha_1-1}) \times E(u_j^{\alpha_2+1}) \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_i E(u_i^{2(\beta_1+1)}) \times \sum_j E(u_j^{2\beta_2}) + \frac{1}{2}\sum_i E(u_i^{2\beta_1}) \times \sum_j E(u_j^{2(\beta_2+1)}).
\end{aligned}$$

Or, par l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned}
\sum_i E(u_i^{2(\beta_1+1)}) \times \sum_j E(u_j^{2\beta_2}) &\leq E\Big(\sum_i u_i^{2(\beta_1+1)}\Big) \times E\Big(\sum_j u_j^{2\beta_2}\Big) \\
&\leq E\bigg(\Big(\sum_i u_i^2\Big)^{\beta_1+1}\bigg) \times E\bigg(\Big(\sum_j u_j^2\Big)^{\beta_2}\bigg) \\
&\leq E\bigg(\Big(\sum_i u_i^2\Big)^{q}\bigg)^{\frac{\beta_1+1}{q}} \times E\bigg(\Big(\sum_j u_j^2\Big)^{q}\bigg)^{\frac{\beta_2}{q}} \\
&\leq E\ (\ (\sum_k u_k^2\ )^q\ ).
\end{aligned}$$

Et de manière similaire,

$$\sum_i E(u_i^{2\beta_1}) \times \sum_j E(u_j^{2(\beta_2+1)}) \leq E(\ (\ \sum_k u_k^2\ )^q\ ),$$

ce qui complète la preuve du cas 1.

II/Cas $\alpha_1 + \alpha_2 < 2q$ **(i.e** $\beta_1 + \beta_2 < q - 1$**).**

On a $2q - (\alpha_1 + \alpha_2) = 2(q - \beta_1 - \beta_2 - 1) := 2q'$ avec $1 \leq q' < q$.

En utilisant le cas 1, l'hypothèse de récurrence à q' et l'inégalité de Jensen, on établit

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1} E(u_{i_1}^{\alpha_1}) \times ... \times \sum_{i_k} E(u_{i_k}^{\alpha_k}) \\
&\leq \left(\sum_{i_1} E(u_{i_1}^{\alpha_1}) \times \sum_{i_2} E(u_{i_2}^{\alpha_2})\right) \times \left(\sum_{i_3} E(u_{i_3}^{\alpha_3}) \times ... \times \sum_{i_k} E(u_{i_k}^{\alpha_k})\right) \\
&\leq E(\ (\ \sum_k u_k^2\ )^{\beta_1+\beta_2+1}\ ) \times E(\ (\ \sum_k u_k^2\ )^{q'}\ ) \\
&\leq E(\ (\ \sum_k u_k^2\ )^q\ )^{\frac{\beta_1+\beta_2+1}{q}} \times E(\ (\ \sum_k u_k^2\ )^q\ )^{\frac{q'}{q}} \\
&\leq E(\ (\ \sum_k u_k^2\ )^q\ ).
\end{aligned}$$

Ce qui complète le cas 2 et achève la récurrence. ⊠

Lemme 3.5.9 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes d'espérances nulles, alors pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $C(q) > 0$ telle que*

$$E(\ (\sum_k u_k\ )^{2q}\ ) \leq C(q) \times E(\ (\ \sum_k u_k^2\ )^q\ ),$$

où $C(q) =$ désigne le nombre de partitions de $\{1,\ ..\ , 2q\}$.

Preuve
En utilisant le Lemme 3.5.8, on obtient

$$\begin{aligned}
E\Big(\big(\sum_k u_k\big)^{2q} \Big) &= E\left(\sum_{k=1}^{2q} \sum_{\substack{E_1\cup\ldots\cup E_k=\\ \{1..2q\}}} \sum_{\substack{i_1\ldots i_k\\ tous\ distincts}} u_{i_1}^{|E_1|} \times \ldots \times u_{i_k}^{|E_k|} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{2q} \sum_{\substack{E_1\cup\ldots\cup E_k=\\ \{1..2q\}}} \sum_{\substack{i_1\ldots i_k\\ tous\ distincts}} E(u_{i_1}^{|E_1|}) \times \ldots \times E(u_{i_k}^{|E_k|}) \\
&= \sum_{k=1}^{2q} \sum_{\substack{E_1\cup\ldots\cup E_k=\\ \{1..2q\},|E_i|\geq 2}} \sum_{\substack{i_1\ldots i_k\\ tous\ distincts}} E(u_{i_1}^{|E_1|}) \times \ldots \times E(u_{i_k}^{|E_k|}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{2q} \sum_{\substack{E_1\cup\ldots\cup E_k=\\ \{1..2q\},|E_i|\geq 2}} \sum_{i_1\ldots i_k} E(|u_{i_1}|^{|E_1|}) \times \ldots \times E(|u_{i_k}|^{|E_k|}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{2q} \sum_{\substack{E_1\cup\ldots\cup E_k=\\ \{1..2q\}}} E\Big(\big(\sum_k u_k^2\big)^q \Big) \\
&\leq C(q) \times E\Big(\big(\sum_k u_k^2\big)^q \Big).
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. ⊠

Ainsi, pour prouver (E_γ), il suffit d'estimer convenablement la constante $C(q)$, ce que nous faisons dans la proposition suivante :

Proposition 3.5.10 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,*

$$C(q) \leq (Cq)^{2q}.$$

Preuve
Il est connu que le nombre de partitions de $\{1, ..., 2q\}$ vaut

$$\begin{aligned}
C(q) &= \sum_{k=1}^{2q} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \frac{j^{2q}}{j!(k-j)!} = \sum_{j=1}^{2q} \sum_{k=j}^{2q} (-1)^{k-j} \frac{j^{2q}}{j!(k-j)!} \\
&= \sum_{j=1}^{2q} \sum_{k=0}^{2q-j} (-1)^k \frac{j^{2q}}{j!k!} \\
&\leq \sum_{j=1}^{2q} \frac{j^{2q}}{j!} \leq (2q)^{2q},
\end{aligned}$$

puisque dans la dernière sommation, le terme dominant est obtenu pour $j = \epsilon q$. ⊠
Et finalement (E_γ) suit de la même façon que dans la section 3.5.1.

Remarque : On verra dans le chapitre suivant une autre méthode qui nous permet d'obtenir $m(\gamma) = \frac{3\gamma}{2\gamma+3}$ dans cette situation.

3.5.3 Preuve de (E_γ) sous l'hypothèse (H_{E_2}) si $\gamma \in]1,2]$

Dans cette partie, on s'inspire de la preuve de [BT2] en essayant de remplacer l'hypothèse (1.1) par l'hypothèse (H_γ).

Proposition 3.5.11 *Soit X une variable aléatoire d'espérance nulle telle qu'il existe des constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \in [-2,2]$,*

$$E(e^{|tX|}) \leq Ce^{ct^2},$$

alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$E(e^{tX}) \leq e^{ct^2}.$$

Preuve
De

$$e^u = 1 + u + u^2 \int_0^1 (1-\theta)e^{u\theta}\, d\theta,$$

on déduit pour tout $t \in [-1;1]$ que

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= 1 + t^2 \int_0^1 (1-\theta)E(X^2 e^{t\theta X})\, d\theta \\ &\leq 1 + t^2 \int_0^1 \sqrt{E(X^4)E(e^{2t\theta X})}\, d\theta \\ &\leq 1 + Ct^2 \int_0^1 e^{2ct^2\theta^2}\, d\theta \\ &\leq 1 + Ct^2 e^{2ct^2} \\ &\leq e^{c't^2}. \end{aligned}$$

⊠

Proposition 3.5.12 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_2}), il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,*

$$E(e^{tg_n}) \leq \begin{cases} e^{ct^2} & si\ |t| \leq 1, \\ e^{c|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} & si\ |t| \geq 1. \end{cases}$$

Preuve
Sous l'hypothèse (H_γ), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
E(e^{|t||g_n|}) &= 1 + |t| \times \int_0^\infty e^{|t|\rho} \times P\left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)| \geq \rho\right)\ d\rho \\
&\leq 1 + C|t| \times \int_0^\infty e^{|t|\rho - c|\rho|^\gamma}\ d\rho \\
&\leq 1 + C|t| \times \sup_{\rho \in \mathbb{R}^+} \left(e^{|t|\rho - \frac{c}{2}|\rho|^\gamma}\right) \times \int_0^\infty e^{-\frac{c}{2}|\rho|^\gamma}\ d\rho \\
&\leq 1 + C(\gamma) \times |t| \times e^{|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \times \left(\frac{2}{c\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)} \times \frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
&\leq 1 + C(\gamma) \times |t| \times e^{c(\gamma)|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E(e^{|t||g_n|}) \leq \begin{cases} C' e^{c' t^2} & \text{si } |t| \leq 2, \\ e^{c'|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

et nous pouvons utiliser la Proposition 3.5.11 pour conclure. ⊠

Proposition 3.5.13 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_2}), il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $\rho \geq 0$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,*

$$P\left(\omega \in \Omega / \left|\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\right| \geq \rho\right) \leq C e^{-c\left(\frac{\rho}{||c_n||_{l^2(\mathbb{N})}}\right)^\gamma}.$$

Preuve
On écrit,

$$P\left(\omega \in \Omega / \left|\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\right| \geq \rho\right) \leq P\left(\omega \in \Omega / \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \geq \rho\right) + P\left(\omega \in \Omega / \sum_{n \in \mathbb{N}} -c_n g_n(\omega) \geq \rho\right),$$

et il suffit de montrer la majoration pour le premier terme.

D'après l'inégalité de Markov et la Proposition 3.5.12, on obtient pour tout $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
P\left(\omega \in \Omega / \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \geq \rho\right) &= P\left(\omega \in \Omega / \exp\left(t \times \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\right) \geq e^{t\rho}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times E\left(\exp\left(t \times \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\right)\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} E\left(e^{t\times c_n g_n(\omega)}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \max\left(e^{c\times|c_n.t|^2}, e^{c\times|t.c_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \exp\left(c \times \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n.t|^2\right) \times \exp\left(c \times \sum_{n\in\mathbb{N}} |t.c_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \exp\left(c \times (t||c_n||_{l^2})^2\right) \times \exp\left(c \times (t||c_n||_{l^2})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right),
\end{aligned}
$$

puis, il suffit de choisir $t = \epsilon \frac{\rho^{\gamma-1}}{||c_n||_{l^2}^{\gamma}}$ pour obtenir le résultat souhaité. ⊠

Proposition 3.5.14 *Sous les hypothèses* (H_γ) *et* (H_{E_2})*, il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $q \geq 2$ *et* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{1}{\gamma}} \times \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2}.$$

Preuve
En utilisant la Proposition 3.5.13, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)}^q &= q \int_0^\infty \rho^{q-1} \times P\left(\omega \in \Omega / \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right| \geq \rho\right) \, d\rho \\
&\leq Cq \int_0^\infty \rho^{q-1} \times e^{-c\left(\frac{\rho}{||c_n||_{l^2(\mathbb{N})}}\right)^\gamma} \, d\rho \\
&\leq (C||c_n||_{l^2(\mathbb{N})})^q \times q \int_0^\infty u^{q/\gamma-1} \times e^{-u} \, du \\
&\leq (C'||c_n||_{l^2(\mathbb{N})})^q \times q^{\frac{q}{\gamma}}.
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve la proposition. ⊠
Et démontre (E_γ).

3.6 Preuves des théorèmes

3.6.1 Preuve du Théorème 3.0.2

En utilisant les Théorèmes 3.4.2, 3.4.4, 3.4.5, pour prouver le Théorème 3.0.2, il suffit d'établir que pour tout $t > 0$,

$$P(\Omega_t) > 0. \tag{3.9}$$

On commence donc par établir l'analogue de la Proposition 2.7.2 sous l'hypothèse (H_γ).

Proposition 3.6.1 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_1}) ou (H_γ) et (H_{E_2}), pour tout $t > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$P(\Omega_t) \geq \frac{1}{2} \times P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]_N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]_N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2} \right),$$

où $[f]_N$ a été défini dans la section 2.7.1.

Preuve
Par indépendance, en utilisant le Théorème 3.5.2, on obtient

$$\begin{aligned}
&P(\Omega_t) \\
&= P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]_N + [u_0^\omega]^N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq t \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]_N + e^{-itH}[u_0^\omega]^N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq t \right) \\
&\geq P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]_N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]_N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2} \right) \\
&\qquad \times P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]^N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]^N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2} \right) \\
&\geq P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]_N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]_N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2} \right) \\
&\qquad \times \left(1 - C\exp\left(- \frac{ct^{m(\gamma)}}{(\sum_{\lambda_n \geq N} \lambda_n^{d-1} \times |c_n|^2)^{m(\gamma)/2}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} 1 - C\exp\left(- \frac{ct^{m(\gamma)}}{(\sum_{\lambda_n \geq N} \lambda_n^{d-1} \times |c_n|^2)^{m(\gamma)/2}} \right) = 1,$$

ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$1 - C\exp\left(- \frac{ct^{m(\gamma)}}{(\sum_{\lambda_n \geq N} \lambda_n^{d-1} \times |c_n|^2)^{m(\gamma)/2}} \right) \geq \frac{1}{2}.$$

⊠

Par conséquent, pour obtenir (3.9), il suffit d'établir la proposition suivante :

Proposition 3.6.2 *Sous l'hypothèse (H_{01}), pour tous $t > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]_N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq t \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]_N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq t \right) > 0.$$

Preuve
En analogie à la Proposition 2.7.3, on trouve

$$\begin{aligned} & P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]_N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq t \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]_N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq t \right) \\ \geq & P\left(\omega \in \Omega \ / \ \sum_{\lambda_n < N} \lambda_n^{d-1}|c_n|^2|g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{2d}} \right) \end{aligned}$$

Puis, en utilisant l'hypothèse (H_{01}), on obtient

$$\begin{aligned} & P\left(\omega \in \Omega \ / \ || \ [u_0^\omega]_N||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq t \cap ||e^{-itH}[u_0^\omega]_N||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\frac{1}{7},\infty}(\mathbb{R}^d))} \leq t \right) \\ \geq & P\left(\omega \in \Omega \ / \ \sum_{\lambda_n < N} |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{2d} \times ||u_0||^2_{\overline{H}^{d-1}(\mathbb{R}^d)}} \right) \\ \geq & P\left(\bigcap_{\lambda_n < N} \left(\omega \in \Omega \ / \ |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{4d} \times ||u_0||^2_{\overline{H}^{d-1}(\mathbb{R}^d)}} \right) \right) \\ \geq & \prod_{\lambda_n < N} P\left(\omega \in \Omega \ / \ |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{4d} \times ||u_0||^2_{\overline{H}^{d-1}(\mathbb{R}^d)}} \right) > 0. \end{aligned}$$

⊠

3.6.2 Preuve du Théorème 3.0.4

Grâce aux Théorèmes 3.4.2, 3.4.4 et 3.4.5, pour prouver le Théorème 3.0.4, il suffit d'établir que pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} P\left(\omega \in \Omega_\lambda^c | \ ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta \right) = 0. \tag{3.10}$$

Nous utilisons la même méthode et les mêmes notations que la partie 2.7.2. De manière analogue au Lemme 2.7.4, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.6.3 *Supposons donnés E_1, E_2 deux espaces de Banach respectivement munis d'une mesure μ_1 et μ_2. Soient $f_1, f_2 : E_1 \times E_2 \to \mathbb{C}$ et $g : E_2 \to \mathbb{C}$ des fonctions mesurables, alors*

$$\begin{aligned} & \mu_1 \otimes \mu_2 \left((x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \ / |f_1(x_1, x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_2(x_1, x_2)| > \lambda | \ |g(x_2)| \leq \eta \right) \\ & \qquad \leq \sup_{x_2 \in E_2 / |g(x_2)| \leq \eta} \mu_1 \left(x_1 \in E_1 / |f_1(x_1, x_2)| > \lambda \ \cup \ |f_2(x_1, x_2)| > \lambda \right). \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.7.5, on obtient

$$\begin{aligned}
&P\left(\omega \in \Omega_\lambda^c \mid ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta\right) \\
&= \mu \otimes \mu_0 \Big(f \in \overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d), y \in X / \mid ||y \odot f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq \lambda \cup ||\ e^{itH} y \odot f\ ||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{1/7,\infty}(\mathbb{R}^d))} \geq \lambda \\
&\qquad \mid ||y \odot f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta\Big) \\
&= \mu \otimes \mu_0 \Big(f \in \overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d), y \in X / \mid ||y \odot f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq \lambda \cup ||\ e^{itH} y \odot f\ ||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{1/7,\infty}(\mathbb{R}^d))} \geq \lambda \\
&\qquad \mid ||f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta\Big),
\end{aligned}$$

puisque

$$||y \odot f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} = ||f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}, \ \forall y \in Y \text{ et } f \in \overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d).$$

Puis, en utilisant le Lemme 3.6.3 (appliqué à $E_1 = Y$, $\mu_1 = \mu_0$, $E_2 = \overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)$ et $\mu_2 = \mu$) et la Proposition 3.5.2 (remarquons que Bernoulli vérifie (H_γ) et (H_{E_2}) avec $\gamma = 2$), on trouve

$$\begin{aligned}
&P\left(\omega \in \Omega_\lambda^c \mid ||u_0^\omega||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta\right) \\
&\leq \sup_{||f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta} \mu_0 \left(y \in Y \ / ||y \odot f||_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq \lambda \cup ||\ e^{itH} y \odot f\ ||_{L^{2p}([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{1/7,\infty}(\mathbb{R}^d))} \geq \lambda\right) \\
&\leq C e^{-c\frac{\lambda^2}{\eta^2}} \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Dès lors (3.10) est démontré ainsi que le Théorème 3.0.4. ⊠

3.6.3 Preuve du Théorème 3.0.3

On adapte ici la preuve du paragraphe 5 de [BT2]. Grâce aux Théorèmes 3.4.3 et 3.4.4, on sait que si $u_0 \in E_0((\arctan 2T)^{-\delta})$, alors il existe une unique solution à l'équation (NLS) sur $[-T, T]$ dans l'espace $e^{it\Delta}u_0 + B_{X_T^s}(0, C_T)$.

Définissons

$$\Omega_T = \left(\omega \in \Omega / u_0^\omega \in E_0((\arctan 2T)^{-\delta})\right),$$

alors par le Théorème 3.5.2,

$$P(\Omega_T^c) \leq C \exp(-c(\arctan 2T)^{-\delta'})).$$

Par conséquent, si nous posons

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/n}$$

alors $P(\Sigma) = 1$ et le Théorème 3.0.3 est prouvé. ⊠

Chapitre 4

Compléments et généralisations

Sommaire

Dans le chapitre précédent, on a prouvé que l'effet régularisant permettait de démontrer un théorème analogue à celui du chapitre 2, pour une base de fonctions propres quelconques. Le théorème énoncé est intéressant pour p très grand car le nombre de dérivées gagnées vaut $\frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$. Et donc, par exemple pour $p = 5$, le théorème est vide.
Dans ce chapitre, on explique comment démontrer un théorème analogue pour $p = 5$ en dimension 2 avec une base de fonctions propres quelconques et un gain de dérivée égal à $\frac{1}{3}$. Pour cela, on s'inspire de la preuve du chapitre 2, avec comme arguments de bases les estimées bilinéaires. On commence par démontrer dans une première partie des estimées multilinéaires pour une base de fonctions propres quelconques. Dans une seconde partie, on démontre une estimée de type chaos de Wiener dans un cadre assez général de variables aléatoires. Ainsi, dans une troisième partie, on peut énoncer et démontrer le théorème pour des variables aléatoires satisfaisant les hypothèses du chapitre 3.

4.1 Estimées multilinéaires des fonctions propres de l'oscillateur harmonique

Cette première partie est consacrée à la démonstration des estimées multilinéaires pour des fonctions propres quelconques de l'oscillateur harmonique.

4.1.1 Estimées bilinéaires en toutes dimensions

Dans cette sous section, on se place en dimension $d \geq 2$ même si notre preuve s'adapte aisément en dimension 1. Dans ce dernier cas, les résultats ont déjà été établis dans [BTT] par un autre argument qui est spécifique à la dimension 1.

Théorème 4.1.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous n et m,*

$$||h_n h_m||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \times \begin{cases} \max(\lambda_n, \lambda_m)^{-\frac{2}{3}+\frac{d}{6}} & si \quad 2 \leq d \leq 4, \\ \max(\lambda_n, \lambda_m)^{-2+\frac{d}{2}} & si \quad 4 \leq d. \end{cases}$$

De même, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous n et m,

$$||h_n h_m||_{L^{\frac{d+3}{d+1}}(\mathbb{R}^d)} \leq C \times \max(\lambda_n, \lambda_m)^{-\frac{1}{d+1}}.$$

Remarque :
L'estimation écrite n'est pas vrai en dimension 1 mais il suffit de multiplier le majorant par $\log(\max(\lambda_n, \lambda_m))$ pour qu'elle le soit.

On reprend les notations de [KT] et les théorèmes qui y sont prouvés. On introduit

$D_j^{int} = \left\{x \in \mathbb{R}^d / \ |x| \in [\lambda_n(1 - 2^{-2(j-1)}); \lambda_n(1 - 2^{-2(j+1)})]\right\}$ pour $1 \leq 2^j \leq \lambda_n^{2/3}$,

$D^{bd} = \left\{x \in \mathbb{R}^d / \ ||x| - \lambda_n| \leq \lambda_n^{-1/3}\right\}$,

$D^{ext} = \left\{x \in \mathbb{R}^d / \ |x| > \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^{-1/3}\right\}$, et $||f||^q_{l^q_n L^p} = ||f||^q_{L^p(D^{bd})} + ||f||^q_{L^p(D^{ext})} + \sum_{1\leq 2^j \leq \lambda_n^{2/3}} ||f||^q_{L^p(D^{int}_j)}$.

On remarque que $\mathbb{R}^d = \bigcup_j D^{int}_j \cup D^{bd} \cup D^{ext}$ et donc que $||f||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq ||f||_{l^q_n L^p}$.

On pose également $y = \lambda_n^{-2/3}(\lambda_n^2 - x^2)$, $< y >_- = 1 + y_-$ et $< y >_+ = 1 + y_+$, et on peut énoncer le théorème suivant où nous pouvons trouver la preuve dans [KT].

Théorème 4.1.2 *Pour tout $p \in [2, \infty]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout n,*

$$
\begin{array}{ll}
||\lambda_n^{\frac{1}{3}-\frac{d}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} < y >_+^{-\frac{1}{4}+\left(\frac{d+3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} < y >_-^{1-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} h_n||_{l^\infty_n L^p} \leq C & si\ 2 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d-1}, \\
||\lambda_n^{\frac{1}{3}-\frac{d}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} < y >_+^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} h_n||_{l^\infty_n L^p} \leq C & si\ \frac{2(d+1)}{d-1} \leq p \leq \infty.
\end{array}
$$

Conséquences :

1- Si $x \in D^{ext}$ alors $|x| > \lambda_n + \frac{\lambda_n^{-1/3}}{2}$ donc $x^2 > \lambda_n^2 + \lambda_n^{2/3} + \frac{\lambda_n^{-2/3}}{4}$,
et par conséquent, $y_+ = 0$ et $|y| = y_- \geq C$.
Finalement, on obtient $||h_n||_{L^p(D^{ext})} \leq C\lambda_n^{-\frac{1}{3}+\frac{d}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}$, pour $p \in [2, \infty]$.

2- Si $x \in D^{bd}$ alors $||x| - \lambda_n| \leq \lambda_n^{-1/3}$, puis $|y| \leq 2 + \lambda_n^{-4/3}$ donc y est borné et on déduit comme précédemment que $||h_n||_{L^p(D^{bd})} \leq C\lambda_n^{-\frac{1}{3}+\frac{d}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}$, pour $p \in [2, \infty]$.

3- Pour maintenant $x \in D^{int}_j$, le résultat est déjà énoncé dans [KT] en label (9) et (10), on trouve

$$
\begin{array}{ll}
||h_n||_{L^p(D^{int}_j)} \leq C\lambda_n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\ 2^{-\frac{j}{2}\left(1-\frac{d+3}{2}+\frac{d+3}{p}\right)} & \text{pour } 2 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d-1}, \\
||h_n||_{L^p(D^{int}_j)} \leq C\lambda_n^{-1+d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\ 2^{j\left(1-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\right)} & \text{pour } \frac{2(d+1)}{d-1} \leq p \leq \infty.
\end{array}
$$

Preuve du théorème 4.1.1
n et m jouent des rôles parfaitement symétriques, on peut donc supposer que $\lambda_m \leq \lambda_n$.

Cas $\lambda_n \leq 10\lambda_m \leq 10\lambda_n$:
Il suffit d'appliquer une inégalité de Hölder et d'utiliser les estimées linéaires des fonctions propres rappelées dans [KT] en Corollaire 3.2. On a

$$
\begin{aligned}
||h_n h_m||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ||h_n||_{L^4(\mathbb{R}^d)} \times ||h_m||_{L^4(\mathbb{R}^d)} &\leq C \times \begin{cases} \lambda_n^{-\frac{1}{3}+\frac{d}{12}}\lambda_m^{-\frac{1}{3}+\frac{d}{12}} & \text{si} \quad 2 \leq d \leq 4, \\ \lambda_n^{-1+\frac{d}{4}}\lambda_m^{-1+\frac{d}{4}} & \text{si} \quad 4 \leq d, \end{cases} \\
&\leq C \times \begin{cases} \lambda_n^{-\frac{2}{3}+\frac{d}{6}} & \text{si} \quad 2 \leq d \leq 4, \\ \lambda_n^{-2+\frac{d}{2}} & \text{si} \quad 4 \leq d. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Et, de même,

$$\begin{aligned}||h_n h_m||_{L^{\frac{d+3}{d+1}}(\mathbb{R}^d)} \leq ||h_n||_{L^{\frac{2(d+3)}{d+1}}(\mathbb{R}^d)} \times ||h_m||_{L^{\frac{2(d+3)}{d+1}}(\mathbb{R}^d)} &\leq C_\delta\ \lambda_n^{-\frac{1}{d+3}+\frac{\delta}{2}} \lambda_m^{-\frac{1}{d+3}+\frac{\delta}{2}} \\ &\leq C_\delta\ \lambda_n^{-\frac{2}{d+3}+\delta} \\ &\leq C\ \lambda_n^{-\frac{1}{d+1}}.\end{aligned}$$

Cas $\lambda_n \geq 10\lambda_m$:
On rappelle la propriété suivante que nous avons prouvée au chapitre 2 section 3, pour tout K réel positif, il existe une constante $C_K > 0$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on ait

$$|| \ |x|^K h_m||_{L^\infty(x\in\mathbb{R}^d/|x|\geq 2\lambda_m)} \leq C_K. \tag{4.1}$$

Maintenant si $|x| \geq \frac{3}{4}\lambda_n$, alors $|x| \geq \frac{30}{4}\lambda_m \geq 2\lambda_m$ et on en déduit que pour tout $p \in [2, \infty]$,

$$\begin{aligned}||h_n h_m||_{L^p\left(x\in\mathbb{R}^d/|x|\geq\frac{3}{4}\lambda_n\right)} &\leq || \ |x|^{-K} h_n||_{L^p\left(x\in\mathbb{R}^d/|x|\geq\frac{3}{4}\lambda_n\right)} \times || \ |x|^K h_m||_{L^\infty\left(x\in\mathbb{R}^d/|x|\geq\frac{3}{4}\lambda_n\right)} \\ &\leq C_K \lambda_n^{-K} ||h_n||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_K \lambda_n^{-K-1+\frac{d}{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit d'estimer

$$||h_n h_m||_{L^2(D_1^{int})} \qquad \text{et} \qquad ||h_n h_m||_{L^{\frac{d+3}{d+1}}(D_1^{int})}.$$

À l'aide de la conséquence N° 3 et toujours des estimées linéaires de [KT], on a

$$\begin{aligned}||h_n h_m||_{L^2(D_1^{int})} \leq ||h_n||_{L^{\frac{2(d+1)}{d-1}}(D_1^{int})} \times ||h_m||_{L^{d+1}(\mathbb{R}^d)} &\leq C \times \begin{cases} \lambda_n^{-\frac{1}{d+1}} \lambda_m^{-\frac{2}{3}+\frac{d}{6}+\frac{1}{3(d+1)}} & \text{si } 2 \leq d \leq 3, \\ \lambda_n^{-\frac{1}{d+1}} \lambda_m^{-2+\frac{d}{2}+\frac{1}{d+1}} & \text{si } 4 \leq d, \end{cases} \\ &\leq C \times \begin{cases} \lambda_n^{-\frac{2}{3}+\frac{d}{6}} & \text{si } 2 \leq d \leq 4, \\ \lambda_n^{-2+\frac{d}{2}} & \text{si } 4 \leq d. \end{cases}\end{aligned}$$

Et de même, on établit

$$\begin{aligned}||h_n h_m||_{L^{\frac{d+3}{d+1}}(D_1^{int})} \leq ||h_n||_{L^{\frac{2(d+1)}{d-1}}(D_1^{int})} \times ||h_m||_{L^{\frac{2(d+1)(d+3)}{d^2+2d+5}}(\mathbb{R}^d)} &\leq C \times \lambda_n^{-\frac{1}{d+1}} \lambda_m^{-\frac{5d+3}{3(d+1)(d+3)}} \\ &\leq C \times \lambda_n^{-\frac{1}{d+1}}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ⊠

4.1.2 Estimées multilinéaires en dimension 2

Dans cette sous section, on suppose que la dimension $d = 2$.

Théorème 4.1.3 *En dimension 2, pour tout l entier plus grand que 3, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $n_1, \dots, n_l$,*

$$\begin{aligned} ||h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq C \times \max(\lambda_{n_1}, ..., \lambda_{n_l})^{-\frac{1}{3}}, \\ ||h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^2)} &\leq C \times \max(\lambda_{n_1}, ..., \lambda_{n_l})^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Preuve
La démonstration est très facile et utilise encore une fois les estimées linéaires de [KT]. Il suffit de remarquer qu'en dimension 2, $n \to ||h_n||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ est bornée, d'appliquer une inégalité de Hölder et d'utiliser le théorème 4.1.1. ⊠

Remarques :

1- A priori, on ne peut pas améliorer cette estimation. Par exemple, pour $l = 3$, si $\lambda_{n_1} \gg \lambda_{n_2}, \lambda_{n_3}$ alors $||h_{n_1}h_{n_2}h_{n_3}||_{L^2(D_1^{int})}$ peut être au mieux estimé par $||h_{n_1}||_{L^6(D_1^{int})} \times ||h_{n_2}||_{L^3(\mathbb{R}^2)} \times ||h_{n_3}||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ avec $||h_{n_1}||_{L^6(D_1^{int})} \leq \lambda_{n_1}^{-\frac{1}{3}}$.

2- En dimension plus grande, il n'est pas évident que l'on ait des estimées multilinéaires intéressantes, même pour l=3 en dimension 3. En effet, pour $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \lambda_{n_3}$, $||h_{n_1}h_{n_2}h_{n_3}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ peut être au mieux estimé par le produit des normes $L^6(\mathbb{R}^3)$ qui ne donne aucune décroissance par rapport à la valeur propre (on sait juste que c'est borné).

On peut également énoncer ce théorème dans les espaces Sobolev $\overline{H}^s(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 4.1.4 *En dimension 2, pour tout l entier plus grand que 2, pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $n_1, \dots, n_l$,*

$$||h_{n_1}...h_{n_l}||_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^2)} \leq C \times \max(\lambda_{n_1}, ..., \lambda_{n_l})^{s-\frac{1}{3}}.$$

Preuve
Par interpolation, d'après les Théorèmes 4.1.1 et 4.1.3, il suffit de prouver le théorème pour $s = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On peut également supposer que $\lambda_{n_1} \geq \lambda_{n_2} \geq ... \geq \lambda_{n_l}$ et il suffit d'estimer les deux termes suivants :

$$||\nabla^s(h_{n_1})...h_{n_l}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \text{ et } || < x >^s h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Si $\lambda_{n_1} \leq 10\lambda_{n_2}$ alors par une inégalité de Hölder, on a que

$$\begin{aligned} || \nabla^s(h_{n_1})...h_{n_l}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq ||h_{n_1}||_{\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^2)} \times ||h_{n_2}||_{L^4(\mathbb{R}^2)} &\leq C\lambda_{n_1}^{s-1/3}, \\ || < x >^s h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq ||h_{n_1}||_{\overline{W}^{s,4}(\mathbb{R}^2)} \times ||h_{n_2}||_{L^4(\mathbb{R}^2)} &\leq C\lambda_{n_1}^{s-1/3}. \end{aligned}$$

Maintenant, si $\lambda_{n_1} \geq 10\lambda_{n_2}$, remarquons que

$$|\nabla|^s h_n = \sum_{j=0}^{k} C_{s,j} \ |x|^{2k-2j} \lambda_n^{2j} \ h_n. \tag{4.2}$$

Ainsi, comme pour la preuve du Théorème 4.1.1, en utilisant (4.1) (et (4.2) pour avoir le contrôle des dérivées), on peut se ramener à estimer

$$||\nabla^s(h_{n_1})...h_{n_l}||_{L^2(D_1^{int})} \text{ et } || < x >^s h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(D_1^{int})},$$

et toujours grâce à (4.2), il suffit d'établir l'inégalité pour le terme

$$|| < x >^s h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(D_1^{int})}.$$

Par le Théorème 4.1.3, on obtient

$$\begin{aligned} || < x >^s h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(D_1^{int})} &\leq \lambda_{n_1}^s ||h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(D_1^{int})} \\ &\leq \lambda_{n_1}^s ||h_{n_1}...h_{n_l}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C\lambda_{n_1}^{s-1/3}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve le théorème. ⊠

4.2 Une estimation de type chaos de Wiener généralisée

Dans cette section, on propose de démontrer une estimée de type chaos de Wiener dans un cadre de variables aléatoires assez générales. On suppose donné $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui vérifie (H_γ) et (H_{E_1}) ou (H_γ) et (H_{E_2}).

4.2.1 Énoncé et preuve du résultat sous l'hypothèse des moments impairs nuls

Dans cette sous section, on suppose que les hypothèses (H_γ) et (H_{E_1}) sont satisfaites. Dans le chapitre précédent, on a démontré la proposition suivante :

Proposition 4.2.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $c_n \in l^2(\mathbb{N})$ et $q \geq 2$,*

$$\left|\left| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n \right|\right|_{L^q(\Omega)} \leq Cq^{\frac{\gamma+2}{2\gamma}} \times \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2}.$$

On a vu que cette inégalité permettait d'estimer en probabilité les termes linéaires de la donnée initiale. On démontre maintenant une estimée de type chaos de Wiener du même ordre de grandeur, qui va permettre d'estimer en probabilité les termes multilinéaires de la donnée initiale.

Proposition 4.2.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $c_{n,m} \in l^2 \cap \tilde{l}^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et $q \geq 2$,*

$$\left|\left| \sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n \times g_m \right|\right|_{L^q(\Omega)} \leq Cq^{\frac{\gamma+2}{\gamma}} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{n,n}| \right).$$

Preuve
On reprend la preuve du chapitre précédent établie dans le cas de variables aléatoires Bernoulli. Il suffit de prouver le résultat pour $q = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \right\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} &= \sum_{n_1,\ldots,n_{4p}} c_{n_1,n_2}\ldots c_{n_{2p-1},n_{2p}}.\overline{c_{n_{2p+1},n_{2p+2}}}\ldots\overline{c_{n_{4p-1},n_{4p}}} \times E\left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i}\right) \\
&\leq \sum_{n_1,\ldots,n_{4p}} |c_{n_1,n_2}|\ldots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}| \times \left| E\left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i}\right)\right| \\
&\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{4p}} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{4p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1,n_2}|\ldots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}|\right) \times \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|g_n|^{4p}\right) \\
&\leq Card(\mathcal{A}_{4p}) \times p^{\frac{4p}{\gamma}} \times \sup_{\sigma\in\mathcal{A}_{4p}} \left(\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{4p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1,n_2}|\ldots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}|\right) \\
&\leq (Cp)^{2p} \times p^{\frac{4p}{\gamma}} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{n,n}|\right)^{2p}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition. ⊠

On retrouve la propriété dans le cas des variables de Bernoulli car dans ce cas (H_γ) est vérifiée pour $\gamma = \infty$.
Dans le cas gaussien, on peut trouver une preuve de ce résultat dans [TT] avec une majoration en q. La démarche de la démonstration est très spécifique au modèle gaussien et ne peut être adaptée dans un cadre plus général. Ici pour $\gamma = 2$, (qui correspond au cas gaussien), on trouve une majoration en q^2, l'estimation démontrée est donc moins bonne pour $\gamma = 2$.
Ensuite, pour γ proche de 0, on trouve une majoration en $q^{\frac{2}{\gamma}}$, résultat réconfortant. La majoration obtenue est donc satisfaisante pour γ très grand et très petit mais mériterait d'être raffinée pour $\gamma = 2$.

Il sera donc légitime de s'intéresser dans les perspectives de recherche au cas $\gamma = 2$. On remarque qu'il faut étudier de manière précise chacun des termes de la somme (passage de la ligne 2 à la ligne 4). Par exemple, dans le cas ou les n_i sont tous égaux (1 seul terme de ce genre dans la somme), l'espérance vaut p^{2p} et dans le cas extrémal où les n_i sont égaux deux à deux, l'espérance est bornée et il y a $\frac{(4p)!}{4^p(2p)!} \leq (Cp)^{2p}$ termes de cette forme dans la somme.

On énonce maintenant le résultat sous sa forme multilinéaire. L'inégalité est un peu technique à écrire mais se comprend facilement : les sommations sur un seul indice sont en norme l^2, les sommations sur plusieurs indices égaux sont en norme l^1.

Proposition 4.2.3 *Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute suite $c_{n_1,\ldots,n_r}$*

de r variables et tout réel $q \geq 2$,

$$\left|\left|\sum_{n_1,\dots,n_r} c_{n_1,\dots,n_r}\; g_{n_1} \times \dots \times g_{n_r}\right|\right|_{L^q(\Omega)} \leq Cq^{\frac{r(\gamma+2)}{2\gamma}} \times \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_r}\left(\sum_{\substack{n_i=n_{\sigma(i)}\\ si\ \sigma(i)\neq i}} \sqrt{\sum_{n_i/\sigma(i)=i} |c_{n_1,\dots,n_r}|^2}\right),$$

où $\mathcal{D}_r$ désigne l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_r$ qui sont formées uniquement de transpositions dans leurs décompositions en cycles disjoints.

En analogie à la preuve de la Proposition 4.2.2, pour démontrer la Proposition 4.2.3, il suffit d'établir le résultat suivant :

Lemme 4.2.4 *Pour tous entiers $r \geq 2$ et $p \geq 2$, toute permutation $\sigma \in \mathcal{A}_{rp}$ et toute suite $(c_{n_1,\dots n_r})$ de r variables, on a*

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{pr}\\ n_i=n_{\sigma(i)}}} |c_{n_1,\dots,n_r}|\dots|c_{n_{r(p-1)+1},\dots,n_{pr}}| \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_r}\left(\sum_{\substack{n_i=n_{\sigma(i)}\\ si\ \sigma(i)\neq i}} \sqrt{\sum_{n_i/\sigma(i)=i} |c_{n_1,\dots,n_r}|^2}\right)\right)^p.$$

Avant de prouver cette proposition, donnons quelques définitions.

Définition 4.2.5 *Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $\tau \in \mathcal{S}_r$, on définit pour toute suite c de r variables,*

$$||c||_{l_r^\tau} = ||c_{n_1,\dots,n_r}||_{l_r^\tau} := \sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)}\\ si\ \tau(i)\neq i}} \sqrt{\sum_{n_i/\tau(i)=i} |c_{n_1,\dots,n_r}|^2}.$$

Définition 4.2.6 *Supposons donné p un entier supérieur à 2, $r_1, \dots, r_p$ des entiers supérieurs à 2 et σ une permutation de $\mathcal{A}_{r_1+..+r_p}$.*
On pose $r_0 = 0$ et on définit pour $k \in \{1, \dots, p\}$,

$$R_k = \sum_{j=0}^{k} r_j, \quad E'_k = \{R_{k-1}+1, \dots, R_k\}, \quad E_k = \{1, \dots, r_k\},$$

$$F'_k = \{i \in E'_k /\ \sigma(i) \in E'_k\} = E'_k\ \cap \sigma(E'_k)$$

et

$$F_k = F'_k - R_{k-1} = \{i + R_{k-1} \in E'_k /\ \sigma(i+R_{k-1}) \in E'_k\}.$$

Ensuite, en posant $G_k = \{i \in F_k /\ i + R_{k-1} < \sigma(i+R_{k-1})\}$, on obtient que

$$F_k = G_k \bigsqcup \left(\sigma(G_k + R_{k-1}) - R_{k-1}\right).$$

Ainsi pour un tel σ, on peut définir pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, les permutations suivantes :

$$\tau_k(\sigma) = \prod_{i\in G_k} (i, \sigma(i+R_{k-1}) - R_{k-1}) \ \in\ \mathcal{S}_{r_k}.$$

Remarquons que τ_k dépend de σ, mais aussi des $r_1, r_2, \ldots, r_p$, dépendance que l'on écrira pas afin d'alléger les notations. Ainsi, $\tau_k(\sigma)$ est définit de la façon suivante, pour $i \in E_k$,

$$\tau_k(\sigma)(i) = \begin{cases} i & si\ i \in F_k^c, \\ \sigma(i + R_{k-1}) - R_{k-1} & si\ i \in F_k. \end{cases}$$

Dès lors, $\tau_k(\sigma)$ dépend uniquement de F_k et ne dépend pas de l'ensemble G_k vérifiant $F_k = G_k \bigsqcup (\sigma(G_k + R_{k-1}) - R_{k-1})$.

Finalement, pour démontrer le Lemme 4.2.4, il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.2.7 *Soit p un entier supérieur à 2 alors pour tous entiers $r_1, \ldots, r_p$ supérieurs à 2, toutes suites c^1 de r_1 variables, ..., c^p de r_p variables et toute permutation $\sigma \in \mathcal{A}_{r_1+..+r_p}$,*

$$\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \\ n_i = n_{\sigma(i)}}} |c^1_{n_1,\ldots,n_{r_1}}| \ldots |c^p_{n_{r-r_p+1},\ldots,n_r}| \leq \prod_{k=1}^{p} ||c^k||_{l^{\tau_k}_{r_k}},$$

où $r = r_1 + \ldots + r_p$.

Preuve du Lemme 4.2.7
On prouve le résultat par récurrence sur p.
Pour $p = 2$, supposons donnés r_1 et r_2 deux entiers supérieurs à 2 et une permutation $\sigma \in \mathcal{A}_{r_1+r_2}$. Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{r_1+r_2} \\ n_i = n_{\sigma(i)}}} |c^1_{n_1,\ldots,n_{r_1}}| \times |c^2_{n_{r_1+1},\ldots,n_{r_1+r_2}}| \\
&= \sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in F_1'}} \sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in F_2'}} \sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in (F_1')^c \cap E_1' \cup (F_2')^c \cap E_2'}} |c^1_{n_1,\ldots,n_{r_1}}| \times |c^2_{n_{r_1+1},\ldots,n_{r_1+r_2}}| \\
&\leq \sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in F_1'}} \sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in F_2'}} \sqrt{\sum_{\substack{n_i \\ i \in E_1' \cap \sigma(E_2')}} |c^1_{n_1,\ldots,n_{r_1}}|^2 \times \sum_{\substack{n_i \\ i \in E_2' \cap \sigma(E_1')}} |c^2_{n_{r_1+1},\ldots,n_{r_1+r_2}}|^2},
\end{aligned}$$

puisque $i \in (F_1')^c \cap E_1'$ si et seulement si $i \in E_1'$ et $\sigma(i) \in E_2'$
et $i \in (F_2')^c \cap E_2'$ si et seulement si $i \in E_2'$ et $\sigma(i) \in E_1'$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_{r_1+r_2} \\ n_i = n_{\sigma(i)}}} |c^1_{n_1,\ldots,n_{r_1}}| \times |c^2_{n_{r_1+1},\ldots,n_{r_1+r_2}}| \\
&\leq \left(\sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in E_1' \cap \sigma(E_1')}} \sqrt{\sum_{\substack{n_i \\ i \in E_1' \cap \sigma(E_2')}} |c^1_{n_1,\ldots,n_{r_1}}|^2} \right) \times \left(\sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in E_2' \cap \sigma(E_2')}} \sqrt{\sum_{\substack{n_i \\ i \in E_2' \cap \sigma(E_1')}} |c^2_{n_{r_1+1},\ldots,n_{r_1+r_2}}|^2} \right).
\end{aligned}$$

Ensuite, remarquons que pour $i \in E'_1$, alors $\tau_1(\sigma)(i) = i$ ssi $i \in F_1^c = (F'_1)^c = E'_2 \cup \sigma(E'_2)$ ssi $i \in \sigma(E'_2)$ et que $\tau_1(\sigma)(i) = \sigma(i)$ ssi $i \in \sigma(E'_2)^c = \sigma(E'_1)$.
Par conséquent,

$$\sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in E'_1 \cap \sigma(E'_1)}} \sqrt{\sum_{\substack{n_i \\ i \in E'_1 \cap \sigma(E'_2)}} |c^1_{n_1,\dots,n_{r_1}}|^2} = ||c^1||_{l^{\tau_1}_{r_1}}.$$

Enfin, en effectuant le changement d'indices $r_1 + j = i$ dans la sommation, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n_i = n_{\sigma(i)} \\ i \in E'_2 \cap \sigma(E'_2)}} \sqrt{\sum_{\substack{n_i \\ i \in E'_2 \cap \sigma(E'_1)}} |c^2_{n_{r_1+1},\dots,n_{r_1+r_2}}|^2} &= \sum_{\substack{n_j = n_{\sigma(j+R_1)-R_1} \\ j \in E_2 \cap F_2}} \sqrt{\sum_{\substack{n_j \\ j \in E_2 \cap F_2^c}} |c^2_{n_1,\dots,n_{r_2}}|^2} \\
&= \sum_{\substack{n_j = n_{\tau_2(\sigma)(j)} \\ \text{si } \tau_2(\sigma)(j) \neq j}} \sqrt{\sum_{\substack{n_j \\ \text{si } \tau_2(\sigma)(j) = j}} |c^2_{n_1,\dots,n_{r_2}}|^2} = ||c^2||_{l^{\tau_2}_{r_2}},
\end{aligned}$$

puisque pour $i \in E_2$, alors $\tau_2(\sigma)(j) = j$ ssi $j \in F_2^c$.

Soit maintenant $p \geq 3$ et supposons le résultat établi pour tout $p' < p$.
On pose $\tilde{r}_{p-1} = r_{p-1} + r_p$ et $\tilde{c}^{p-1} = c^{p-1}.c^p$ pour appliquer l'hypothèse de récurrence à $\sigma \in \mathcal{A}_{r_1+\dots r_{p-2}+\tilde{r}_{p-1}}$ et $c^1 = c^1$,..., $c^{p-2} = c^{p-2}$ et $c^{p-1} = \tilde{c}^{p-1}$. On note $\tilde{\tau}_k$ les permutations définies dans la définition précédente pour obtenir le résultat suivant :

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_r \\ n_i = n_{\sigma(i)}}} |c^1_{n_1,\dots,n_{r_1}}|\dots|c^p_{n_{r-r_p+1},\dots,n_r}| \leq \prod_{k=1}^{p-2} ||c^k||_{l^{\tilde{\tau}_k}_{r_k}} \times ||\tilde{c}^{p-1}||_{l^{\tilde{\tau}_{p-1}}_{\tilde{r}_{p-1}}}.$$

Remarquons que pour $k \leq p-2$, $\tilde{\tau}_k = \tau_k$, puis que $||c^k||_{l^{\tilde{\tau}_k}_{r_k}} = ||c^k||_{l^{\tau_k}_{r_k}}$. Ainsi, il suffit d'établir que

$$||\tilde{c}^{p-1}||_{l^{\tilde{\tau}_{p-1}}_{\tilde{r}_{p-1}}} \leq ||c^{p-1}||_{l^{\tau_{p-1}}_{r_{p-1}}} \times ||c^p||_{l^{\tau_p}_{r_p}}.$$

Pour simplifier, notons $\tau = \tilde{\tau}_{p-1}$ et définissons $\tilde{E}_{p-1} = \{1,\dots,\tilde{r}_{p-1}\}$, $\tilde{E}'_{p-1} = \{R_{p-2}+1,\dots,R_p\} = E'_{p-1} \cup E'_p$ et $X_p = \{r_{p-1}+1,\dots,r_{p-1}+r_p\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}'_{p-1} &= \tilde{E}'_{p-1} \cup \sigma(\tilde{E}'_{p-1}) \\
&= F'_{p-1} \sqcup F'_p \sqcup \left[E'_{p-1} \cap \sigma(E'_p) \cup E'_p \cap \sigma(E'_{p-1})\right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{p-1} &= F_{p-1} \sqcup (F_p + r_{p-1}) \sqcup \left[E'_{p-1} \cap \sigma(E'_p) \cup E'_p \cap \sigma(E'_{p-1}) \ - \ R_{p-2}\right] \\
&:= F_{p-1} \sqcup (F_p + r_{p-1}) \sqcup H_p
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&||\tilde{c}^{p-1}||_{l^{\tilde{\tau}_{p-1}}_{\tilde{r}_{p-1}}} \\
&= \sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in\tilde{F}_{p-1}\cap\tilde{E}_{p-1}}} \sqrt{\sum_{n_i/i\in\tilde{F}^c_{p-1}\cap\tilde{E}_{p-1}} |\tilde{c}^{p-1}_{n_1,\dots,n_{\tilde{r}_{p-1}}}|^2} \\
&= \sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in F_{p-1}}} \sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in F_p+r_{p-1}}} \sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in H_p\cap\tilde{E}_{p-1}}} \sqrt{\sum_{n_i/i\in\tilde{F}^c_{p-1}\cap E_{p-1}} |c^{p-1}_{n_1,\dots,n_{r_{p-1}}}|^2} \times \sqrt{\sum_{n_i/i\in\tilde{F}^c_{p-1}\cap X_p} |c^{p}_{n_{r_{p-1}+1},\dots,n_{\tilde{r}_{p-1}}}|^2}.
\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que si $i \in E_{p-1}$, alors $i \in H_p \Rightarrow \tau(i) \in X_p$,
puis que si $i \in X_p$, alors $i \in H_p \Rightarrow \tau(i) \in E_{p-1}$.
Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
&||\tilde{c}^{p-1}||_{l^{\tilde{\tau}_{p-1}}_{\tilde{r}_{p-1}}} \\
&\leq \left(\sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in F_{p-1}}} \sqrt{\sum_{n_i/i\in(\tilde{F}^c_{p-1}\cup H_p)\cap E_{p-1}} |c^{p-1}_{n_1,\dots,n_{r_{p-1}}}|^2} \right) \times \left(\sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in F_p+r_{p-1}}} \sqrt{\sum_{n_i/i\in(\tilde{F}^c_{p-1}\cup H_p)\cap X_p} |c^{p}_{n_{r_{p-1}+1},\dots,n_{\tilde{r}_{p-1}}}|^2} \right).
\end{aligned}$$

Pour évaluer le premier terme, on remarque que

$$\begin{aligned}
(\tilde{F}^c_{p-1} \cup H_p) \cap E_{p-1} &= \left[(F_{p-1} \cup (F_p + r_{p-1}))^c \cap \tilde{E}_{p-1} \right] \cap E_{p-1} \\
&= (F_{p-1} \cup (F_p + r_{p-1}))^c \cap E_{p-1} \\
&= F^c_{p-1} \cap (F_p + r_{p-1})^c \cap E_{p-1} \\
&= F^c_{p-1} \cap E_{p-1},
\end{aligned}$$

puisque $E_{p-1} \subset (F_p + r_{p-1})^c$,
puis que pour $i \in F_{p-1} \subset \tilde{F}_{p-1}$, $\tau(i) = \sigma(i + R_{p-2}) - R_{p-2} = \tau_{p-1}(\sigma)(i)$. Ainsi, on a établi que

$$\sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in F_{p-1}}} \sqrt{\sum_{n_i/i\in(\tilde{F}^c_{p-1}\cup H_p)\cap E_{p-1}} |c^{p-1}_{n_1,\dots,n_{r_{p-1}}}|^2} = ||c^{p-1}||_{l^{\tau_{p-1}(\sigma)}_{r_{p-1}}}.$$

Pour évaluer le second terme, on pose $j = i - r_{p-1}$ et $m_j = n_i$ dans la sommation pour obtenir que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)} \\ \text{si } i\in F_p+r_{p-1}}} \sqrt{\sum_{n_i/i\in(\tilde{F}^c_{p-1}\cup H_p)\cap X_p} |c^{p}_{n_{r_{p-1}+1},\dots,n_{\tilde{r}_{p-1}}}|^2} \\
&= \sum_{\substack{m_j=m_{\tau(j+r_{p-1})-r_{p-1}} \\ \text{si } j\in F_p}} \sqrt{\sum_{m_j/j\in(\tilde{F}^c_{p-1}\cup H_p \;\; -r_{p-1})\cap E_p} |c^{p}_{m_1,\dots,m_{r_p}}|^2}.
\end{aligned}$$

Puis, on remarque que

$$\begin{aligned}((\tilde{F}^c_{p-1}\cup H_p)\ -r_{p-1})\cap E_p &= \Big[(F_{p-1}\cup(F_p+r_{p-1}))^c\cap\tilde{E}_{p-1}\ -r_{p-1}\Big]\cap E_p\\ &= ((F_{p-1}-r_{p-1})\cup F_p)^c\cap E_p\\ &= (F^c_{p-1}-r_{p-1})\cap F^c_p\cap E_p\\ &= F^c_p\cap E_p,\end{aligned}$$

puisque $E_p\subset F^c_{p-1}-r_{p-1}$,
et que pour $j\in F_p\subset\tilde{F}_{p-1}-r_{p-1}$,

$$\begin{aligned}\tau(j+r_{p-1})-r_{p-1} &= \sigma(j+r_{p-1}+R_{p-2})-R_{p-2}-r_{p-1}\\ &= \sigma(j+R_{p-1})-R_{p-1}\\ &= \tau_p(\sigma)(j).\end{aligned}$$

Ainsi, on a établi que

$$\sum_{\substack{n_i=n_{\tau(i)}\\ \text{si } i\in F_p+r_{p-1}}}\sqrt{\sum_{n_i/i\in(\tilde{F}^c_{p-1}\cup H_p)\cap X_p}|c^p_{n_{r_{p-1}+1},\dots,n_{\tilde{r}_{p-1}}}|^2}=||c^p||_{l^{\tau_p(\sigma)}_{r_p}}.$$

Ce qui achève la récurrence. ⊠

4.2.2 Énoncé et preuve du résultat sous l'hypothèse d'espérance nulle

Dans cette sous section, on suppose que les hypothèses (H_γ) et (H_{E_2}) sont satisfaites. Dans le chapitre précédent, on a démontré la proposition suivante :

Proposition 4.2.8 *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $c_n\in l^2(\mathbb{N})$ et $q\geq 2$,*

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}}c_ng_n\Big\|_{L^q(\Omega)}\leq Cq^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\times\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2}.$$

Dans cette partie, on démontre que l'on peut améliorer la constante $q^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$ en $q^{\frac{2\gamma+3}{3\gamma}}$ et on établit une estimée de type chaos de Wiener du même ordre de grandeur. Encore une fois, cela nous permettra d'estimer en probabilité les termes linéaires et multilinéaires de la donnée initiale.

Proposition 4.2.9 *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $c_n\in l^2(\mathbb{N})$ et $q\geq 2$,*

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}}c_ng_n\Big\|_{L^q(\Omega)}\leq Cq^{\frac{2\gamma+3}{3\gamma}}\times\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2}.$$

Proposition 4.2.10 *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $c_{n,m}\in l^2\cap\tilde{l}^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ et $q\geq 2$,*

$$\Big\|\sum_{n,m\in\mathbb{N}}c_{n,m}\times g_n\times g_m\Big\|_{L^q(\Omega)}\leq Cq^{\frac{4\gamma+6}{3\gamma}}\times\left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}}|c_{n,m}|^2}+\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_{n,n}|\right).$$

Remarque :
Pour γ proche de 0, on trouve la même constante que sous l'hypothèse (H_{E_1}).

Pour démontrer ces propositions, on s'inspire de la preuve du chaos de Wiener, pour les variables aléatoires Bernoulli, faite dans le chapitre 2. On commence par donner quelques définitions.

Définition 4.2.11 *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit*

$$\mathcal{B}_{2p} = \Big\{ \sigma \in \mathcal{S}_{2p} \ / \ \sigma(i) \neq i, \forall i \in \{1,..,2p\} \textit{ et dans la décomposition en}$$
$$\textit{cycles disjoints de } \sigma \textit{ les cycles sont de longueurs 2 ou 3} \Big\}.$$

Et pour $\sigma \in \mathcal{B}_{2p}$, on pose

$$\mathcal{J}(\sigma, p) = \big\{ i \in \{1,..p\} \ / \ \sigma(2i) = 2i-1 \ \textit{et} \ \sigma^2(2i) = 2i \big\}$$

Puis on démontre quelques propriétés de $\mathcal{B}_{2p}$.

Lemme 4.2.12 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires d'espérance nulle et un 2p-uplet $(n_1, ...n_{2p}) \in \mathbb{N}^{2p}$.*

$$\textit{Si } E(X_{n_1} \times ... \times X_{n_{2p}}) \neq 0,$$

$$\textit{alors il existe } \sigma \in \mathcal{B}_{2p} \textit{ tel que } n_{\sigma(i)} = n_i, \ \forall i \in \{1,..,2p\}.$$

Preuve Le résultat se démontre facilement par récurrence sur p. ⊠

Lemme 4.2.13 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $Card(\mathcal{B}_{2p}) \leq (Cp)^{\frac{4p}{3}}$.*

Preuve
A l'aide de la formule de Stirling, on voit que :
-Pour un ensemble à $2n$ éléments, le nombre de permutations ne fixant aucun point et composées uniquement de transpositions est égal à $\frac{(2n)!}{2^n n!} \leq (Cn)^n$.
-Pour un ensemble à $3n$ éléments, le nombre de permutations ne fixant aucun point et composées uniquement de cycles d'ordre 3 est égal à $\frac{(3n)!}{3^n n!} \leq (Cn)^{2n}$.

Ainsi, en sommant sur les éléments qui vont appartenir à une transposition, on trouve

$$Card(\mathcal{B}_{2p}) \leq C^p \times \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} k^k \ (p-k)^{\frac{4(p-k)}{3}} \leq (Cp)^{\frac{4p}{3}}.$$

⊠

Lemme 4.2.14 *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\sigma \in \mathcal{B}_{2p}$ et $c^1, c^2, ...c^p$ dans $\tilde{l}^1 \cap l^2$,*

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| \leq \prod_{\substack{i=1,\\ i\in\mathcal{J}(\sigma,p)}}^{p} ||c^i||_{\tilde{l}^1} \times \prod_{\substack{i=1,\\ i\notin\mathcal{J}(\sigma,p)}}^{p} ||c^i||_{l^2}$$
$$\leq \prod_{i=1}^{p} \Big(\ ||c^i||_{\tilde{l}^1} + ||c^i||_{l^2} \ \Big).$$

Preuve
On prouve le résultat par récurrence sur p. Les cas p=1,2,3,4 et 5 sont clairs (il suffit de traiter tous les cas possibles). Fixons $p \geq 6$ et $\sigma \in \mathcal{B}_{2p}$ et supposons le résultat établi pour tout $q \in \{1, ..., p-1\}$.

Cas $\mathcal{J}(\sigma, p) \neq \varnothing$:
Si $p \in \mathcal{J}(\sigma, p)$ alors on pose $\sigma' = \sigma|_{\{1,...,2(p-1)\}} \in \mathcal{B}_{2(p-1)}$ pour avoir

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| = \left(\sum_{\substack{n_1,...,n_{2(p-1)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^{p-1}_{n_{2p-3},n_{2p-2}}| \right) \times ||c^p||_{\tilde{l}^1},$$

et le résultat est prouvé par récurrence en remarquant que $\mathcal{J}(\sigma', p-1) = \mathcal{J}(\sigma, p) \setminus \{p\}$.
Si $p \notin \mathcal{J}(\sigma, p)$ alors il existe $i \in \{1, ..., p-1\}$ tel que $i \in \mathcal{J}(\sigma, p)$.
Posons alors

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \{1, ..., 2p\} \setminus \{2i-1, 2i\} & \to & \{1, ..., 2p-2\} & \\ & k & \mapsto & k & \text{si } k \notin \{2p-1, 2p\}, \\ & 2p-1 & \mapsto & 2i-1, & \\ & 2p & \mapsto & 2i, & \end{array}$$

$\tau = \sigma|_{\{1,...,2p\}\setminus\{2i-1,2i\}}$ et $\sigma' = \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$, pour obtenir que

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| = \left(\sum_{\substack{n_1,...,n_{2(p-1)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ...\cancel{|c^i_{n,n}|}...|c^{p-1}_{n_{2p-3},n_{2p-2}}| \ |c^p_{n_{2i-1},n_{2i}}| \right) \times ||c^i||_{\tilde{l}^1}.$$

Remarquons que $\sigma' \in \mathcal{B}_{2(p-1)}$ et que $\mathcal{J}(\sigma', p-1) = \mathcal{J}(\sigma, p) \setminus \{i\}$, pour appliquer l'hypothèse de récurrence à $c^1 = c^1, ..., c^i = c^p, ..., c^{p-1} = c^{p-1}$ et obtenir le résultat.

Cas $\mathcal{J}(\sigma, p) = \varnothing$:
On doit prouver que

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| \leq \prod_{i=1}^{p} ||c^i||_{l^2}.$$

On remarque que dans ce cas les c^i jouent des rôles complètement symétriques.
Si σ est formée uniquement de transpositions alors le résultat a déjà été prouvé au chapitre 2. On peut donc se ramener au cas où il y a au moins deux cycles d'ordre 3 dans la décomposition en cycles disjoints de σ.
Quitte à échanger les c^k et à remplacer $c^k_{i,j}$ par $c^k_{j,i}$, on peut se ramener à l'étude des différents cas suivants récapituler dans ce tableau :

Termes qui intervient dans la somme à étudier	Au moins ces 2 cycles d'ordre 3 pour σ
$\lvert c^p_{n,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{m,n}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{m,m}\rvert \times ...$	$(2p-2, 2p-1, 2p)$ et $(2p-5, 2p-4, 2p-3)$
$\lvert c^p_{n,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{m,n}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{.,m}\rvert \times \lvert c^{p-3}_{.,m}\rvert \times ...$	$(2p-2, 2p-1, 2p)$ et $(2p-6, 2p-4, 2p-3)$
$\lvert c^p_{n,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{m,m}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-3}_{.,m}\rvert \times ...$	$(2p-4, 2p-1, 2p)$ et $(2p-6, 2p-3, 2p-2)$
$\lvert c^p_{n,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{.,m}\rvert \times \lvert c^{p-3}_{.,m}\rvert \times \lvert c^{p-4}_{.,m}\rvert \times ...$	$(2p-2, 2p-1, 2p)$ et $(2p-8, 2p-6, 2p-4)$
$\lvert c^p_{m,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{m,n}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{m,n}\rvert \times ...$	$(2p-4, 2p-2, 2p)$ et $(2p-5, 2p-3, 2p-1)$
$\lvert c^p_{m,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{m,n}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-3}_{.,m}\rvert \times ...$	$(2p-4, 2p-2, 2p)$ et $(2p-6, 2p-3, 2p-1)$
$\lvert c^p_{m,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-3}_{.,m}\rvert \times \lvert c^{p-4}_{.,m}\rvert \times ...$	$(2p-4, 2p-2, 2p)$ et $(2p-8, 2p-6, 2p-1)$
$\lvert c^p_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-1}_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-2}_{.,n}\rvert \times \lvert c^{p-3}_{.,m}\rvert \times \lvert c^{p-4}_{.,m}\rvert \times \lvert c^{p-5}_{.,m}\rvert \times ...$	$(2p-4, 2p-2, 2p)$ et $(2p-10, 2p-8, 2p-6)$

où dans la seconde colonne, le premier cycle correspond à la sommation sur n et le second cycle à la sommation sur m.
Effectuons la démonstration dans les deux cas extrémaux, c'est à dire pour σ correspondant à la première ou la dernière ligne du tableau.
Pour le premier cas, on trouve $\sigma' = \sigma_{|\{1,...,2(p-3)\}} \in \mathcal{B}_{2(p-3)}$ telle que

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| = \sum_{\substack{n_1,...,n_{2(p-3)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^{p-3}_{n_{2(p-3)-1},n_{2(p-3)}}| \times \sum_{n,m} |c^p_{n,n}| \times |c^{p-1}_{m,n}| \times |c^{p-2}_{m,m}|.$$

Puis en remarquant que $\mathcal{J}(\sigma', p-3) = \varnothing$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $p-3$ avec $\sigma' \in \mathcal{B}_{2(p-3)}$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \dots |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| &\le \prod_{i=1}^{p-3} ||c^i||_{l^2} \times \sum_n |c^p_{n,n}| \times \sqrt{\sum_m |c^{p-1}_{m,n}|^2 \times \sum_m |c^{p-2}_{m,m}|^2} \\ &\le \prod_{i=1}^{p-2} ||c^i||_{l^2} \times \sqrt{\sum_n |c^p_{n,n}|^2 \times \sum_{m,n} |c^{p-1}_{m,n}|^2} \\ &\le \prod_{i=1}^{p} ||c^i||_{l^2}.\end{aligned}$$

Pour le dernier cas, on pose $\tau = \sigma|_{\{1,..,2p-11\}\cup\{2p-9,2p-7,2p-5,2p-3,2p-1\}}$,

$$\begin{array}{cccc} \gamma: & \{1,...,2(p-3)\} & \to & \{1,...,2p-11\} \cup \{2p-9, 2p-7, 2p-5, 2p-3, 2p-1\} \\ & k & \mapsto & k \text{ si } k \in \{1,...,2p-11\} \cup \{2p-9, 2p-7\}, \\ & 2p-10 & \mapsto & 2p-5, \\ & 2p-8 & \mapsto & 2p-3, \\ & 2p-6 & \mapsto & 2p-1, \end{array}$$

et $\sigma' = \gamma^{-1} \circ \tau \circ \gamma \in \mathcal{B}_{2(p-3)}$.
Vu que $2p-6 = \sigma'(2p-6) \Leftrightarrow 2p-1 = \sigma(2p-1)$, $2p-8 = \sigma'(2p-8) \Leftrightarrow 2p-3 = \sigma(2p-3)$, $2p-10 = \sigma'(2p-10) \Leftrightarrow 2p-5 = \sigma(2p-5)$ et $\sigma' = \sigma$ sur $\{1,...,2p-11\} \cup \{2p-9, 2p-7\}$, on obtient

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}|$$

$$= \sum_{\substack{n_1,...,n_{2(p-3)},\\ n_{\sigma'(i)}=n_i}} \sum_{n,m} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^{p-6}_{n_{2(p-6)-1},2(p-6)}| \ |c^{p-5}_{n_{2p-11},m}| \ |c^{p-4}_{n_{2p-9},m}| \ |c^{p-3}_{n_{2p-7},m}| \ |c^{p-2}_{n_{2p-10},n}| \ |c^{p-1}_{n_{2p-8},n}| \ |c^{p}_{n_{2p-6},n}|.$$

Puis à l'aide de l'inégalité de Hölder et de l'injection $l^2 \hookrightarrow l^3$, on établit

$$\sum_{n,m} |c^{p-5}_{n_{2p-11},m}| \ |c^{p-4}_{n_{2p-9},m}| \ |c^{p-3}_{n_{2p-7},m}| \ |c^{p-2}_{n_{2p-10},n}| \ |c^{p-1}_{n_{2p-8},n}| \ |c^{p}_{n_{2p-6},n}|$$

$$\leq \sqrt{\sum_n |c^p_{n_{2p-6},n}|^2 . \sum_m |c^{p-3}_{n_{2p-7},m}|^2} \times \sqrt{\sum_n |c^{p-1}_{n_{2p-8},n}|^2 . \sum_m |c^{p-4}_{n_{2p-9},m}|^2} \times \sqrt{\sum_n |c^{p-2}_{n_{2p-10},n}|^2 . \sum_m |c^{p-5}_{n_{2p-11},m}|^2},$$

pour ensuite appliquer l'hypothèse de récurrence à $p-3$, $\sigma' \in \mathcal{B}_{2(p-3)}$ et $c^1 = c^1, ..., c^{p-6} = c^{p-6}$, $\tilde{c}^{p-5}_{k,l} = \sqrt{\sum_n |c^{p-2}_{k,n}|^2 . \sum_m |c^{p-5}_{l,m}|^2}$, $\tilde{c}^{p-4}_{k,l} = \sqrt{\sum_n |c^{p-1}_{k,n}|^2 . \sum_m |c^{p-4}_{l,m}|^2}$ et $\tilde{c}^{p-3}_{k,l} = \sqrt{\sum_n |c^{p}_{k,n}|^2 . \sum_m |c^{p-3}_{l,m}|^2}$.
Il faut remarquer que $\mathcal{J}(\sigma', p-3)$ n'est pas forcément égal à l'ensemble vide et que $p-5$ ou $p-4$ ou $p-3$ pourraient très bien appartenir à cet ensemble, on obtient donc

$$\sum_{\substack{n_1,...,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c^1_{n_1,n_2}| \ ... \ |c^p_{n_{2p-1},n_{2p}}| \leq \prod_{i=1}^{p-6} ||c^i||_{l^2} \times \prod_{i=p-5}^{p-3} ||\tilde{c}^i||_{l^?_i},$$

où $l^?_i$ désigne la norme l^2 ou $\tilde{l}^1$.

Enfin, pour conclure, il suffit de remarquer que

$$||\tilde{c}^{p-5}||_{l^2} = ||\sqrt{\sum_n |c^{p-2}_{\cdot,n}|^2 \times \sum_m |c^{p-5}_{\cdot,m}|^2}||_{l^2} = ||c^{p-2}||_{l^2} \times ||c^{p-5}||_{l^2},$$

et par Cauchy Schwarz que

$$||\tilde{c}^{p-5}||_{\tilde{l}^1} = ||\sqrt{\sum_n |c^{p-2}_{\cdot,n}|^2 \times \sum_m |c^{p-5}_{\cdot,m}|^2}||_{\tilde{l}^1} \leq ||c^{p-2}||_{l^2} \times ||c^{p-5}||_{l^2}.$$

Puis, on peut faire de même pour $\tilde{c}^{p-4}$ et $\tilde{c}^{p-3}$, ce qui achève la récurrence. ⊠

Une fois ces différents lemmes établis, on peut montrer les Propositions 4.2.9 et 4.2.10.

Preuve de la Proposition 4.2.9
On peut réduire la preuve au cas où $q = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et il suffit de prouver que

$$\Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \Big\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} \leq (Cp)^{\frac{2p(2\gamma+3)}{3\gamma}} \times \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^p .$$

On peut ensuite utiliser successivement les Lemmes 4.2.12 et 4.2.13 pour obtenir que

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \Big\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} &= \sum_{n_1,\dots,n_{2p}} c_{n_1}\dots c_{n_p}.\overline{c_{n_{p+1}}}\dots\overline{c_{n_{2p}}} \times E\left(\prod_{i=1}^{2p} g_{n_i}\right) \\
&\leq \sum_{n_1,\dots,n_{2p}} |c_{n_1}|\dots|c_{n_{2p}}| \times \left| E\left(\prod_{i=1}^{2p} g_{n_i}\right)\right| \\
&\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{B}_{2p}} \sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1}|\dots|c_{n_{2p}}| \right) \times \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|g_n|^{2p}\right) \\
&\leq Card(\mathcal{B}_{2p}) \times (Cp)^{\frac{2p}{\gamma}} \times \sup_{\sigma\in\mathcal{B}_{2p}} \left(\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{2p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1}|\dots|c_{n_{2p}}| \right) \\
&\leq (Cp)^{\frac{2p(2\gamma+3)}{3\gamma}} \times \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^p ,
\end{aligned}$$

où pour le passage à la dernière ligne, on utilise le fait que $l^2(\mathbb{N}) \hookrightarrow l^p(\mathbb{N})$ pour $p \geq 2$. ⊠

Preuve de la Proposition 4.2.10
On peut réduire la preuve au cas où $q = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et il suffit de prouver que

$$\Big\| \sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m} \times g_n(\omega) \times g_m(\omega) \Big\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} \leq (Cp)^{\frac{4p(2\gamma+3)}{3\gamma}} \times \left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |c_{n,m}|^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{n,n}| \right)^{2p} .$$

On peut ensuite utiliser successivement les Lemmes 4.2.12, 4.2.14 et 4.2.13 pour obtenir que

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n,m\in\mathbb{N}} c_{n,m}\times g_n(\omega)\times g_m(\omega)\Big\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} &= \sum_{n_1,\dots,n_{4p}} c_{n_1,n_2}\dots c_{n_{2p-1},n_{2p}}.\overline{c_{n_{2p+1},n_{2p+2}}}\dots\overline{c_{n_{4p-1},n_{4p}}}\times E\left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i}\right)\\
&\le \sum_{n_1,\dots,n_{4p}} |c_{n_1,n_2}|\dots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}|\times\left|E\left(\prod_{i=1}^{4p} g_{n_i}\right)\right|\\
&\le \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{B}_{4p}}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{4p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1,n_2}|\dots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}|\right)\times\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|g_n|^{4p}\right)\\
&\le Card(\mathcal{B}_{4p})\times(Cp)^{\frac{4p}{\gamma}}\times\sup_{\sigma\in\mathcal{B}_{4p}}\left(\sum_{\substack{n_1,\dots,n_{4p},\\ n_{\sigma(i)}=n_i}} |c_{n_1,n_2}|\dots|c_{n_{4p-1},n_{4p}}|\right)\\
&\le (Cp)^{\frac{4p(2\gamma+3)}{3\gamma}}\times\left(\sqrt{\sum_{n,m\in\mathbb{N}}|c_{n,m}|^2}+\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_{n,n}|\right)^{2p}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition. ⊠

Enfin, comme pour la partie précédente, on peut également établir le théorème suivant :

Proposition 4.2.15 *Pour tout $r\in\mathbb{N}^*$, il existe une constante $C>0$ telle que pour toute suite $c_{n_1,..,n_r}$ et tout réel $q\ge 2$,*

$$\Big\|\sum_{n_1,\dots,n_r} c_{n_1,\dots,n_r}\, g_{n_1}\times\dots\times g_{n_r}\Big\|_{L^q(\Omega)}\le Cq^{\frac{r(2\gamma+3)}{3\gamma}}\times\sum_{\sigma\in\mathcal{T}_r}\left(\sum_{\substack{n_i=n_{\sigma(i)}\\ si\ \sigma(i)\neq i}}\sqrt{\sum_{n_i/\sigma(i)=i}|c_{n_1,\dots,n_r}|^2}\right),$$

où $\mathcal{T}_r$ désigne l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_r$ qui sont formées uniquement de transpositions et de cycles d'ordre 3 dans leur décomposition en cycles disjoints.

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'établir un lemme du même type que le Lemme 4.2.7 mais pour une permutation $\sigma\in\mathcal{B}_{r_1+\dots+r_p}$. Vu que ce résultat est très technique, il n'est pas présenté dans ce manuscrit.

4.2.3 Retour aux données initiales aléatoires : estimées de types grandes déviations

A l'aide des propositions précédentes, on peut obtenir des inégalités de type grandes déviations pour la donnée initiale. D'abord énonçons et prouvons le résultat avec les termes multilinéaires.

Théorème 4.2.16 *Pour tous $r\in\mathbb{N}^*$ et $p\ge 2$, il existe deux constantes $C,c>0$ telles que pour tout $t\ge 0$,*

$$\mu\left(u_0\in\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/\ ||\left(e^{itH}u_0\right)^r||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/3}(\mathbb{R}^2))}\ge t^r\right)\le C\exp\left(-c\left(\frac{t}{||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}}\right)^{m(\gamma)}\right),$$

$$\textit{avec } m(\gamma) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{\gamma+2} & \textit{sous l'hypothèse } (H_{E_1}), \\ \frac{3\gamma}{2\gamma+3} & \textit{sous l'hypothèse } (H_{E_2}). \end{cases}$$

Preuve
Effectuons la preuve sous l'hypothèse (H_{E_1}). Il suffit de montrer le théorème pour $t \geq C||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}$ avec C qui sera fixé plus tard. À l'aide de l'inégalité de Markov et de l'inégalité de Minkowski, on établit que pour tout $q \geq p$,

$$\begin{aligned} &\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/ \ || \left(e^{itH}u_0\right)^r ||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/3}(\mathbb{R}^2))} \geq t^r\right) \\ &\leq t^{-rq} \times || \left(e^{itH}u_0\right)^r ||^q_{L^q(\Omega,L^p([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/3}(\mathbb{R}^2)))} \\ &\leq t^{-rq} \times || \ H^{\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{6}} \left(e^{itH}u_0\right)^r ||^q_{L^p([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^2,L^q(\Omega)))}. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la Proposition 4.2.3 et le Théorème 4.1.4, on obtient

$$\begin{aligned} &|| \ H^{\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{6}} \left(e^{itH}u_0\right)^r ||_{L^p([-2\pi,2\pi],L^2(\mathbb{R}^2,L^q(\Omega)))} \\ &\leq Cq^{\frac{r(\gamma+2)}{2\gamma}} \times \left\| \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} \sum_{\substack{n_i=n_{\sigma(i)} \\ \text{si } \sigma(i)\neq i}} \sqrt{\sum_{n_i/\sigma(i)=i} |c_{n_1}|^2...|c_{n_r}|^2 \ |H^{\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{6}}(h_{n_1}...h_{n_r})(x)|^2} \ \right\|_{L^2_x(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq Cq^{\frac{r(\gamma+2)}{2\gamma}} \times \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} \sum_{\substack{n_i=n_{\sigma(i)} \\ \text{si } \sigma(i)\neq i}} \sqrt{\sum_{n_i/\sigma(i)=i} |c_{n_1}|^2...|c_{n_r}|^2 \ ||H^{\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{6}}(h_{n_1}...h_{n_r})(x)||^2_{L^2_x(\mathbb{R}^2)}} \\ &\leq Cq^{\frac{r(\gamma+2)}{2\gamma}} \times \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} \sum_{\substack{n_i=n_{\sigma(i)} \\ \text{si } \sigma(i)\neq i}} \sqrt{\sum_{n_i/\sigma(i)=i} |c_{n_1}|^2...|c_{n_r}|^2 \ \max(\lambda_{n_1},...\lambda_{n_r})^{2\sigma}} \\ &\leq Cq^{\frac{r(\gamma+2)}{2\gamma}} \times ||u_0||^r_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a démontré que pour tout $q \geq p$,

$$\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/ \ || \left(e^{itH}u_0\right)^r ||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/3}(\mathbb{R}^2))} \geq t^r\right) \leq \left(C \times \frac{q^{\frac{\gamma+2}{2\gamma}}}{t} \times ||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}\right)^{rq}.$$

Et le résultat est établi en choisissant $q = \left(\frac{t}{2C||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}$, qui est bien plus grand que p vu le cadre dans lequel il suffit d'établir le théorème. ⊠

Comme il a été établi dans le chapitre 3, on peut aussi démontrer des estimées de types grandes déviations sur les termes linéaires de la donnée initiale à partir de la Proposition 4.2.1 (ou de la Proposition 4.2.9) et des estimées linéaires des fonctions propres. En se rappelant que la norme $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ de la fonction propre est bornée et que la norme $L^4(\mathbb{R}^2)$ est à décroissance $-\frac{1}{12}$ par rapport à la valeur propre, on peut établir le théorème suivant.

Théorème 4.2.17 *Pour tout $p \geq 2$, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$,*

$$\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/\ ||e^{itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\sigma+1/6,4}(\mathbb{R}^2))} \geq t\right) \leq C\exp\left(-c\left(\frac{t}{||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}}\right)^{m(\gamma)}\right),$$

$$\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/\ ||e^{itH}u_0||_{L^p([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\sigma-,\infty}(\mathbb{R}^2))} \geq t\right) \leq C\exp\left(-c\left(\frac{t}{||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)}}\right)^{m(\gamma)}\right),$$

$$\textit{avec } m(\gamma) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{\gamma+2} & \textit{sous l'hypothèse } (H_{E_1}), \\ \frac{3\gamma}{2\gamma+3} & \textit{sous l'hypothèse } (H_{E_2}). \end{cases}$$

4.3 Un dernier théorème

Dans cette section, on énonce un dernier théorème (le Théorème 1.4.10) et on effectue une esquisse de démonstration. On suppose que la base $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque, que $d = 2$ et $p = 5$ dans l'équation (NLS) et que la suite de variables aléatoires $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(H_\gamma)(H_{E_1})(H_{01})(H_{02})$ ou $(H_\gamma)(H_{E_2})(H_{01})(H_{02})$.

Théorème 4.3.1 *Soient $\sigma \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$ et $s \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\sigma\right[$, alors pour tout $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)$, il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
i) $P(\Omega') > 0$.
ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale $\tilde{u}$ à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega,.) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega,.)$.
iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe L^+ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$\lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L^+||_{H^s(\mathbb{R}^2)} = 0,$$
$$\lim_{t\to-\infty} ||\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega,.) - e^{it\Delta}L_-||_{H^s(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

De plus si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^2)$ alors $\mu\left(u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/\ u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)\right) = 0$.

Esquisse de démonstration
La démarche est exactement la même qu'au chapitre 2.
On pose, pour $\lambda \geq 0$,

$$E_0(\lambda) = \Big\{u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)/\ ||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^2))} \leq \lambda \quad , \ ||e^{itH}u_0||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],\overline{W}^{\sigma+1/6-,4}(\mathbb{R}^2))} \leq \lambda$$
$$, \ ||e^{itH}u_0||_{L^\infty([-2\pi,2\pi],L^\infty(\mathbb{R}^2))} \leq \lambda$$
$$, \ ||\left(e^{itH}u_0\right)^r||_{L^4([-2\pi,2\pi],\overline{H}^{\sigma+1/3}(\mathbb{R}^2))} \leq \lambda^r$$
$$\text{pour} \quad r = 2,3,4,5\Big\}.$$

Puis à l'aide de l'estimée bilinéaire de type Bourgain pour l'oscillateur Harmonique et de la transformation de lentille, on montre que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec λ assez petit, alors on peut construire une unique solution globale à (NLS) dans $e^{it\Delta}u_0 + X^s$.

On note ensuite $\Omega' = \{\omega \in \Omega/\ u_0^\omega \in E_0(\lambda)\}$ et il reste à voir que $P(\Omega') > 0$. Cela est très facile en vue des Théorèmes 4.2.17 et 4.2.16 puisque, comme dans les deux chapitres précédents, on peut se ramener à prouver le résultat pour une somme finie de variables aléatoires (cf remarque fin de chapitre 2 pour voir comment gagner la norme L_t^∞ à partir de la norme L_t^p avec p très grand). Puis, au vu de l'hypothèse (H_{01}), la propriété est claire pour une somme finie de variables aléatoires. ⊠

Remarque
De cette manière, on peut voir que le théorème du chapitre 2 reste vrai pour des variables aléatoires vérifiant (H_γ), (H_{E_1}) ou (H_{E_2}), (H_{01}) et (H_{02}), avec un ensemble Ω' de mesure de probabilité plus petit que dans le cas gaussien.

Conclusions et perspectives

Ces résultats s'inscrivent dans la lignée des travaux de N.Burq et N.Tzvetkov et L.Thomann, qui depuis plusieurs années ont développé une théorie de résolution d'équations aux dérivées partielles pour des données aléatoires. Pour le cas de l'équation de Schrödinger, les solutions globales construites par les personnes citées précédemment concernent l'équation défocalisante en dimension 1 (le cas focalisant étant traité mais uniquement dans le cas cubique) pour une donnée aléatoire définie à partir de variables aléatoires gaussiennes et d'une donnée initiale particulière ($c_n = \frac{1}{\lambda_n}$). Dans cette thèse, les solutions globales construites sont valables dans des cas plus généraux, cas focalisant comme défocalisant, donnée initiale quelconque, variable aléatoire très générale mais, contrairement aux résultats précédents, on peut regretter de ne plus avoir $P(\Omega') = 1$. Nous proposons deux perspectives. La première consiste à trouver des cas intéressants où $P(\Omega') = 1$ et la seconde à construire d'autre ensemble Ω' pour un gain de régularité supérieur à $\frac{1}{2}$. Pour cela, il va nous falloir des hypothèses plus fortes sur la donnée initiale u_0.

Perspective N° 1 : Vers un $P(\Omega') = 1$?

Remarquons que si l'estimée sur les séries de variables aléatoires est vrai dans $L^\infty(\Omega)$, c'est à dire que

$$\Big|\Big| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \Big|\Big|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2}, \tag{4.3}$$

alors $P(\Omega') = 1$ si $||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} \ll 1$.
En effet, remarquons que par l'inégalité de Markov, nous avons pour tout $q \geq 1$,

$$P(\Omega') \geq \left(\frac{||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)}}{\lambda} \right)^q \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si } ||u_0||_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} < \lambda.$$

Néanmoins, il ne semble pas évident de trouver des exemples de lois de variables aléatoires pour lesquelles l'inégalité (4.3) soit vraie pour tout $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$.
En revanche, c'est le cas si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ et $g_n \in L^\infty(\Omega)$. De cette façon, nous pouvons obtenir $P(\Omega') = 1$ pour tout $u_0 \in \overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $(\lambda_n^\sigma c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$. Ce résultat est intéressant car il existe de nombreuses données initiales u_0 vérifiant cette hypothèse qui ne permettent pas de gagner de dérivées dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire telle que $u_0 \notin \overline{H}^{\sigma+\epsilon}(\mathbb{R}^d)$. Néanmoins, l'hypothèse est assez maladroite car elle force u_0 à être très régulière dans $L^4(\mathbb{R}^d)$ sans passer par l'aléatoire.

Une façon de contourner l'estimée (4.3) serait peut être de tenter d'appliquer directement un théorème de point fixe dans un espace de probabilité ?

Perspective N° 2 : Vers l'existence de Ω' pour toute équation sur-critique ?

L'existence de la formule de Weyl suivante pour l'oscillateur harmonique

$$\forall \theta \geq 0,\ \exists C > 0,\ /\ \sum_{k/\lambda < \lambda_k \leq \lambda + \mu} h_k(x)^2 \leq C\lambda^{d-1+\theta} < x >^{-\theta} \ \text{ pour } \mu \leq 1 \leq \lambda,$$

permet d'établir le résultat suivant :

Théorème 4.3.2 *Pour $\lambda > 0$, posons $I(\lambda) = \{n \in \mathbb{N}/\lambda \leq \lambda_n < \lambda + 1\}$.*
Pour tout $2 \leq p < \infty$ et tout $s < d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\exists C > 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{N} \text{ et } k \in I(\lambda),\ |c_k|^2 \leq \frac{C}{|I(\lambda)|} \sum_{n \in I(\lambda)} |c_n|^2,$$

alors, pour tout $t > 0$,

$$\mu\left(u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)/\ ||u_0||_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \geq t\right) \leq C \exp\left(-c\left(\frac{t}{||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\right)^2\right).$$

Ce résultat signifie que si les coefficients de u_0 sont du mêmes ordres de grandeurs alors il est possible
1- de construire des solutions globales à (NLS) pour des données initiales L^2 pour toute non linéarité.
2- de montrer que le problème (NLSH) est localement presque surement bien posé sur L^2 pour toute non linéarité.

Ce résultat doit pouvoir se généraliser au cas d'un potentiel plus général et non forcément quadratique. Cette perspective est un travail en cours avec Didier Robert et Laurent Thomann.

Bibliographie

[Bou1] Jean-Marc Bouclet. *Distributions spectrales pour des opérateurs perturbés.* PhD thesis, Nantes university, 2000.

[Bou2] Jean Bourgain. *Global solutions of non linear Schrödinger equations.* American Mathematical Society Colloquium Publications, 46.

[Bou3] J. Bourgain. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures. *Communications in Mathematical Physics*, 166(1) :1–26, 1994.

[Bou4] Jean Bourgain. Invariant measures for the 2D defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Communications in Mathematical Physics*, 176(2) :421–445, 1996.

[Bou5] Jean Bourgain. On nonlinear Schrödinger equations. *Inst. Hautes Études Sci.*, pages 11–21, 1998.

[Bu] Nicolas Burq. Mesures semi-classiques et mesures de défaut. *Séminaire Bourbaki*, 826 :167–195, 1997.

[BGT1] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Strichartz inequalities and the non linear Schrödinger equation on compact manifolds. *American Journal of Mathematics*, 126(3) :569–605, Juin 2004.

[BGT2] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 159(1) :187–223, 2005.

[BGT3] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear schrödinger equations. *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure*, 38(2) :255 – 301, 2005.

[BL] Nicolas Burq and Gilles Lebeau. Injections de Sobolev probabilistes et applications. In *http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/64/67/49/PDF/bule7.pdf*, 2011.

[BT1] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Invariant measure for a three dimensional nonlinear wave equation. *International Mathematics Research Notices*, 22, 2007.

[BT2] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I : local theory. *Inventiones Mathematicae*, 173(3) :449–475, 2008.

[BT3] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations II : a global existence result. *Inventiones Mathematicae*, 173(3) :477–496, 2008.

[BT4] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation. In *http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/57/52/01/PDF/hadamard.pdf*, 2011.

[BTT] Nicolas Burq, Nikolay Tzvetkov, and Laurent Thomann. Long time dynamics for the one dimensional non linear Schrödinger equation. In *http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/45/86/10/PDF/osc-harmonique.pdf*, 2010.

[C] Rémi Carles. Critical nonlinear Schrödinger equations with and without harmonic potential. *Math. Models Methods Appl. Sci. 12*, 10 :1513–1523, 2002.

[CCT] Michael Christ, James Colliander, and Terence Tao. Ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations. In *http ://arxiv.org/pdf/math/0311048v1.pdf*, 2003.

[CG1] Jean-Yves Chemin and Isabelle Gallagher. Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 26(2) :599 – 624, 2009.

[CG2] Jean-Yves Chemin and Isabelle Gallagher. Large, global solutions to the Navier-Stokes equations, slowly varying in one direction. *Transactions of the American Mathematical Society.*, 362(6) :2859 – 2873, 2010.

[CGP] Jean-Yves Chemin, Isabelle Gallagher, and Marius Paicu. Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations. *Annals of Mathematics.*, 173(2) :983 – 1012, 2011.

[CO] James Colliander and Tadahiro Oh. Almost sure well-posedness of the cubic nonlinear Schrödinger equation below $L^2(\mathbb{T})$. *Duke Math. J.*, 3 :367–414, 2012.

[D] Yu Deng. Two dimensional NLS equation with random radial data. In *http ://arxiv.org/pdf/1008.2657v2.pdf*, 2010.

[DG] Jacek Dziubanski and Pawel Glowacki. Sobolev spaces related to Schrödinger operators with polynomial potentials. *Mathematische Zeitschrift*, 262 :881–894, 2009.

[G] Jean Ginibre. Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace. *Séminaire Bourbaki*, 796 :163–187, 1995.

[H] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operator III.* Springer Verlag, 1985.

[KT] Herbert Koch and Daniel Tataru. L^p eigeinfunction bounds for the hermite operator. *Duke Math. J.*, 128(2) :369 – 392, 2005.

[M] Andre Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis.* Springer.

[N] U Niederer. Maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator. *Helv. Phys. Acta. 2*, 46 :191–200, 1973.

[O] Tadahiro Oh. Invariant Gibbs measures and a.s. global well-posedness for coupled Kdv systems. In *http ://arxiv.org/pdf/0904.2816v1.pdf*, 2010.

[QL] Hervé Queffélec and Daniel Li. *Introduction à l'étude des espaces de Banach.* EDP Sciences, 2005.

[R] Didier Robert. *Autour de l'approximation semi classique.* Progress in mathematics, Birkhaüser, 1987.

[S] Gigliola Staffilani. The theory of nonlinear Schrödinger equations : part1.

[Ta1] Terence Tao. *Nonlinear dispersive equations : local and global analysis.* American Mathematical Society, 2006.

[Ta2] Terence Tao. A pseudoconformal compactification of the nonlinear Schrödinger equation and applications. *New York Journal of Mathematics*, 15 :265–282, 2009.

[Th1] Laurent Thomann. Random data Cauchy problem for supercritical Schrödinger equations. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 26(6) :2385 – 2402, 2009.

[Th2] Laurent Thomann. A remark on the Schrödinger smoothing effect. *Asymptot. Anal.*, 69(1-2) :117 – 123, 2010.

[Tz1] Nikolay Tzvetkov. Invariant measures for the nonlinear Schrodinger equation on the disc. *Dynamics of PDE*, 6 :111–160, 2006.

[Tz2] Nikolay Tzvetkov. Invariant measures for the defocusing NLS. *Ann. Inst. Fourier*, 58 :2543–2604, 2008.

[Tz3] Nikolay Tzvetkov. Construction of a Gibbs measure associated to the periodic Benjamin Ono equation. *Probability Theory and Related Fields*, 146(3) :481–514, 2010.

[TT] Laurent Thomann and Nikolay Tzvetkov. Gibbs measure for the periodic derivative non linear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 23 :2771–2791, 2010.

[Y] Kenji Yajima. On smoothing property of Schrödinger propagators. In Hiroshi Fujita, Teruo Ikebe, and Shige Kuroda, editors, *Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations*, volume 1450 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 20–35. Springer Berlin / Heidelberg, 1990.

[YZ1] Kenji Yajima and Guoping Zhang. Smoothing property for Schrödinger equations with potential superquadratic at infinity. *Communications in Mathematical Physics*, 221(3) :573–590, 2001.

[YZ2] Kenji Yajima and Guoping Zhang. Local smoothing property and Strichartz inequality for Schrödinger equations with potentials superquadratic at infinity. *Journal of Differential Equations*, 202(1) :81 – 110, 2004.