

Contrôle stochastique par quantification et applications à la finance

Camille ILLAND

Université Pierre et Marie Curie, LPMA

Soutenance de thèse, 18 décembre 2012

Sommaire

- 1 **Contrôle stochastique par quantification**
 - Rappel quantification
 - Contrôle stochastique
- 2 **Discrétisation d'EDSR**
 - Discrétisation
 - Exemples numériques
- 3 **Réplication robuste de dérivés sur variance réalisée**
 - Dérivés sur variance réalisée
 - Exemples

Lignes directrices

- 1 **Contrôle stochastique par quantification**
 - Rappel quantification
 - Contrôle stochastique
- 2 **Discrétisation d'EDSR**
 - Discrétisation
 - Exemples numériques
- 3 **Réplication robuste de dérivés sur variance réalisée**
 - Dérivés sur variance réalisée
 - Exemples

Quantification optimale d'une variable aléatoire

- N -quantifieur (grille de quantification de taille N) : $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$
- Discrétisation par α -quantification $\hat{X}^\alpha : \Omega \rightarrow \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ de $X \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{X}^\alpha = \text{Proj}_\alpha(X)$$

où Proj_α représente la **projection sur α suivant la règle du plus proche voisin** [GershoGray00].

- Erreur induite :

$$\|X - \hat{X}^\alpha\|_2^2 = \mathbb{E} \left[\min_{1 \leq i \leq N} |X(\omega) - \alpha_i|^2 \right]$$

- \hat{X}^N Quantifieur \mathbb{L}_2 -optimal

$$\|X - \hat{X}^{\alpha^*}\|_2^2 = \inf_{\#\alpha=N} \mathbb{E} \left[\min_{1 \leq i \leq N} |X(\omega) - \alpha_i|^2 \right]$$

Quantification optimale d'une variable aléatoire

- N -quantifieur (grille de quantification de taille N) : $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$
- Discrétisation par α -quantification $\hat{X}^\alpha : \Omega \rightarrow \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ de $X \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{X}^\alpha = \text{Proj}_\alpha(X)$$

où Proj_α représente la **projection sur α suivant la règle du plus proche voisin** [GershoGray00].

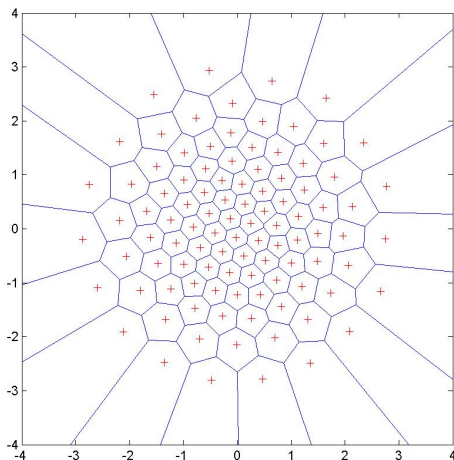
- Erreur induite :

$$\|X - \hat{X}^\alpha\|_2^2 = \mathbb{E} \left[\min_{1 \leq i \leq N} |X(\omega) - \alpha_i|^2 \right]$$

- \hat{X}^N Quantifieur \mathbb{L}_2 -optimal

$$\|X - \hat{X}^{\alpha^*}\|_2^2 = \inf_{\#(\alpha)=N} \mathbb{E} \left[\min_{1 \leq i \leq N} |X(\omega) - \alpha_i|^2 \right]$$

Exemple : quantification optimale d'une loi normale dans \mathbb{R}^2 ($N = 100$) [PagèsPrintems03]



Application à l'intégration numérique

Loi de \hat{X}^α : poids associé à chaque α_i

$$\mathbb{P}(\hat{X}^\alpha = \alpha_i) = \mathbb{P}(X \in C_i(\alpha)) \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

où $C_i(\alpha)$ représente la cellule de Voronoi de α_i défini par

$$C_i(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq N} |x - \alpha_j|^2 \right\}$$

Intégration numérique :

$$\mathbb{E}[F(X)] \sim \mathbb{E}[F(\hat{X}^\alpha)] = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\hat{X}^\alpha = \alpha_i) F(\alpha_i)$$

- ◇ Erreur : $\left| \mathbb{E}[F(X)] - \mathbb{E}[F(\hat{X}^\alpha)] \right| \leq [F]_{Lip} \mathbb{E} \left[\|X - \hat{X}^\alpha\| \right]$
- ◇ Vitesse de convergence connu via théorème de Zador ([Zador82], [GershoGray00]) et lemme de Pierce ([LuschgyPagès08])

$$\left\| X - \hat{X}^N \right\|_\rho \leq C_{d,\rho,\eta} \|X\|_{\rho+\eta} N^{-\frac{1}{d}}$$

Application à l'intégration numérique

Loi de \hat{X}^α : poids associé à chaque α_i

$$\mathbb{P}(\hat{X}^\alpha = \alpha_i) = \mathbb{P}(X \in C_i(\alpha)) \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

où $C_i(\alpha)$ représente la cellule de Voronoi de α_i défini par

$$C_i(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq N} |x - \alpha_j|^2 \right\}$$

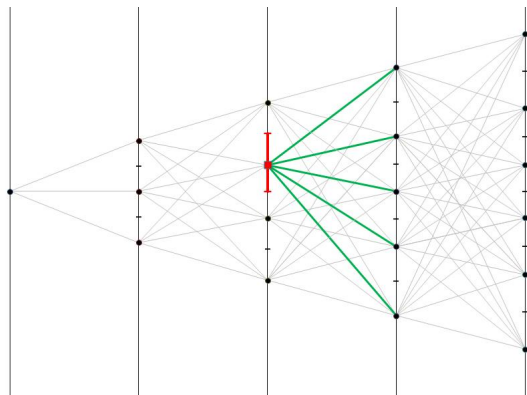
Intégration numérique :

$$\mathbb{E}[F(X)] \sim \mathbb{E}[F(\hat{X}^\alpha)] = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\hat{X}^\alpha = \alpha_i) F(\alpha_i)$$

- ◇ Erreur : $\left| \mathbb{E}[F(X)] - \mathbb{E}[F(\hat{X}^\alpha)] \right| \leq [F]_{Lip} \mathbb{E} \left[\|X - \hat{X}^\alpha\| \right]$
- ◇ Vitesse de convergence connu via théorème de Zador ([Zador82], [GershoGray00]) et lemme de Pierce ([LuschgyPagès08])

$$\left\| X - \hat{X}^N \right\|_p \leq C_{d,p,\eta} \|X\|_{p+\eta} N^{-\frac{1}{d}}$$

Quantification d'une chaîne de Markov [BallyPagèsPrintemps01]



loi de transition :

$$p_{i,j}^k = \mathbb{P}(\hat{X}_{k+1} = \alpha_j^{(k+1)} | \hat{X}_k = \alpha_i^{(k)}) = \mathbb{P}(X_{k+1} \in C_j^{k+1}(\alpha^{(k+1)}) | X_k \in C_i^k(\alpha^{(k)}))$$

Lignes directrices

- 1 **Contrôle stochastique par quantification**
 - Rappel quantification
 - Contrôle stochastique
- 2 **Discrétisation d'EDSR**
 - Discrétisation
 - Exemples numériques
- 3 **Réplication robuste de dérivés sur variance réalisée**
 - Dérivés sur variance réalisée
 - Exemples

Problème de contrôle stochastique

But : Résoudre numériquement des problèmes de contrôle stochastique :

- Option américaine ([BallyPagèsPrintems01], [BouchardWarin11])
- EDSR ([BouchardTouzi04], [GobetLemorWarin05])
- Filtrage ([PhamRunggaldierSellami05], [Pham05])
- Contrôle stochastique associé à une chaîne de Markov ([PagèsPhamPrintems04], [deSaпортаDufour12], [GobetPhamPagèsPrintems06])
- EDSR du second ordre ([CheriditoSonerTouziVictoir07])
- Volatilité incertaine ([Leland85])
- Maximisation d'utilité ([ElKarouiRouge00])

Proposition :

- Mise en place d'un cadre général de contrôle stochastique
- Discrétisation en espace par des méthodes de quantification

Problème de contrôle stochastique

But : Résoudre numériquement des problèmes de contrôle stochastique :

- Option américaine ([BallyPagèsPrintems01], [BouchardWarin11])
- EDSR ([BouchardTouzi04], [GobetLemorWarin05])
- Filtrage ([PhamRunggaldierSellami05], [Pham05])
- Contrôle stochastique associé à une chaîne de Markov ([PagèsPhamPrintems04], [deSaпортаDufour12], [GobetPhamPagèsPrintems06])
- EDSR du second ordre ([CheriditoSonerTouziVictoir07])
- Volatilité incertaine ([Leland85])
- Maximisation d'utilité ([ElKarouiRouge00])

Proposition :

- Mise en place d'un **cadre général** de contrôle stochastique
- Discrétisation en espace par des méthodes de **quantification**

Equation générale

Equation de programmation dynamique rétrograde générale

- Condition terminale

$$y_n(x) = h(x)$$

- Schéma rétrograde : de $k+1$ à k :

$$\begin{cases} u_{k,a}(x) = \mathbb{E} [y_{k+1}(X_{k+1})\phi_{k,a}(x, \xi_{k+1}) | X_k = x] \\ v_k(x, a) = T_{k,a}(x, u_{k,a}(x)), \quad a \in A_k \\ y_k(x) = R_k(x, v_k(x, a)), \quad 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

où :

- ◇ $a \in A_k$ est une variable de contrôle à valeurs dans A_k l'espace de contrôle admissible,
- ◇ $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a. i.i.d. \mathcal{F}_k -mesurables,
- ◇ $h, \phi_{k,a}, T_{k,a}$ et R_k sont des fonctions déterministes.

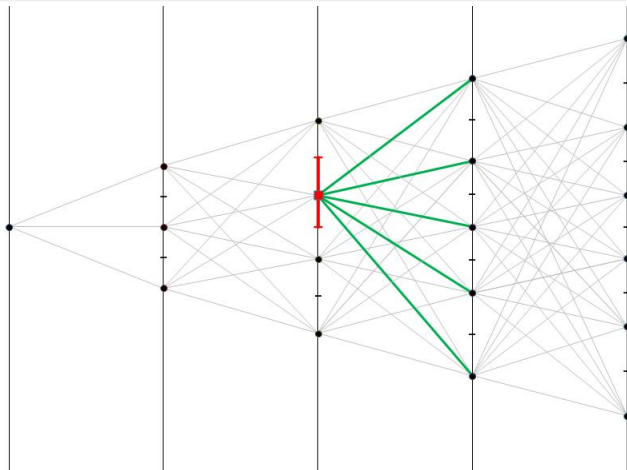
Discrétisation en espace

Estimation de $\mathbb{E} [y_{k+1}(X_{k+1})\phi_{k,a}(x, \xi_{k+1}) | X_k = x]$ par des approximations par quantification

Nous proposons 3 schémas :

- par arbre de quantification
- par régression linéaire
- par méthode des gerbes

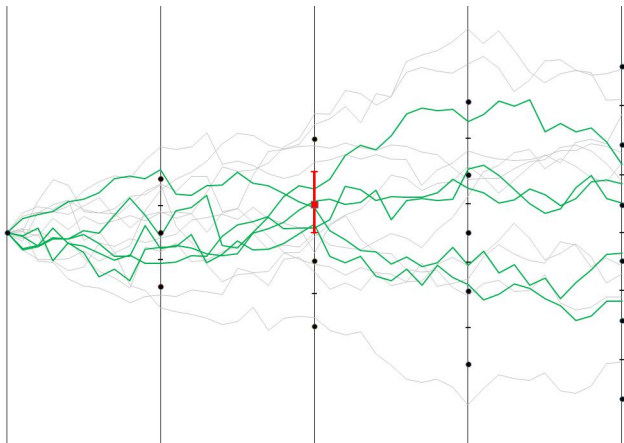
Schéma par arbre de quantification



loi de transition :

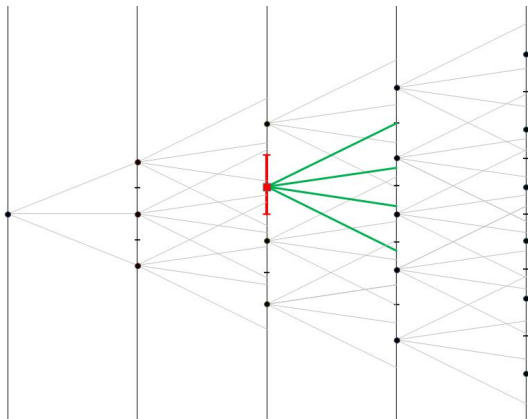
$$p_{ij}^k = \mathbb{P}(\hat{X}_{k+1} = \alpha_j^{(k+1)} | \hat{X}_k = \alpha_i^{(k)}) = \mathbb{P}(X_{k+1} \in C_j^{k+1}(\alpha_i^{(k+1)}) | X_k \in C_i^k(\alpha_i^{(k)}))$$

Schéma par régression linéaire



$$\mathbb{E}[\Gamma_{k+1}|X_k] \simeq \sum_{i=1}^{N_k} \mathbb{E} \left[\Gamma_{k+1} \frac{1_{X_k \in C_i^k}}{\mathbb{P}(X_k \in C_i^k)} \right] 1_{X_k \in C_i^k}$$

Schéma par méthode des gerbes



$\mathcal{P}_{\Gamma_{k+1}}[\hat{y}_{k+1}]$ extrapolation sur \mathbb{R}^d de $\hat{y}_{k+1}(x_j^{(k+1)})$ avec $x_j^{(k+1)} \in \Gamma_{k+1}$,

$$\mathbb{E} \left[y_{k+1}(X_{k+1}) \phi_{k,a}(x, \xi_{k+1}) | X_k = x \right] = \mathbb{E} \left[\mathcal{P}_{\Gamma_{k+1}}[\hat{y}_{k+1}](X_{k+1}) \phi_{k,a}(x, \xi_{k+1}) | X_k = x \right]$$

Erreurs des schémas

Théorème

Sous des hypothèses Lipschitziennes sur les paramètres, on a

$$\sup_k \|y_k(X_k) - \hat{y}_k(X_k)\|_p \leq K_{p,n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + 2 \sup_{a \in A_k} [u_{k,a}]_{Lip} \right) \|X_k - \hat{X}_k\|_p$$

Avec une quantification optimale, on a, avec $\rho > 0$,

$$\sup_k \|y_k(X_k) - \hat{y}_k(X_k)\|_p \leq \tilde{K}_{d,p,n,\eta} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + 2 \sup_{a \in A_k} [u_{k,a}]_{Lip} \right) \|X_k\|_{p+\eta} N_k^{-\frac{1}{d}}$$

Dernière étape : obtenir la propriété lipschitzienne des fonctions $\{u_{k,a}\}_{k,a}$:
 → utilisation de la régularité du semi-groupe de transition ou flût de la chaîne de Markov X .

Régularité Lipschitzienne pour une option américaine

Enveloppe de Snell : $y_k(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E} \left[h(X_{\tau}^{k,x}) \right]$ ($X^{k,x}$ chaîne de Markov, $X_k^{k,x} = x$)

Programmation dynamique : $y_k(x) = \max \left(h(x); \mathbb{E} \left[y_{k+1}(X_{k+1}^{k,x}) \right] \right)$

◊ Semi-groupe de transition Lipschitzien : $|\mathbb{E}[f(X_{k+1}^{k,x})] - \mathbb{E}[f(X_{k+1}^{k,\bar{x}})]| \leq P^X [f]_{\text{Lip}} |x - \bar{x}|$

$[y_k]_{\text{Lip}} \leq \max([h]_{\text{Lip}}; P^X [y_{k+1}]_{\text{Lip}}) \leq [h]_{\text{Lip}} (P^X)^{n-k}$

$[y_k]_{\text{Lip}}$ ne dépend pas de n si $P^X \leq 1 + \frac{C}{n}$

◊ Flût Lipschitzien : $\mathbb{E} \left[\sup_{k \leq j \leq n} |X_j^{k,x} - X_j^{k,\bar{x}}| \right] \leq F^X |x - \bar{x}|$

$|y_k(x) - y_k(\bar{x})| \leq \sup_{\tau} |\mathbb{E}[h(X_{\tau}^{k,x})] - \mathbb{E}[h(X_{\tau}^{k,\bar{x}})]| \leq [h]_{\text{Lip}} \mathbb{E} \left[\sup_{k \leq i \leq n} |X_i^{k,x} - X_i^{k,\bar{x}}| \right] \leq F^X [h]_{\text{Lip}} |x - \bar{x}|$

◊ Flût Lipschitzien \Rightarrow semi-groupe de transition Lipschitzien, mais $P^X \geq \sqrt{2}$
 pour $X_k = (S_k, \max_{0 \leq i \leq k} S_i)$

◊ $X_{k+1} = X_k + \text{sign}(X_k) \varepsilon_{k+1}$: semi-groupe de transition Lipschitzien, mais pas le flût

Régularité Lipschitzienne pour une option américaine

Enveloppe de Snell : $y_k(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E} \left[h(X_{\tau}^{k,x}) \right]$ ($X^{k,x}$ chaîne de Markov, $X_k^{k,x} = x$)

Programmation dynamique : $y_k(x) = \max \left(h(x); \mathbb{E} \left[y_{k+1}(X_{k+1}^{k,x}) \right] \right)$

◊ **Semi-groupe de transition** Lipschitzien : $|\mathbb{E} [f(X_{k+1}^{k,x})] - \mathbb{E} [f(X_{k+1}^{k,\bar{x}})]| \leq P^X [f]_{\text{Lip}} |x - \bar{x}|$

$$[y_k]_{\text{Lip}} \leq \max \left([h]_{\text{Lip}}; P^X [y_{k+1}]_{\text{Lip}} \right) \leq [h]_{\text{Lip}} (P^X)^{n-k}$$

$[y_k]_{\text{Lip}}$ ne dépend pas de n si $P^X \leq 1 + \frac{C}{n}$

◊ **Flût** Lipschitzien : $\mathbb{E} \left[\sup_{k \leq j \leq n} |X_j^{k,x} - X_j^{k,\bar{x}}| \right] \leq F^X |x - \bar{x}|$

$$|y_k(x) - y_k(\bar{x})| \leq \sup_{\tau} \left| \mathbb{E} [h(X_{\tau}^{k,x})] - \mathbb{E} [h(X_{\tau}^{k,\bar{x}})] \right| \leq [h]_{\text{Lip}} \mathbb{E} \left[\sup_{k \leq i \leq n} |X_i^{k,x} - X_i^{k,\bar{x}}| \right] \leq F^X [h]_{\text{Lip}} |x - \bar{x}|$$

◊ Flût Lipschitzien \Rightarrow semi-groupe de transition Lipschitzien, mais $P^X \geq \sqrt{2}$
 pour $X_k = (S_k, \max_{0 \leq i \leq k} S_i)$

◊ $X_{k+1} = X_k + \text{sign}(X_k) \varepsilon_{k+1}$: semi-groupe de transition Lipschitzien, mais pas le flût

Régularité Lipschitzienne pour une option américaine

Enveloppe de Snell : $y_k(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E} \left[h(X_{\tau}^{k,x}) \right]$ ($X^{k,x}$ chaîne de Markov, $X_k^{k,x} = x$)

Programmation dynamique : $y_k(x) = \max \left(h(x); \mathbb{E} \left[y_{k+1}(X_{k+1}^{k,x}) \right] \right)$

◊ **Semi-groupe de transition** Lipschitzien : $|\mathbb{E} [f(X_{k+1}^{k,x})] - \mathbb{E} [f(X_{k+1}^{k,\tilde{x}})]| \leq P^X [f]_{\text{Lip}} |x - \tilde{x}|$

$$[y_k]_{\text{Lip}} \leq \max \left([h]_{\text{Lip}}; P^X [y_{k+1}]_{\text{Lip}} \right) \leq [h]_{\text{Lip}} (P^X)^{n-k}$$

$[y_k]_{\text{Lip}}$ ne dépend pas de n si $P^X \leq 1 + \frac{C}{n}$

◊ **Flût** Lipschitzien : $\mathbb{E} \left[\sup_{k \leq j \leq n} |X_j^{k,x} - X_j^{k,\tilde{x}}| \right] \leq F^X |x - \tilde{x}|$

$$|y_k(x) - y_k(\tilde{x})| \leq \sup_{\tau} \left| \mathbb{E} [h(X_{\tau}^{k,x})] - \mathbb{E} [h(X_{\tau}^{k,\tilde{x}})] \right| \leq [h]_{\text{Lip}} \mathbb{E} \left[\sup_{k \leq i \leq n} |X_i^{k,x} - X_i^{k,\tilde{x}}| \right] \leq F^X [h]_{\text{Lip}} |x - \tilde{x}|$$

◊ Flût Lipschitzien \Rightarrow semi-groupe de transition Lipschitzien, mais $P^X \geq \sqrt{2}$
 pour $X_k = (S_k, \max_{0 \leq i \leq k} S_i)$

◊ $X_{k+1} = X_k + \text{sign}(X_k) \varepsilon_{k+1}$: semi-groupe de transition Lipschitzien, mais pas le flût

Régularité Lipschitzienne pour une option américaine

Enveloppe de Snell : $y_k(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E} \left[h(X_{\tau}^{k,x}) \right]$ ($X^{k,x}$ chaîne de Markov, $X_k^{k,x} = x$)

Programmation dynamique : $y_k(x) = \max \left(h(x); \mathbb{E} \left[y_{k+1}(X_{k+1}^{k,x}) \right] \right)$

◇ **Semi-groupe de transition Lipschitzien** : $\left| \mathbb{E} \left[f(X_{k+1}^{k,x}) \right] - \mathbb{E} \left[f(X_{k+1}^{k,\tilde{x}}) \right] \right| \leq P^X [f]_{\text{Lip}} |x - \tilde{x}|$

$$[y_k]_{\text{Lip}} \leq \max \left([h]_{\text{Lip}}; P^X [y_{k+1}]_{\text{Lip}} \right) \leq [h]_{\text{Lip}} (P^X)^{n-k}$$

$[y_k]_{\text{Lip}}$ ne dépend pas de n si $P^X \leq 1 + \frac{C}{n}$

◇ **Flût Lipschitzien** : $\mathbb{E} \left[\sup_{k \leq j \leq n} \left| X_j^{k,x} - X_j^{k,\tilde{x}} \right| \right] \leq F^X |x - \tilde{x}|$

$$|y_k(x) - y_k(\tilde{x})| \leq \sup_{\tau} \left| \mathbb{E} \left[h(X_{\tau}^{k,x}) \right] - \mathbb{E} \left[h(X_{\tau}^{k,\tilde{x}}) \right] \right| \leq [h]_{\text{Lip}} \mathbb{E} \left[\sup_{k \leq i \leq n} \left| X_i^{k,x} - X_i^{k,\tilde{x}} \right| \right] \leq F^X [h]_{\text{Lip}} |x - \tilde{x}|$$

◇ Flût Lipschitzien \Rightarrow semi-groupe de transition Lipschitzien, mais $P^X \geq \sqrt{2}$
 pour $X_k = (S_k, \max_{0 \leq i \leq k} S_i)$

◇ $X_{k+1} = X_k + \text{sign}(X_k) \varepsilon_{k+1}$: semi-groupe de transition Lipschitzien, mais pas le flût

Lignes directrices

- 1 Contrôle stochastique par quantification
 - Rappel quantification
 - Contrôle stochastique
- 2 Discrétisation d'EDSR
 - Discrétisation
 - Exemples numériques
- 3 Réplication robuste de dérivés sur variance réalisée
 - Dérivés sur variance réalisée
 - Exemples

EDSR doublement réfléchi

EDSR avec double réflexions avec sauts :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = l \vee g \wedge u(X_T) + \int_t^T f(\Theta_s) ds + (K_T^+ - K_t^+) - (K_T^- - K_t^-) \\ \quad - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds), \quad \forall t \in [0, T], \mathbb{P} - p.s. \\ l(X_t) \leq Y_t \leq u(X_t), \quad \forall t \in [0, T], \mathbb{P} - p.s. \\ \text{et } \int_0^T (Y_s - l(X_s)) dK_s^+ = \int_0^T (Y_s - u(X_s)) dK_s^- = 0, \quad \mathbb{P} - p.s. \end{array} \right.$$

où K^\pm sont continus et croissants et $\Theta := (X, Y, Z, \Gamma)$ avec $\Gamma := \int_E \rho(e) U(e) \lambda(de)$.

Le processus progressif $X_t = \Phi_t((S_s)_{0 \leq s \leq t})$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est une fonctionnelle du processus S qui est solution de l'EDS :

$$S_t = S_0 + \int_0^t b(S_r) dr + \int_0^t \sigma(S_r) dW_r + \int_0^t \int_E \beta(S_{r-}, e) \bar{\mu}(de, dr)$$

Ref : [PardouxPeng90], [ElKarouiPengQuenez97], [Kifer00], [CvitanicMa01], [Zhang04], [BouchardTouzi04], [BallyPagèsPrintems05], [HamadèneHassani06], [BouchardElie08], [BouchardChassagneux08], [Chassagneux09]

Approximation du processus progressif

Soit une grille de discrétisation temporelle $\pi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$

Schéma d'Euler S^π :

- valeur initiale : $S_{t_0}^\pi = S_{t_0}$
- De t_i à t_{i+1} :

$$S_{t_{i+1}}^\pi = S_{t_i}^\pi + b(S_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(S_{t_i}^\pi)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \int_E \beta(S_{t_i}^\pi, e) \bar{\mu}(e, (t_i, t_{i+1}])$$

Processus progressif dépendant de la trajectoire $X_t = \Phi(t, (S_s)_{0 \leq s \leq t})$:

$$X_t^\pi = \Phi(t, (S_{\pi(s)}^\pi)_{0 \leq s \leq t}) \quad \pi(t) = \inf_{t_i \in \pi} \{t_i | t_i \leq t\}$$

Approximation du processus progressif

Soit une grille de discrétisation temporelle $\pi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$
Schéma d'Euler S^π :

- valeur initiale : $S_{t_0}^\pi = S_{t_0}$
- De t_i à t_{i+1} :

$$S_{t_{i+1}}^\pi = S_{t_i}^\pi + b(S_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(S_{t_i}^\pi)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \int_E \beta(S_{t_i}^\pi, e) \bar{\mu}(e, (t_i, t_{i+1}])$$

Processus progressif dépendant de la trajectoire $X_t = \Phi(t, (S_s)_{0 \leq s \leq t})$:

$$X_t^\pi = \Phi(t, (S_{\pi(s)}^\pi)_{0 \leq s \leq t}) \quad \pi(t) = \inf_{t_i \in \pi} \{t_i | t_i \leq t\}$$

Erreur du schéma d'Euler du processus progressif

- Erreur du schéma d'Euler : $\mathbb{E} \left[\sup_{t_i \in \pi} |S_{t_i} - S_{t_i}^\pi|^2 \right] \leq C |\pi|$
- Cas continu ($\beta = 0$) [Zhang04] : $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t - S_{\pi(t)}^\pi|^2 \right] \leq C |\pi| \ln\left(\frac{1}{|\pi|}\right)$
- Faux en ajoutant des sauts : $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |N_t - N_{\pi(t)}^\pi|^2 \right] \geq \mathbb{P}(N_T \geq 1)$
avec N processus de Poisson

Théorème

On a la convergence du schéma d'Euler avec la métrique de Skorokhod :

$$\mathbb{E} \left[d_{\mathbb{D}}(S, S_{\pi}^\pi)^2 \right] \leq C |\pi| \ln\left(\frac{1}{|\pi|}\right)$$

avec $d_{\mathbb{D}}(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\lambda(t) - t| + \sup_{t \in [0, T]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \right)$.

Approximation de la partie rétrograde

Schéma rétrograde

- Valeur finale :

$$\tilde{Y}_{t_i}^\pi = g(X_{T_i}^\pi)$$

- Partie rétrograde de l'EDSR : de t_{i+1} à t_i :

$$\begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &= \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &= \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \frac{\int_R \rho(e) \bar{\mu}(de, [t_i, t_{i+1}])}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \tilde{Y}_{t_i}^\pi &= \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, X_{t_i}^\pi, \tilde{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi) \end{cases}$$

- Projection sur les barrières :

$$\tilde{Y}_{t_i}^\pi = l(t_i, X_{t_i}^\pi) \vee \tilde{Y}_{t_i}^\pi \wedge u(t_i, X_{t_i}^\pi)$$

Intuition de l'approximation Z [Zhang04], [BouchardTouzi04], [BallyPagèsPrintems05]

- ◇ Théorème de représentation des martingales

$$Y_{t_{i+1}}^\pi = \tilde{Y}_{t_i}^\pi - (t_{i+1} - t_i) f(t_i, X_{t_i}^\pi, \tilde{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s^\pi dW_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_s^\pi(e) \bar{\mu}(de, ds)$$

- ◇ En multipliant par $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ et avec $A_{t_i} \in \mathcal{F}_{t_i}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] &= \mathbb{E} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s^\pi dW_s \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\left\{ A_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_s^\pi(e) \bar{\mu}(de, ds) \right\} \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s^\pi ds \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \end{aligned}$$

- ◇ Approximation de Z :

$$\bar{Z}_{t_i}^\pi = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \text{ est la meilleure approximation } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable dans } \mathbb{L}_2$$

$$\text{de } \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s^\pi ds$$

Intuition de l'approximation Γ [BouchardElie08]

- ◇ Théorème de représentation des martingales

$$Y_{t_{i+1}}^\pi = \tilde{Y}_{t_i}^\pi - (t - t_i) f(t_i, X_{t_i}^\pi, \tilde{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi) + \int_{t_i}^t Z_s^\pi dW_s + \int_{t_i}^t \int_E U_s^\pi(e) \bar{\mu}(de, ds)$$

- ◇ En multipliant par $\int_E \rho(e) \bar{\mu}(de, [t_i, t_{i+1}[[$ et avec $A_{t_i} \in \mathcal{F}_{t_i}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \frac{\int_E \rho(e) \bar{\mu}(de, [t_i, t_{i+1}[[}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] &= \mathbb{E} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_s^\pi(e) \bar{\mu}(de, ds) \frac{\int_E \rho(e) \bar{\mu}(de, [t_i, t_{i+1}[[}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\left\{ A_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s^\pi dW_s \right\} \frac{\int_E U_s^\pi(e) \bar{\mu}(de, [t_i, t_{i+1}[[}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_E U_s^\pi(e) \rho(e) \lambda(e) de \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \end{aligned}$$

- ◇ Approximation de Γ :

$\bar{\Gamma}_{t_i}^\pi = \mathbb{E} \left[Y_{t_{i+1}}^\pi \frac{\int_E \rho(e) \bar{\mu}(de, ds)}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right]$ est la meilleure approximation \mathcal{F}_{t_i} -mesurable dans \mathbb{L}_2 de $\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_E U_s^\pi(e) \rho(e) \lambda(e)$

Convergence du schéma discret

Théorème

Sous des hypothèses de régularité Lischitzienne, on a

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t - Y_t^\pi|^2 \right] \rightarrow_{\pi \rightarrow 0^+} 0$$

de manière générale et avec une vitesse d'au moins $|\pi| \ln(\frac{1}{|\pi|})$ si f est indépendante de (Z, Γ) .

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ |Z_t - Z_{t_i}^\pi|^2 + |\Gamma_t - \Gamma_{t_i}^\pi|^2 \right\} dt \right] \rightarrow_{\pi \rightarrow 0^+} 0$$

Cadre quantification

- Cadre de la première partie : X Markovien :

Schéma rétrograde : de $k+1$ à k :

$$\begin{cases} u_{k,a}(x) = \mathbb{E} \left[y_{k+1}(X_{k+1}) \left(1, \frac{W_{t_{i+1}}}{t_{i+1}} \frac{\int_{\mathbb{R}} \rho(e) \bar{\mu}(de; [t_i, t_{i+1}])}{t_{i+1} - t_i} \right) \middle| X_k = x \right] \\ v_k(x, a) = T_{k,a}(x, u_{k,a}(x)) = u_{k,a}^1(x) + (t_{i+1} - t_i) f(x, u_{k,a}(x)) \\ y_k(x) = R_k(x, v_k(x, a)) = l(t_i, x) \vee v_k(x, a) \wedge u(t_i, x), \quad \forall 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

- Discrétisation en espace par quantification

$$\sup_{t_k} \| Y_{t_k} - \hat{y}_k(X_k) \| \leq \varepsilon(\text{temps}) + \varepsilon(\text{quantification})$$

$$u_k \text{ Lipschitz} \implies \varepsilon(\text{quantification}) \leq C \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + 2 \sup_{a \in A_k} [u_{k,a}]_{\text{Lip}} \right) N_k^{-\frac{1}{d}} \\ \leq C' n \bar{N}^{-\frac{1}{d}}$$

Lignes directrices

- 1 Contrôle stochastique par quantification
 - Rappel quantification
 - Contrôle stochastique
- 2 Discrétisation d'EDSR
 - Discrétisation
 - Exemples numériques
- 3 Réplication robuste de dérivés sur variance réalisée
 - Dérivés sur variance réalisée
 - Exemples

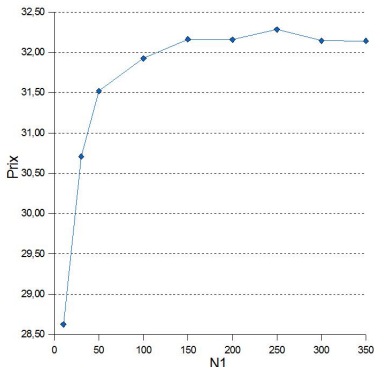
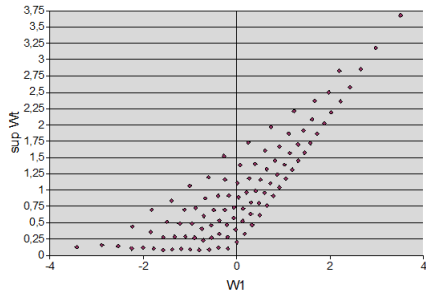
Option Lookback américaine

Résolution de l'option américaine : $P_0 = \text{Essup}_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-r\tau} (\sup_{0 \leq u \leq \tau} S_u - S_\tau)^+ \right]$

Processus markovien : option Lookback $X_t = (S_t, \sup_{0 \leq u \leq t} S_u)$ où S suit le modèle de Black-Scholes : $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$

Payoff $h(t, S_t, \sup_{0 \leq u \leq t} S_u)$ avec $h(t, x, m) = e^{-rt} \sup(m - x, 0)$

paramètres : $r = 0.1$, $T = 1$, $S_0 = 100$, volatilité $\sigma = 20\%$, $n = 5$, méthode par arbre de quantification



EDSR linéaire

EDSR linéaire (f générateur linéaire) :

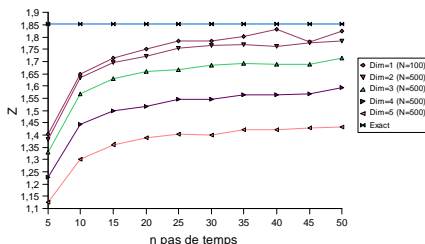
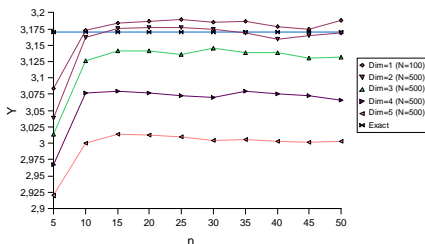
$$Y_t = \frac{|W_1|}{\sqrt{d}} + \int_t^1 \left(Y_s + \frac{Z_s \cdot 1}{\sqrt{d}} \right) ds - \int_t^1 Z_s dW_s$$

Solution explicite : $Y_0 = e^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[\frac{|W_T|}{\sqrt{d}} \exp\left(\frac{W_T}{\sqrt{d}}\right) \right]$ (indépendante de d) .

Par Monte Carlo, $Y_0 = 3.171$ et $Z_0 = 1.856$

($\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[|W_1|] \simeq 0.7$ et $\mathbb{E}[Z_T] = \mathbb{E}[\text{sign}(W_T)] = 0$)

Résultat utilisant la méthode par régression sur une base quantifiée



Lignes directrices

- 1 Contrôle stochastique par quantification
 - Rappel quantification
 - Contrôle stochastique
- 2 Discrétisation d'EDSR
 - Discrétisation
 - Exemples numériques
- 3 Réplication robuste de dérivés sur variance réalisée
 - Dérivés sur variance réalisée
 - Exemples

Swap de variance

Contrat payant la variance réalisée d'un sous-jacent S sur l'intervalle $[0, T]$ que l'on approche par sa version continue :

$$\langle X \rangle_{0,T} = \int_0^T \sigma_t^2 dt = \lim_{\sup |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0} \sum_{0 \leq t_i < T} \left(\ln \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right) \right)^2$$

Hypothèse : S continu, taux d'intérêt nul (pour simplifier),
 Possibilité de traiter toutes les options européennes

Réplication modèle indépendant et non paramétrique

via la formule d'Itô : $\langle X \rangle_{0,T} = -2 \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) + \int_0^T \frac{2}{S_t} dS_t$

- Position statique initiale : option européenne de maturité T :
 $-2X_T = -2 \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) = 2 \int_{-\infty}^{S_0} (K - S_T)^+ \frac{dK}{K^2} + 2 \int_{S_0}^{+\infty} (S_T - K)^+ \frac{dK}{K^2}$
- Position dynamique à la date t : couverture en delta : $\frac{2}{S_t}$ en sous-jacent S_T

Extension aux options sur variance réalisée

Problématique : Peut-on étendre cette couverture modèle indépendant aux options sur variance réalisée et sur le sous-jacent de payoff $F(X_0, T, \langle X \rangle_{0, T})$?

$$X_{s,t} = \ln \left(\frac{S_t}{S_s} \right) \quad \text{et la variance réalisée } \langle X \rangle_{s,t} = \int_s^t \sigma_u^2 du$$

Nombreuses recherches proposent des dynamiques pour la volatilité σ . Mais des difficultés apparaissent :

- calibration des options long terme et court terme
- possibilité de sauts pour la volatilité stochastique
- simulations des trajectoires

Nous parlerons de répliquions robustes quand la couverture ne dépend pas du modèle sur σ . [FritzGatheral05], [CarrLee08]

Extension aux options sur variance réalisée

Problématique : Peut-on étendre cette couverture modèle indépendant aux options sur variance réalisée et sur le sous-jacent de payoff $F(X_0, T, \langle X \rangle_{0, T})$?

$$X_{s,t} = \ln \left(\frac{S_t}{S_s} \right) \quad \text{et la variance réalisée } \langle X \rangle_{s,t} = \int_s^t \sigma_u^2 du$$

Nombreuses recherches proposent des dynamiques pour la volatilité σ . Mais des difficultés apparaissent :

- calibration des options long terme et court terme
- possibilité de sauts pour la volatilité stochastique
- simulations des trajectoires

Nous parlerons de répliquions robustes quand la couverture ne dépend pas du modèle sur σ . [FritzGatheral05], [CarrLee08]

Extension aux options sur variance réalisée

Notation sous le modèle de Black-Scholes : $v = \langle X \rangle_{t,T} = \sigma^2(T-t)$ et

- Prix BS : $h_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[F_t(X_{t,T}, \langle X \rangle_{t,T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t,T} = v \right]$
- « Delta » BS : $\delta_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_t(X_{t,T}, \langle X \rangle_{t,T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t,T} = v \right]$

où $F_t(x, v) = F(X_{0,t} + x, \langle X \rangle_{t,T} + v)$.

Formule BS : $h_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[F_t(\sqrt{v}\varepsilon - \frac{v}{2}, v) | \mathcal{F}_t \right]$ et $\delta_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_t(\sqrt{v}\varepsilon - \frac{v}{2}, v) | \mathcal{F}_t \right]$
avec $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Hypothèse : Le sous-jacent et sa volatilité sont indépendants, i.e.

$$\langle dS_t, d\sigma_t \rangle = 0, \text{ d'où } X_{t,T} \sim \mathcal{N} \left(-\frac{\langle X \rangle_{t,T}}{2}; \langle X \rangle_{t,T} \right)$$

Extension aux options sur variance réalisée

Notation sous le modèle de Black-Scholes : $v = \langle X \rangle_{t,T} = \sigma^2(T-t)$ et

- Prix BS : $h_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[F_t(X_{t,T}, \langle X \rangle_{t,T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t,T} = v \right]$
- « Delta » BS : $\delta_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_t(X_{t,T}, \langle X \rangle_{t,T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t,T} = v \right]$

où $F_t(x, v) = F(X_{0,t} + x, \langle X \rangle_{t,T} + v)$.

Formule BS : $h_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[F_t(\sqrt{v}\varepsilon - \frac{v}{2}, v) | \mathcal{F}_t \right]$ et $\delta_t^{BS}(v) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_t(\sqrt{v}\varepsilon - \frac{v}{2}, v) | \mathcal{F}_t \right]$
 avec $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Hypothèse : Le sous-jacent et sa volatilité sont indépendants, i.e.

$$\langle dS_t, d\sigma_t \rangle = 0, \text{ d'où } X_{t,T} \sim \mathcal{N} \left(-\frac{\langle X \rangle_{t,T}}{2}; \langle X \rangle_{t,T} \right)$$

Problème inverse

Formule Clark-Ocone conditionnellement à la variance réalisée :

$$F(X_{0,T}, \langle X \rangle_{0,T}) = h_0^{BS}(\langle X \rangle_{0,T}) + \int_0^T \delta_t^{BS}(\langle X \rangle_{t,T}) \frac{dS_t}{S_t}$$

Question : Existe-t-il une **option européenne** de payoff P de **même prix** et de **même delta** que $F(X_{0,T}, \langle X \rangle_{0,T})$ pour toute variance réalisée ?

$$\mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t,T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t,T} = v \right] = h_t^{BS}(v), \quad \forall v > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t,T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t,T} = v \right] = \delta_t^{BS}(v), \quad \forall v > 0$$

Solution du problème inverse

Théorème

$$\mathbb{E} \left[P[f, g](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = f(v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[P[f, g](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = g(v)$$

avec $P[f, g] = P[f, 0] + P[0, g]$,

$$P[f, 0](x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x}{2}} |x| \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{x}{2}} \text{sign}(x) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2),$$

$$P[0, g](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x}{2}} \text{sign}(x) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} g \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2),$$

et \mathcal{L} la transformée de Laplace $\mathcal{L}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s) e^{-\lambda s} ds$.

Stratégie de réplication :

Position dynamique sur l'option européenne de payoff $P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T})$ à la date t

$$\mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = h_t^{BS}(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = \delta_t^{BS}(v)$$

Décomposition en deux payoff $P[h_t^{BS}, 0]$ et $P[0, \delta_t^{BS}]$ en prix et delta.

Solution du problème inverse

Théorème

$$\mathbb{E} \left[P[f, g](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = f(v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[P[f, g](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = g(v)$$

avec $P[f, g] = P[f, 0] + P[0, g]$,

$$P[f, 0](x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x}{2}} |x| \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{x}{2}} \text{sign}(x) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2),$$

$$P[0, g](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x}{2}} \text{sign}(x) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} g \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2),$$

et \mathcal{L} la transformée de Laplace $\mathcal{L}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s) e^{-\lambda s} ds$.

Stratégie de réplication :

Position dynamique sur l'option européenne de payoff $P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T})$ à la date t

$$\mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = h_t^{BS}(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = \delta_t^{BS}(v)$$

Décomposition en deux payoff $P[h_t^{BS}, 0]$ et $P[0, \delta_t^{BS}]$ en prix et delta.

Solution du problème inverse

Théorème

$$\mathbb{E} \left[P[f, g](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = f(v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[P[f, g](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = g(v)$$

avec $P[f, g] = P[f, 0] + P[0, g]$,

$$P[f, 0](x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x}{2}} |x| \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{x}{2}} \text{sign}(x) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2),$$

$$P[0, g](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x}{2}} \text{sign}(x) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{\frac{1}{16\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} g \left(\frac{1}{2\lambda} \right) \right) (x^2),$$

et \mathcal{L} la transformée de Laplace $\mathcal{L}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s) e^{-\lambda s} ds$.

Stratégie de réplication :

Position dynamique sur l'option européenne de payoff $P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T})$ à la date t

$$\mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = h_t^{BS}(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E} \left[P[h_t^{BS}, \delta_t^{BS}](X_{t, T}) | \mathcal{F}_t, \langle X \rangle_{t, T} = v \right] = \delta_t^{BS}(v)$$

Décomposition en deux payoff $P[h_t^{BS}, 0]$ et $P[0, \delta_t^{BS}]$ en prix et delta.

Relâchement de l'hypothèse d'indépendance

Nous supprimons ici maintenant l'hypothèse d'indépendance entre l'actif risqué et la volatilité. Nous regardons l'impact de la corrélation sur notre couverture robuste. On considère

$$dS_t^{(\rho)} = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_t S_t^{(\rho)} dW_t^1 + \rho \sigma_t S_t^{(\rho)} dW_t^2$$

où $|\rho| \leq 1$, W^1 et W^2 sont des mouvements Brownien \mathcal{F}_t -adaptés et σ et W^2 sont adaptés à une filtration $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ avec \mathcal{H}_t et $\mathcal{F}_t^{W^1}$ indépendants.

Théorème

Cette couverture est robuste à l'ordre 2 en la corrélation volatilité-actif risqué :

$$\mathbb{E}_t [F(X_T, \langle X \rangle_T) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_t [P[h_t, \delta_t](X_{t,T})] + O(\rho^2)$$

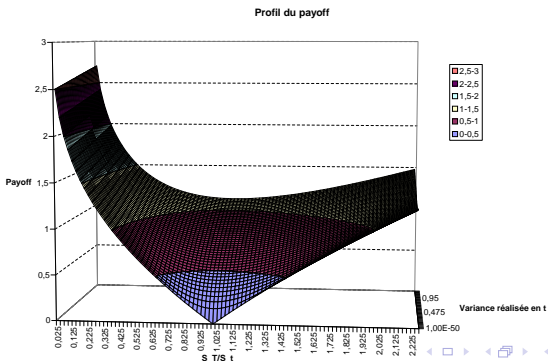
Lignes directrices

- 1 Contrôle stochastique par quantification
 - Rappel quantification
 - Contrôle stochastique
- 2 Discrétisation d'EDSR
 - Discrétisation
 - Exemples numériques
- 3 Réplication robuste de dérivés sur variance réalisée
 - Dérivés sur variance réalisée
 - Exemples

Exemple : Swap de volatilité $\sqrt{\langle X \rangle_T}$

Payoff : $\sqrt{\langle X \rangle_T} \implies h_t(v) = \sqrt{\langle X \rangle_t + v}$ et $\delta_t = 0$

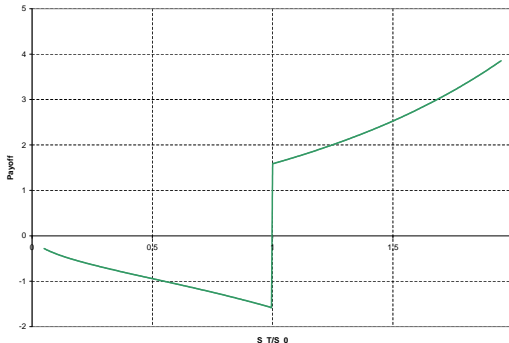
Payoff de couverture robuste à $t = 0$: $P[h_0, \delta_0](X_{t,T}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\alpha}{2}} |X_{t,T}| \left(l_0 \left(\frac{X_{t,T}}{2} \right) - l_1 \left(\frac{X_{t,T}}{2} \right) \right)$



Exemple : Sharpe ratio $\frac{S_T - 1}{\sqrt{\langle X \rangle_T}}$

$$\text{Payoff : } \frac{S_T - 1}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} \Rightarrow h_t(v) = \frac{e^{X_t - 1}}{\sqrt{\langle X \rangle_{t+v}}} \text{ et } \delta_t(v) = \frac{e^{X_t - 1}}{\sqrt{\langle X \rangle_{t+v}}}$$

$$\text{Payoff de couverture robuste à } t = 0 : P[h_0, \delta_0](X_{t,T}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{X_{t,T}}{2}} \text{sign}(X_{t,T}) I_0\left(\frac{X_{t,T}}{2}\right)$$

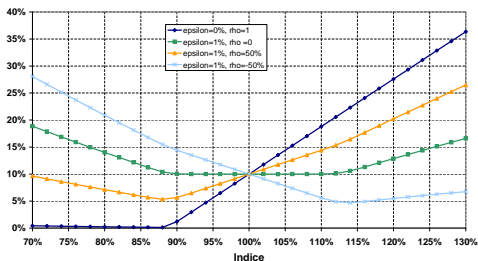


Extension : Option sur fond $(F_T - K)^+$

$$\begin{aligned} \text{Dynamique du fond } F : \frac{dF_t}{F_t} &= \beta \rho \frac{dS_t}{S_t} + \beta \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_\epsilon dW_t^\perp + \epsilon dW_t^\epsilon \\ &= \sqrt{\beta^2 \sigma_\epsilon^2 + \epsilon^2} dW_t^F \end{aligned}$$

$$\text{Payoff } (F_T - K)^+ \Rightarrow \begin{cases} h_\pm(v) = F_t \mathcal{N}(d_+(v)) - K \mathcal{N}(d_-(v)) \\ \delta_\pm(v) = \beta \rho F_t \mathcal{N}(d_+(v)), \end{cases} \quad d_\pm(v) = \frac{\ln(\frac{F_t}{K}) \pm \frac{v}{2}}{\sqrt{v}}$$

Payoff de couverture sur indice d'un Call 1Y : F=110%, K=100%, beta=80%



Merci de votre attention