



**HAL**  
open science

# Dynamique des systèmes quantiques ouverts décohérence et perte d'intrication

Sylvain Vogelsberger

► **To cite this version:**

Sylvain Vogelsberger. Dynamique des systèmes quantiques ouverts décohérence et perte d'intrication. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM027 . tel-00767971

**HAL Id: tel-00767971**

**<https://theses.hal.science/tel-00767971>**

Submitted on 20 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Sylvain Vogelsberger**

Thèse dirigée par **Dominique Spehner et Alain Joye**

préparée au sein **Institut Fourier**  
et de **Ecole doctorale Mathématiques et Informatique**

# Dynamique des systèmes quantiques ouverts : décohérence et perte d'intrication.

Thèse soutenue publiquement le **22 juin 2012**,  
devant le jury composé de :

**nom**

grade, Président

**Stéphane Attal**

Professeur à l'Université Claude Bernard, Lyon, Rapporteur

**Bertrand Georgeot**

Directeur de Recherche au CNRS et à l'Université Paul Sabatier, Toulouse,  
Rapporteur

**Stephan de Bièvre**

Professeur à l'Université Lille 1, Lille, Examineur

**Marco Merkli**

Professor at Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL Canada,  
Examineur

**Dominique Spehner**

Maître de Conférence à l'Université Joseph Fourier, Grenoble, Directeur de thèse

**Alain Joye**

Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble, Co-Directeur de thèse



Merci Dominique pour m'avoir proposé d'étudier ce sujet très intéressant à la frontière des Mathématiques et de la Physique. Je tiens à souligner ton travail précis et rigoureux de suivi de ma thèse.

J'exprime ici ma profonde affection et admiration pour toi Alain. J'ai beaucoup aimé discuter de Mathématiques avec toi. Ton approche de la discipline me touche beaucoup. De plus et c'est fondamental pour moi, cela semble rester toujours un jeu pour toi. Tu m'a appris à naviguer avec des "gars" et des "gens" que l'on minore ou que l'on majore! J'essaye de transmettre à mes élèves ton approche si ludique et en même temps si profonde de la discipline. Enfin tu as été présent et à l'écoute dans les moments forts et difficiles de cette thèse et cela m'a été d'un grand secours.

C'est un honneur pour moi Stéphane que tu sois mon rapporteur de thèse. Ce travail doit beaucoup à des résultats majeurs de ton cru et à certaines de tes idées. Durant cette thèse j'ai beaucoup apprécié ta façon d'expliquer les Mathématiques que ce soit à l'écrit par la lecture de tes articles ou à l'oral en écoutant tes exposés toujours limpides.

Enfin il était important pour moi qu'un physicien fasse partie de mon jury de thèse. Aussi je remercie profondément Bertrand Georgeot d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse.

Stephan, j'ai eu le plaisir de faire ta connaissance lors des rencontres de l'ANR ou du GDR où tu as présenté des conférences intéressantes et d'une clarté exemplaire. De plus, tu as toujours su me mettre à l'aise et eu un mot agréable à mon égard, merci. C'est donc une joie pour moi que tu sois examinateur de ma thèse.

Marco, je ne t'ai encore jamais rencontré mais j'ai déjà eu beaucoup de plaisir à te lire. De plus ayant passé une année au Canada, j'ai rêvé d'aller me perdre au fin fond du Labrador. Grâce à toi, c'est lui qui vient à moi! Merci d'avoir accepté d'être mon rapporteur de thèse.

Merci à toute l'équipe de l'Institut Fourier pour m'avoir accueilli dans ce chaleureux établissement. Tout d'abord je remercie Michel Brion et Gérard Besson les deux directeurs sympatiques du laboratoire que j'ai connus. Ensuite je tiens en particulier à remercier Robert Binder, Hervé Tourelle et Simon Chevance du service informatique pour leurs compétences, leur rapidité d'action et leur sympathie. Merci également à Gabrielle Michel, Géraldine Rahal et Robert Feres pour leur gentillesse. J'ai adoré travailler avec toi, Françoise Martin. Les impressions sont toujours prêtes et surtout tu as tout le temps un mot agréable.

J'ai énormément apprécié étudier à la bibliothèque de l'Institut. On s'y sent admirablement bien grâce à Marie-Noëlle Kassama, Ariane Rolland, Boucif Mokhtari et évidemment grâce à toi Francesca Leinardi.

Merci également à toute l'équipe de Physique Mathématique de l'Institut Fourier. C'était un plaisir de partager certains moments avec vous.

Merci aussi à Jean-Pierre Demailly, Frédéric Mouton et Zindine Djadli pour leur vision transcendante des Mathématiques. J'ai un très grand respect pour vous.

J'ai apprécié partager votre bureau Hiba Abdallah et Jean-François Arnoldi. Vous avez toujours eu un mot sympathique quand cela n'allait pas trop bien. Je n'ai pas oublié, Jef, les fois où tu m'a emmené grimper ou skier avec tes amis. C'était excellent et ça m'a fait un bien fou. Merci à tous les deux.

Enfin je tiens à remercier Christophe Leuridan en qui je voue une profonde affection et admiration. J'ai adoré discuter avec toi de Probabilités bien sûr mais aussi de vélo, de montagne et d'écologie.

Je suis ravi de profiter de ces quelques lignes pour dire à mes amis à quel point je tiens à eux. Alors merci Antho d'être toujours présent même si je ne t'appelle pas souvent (c'était fort ce qu'on a vécu ensemble au Mali). J'ai eu beaucoup de plaisir à cohabiter avec toi Antoine et j'espère qu'on va pouvoir à présent se voir un peu plus. Alex sache que je ne t'oublie pas même si l'océan nous sépare. À quand les nouvelles balades avec Stev' ? Je suis ravi de te revoir crapahuter en montagne Tuyen et c'est avec joie que j'y retournerai avec toi. Mathieu, nos retrouvailles sont toujours festives. Ta vision des Sciences m'émerveille. J'ai adoré profiter de Lyon et d'autres coins avec vous Claire, Jenifer, Charly et Rémi. Myriam et Jack, vous avez été présents et à l'écoute à un moment crucial de ma vie. Jamais je ne l'oublierai. Tu as eu l'idée du siècle, Myriam, en m'apprenant le ski de fond ! Je suis ravi qu'on ait gardé de si bons rapports Lauranne. Sache que j'essaierai toujours de les entretenir. Guillaume tu restes mon ami d'enfance auquel je tiens énormément. C'est en famille qu'on se retrouve à présent et je trouve cela magique. Stev' je n'ai qu'un regret : celui de se voir plus souvent toi et ta famille ! Ah Hélène ! On en a fait des choses ensemble... pourvu que ça dure !

Merci à toute ma famille agrandie grâce à Fanny pour son soutien, son écoute et son amour.

Mes parents je pense que vous devez être soulagés de pouvoir enfin lire ces lignes qui clôturent la fin de mes études ! Elles ont été épiques en louvoyant entre les Mathématiques et la Physique. Merci beaucoup d'avoir cru en moi et de m'avoir permis de faire ce que j'aime. Je suis si heureux et c'est en grande partie grâce à tout l'Amour que vous me portez.

Fanny, tu m'as rendu et me rends toujours le plus heureux des hommes. Ce que tu as fait pour que cette thèse se finisse bien est incalculable même pour le matheux que je suis un peu ! Je t'en suis infiniment reconnaissant et cette thèse te doit énormément. Mais surtout grâce à toi, je vis la vie que j'ai toujours rêvé d'avoir. Je suis si heureux qu'on la partage à trois avec Erwann à présent...

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction.</b>   | <b>i</b>  |
| 0.1 Motivations. . . . .   | i         |
| 0.2 Intrication. . . . .   | iv        |
| 0.2.1 D'un point de vue général. . . . .   | iv        |
| 0.2.2 Concurrence de Wootters. . . . .   | vii       |
| 0.3 Systèmes quantiques ouverts. . . . .   | ix        |
| 0.3.1 Description des états d'un système ouvert. . . . .   | ix        |
| 0.3.2 Évolution exacte. . . . .  | x         |
| 0.3.3 Évolution Markovienne. . . . .   | xiii      |
| 0.3.4 Exemple de deux atomes couplés à deux champs électromagnétiques. . . . .   | xv        |
| 0.4 Désintrication. . . . .  | xix       |
| 0.5 Plan de la thèse. . . . .  | xx        |
| <br>   |           |
| <b>1 Protection de l'intrication d'un système de deux qubits couplés à des bains par des mesures effectuées sur les bains.</b> | <b>1</b>  |
| 1.1 Introduction. . . . .  | 1         |
| 1.2 Description du modèle de sauts quantiques. . . . .   | 2         |
| 1.3 Présentation des résultats de ce chapitre. . . . .   | 4         |
| 1.4 Exemple du comptage de photons. . . . .  | 5         |
| 1.5 Concurrence moyenne pour un modèle de sauts quantiques avec des opérateurs de sauts locaux. . . . .                        | 8         |
| 1.6 Le cas de la détection homodyne. . . . .   | 17        |
| 1.7 Le cas de la détection hétérodyne. . . . .   | 22        |
| 1.8 Qubits couplés au même bain. . . . .   | 24        |
| <br>   |           |
| <b>2 États X et décompositions en états purs produits.</b>   | <b>29</b> |
| 2.1 Introduction. . . . .  | 29        |
| 2.1.1 Définition des états X et motivation de leur étude. . . . .  | 29        |
| 2.1.2 Présentation des résultats de ce chapitre. . . . .   | 30        |
| 2.2 Les états X d'un système de deux qubits. . . . .   | 31        |
| 2.2.1 En ce qui concerne la concurrence des états X. . . . .   | 31        |
| 2.2.2 Géométrie de $\mathcal{E}_X$ , l'ensemble des états X. . . . .   | 33        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.3      | Décomposition en états purs produits d'un état séparable de deux qubits. . . . .   | 36         |
| 2.3.1    | Introduction à la décomposition en états purs produits. . . . .  | 36         |
| 2.3.2    | Décomposition pour les états de $\mathcal{E}_X$ . . . . .  | 37         |
| 2.3.3    | Où on généralise le résultat précédent pour une classe d'états plus grande. . . . .  | 41         |
| 2.3.4    | Méthode de Sanpera, Tarrach et Vidal pour décomposer les états séparables en états purs produits. . . . .  | 55         |
| 2.3.5    | Méthode de Wootters pour décomposer les états séparables en états purs produits. . . . .   | 63         |
| 2.3.6    | Comparaison des trois méthodes de décomposition en états purs produits d'un état séparable de deux qubits. . . . .   | 71         |
| <b>3</b> | <b>Modèles d'interactions répétées.</b>  | <b>73</b>  |
| 3.1      | Introduction. . . . .  | 73         |
| 3.1.1    | Description du modèle. . . . .   | 73         |
| 3.1.2    | Présentation des résultats de ce chapitre. . . . .   | 76         |
| 3.2      | Évolution exacte. . . . .  | 85         |
| 3.3      | Etablissement du résultat fondamental dans la limite de van Hove. . . . .  | 86         |
| 3.4      | Que se passe-t-il dans la limite $\lambda^2\tau = 1$ et $\tau \rightarrow 0$ ? . . . . .   | 92         |
| 3.5      | Formulation matricielle du lindbladien $\Gamma_\beta^\sharp$ . . . . .   | 95         |
| 3.6      | Etats stationnaires et asymptotiques du modèle. . . . .  | 97         |
| 3.7      | Motivations pour l'étude du cas où $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ : . . . . .   | 101        |
| 3.8      | Expressions analytiques pour la matrice densité et évolutions de l'intrication si $\beta = \infty$ et $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ . . . . .                                    | 102        |
| 3.8.1    | Cas $\beta = \infty$ et $\tau_A \neq \tau_B$ . . . . .   | 102        |
| 3.8.2    | Cas $\beta = \infty$ et $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$ . . . . .   | 110        |
| 3.8.3    | Développement perturbatif autour de la température nulle. . . . .  | 114        |
| 3.9      | Expressions analytiques pour la matrice densité et évolutions de l'intrication si $\beta = 0$ , $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$ et si $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ . . . . . | 120        |
|          | <b>Conclusion.</b>   | <b>131</b> |
| <b>A</b> | <b>Preuve du théorème de Schmidt 0.2.1.</b>  | <b>1</b>   |
| <b>B</b> | <b>Preuve du théorème de Wootters 0.2.2.</b>   | <b>3</b>   |
| <b>C</b> | <b>Dérivation d'équations différentielles stochastiques à partir de modèles de sauts quantiques.</b>   | <b>7</b>   |
| C.0.1    | Le cas de la détection homodyne. . . . .   | 7          |
| C.0.2    | Le cas de la détection hétérodyne. . . . .   | 12         |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>D</b> | <b>Solution de l'équation de Lindblad (1.21) avec la condition initiale <math>\rho =  \psi\rangle\langle\psi </math> où <math> \psi\rangle = c_{10} 10\rangle + c_{01} 01\rangle + c_{00} 00\rangle</math>.</b> | <b>17</b> |
| <b>E</b> | <b>Preuve des propositions 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4.</b>   | <b>19</b> |
| <b>F</b> | <b>Preuve de la proposition 3.3.1.</b>  | <b>29</b> |
| <b>G</b> | <b>Dérivation du théorème 3.4.2 via les théorèmes de l'article [4] d'Attal et Joye.</b>   | <b>33</b> |
| <b>H</b> | <b>Calculs perturbatifs autour de la température nulle pour <math>\tau_A = \tau_B</math>.</b>   | <b>39</b> |





# Introduction.

## 0.1 Motivations.

On entend, de nos jours, de plus en plus parler des ordinateurs quantiques. Ces machines qui fonctionneraient non plus sur la base du bit, valant 0 ou 1 mais sur le qubit qui prend ses valeurs sur la sphère de Bloch. L'informatique quantique est très prometteuse. Les informaticiens ont déjà conçu des algorithmes fonctionnant sur ce système. Ils ont, par exemple, découvert une façon de factoriser les grands nombres entiers en facteurs premiers en un temps polynomial (algorithme de Shor 1994 [96, 77]). Ils ont donc théoriquement cassé le fameux code RSA, la base de la sécurité bancaire depuis plus de vingt ans ! Il manque cependant un ingrédient essentiel à leur recette : l'ordinateur quantique. Les expérimentateurs ont certes réussi à construire de telles machines mais ne fonctionnant qu'avec un nombre très limité de qubits (ici des photons) : environ une dizaine et sur un temps très court. Ceci permet uniquement de faire des calculs très modestes, comme factoriser 15 ([15, 32]) ! Pour voir d'où vient cette limitation, entrons un peu plus dans les détails.

Dans un ordinateur quantique, le support physique traitant l'information obéit aux lois de la mécanique quantique. Les bits sont remplacés par des qubits :

**Definition 0.1.1.** Un qubit est un système quantique à deux niveaux. On peut par exemple réaliser un qubit en considérant les deux états de polarisation d'un photon ou les deux états de spin d'un électron : haut et bas.

On reviendra aux réalisations expérimentales plus tard. Concentrons-nous pour l'instant sur le principe du calcul quantique. Un qubit peut donc se trouver dans une superposition cohérente de deux états de référence notés  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Un registre, constitué d'un ensemble de qubits, peut également se trouver dans une superposition cohérente de différents états, donc prendre diverses valeurs à la fois ! Le calcul quantique consiste à manipuler de tels registres. On peut y explorer simultanément des situations correspondant aux différentes valeurs du registre. Supposons par exemple qu'on dispose de  $N$  qubits. Alors, on peut très bien, comme avec les bits, représenter tout nombre entier inférieur à  $2^N$  (il suffit d'écrire ce nombre en base 2). L'avantage d'un

état qubit par rapport à un état bit classique est qu'il peut représenter plusieurs nombres à la fois. Par exemple l'état EPR<sup>1</sup> :  $\frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$  qu'on peut fabriquer grâce à deux qubits permet de représenter 1 et 2 en même temps. Précisément, on obtient, si on effectue une mesure de cet état, les nombres 1 et 2 avec équiprobabilité  $\frac{1}{2}$ . Avec 10 qubits, l'état :

$$\frac{1}{\sqrt{10}}[|0000000001\rangle + |0000000010\rangle + |0000000100\rangle + |0000001000\rangle + |0000010000\rangle + |0000100000\rangle + |0001000000\rangle + |0010000000\rangle + |0100000000\rangle + |1000000000\rangle]$$

est support des nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 et 512. Pour factoriser un nombre entier inférieur à 1024, mettons 538, on peut donc imaginer multiplier des états contenant un grand nombre d'entiers. L'inconvénient est qu'on récupère un résultat probabiliste car on doit effectuer une mesure sur le système quantique pour en extraire de l'information.

Cependant le problème principal ne se situe pas à ce niveau. En effet dans beaucoup de domaines on se satisfait très bien de réponses probabilistes :

- . Le test de Miller-Rabin pour les nombres premiers (cf. [71, 84]).
- . Le calcul Monte-Carlo (cf. [70]).

On a vu que la puissance du calcul quantique était basé sur la manipulation d'états du type mentionné ci-dessus. Ces états ont en commun qu'ils sont non séparables, c'est-à-dire qu'on ne peut écrire ces états comme un produit tensoriel. Les états non séparables sont appelés états intriqués<sup>2</sup>. Ainsi par exemple, pour un système de deux qubits dans un état intriqué, on ne peut considérer les deux qubits individuellement. On est obligé de raisonner de façon collective d'où le fameux "paradoxe" EPR [29].

Mais les qubits sont des objets physiques (photons, atomes, ions, ...) qui vivent dans un environnement donné. Ils sont donc couplés avec ce dernier. Celui-ci va nécessairement perturber l'état dans lequel se trouvent les qubits et ainsi fausser de façon dramatique le résultat. Il est donc crucial de comprendre comment ces phénomènes apparaissent et à quelle vitesse.

Notons également que le même problème intervient pour la téléportation quantique. De quoi s'agit-il? Alice veut téléporter à Bob un état quantique porté par le qubit (*a*). On suppose qu'ils disposent d'une paire de qubits (*b*) et (*c*) intriqués comme dans l'exemple ci-dessus. Alice fait alors interagir<sup>3</sup> le qubit (*a*) (dont elle veut téléporter l'état) avec le qubit (*b*) de la paire intriquée (*b*) – (*c*). Alice mesure la polarisation des deux particules (*a*) et (*b*). Mais (*b*) et (*c*) étant intriqués, cette mesure a un effet immédiat sur l'état de la particule (*c*) de Bob. On voit donc que l'état final de (*c*) (mesuré par Bob) dépend de l'état initial de (*a*) et du résultat des mesures d'Alice.

---

1. Pour Einstein, Podolsky et Rosen qui sont finalement à la base de toute cette théorie [29].

2. On détaillera cette notion fondamentale dans la section suivante.

3. Ici on ne souhaite pas entrer davantage dans les détails du calcul quantique. Notre but est simplement d'expliquer la démarche.

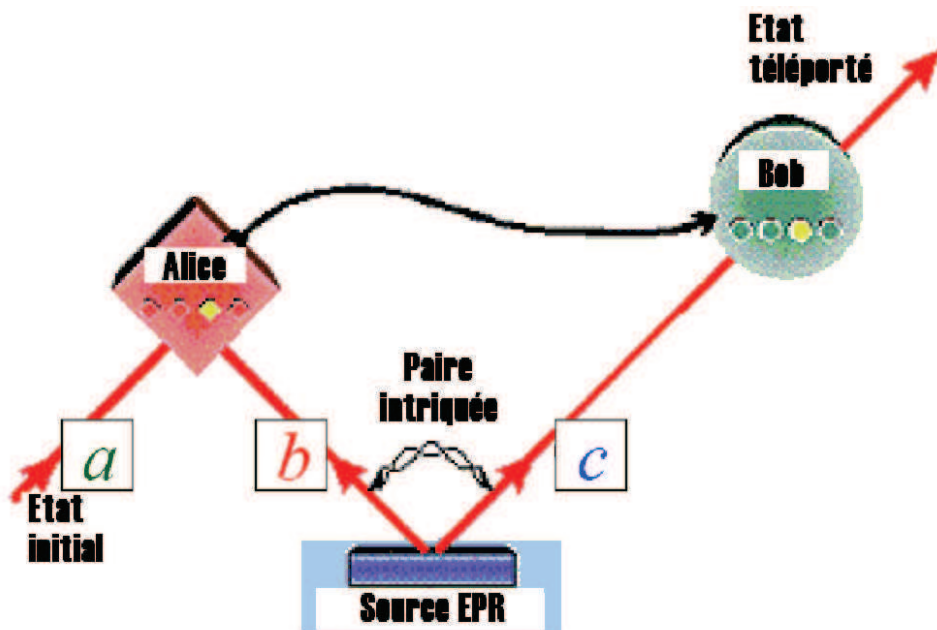


FIGURE 1 – Principe de la téléportation quantique

Elle transmet alors *classiquement* ces données à Bob, qui peut reconstituer l'état initial de ( $a$ ) par une transformation unitaire (qui dépend du résultat transmis par Alice) sur l'état de ( $c$ ).

Il est important de remarquer qu'il n'y a pas de téléportation de matière. C'est l'information qui est téléportée. Comme a répondu Asher Peres, un des pères de la téléportation quantique, récemment disparu, à un journaliste qui lui demandait si l'on peut téléporter l'esprit en même temps que le corps : "Non, on ne peut téléporter que l'esprit!". Ajoutons que la téléportation quantique ne viole pas la relativité restreinte et le principe de causalité. En effet, ici, il faut bien voir qu'à un moment donné on transmet de l'information classiquement : c'est quand Alice envoie à Bob le résultat de sa mesure. Une des applications de la téléportation quantique est la cryptographie quantique<sup>4</sup>. Imaginons qu'Alice veuille transmettre un message à Bob. Pour ce faire, on transforme ce message en un état porté par la particule ( $a$ ). Bob reconstitue ce message grâce au résultat de la mesure d'Alice et de la mesure qu'il fait sur ( $c$ ) comme ci-dessus. Un éventuel espion est nécessairement repéré par cette procédure. En effet, si celui-ci mesure l'état d'une particule, alors par le principe de réduction du paquet d'onde, cet état va se voir modifier. Ainsi, Alice et Bob sauront que quelqu'un a tenté d'intercepter leur

4. Les codes correcteurs d'erreurs sont une autre application importante.

message.

Ceci n'est pas du tout de la science-fiction. Des appareils, fonctionnant sur ce principe, existent dans le commerce (voir le site [www.idquantique.com](http://www.idquantique.com)) et sont utilisés par le gouvernement fédéral suisse pour les élections. Ajoutons qu'en juin 2004, une équipe de l'Université de Genève a réussi à téléporter l'état d'un photon entre Nyon et Genève sous le lac Léman (23 km) [39].

## 0.2 Intrication.

### 0.2.1 D'un point de vue général.

Comme nous venons de le voir, les états intriqués jouent un rôle majeur dans les applications modernes de la mécanique quantique. Les pères de la mécanique quantique avaient déjà conscience que cette notion d'intrication était au coeur de la théorie qu'ils construisaient. Erwin Schrödinger a même affirmé : "Entanglement is not one but rather the characteristic trait of Quantum Mechanics" [92].

C'est Einstein, Podolsky et Rosen qui ont les premiers mis le doigt sur ce surprenant phénomène grâce à leur fameuse expérience de pensée [29] de 1935. En 1982, Alain Aspect et son équipe réalisent<sup>5</sup> à Orsay l'expérience décrite par Einstein, Podolsky et Rosen [3, 2]. Ce qui confirme expérimentalement la réalité physique de l'intrication.

Dans cette thèse, on se propose d'étudier ce phénomène d'intrication sur le système quantique le plus simple possible : celui formé de deux qubits. L'espace de Hilbert du système est donc  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Cependant il est tout aussi aisé de raisonner pour commencer sur un système de dimension finie formé de deux parties  $A$  et  $B$  décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Un état pur<sup>6</sup> d'un tel système est un élément de cet espace.

**Definition 0.2.1.** Un état pur  $|\Psi\rangle$  est séparable ssi  $|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$  où  $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}_j$  pour  $j = A, B$ . Il est dit intriqué dans le cas contraire.

Pour les états purs, le théorème de décomposition de Schmidt nous permet de distinguer les états intriqués :

---

5. Cette expérience a été réalisée auparavant par Freefman et Clauser [44]. Mais l'expérience d'Aspect était la première réalisée dans les conditions permettant d'exclure une théorie de variables cachées locales.

6. On renvoie à la section suivante pour les définitions précises d'états purs et de matrice densité.

**Théorème 0.2.1.** *Pour tout état pur  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , il existe deux bases orthonormales de  $\mathcal{H}_A : \{|\chi_j^A\rangle\}$  et de  $\mathcal{H}_B : \{|\chi_j^B\rangle\}$  et des réels  $d_j > 0$  tels que :*

$$|\Psi\rangle = \sum_j d_j |\chi_j^A\rangle \otimes |\chi_j^B\rangle.$$

*Les bases en question sont appelées les bases de Schmidt et les coefficients réels positifs  $d_j$  sont les coefficients de Schmidt.*

□ La preuve de ce théorème est donnée dans l'Annexe A □

Ceci permet d'énoncer un critère de séparabilité pour les états purs :

**Corollaire 0.2.1.** *[Critère d'intrication de Schmidt]*

*Avec les mêmes notations que ci-dessus, on définit le nombre de Schmidt comme le nombre de  $d_j$  non nuls dans la décomposition de Schmidt.*

*Alors  $|\Psi\rangle$  est intriqué ssi son nombre de Schmidt est strictement supérieur à 1.*

**Remarque 0.2.1.** On dit d'un état pur qu'il est maximalement intriqué lorsque tous ses coefficients de Schmidt sont égaux. Ce qui est par exemple le cas de l'état EPR  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$  considéré plus haut où  $d_1 = d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Comme on va le voir dans cette thèse, le formalisme des états purs est trop limité pour décrire certaines situations. Notamment lorsque le système d'étude (par exemple le système de deux qubits) est couplé à un environnement, les états purs ne le restent pas. Le formalisme pour décrire les systèmes quantiques dits ouverts est alors celui des matrices densités [48, 6, 12]. Un état dit mixte est alors représenté par une matrice hermitienne, semi définie positive, de trace un et d'ordre  $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A)$  (soit d'ordre 4 pour un système de deux qubits).

**Definition 0.2.2.** Un état mixte  $\rho$  est séparable ssi il existe :

$|\Psi_1\rangle, \dots, |\Psi_n\rangle$  avec  $|\Psi_k\rangle = |\psi_k\rangle_A \otimes |\phi_k\rangle_B$  où  $\| |\psi_k\rangle_A \| = \| |\phi_k\rangle_B \| = 1$  et  $p_1, \dots, p_n$  des réels positifs de somme un, tels que :

$$\rho = \sum_{k=1}^n p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|.$$

Il est dit intriqué dans le cas contraire.

**Remarque 0.2.2.** Le théorème spectral nous assure dans tous les cas de la décomposition :  $\rho = \sum_{k=1}^n p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|$ . Mais en général si  $\rho$  est séparable ses vecteurs propres ne le sont pas forcément.

Le second chapitre de cette thèse propose justement une méthode originale, qu'on compare aux deux autres déjà connues, pour obtenir une décomposition de  $\rho$  en une somme d'états purs séparables dans le cas d'un système formé d'une paire de qubits.

En fait, on peut caractériser plus finement la notion d'intrication. On commence par considérer toutes les décompositions possibles en états purs de la matrice densité  $\rho$  comme dans la définition 0.2.2 :

$$\rho = \sum_{k=1}^n p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|. \quad (1)$$

Puis pour chaque état pur  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  qu'on assimile par abus au vecteur  $|\Psi\rangle$ , on définit :

**Proposition-Definition 0.2.1.** *L'intrication de formation  $E$  est l'entropie de chacun des deux sous-systèmes  $A$  et  $B$  :*

$$E(\Psi) = -\text{tr}(\rho_A \log \rho_A) = -\text{tr}(\rho_B \log \rho_B) = -\sum_i d_i^2 \log(d_i^2)$$

où  $\rho_A$  est la trace partielle de  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  sur le sous-système  $B$  (idem pour  $\rho_B$ ) et les  $d_i$  sont les coefficients de Schmidt. De plus le logarithme considéré est le logarithme en base deux.

□ Cette définition a bien un sens. En effet d'après le théorème de décomposition de Schmidt on a :

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i,j} d_i d_j |\chi_j^A\rangle\langle\chi_j^B| \langle\chi_i^A| \langle\chi_i^B|$$

De là  $\text{tr}(\rho_A \log \rho_A) = \text{tr}(\rho_B \log \rho_B) = \sum_i d_i^2 \log(d_i^2)$  qui ne dépend pas de la définition choisie. □

Essayons d'interpréter et de donner du sens physique à cette définition. Déjà, elle est cohérente avec ce qui précède dans le sens où on obtient bien une intrication nulle pour tout état pur séparable.

Quant à un état maximalelement intriqué, son intrication de formation est bien maximale car le maximum de la fonction  $E$  sous la contrainte de normalisation  $\sum_i d_i^2 = 1$  est atteint quand tous les  $d_i$  sont égaux. Précisément avec le choix du logarithme en base 2, l'intrication de formation pour un système de qubits varie de 0 (pour un état séparable) à 1 pour un état maximalelement intriqué de type EPR.

On a utilisé, pour construire  $E$ , l'entropie de von Neumann qui est l'équivalent quantique de l'entropie d'information de Shannon [95]. Ceci confirme

le fait suivant : plus les états sont intriqués, plus ils transportent d'information (mesurée par l'intrication de formation  $E$ ). Ce qui explique leur utilisation en cryptographie quantique et en information quantique comme nous l'avions annoncé plus haut.

Pour un état mixte, on définit :

**Définition 0.2.3.** L'intrication de formation  $E$  pour un état mixte  $\rho$  est définie comme le minimum sur toutes les décompositions (1) de  $\rho$ , des moyennes des intrications des états purs des décompositions de  $\rho$  :

$$E(\rho) := \min \sum_i p_i E(\Psi_i).$$

Cette définition paraît assez naturelle pour généraliser la précédente. Cependant elle est peu pratique à manipuler car il n'est jamais évident de minimiser une quantité. Heureusement William Wootters a découvert une formule simple permettant de calculer cette intrication de formation dans le cas particulier où le système est constitué d'une paire de qubits :

## 0.2.2 Concurrence de Wootters.

En effet dans [111], Wootters démontre le théorème suivant :

**Théorème 0.2.2.** Soit  $\rho$  un état d'un système quantique formé de deux qubits, alors son intrication de formation est donnée par :

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho))$$

où  $\mathcal{E} : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  est une fonction strictement croissante convexe donnée par :

$$\mathcal{E}(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right)$$

avec :

$$h(x) = -x \log(x) - (1 - x) \log(1 - x).$$

$C(\rho)$  est appelée la concurrence de  $\rho$  et on a :

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (2)$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres dans l'ordre décroissant de la matrice hermitienne suivante :

$$R := \sqrt{\sqrt{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\bar{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\sqrt{\rho}},$$

où dans la base  $(|1\rangle, |0\rangle)$ , on a  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$   
et où dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ , on a pour<sup>7</sup>  $\rho = (\rho_{kl})_{1 \leq k, l \leq 4}$  :

$$\bar{\rho} := (\overline{\rho_{kl}})_{1 \leq k, l \leq 4}$$

**Remarque 0.2.3.** Dans le cas où  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  est un état pur, la formule ci-dessus se simplifie et la concurrence est simplement donnée par :

$$C(\Psi) = |\langle\Psi|\sigma_y \otimes \sigma_y|\bar{\Psi}\rangle|.$$

avec  $|\bar{\Psi}\rangle$  défini en posant dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ ,  $|\Psi\rangle = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4}$  par  $|\bar{\Psi}\rangle := (\bar{\alpha}_i)_{1 \leq i \leq 4}$ .

**Remarque 0.2.4.** Pour alléger la notation, on peut noter  $\tilde{\rho} := (\sigma_y \otimes \sigma_y)\bar{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ .

**Remarque 0.2.5.** Comme  $\mathcal{E}$  est strictement croissante, donc bijective, on peut utiliser la concurrence  $C$  comme une mesure directe de l'intrication d'un système de deux qubits. De plus elle est très aisée à calculer. Aussi dans cette thèse nous avons pris le parti de lire l'intrication d'un système directement sur sa concurrence.

On note en particulier qu'un état de deux qubits est séparable ssi sa concurrence est nulle et qu'un état maximalement intriqué, par exemple un état EPR, a une concurrence égale à 1.

Enfin mentionnons une propriété importante de cette fonction :

**Théorème 0.2.3.** *La fonction concurrence est convexe sur l'ensemble des états quantiques de deux qubits.*

□ Wootters prouve ce théorème dans le même article [111] sans le dire. Précisément il montre que la concurrence vérifie la même propriété que l'intrication de formation (cf. annexe 0.2.2) :

$$C(\rho) = \min_{\sum_k p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| = \rho} \sum_k p_k C(\Psi_k).$$

Ceci prouve que la concurrence est une fonction sous-additive<sup>8</sup> i.e.  $C(\rho_1 + \rho_2) \leq C(\rho_1) + C(\rho_2)$  pour  $\rho_i$  des états de deux qubits. En remarquant qu'elle est également homogène pour les réels positifs on a la preuve de sa convexité sur l'ensemble des états de deux qubits. □

7. Dans toute cette thèse, on notera  $\bar{z}$  le complexe conjugué de  $z \in \mathbb{C}$ .

8. On peut toujours calculer la concurrence  $C(M)$ , via la formule (2), pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  hermitienne positive.



## 0.3 Systèmes quantiques ouverts.

Comme on a pu l'équiper dans la section 0.1, le (petit<sup>9</sup>) système quantique ( $S$ ) (un atome, un photon, le champ dans une cavité ou deux qubits,...) qu'on veut étudier est quasiment toujours en contact avec un ou plusieurs autres systèmes qu'on appellera environnements ( $E$ ) ou bains<sup>10</sup>. Typiquement  $E$  a un continuum d'énergies permises et est constitué d'un grand nombre de particules (photons, phonons, molécules d'air, ...). Le système couplé ( $S+E$ ) est un système fermé décrit par la mécanique quantique habituelle exposée dans [89] par exemple. Cependant, souvent, soit on n'a pas accès à l'environnement, soit il est trop compliqué à décrire, soit même il n'est pas pertinent d'avoir de l'information sur ce dernier. Dans tous ces cas, on se focalise donc sur l'étude du système  $S$  qui devient alors un système quantique ouvert.

### 0.3.1 Description des états d'un système ouvert.

On suppose que  $S$  et  $E$  sont respectivement décrits par les espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_E$ . Alors le système total est décrit par le produit tensoriel  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E$ . Ainsi armé, on peut faire de la mécanique quantique usuelle avec des fonctions d'onde vivant sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E$ . Cependant, comme on l'a motivé ci-dessus, il est souvent plus judicieux de travailler sur le petit système  $S$  uniquement. Pour ce faire, on utilise (cf. [12]) :

**Definition 0.3.1.** Soit  $\Psi$  une fonction d'onde sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E$ , alors on définit la trace partielle sur  $\mathcal{H}_E$  de  $\Psi$ , qu'on note  $\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$  par :

$$\text{tr}_{\mathcal{H}_0}(\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)O) = \text{tr}_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|(O \otimes I))$$

pour tout  $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ .

La trace partielle est la bonne notion pour avoir l'information sur le système  $S$ . En effet, considérons une observable  $O = \sum_i \lambda_i P_i$  de  $\mathcal{H}_0$ . Alors la probabilité d'observer la valeur  $\lambda_i$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\lambda_i] &= \|(P_i \otimes I)\Psi\|^2 \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_i \otimes I)) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_0}(\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)P_i). \end{aligned}$$

Le théorème suivant nous permet de faire le lien entre cette trace partielle et la notion plus utilisée par les physiciens de matrice densité :

---

9. On parle souvent de petit système par opposition à l'environnement qui est constitué d'un nombre infini de particules avec une infinité d'énergies permises.

10. La simple émission spontanée d'un atome ne peut d'ailleurs s'expliquer que de cette manière-là.

**Théorème 0.3.1.** Soit  $\rho$  un opérateur sur  $\mathcal{H}_0$  de dimension finie  $n$ , alors on a équivalence entre : i) Il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et un vecteur de norme un sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}$  tel que  $\rho = \text{tr}_{\mathcal{H}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ .  
ii) L'opérateur  $\rho$  est une matrice densité c'est-à-dire il est auto-adjoint, positif et de trace un.

□ i) entraîne ii) est trivial. Pour la réciproque, on commence par calculer une décomposition spectrale de  $\rho$  :

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |v_i\rangle\langle v_i|$$

où les  $p_i$  sont des réels positifs de somme un et  $(|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle)$  est une base orthonormée de  $\mathcal{H}_0$ . On considère alors l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0$  muni du produit scalaire :

$$\langle v \otimes w | x \otimes y \rangle := \langle v | x \rangle \langle w | y \rangle \quad \forall |v\rangle, |w\rangle, |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}_0.$$

On pose  $|\Psi\rangle := \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i} |v_i\rangle \otimes |v_i\rangle \in \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0$ . Alors on a :

$$\text{tr}_{\mathcal{H}_0}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{i=1}^n p_i |v_i\rangle\langle v_i| = \rho$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

**Remarque 0.3.1.** Si  $\phi \in \mathcal{H}_0$  est un vecteur de norme un, alors  $|\phi\rangle\langle\phi|$  est une matrice densité de rang un, qu'on appelle plus communément état pur.

On peut alors généraliser la définition 0.3.1 aux matrices densités :

**Definition 0.3.2.** Si  $\mu$  est une matrice densité sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E$  alors on définit la trace partielle de  $\mu$  sur  $\mathcal{H}_E$ , notée  $\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(\mu)$  par :

$$\text{tr}_{\mathcal{H}_0}(\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(\mu)O) = \text{tr}_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E}(\mu(O \otimes I)) \quad \forall O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0).$$

### 0.3.2 Évolution exacte.

En toute généralité, l'hamiltonien décrivant l'évolution du système total  $S + E$  est donné par :

$$H_\lambda = H_0 + H_E + \lambda H_i$$

où

$$H_0 = h_0 \otimes Id \quad \text{et} \quad H_E = Id \otimes h_E$$

représentent respectivement les hamiltoniens libres du système  $S$  et du bain  $E$ , et où  $\lambda H_i$  est l'hamiltonien décrivant l'interaction entre les deux systèmes avec une constante de couplage  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\mu$  une matrice densité sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E$ , alors comme  $S + E$  est un système fermé, son évolution est simplement donnée par l'équation de Schrödinger :

$$\mu(t) = e^{-iH_\lambda t} \mu e^{iH_\lambda t}.$$

Pour les raisons évoquées plus haut, on souhaiterait plutôt avoir une description du système  $S$  uniquement. On suppose qu'à l'instant initial  $\mu = \rho \otimes \omega$  est séparable (par rapport à  $S$  et  $E$ ) où  $\rho$  et  $\omega$  sont respectivement des matrices densités sur  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_E$ . Comme expliqué dans la section précédente, l'état du système  $S$  à l'instant  $t$  est donné par la trace partielle de  $\mu(t)$  sur  $\mathcal{H}_E$  :

$$\begin{aligned} \rho(t) &:= \text{tr}_{\mathcal{H}_E}(\mu(t)) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_E}(e^{-iH_\lambda t}(\rho \otimes \omega)e^{iH_\lambda t}). \end{aligned} \quad (3)$$

On souhaite faire apparaître de cette équation, une équation maîtresse, c'est-à-dire une équation ne faisant intervenir que la matrice densité du petit système.

En suivant Spohn et Lebowitz dans [62], on définit  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E)$  le sous-espace de  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E)$  des opérateurs à trace, c'est-à-dire  $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E)$  appartient à  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E)$  ssi  $\text{tr}_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E}|O| < \infty$ . Muni de la norme définie par  $\|O\| := \text{tr}_{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E}|O|$ , c'est un espace de Banach. On définit aussi la dilatation  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{T}(\mathcal{H}_0) &\rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E) \\ \rho &\mapsto \rho \otimes \omega. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur  $P := \mathcal{A} \circ \text{tr}_{\mathcal{H}_E}$  projette  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_E)$  sur le sous-espace  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0) \otimes \omega$ , où  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0)$  est l'espace des opérateurs à trace sur  $\mathcal{H}_0$ . Cette construction nous permet de réécrire l'évolution donnée par (3) sous la forme :

$$\rho(t) \otimes \omega = P(\mathcal{U}(t, \lambda)(\rho \otimes \omega))$$

où on a noté  $\mathcal{U}(t, \lambda)$  l'opérateur d'évolution généré par  $i[H_\lambda, \cdot]$ . On note aussi  $\mathcal{V}(t, \lambda)$  celui généré par sa partie diagonale  $Pi[H_\lambda, \cdot]P + (1 - P)i[H_\lambda, \cdot](1 - P)$ . Ici on suppose que tous les opérateurs sont bien définis. En particulier on néglige les questions de domaines.

On fait ensuite l'hypothèse simplificatrice que  $\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(H_i \omega) = 0$ . Celle-ci est valide dans de nombreux cas notamment celui qui va nous intéresser par la suite où le bain est constitué d'une collection d'oscillateurs harmoniques, où l'hamiltonien d'interaction fait apparaître uniquement des termes linéaires en les opérateurs de création et d'annihilation du bain et où ce dernier est initialement dans un état de Gibbs. Alors par la formule de Dyson,

on obtient <sup>11</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, \lambda) = \mathcal{V}(t, \lambda) - i\lambda \int_0^t ds \mathcal{V}(t-s, \lambda) (P[H_i, \cdot](1-P) \\ + (1-P)[H_i, \cdot]P) \mathcal{U}(s, \lambda). \end{aligned}$$

En projetant l'équation précédente à droite et à gauche, on trouve les deux équations suivantes :

$$P\mathcal{U}(t, \lambda)P = \mathcal{V}(t, \lambda)P - i\lambda \int_0^t ds \mathcal{V}(t-s, \lambda) P[H_i, \cdot](1-P)\mathcal{U}(s, \lambda)P \quad (4)$$

et

$$(1-P)\mathcal{U}(t, \lambda)P = -i\lambda \int_0^t ds \mathcal{V}(t-s, \lambda)(1-P)[H_i, \cdot]P\mathcal{U}(s, \lambda)P. \quad (5)$$

On substitue alors (5) dans (4) :

$$\begin{aligned} P\mathcal{U}(t, \lambda)P = \mathcal{V}(t, \lambda)P - \lambda^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{V}(t-s, \lambda) P[H_i, \cdot](1-P) \\ \times \mathcal{V}(s-u, \lambda)(1-P)[H_i, \cdot]P\mathcal{U}(u, \lambda)P. \end{aligned}$$

En identifiant  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0) \otimes \omega$  et  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0)$  et en réutilisant l'hypothèse  $\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(H_i \omega) = 0$  (qui implique  $P[H_i, \cdot]P = 0$ ), l'équation précédente peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho(t) = e^{-ih_0 t} \rho^{ih_0 t} + \lambda^2 \int_0^t ds \int_0^s du e^{-ih_0(t-s)} K(s-u, \lambda) \rho(u) e^{ih_0(t-s)} \text{ où} \\ K(s, \lambda) = -\text{tr}_{\mathcal{H}_E} ([H_i, \cdot](1-P)\mathcal{V}(s, \lambda)(1-P)[H_i, \cdot]\mathcal{A}) \end{aligned}$$

qui ne fait intervenir que la matrice densité réduite du petit système. En la dérivant on obtient l'équation de Nakajima-Prigogine-Résibois-Zwanzig [75, 83, 115] :

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[h_0, \rho(t)] + \lambda^2 \int_0^t ds K(t-s, \lambda) \rho(s).$$

Il est important de noter qu'aucune approximation n'a été effectuée pour obtenir l'équation de Nakajima-Prigogine-Résibois-Zwanzig. Pour l'obtenir nous avons seulement (modulo les questions d'analyse sur les opérateurs en particulier ce qui concerne les domaines de définition) supposé que l'état initial était de la forme  $\rho \otimes \omega$  et que  $\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(H_i \omega) = 0$ . C'est donc un résultat exact.

---

11. En utilisant le fait que  $P[H_0, \cdot](1-P) = (1-P)[H_0, \cdot]P = 0$  et  $P[H_E, \cdot](1-P) = (1-P)[H_E, \cdot]P = 0$ .

### 0.3.3 Évolution Markovienne.

Malheureusement cette équation de Nakajima-Prigogine-Résibois-Zwanzig est très difficile à manipuler. En effet elle fait intervenir  $\rho$  à tous les temps compris entre 0 et  $t$  (équation intégral-différentielle). On parle d'équation non-markovienne. Cependant dans bien des situations physiques, notamment en optique quantique, une approximation markovienne est suffisante pour décrire convenablement l'évolution du système. On propose dans ce paragraphe de dériver une telle équation. Dans un premier temps on donne la démarche de façon heuristique qu'on justifiera par la suite.

On commence donc par développer  $K$  en série :

$$K(s, \lambda) = k_0(s) + \sum \lambda^n k_n(s)$$

avec :

$$k_0(s) = e^{-ih_0s} (-\text{tr}_{\mathcal{H}_E}([H_i(s), \cdot](1-P)[H_i, \cdot]\mathcal{A})) e^{ih_0s}.$$

et où  $k_n(s) = (-i)^n e^{-ih_0s} \left( \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s} dt_n \dots dt_1 K_n(s, t_n, \dots, t_1) \right) e^{ih_0s}$ , avec pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$K_n(s, t_n, \dots, t_1) = -\text{tr}_{\mathcal{H}_E} \left( [H_i(s), \cdot](1-P)[H_i(t_n), \cdot](1-P) \right. \\ \left. \times \dots [H_i(t_1), \cdot](1-P)[H_i, \cdot]\mathcal{A} \right).$$

Ici,  $H_i(s) = e^{i(H_0+H_E)s} H_i e^{-i(H_0+H_E)s}$  est la représentation d'interaction de l'hamiltonien  $H_i$ .

Il est alors tentant de considérer une limite de couplage faible ( $\lambda \ll 1$ ) et de ne garder que le premier terme de cette série :

$$k_0(s) = e^{-ih_0s} (-\text{tr}_{\mathcal{H}_E}([H_i(s), \cdot](1-P)[H_i, \cdot]\mathcal{A})) e^{ih_0s}.$$

Pour faire disparaître les effets de mémoire dans l'équation de Nakajima-Prigogine-Résibois-Zwanzig, on suppose que  $\rho(s)$  varie beaucoup plus lentement que  $k_0(s)$ , autrement dit que les fonctions de corrélation du bain. Ce qui on le rappelle est le cas en optique quantique par exemple. Dans ce régime, appelée approximation de Born-Markov<sup>12</sup> on obtient alors l'équation approchée :

$$\frac{d}{dt} \rho(t) \simeq -i[h_0, \rho(t)] + \lambda^2 \int_0^t ds k_0(s) \rho(t).$$

On fait ensuite le changement d'échelle de temps tel que  $\lambda^2 t = \tau$  est constant. C'est ce qu'on appelle la limite de van Hove [101, 102] qui donne pour  $\lambda \rightarrow 0$  :

$$\frac{d}{d\tau} \rho(t) \simeq -\frac{i}{\lambda^2} [h_0, \rho(t)] + \int_0^\infty ds k_0(s) \rho(t).$$

---

12. Born car c'est une limite de couplage faible et Markov car on a négligé les effets de mémoire.

C'est Davies qui a rendu cette dérivation rigoureuse tout d'abord pour le cas où  $\mathcal{H}_0$  est de dimension finie dans [24] puis pour le cas général dans [25]. Pour ce faire on doit commencer par passer en schéma d'interaction dans le but d'éliminer la partie oscillante due à l'évolution libre. Ensuite, il s'agit de faire le changement d'échelle de temps indiqué plus haut.

**Théorème 0.3.2.** [Davies]

Avec les notations ci-dessus, on fait l'hypothèse que le spectre de l'opérateur  $[h_0, \cdot]$  est discret. Puis on suppose que :

$$\int_0^\infty dt \|k_0(t)\| < \infty$$

et que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t} dt_n \dots dt_1 \|K_n(t, t_n, \dots, t_1)\| \leq a_n(t)$$

tels que :

$$a_n(t) \leq c_n t^{n/2}$$

où la série entière de coefficients  $c_n$  a un rayon de convergence infini, et tels que :

$$a_n(t) \leq d_n t^{n/2-\epsilon}$$

pour  $\epsilon > 0$ ,  $d_n \geq 0$  et tout  $t \geq 0$ . Soit  $\tau_0 > 0$ , alors on a pour tout  $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_0)$  et tout  $\tau \in [0, \tau_0]$  pour la norme sur  $\mathcal{T}(\mathcal{H}_0)$  introduite précédemment :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|e^{ih_0 \frac{\tau}{\lambda^2}} \rho \left( \frac{\tau}{\lambda^2} \right) e^{-ih_0 \frac{\tau}{\lambda^2}} - e^{\mathcal{L}\tau} \rho\| = 0$$

où en posant  $K := \int_0^\infty ds k_0(s)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T ds e^{ih_0 s} K e^{-ih_0 s} \\ &= \sum_{\nu \in \text{Sp}([h_0, \cdot])} Q_\nu K Q_\nu \\ &=: K^\sharp. \end{aligned}$$

Ici  $Q_\nu$  sont les projecteurs spectraux de l'opérateur  $[h_0, \cdot]$ .

□ On admet ici la preuve de ce théorème, voir [24, 25, 62]. □

En posant  $\rho_m(\tau) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{ih_0 \frac{\tau}{\lambda^2}} \rho \left( \frac{\tau}{\lambda^2} \right) e^{-ih_0 \frac{\tau}{\lambda^2}}$ , sous les hypothèses du théorème précédent, on a :

$$\frac{d}{d\tau} \rho_m(\tau) = \mathcal{L} \rho_m(\tau). \quad (6)$$

qui est une équation ne faisant pas intervenir les effets de mémoire. On l'appelle équation maîtresse markovienne.

### 0.3.4 Exemple de deux atomes couplés à deux champs électromagnétiques.

Ici on souhaite appliquer la théorie précédemment décrite sur un exemple simple.

Le petit système est constitué de deux atomes  $A$  et  $B$  à deux niveaux (ou deux qubits) séparés respectivement d'une énergie  $\epsilon_A$  et  $\epsilon_B$ . Ainsi il est décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  et par son hamiltonien :

$$\begin{aligned} h_0 &= \epsilon_A \sigma_+ \sigma_- \otimes Id + \epsilon_B Id \otimes \sigma_+ \sigma_- \\ &= \epsilon_A \sigma_+ \sigma_-^{(A)} + \epsilon_B \sigma_+ \sigma_-^{(B)}, \end{aligned}$$

où  $\sigma_{\pm}^{(i)}$  sont les matrices de Pauli de création et d'annihilation pour chacun des atomes. Précisément dans la base  $(|1\rangle, |0\rangle)$  du qubit  $i$  (pour  $i = A, B$ ) on a :

$$\sigma_+^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_-^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quant à l'environnement, il est ici double ( $E_A + E_B$ ). Chaque atome vit dans son propre environnement constitué d'un champ électromagnétique. L'espace de Hilbert de l'environnement est donc le produit tensoriel de deux espaces de Fock ([21, 50, 48]) :

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{F}_{E_A} \otimes \mathcal{F}_{E_B}$$

et son hamiltonien est :

$$\begin{aligned} h_E &= \int \epsilon(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) d^3\vec{k} \otimes Id + Id \otimes \int \epsilon(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) d^3\vec{k} \\ &= \int \epsilon(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})^{(E_A)} d^3\vec{k} + \int \epsilon(\vec{k}) b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k})^{(E_B)} d^3\vec{k} = h_{E_A} + h_{E_B} \end{aligned}$$

où  $a(\vec{k})$  et  $b(\vec{k})$  sont les opérateurs d'annihilation pour chacun des champs pour l'impulsion  $\vec{k}$ . On suppose de plus qu'initialement chacun des environnements est dans l'état de Gibbs à la température inverse  $\beta_i$  :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{\beta_A} \otimes \omega_{\beta_B} \\ &= \frac{e^{-\beta_A h_{E_A}}}{Z_{E_A}} \otimes \frac{e^{-\beta_B h_{E_B}}}{Z_{E_B}} \end{aligned}$$

où  $Z_{E_i}$  sont les fonctions de partition définies de façon à normaliser la trace. Comme les environnements sont constitués de photons,  $\omega_{\beta_j}$  pour  $j = A, B$  suit la loi de Planck :

$$\omega_{\beta_A} = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta \epsilon(\vec{k})} a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - 1} \text{ et } \omega_{\beta_B} = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta \epsilon(\vec{k})} b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) - 1}.$$

Il ne reste plus qu'à décrire l'interaction entre les deux atomes et leur champ respectif. Classiquement on va supposer qu'elle est de type Wigner-Weisskopf [107], soit :

$$H_i = \int g_A(\vec{k})\sigma_+^{(A)} \otimes a(\vec{k})^{(E_A)} d^3\vec{k} + \int g_B(\vec{k})\sigma_+^{(B)} \otimes b(\vec{k})^{(E_B)} d^3\vec{k} + h.c.$$

où *h.c.* désigne ici, et dans toute cette thèse, la partie hermitique conjuguée de ce qui précède, et où  $g_i(\vec{k})$  sont des fonctions qui décrivent la force du couplage. Cet hamiltonien décrit le phénomène d'absorption-émission stimulées. Un atome peut capter un photon pour passer du niveau bas au niveau haut (c'est l'absorption) et inversement il peut émettre un photon en passant du niveau haut au niveau bas (c'est l'émission).

En supposant qu'initialement le système total est dans l'état séparable  $\rho \otimes \omega$ , on a quasiment toutes les hypothèses réunies pour appliquer la théorie précédemment décrite qui nous a donné l'équation markovienne (6). En effet l'hamiltonien d'interaction étant linéaire par rapport à chaque partie et comme on a choisi l'état thermique pour  $\omega$ , on a bien  $\text{tr}_{\mathcal{H}_E}(H_i\omega) = 0$ .

Mais pour assurer la décroissance des fonctions de corrélation demandée par le théorème de Davies 0.3.2, on va avoir besoin d'hypothèses supplémentaires sur la nature des bains et la forme des fonctions  $g_i(\vec{k})$  pour  $i = A, B$  décrivant l'intensité du couplage. Tout d'abord on suppose, naturellement pour des photons, que la relation de dispersion est linéaire<sup>13</sup> :

$$\epsilon(\vec{k}) = |\vec{k}|. \quad (7)$$

Ensuite on fait l'hypothèse forte suivante sur les fonctions  $g_j(\vec{k})$  pour  $j = A, B$  :

$$|g_j(\vec{k})|^2 = c_j \epsilon(\vec{k})^{\delta_j - 2} e^{-\frac{\epsilon(\vec{k})}{\epsilon_c^j}} \quad (8)$$

où  $c_j$ ,  $\delta_j$  et  $\epsilon_c^j$  sont des constantes<sup>14</sup> strictement positives. Dans l'approximation dipolaire, pour des champs libres, on aurait  $1/\epsilon_c^j = 0$  et  $\delta_j = 3$  pour  $j = A, B$  (cf. [21]). Cependant, on se retrouve dans ce cas avec des divergences qu'il faut traiter par la théorie de la renormalisation. Pour nous éviter d'y avoir recours, nous avons choisi la forme (8).

Avec ce choix on a pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $j = A, B$  :

$$\int d^3\vec{k} e^{i\epsilon(\vec{k})s} |g_j(\vec{k})|^2 = 4\pi \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\delta_j} e^{-(1/\epsilon_c^j - it)\epsilon} = 4\pi \frac{\Gamma(\delta_j + 1)}{\left(\frac{1}{\epsilon_c^j} - it\right)^{\delta_j + 1}},$$

13. On prend dans (7),  $c = 1$  pour la vitesse des photons.

14. L'exposant  $\delta_j$  est un nombre sans dimension, mais  $\epsilon_c^j$  est homogène à une énergie. Quant à  $c_j$ , sa dimension dépend de l'exposant  $\delta_j$ .



où  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler.

Les fonctions  $f_j$  définies par

$$\begin{aligned} f_j(s) &:= c_j(1+s)^{\frac{\delta_j}{2}} \left[ \int d^3\vec{k} e^{i\epsilon(\vec{k})s} |g_j(\vec{k})|^2 \right] \\ &= 4\pi c_j \Gamma(\delta_j + 1) \frac{(1+s)^{\frac{\delta_j}{2}}}{\left(\frac{1}{\epsilon_c^j} - is\right)^{\delta_j+1}}, \end{aligned}$$

sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Ceci suffit pour vérifier les hypothèses de décroissance du théorème 0.3.2 de Davies d'après l'article [56].

Enfin on suppose que les deux atomes sont identiques c'est-à-dire  $\epsilon_A = \epsilon_B = \epsilon_0$ , ce qui est souvent le cas considéré dans les expériences d'intrication qu'on a pu évoquer plus haut, alors, on a simplement pour le spectre du Liouvilien  $[h_0, \cdot]$  :

$$\text{Sp}([h_0, \cdot]) = \{-2\epsilon_0, -\epsilon_0, 0, \epsilon_0, 2\epsilon_0\}.$$

Pour obtenir l'opérateur  $K$  du théorème 0.3.2, on a besoin de calculer quatre termes. On va expliciter le premier avec les hypothèses faites :

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty ds e^{-ih_0s} \text{tr}_{\mathcal{H}_E} (H_i(s)(1-P)H_i(\rho \otimes \omega)) e^{ih_0s} \\ &= \int_0^\infty ds \sum_{j=A,B} \int_0^\infty 4\pi k^2 dk \left[ c_j k^{\delta_j-2} e^{-\frac{k}{\epsilon_c^j}} \right] \times \\ &\quad \left[ n(k) e^{i(k-\epsilon_0)s} \sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(j)} \rho + (1+n(k)) e^{-i(k-\epsilon_0)s} \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} \rho \right], \end{aligned}$$

où  $n(k) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{E_A}} (a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})\omega_{\beta_A}) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{E_B}} (b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})\omega_{\beta_B}) = \frac{1}{e^{\beta|k|}-1}$ . Soit en changeant  $|\vec{k}|$  par  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty ds \text{tr}_{\mathcal{H}_E} (H_i(s)(1-P)H_i(\rho \otimes \omega)) \\ &= \sum_{j=A,B} 4\pi c_j \int_0^\infty ds \int_0^\infty d\epsilon \left[ e^{\delta_j} \frac{e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_c^j}}}{e^{\beta\epsilon} - 1} \right] \times \\ &\quad \left[ e^{i(\epsilon-\epsilon_0)s} \sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(j)} \rho + e^{\beta\epsilon} e^{-i(\epsilon-\epsilon_0)s} \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} \rho \right]. \end{aligned}$$

Pour poursuivre le calcul, on a besoin de la formule de la théorie des distributions suivante :

$$\int_0^\infty ds e^{i\epsilon s} = \pi\delta(\epsilon) + i\mathcal{P}\frac{1}{\epsilon}$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac et où  $\mathcal{P}$  est la partie principale de Cauchy. On peut alors terminer le calcul du premier terme intervenant dans  $K$  :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \text{dstr}_{\mathcal{H}_E} (H_i(s)(1-P)H_i(\rho \otimes \omega)) \\
&= \sum_{j=A,B} 4\pi c_j \times \left\{ \left[ \pi \epsilon_0^{\delta_j} n(\epsilon_0) e^{-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_c^j}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \lim_{\nu \rightarrow 0} \left( \int_0^{\epsilon_0 - \nu} d\epsilon \frac{\epsilon^{\delta_j} e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_c^j}}}{\epsilon - \epsilon_0} + \int_{\epsilon_0 + \nu}^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{\delta_j} e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_c^j}}}{\epsilon - \epsilon_0} \right) \right] \sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(j)} \rho \right. \\
&\quad \left. + \left[ \pi(1+n(\epsilon_0)) \epsilon_0^{\delta_j} e^{-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_c^j}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i \lim_{\nu \rightarrow 0} \left( \int_0^{\epsilon_0 - \nu} d\epsilon \frac{\epsilon^{\delta_j} e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_c^j}}}{\epsilon - \epsilon_0} + \int_{\epsilon_0 + \nu}^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{\delta_j} e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_c^j}}}{\epsilon - \epsilon_0} \right) \right] \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} \rho \right\}.
\end{aligned}$$

En calculant de la même manière les trois autres termes intervenant dans le calcul de  $K$ , puis en remarquant<sup>15</sup> qu'ici  $K^\sharp = K$ , on obtient par le théorème 0.3.2 de Davies :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \| e^{ih_0 \frac{\tau}{\lambda^2}} \rho \left( \frac{\tau}{\lambda^2} \right) e^{-ih_0 \frac{\tau}{\lambda^2}} - e^{\mathcal{L}\tau} \rho \| = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\rho &= \sum_{j=A,B} -i \underbrace{\left[ \kappa_-^j \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} + \kappa_+^j \sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(j)} \right]}_{\text{évolution unitaire}, \rho(\tau)} \\
&\quad + \underbrace{\gamma_-^j \sigma_-^{(j)} \rho(\tau) \sigma_+^{(j)} - \frac{\gamma_-^j}{2} \{ \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)}, \rho \}}_{\text{partie dissipative}} \\
&\quad + \underbrace{\gamma_+^j \sigma_+^{(j)} \rho(\tau) \sigma_-^{(j)} - \frac{\gamma_+^j}{2} \{ \sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(j)}, \rho \}}_{\text{partie dissipative}} \tag{9}
\end{aligned}$$

avec  $\gamma_-^j = \gamma_0^j(1+n(\epsilon_0))$  et  $\gamma_+^j = \gamma_0^j n(\epsilon_0)$  en posant  $\gamma_0^j := 8\pi^2 c_j \epsilon_0^{\delta_j} e^{-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_c^j}}$  et où  $n(\epsilon_0) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_0} - 1}$ . On rappelle également que  $\{ \cdot, \cdot \}$  dénote l'anticommutateur<sup>16</sup>.

Cette équation décrit l'évolution de la matrice densité du petit système dans la limite de van Hove. Elle comporte deux parties.

La première partie qu'on nomme "Lamb shift" correspond à une évolution unitaire effective. Son rôle est uniquement de modifier les énergies des

15. Le fait que  $K^\sharp = K$  est exceptionnel. Ceci est dû uniquement au choix de l'interaction choisie. Dans le dernier chapitre de cette thèse, on observera le même phénomène.

16. On ne décrit pas les constantes  $\kappa_\pm^j$  car nous n'en aurons pas besoin dans la suite.

atomes<sup>17</sup>. Ainsi dans la base canonique ( $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ ), il ne va agir que sur les phases de  $\rho$ .

La seconde partie est quant à elle responsable de la dissipation. En particulier, on peut voir pour ce modèle qu'elle est d'autant plus importante que le nombre moyen de photons d'énergie  $\epsilon_0$  dans les bains est grand et que la constante  $c_j$  pour  $j = A, B$  est forte. Ce qui est en parfait accord avec l'intuition.

Enfin cette équation est de type Lindblad [63], ce qui est caractéristique des évolutions markoviennes. Il existe d'autres méthodes pour obtenir ce type d'équations. Tout d'abord il y a la théorie des trajectoires quantiques. On va y avoir recours dans le premier chapitre de cette thèse. Plus récemment, la théorie des interactions répétées a été développée. On l'exposera sur un exemple original dans le dernier chapitre de cette thèse. Elle est plus facile à mettre en place car le modèle est construit pour être markovien et hamiltonien à la fois.

## 0.4 Désintrication.

L'état  $\rho(\tau)$  donné par l'équation (9), relaxe vers l'état où chaque atome est à l'équilibre thermique avec son bain<sup>18</sup>. Précisément en notant  $|1\rangle$  et  $|0\rangle$  les niveaux haut et bas des deux atomes, dans la base ( $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ ) on a<sup>19</sup> :

$$\rho(\infty) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-2\beta\epsilon_0} & & & \\ & e^{-\beta\epsilon_0} & & \\ & & e^{-\beta\epsilon_0} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $Z = (1 + e^{-\beta\epsilon_0})(1 + e^{-\beta\epsilon_0})$ , ou plus simplement<sup>20</sup> :

$$\rho(\infty) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon_0}} \begin{pmatrix} e^{-\beta\epsilon_0} & \\ & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon_0}} \begin{pmatrix} e^{-\beta\epsilon_0} & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette relaxation, entraînant la perte des éléments non diagonaux de  $\rho$ , phénomène qu'on nomme décohérence<sup>21</sup>, est de type exponentiel. Les taux de relaxations sont donnés par les  $\gamma_{\pm}^j$ .

17. Les énergies des atomes sont modifiées à cause de l'interaction de ceux-ci avec des champs électromagnétiques.

18. On rappelle qu'on a supposé pour obtenir (9) que les bains de photons sont tous deux dans l'état de Gibbs à la température inverse  $\beta$ .

19. Ici et dans le reste de la thèse, on notera les matrices creuses avec des blancs à la place des zéros.

20. Le découplage vient du fait que chaque atome interagit avec son propre champ électromagnétique.

21. Car ce sont les éléments diagonaux qui portent la cohérence.

Mais qu'en est-il de l'intrication ? En effet, supposons qu'initialement  $\rho(0) = \rho$  soit un état intriqué. Ce qui précède montre qu'asymptotiquement, ce ne sera plus le cas car  $\rho(\infty)$  est séparable. Cependant, contrairement à la décohérence, le passage d'un état intriqué à un état séparable se fait en un temps fini à température non nulle. En effet la concurrence au temps  $\tau$  est :

$$C(\rho(\tau)) = \max(0, f(\rho(\tau)))$$

où  $f$  continue est donnée par la formule de Wootters (2). Mais pour l'état asymptotique on a :

$$f(\rho(\infty)) = -2e^{-\beta\epsilon_0} \begin{cases} = 0 & \text{si } \beta = \infty \\ < 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ainsi par continuité de  $f$ , on peut affirmer qu'on aura désintrication en temps fini quand la température des bains est non nulle quel que soit l'état initial choisi, ce qui avait été remarqué par Dodd et Halliwell [27] en 2004, généralisant l'article [26] de Diósi de 2003. À température nulle, le phénomène de désintrication en temps fini n'est plus général, mais uniquement valide pour certains états initiaux comme l'ont montré Yu et Eberly dans [113] en 2004.

Dans ce domaine, on tient également à citer le travail fin de Merkli, Berman, Borgonovi et Gebresellasié dans [68] et Merkli dans [67]. Dans ces travaux les auteurs montrent rigoureusement, grâce à la théorie des résonances, la perte soudaine d'intrication dans le cas plus général où la constante de couplage des qubits avec les environnements est petite mais finie<sup>22</sup>.

Cette découverte a dynamisé le sujet car depuis lors les chercheurs ont tenté de trouver des techniques pour contrer ce phénomène (gênant pour les applications techniques de l'intrication mentionnées ci-dessus).

## 0.5 Plan de la thèse.

Le premier chapitre de cette thèse propose une méthode pour éviter la perte soudaine d'intrication.

Dans le deuxième chapitre on étudie un sous-ensemble de l'ensemble des états de deux qubits, ce qui va nous être précieux pour le dernier chapitre et va nous permettre d'obtenir une méthode permettant de décomposer les états de deux qubits séparables en somme d'états purs produits.

Enfin le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'évolution de l'intrication de deux qubits dans un modèle d'interactions répétées.

---

22. Ils étudient également, avec les mêmes outils, le phénomène de désintrication-intrication, qui apparaît quand les deux qubits sont couplés à un bain commun. On reviendra sur ce phénomène dans le premier et le dernier chapitre de cette thèse.

# Chapitre 1

## Protection de l'intrication d'un système de deux qubits couplés à des bains par des mesures effectuées sur les bains.

### 1.1 Introduction.

Comme on l'a vu dans le chapitre introductif de la thèse, l'intrication joue un rôle primordial en mécanique quantique. Mais c'est également une entité très fragile.

En particulier on a vu, dans [26, 27, 113, 38], qu'un système de deux qubits couplés à des environnements indépendants voit son intrication disparaître en un temps fini. Ce phénomène est appelé "perte soudaine d'intrication" ou "entanglement sudden death" (ESD) pour les anglophones. Quand les deux qubits sont couplés avec le même environnement, on peut voir apparaître un autre phénomène curieux. Précisément on peut assister à une renaissance de l'intrication ("entanglement sudden birth" (ESB)). On renvoie pour cela aux articles [11, 42, 64, 37] ainsi qu'au chapitre de cette thèse sur le modèle d'interactions répétées de deux qubits avec la même chaîne de spins. Ce comportement semble être relativement générique car les auteurs de [79] traitent notamment de l'apparition de ce phénomène d'un point de vue non-Markovien pour un système de variables continues (c'est-à-dire que ce ne sont plus des qubits). Puis dans [22], les auteurs proposent un protocole expérimental pour observer les prédictions de [79].

Une branche active de recherche en mécanique quantique s'est construite dans le but de trouver des protocoles permettant de protéger l'intrication d'un système de deux qubits  $A$  et  $B$ . On peut notamment évoquer l'utilisa-

tion de l'effet Zénon quantique dans [64, 58], la distillation de l'intrication dans [73], la rétroaction quantique dans [18], l'encodage de l'intrication dans des qutrits dans [66] et la correction d'erreurs quantiques dans [88].

On propose ici une méthode permettant de protéger l'intrication des deux qubits en effectuant des mesures continues sur leurs environnements. Il est important ici de distinguer cette approche de l'effet Zénon quantique (utilisé dans [64, 58], expliqué théoriquement dans [72, 100] et observé expérimentalement dans [43]) qui consiste également à effectuer des mesures mais directement sur les qubits et de façon continue. Cela a pour effet de geler l'état du système. Ici les mesures continues sur les baigns imposent au système d'être à chaque instant dans un état pur, mais celui-ci évolue dans le temps comme on va le voir dans la partie suivante<sup>1</sup>.

## 1.2 Description du modèle de sauts quantiques.

La situation présentée ci-dessus peut être décrite théoriquement par le modèle de sauts quantiques élaboré par Dalibard, Castin et Mølmer dans [23] et indépendamment par Carmichael dans [16].

On suppose qu'à l'instant  $t$  le système des deux qubits est décrit par la fonction d'onde  $|\psi(t)\rangle$ . Alors une détection positive (on verra dans la partie suivante un exemple explicite où la détection est celle d'un photon) dans le bain fait "faire un saut quantique" à la fonction d'onde :

$$|\psi(t)\rangle \longrightarrow |\psi_{\text{saut}}^{(m,i)}\rangle = \frac{J_m^i |\psi(t)\rangle}{\|J_m^i |\psi(t)\rangle\|} \quad (1.1)$$

où l'opérateur de saut  $J_m^i$  dépend de l'interaction entre les qubits et leur bain respectif. Tous les résultats de mesures possibles exceptée l'absence de détection sont indicés par  $i = A, B$  et  $m$ . Dans la limite de couplage faible, la probabilité qu'une mesure, dans le petit intervalle de temps  $[t, t+dt]$  donne le résultat  $(m, i)$  est donnée par :

$$dp_m^i(t) = \gamma_m^i \|J_m^i |\psi(t)\rangle\|^2 dt.$$

Le taux de saut  $\gamma_m^i$  ne dépend pas de l'état et est simplement proportionnel au carré de la constante de couplage entre les particules composant le bain et le qubit. On remarque que la probabilité de sauts est faible. Aussi le plus souvent il n'y a pas de détection et pour que la proposition 1.2.1 ci-dessus soit vraie, on choisit de faire évoluer la fonction d'onde de la manière

---

1. La matière présentée dans ce chapitre a donné lieu à la publication de l'article [104] et du compte rendu de conférence [105]. Ajoutons que ce domaine est particulièrement étudié en ce moment car un travail similaire a été proposé au même moment [65].

suivante :

$$|\psi(t + dt)\rangle = \frac{e^{-iH_{\text{eff}}dt}|\psi(t)\rangle}{\|e^{-iH_{\text{eff}}dt}|\psi(t)\rangle\|}, \quad \text{avec } H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{i}{2} \sum_{m,i} \gamma_m^i J_m^{i\dagger} J_m^i, \quad (1.2)$$

et où  $H_0$  est l'hamiltonien des deux qubits. La probabilité de ne pas avoir de sauts entre  $t$  et  $t + dt$  est donnée d'après ce qui précède par :

$$p_{0s}(t, t + dt) = 1 - \sum_{m,i} dp_m^i(t) = 1 - \sum_{m,i} \gamma_m^i \|J_m^i |\psi(t)\rangle\|^2 dt$$

On en déduit<sup>2</sup> que la probabilité de ne pas avoir de sauts sur l'intervalle  $[t_0, t]$  est :

$$p_{0s}(t_0, t) = \|e^{-iH_{\text{eff}}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle\|^2. \quad (1.3)$$

La proposition suivante nous indique que ce modèle de sauts quantiques est un point de vue alternatif sur les systèmes quantiques ouverts de type Lindbladien. Ici, au lieu de raisonner de façon algébrique avec des superopérateurs qui agissent sur des matrices densités, on adopte une vision probabiliste. Précisément, on suit des trajectoires quantiques et lorsqu'on prend la moyenne sur toutes ces histoires possibles on retombe sur une équation de Lindblad (cf. [23, 16]) :

**Proposition 1.2.1.** *Si on note  $\rho(t) = \mathbb{E} [|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|]$ , on a :*

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_0, \rho] + \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( J_m^i \rho J_m^{i\dagger} - \frac{1}{2} \{J_m^{i\dagger} J_m^i, \rho\} \right). \quad (1.4)$$

□ Pour prouver ce résultat, on commence par calculer l'espérance conditionnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [|\psi(t + dt)\rangle\langle\psi(t + dt)| | \psi(t)] \\ &= p_{0s}(t, t + dt) \frac{e^{-iH_{\text{eff}}dt}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|e^{iH_{\text{eff}}dt}}{\|e^{-iH_{\text{eff}}dt}|\psi(t)\rangle\|^2} + \sum_{m,i} dp_m^i(t) |\psi_{\text{saut}}^{(m,i)}\rangle\langle\psi_{\text{saut}}^{(m,i)}| \\ &= e^{-iH_{\text{eff}}dt}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|e^{iH_{\text{eff}}dt} + \sum_{m,i} \gamma_m^i dt J_m^i |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| J_m^{i\dagger}. \end{aligned}$$

Soit en développant au premier ordre  $e^{-iH_{\text{eff}}dt}$  et  $e^{iH_{\text{eff}}dt}$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [|\psi(t + dt)\rangle\langle\psi(t + dt)| | \psi(t)] \\ &= |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + dt \left( -i[H_0, |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|] - \frac{\gamma_m^i}{2} \sum_{m,i} \{J_m^{i\dagger} J_m^i, |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m,i} \gamma_m^i J_m^i |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| J_m^{i\dagger} \right). \end{aligned}$$

---

2. Il suffit de voir, pour  $t_0$  fixé, que la dérivée de  $t \mapsto \|e^{-iH_{\text{eff}}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle\|^2$  est la même que celle de  $t \mapsto p_{0s}(t_0, t)$  grâce au choix de  $H_{\text{eff}}$  effectué dans (1.2). On conclut alors en remarquant que ces fonctions sont égales à un en  $t_0$ .

Ce qui donne en prenant l'espérance de l'expression précédente et en utilisant la propriété fondamentale de l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [\mathbb{E} [|\psi(t+dt)\rangle\langle\psi(t+dt)| | \psi(t)]] \\
&= \rho(t) + dt \left( -i[H_0, \rho(t)] + \sum_{m,i} \gamma_m^i J_m^i \rho(t) J_m^{i\dagger} - \frac{\gamma_m^i}{2} \{J_m^{i\dagger} J_m^i, \rho(t)\} \right) \\
&= \mathbb{E} [|\psi(t+dt)\rangle\langle\psi(t+dt)|] = \rho(t+dt). \square
\end{aligned}$$

### 1.3 Présentation des résultats de ce chapitre.

On considère des sauts quantiques locaux c'est-à-dire que  $J_m^A = j_m^A \otimes \text{Id}$  n'agit que sur le qubit  $A$  et  $J_m^B = \text{Id} \otimes j_m^B$  n'agit que sur<sup>3</sup> le qubit  $B$ . Ainsi  $\rho(t)$  de la proposition 1.2.1 est solution d'une équation de Lindblad décrivant un couplage des deux qubits avec des bains indépendants (comme pour le modèle considéré dans l'Introduction). Dans cette situation il y a en général (à température positive pour le modèle de l'Introduction) perte soudaine d'intrication.

Le résultat majeur de ce chapitre est le théorème 1.5.1 qui indique que quels que soient les sauts quantiques locaux choisis, en moyenne, la concurrence décroît exponentiellement avec un taux d'amortissement,  $\kappa_{\text{SQ}}$ , donné par la formule (1.13). En particulier cela montre que les mesures continues sur les bains préservent le système des deux qubits de la perte soudaine d'intrication évoquée dans le chapitre d'Introduction. On montre au lemme 1.5.2 que  $\kappa_{\text{SQ}}$  s'annule si et seulement si  $\langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle = \langle 0 | \tilde{J}_m^{i\dagger} | 0 \rangle$  et  $\langle 1 | \Re \tilde{J}_m^i | 0 \rangle = 0$ , où  $\tilde{J}_m^i = e^{-i\theta_m^i} J_m^i$  avec  $2\theta_m^i$  l'argument de  $\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)$ . Ce qui est par exemple vérifié si les  $J_m^i$  sont tous auto-adjoints et de traces nulles (ou dit autrement que les  $J_m^i$  sont de la forme  $\lambda_m^i U_m^i$  avec  $U_m^i$  unitaire et  $\lambda_m^i \in \mathbb{R}$ ) et illustré sur la figure 1.3.

Une même équation de Lindblad peut être obtenue par différents modèles de sauts quantiques. Aussi on va s'intéresser à optimiser les modèles (par rapport aux opérateurs de sauts) pour obtenir la meilleure protection possible, c'est-à-dire le taux d'amortissement le plus faible. Le premier résultat dans ce sens est la proposition 1.5.1 où on optimise pour l'équation de Lindblad (9) rencontrée dans le chapitre d'Introduction. On illustre ce résultat en figure 1.2.

Ensuite on montre, dans la proposition 1.6.1, qu'en utilisant un protocole de mesures un peu plus élaboré utilisant des lasers accordés aux signaux reçus, la détection homodyne, on obtient toujours une désintrication de type

---

3. Dans la suite on identifiera pour  $i = A, B$   $J_m^i$  avec  $j_m^i$  agissant sur l'espace de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  d'un seul qubit.



exponentielle. De plus, la proposition 1.6.2 prouve que si on optimise le taux d'amortissement par rapport aux phases des lasers, alors celui-ci est plus petit que pour le modèle de sauts quantiques correspondant.

Enfin on explore ensuite la détection hétérodyne, basée sur le même principe que la détection homodyne mais où cette fois-ci, les lasers n'ont plus la même fréquence que le signal avec lequel ils sont couplés, ce qui facilite la mise en œuvre expérimentale. La proposition 1.7.1 assure une perte d'intrication exponentielle mais avec un taux d'amortissement plus fort que pour la détection homodyne optimisée.

Ajoutons que ces modèles de détection homodyne et hétérodyne peuvent être décrits par les équations différentielles stochastiques (1.18) et (1.19) dont on propose des dérivations, en Annexe C, en partant d'un modèle de sauts quantiques.

Pour finir on traite, en section 1.8 un modèle de sauts quantiques faisant intervenir l'opérateur de saut  $J = \sigma_-^A \otimes Id_B + Id_A \otimes \sigma_-^B$  non local (dans le sens où il agit non trivialement sur les deux qubits à la fois). La concurrence moyenne n'est plus donnée par une exponentielle mais par la formule (1.20). Ce cas est remarquable car il fait apparaître des phénomènes de rebond de la concurrence et une intrication asymptotique non nulle pour certains états initiaux illustrés en figure 1.5. L'équation maîtresse, associée par la proposition 1.2.1 à ce modèle, décrit deux qubits couplés à un bain commun. Dans cette situation, il a été remarqué dans la littérature (cf. section 1.8) que la concurrence de  $\rho(t)$  présente des phénomènes de renaissance ou de rebond de d'intrication. On retrouvera ce phénomène au dernier chapitre de cette thèse.

## 1.4 Exemple du comptage de photons.

Pour éclairer le lecteur on propose ici de traiter un exemple concret et réalisable expérimentalement [50]. Chaque qubit est un atome à deux niveaux couplé de façon résonnante à un champ électromagnétique initialement dans l'état du vide. On est donc en présence d'un bain de photons initialement à température nulle. On suppose que les atomes sont suffisamment éloignés l'un de l'autre pour considérer qu'ils interagissent avec des bains indépendants<sup>4</sup>. On munit notre dispositif de deux photodétecteurs  $D_i$  parfaits. Chaque fois qu'un photon est émis par le qubit  $i$  (voir la figure 1.1),  $D_i$  fait un "clic". De tels photodétecteurs pouvant mesurer un photon unique existent actuellement grâce aux progrès de l'optique quantique (voir [50]) mais ils ne sont pas parfaits comme on le considère ici (c'est-à-dire qu'ils "oublient" certains photons).

---

4. Jusqu'ici c'est la même expérience que celle présentée en Introduction.

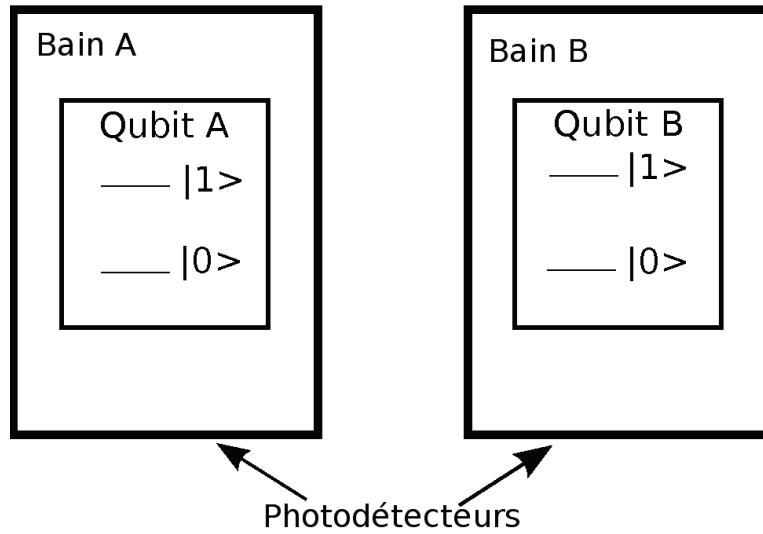


FIGURE 1.1 – Deux qubits couplés à deux bains entourés de photodétecteurs parfaits.

On peut considérer que cette expérience est décrite par les opérateurs de sauts  $J_-^i = \sigma_-^i$ . Il est important de noter qu'ici les deux opérateurs de sauts sont locaux. L'opérateur  $J_-^A = \sigma_-^A \otimes Id_B$  agit uniquement sur le qubit  $A$  et  $J_-^B = Id_A \otimes \sigma_-^B$  agit uniquement sur le qubit  $B$ . Intuitivement on voit très bien ce qui se passe. Si par exemple un photon est détecté dans le bain  $A$ , cela signifie qu'il vient d'être émis par l'atome  $A$  car le bain est à température nulle. L'opérateur de saut a pour rôle d'intégrer cette information (l'émission d'un photon par l'atome  $A$ ) dans la fonction d'onde du système des deux atomes. Enfin par simplicité on décide de prendre  $H_0 = 0$ .

À présent on propose d'évaluer l'intrication des deux qubits dans cette expérience (dans [76, 17, 103], les auteurs calculaient déjà, dans d'autres contextes, la moyenne de l'intrication sur l'ensemble des trajectoires). Pour cela on va comme précédemment utiliser la concurrence de Wootters qui est très facile à calculer pour des états purs. En effet on rappelle qu'elle est donnée par la formule :

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| \text{ avec } |\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\bar{\psi}\rangle \\ = 2 |c_{11}c_{00} - c_{10}c_{01}| \text{ avec } |\psi\rangle = c_{11}|11\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{00}|00\rangle.$$

Si aucun photon n'est détecté pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$ , alors

la fonction d'onde des qubits est donnée au temps  $t$  par :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{e^{-iH_{\text{eff}}t}|\psi(0)\rangle}{\|e^{-iH_{\text{eff}}t}|\psi(0)\rangle\|} \\ &= \mathcal{N}(t)^{-1} \sum_{s,s'=1,0} c_{ss'} e^{-\gamma_{ss'}t/2} |s, s'\rangle \end{aligned}$$

avec :

- $c_{ss'} = \langle s, s' | \psi(0) \rangle$ ,
- $\gamma_{11} = \gamma_A + \gamma_B$ ,  $\gamma_{10} = \gamma_A$ ,  $\gamma_{01} = \gamma_B$  et  $\gamma_{00} = 0$  ( $\gamma_i$  étant le taux de sauts associé au détecteur  $D_i$ ),
- $\mathcal{N}(t)^2 = \sum_{s,s'} |c_{ss'}|^2 e^{-\gamma_{ss'}t}$ .

La concurrence de cet état est :

$$C(\psi(t)) = C_0 \mathcal{N}(t)^{-2} e^{-(\gamma_A + \gamma_B)t/2} \quad (1.5)$$

avec  $C_0 = 2|c_{11}c_{00} - c_{10}c_{01}|$  la concurrence initiale.

Examinons à présent le cas où, par exemple, le détecteur  $D_A$  détecte le premier photon à l'instant  $t_j$ , alors l'état des qubits devient juste après le saut :  $|\psi(t_j+)\rangle \propto |0\rangle \otimes (c_{11}e^{-\gamma_{11}t_j/2}|1\rangle + c_{10}e^{-\gamma_{10}t_j/2}|0\rangle)$ . Or cet état est séparable et comme ni les sauts ni la dynamique entre les sauts ne créent d'intrication (car les opérateurs de sauts sont locaux), l'état des qubits le restera après  $t_j$ . Cet argument nous permet d'affirmer que  $C(t) = 0$  si un photon a été détecté dans l'intervalle  $[0, t]$ . Ainsi les seules trajectoires quantiques qui vont contribuer à la concurrence sont celles qui ne subissent aucun saut. Leur concurrence est donnée par la formule (1.5). Pour connaître la concurrence moyenne à l'instant  $t$ , il ne reste donc plus qu'à calculer la probabilité d'avoir une trajectoire sans saut sur  $[0, t]$ . Par (1.3), c'est :

$$\begin{aligned} p_{0s}(t) &= \|e^{-iH_{\text{eff}}t}|\psi(0)\rangle\|^2 \\ &= \mathcal{N}(t)^2. \end{aligned}$$

On conclut donc que la concurrence moyenne pour ce modèle au temps  $t$  est donnée par :

$$\mathbb{E}[C(t)] = C_0 e^{-(\gamma_A + \gamma_B)t/2}.$$

On peut généraliser le modèle présenté aux cas où les bains ne sont plus nécessairement à température nulle mais à l'équilibre thermique à température inverse  $\beta_i$ . On doit alors ajouter deux nouveaux opérateurs de sauts<sup>5</sup>

---

5. On suppose pour cela qu'on sait distinguer les photons émis par les bains eux-mêmes de ceux émis par les qubits.

$J_+^i = \sigma_+^i$  avec les taux<sup>6</sup>  $\gamma_+^i = e^{-\beta\epsilon_i}\gamma_-^i$  tels que  $\epsilon_i$  est la différence d'énergie entre les deux niveaux du qubit  $i$  et où on a renommé  $\gamma_-^i$  les taux associés aux opérateurs de sauts  $J_-^i$ . De la même façon que pour le modèle à température nulle on déduit la formule suivante pour la concurrence moyenne :

$$\mathbb{E}[C(t)] = C_0 e^{-(\gamma_+^A + \gamma_-^A + \gamma_+^B + \gamma_-^B)t/2}. \quad (1.6)$$

On a illustré ce résultat sur la figure 1.2 où la concurrence pour la matrice densité a été calculée en résolvant directement l'équation de Lindblad (1.4) comme dans le chapitre introductif. On rappelle (cf. section 0.4 de l'Introduction) qu'il y avait alors désintrication (pour la concurrence associée à  $\rho(t)$ ) en temps fini (ESD) quel que soit l'état initial choisi. Pour le modèle de mesures continues sur les baigns présenté ici (comptage de photons), ce phénomène disparaît si on considère la concurrence moyennée sur toutes les trajectoires. À la place on voit apparaître une désintrication exponentielle caractérisée par les taux de sauts<sup>7</sup>. On va voir dans la section suivante que ce phénomène est tout à fait général dès qu'on considère des opérateurs de sauts locaux.

## 1.5 Concurrence moyenne pour un modèle de sauts quantiques avec des opérateurs de sauts locaux.

On généralise ce qui a été fait dans la section précédente à tous les opérateurs de sauts locaux  $J_m^i$  et à tous les hamiltoniens des qubits locaux  $H_0 = H_A \otimes 1_B + 1_A \otimes H_B$ . Par markovianité du processus de sauts on a :

$$\mathbb{E}[C(t+dt)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[C(t+dt)|\psi(t)]].$$

Calculons donc :

$$\mathbb{E}[C(t+dt)|\psi(t)] = p_{0s}(t, t+dt)C_{0s}(t+dt) + \sum_{m,i} dp_{m,i}(t)C_{saut}^{(m,i)}(t+dt).$$

Pour commencer on cherche la concurrence pour une trajectoire n'ayant pas subi de saut entre  $t$  et  $t+dt$ . Elle est donnée via (1.2) par :

$$C_{0s}(t+dt) = p_{0s}^{-1} \left| \langle e^{iH_{\text{eff}}^\dagger dt} (\sigma_y \otimes \sigma_y) T e^{-iH_{\text{eff}} dt} \rangle_{\psi(t)} \right|$$

6. Les taux de sauts sont reliés par  $\gamma_+^i = e^{-\beta\epsilon_i}\gamma_-^i$  de même que dans le chapitre introductif car l'énergie des photons des baigns suit la loi de Planck.

7. On est conscient du fait qu'on compare une expérience sans mesure avec le résultat moyen de plusieurs expériences faisant intervenir une infinité de mesures.

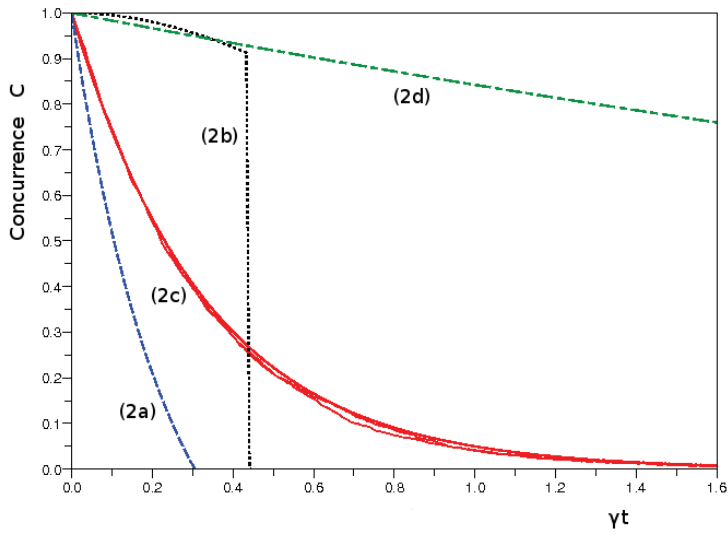


FIGURE 1.2 – Concurrences de deux qubits couplés à des bails indépendants à température positive telle que  $\gamma_+^i = \gamma_-^i/2 = \gamma$ , en fonction de  $\gamma t$ , pour  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - i|00\rangle)$ .

- (2a)  $C_{\rho(t)}$  pour la matrice densité (ligne bleue tiretée).
- (2b)  $C_{\psi(t)}$  pour une trajectoire (ligne noire pointillée).
- (2c)  $\mathbb{E}[C_{\psi(t)}]$  moyennée sur 1500 trajectoires (ligne rouge pleine) et par l'équation (1.6) (ligne rouge pleine).
- (2d)  $\mathbb{E}[C_{\psi(t)}]$  pour le meilleur protocole de mesure défini dans la section 1.5 (ligne verte pointillée-tiretée).

où on a posé  $T$  l'opérateur de conjugaison :  $T|\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle$  qui dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  conjugue les coefficients de  $|\psi\rangle$  (comme dans l'Introduction). En développant les exponentielles on obtient :

$$\begin{aligned} C_{0s}(t+dt) &= p_{0s}^{-1} \left| \langle (\sigma_y \otimes \sigma_y) T \rangle_{\psi(t)} + dt \langle iH_{\text{eff}}^\dagger (\sigma_y \otimes \sigma_y) T \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_y \otimes \sigma_y) T iH_{\text{eff}} \rangle_{\psi(t)} + O(dt^2) \right| \\ &= p_{0s}^{-1} \left| \langle (\sigma_y \otimes \sigma_y) T \rangle_{\psi(t)} + idt \langle H_{\text{eff}}^\dagger (\sigma_y \otimes \sigma_y) T \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_y \otimes \sigma_y) T H_{\text{eff}} \rangle_{\psi(t)} + O(dt^2) \right|. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Puis le lemme suivant va nous être fort utile.

**Lemme 1.5.1.** *Pour tout opérateur local  $O_i$  agissant uniquement sur le qubit  $i$ , on a :*

$$\langle O_i \sigma_y \otimes \sigma_y T \rangle_{\psi(t)} = \langle \sigma_y \otimes \sigma_y T O_i^\dagger \rangle_{\psi(t)} = \frac{\mathcal{C}(t)}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(O_i) \quad (1.8)$$

avec

$$\mathcal{C}(t) = \langle \sigma_y \otimes \sigma_y T \rangle_{\psi(t)} = 2 \overline{(c_{10}(t)c_{01}(t) - c_{11}(t)c_{00}(t))}$$

pour  $c_{ss'}(t) = \langle s, s' | \psi(t) \rangle$ .

□ On prouve ce résultat en supposant par exemple que  $O_i = O_A \otimes 1_B$  est un opérateur local qui n'agit que sur le qubit  $A$  :

$$\begin{aligned} \langle O_i \sigma_y \otimes \sigma_y T \rangle_{\psi(t)} &= \overline{c_{11}(t)} (\langle 1|O_A|1\rangle \langle 11| + \langle 1|O_A|0\rangle \langle 01|) \sigma_y \otimes \sigma_y T |\psi(t)\rangle \\ &\quad + \overline{c_{10}(t)} (\langle 1|O_A|1\rangle \langle 10| + \langle 1|O_A|0\rangle \langle 00|) \sigma_y \otimes \sigma_y T |\psi(t)\rangle \\ &\quad + \overline{c_{01}(t)} (\langle 0|O_A|1\rangle \langle 11| + \langle 0|O_A|0\rangle \langle 01|) \sigma_y \otimes \sigma_y T |\psi(t)\rangle \\ &\quad + \overline{c_{00}(t)} (\langle 0|O_A|1\rangle \langle 10| + \langle 0|O_A|0\rangle \langle 00|) \sigma_y \otimes \sigma_y T |\psi(t)\rangle. \end{aligned}$$

Ce qui donne en évaluant  $\sigma_y \otimes \sigma_y T |\psi(t)\rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle O_i \sigma_y \otimes \sigma_y T \rangle_{\psi(t)} &= \overline{c_{11}(t)} \left( -\langle 1|O_A|1\rangle \overline{c_{00}(t)} + \langle 1|O_A|0\rangle \overline{c_{10}(t)} \right) \\ &\quad + \overline{c_{10}(t)} \left( \langle 1|O_A|1\rangle \overline{c_{01}(t)} - \langle 1|O_A|0\rangle \overline{c_{11}(t)} \right) \\ &\quad + \overline{c_{01}(t)} \left( -\langle 0|O_A|1\rangle \overline{c_{00}(t)} + \langle 0|O_A|0\rangle \overline{c_{10}(t)} \right) \\ &\quad + \overline{c_{00}(t)} \left( \langle 0|O_A|1\rangle \overline{c_{01}(t)} - \langle 0|O_A|0\rangle \overline{c_{11}(t)} \right). \end{aligned}$$

La moitié des termes de cette expression s'éliminent pour donner le résultat souhaité :

$$\langle O_i \sigma_y \otimes \sigma_y T \rangle_{\psi(t)} = \left( \overline{c_{10}(t)c_{01}(t)} - \overline{c_{11}(t)c_{00}(t)} \right) (\langle 1|O_A|1\rangle + \langle 0|O_A|0\rangle) \square$$

En intégrant (1.8) dans (1.7) et en remarquant que  $C(t) = |C(t)|$  on obtient finalement pour  $C(t) \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
& C_{0s}(t+dt)p_{0s}(t, t+dt) \\
&= C(t) \left| 1 + \text{idt tr}_{\mathbb{C}^2} \left( H_A + H_B + \frac{i}{2} \sum_{m,i} \gamma_m^i J_m^{i\dagger} J_m^i \right) + O(dt^2) \right| \\
&= C(t) \left| 1 - dt \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left( \sum_{m,i} \frac{\gamma_m^i}{2} J_m^{i\dagger} J_m^i \right) \right| + O(dt^2). \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Si par contre le détecteur  $D_i$  donne le résultat  $m$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t+dt]$ , alors on a par (1.1) :

$$C_{\text{saut}}^{(m,i)}(t+dt) = \frac{\gamma_m^i dt}{dp_m^i(t)} \left| \langle J_m^{i\dagger} \sigma_y \otimes \sigma_y T J_m^i \rangle_{\psi(t)} \right|.$$

Or de la même façon qu'on a prouvé (1.8), on peut montrer que :

$$\langle J_m^{i\dagger} \sigma_y \otimes \sigma_y T J_m^i \rangle_{\psi(t)} = C(t) \det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i) \text{ pour tout } J_m^i. \tag{1.10}$$

Il vient donc :

$$dp_m^i(t) C_{\text{saut}}^{(m,i)}(t+dt) = \gamma_m^i dt C(t) |\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)|. \tag{1.11}$$

En ajoutant (1.9) et (1.11) on obtient finalement :

$$\mathbb{E}[C(t+dt)|\psi(t)] = (1 - \kappa_{\text{QJ}} dt + O(dt^2))C(t)$$

et donc par la markovianité du processus de sauts mentionné au début, on a :

$$\mathbb{E}[C(t+dt)] = (1 - \kappa_{\text{SQ}} dt + O(dt^2))\mathbb{E}[C(t)] \tag{1.12}$$

où on a posé :

$$\kappa_{\text{SQ}} = \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^{i\dagger} J_m^i) - |\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)| \right). \tag{1.13}$$

On lit sur la formule (1.12) que  $\frac{d}{dt} \mathbb{E}[C(t)] = -\kappa_{\text{SQ}} \mathbb{E}[C(t)]$ , ce qui nous permet d'énoncer le résultat principal de cette section :

**Théorème 1.5.1.** *La concurrence moyenne pour une dynamique de sauts quantiques locaux est donnée par la formule suivante :*

$$\mathbb{E}[C(t)] = e^{-\kappa_{\text{SQ}} t} C_0. \tag{1.14}$$

Tout d'abord ce théorème nous assure qu'un modèle de sauts quantiques locaux ne présentera jamais de perte soudaine d'intrication. Cela justifie le titre du chapitre. En effet les mesures continues sur les bords protègent bien en moyenne le système des deux qubits de ce phénomène de perte soudaine d'intrication. On a bien  $\kappa_{\text{SQ}} \geq 0$  comme on va le voir dans la preuve du lemme 1.5.2 suivant. Dans ce modèle la perte d'intrication est au pire exponentielle en temps. Cependant on peut choisir les opérateurs de sauts de telle sorte que  $\kappa_{\text{SQ}} = 0$ . Dans ce cas la concurrence moyenne ne décroît même plus dans le temps : c'est une fonction constante. On protège dans ce cas complètement l'intrication du système.

**Lemme 1.5.2.** *On a*

$$\kappa_{\text{SQ}} = 0 \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle = \langle 0 | \tilde{J}_m^{i\dagger} | 0 \rangle \\ \langle 1 | \Re \tilde{J}_m^i | 0 \rangle = 0 \end{cases}$$

où on a introduit  $\tilde{J}_m^i = e^{-i\theta_m^i} J_m^i$  et  $2\theta_m^i$  est l'argument de  $\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)$ .

On insiste sur le fait que si  $\kappa_{\text{SQ}} = 0$ , alors  $\mathbb{E}[C(t)] = C_0 \forall t \geq 0$  et pour des états initiaux maximalement intriqués ( $C_0 = 1$ ) on a  $C(t) = 1 \forall t \geq 0$  presque sûrement (car  $C(t) \leq 1$  p.s.). Autrement dit, toutes les trajectoires quantiques sont complètement protégées de la désintrication.

□ On prouve ici le lemme 1.5.2. On va en fait montrer que chaque terme de la somme dans  $\kappa_{\text{SQ}}$  est positif en les écrivant sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^{i\dagger} J_m^i) - |\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)| = \frac{1}{2} |\langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle - \langle 0 | \tilde{J}_m^{i\dagger} | 0 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle 1 | 2\Re \tilde{J}_m^i | 0 \rangle|^2 \geq 0. \quad (1.15)$$

Calculons donc :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^{i\dagger} J_m^i) - |\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)| \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(\tilde{J}_m^{i\dagger} \tilde{J}_m^i) - \det_{\mathbb{C}^2}(\tilde{J}_m^i) = \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(\tilde{J}_m^{i\dagger} \tilde{J}_m^i) - \Re \det_{\mathbb{C}^2}(\tilde{J}_m^i) \\ &= \frac{1}{2} \langle 1 | \tilde{J}_m^{i\dagger} | 1 \rangle \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle + \frac{1}{2} \langle 1 | \tilde{J}_m^{i\dagger} | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle + \frac{1}{2} \langle 0 | \tilde{J}_m^{i\dagger} | 1 \rangle \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \\ & \quad + \frac{1}{2} \langle 0 | \tilde{J}_m^{i\dagger} | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle - \Re \left( \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle - \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle \right). \end{aligned}$$



Ce qui se simplifie en :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^i J_m^i) - |\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)| &= \frac{1}{2} \left| \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \right|^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left| \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \right|^2 \\
&- \frac{1}{2} \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle \overline{\langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle} - \frac{1}{2} \overline{\langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle} \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \overline{\langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle} + \frac{1}{2} \overline{\langle 1 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle} \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left| \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle - \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \langle 1 | 2\Re \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \right|^2.
\end{aligned}$$

On déduit de la formule (1.15) que  $\kappa_{\text{SQ}} = 0$  si et seulement si  $\langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle = \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle$  et  $\langle 1 | \Re \tilde{J}_m^i | 0 \rangle = 0$ .  $\square$

**Lemme 1.5.3.** *Si les  $J_m^i$  sont de la forme  $\lambda_m^i U_m^i$  avec  $U_m^i$  unitaire et  $\lambda_m^i \in \mathbb{R}$  alors  $\kappa_{\text{SQ}} = 0$ .*

$\square$  En effet dans ce cas  $J_m^i$  est de trace nulle et est auto-adjointe (car toute matrice unitaire  $2 \times 2$  s'écrit  $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$  avec  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $\|\vec{v}\| = 1$  et où  $\vec{\sigma}$  est le vecteur formé par les trois matrices de Pauli  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$ ). Alors on a :

$$\det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i) = -\langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle^2 - \left| \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \right|^2 \in \mathbb{R}_-$$

donc  $\theta_m^i = \frac{\pi}{2}$  et  $\Re \tilde{J}_m^i = 0$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
\kappa_{\text{SQ}} &= \sum_{m,i} \gamma_m^i \left| \langle 1 | \tilde{J}_m^i | 1 \rangle - \langle 0 | \tilde{J}_m^i | 0 \rangle \right|^2 = \sum_{m,i} \gamma_m^i \left| -i \langle 1 | J_m^i | 1 \rangle - i \langle 0 | J_m^i | 0 \rangle \right|^2 \\
&= \sum_{m,i} \gamma_m^i \left| \langle 1 | J_m^i | 1 \rangle + \langle 0 | J_m^i | 0 \rangle \right|^2 = 0
\end{aligned}$$

car on a supposé que la trace de  $J_m^i$  était nulle.  $\square$

Cela arrive par exemple dans le cas du déphasage pur (pure dephasing) où les opérateurs de sauts vérifient  $J^i = \vec{v}_i \cdot \vec{\sigma}^i$  avec  $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$  et  $\vec{\sigma}^i$  le vecteur formé par les trois matrices de Pauli  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$ . On a représenté ce phénomène sur la figure 1.3 pour  $\vec{v}_A = \vec{v}_B = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ , soit  $J_i = e^{i\pi/4} \sigma_-^i + e^{-i\pi/4} \sigma_+^i$ . En calculant la concurrence via la matrice densité on a perte soudaine d'intrication pour tous les états initiaux sauf  $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle$ . Grâce aux mesures continues sur le bain, la concurrence est maintenue constante dans le temps

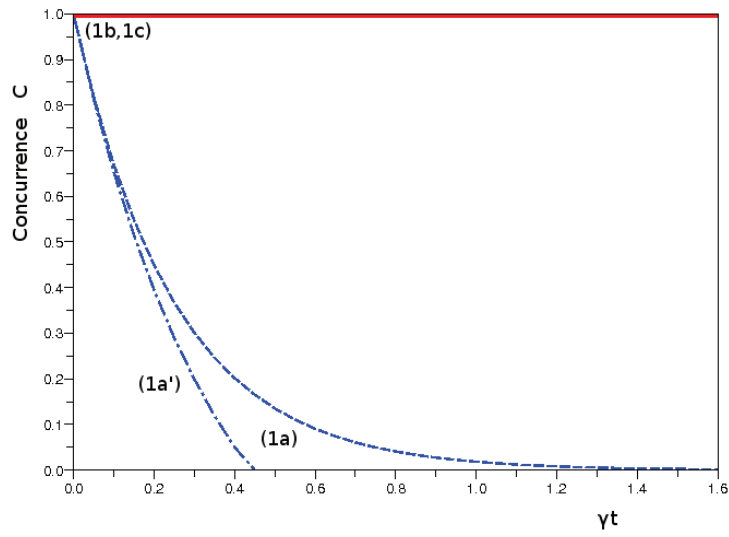


FIGURE 1.3 – Concurrences de deux qubits couplés à des bains indépendants, pour le déphasage pur ( $J_i = e^{i\pi/4}\sigma_-^i + e^{-i\pi/4}\sigma_+^i$ ), en fonction de  $\gamma t$ , et pour  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + e^{-i\varphi}|00\rangle)$ .

(1a)  $C_{\rho(t)}$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (ligne bleue tiretée).

(1a')  $C_{\rho(t)}$  pour  $\varphi = 0$  (ligne bleue pointillée-tiretée montrant une perte soudaine d'intrication).

(1b,1c)  $\mathbb{E}[C_{\psi(t)}] = C_{\psi(t)}$  (ligne rouge pleine).

Les auteurs de [19] proposent un argument très simple pour prouver que si  $J_m^i = \lambda_m^i U_m^i$  pour tout  $m, i$  (comme dans le lemme 1.5.3) alors il n'y a pas de perte de d'intrication. En effet il suffit de voir que dans ce cas les sauts ne modifient pas l'intrication car  $|\psi(t)\rangle$  est transformé en  $U_m^i |\psi(t)\rangle$  et  $U_m^i$  est un unitaire local qui ne modifie donc pas l'intrication. De même l'évolution sans saut est simplement donnée par  $|\psi(t + t_0)\rangle = e^{-iH_0 t} |\psi(t_0)\rangle$  (car  $\sum_{m,i} \gamma_m^i J_m^{i\dagger} J_m^i = \sum_{m,i} \gamma_m^i (\lambda_m^i)^2$  est un opérateur scalaire) qui ne modifie pas non plus l'intrication ( $H_0$  étant local).

Ce qui vient d'être décrit est intéressant théoriquement, mais il est plus réaliste de considérer que les bains entourant les photons sont des bains à l'équilibre thermique à une certaine température  $T_i$ . On rappelle qu'alors la matrice densité satisfait l'équation de Lindblad suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_i \gamma_-^i \left( \sigma_-^i \rho \sigma_+^i - \frac{1}{2} \{ \sigma_+^i \sigma_-^i, \rho \} \right) + \gamma_+^i \left( \sigma_+^i \rho \sigma_-^i - \frac{1}{2} \{ \sigma_-^i \sigma_+^i, \rho \} \right).$$

Comme on l'a vu dans la section 1.4, on peut prendre les opérateurs de sauts  $\sigma_-^i$  et  $\sigma_+^i$  avec respectivement les taux  $\gamma_-^i$  et  $\gamma_+^i$  pour obtenir cette équation en prenant la moyenne de toutes les trajectoires quantiques. Cependant il existe une infinité d'opérateurs de sauts faisant le même travail. Précisément ce sont les :

$$I_\mu^i = \sum_{m=\pm} (\gamma_m^i / \gamma_\mu^i)^{\frac{1}{2}} u_{\mu m}^i \sigma_m^i$$

avec  $\gamma_\mu^i$  pour taux associé, où  $U_i = (u_{\mu m}^i)_{\mu=1, \dots, N}^{m=\pm}$  sont des matrices unitaires de taille  $N \times 2$  ( $N$  est un entier plus grand que 2 pour que cela soit possible).

Évidemment  $I_\mu^i$  sont toujours des opérateurs locaux, on peut donc appliquer le théorème 1.5.1, qui affirme que la concurrence moyenne va décroître exponentiellement avec un taux  $\kappa_{\text{SQ}}$  qui vaut :

$$\kappa_{\text{SQ}} = \sum_{\mu,i} \gamma_\mu^i \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (I_\mu^{i\dagger} I_\mu^i) - |\det_{\mathbb{C}^2} (I_\mu^i)| \right).$$

A priori les taux d'amortissement ne sont pas égaux. En particulier il est intéressant de chercher le bon jeu d'opérateurs de sauts qui donne le plus faible taux. Il correspond au protocole de mesures continues sur les bains qui protège le mieux l'intrication des qubits couplés à des bains à l'équilibre thermique.

**Proposition 1.5.1.** *Dans le contexte présenté ici et avec les mêmes notations, le taux d'amortissement le plus faible est donné par :*

$$\kappa_{\text{SQ}}^{\text{opt}} = \frac{1}{2} \sum_{i=A,B} \left( \sqrt{\gamma_-^i} - \sqrt{\gamma_+^i} \right)^2.$$

Il est atteint lorsque  $|u_{\mu-}^i| = |u_{\mu+}^i| \forall \mu, i$ .

**Remarque 1.5.1.** Si les bains sont à température infinie alors  $\gamma_-^i = \gamma_+^i$  et donc  $\kappa_{\text{SQ}}^{\text{opt}} = 0$ . Autrement dit le protocole de mesures optimum permet une protection parfaite de l'intrication des qubits dans ce cas particulier.

Le cas de bains à température infinie peut sembler non physique. Cependant dans [19], les auteurs proposent un protocole expérimental utilisant des qutrits (systèmes quantiques à trois niveaux), dont le plus haut niveau est très instable, permettant de reproduire des qubits effectifs interagissant avec des bains à température infinie.

□ On rappelle que le taux d'amortissement est ici donné par :

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{SQ}} &= \sum_i \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left( \underbrace{\sum_{\mu} \gamma_{\mu}^i I_{\mu}^{i\dagger} I_{\mu}^i}_{\gamma_-^i \sigma_+^i \sigma_-^i + \gamma_+^i \sigma_-^i \sigma_+^i} \right) - \sum_{\mu} \underbrace{\gamma_{\mu}^i |\det_{\mathbb{C}^2}(I_{\mu}^i)|}_{|\det_{\mathbb{C}^2}(\sum_m \sqrt{\gamma_m^i} u_{\mu m}^i \sigma_m^i)|} \right) \\ &= \sum_i \left( \frac{\gamma_-^i + \gamma_+^i}{2} - \sum_{\mu} \sqrt{\gamma_-^i \gamma_+^i} |u_{\mu-}^i u_{\mu+}^i| \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'unitarité des matrices  $U_i$ . Pour minimiser  $\kappa_{\text{SQ}}$ , il s'agit donc de maximiser  $f_i((u_{\mu,m}^i)_{\mu=1,\dots,N}^{m=\pm}) := \sum_{\mu} |u_{\mu-}^i u_{\mu+}^i|$  en tenant compte des contraintes d'unitarité des matrices  $U_i$  qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} g_i((u_{\mu m}^i)_{\mu=1,\dots,N}^{m=\pm}) &:= \sum_{\mu} |u_{\mu-}^i|^2 - 1 = 0, \\ h_i((u_{\mu m}^i)_{\mu=1,\dots,N}^{m=\pm}) &:= \sum_{\mu} |u_{\mu+}^i|^2 - 1 = 0, \\ k_i((u_{\mu m}^i)_{\mu=1,\dots,N}^{m=\pm}) &:= \sum_{\mu} \overline{u_{\mu+}^i} u_{\mu-}^i = 0. \end{aligned}$$

Si  $f_i$  atteint un maximum sous ces contraintes alors il existe des constantes complexes  $a, b$  et  $c$ , appelées multiplicateurs de Lagrange, telles qu'au point où on obtient le maximum, on a la relation suivante entre les différentielles :

$$df_i = a dg_i + b dh_i + c dk_i.$$

En particulier en dérivant  $f_i$  par rapport à l'argument de  $u_{\mu-}^i$  (ou celui de  $u_{\mu+}^i$ ), on obtient :

$$0 = c \overline{u_{\mu+}^i} i u_{\mu-}^i.$$

De deux choses l'une, soit  $u_{\mu+}^i u_{\mu-}^i = 0 \forall \mu$ , soit  $c = 0$ . On exclut la première solution car elle donne  $f_i((u_{\mu,m}^i)_{\mu=1,\dots,N}^{m=\pm}) = 0$ . On a donc  $c = 0$  et en dérivant  $f_i$  par rapport à  $|u_{\mu-}^i|$  et à  $|u_{\mu+}^i|$ , on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} |u_{\mu+}^i| &= 2a|u_{\mu-}^i| \text{ donc } a > 0, \\ |u_{\mu-}^i| &= 2b|u_{\mu+}^i| \text{ donc } b > 0. \end{aligned}$$

En prenant la somme sur  $\mu$  de ces deux équations, on a  $1 = 2a$  et  $1 = 2b$ . Ainsi nécessairement, si  $f_i$  atteint son maximum en un point sous les contraintes mentionnées, alors les coordonnées de ce point vérifient  $|u_{\mu-}^i| = |u_{\mu+}^i| \forall \mu, i$ . En ce point on a donc :

$$f_i((u_{\mu,m}^i)_{\mu=1,\dots,N}^{m=\pm}) = \sum_{\mu} |u_{\mu-}^i|^2 = 1.$$

Or par l'inégalité arithmético-géométrique, on sait que sous les contraintes données,  $f_i$  est majorée par 1. Le maximum de  $f_i$  sous les contraintes est donc atteint et vaut 1.

Ainsi  $\kappa_{\text{SQ}}^{\text{opt}} = \sum_i \left( \frac{\gamma_-^i + \gamma_+^i}{2} - \sqrt{\gamma_-^i \gamma_+^i} \right)$  ce qui conclut la preuve de la proposition 1.5.1.  $\square$

## 1.6 Le cas de la détection homodyne.

On revient sur l'exemple traité en section 1.4 de deux atomes couplés chacun à un champ électromagnétique initialement dans l'état du vide. Au lieu de mesurer les champs directement par des compteurs à photons, on propose d'utiliser la méthode de détection homodyne (voir figure 1.4).

En général cette technique permet d'avoir accès à la phase du signal à détecter. Par exemple elle est utilisée en vibrométrie laser pour mesurer le comportement vibratoire d'un objet et ainsi avoir accès à certaines de ses caractéristiques. Ici on propose de l'utiliser pour éventuellement protéger d'avantage l'intrication des qubits. Celle-ci consiste en une détection indirecte car les photons reçus sont couplés à un champ laser classique (c'est-à-dire non quantique) de la même fréquence que celle des photons, via une lame semi-réfléchissante. C'est ce signal mélangé que les expérimentateurs détectent.

D'un point de vue théorique, on peut modéliser cette expérience par un modèle de sauts quantiques avec quatre opérateurs de sauts  $J_{\pm\alpha}^i = \sigma_-^i \pm \alpha_i$  (en lieu et place de  $\sigma_-^i$  pour la détection directe) avec  $\gamma_{\pm\alpha}^i = \gamma_i/2$  pour taux de sauts associés [109, 82]. L'amplitude du champ laser est  $\alpha_i > 0$ . Par la proposition 1.2.1, il est facile de voir que ce modèle redonne en moyennant sur l'ensemble des trajectoires quantiques, l'équation de Lindblad :

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_i \gamma_i \left( \sigma_-^i \rho \sigma_+^i - \frac{1}{2} \{ \sigma_+^i \sigma_-^i, \rho \} \right). \quad (1.16)$$

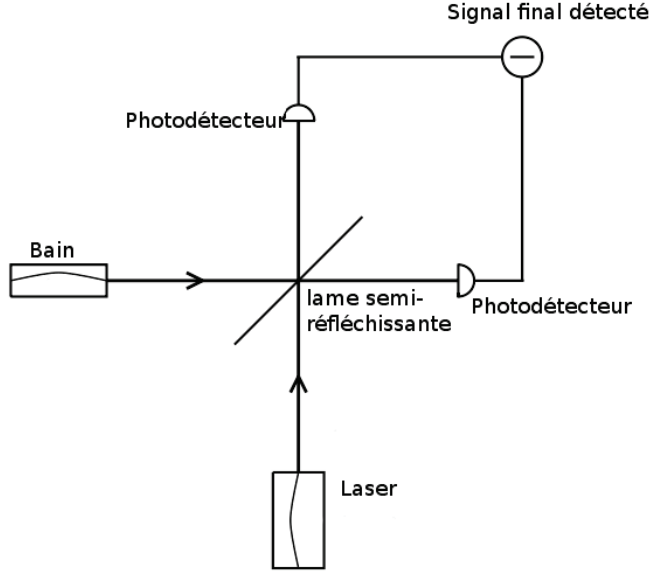


FIGURE 1.4 – Schéma de principe de la détection homodyne.

Calculons à présent la concurrence associée pour savoir si la détection homodyne permet, dans ce cas (bains de photons à températures nulles), une meilleure protection de l'intrication. En appliquant le théorème 1.5.1 on trouve :

$$\begin{aligned}
\kappa_{\text{SQ}} &= \sum_i \frac{\gamma_i}{2} \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_{+\alpha}^{i\dagger} J_{+\alpha}^i + J_{-\alpha}^{i\dagger} J_{-\alpha}^i) - |\det_{\mathbb{C}^2} J_{+\alpha}^i| - |\det_{\mathbb{C}^2} J_{-\alpha}^i| \right) \\
&= \sum_i \frac{\gamma_i}{2} \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} ((\sigma_+^i + \alpha_i)(\sigma_-^i + \alpha_i) + (\sigma_+^i - \alpha_i)(\sigma_-^i - \alpha_i)) \right. \\
&\quad \left. - |\det_{\mathbb{C}^2}(\sigma_-^i + \alpha_i)| - |\det_{\mathbb{C}^2}(\sigma_-^i - \alpha_i)| \right) \\
&= \sum_i \frac{\gamma_i}{2} \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (2\sigma_+^i \sigma_-^i + 2\alpha_i^2) - 2\alpha_i^2 \right) = \frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}.
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat trouvé précédemment pour la détection directe dans la section 1.4. Ainsi la détection homodyne n'améliore pas ici la protection de l'intrication des qubits.

Voyons ce qu'il advient dans le cas général où on considère les opérateurs de sauts  $J_{m,\pm\alpha}^i = J_m^i \pm \alpha_m^i$  avec  $\gamma_{m,\pm\alpha}^i = \gamma_m^i/2$  pour taux associés (on rappelle que  $J_m^A = j_m^A \otimes \text{Id}$  n'agit que sur le qubit  $A$  et  $J_m^B = \text{Id} \otimes j_m^B$  n'agit que sur<sup>8</sup> le qubit  $B$ ). De même que précédemment, en appliquant la proposition 1.2.1,

<sup>8</sup> On identifie toujours pour  $i = A, B$   $J_m^i$  avec  $j_m^i$  agissant sur l'espace de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  d'un seul qubit.

on retombe en moyennant sur l'ensemble des trajectoires quantiques sur la même équation de Lindblad (1.4) que celle obtenue à partir des opérateurs de sauts  $J_m^i$  et  $\gamma_m^i$  pour taux associés. En ce qui concerne l'évolution de la concurrence moyennée sur l'ensemble des trajectoires pour ce nouveau modèle de sauts quantiques, on propose de l'étudier dans la limite où les amplitudes des champs lasers  $\alpha_m^i$  sont grandes. Ce régime est en fait le seul pertinent d'un point de vue expérimental. En effet en pratique l'intensité des lasers est très grande par rapport au signal reçu par les photodétecteurs. On a alors :

**Proposition 1.6.1.** *La concurrence moyenne pour le modèle de sauts quantiques décrit précédemment dans la limite  $\alpha_m^i \gg 1$  est donnée par :*

$$\lim_{\alpha_m^i \rightarrow \infty, \forall i, \forall m} \mathbb{E}[C(t)] = e^{-\kappa_{\text{ho}} t} C_0.$$

$$\text{où } \kappa_{\text{ho}} = \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger} J_m^i) - \left( \Re \det_{\mathbb{C}^2} (J_m^i) + \frac{(\Im \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^i))^2}{2} \right) \right).$$
(1.17)

□ Ce résultat est en fait un simple corollaire du théorème 1.5.1 dans lequel  $\kappa_{\text{ho}} = \lim_{\alpha_m^i \rightarrow \infty} \kappa_{\text{SQ}}$ . Et en effet, on a :

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{SQ}} &= \sum_{m,i} \frac{\gamma_m^i}{2} \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left( (J_m^{i\dagger} + \alpha_m^i)(J_m^i + \alpha_m^i) + (J_m^{i\dagger} - \alpha_m^i)(J_m^i - \alpha_m^i) \right) \right. \\ &\quad \left. - |\det_{\mathbb{C}^2} (J_m^i + \alpha_m^i)| - |\det_{\mathbb{C}^2} (J_m^i - \alpha_m^i)| \right) \\ &= \sum_{m,i} \frac{\gamma_m^i}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger} J_m^i) \\ &\quad - \sum_{m,i} \frac{\gamma_m^i}{2} \left( \underbrace{|\det_{\mathbb{C}^2} (J_m^i + \alpha_m^i)| + |\det_{\mathbb{C}^2} (J_m^i - \alpha_m^i)| - 2\alpha_m^i}_{2\Re \det_{\mathbb{C}^2} (J_m^i) + (\Im \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^i))^2 + O\left(\frac{1}{\alpha_m^i}\right)} \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

**Remarque 1.6.1.** On aurait pu dériver le résultat de la proposition précédente en remarquant tout d'abord que la dynamique donnée par ce modèle de sauts quantiques converge pour  $\alpha_m^i \gg 1$  après un moyennage local en temps approprié vers le modèle de diffusion quantique décrit par l'équation différentielle stochastique suivante (cette étape est faite dans [109, 98] ou dans l'annexe C où on propose une dérivation personnelle de ce résultat. Ajoutons que Clément Pellegrini propose, dans sa thèse [80], une jolie approche justifiant rigoureusement ce type d'équations et l'unicité de leurs

solutions en passant par les modèles d'interactions répétées dont nous allons parler dans le dernier chapitre de cette thèse.) :

$$\begin{aligned}
|d\psi\rangle = & \left[ (-iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{m,i} \gamma_m^i J_m^{i\dagger} J_m^i) dt + \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( \Re\langle J_m^i \rangle_\psi J_m^i - \frac{(\Re\langle J_m^i \rangle_\psi)^2}{2} \right) dt \right. \\
& \left. + \sum_{m,i} \sqrt{\gamma_m^i} (J_m^i - \Re\langle J_m^i \rangle_\psi) dw_m^i \right] |\psi\rangle \quad (1.18)
\end{aligned}$$

où  $dw_m^i$  sont les différentielles d'Itô pour des processus réels de Wiener indépendants qui satisfont aux règles du calcul d'Itô  $dw_m^i dw_n^j = \delta_{ij} \delta_{mn} dt$ . On renvoie à l'excellente introduction de Gallardo au sujet [45].

Il suffit alors de calculer  $\mathbb{E}(C(t))$  grâce aux règles du calcul d'Itô pour dériver la formule de la proposition précédente. On reviendra sur cette approche, passant par une équation différentielle stochastique, dans la section traitant de la détection hétérodyne.

À la différence de  $\kappa_{\text{SQ}}$ ,  $\kappa_{\text{ho}}$  change quand on ajoute un facteur de phase  $e^{-i\theta_m^i}$  aux opérateurs de sauts  $J_m^i$ . En particulier, on peut faire apparaître ce phénomène en gardant les mêmes opérateurs de sauts  $J_m^i$  mais en choisissant les amplitudes des champs lasers complexes  $\alpha_m^i = |\alpha_m^i| e^{i\theta_m^i}$ . La proposition suivante nous indique comment ce choix de phases améliore la protection :

**Proposition 1.6.2.** *On considère la détection homodyne avec les opérateurs de sauts  $J_m^i$  et les champs lasers d'amplitudes  $\alpha_m^i = |\alpha_m^i| e^{i\theta_m^i}$ . Alors en choisissant  $\theta_m^i$  pour protéger (de la désintrication) au mieux le système, l'intrication décroît exponentiellement avec un taux donné par :*

$$\begin{aligned}
\kappa_{\text{ho}}^{\text{opt}} = & \sum_{m,i} \frac{\gamma_m^i}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger} J_m^i) \\
& - \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( \left| \det_{\mathbb{C}^2}(J_m^i) - \frac{1}{4} [\text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)]^2 \right| + \frac{1}{4} |\text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)|^2 \right).
\end{aligned}$$

□ Par la formule (1.17), on a :

$$\begin{aligned}
\kappa_{\text{ho}}(\{\theta_m^i\}) = & \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger} J_m^i) \right. \\
& \left. - \underbrace{\left( \Re \det_{\mathbb{C}^2}(e^{-i\theta_m^i} J_m^i) + \frac{(\Im \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(e^{-i\theta_m^i} J_m^i))^2}{2} \right)}_{\Delta(\theta_m^i)} \right).
\end{aligned}$$

Minimiser  $\kappa_{\text{ho}}(\{\theta_m^i\})$  revient à maximiser  $\Delta(\theta_m^i) \forall m, i$ . Pour alléger l'écriture, on oublie pour un temps les indices  $m, i$  et on pose :

$$a := \Re \det_{\mathbb{C}^2}(J), b := \Im \det_{\mathbb{C}^2}(J), u := \Re \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J) \text{ et } v := \Im \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J).$$



Alors on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\theta) &= a \cos(2\theta) + b \sin(2\theta) + \frac{1}{2} [u \sin(\theta) + v \cos(\theta)]^2 \\ &= a \cos(2\theta) + (b - \frac{uv}{2}) \sin(2\theta) + \frac{u^2}{2} \sin^2(\theta) + \frac{v^2}{2} \cos^2(\theta).\end{aligned}$$

Soit en posant  $x := \sin^2(\theta)$  :

$$\Delta(\theta) = \tilde{\Delta}(x) = a(1 - 2x) \pm (2b - uv) \sqrt{x(1-x)} + \frac{u^2}{2}x + \frac{v^2}{2}(1-x).$$

On cherche le maximum de  $\Delta$  en un point d'annulation de sa dérivée :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}'(x_{\text{opt}}) = 0 &\Leftrightarrow s := \frac{\frac{u^2-v^2}{2} - 2a}{b - \frac{uv}{2}} = \pm \frac{2x_{\text{opt}} - 1}{\sqrt{x_{\text{opt}}(1-x_{\text{opt}})}} \\ &\Leftrightarrow x_{\text{opt}}^2 - x_{\text{opt}} + \frac{1}{4+s^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{|s|}{\sqrt{4+s^2}}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\tilde{\Delta}(x_{\text{opt}}) = \frac{u^2 + v^2}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{4+s^2}} \left[ (2b - uv) + \left( \frac{u^2 - v^2}{4} - a \right) |s| \right].$$

On rappelle qu'on cherche à maximiser  $\tilde{\Delta}$ , donc on garde :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(x_{\text{opt}}) &= \frac{u^2 + v^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{4+s^2}} \left| (2b - uv) + \left( \frac{u^2 - v^2}{4} - a \right) |s| \right| \\ &= \frac{u^2 + v^2}{4} + \left| \left( a - \frac{1}{4}(u^2 - v^2) \right)^2 + \left( b - \frac{uv}{2} \right)^2 \right|\end{aligned}$$

ce qui clôt la preuve de la proposition.  $\square$

**Remarque 1.6.2.** On remarque que <sup>9</sup>  $\kappa_{\text{ho}}^{\text{opt}} \leq \kappa_{\text{SQ}}$ , ainsi dans son utilisation optimale, la détection homodyne protège davantage le système des deux qubits de la perte d'intrication que la détection directe.

De plus, la preuve de la proposition précédente donne une formule explicite pour les  $\theta_m^i$ . Ainsi connaissant les opérateurs de sauts, l'expérimentateur pourrait ajuster les phases des différents lasers intervenant dans le montage de la détection homodyne pour protéger au mieux le système de la perte d'intrication.

---

9. La preuve de  $\kappa_{\text{ho}}^{\text{opt}} \leq \kappa_{\text{SQ}}$  est triviale. Elle repose simplement sur l'inégalité triangulaire  $|z_1 - z_2| + |z_2| \geq |z_1|$  dans  $\mathbb{C}$ .

## 1.7 Le cas de la détection hétérodyne.

La principale limitation de la détection homodyne est son extrême sensibilité aux bruits basses fréquences, qui viennent souvent s'ajouter au signal à mesurer. Le fonctionnement de la sonde homodyne nécessite la plupart du temps un asservissement qui stabilise de manière active le montage. Cet asservissement complique le montage, ce qui fait qu'en pratique on préfère à la détection homodyne un montage dérivé, la détection hétérodyne<sup>10</sup>. Le principe de fonctionnement est le même que précédemment mis à part qu'ici les lasers intervenant dans le montage (cf. figure 1.4) ne sont plus à la même fréquence que celles des champs électromagnétiques vivant dans les bains des qubits  $A$  et  $B$ .

De nouveau on peut décrire cette expérience par un modèle de sauts quantiques (cf. [82]). Mais à présent les opérateurs de sauts dépendent du temps à cause du décalage de fréquences ( $\Omega_m^i$ ) entre celle des photons issus du bain et celle du laser :

$$J_{m,\pm\alpha}^i(t_q) = J_m^i \pm \alpha_m^i e^{i\Omega_m^i t_q}$$

où  $t_q$  est le temps d'apparition du  $q$ -ème saut. Le taux de saut associé reste inchangé par rapport à la détection homodyne :  $\gamma_{m,\pm\alpha}^i = \gamma_m^i/2$ .

De même que pour la détection homodyne, on s'intéresse au cas pratique où l'intensité des lasers intervenant dans le montage est importante et où les amplitudes des lasers  $\alpha_m^i e^{i\Omega_m^i t_q}$  oscillent rapidement par rapport au taux d'amortissement  $\gamma_m^i$ , c'est-à-dire on considère la limite  $(\alpha_m^i)^2 \gg \Omega_m^i/\gamma_m^i \gg 1$ . Dans ce cas on peut montrer que la dynamique de sauts quantiques converge vers l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} |d\psi\rangle = & \left[ (-iH_0 - \frac{1}{2} \sum_{m,i} \gamma_m^i J_m^{i\dagger} J_m^i) dt + \frac{1}{2} \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( \langle J_m^i \rangle_\psi^* J_m^i - \frac{|\langle J_m^i \rangle_\psi|^2}{2} \right) dt \right. \\ & \left. + \sum_{m,i} \sqrt{\gamma_m^i} \left( (J_m^i - \frac{1}{2} \langle J_m^i \rangle_\psi) d\xi_m^i - \frac{1}{2} \langle J_m^i \rangle_\psi^* d\xi_m^{i*} \right) \right] |\psi\rangle, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où  $d\xi_m^i$  sont les différentielles d'Itô de processus indépendants de Wiener complexes satisfaisant les règles d'Itô  $d\xi_m^i d\xi_n^j = 0$  et  $d\xi_m^i d\xi_n^j = \delta_{ij} \delta_{mn} dt$  (cf. [45]). On trouve des preuves de ce résultat dans [109, 110, 12]. Sinon on peut se référer à l'annexe C où on en donne une dérivation originale.

---

10. Des progrès récents accomplis en électronique permettent un asservissement plus aisé rendant la détection homodyne plus attractive qu'auparavant d'après le numéro 784 d'avril 2006 de la revue Mesures (pages 40-43).

**Proposition 1.7.1.** *Pour ce modèle de détection hétérodyne dans la limite  $(\alpha_m^i)^2 \gg \Omega_m^i/\gamma_m^i \gg 1$ , la concurrence moyenne est donnée par la formule :*

$$\mathbb{E}[C(t)] = e^{-\kappa_{\text{het}} t} C(0)$$

$$\text{avec } \kappa_{\text{het}} = \sum_{m,i} \gamma_m^i \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger} J_m^i) - \frac{1}{4} |\text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^i)|^2 \right).$$

**Remarque 1.7.1.** On remarque que  $\kappa_{\text{het}} \geq \kappa_{\text{ho}}^{\text{opt}}$ . Il semble donc préférable si c'est possible (contraintes expérimentales mentionnées ci-dessus) d'utiliser une détection homodyne pour protéger le système de la perte d'intrication.

□ Comme pour le modèle de détection homodyne, deux voies s'offrent à nous pour prouver cette proposition. Soit on utilise le théorème 1.5.1 dans la limite décrite ci-dessus. Soit on calcule la concurrence moyenne à partir de l'équation différentielle stochastique 1.19. Pour changer et comme la première méthode est expliquée dans notre article [104], on propose ici d'utiliser la seconde méthode.

On commence donc par évaluer :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\psi + d\psi) &= \langle \psi + d\psi | \sigma_y \otimes \sigma_y T | \psi + d\psi \rangle \\ &= \mathcal{C}(\psi) + \underbrace{\langle \psi | \sigma_y \otimes \sigma_y T | d\psi \rangle}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\langle d\psi | \sigma_y \otimes \sigma_y T | \psi \rangle}_{(2)} + \underbrace{\langle d\psi | \sigma_y \otimes \sigma_y T | d\psi \rangle}_{(3)}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (1) = (2) &= \mathcal{C}(\psi) \sum_{m,i} \left[ dt \gamma_m^i \left( -\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger} J_m^i) + \frac{1}{4} \langle J_m^i | \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger}) - \frac{1}{4} |\langle J_m^i \rangle|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + d\xi_m^i \sqrt{\gamma_m^i} \left( -\frac{1}{2} \langle J_m^i \rangle \right) + \overline{d\xi_m^i} \sqrt{\gamma_m^i} \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger}) - \frac{1}{2} \overline{\langle J_m^i \rangle} \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$(3) = \mathcal{C}(\psi) \sum_{m,i} dt \frac{\gamma_m^i}{2} \left( |\langle J_m^i \rangle|^2 - \langle J_m^i | \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger}) \right) + O(dt^2)$$

en utilisant les règles d'Itô, les formules (1.8) et (1.10) et le fait qu'on peut toujours choisir  $\text{tr}(H_0) = 0$ . Soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\psi + d\psi) &= \mathcal{C}(\psi) + \mathcal{C}(\psi) \sum_{m,i} \left[ dt \gamma_m^i \left( -\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger} J_m^i) \right) \right. \\ &\quad \left. + d\xi_m^i \sqrt{\gamma_m^i} (-\langle J_m^i \rangle) + \overline{d\xi_m^i} \sqrt{\gamma_m^i} (\text{tr}_{\mathbb{C}^2} (J_m^{i\dagger}) - \overline{\langle J_m^i \rangle}) \right]. \end{aligned}$$

Enfin la concurrence à l'instant  $t + dt$  est donnée par l'espérance de la valeur absolue de l'expression précédente, soit :

$$\begin{aligned}
C(t + dt) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[|C(\psi + d\psi)||\psi]] \\
&= C(t)\mathbb{E}\left[\left|1 + \sum_{m,i} \left[ \underbrace{dt \gamma_m^i \left(-\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^{i\dagger} J_m^i)\right)}_{A_m^i} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \underbrace{d\xi_m^i \sqrt{\gamma_m^i} (-\langle J_m^i \rangle)}_{B_m^i} + \underbrace{d\bar{\xi}_m^i \sqrt{\gamma_m^i} (\text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^{i\dagger}) - \langle J_m^i \rangle)}_{D_m^i} \right] \right|\right].
\end{aligned}$$

Il est facile de montrer par les règles d'Itô que :

$$\begin{aligned}
|1 + Adt + Bd\xi + D\bar{d}\xi| &= 1 + dt \left[ \Re(A) + \frac{|B|^2 + |D|^2}{2} - \frac{1}{4}|B + \bar{D}|^2 \right] \\
&\quad + (\dots)d\xi + (\dots)\bar{d}\xi
\end{aligned}$$

pour  $A, B, D \in \mathbb{C}$ . Comme les processus de Wiener sont indépendants et d'espérances nulles, cette formule nous suffit pour conclure que :

$$C(t + dt) = C(t) + dtC(t) \sum_{m,i} \left[ \underbrace{\Re(A_m^i) + \frac{|B_m^i|^2 + |D_m^i|^2}{2} - \frac{1}{4}|B_m^i + \bar{D}_m^i|^2}_{-\frac{\gamma_m^i}{2} \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^{i\dagger} J_m^i) + \frac{\gamma_m^i}{4} |\text{tr}_{\mathbb{C}^2}(J_m^i)|^2} \right]$$

ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

## 1.8 Qubits couplés au même bain.

Finalement on va appliquer notre méthode de mesures sur les bains, qui protège l'intrication du système lorsque les qubits sont chacun couplés à un environnement distinct, au cas où les deux qubits sont couplés à un bain commun. Cela est plus pertinent que le cas précédent si dans l'expérience physique que l'on tente de décrire les deux qubits sont très proches l'un de l'autre.

Plus particulièrement on va s'intéresser ici à deux qubits de même fréquence couplés de façon résonnante au même mode d'un champ électromagnétique qui se trouve être initialement dans l'état du vide <sup>11</sup>.

11. Dans le cas où les qubits sont chacun couplés à un environnement indépendant, on n'a pas besoin de faire l'hypothèse de fréquence commune, c'est pour cela que nous ne l'avons pas mentionnée au préalable. Cette hypothèse n'est cependant pas très restrictive car dans les expériences pratiques, les qubits sont souvent constitués des mêmes objets (mêmes atomes, mêmes ions,...). De plus l'hypothèse de résonance avec le mode du champ est souvent ce qui est réalisé en pratique, par exemple dans les expériences d'Optique Quantique du Laboratoire Kastler Brossel [21, 85, 50, 48], comme on l'a mentionné en Introduction.

On suppose que la cavité où siège ce champ est entourée de photodétecteurs parfaits. Ainsi chaque fois qu'un des deux qubits  $A$  ou  $B$  émet un photon (on néglige l'évènement d'émission de deux photons au même instant, un pour chaque qubit, qui a une probabilité d'occurrence en  $O(dt^2)$  trop faible), celui-ci est détecté par un photodétecteur  $D$ . De même qu'en section 1.4, on fait l'approximation de l'onde tournante pour ce modèle de comptage de photons avec un bain unique ; ce qui nous conduit à considérer l'opérateur de saut  $J = \sigma_-^A \otimes Id_B + Id_A \otimes \sigma_-^B$  avec  $\gamma$  pour taux de sauts. Il est important de noter qu'à présent l'opérateur de saut n'est plus local. Enfin pour simplifier les calculs on prend <sup>12</sup>  $H_0 = 0$ .

On souhaite calculer la concurrence moyenne associée à ce modèle de sauts quantiques. On procède de la même façon que précédemment. On commence par calculer la contribution des trajectoires sans saut à la concurrence moyenne :

$$\begin{aligned} p_{0s}(0, t)C_{0s}(t) &= |\langle \sigma_y \otimes \sigma_y T \rangle_{e^{-iH_{\text{eff}}t} \psi(0)}| \\ &= |\langle \sigma_y \otimes \sigma_y T \rangle_{e^{-\frac{\gamma}{2} J^\dagger J t} \psi(0)}|. \end{aligned}$$

En calculant l'exponentielle de  $-\frac{\gamma}{2} J^\dagger J t$ , on trouve facilement que :

$$e^{-\frac{\gamma}{2} J^\dagger J t} \psi(0) = \sum_{s, s'} c_{s, s'}(t) |s, s'\rangle$$

avec :

$$\begin{aligned} c_{11}(t) &= e^{-\gamma t} c_{11}(0) \\ c_{10}(t) &= \frac{e^{-\gamma t} + 1}{2} c_{10}(0) + \frac{e^{-\gamma t} - 1}{2} c_{01}(0) \\ c_{00}(t) &= c_{00}(0). \end{aligned}$$

Ensuite les trajectoires quantiques avec un saut entre 0 et  $t$  donnent une contribution non nulle (au contraire du cas de deux bains indépendants à température nulle). Elle est obtenue en intégrant sur  $[0, t]$ , la probabilité d'avoir une trajectoire avec un unique saut sur  $[0, t]$  en  $t_s$ , soit

$$\begin{aligned} p_{0s}(0, t_s) (\gamma \|J|\psi(t_s^-)\rangle\|^2 dt_s) p_{0s}(t_s, t) &= \gamma \mathcal{N}_{1s, t_s}(t)^2 \\ \text{où } \mathcal{N}_{1s, t_s}(t)^2 &= \|e^{-\frac{J^\dagger J}{2}(t-t_s)} J e^{-\frac{J^\dagger J}{2} t_s} |\psi(0)\rangle\|^2, \end{aligned}$$

---

12. On peut aisément refaire les calculs en ajoutant  $H_0$ . Des phases supplémentaires vont apparaître dans les formules, mais on peut voir que cela ne modifie en fait pas le résultat final (1.20) obtenu.

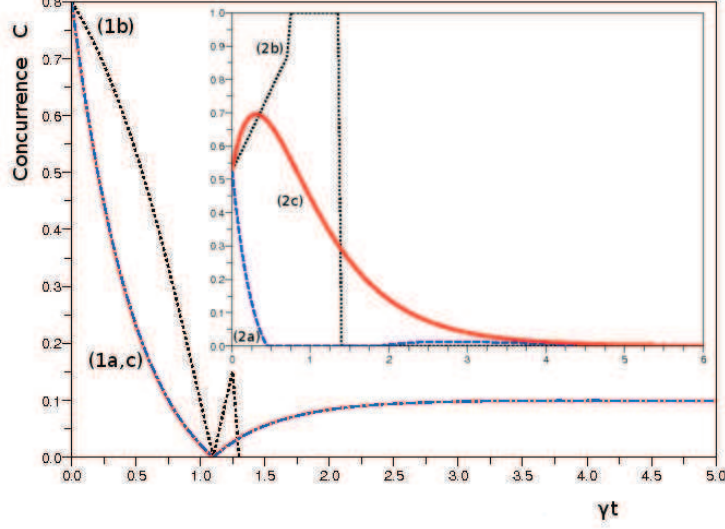


FIGURE 1.5 – Concurrence de deux qubits couplés à un bain commun à température nulle en fonction de  $\gamma t$  avec  $|\Psi(0)\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|01\rangle$ .

(1a)  $C_{\rho(t)}$  (ligne bleue tiretée).

(1b)  $C_{\psi(t)}$  pour une seule trajectoire (ligne noire en pointillés).

(1c)  $\mathbb{E}[C_{\psi(t)}]$  donnée par (1.20) (ligne rouge pleine superposée à la ligne bleue tiretée).

Dans l'encart (2), la même chose pour  $|\Psi(0)\rangle = \frac{7i}{\sqrt{53}}|11\rangle + \frac{2i}{\sqrt{53}}|00\rangle$ .

multiplié par la concurrence associée à une telle trajectoire à l'instant  $t$ , soit  $C_{1s,t_s}(t) = 2\frac{1}{\mathcal{N}_{1s,t_s}^2}e^{-2\gamma t}|c_{11}(0)|$ . Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} C_{1s} &= \int_0^t dt_s \gamma \mathcal{N}_{1s,t_s}(t)^2 2\frac{1}{\mathcal{N}_{1s,t_s}^2} e^{-2\gamma t} |c_{11}(0)| \\ &= 2\gamma t e^{-2\gamma t} |c_{11}(0)|. \end{aligned}$$

Enfin les trajectoires avec deux sauts ou plus ont une concurrence nulle (car après deux sauts on a  $|\psi(t)\rangle = e^{i\varphi}|00\rangle$  avec  $\varphi \in \mathbb{R}$ ), il vient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C(t)] &= \frac{1}{2} |[c_{10}(0) - c_{01}(0)]^2 - [c_{10}(0) + c_{01}(0)]^2 e^{-2\gamma t} + 4c_{11}c_{00}(0)e^{-\gamma t}| \\ &\quad + 2|c_{11}(0)|^2 \gamma t e^{-2\gamma t}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

On note plusieurs différences frappantes par rapport aux modèles décrits précédemment avec deux bains indépendants. Tout d'abord le comportement de la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}[C(t)]$  dépend fortement de l'état initial choisi. Ensuite on perd le comportement général de décroissance exponentielle de la

concurrence moyenne observé pour tout modèle de sauts locaux (cf. théorème 1.5.1). En particulier ici on peut observer un phénomène curieux de perte soudaine d'intrication immédiatement suivie d'une renaissance de la concurrence. Cela se produit ssi  $\begin{cases} c_{11}(0) = 0 \\ \arg(c_{10}(0) + c_{01}(0)) = \arg(c_{10}(0) - c_{01}(0)) \end{cases}$ . Sous ces conditions  $\mathbb{E}[C]$  s'annule uniquement en  $t_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{c_{10}(0) + c_{01}(0)}{c_{10}(0) - c_{01}(0)} \right)$  (cf. figure 1.5).

Pour finir, on remarque, dans le cas où on prend  $c_{11}(0) = 0$  comme condition initiale, que  $\mathbb{E}[C(t)] = C_{\rho(t)}$  où  $\rho$  est solution<sup>13</sup> de l'équation de Lindblad :

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma J \rho J^\dagger - \frac{\gamma}{2} \{J^\dagger J, \rho\}. \quad (1.21)$$

Par contre si  $c_{11}(0) \neq 0$ , alors  $\mathbb{E}[C]$  commence par croître tandis que  $C_\rho$  commence par décroître. Dans l'article [103], les auteurs proposent des protocoles de mesures permettant justement d'obtenir  $\mathbb{E}[C(t)] = C_{\rho(t)} \forall t$ . Enfin on peut voir que  $\mathbb{E}[C]$  converge aux grands temps vers la valeur  $C_\infty := \frac{|c_{10}(0) - c_{01}(0)|^2}{2}$  de même que  $C_\rho$ . Les auteurs de [64] et [78] avaient déjà remarqué que  $\lim_{t \rightarrow \infty} C_{\rho(t)} = C_\infty$ . Cela est dû à la présence de l'état noir maximalement intriqué,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$ , invariant sous la dynamique donnée par l'équation de Lindblad (1.21).

On reviendra, dans le chapitre traitant du modèle d'interactions répétées, sur d'autres curieux phénomènes apparaissant lorsque les deux qubits sont couplés au même environnement.

---

13. On donne la solution de l'équation de Lindblad (1.21) avec la condition initiale  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  où  $|\psi\rangle = c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{00}|00\rangle$  dans l'annexe D.





## Chapitre 2

# États X et décompositions en états purs produits.

### 2.1 Introduction.

#### 2.1.1 Définition des états X et motivation de leur étude.

**Proposition-Definition 2.1.1.** *Un état quantique  $\rho$  d'un système de deux qubits est dit état X, si dans la base  $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$  qu'on qualifera de canonique, il est représenté par la matrice :*

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & c & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

avec les conditions :

- .  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels positifs de somme un.
- .  $y$  est complexe tel que  $|y|^2 \leq ad$ .
- .  $x$  est complexe tel que  $|x|^2 \leq bc$ .

□ On prouve ici d'où viennent les conditions sur les nombres  $a, b, c, d, x, y$ .

La matrice  $\rho$  est hermitienne positive de trace un. Ceci nous donne donc naturellement la première condition. Les seconde et troisième viennent de la positivité. La matrice  $\rho$  est positive ssi toutes ses valeurs propres sont positives. Or celles-ci sont :

- .  $\lambda_1 = \frac{1}{2}[(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4|y|^2}]$
- .  $\lambda_2 = \frac{1}{2}[(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4|y|^2}]$
- .  $\lambda_3 = \frac{1}{2}[(b+c) - \sqrt{(b-c)^2 + 4|x|^2}]$
- .  $\lambda_4 = \frac{1}{2}[(b+c) + \sqrt{(b-c)^2 + 4|x|^2}]$

Elles sont positives ssi  $\begin{cases} (a+d) \geq \sqrt{(a-d)^2 + 4|y|^2} \\ (b+c) \geq \sqrt{(b-c)^2 + 4|x|^2} \end{cases}$ , c'est-à-dire,  $\begin{cases} ad \geq |y|^2 \\ bc \geq |x|^2 \end{cases}$ . □

Les états  $X$  jouent un très grand rôle dans les expériences d'information quantique. L'ensemble des états  $X$  inclut en particulier les états de Bell [9] et les états de Werner [108]. De plus on peut connaître très facilement la concurrence d'un état  $X$  via la formule exposée dans la partie suivante. Cette formule rend leur utilisation très agréable tant pour les modèles théoriques d'intrication que pour les expériences.

**Remarque 2.1.1.** La définition des états  $X$  dépend d'une base canonique fixée ce qui n'est pas très naturel. Pour palier ce défaut, on va dans la section 2.3.3 considérer l'ensemble des états pouvant se réduire à des états  $X$  via des transformations unitaires locales.

## 2.1.2 Présentation des résultats de ce chapitre.

Dans ce chapitre on va étudier l'ensemble  $\mathcal{E}_X$  formé par les états  $X$ , géométriquement et du point de vue de l'information quantique.

La proposition 2.2.2 montre que  $\mathcal{E}_X$  est un ensemble convexe compact à sept dimensions<sup>1</sup> réelles. Il est donc, par le théorème de Krein-Milman, l'enveloppe convexe de ses états extrémaux qui sont les états de Bell généralisés<sup>2</sup> par la proposition 2.2.1.

En ce qui concerne l'information quantique, on rappelle au lemme 2.2.1 une formule bien connue donnant la concurrence de tout état de  $\mathcal{E}_X$ , ce qui motive l'étude de cet ensemble d'états. On verra en particulier au chapitre suivant que cette formule va nous être très utile. Mais pour commencer on se sert de ce lemme pour montrer simplement (cf. proposition 2.2.1) que la concurrence est une fonction convexe sur  $\mathcal{E}_X$ .

La fin du chapitre traite de la décomposition d'états séparables de deux qubits en états purs produits. On propose des formules explicites pour la décomposition de tout état séparable de  $\mathcal{E}_X$  en une somme d'au plus cinq états purs produits (cf. proposition 2.3.1). On généralise notre méthode à l'ensemble obtenu par conjugaison d'unitaires locaux sur des états  $X$ . On commence par démontrer que cet ensemble a onze paramètres<sup>3</sup> (cf. théorème 2.3.1). On est alors soumis au problème pratique suivant. Soit  $\rho$  un état d'un système de deux qubits, comment savoir si  $\rho$  peut être obtenu par conjugaison par des unitaires locaux sur un état  $X$ ? C'est le théorème 2.3.2 qui répond à cette question. La démonstration de celui-ci est constructive. Aussi elle nous fournit un algorithme (résumé à la fin de la section 2.3.3) pour, si c'est possible (on le sait grâce au théorème 2.3.2), écrire  $\rho$  sous la

---

1. On verra dans la proposition 2.2.2 dans quel sens on parle de dimension.  
2. Les états de Bell généralisés seront définis dans la proposition 2.2.1.  
3. On verra dans quel sens au théorème 2.3.1

forme :

$$\rho = (U_A \otimes U_B)\rho_X(U_A \otimes U_B)^\dagger,$$

où  $\rho_X \in \mathcal{E}_X$ ,  $U_A$  et  $U_B$  sont des unitaires sur  $\mathbb{C}^2$ . En particulier cet algorithme compilé à la proposition 2.3.1 fournit un algorithme de décomposition en états purs produits (résumé à la fin de la section 2.3.3) pour les états séparables obtenus par conjugaison d'unitaires locaux sur des états  $X$  séparables. On compare ensuite notre méthode à celle de Sanpera-Tarrach-Vidal (cf. sections 2.3.4 et 2.3.6) et celle de Wootters (cf. sections 2.3.5 et 2.3.6).

## 2.2 Les états $X$ d'un système de deux qubits.

### 2.2.1 En ce qui concerne la concurrence des états $X$ .

On rappelle que dans [111], Wootters propose une méthode pour calculer la concurrence d'une matrice densité  $\rho$  représentant l'état de deux qubits (cf. annexe 0.2.2). Il s'agit de calculer les valeurs propres de la matrice  $\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$  où<sup>4</sup>  $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \bar{\rho} \sigma_y \otimes \sigma_y$ , puis de les ranger dans l'ordre décroissant :  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ . On a alors la formule suivante :

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (2.2)$$

Le lemme suivant (cf. [113]) est finalement la principale motivation pour l'étude des états  $X$  :

**Lemme 2.2.1.** *Si  $\rho$  est un état  $X$ , donné par l'équation (2.1) alors on a la formule explicite :*

$$C(\rho) = 2 \max\{0, |y| - \sqrt{bc}, |x| - \sqrt{ad}\}. \quad (2.3)$$

□ Il est plus facile de prouver ce lemme en remarquant que les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$  sont les racines carrées des valeurs propres  $\mu_i$  de  $\rho\tilde{\rho}$  (ce qui vient juste du fait que les valeurs propres de  $AB$  sont les mêmes que celles de  $BA$  pour deux matrices  $A$  et  $B$ ).

Commençons donc par calculer :

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & y \\ 0 & c & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & b & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\rho\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} ad + |y|^2 & 0 & 0 & 2ay \\ 0 & bc + |x|^2 & 2bx & 0 \\ 0 & 2c\bar{x} & bc + |x|^2 & 0 \\ 2d\bar{y} & 0 & 0 & ad + |y|^2 \end{pmatrix}$$

---

4. On rappelle que  $\bar{\rho}$  est la matrice conjuguée de  $\rho$ .

Le polynôme caractéristique de cette matrice est (en utilisant la notation classique pour les polynômes où  $X$  est l'indéterminée) :

$$\chi_{\rho\tilde{\rho}} = [(X - (bc + |x|^2))^2 - 4bc|x|^2][(X - (ad + |y|^2))^2 - 4ad|y|^2]$$

Les valeurs propres de  $\rho\tilde{\rho}$  sont donc :

$$\begin{aligned} \cdot \mu_1 &= (\sqrt{bc} + |x|)^2 \\ \cdot \mu_2 &= (\sqrt{bc} - |x|)^2 \\ \cdot \mu_3 &= (\sqrt{ad} + |y|)^2 \\ \cdot \mu_4 &= (\sqrt{ad} - |y|)^2 \end{aligned}$$

Comme on ne sait pas qui est le plus grand entre  $(\sqrt{bc} + |x|)^2$  et  $(\sqrt{ad} + |y|)^2$ , on réécrit (2.2) sous la forme :

$$C(\rho) = \max\{0, (\sqrt{bc} + |x|) - (\sqrt{bc} - |x|) - (\sqrt{ad} + |y|) - (\sqrt{ad} - |y|), \\ (\sqrt{ad} + |y|) - (\sqrt{ad} - |y|) - (\sqrt{bc} + |x|) - (\sqrt{bc} - |x|)\}$$

soit la formule (2.3).  $\square$

**Remarque 2.2.1.** La formule (2.3) nous permet de voir qu'un état  $X$  est séparable ssi  $\max(|x|, |y|) \leq \min(\sqrt{ad}, \sqrt{bc})$ .

Une première application de cette formule est de fournir une preuve facile du théorème général 0.2.3, dans le cas particulier des états  $X$  :

**Proposition 2.2.1.** On note  $\mathcal{E}_X$  l'ensemble des états  $X$ , alors la fonction concurrence est convexe sur  $\mathcal{E}_X$ .

$$\square \text{ Soient } \rho_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & b_1 & x_1 & 0 \\ 0 & \bar{x}_1 & c_1 & 0 \\ \bar{y}_1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix} \text{ et } \rho_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & b_2 & x_2 & 0 \\ 0 & \bar{x}_2 & c_2 & 0 \\ \bar{y}_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{E}_X$$

et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors d'après la formule (2.3) :

$$\begin{aligned} C(\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2) \\ = 2 \max\{0, |\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| - \sqrt{[\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2][\lambda d_1 + (1 - \lambda)d_2]}, \\ |\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2| - \sqrt{[\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2][\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2]}\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

La fonction  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(u, v) \mapsto \sqrt{uv}$  est concave car sa hessienne,

$$Hess f_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \frac{v^{1/2}}{u^{3/2}} & \frac{-1}{4} \frac{1}{\sqrt{uv}} \\ \frac{-1}{4} \frac{1}{\sqrt{uv}} & \frac{-1}{4} \frac{u^{1/2}}{v^{3/2}} \end{pmatrix} \text{ pour } (u, v) \in ]0, 1[^2 \text{ est négative (ses va-}$$

leurs propres 0 et  $\frac{-1}{4} \left( \frac{\sqrt{v}}{u^{3/2}} + \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \right)$  sont négatives). Ainsi par inégalités de convexité, on a :

$$\begin{aligned} |\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| - \sqrt{[\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2][\lambda d_1 + (1 - \lambda)d_2]} \\ \leq \lambda|x_1| + (1 - \lambda)|x_2| - \lambda\sqrt{a_1 d_1} - (1 - \lambda)\sqrt{a_2 d_2} \end{aligned}$$

et une inégalité similaire pour le second terme de (2.4). D'où :

$$C(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) \leq 2 \max\left\{0, \begin{aligned} &\lambda(|x_1| - \sqrt{a_1d_1}) + (1-\lambda)(|x_2| - \sqrt{a_2d_2}) \\ &\lambda(|y_1| - \sqrt{b_1c_1}) + (1-\lambda)(|y_2| - \sqrt{b_2c_2}) \end{aligned} \right\}$$

Puis  $g : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a un épigraphe convexe donc est une fonction convexe. Ainsi  $C(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) \leq \lambda C(\rho_1) + (1-\lambda)C(\rho_2) \square$

### 2.2.2 Géométrie de $\mathcal{E}_X$ , l'ensemble des états X.

On donne ici des éléments pour comprendre la géométrie de l'ensemble  $\mathcal{E}_X$ .

**Proposition 2.2.2.**  *$\mathcal{E}_X$  est un ensemble convexe compact à sept dimensions réelles.*

$\square$  La convexité est évidente. En effet la forme X est préservée par combinaison convexe et on sait déjà qu'une combinaison convexe d'états quantiques est encore un état quantique.

Il a sept dimensions en tant que variété réelle.

Pour la compacité il suffit de voir que  $\mathcal{E}_X$  est un fermé borné dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ , espace vectoriel de dimension finie. La forme X est évidemment préservé par

passage à la limite et  $\mathcal{E}_X$  est borné car pour  $\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & c & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_X$ , les

coefficients diagonaux appartiennent à  $[0, 1]$ . Comme  $|y| \leq \sqrt{ad}$  et  $|x| \leq \sqrt{bc}$ , on a aussi  $|x|$  et  $|y|$  dans  $[0, 1]$ .  $\square$

Par le théorème de Krein-Milman<sup>5</sup>, on sait que  $\mathcal{E}_X$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Nous allons les donner dans le théorème suivant. Pour commencer on appelle états de Bell généralisés, les états purs  $|\psi\rangle\langle\psi|$  et  $|\phi\rangle\langle\phi|$  avec  $|\psi\rangle = \alpha|11\rangle + \delta|00\rangle$  et  $|\phi\rangle = \beta|10\rangle + \gamma|01\rangle$  où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des nombres complexes tels que  $|\alpha|^2 + |\delta|^2 = 1$  et  $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ . On peut aussi les représenter matriciellement dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  :

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\bar{\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}\delta & 0 & 0 & |\delta|^2 \end{pmatrix} \text{ et } |\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 & \beta\bar{\gamma} & 0 \\ 0 & \bar{\beta}\gamma & |\gamma|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 2.2.1.** *Les états de Bell généralisés sont les états extrémaux de  $\mathcal{E}_X$ .*

5. En dimension finie il fût prouvé par Minkowski, mais il est toujours improprement dénommé théorème de Krein-Milman dans ce cadre.

□ On commence par prouver que les états de Bell généralisés sont des états extrémaux de  $\mathcal{E}_X$ . On montre par exemple que  $|\psi\rangle\langle\psi|$  est un état extrémal.

Pour ce faire, on prend  $\rho_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & b_1 & x_1 & 0 \\ 0 & \bar{x}_1 & c_1 & 0 \\ \bar{y}_1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix}$  et  $\rho_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & b_2 & x_2 & 0 \\ 0 & \bar{x}_2 & c_2 & 0 \\ \bar{y}_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$

dans  $\mathcal{E}_X$  et  $\lambda \in [0, 1]$  tels que :

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2.$$

Ainsi  $\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 = 0$ , donc  $b_1 = b_2 = 0$ . De même on a  $c_1 = c_2 = 0$  et comme  $|x_i| \leq \sqrt{b_i c_i}$ ,  $x_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Ensuite :

$$\begin{aligned} |\alpha\delta|^2 &= \lambda^2|y_1|^2 + (1 - \lambda)^2|y_2|^2 + \lambda(1 - \lambda)(y_1\bar{y}_2 + \bar{y}_1y_2) \\ &\leq \lambda^2|y_1|^2 + (1 - \lambda)^2|y_2|^2 + \lambda(1 - \lambda)2|y_1||y_2| \\ &\leq \lambda^2 a_1 d_1 + (1 - \lambda)^2 a_2 d_2 + \lambda(1 - \lambda)2\sqrt{a_1 d_1 a_2 d_2} \\ &\leq \lambda^2 a_1 d_1 + (1 - \lambda)^2 a_2 d_2 + \lambda(1 - \lambda)(a_1 d_2 + a_2 d_1). \end{aligned}$$

Mais d'autre part :

$$\begin{aligned} |\alpha\delta|^2 &= |\alpha|^2|\delta|^2 \\ &= [\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2][\lambda d_1 + (1 - \lambda)d_2] \\ &= \lambda^2 a_1 d_1 + (1 - \lambda)^2 a_2 d_2 + \lambda(1 - \lambda)(a_1 d_2 + a_2 d_1) \end{aligned}$$

donc il y a partout égalité dans la suite d'inégalités précédente. En particulier on a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique ce qui signifie que  $a_1 d_2 = a_2 d_1$ . Or  $d_i = 1 - a_i$ , donc  $a_1 = a_2$ . Puis pour passer de la deuxième à la troisième inégalité, on a utilisé le fait que  $|y_i| \leq \sqrt{a_i d_i}$ , là encore on a nécessairement égalité donc  $|y_1| = \sqrt{a_1 d_1} = \sqrt{a_2 d_2} = |y_2|$ . Enfin les arguments de  $y_1$  et  $y_2$  sont égaux car on a aussi égalité dans la première inégalité. Ainsi  $\rho_1 = \rho_2$  et notre combinaison convexe devient triviale :

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2 = \rho_1 = \rho_2$$

signifie que  $|\psi\rangle\langle\psi|$  est extrémal dans  $\mathcal{E}_X$ . Une démonstration similaire montre que  $|\phi\rangle\langle\phi|$  est aussi extrémal.

Réciproquement on va prouver qu'on peut écrire n'importe quel état de  $\mathcal{E}_X$  comme combinaison convexe d'états de Bell généralisés.

Etape 1 : Pour les états du type

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & 1 - a \end{pmatrix},$$

la combinaison convexe suivante fonctionne avec  $\lambda = \frac{|y|}{\sqrt{a(1-a)}}$  pour<sup>6</sup>  $a \in ]0, 1[$  :

$$\rho = \lambda \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \sqrt{a(1-a)}e^{i\arg(y)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{a(1-a)}e^{-i\arg(y)} & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \\ + (1-\lambda)a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda)(1-a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etape 2 : Pour les états du type

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la démonstration est la même.

Etape 3 : Dans le cas général

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & c & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

avec  $a + d \in ]0, 1[$ , on écrit  $\rho$  comme combinaison convexe d'états des deux premiers types :

$$\rho = (a+d) \begin{pmatrix} \frac{a}{a+d} & 0 & 0 & \frac{y}{a+d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{y}}{a+d} & 0 & 0 & 1 - \frac{a}{a+d} \end{pmatrix} \\ + (1-(a+d)) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{1-(a+d)} & \frac{x}{1-(a+d)} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{x}}{1-(a+d)} & 1 - \frac{b}{1-(a+d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les étapes 1 et 2 montrent que ces derniers sont des combinaisons convexes d'états de Bell généralisés donc  $\rho$  aussi.  $\square$

---

6. Pour  $a \in \{0, 1\}$ ,  $\rho$  est soit  $|00\rangle\langle 00|$ , soit  $|11\rangle\langle 11|$  donc un état de Bell.

Quelle image peut-on se faire de l'ensemble  $\mathcal{E}_X$  ? C'est un sous-espace de  $\mathcal{E}$  convexe compact à 7 dimensions<sup>7</sup> avec deux sous-espaces de dimensions 3 typiques :

- . L'espace,  $\mathcal{E}_{B\psi}$  des états de Bell généralisés du type  $|\psi\rangle\langle\psi|$  avec  $|\psi\rangle = \alpha|11\rangle + \delta|00\rangle$ .
- . L'espace,  $\mathcal{E}_{B\phi}$  des états de Bell généralisés du type  $|\phi\rangle\langle\phi|$  avec  $|\phi\rangle = \beta|10\rangle + \gamma|01\rangle$ .

Il est à noter que ces derniers ne sont pas des ensembles convexes. La figure 2.1 représente de façon imagée  $\mathcal{E}_X$ .

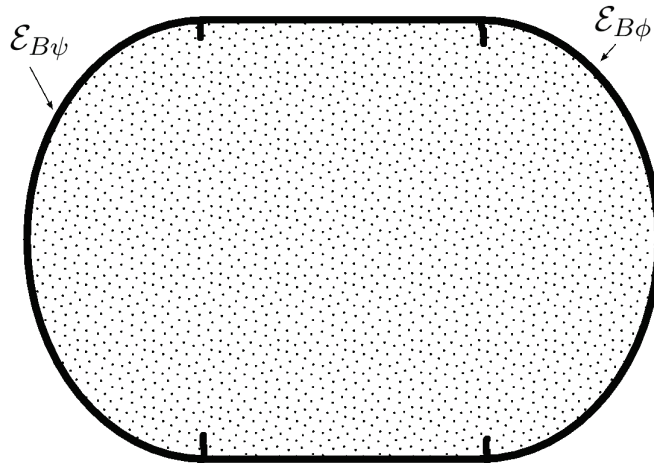


FIGURE 2.1 –  $\mathcal{E}_X$  stylisé où les bords arrondis correspondent à  $\mathcal{E}_{B\psi}$  et  $\mathcal{E}_{B\phi}$ .

## 2.3 Décomposition en états purs produits d'un état séparable de deux qubits.

### 2.3.1 Introduction à la décomposition en états purs produits.

À présent nous allons exploiter la facilité de manipulation des états  $X$  pour trouver des décompositions d'états séparables en états purs produits. On considère toujours un système formé de deux parties notées  $A$  et  $B$  et on rappelle (voir chapitre d'introduction) :

**Definition 2.3.1.** Un état  $\rho$  est **séparable** ssi il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $|\Psi_1\rangle, \dots, |\Psi_n\rangle$  tels que  $|\Psi_k\rangle = |\psi_k\rangle_A \otimes |\phi_k\rangle_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  avec  $\|\psi_k\|_A = \|\phi_k\|_B = 1$  et  $p_1, \dots, p_n$  des réels positifs vérifiant  $p_1 + \dots + p_n = 1$ , tels que :

$$\rho = \sum_{k=1}^n p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|.$$

<sup>7</sup>. Les espaces qu'on considère dans ce chapitre sont clairement tous des sous-variétés de  $\mathbb{R}^{15}$ . On parlera donc toujours de leurs dimensions en tant que sous-variétés réelles.



**Remarque 2.3.1.** Il est trivial de voir qu'il faut au moins  $\text{rg}(\rho)$  états purs produits pour obtenir une décomposition comme dans la définition ci-dessus. On parlera donc de décomposition optimale lorsqu'on obtiendra une décomposition en exactement  $\text{rg}(\rho)$  états purs produits.

Dans le cas général il est difficile de trouver une telle décomposition en états purs produits. Grâce au théorème de Carathéodory, on sait cependant qu'on aura besoin d'au plus de  $(\dim(\mathcal{H}_A) \times \dim(\mathcal{H}_B))^2$  états purs produits (cf. théorème 1 dans [53] de P. Horodecki). En fait on peut remplacer (toujours en utilisant le théorème de Carathéodory) dans la formule précédente  $\dim(\mathcal{H}_i)$  pour  $i = A, B$  par  $\text{rg}(\rho_i)$  où  $\rho_i$  est la trace partielle<sup>8</sup> de  $\rho$  (cf. proposition 2 dans [112] de S. Wu). Dans le même article [112], la proposition 4 donne<sup>9</sup> une estimation plus précise dans le cas où le rang de  $\rho$  est petit. Précisément, elle affirme que si  $\text{rg}(\rho) = 1, 2$  alors il faut exactement  $\text{rg}(\rho)$  états purs produits pour écrire  $\rho$  comme dans la définition ci-dessus, et que si  $\text{rg}(\rho) = 3$  alors il faut exactement  $\text{rg}(\rho)$  ou  $\text{rg}(\rho) + 1$  états purs produits. Dans le cas général, quand  $\text{rg}(\rho) \geq 4$ , la question de trouver une meilleure majoration du nombre d'états purs produits nécessaires pour décomposer  $\rho$  reste ouverte.

Cependant pour un système de deux qubits, on sait par Wootters [111] et Sanpera-Tarrach-Vidal [90] qu'on peut toujours trouver une décomposition avec au plus quatre états purs produits (soit la borne donnée par le théorème de Carathéodory).

Ici on va proposer un résultat plus faible (cf. proposition 2.3.1 et algorithme décrit à la fin de la section 2.3.3) car on ne saura faire la décomposition que pour des états appartenant à un sous ensemble des états séparables de deux qubits, décrit dans les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2. De plus on aura besoin de cinq termes au lieu de quatre. Cependant notre méthode a l'avantage d'être très algorithmique, et peu gourmande en calculs. On renvoie à la section 2.3.6 pour une comparaison des différentes méthodes.

### 2.3.2 Décomposition pour les états de $\mathcal{E}_X$ .

On commence par donner une décomposition pour les états X séparables. Dans la partie suivante on généralisera ce résultat pour un ensemble d'états plus grand.

On note  $\mathcal{E}_{XS}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{E}_X$  formé par les états X séparables (i.e. ceux tels que  $|x|^2 \leq \min(ad, bc)$  et  $|y|^2 \leq \min(ad, bc)$ ). Le résultat suivant est un premier pas vers la décomposition en états purs produits :

---

8. On renvoie au chapitre d'introduction pour la définition de la trace partielle.

9. La preuve de cette proposition repose sur la décomposition de Hughston-Jozsa-Wootters (cf. [55]).

**Lemme 2.3.1.** Soit  $\rho \in \mathcal{E}_{XS}$  s'écrivant dans la base canonique :

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \sqrt{ade}e^{i\theta} \\ 0 & b & \sqrt{ade}e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & \sqrt{ade}e^{-i\varphi} & c & 0 \\ \sqrt{ade}e^{-i\theta} & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

avec  $\theta$  et  $\varphi$  des réels et  $a, b, c, d$  des réels positifs de somme un et tels que  $ad = bc$ .

Alors  $\rho$  se décompose en une somme de deux états purs produits :

$$\rho = \frac{1}{2}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \frac{1}{2}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$$

où  $|\Psi_1\rangle$  et  $|\Psi_2\rangle$  sont les vecteurs normalisés :

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= (\alpha_1|1\rangle + \alpha_0|0\rangle) \otimes (\beta_1|1\rangle + \beta_0|0\rangle) \\ |\Psi_2\rangle &= (\gamma_1|1\rangle + \gamma_0|0\rangle) \otimes (\delta_1|1\rangle + \delta_0|0\rangle) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\gamma_1 = \sqrt{a+be}e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}} \\ \alpha_0 &= \gamma_0 = \sqrt{1-(a+b)} \\ \beta_1 &= -\delta_1 = \sqrt{a+ce}e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} \\ \beta_0 &= \delta_0 = \sqrt{1-(a+c)}. \end{aligned}$$

De plus cette décomposition est optimale dans le sens où elle ne fait intervenir que deux facteurs quand  $\text{rang}(\rho) = 2$ .

□ La preuve consiste juste à effectuer le calcul matriciel dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ . On a :

$$|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 \begin{pmatrix} |\beta_1|^2 & \beta_1\bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1\beta_0 & |\beta_0|^2 \end{pmatrix} & \alpha_1\bar{\alpha}_0 \begin{pmatrix} |\beta_1|^2 & \beta_1\bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1\beta_0 & |\beta_0|^2 \end{pmatrix} \\ \bar{\alpha}_1\alpha_0 \begin{pmatrix} |\beta_1|^2 & \beta_1\bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1\beta_0 & |\beta_0|^2 \end{pmatrix} & |\alpha_0|^2 \begin{pmatrix} |\beta_1|^2 & \beta_1\bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1\beta_0 & |\beta_0|^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

et :

$$|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| = \begin{pmatrix} |\gamma_1|^2 \begin{pmatrix} |\delta_1|^2 & \delta_1\bar{\delta}_0 \\ \bar{\delta}_1\delta_0 & |\delta_0|^2 \end{pmatrix} & \gamma_1\bar{\gamma}_0 \begin{pmatrix} |\delta_1|^2 & \delta_1\bar{\delta}_0 \\ \bar{\delta}_1\delta_0 & |\delta_0|^2 \end{pmatrix} \\ \bar{\gamma}_1\gamma_0 \begin{pmatrix} |\delta_1|^2 & \delta_1\bar{\delta}_0 \\ \bar{\delta}_1\delta_0 & |\delta_0|^2 \end{pmatrix} & |\gamma_0|^2 \begin{pmatrix} |\delta_1|^2 & \delta_1\bar{\delta}_0 \\ \bar{\delta}_1\delta_0 & |\delta_0|^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

On note  $\sigma = \frac{1}{2}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \frac{1}{2}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$  et  $\sigma_{ij}$  ses coefficients quand on l'exprime dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ . On remarque que  $\sigma$  est un état X.

Exprimons à présent les  $\sigma_{ij}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{2}|\alpha_1|^2|\beta_1|^2 + \frac{1}{2}|\gamma_1|^2|\delta_1|^2 = (a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc \\ &= a^2 + a(1 - (a+d)) + bc = a + ad - bc = a\end{aligned}$$

puis de même on trouve :

$$\sigma_{22} = b$$

$$\sigma_{33} = c$$

$$\sigma_{44} = d$$

$$\sigma_{14} = \sqrt{ade}e^{i\theta}$$

$$\sigma_{23} = \sqrt{ade}e^{i\varphi}.$$

Ainsi  $\sigma = \rho$  ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

On peut généraliser ce lemme 2.3.1 en :

**Lemme 2.3.2.** Soit  $\rho \in \mathcal{E}_{XS}$  s'écrivant :

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & c & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

avec  $a, b, c, d, x, y$  comme dans la proposition 2.1.1 mais tels que  $ad = bc$ .

On note  $\arg(x)$  [resp.  $\arg(y)$ ] l'argument de  $x$  [resp.  $y$ ] et on définit

$\begin{cases} \nu_x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } |x| = \cos(\nu_x)\sqrt{ad} \\ \nu_y \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } |y| = \cos(\nu_y)\sqrt{ad} \end{cases}$ . Alors  $\rho$  se décompose en une somme de quatre états purs produits :

$$\rho = \frac{1}{4}|\Psi_{1+}\rangle\langle\Psi_{1+}| + \frac{1}{4}|\Psi_{2+}\rangle\langle\Psi_{2+}| + \frac{1}{4}|\Psi_{1-}\rangle\langle\Psi_{1-}| + \frac{1}{4}|\Psi_{2-}\rangle\langle\Psi_{2-}|$$

où :

$$\begin{aligned}|\Psi_{1\pm}\rangle &= (\alpha_{1\pm}|1\rangle + \alpha_{0\pm}|0\rangle) \otimes (\beta_{1\pm}|1\rangle + \beta_{0\pm}|0\rangle) \\ |\Psi_{2\pm}\rangle &= (\gamma_{1\pm}|1\rangle + \gamma_{0\pm}|0\rangle) \otimes (\delta_{1\pm}|1\rangle + \delta_{0\pm}|0\rangle)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\alpha_{1\pm} &= -\gamma_{1+} = \sqrt{a+b} e^{i\frac{(\arg(y)\pm\nu_y)+(\arg(x)\pm\nu_x)}{2}} \\ \alpha_{0\pm} &= \gamma_{0\pm} = \sqrt{1-(a+b)} \\ \beta_{1\pm} &= -\delta_{1\pm} = \sqrt{a+c} e^{i\frac{(\arg(y)\pm\nu_y)-(\arg(x)\pm\nu_x)}{2}} \\ \beta_{0\pm} &= \delta_{0\pm} = \sqrt{1-(a+c)}\end{aligned}$$

Ici aussi cette décomposition est optimale quand  $\text{rg}(\rho) = 4$  car elle ne fait intervenir que quatre facteurs.

□ Via le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}|\Psi_{1\pm}\rangle\langle\Psi_{1\pm}| + \frac{1}{4}|\Psi_{2\pm}\rangle\langle\Psi_{2\pm}| \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & \sqrt{ad} e^{-i(\arg(x)\pm\nu_x)} & 0 \\ 0 & \sqrt{ad} e^{-i(\arg(y)\pm\nu_y)} & 0 & \sqrt{ad} e^{i(\arg(y)\pm\nu_y)} \\ \sqrt{ad} e^{-i(\arg(y)\pm\nu_y)} & 0 & \sqrt{ad} e^{i(\arg(x)\pm\nu_x)} & 0 \\ & c & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}|\Psi_{1+}\rangle\langle\Psi_{1+}| + \frac{1}{4}|\Psi_{2+}\rangle\langle\Psi_{2+}| + \frac{1}{4}|\Psi_{1-}\rangle\langle\Psi_{1-}| + \frac{1}{4}|\Psi_{2-}\rangle\langle\Psi_{2-}| \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & \cos(\nu_x)\sqrt{ad} e^{-i\arg(x)} & 0 \\ 0 & \cos(\nu_y)\sqrt{ad} e^{-i\arg(y)} & 0 & \cos(\nu_y)\sqrt{ad} e^{i\arg(y)} \\ \cos(\nu_x)\sqrt{ad} e^{-i\arg(x)} & 0 & \cos(\nu_x)\sqrt{ad} e^{i\arg(x)} & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \rho. \end{aligned}$$

□

Grâce à ce lemme nous sommes armés pour présenter le cas général :

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $\rho \in \mathcal{E}_{XS}$  donné par la matrice (2.1) dans la base canonique, alors on sait décomposer  $\rho$  en une combinaison convexe d'au plus cinq états purs produits. Précisément on distingue trois cas :*

*Si  $ad = bc$ , c'est le lemme 2.3.2 qui répond à la question.*

*Si  $ad > bc$ , alors :*

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\lambda}{4}|\Psi_{1+}\rangle\langle\Psi_{1+}| + \frac{\lambda}{4}|\Psi_{2+}\rangle\langle\Psi_{2+}| + \frac{\lambda}{4}|\Psi_{1-}\rangle\langle\Psi_{1-}| + \frac{\lambda}{4}|\Psi_{2-}\rangle\langle\Psi_{2-}| \\ &+ (1-\lambda)|11\rangle\langle 11|, \end{aligned}$$

*avec  $\lambda = 1 - \frac{ad-bc}{d} = b + c + d + \frac{bc}{d}$  et où les  $\Psi_{i\pm}$  sont définis comme dans le lemme 2.3.2 en remplaçant  $a$  par  $\frac{bc}{\lambda d}$ ,  $b$  par  $\frac{b}{\lambda}$ ,  $c$  par  $\frac{c}{\lambda}$ ,  $d$  par  $\frac{d}{\lambda}$ ,  $x$  par  $\frac{x}{\lambda}$*

et  $y$  par  $\frac{y}{\lambda}$ .

Si  $bc > ad$ , alors :

$$\rho = \frac{\lambda}{4} |\Psi_{1+}\rangle\langle\Psi_{1+}| + \frac{\lambda}{4} |\Psi_{2+}\rangle\langle\Psi_{2+}| + \frac{\lambda}{4} |\Psi_{1-}\rangle\langle\Psi_{1-}| + \frac{\lambda}{4} |\Psi_{2-}\rangle\langle\Psi_{2-}| \\ + (1 - \lambda) |10\rangle\langle 10|,$$

avec  $\lambda = 1 - \frac{bc-ad}{d} = a + c + d + \frac{ad}{c}$  et où les  $\Psi_{i\pm}$  sont définis comme dans le lemme 2.3.2 en remplaçant  $a$  par  $\frac{a}{\lambda}$ ,  $b$  par  $\frac{ad}{\lambda c}$ ,  $c$  par  $\frac{c}{\lambda}$ ,  $d$  par  $\frac{d}{\lambda}$ ,  $x$  par  $\frac{x}{\lambda}$  et  $y$  par  $\frac{y}{\lambda}$ .

□ On se place dans le second cas où  $ad > bc$  (le dernier cas se montre de façon similaire). On pose comme indiqué  $\lambda = 1 - \frac{ad-bc}{d} = b + c + d + \frac{bc}{d}$  et :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & b_1 & x_1 & 0 \\ 0 & \bar{x}_1 & c_1 & 0 \\ \bar{y}_1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a_1 = d_1 = \frac{\sqrt{bc}}{\lambda} \\ b_1 = \frac{b}{\lambda} \\ c_1 = \frac{c}{\lambda} \\ x_1 = \frac{x}{\lambda} \\ y_1 = \frac{y}{\lambda} \end{cases}.$$

On remarque que  $\rho_1 \in \mathcal{E}_{XS}$  et que  $a_1 d_1 = b_1 c_1 = \frac{bc}{\lambda^2}$ . En appliquant le lemme 2.3.2 à  $\rho_1$ , on peut l'écrire comme une combinaison convexe de quatre états purs produits :

$$\rho_1 = \frac{1}{4} |\Psi_{1+}\rangle\langle\Psi_{1+}| + \frac{1}{4} |\Psi_{2+}\rangle\langle\Psi_{2+}| + \frac{1}{4} |\Psi_{1-}\rangle\langle\Psi_{1-}| + \frac{1}{4} |\Psi_{2-}\rangle\langle\Psi_{2-}|,$$

où les  $|\Psi_{i\pm}\rangle$  (pour  $i = 1, 2$ ) sont définis dans l'énoncé de la proposition.

Pour conclure la preuve de ce lemme, il suffit de remarquer que  $\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) |11\rangle\langle 11|$ . □

### 2.3.3 Où on généralise le résultat précédent pour une classe d'états plus grande.

Le résultat précédent n'est pas naturel car il est bâti sur un choix de base particulier :  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ . Que se passe-t-il si on se permet des changements de bases locaux ? C'est ce que nous allons voir dans cette partie.

Faire un changement de bases orthonormées local revient à multiplier la matrice densité à gauche par  $U_A \otimes U_B \in U(2) \otimes U(2)$  et à droite par  $U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger$ . On voit qu'on garde en fait la même généralité<sup>10</sup> en conjuguant directement

10. En effet, en notant  $\tilde{U}_j := e^{-i \frac{\arg(\det(U_j))}{2}} U_j \in SU(2)$  pour  $j = A, B$ , alors la conjugaison par  $\tilde{U}_A \otimes \tilde{U}_B \in SU(2) \otimes SU(2)$  est égale à la conjugaison par  $U_A \otimes U_B$ .

par une matrice du groupe  $SU(2) \otimes SU(2)$ . On considère donc l'application  $\mathcal{A}$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{E}_X \times (SU(2) \otimes SU(2)) &\rightarrow \mathcal{E} \\ (\rho_X, U_A \otimes U_B) &\mapsto U_A \otimes U_B \rho_X U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger. \end{aligned}$$

On a ici deux motivations. Primo on aimerait connaître l'image de cette application  $\mathcal{A}$ . Secundo on souhaiterait avoir un algorithme qui nous permette de trouver un antécédent à tout élément de  $\text{Im}(\mathcal{A})$ . Alors on saurait décomposer tout état séparable  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  en une somme d'états purs produits. Cela se fait en deux étapes :

- . (1) on écrit  $\rho = U_A \otimes U_B \rho_X U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger$ ,
- . (2) on décompose  $\rho_X = \sum_{k=1}^n p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|_A \otimes |\phi_k\rangle\langle\phi_k|_B$  grâce à la proposition 2.3.1.

Alors  $\rho = \sum_{k=1}^n p_k |U_A \psi_k\rangle\langle U_A \psi_k|_A \otimes |U_B \phi_k\rangle\langle U_B \phi_k|_B$  est une décomposition de  $\rho$  en états purs produits.

### Une nouvelle paramétrisation des états.

Pour réaliser ce programme, on va utiliser la paramétrisation<sup>11</sup> suivante pour les matrices densités introduites dans [54] par R. Horodecki et M. Horodecki :

#### Definition 2.3.2.

$$\rho = \frac{1}{4} \left[ Id \otimes Id + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b} \cdot Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in [1,3]^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right] \quad (2.5)$$

$\vec{a} = \text{tr}\{(\vec{\sigma} \otimes Id)\rho\}$  et  $\vec{b} = \text{tr}\{(Id \otimes \vec{\sigma})\rho\}$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui représentent respectivement la valeur moyenne, dans l'état  $\rho$ , du spin  $A$  et du spin  $B$  (à un facteur  $\hbar/2$  près).

$C := (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} = (\text{tr}\{(\sigma_i \otimes \sigma_j)\rho\})_{1 \leq i,j \leq 3}$  est une matrice quelconque de  $M_3(\mathbb{R})$  représentant les corrélations, dans l'état  $\rho$ , entre les systèmes  $A$  et  $B$ .

Le membre de droite de l'équation (2.5) est hermitien de trace un. On se demande quand est-ce qu'il représente un état ? Les premiers résultats dans ce sens sont les propositions 1 et 2 de [54] qui donnent une condition nécessaire pour que  $\rho$  défini par (2.5) avec  $C$  diagonale soit un état, précisément c'est :

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $\rho$  un état défini par (2.5) avec  $C$  diagonale. On note  $c_1, c_2$  et  $c_3$  les éléments diagonaux de  $C$ , alors nécessairement le point*

<sup>11</sup>. On utilise la notation classique  $\llbracket n, m \rrbracket$  pour désigner l'ensemble des entiers compris entre  $n$  et  $m$ .

$M$  dans  $\mathbb{R}^3$ , de coordonnées  $(c_1, c_2, c_3)$  dans la base canonique, appartient au tétraèdre dont les quatre sommets ont respectivement pour coordonnées  $(-1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 1)$  et  $(1, 1, -1)$ .

Si on suppose de plus que  $\rho$  est séparable, alors le point  $M$  appartient à l'octaèdre dont les sommets ont respectivement pour coordonnées  $(0, 0, \pm 1)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$  et  $(\pm 1, 0, 0)$ .

□ On prouve cette classique propriété dans l'annexe E. □

Dans le même article [54], l'auteur donne des conditions pour que la réciproque de la proposition précédente soit vraie :

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $\rho$  définie par (2.5) avec  $C$  diagonale et  $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$ . On note  $c_1, c_2$  et  $c_3$  les éléments diagonaux de  $C$ , alors  $\rho$  est un état si et seulement si le point  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$ , de coordonnées  $(c_1, c_2, c_3)$  dans la base canonique, appartient au tétraèdre  $\mathcal{T}$  défini dans la proposition 2.3.2.*

De plus si le point  $M$  appartient à l'octaèdre  $\mathcal{O}$  défini dans la proposition 2.3.2 alors  $\rho$  est un état séparable.

□ On prouve cette propriété en utilisant les états  $X$  dans l'annexe E. □

La proposition suivante, issue de l'article [30] où on a corrigé les inexactitudes, nous donne quant à elle une condition nécessaire et suffisante pour que (2.5) représente bien un état :

**Proposition 2.3.4.** *Avec les notations de la définition précédente, on pose  $K = -[\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b} \cdot Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j]$ , et on définit :*

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(K^2) = 2[(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr}(C^t C))] \\ l_1 &= \frac{1}{3} \text{tr}(K^3) = 8[\det(C) - \vec{a} \cdot C \vec{b}] \\ l_0 &= \frac{1}{4} \text{tr}(K^4) - \frac{1}{8} (\text{tr}(K^2))^2 \\ &= - \left( \frac{l_2}{2} \right)^2 + 4(C^t \vec{a})^2 + 4(C \vec{b})^2 + 4\vec{a}^2 \vec{b}^2 \\ &\quad + 2 \left[ (\text{tr}(C^t C))^2 - \sum_{(i,j,k,l) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^4} c_{ik} c_{il} c_{jk} c_{jl} \right] + 8 [\det(C - \vec{a} \vec{b}^t) - \det(C)]. \end{aligned}$$

Alors  $\rho$  de la définition précédente est positive (et donc est une matrice densité) ssi :

$$l_2 + l_1 + l_0 \leq 1 \tag{2.6}$$

$$2l_2 + l_1 \leq 4 \tag{2.7}$$

$$l_2 \leq 6 \tag{2.8}$$

□ Cette proposition est prouvée dans l'annexe E. □

Soit  $\rho \in \mathcal{E}$  représenté dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  par la matrice  $(\rho_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  ou par  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $C$  avec les notations de la définition ci-dessus. En développant on a les relations suivantes qui relient les deux paramétrisations :

$$\begin{cases} \rho_{11} = \frac{1}{4}[1 + (a_z + b_z) + c_{33}] \\ \rho_{22} = \frac{1}{4}[1 + (a_z - b_z) - c_{33}] \\ \rho_{33} = \frac{1}{4}[1 + (-a_z + b_z) - c_{33}] \\ \rho_{44} = \frac{1}{4}[1 - (a_z + b_z) + c_{33}] \end{cases} \iff \begin{cases} a_z = (\rho_{11} + \rho_{22}) - (\rho_{33} + \rho_{44}) \\ b_z = (\rho_{11} + \rho_{33}) - (\rho_{22} + \rho_{44}) \\ c_{33} = 2(\rho_{11} + \rho_{44}) - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{14} = \frac{1}{4}[(c_{11} - c_{22}) - i(c_{12} + c_{21})] \\ \rho_{23} = \frac{1}{4}[(c_{11} + c_{22}) + i(c_{12} - c_{21})] \end{cases} \iff \begin{cases} c_{11} = 2\Re(\rho_{14} + \rho_{23}) \\ c_{22} = 2\Re(-\rho_{14} + \rho_{23}) \\ c_{12} = 2\Im(-\rho_{14} + \rho_{23}) \\ c_{21} = -2\Im(\rho_{14} + \rho_{23}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{12} = \frac{1}{4}[(b_x - ib_y) + (c_{31} - ic_{32})] \\ \rho_{13} = \frac{1}{4}[(a_x - ia_y) + (c_{13} - ic_{23})] \\ \rho_{24} = \frac{1}{4}[(a_x - ia_y) + (-c_{13} + ic_{23})] \\ \rho_{34} = \frac{1}{4}[(b_x - ib_y) + (-c_{31} + ic_{32})] \end{cases} \iff \begin{cases} a_x = 2\Re(\rho_{13} + \rho_{24}) \\ a_y = -2\Im(\rho_{13} + \rho_{24}) \\ b_x = 2\Re(\rho_{12} + \rho_{34}) \\ b_y = -2\Im(\rho_{12} + \rho_{34}) \\ c_{13} = 2\Re(\rho_{13} - \rho_{24}) \\ c_{31} = 2\Re(\rho_{12} - \rho_{34}) \\ c_{23} = -2\Im(\rho_{13} - \rho_{24}) \\ c_{32} = -2\Im(\rho_{12} - \rho_{34}) \end{cases}$$

Avec cette nouvelle paramétrisation, on caractérise alors les états de  $\mathcal{E}_X$  de la façon suivante :

**Lemme 2.3.3.** *Soit  $\rho \in \mathcal{E}$  paramétré par  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $C$ . Alors  $\rho \in \mathcal{E}_X$  ssi  $\vec{a} \in \text{Vect}(\vec{e}_z)$ ,  $\vec{b} \in \text{Vect}(\vec{e}_z)$  et  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$ .*

□ Il suffit d'utiliser les relations ci-dessus et la caractérisation d'un état de  $\mathcal{E}_X$  c'est-à-dire  $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0$ . □

Pour finir on va donner un corollaire de la proposition 2.3.4 dans le cadre des états X :

**Corollaire 2.3.1.** *Soit  $\rho$  tel que :*

$$\rho = \frac{1}{4} \left[ Id \otimes Id + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b} \cdot Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right],$$



avec  $\vec{a} \in \text{Vect}(\vec{e}_z)$ ,  $\vec{b} \in \text{Vect}(\vec{e}_z)$  et  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$ .

On pose  $\vec{a} = \alpha \vec{e}_z$ ,  $\vec{b} = \beta \vec{e}_z$ ,  $\gamma = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}^2$  et  $C_m = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ . Alors  $\rho \in \mathcal{E}_X$  (i.e.  $\rho$  est positive) ssi les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\gamma + \alpha^2 + \beta^2 \leq 3$$

$$(\gamma + \alpha^2 + \beta^2) + 2c_{33}(\det C_m - \alpha\beta) \leq 1$$

$$\begin{aligned} & (\gamma + \alpha^2 + \beta^2)[2 - (\gamma + \alpha^2 + \beta^2)] + 4c_{33}[(\alpha^2 + \beta^2)c_{33} + 2(\det C_m - \alpha\beta)] \\ & + 4\alpha\beta[\alpha\beta - 2\det C_m] + 4[c_{33}^2(c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{21}^2 + c_{22}^2) + (\det C_m)^2] \leq 1. \end{aligned}$$

□ Il suffit d'appliquer la proposition 2.3.4.□

### Comment agit la conjugaison par des unitaires locaux ?

A présent on souhaite savoir comment se transforment  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $C$  lorsqu'on conjugue une matrice densité par un unitaire local. C'est le but du lemme suivant (cf. [89]) :

**Lemme 2.3.4.** Soit  $\rho$  comme dans la définition 2.3.2.

Pour  $U_j = \cos \frac{\theta_j}{2} Id - i \sin \frac{\theta_j}{2} \vec{n}_j \cdot \vec{\sigma} \in SU(2)$  avec  $j = A, B$ , on pose :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (U_A \otimes U_B) \rho (U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) \\ &= \frac{1}{4} \left[ Id \otimes Id + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b} \cdot Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} \tilde{c}_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right]. \end{aligned}$$

En notant  $O$  la rotation d'axe  $\vec{n}_A$  et d'angle  $\theta_A$  et  $P$  la rotation d'axe  $\vec{n}_B$  et d'angle  $\theta_B$ , on a :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= O\vec{a} \\ \vec{b} &= P\vec{b} \\ \tilde{C} &= OCP^t. \end{aligned}$$

□ Il suffit de se rappeler que  $U_A = \cos \frac{\theta_A}{2} Id - i \sin \frac{\theta_A}{2} \vec{n}_A \cdot \vec{\sigma} = e^{-i \frac{\theta_A}{2} \vec{n}_A \cdot \vec{\sigma}}$  est l'expression dans l'espace des états du spin  $A$  d'une rotation d'axe  $\vec{n}_A$  et d'angle  $\theta_A$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  de représentation du spin  $A$ . Par conséquent  $U_A(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) U_A^\dagger = (O\vec{a}) \cdot \vec{\sigma}$  et de même  $U_B(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) U_B^\dagger = (P\vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$ . □

En particulier pour  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  qu'on paramétrise par  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $C$ , il existe  $U_A \otimes U_B \in SU(2) \otimes SU(2)$  et  $\rho_X \in \mathcal{E}_X$  qu'on paramétrise par  $\vec{a}_X$ ,  $\vec{b}_X$  et  $C_X$  (de la forme donnée par le lemme 2.3.3 et le corollaire 2.3.1) tels que :

$$\rho = (U_A \otimes U_B) \rho_X (U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger).$$

Par le lemme précédent, on sait qu'il existe  $O$  et  $P$  deux rotations de  $SO(3, \mathbb{R})$  qu'on peut écrire en fonction de  $U_A$  et  $U_B$  telles que :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= O\vec{a}_X \\ \vec{b} &= P\vec{b}_X \\ C &= OC_X P^t.\end{aligned}$$

### Où on conclut.

Dans un premier temps on souhaite estimer la "taille" de  $\text{Im}(\mathcal{A})$  ie le nombre de paramètres réels indépendants nécessaires pour la décrire. Comme  $\mathcal{E}_X \times (SU(2) \otimes SU(2))$  est un espace à  $7 + 3 + 3 = 13$  paramètres, on sait déjà que ce nombre sera inférieur à 13. Mais plus précisément on a :

**Théorème 2.3.1.**  *$\text{Im}(\mathcal{A})$  est une sous-variété réelle de  $\mathbb{R}^{15}$  de dimension 11.*

*Démonstration :* Tout d'abord  $\text{Im}(\mathcal{A})$  est une sous-variété réelle de  $\mathbb{R}^{15}$  car c'est par définition l'image par l'application différentiable  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{E}_X \times (SU(2) \otimes SU(2))$  qui est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{15}$  car localement difféomorphe à  $\mathbb{R}^{13}$ .

Pour calculer la dimension de  $\text{Im}(\mathcal{A})$ , on pense évidemment à calculer le rang de la différentielle, en un point, de l'application  $\mathcal{A}$ . Cependant cette méthode directe se révèle trop calculatoire. Aussi nous allons utiliser la représentation donnée dans la définition 2.3.2. On rappelle (cf. lemme 2.3.3) que

si  $\rho_X \in \mathcal{E}_X$ , alors il est paramétré par  $\alpha\vec{e}_z$ ,  $\beta\vec{e}_z$  et  $C^X = \begin{pmatrix} c_{11}^X & c_{12}^X & 0 \\ c_{21}^X & c_{22}^X & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^X \end{pmatrix}$ .

Dans cette paramétrisation, par le lemme 2.3.4, la conjugaison de  $\rho$  par un élément de  $SU(2) \otimes SU(2)$  est remplacée par l'action de deux matrices de rotation  $O$  et  $P$  de  $SO(3, \mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= O(\alpha\vec{e}_z) \\ \vec{b} &= P(\beta\vec{e}_z) \\ C &= OC^X P^t.\end{aligned}$$

Enfin on va paramétriser les matrices de rotations de  $SO(3, \mathbb{R})$  par les angles d'Euler, c'est-à-dire que pour  $O \in SO(3, \mathbb{R})$ , on associe trois angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  et on note  $O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3}$  tels que :

$$O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} = R_z(\theta_1)R_x(\theta_2)R_z(\theta_3) \text{ avec dans la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ainsi au lieu de calculer le rang de la différentielle en un point de  $\mathcal{A}$ , on va établir celui de la différentielle en un point de l'application  $f$  (analogue de l'application  $\mathcal{A}$  dans la nouvelle représentation) définie<sup>12</sup> par :

$$f : \mathbb{R}^{13} \rightarrow \mathbb{R}^{15}$$

$$(\alpha, \beta, C^X, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mapsto (\alpha O_{\theta_1 \theta_2, \theta_3} \vec{e}_z, \beta P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3} \vec{e}_z, O_{\theta_1 \theta_2, \theta_3} C^X P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t).$$

Sa matrice jacobienne en un point,  $\text{jac}(f)_{\alpha, \beta, C^X, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}$  est de taille  $15 \times 13$ . Pour calculer le rang de cette matrice, on cherche son noyau, qu'on note pour simplifier  $\ker(\text{jac}(f))$ . Enfin on suppose que le point en lequel on calcule  $\text{jac}(f)$  n'est pas particulier. On verra par la suite que cela revient à considérer que  $\alpha, \beta, \sin(\theta_2)$  et  $\sin(\varphi_2)$  sont non nuls.

Soit  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 13} \in \ker(\text{jac}(f))$  alors on a nécessairement en considérant les trois premières lignes du jacobien :

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha O_{\theta_1 \theta_2, \theta_3} \vec{e}_z) + \lambda_8 \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\alpha O_{\theta_1 \theta_2, \theta_3} \vec{e}_z) + \lambda_9 \frac{\partial}{\partial \theta_2} (\alpha O_{\theta_1 \theta_2, \theta_3} \vec{e}_z) + \lambda_{10} \frac{\partial}{\partial \theta_3} (\alpha O_{\theta_1 \theta_2, \theta_3} \vec{e}_z) = \vec{0},$$

soit :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ -\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) \end{pmatrix} + \alpha \lambda_8 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \lambda_9 \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ -\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) & \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ -\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) & 0 & -\sin(\theta_2) \end{pmatrix}$  est  $-\sin(\theta_2)$ . On a justement supposé que  $\sin(\theta_2) \neq 0$ , alors on a :

$$\lambda_1 = \alpha \lambda_8 = \alpha \lambda_9 = 0.$$

Toujours en supposant que le point n'est pas particulier,  $\alpha \neq 0$ , et alors :

$$\lambda_1 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0. \tag{2.9}$$

---

12. On fera toujours les identifications des espaces de matrices de taille  $n \times m$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $\mathbb{R}^{nm}$  grâce à la base canonique de  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ .

Et de même en calculant les lignes 4, 5 et 6 de  $\text{jac}(f)$ , on montre comme  $\sin(\varphi_2) \neq 0$  et  $\beta \neq 0$  que

$$\lambda_2 = \lambda_{11} = \lambda_{12} = 0. \quad (2.10)$$

Ainsi il n'est pas utile de calculer les colonnes 1, 2, 8, 9, 11 et 12 de  $\text{jac}(f)$  pour calculer son noyau et  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 13} \in \ker(\text{jac}(f))$  ssi les conditions (2.9) et (2.10) sont satisfaites et en notant  $(\epsilon_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ , la base canonique de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} & \lambda_3 O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \epsilon_{11} P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t + \lambda_4 O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \epsilon_{12} P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t + \lambda_5 O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \epsilon_{21} P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t \\ & + \lambda_6 O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \epsilon_{22} P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t + \lambda_7 O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \epsilon_{33} P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t \\ & + \lambda_{10} O_{\theta_1, \theta_2, 0} \begin{pmatrix} \cos(\theta_3 + \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta_3 + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\theta_3 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta_3 + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^X P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t \\ & + \lambda_{13} O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} C^X \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}) & \cos(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{\varphi_1, \varphi_2, 0}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit en multipliant à gauche par  $(O_{\theta_1, \theta_2, \theta_3})^{-1}$  et à droite par  $(P_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}^t)^{-1}$  :

$$\begin{aligned} & \lambda_3 \epsilon_{11} + \lambda_4 \epsilon_{12} + \lambda_5 \epsilon_{21} + \lambda_6 \epsilon_{22} + \lambda_7 \epsilon_{33} \\ & + \lambda_{10} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^X + \lambda_{13} C^X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ soit :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 - \lambda_{10} c_{21}^X - \lambda_{13} c_{12}^X &= 0 \\ \lambda_4 - \lambda_{10} c_{22}^X + \lambda_{13} c_{11}^X &= 0 \\ \lambda_5 + \lambda_{10} c_{11}^X - \lambda_{13} c_{22}^X &= 0 \\ \lambda_6 + \lambda_{10} c_{12}^X + \lambda_{13} c_{21}^X &= 0 \\ \lambda_7 &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les conditions (2.9), (2.10) et (2.11) nous permettent de conclure que  $\ker(\text{jac}(f))$  est un espace vectoriel réel de dimension 2. Par le théorème du rang, on a  $\text{rg}(\text{jac}(f)) = 13 - 2 = 11$ , ce qui clôt cette démonstration.  $\square$

Nous sommes soumis au problème pratique suivant. Soit  $\rho \in \mathcal{E}$ , comment savoir si  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  ?

**Théorème 2.3.2.** *Soit  $\rho \in \mathcal{E}$  paramétrisé par  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $C$  comme dans la définition 2.3.2.*

Si  $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$ , alors on pose  $\begin{cases} \vec{a}_X = \|\vec{a}\| \vec{e}_z \\ \vec{b}_X = \|\vec{b}\| \vec{e}_z \end{cases}$  et  $O$  [resp.  $P$ ], la rotation d'axe  $\vec{a}_X \wedge \vec{a}$  [resp.  $\vec{b}_X \wedge \vec{b}$ ] qui envoie  $\vec{a}_X$  sur  $\vec{a}$  [resp.  $\vec{b}_X$  sur  $\vec{b}$ ] (si ces deux

vecteurs sont colinéaires on pose  $O = Id$  [resp.  $P = Id$ ]). Alors  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$

ssi  $O^t C P$  est de la forme  $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ .

Si  $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$  (le cas où  $\begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$  se traite de la même façon), alors on pose  $\begin{cases} \vec{a}_X = \|\vec{a}\| \vec{e}_z \\ \vec{b}_X = \vec{0} \end{cases}$ .

Puis on choisit  $O$  comme la rotation d'axe  $\vec{a}_X \wedge \vec{a}$  qui envoie  $\vec{a}_X$  sur  $\vec{a}$  (si ces deux vecteurs sont colinéaires on pose  $O = Id$ ). On écrit en lignes

$\begin{pmatrix} \vec{m}_1^t \\ \vec{m}_2^t \\ \vec{m}_3^t \end{pmatrix} := O^t C$ . Alors  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  ssi  $\vec{m}_3 \in (\text{Vect}(\vec{m}_1, \vec{m}_2))^\perp$ .

Si  $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$  alors  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  quelle que soit la matrice  $C$ .

*Démonstration* : Commençons par le cas le plus facile, où  $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$ . On pose nécessairement  $\vec{a}_X = \vec{b}_X = \vec{0}$ . Puis en effectuant une décomposition en valeurs singulières de  $C$ , on peut toujours trouver  $O$  et  $P$  dans  $SO(3, \mathbb{R})$

telles que  $C = O \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} P^t$ .

Si  $\vec{a} \neq \vec{0}$  et  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , alors  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  ssi il existe  $O$  et  $P$  dans  $SO(3, \mathbb{R})$

telles que  $\vec{a} = O\vec{a}_X$ ,  $\vec{b} = P\vec{b}_X$  et  $O^t C P$  est de la forme  $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$  où  $\vec{a}_X$

et  $\vec{b}_X$  sont définis dans le théorème. Les conditions  $\vec{a} = O\vec{a}_X$  et  $\vec{b} = P\vec{b}_X$  laissent a priori un degré de liberté dans le choix de  $O$  et un autre pour  $P$ , mais c'est le lemme suivant qui nous apprend qu'on peut en fait les fixer :

**Lemme 2.3.5.** *Avec les mêmes notations, on définit :*

$\mathcal{O} := \{O \in SO(3, \mathbb{R}) \text{ telle que } O(\vec{a}_X) = \vec{a}\},$

$\mathcal{P} := \{P \in SO(3, \mathbb{R}) \text{ telle que } P(\vec{b}_X) = \vec{b}\}$  et

$\mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X} := \{C^X = (c^X_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \text{ telle que}$

$\rho_X = \frac{1}{4} [Id \otimes Id + \vec{a}_X \cdot \vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b}_X \cdot Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in [1,3]^2} c^X_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j] \in \mathcal{E}_X\}$ .

Alors pour  $O, \tilde{O} \in \mathcal{O}$ ,  $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}$  et  $C^X \in \mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X}$ , il existe  $\tilde{C}^X \in \mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X}$  tel que :

$$\tilde{O} C^X \tilde{P}^t = O \tilde{C}^X P^t.$$

□ On commence par remarquer que :

$$\begin{aligned}\tilde{O}C^X\tilde{P}^t &= (OO^t)\tilde{O}C^X\tilde{P}^t(PP^t) \\ &= O(O^t\tilde{O})C^X(P^t\tilde{P})^tP^t.\end{aligned}$$

Mais  $O$  [resp.  $P$ ] et  $\tilde{O}$  [resp.  $\tilde{P}$ ] sont deux rotations de  $SO(3, \mathbb{R})$  qui envoient  $\vec{e}_z$  sur le même vecteur  $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$  [resp.  $\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ ]. Alors  $O^t\tilde{O}$  [resp.  $P^t\tilde{P}$ ] est une rotation qui fixe  $\vec{e}_z$ . En particulier elle est de la forme :

$$O^t\tilde{O} = \begin{pmatrix} R_O & \vec{0}^t \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \quad \left[ \text{resp } P^t\tilde{P} = \begin{pmatrix} R_P & \vec{0}^t \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \right],$$

où  $R_O$  [resp.  $R_P$ ] sont des rotations du plan. D'après le lemme 2.3.3, si  $C^X \in \mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X}$ , alors elle est de la forme  $C^X = \begin{pmatrix} C_m^X & 0 \\ \vec{0}^t & c_{33}^X \end{pmatrix}$  et on a :

$$\tilde{C}^X := (O^t\tilde{O})C^X(P^t\tilde{P})^t = \begin{pmatrix} R_OC_m^XR_P^t & 0 \\ \vec{0}^t & c_{33}^X \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a bien la forme voulue pour être dans  $\mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X}$ . Enfin pour montrer que  $\tilde{C}^X$  appartient bien à  $\mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X}$ , on utilise le corollaire 2.3.1. Tout d'abord  $\det(R_OC_m^XR_P^t) = \det(C_m^X)$ ,  $\gamma_{\tilde{C}^X} = \gamma_{C^X}$  où  $\gamma$  est définie dans le corollaire 2.3.1 (car  $\gamma_C$  est le carré de la norme l2 de  $C$  qui ne change pas quand on multiplie par des matrices de rotations) et enfin  $\sum_{i,j=1}^2 (c_{ij}^X)^2 = \sum_{i,j=1}^2 (\tilde{c}_{ij}^X)^2$  (par le même argument que précédemment). Ainsi d'après le corollaire 2.3.1, on peut affirmer que  $\tilde{C}^X \in \mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X}$ . □

Si  $\vec{a} \neq \vec{0}$  et  $\vec{b} = \vec{0}$  (le cas  $\vec{a} = \vec{0}$  et  $\vec{b} = \vec{0}$  se traite de façon similaire), on pose nécessairement  $\vec{b}_X = \vec{0}$ . De même que dans le cas précédent,  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  ssi il existe  $O$  et  $P$  dans  $SO(3, \mathbb{R})$  telles que  $\vec{a} = O\vec{a}_X$

et  $O^tCP$  sont de la forme  $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ . De même que précédemment, grâce

au lemme 2.3.5, on peut incorporer le degré de liberté laissé par la condition  $\vec{a} = O\vec{a}_X$  dans le choix de  $C^X$ . On fixe donc  $O$  comme indiqué dans le théorème et  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  ssi il existe  $P \in SO(3, \mathbb{R})$  qu'on écrit en colonnes

$P := (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  telle que  $\begin{pmatrix} \vec{m}_1^t \\ \vec{m}_2^t \\ \vec{m}_3^t \end{pmatrix} := O^tCP \in \mathcal{C}_X^{\vec{a}_X, \vec{b}_X}$ , c'est-à-dire que les  $\vec{p}_i$

doivent vérifier  $\begin{cases} \vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \vec{m}_3^\perp \\ \vec{p}_3 \in (\text{Vect}(\vec{m}_1, \vec{m}_2))^\perp \end{cases}$ . Comme  $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  est une base orthonormée, nécessairement  $\vec{m}_3 \in (\text{Vect}(\vec{m}_1, \vec{m}_2))^\perp$ . Et réciproquement si

$\vec{m}_3 \in (\text{Vect}(\vec{m}_1, \vec{m}_2))^\perp$  alors on est assuré de trouver un  $P$  qui convient. Ce qui conclut la démonstration de ce théorème.  $\square$

La démonstration précédente nous fournit même un algorithme permettant, étant donné  $\rho \in \text{Im}(\mathcal{A})$  de trouver  $\rho_X \in \mathcal{E}_X$  et  $U_A \otimes U_B \in SU(2) \otimes SU(2)$  tels que :

$$\rho = (U_A \otimes U_B) \rho_X (U_A \otimes U_B)^\dagger,$$

qu'on résume ici :

- (1) Calculer la représentation  $(\vec{a}, \vec{b}, C)$  de  $\rho$  donnée par la définition 2.3.2.
- (2) Calculer les rotations  $O$  (d'axe  $\vec{n}_A$  et d'angle  $\theta_A$ ) et  $P$  (d'axe  $\vec{n}_B$  et d'angle  $\theta_B$ ), les vecteurs  $\vec{a}_X, \vec{b}_X$  et la matrice  $C^X := O^t C P$  grâce au théorème précédent.
- (3) Calculer dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ , la matrice  $\rho_X$  paramétrée par  $(\vec{a}_X, \vec{b}_X, C^X)$ .
- (4) Calculer dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ , la matrice  $U_A \otimes U_B := e^{-i\frac{\theta_A}{2}\vec{n}_A \cdot \vec{\sigma}_A} \otimes e^{-i\frac{\theta_B}{2}\vec{n}_B \cdot \vec{\sigma}_B}$ .

Si  $\rho \in \mathcal{A}$  est séparable, on poursuit l'algorithme en décomposant  $\rho_X \in \mathcal{E}_{XS}$  en une combinaison convexe de (cinq) états purs produits par la proposition 2.3.1 :

$$\rho_X = \sum_{i=1}^5 p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|$$

Puis on calcule  $|\Phi_i\rangle = (U_A \otimes U_B) |\Psi_i\rangle$ , alors une décomposition de  $\rho$  en une somme de (cinq) états purs produits est :

$$\rho = \sum_{i=1}^5 p_i |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i|$$

### Traitement d'un exemple.

Une mise en pratique s'avère souvent éclairante. Appliquons donc ici la méthode sur l'exemple suivant :

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.275 & 0.047 + 0.093i & 0.038 - 0.074i & 0.029 - 0.045i \\ 0.047 - 0.093i & 0.260 & 0.033 + 0.098i & -0.003 + 0.074i \\ 0.038 + 0.074i & 0.033 - 0.098i & 0.258 & 0.044 - 0.068i \\ 0.029 + 0.045i & -0.003 - 0.074i & 0.044 + 0.068i & 0.207 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle paramétrisation on a<sup>13</sup> :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left( \frac{1}{\sqrt{200}}, 0, \frac{1}{\sqrt{200}} \right) \\ \vec{b} &\simeq (0.182, -0.049, 0.067) \\ C &\simeq \begin{pmatrix} 0.124 & 0.287 & 0.083 \\ -0.106 & 0.009 & 0.298 \\ 0.005 & -0.322 & -0.036 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On est dans le premier cas d'application du théorème 2.3.2. On pose donc  $\vec{a}_X = (0, 0, \|\vec{a}\|) = (0, 0, 0.1)$ . Ensuite on cherche une rotation  $O$  telle que  $O(\vec{a}_X) = \vec{a}$ . Il est facile de voir que la rotation d'axe  $\vec{e}_y$  et d'angle  $\pi/4$  convient. Sa matrice représentative dans la base canonique est :

$$O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ensuite on pose  $\vec{b}_X = (0, 0, \|\vec{b}\|) = (0, 0, 0.2)$ . De même, on cherche une rotation  $P$  telle que  $P(\vec{b}_X) = \vec{b}$ . On choisit le vecteur  $\vec{f}_1 := \frac{1}{\|\vec{b}\|}\vec{e}_z \times \vec{b}$  comme axe de cette rotation. Puis on pose  $\vec{f}_2 := \vec{e}_z$  et  $\vec{f}_3 := \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ , de sorte que  $P(\vec{f}_1) = \vec{f}_1$ ,  $P(\vec{f}_2) = \vec{f}_3$ . On trouve ensuite facilement  $P(\vec{f}_3) \simeq -\vec{f}_2 + 0.667\vec{f}_3$ . Dans la base  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ , on a :

$$\text{Mat}(P)_{(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0.667 \end{pmatrix}.$$

Pour connaître la matrice représentative de  $P$  dans la base canonique on a besoin de la matrice de passage de la base canonique vers la base  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . C'est :

$$\text{Pass}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rightarrow (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)} \simeq \begin{pmatrix} 0.260 & 0 & 0.911 \\ 0.966 & 0 & -0.244 \\ 0 & 1 & 0.333 \end{pmatrix}.$$

Pour ne pas alourdir, la notation, on note abusivement  $P$  la matrice représentative de  $P$  dans la base canonique, et on a finalement :

$$\begin{aligned}P &= \text{Pass}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rightarrow (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)} \text{Mat}(P)_{(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)} \text{Pass}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rightarrow (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)}^{-1} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 0.378 & 0.167 & 0.911 \\ 0.166 & 0.955 & -0.244 \\ -0.910 & 0.245 & 0.333 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

---

13. On arrondit tous les résultats à  $10^{-3}$  près dans le traitement de cet exemple sauf si les résultats sont exacts.



En poursuivant l'algorithme, on pose :

$$C_X = O^t C P \simeq \begin{pmatrix} 0.027 & 0.446 & 0 \\ -0.310 & 0.064 & 0 \\ 0 & 0 & 0.100 \end{pmatrix}.$$

Alors l'état  $\rho_X$  paramétré par  $\vec{a}_X, \vec{b}_X$  et  $C_X$  s'écrit dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  :

$$\rho_X = \begin{pmatrix} 0.350 & 0 & 0 & -0.009 - 0.034i \\ 0 & 0.200 & 0.023 + 0.189i & 0 \\ 0 & 0.023 - 0.189i & 0.250 & 0 \\ -0.009 + 0.034i & 0 & 0 & 0.200 \end{pmatrix}.$$

On va alors appliquer la proposition 2.3.1 à cet état. Avec les mêmes notations que dans la proposition 2.3.1, on a :

$$ad = 0.070 > bc = 0.050$$

On est dans le second cas traité par la proposition 2.3.1. On pose donc  $\lambda = 1 - \frac{ad-bc}{d} = 0.9$  et :

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & b_1 & x_1 & 0 \\ 0 & \bar{x}_1 & c_1 & 0 \\ \bar{y}_1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{bc}{\lambda d} & 0 & 0 & \frac{y}{\lambda} \\ 0 & \frac{b}{\lambda} & \frac{x}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{x}}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} & 0 \\ \frac{\bar{y}}{\lambda} & 0 & 0 & \frac{d}{\lambda} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.278 & 0 & 0 & -0.010 - 0.038i \\ 0 & 0.222 & 0.025 + 0.021i & 0 \\ 0 & 0.025 - 0.021i & 0.278 & 0 \\ -0.010 + 0.038i & 0 & 0 & 0.222 \end{pmatrix}.$$

On applique ensuite le lemme 2.3.2 à  $\rho_1$ .

On commence donc par chercher  $\nu_{x_1} \in [0, \pi/2]$  tel que  $|x_1| = \cos(\nu_{x_1})\sqrt{a_1 d_1}$ , soit  $\cos(\nu_{x_1}) \simeq 0.851$ , d'où  $\nu_{x_1} \simeq 0.552$ . De même on trouve  $\nu_{y_1} \simeq 1.412$ . Enfin on a besoin de calculer les arguments de  $x_1$  et  $y_1$ . C'est respectivement  $\arg x_1 \simeq \arctan \frac{0.210}{0.025} \simeq 1.452$  et  $\arg y_1 = \pi + \arctan \frac{0.038}{0.010} \simeq 4.455$ . Alors avec les fomules données dans le lemme 2.3.2, on pose :

$$\begin{aligned} |\Psi_{1+}\rangle &= (\alpha_{1+}|1\rangle + \alpha_{0+}|0\rangle) \otimes (\beta_{1+}|1\rangle + \beta_{0+}|0\rangle) \\ |\Psi_{2+}\rangle &= (\gamma_{1+}|1\rangle + \gamma_{0+}|0\rangle) \otimes (\delta_{1+}|1\rangle + \delta_{0+}|0\rangle) \\ |\Psi_{1-}\rangle &= (\alpha_{1-}|1\rangle + \alpha_{0-}|0\rangle) \otimes (\beta_{1-}|1\rangle + \beta_{0-}|0\rangle) \\ |\Psi_{2-}\rangle &= (\gamma_{1-}|1\rangle + \gamma_{0-}|0\rangle) \otimes (\delta_{1-}|1\rangle + \delta_{0-}|0\rangle) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\alpha_{1+} &= -\gamma_{1+} \simeq 0.707e^{3.935i} \\
\alpha_{0\pm} &= \gamma_{0\pm} \simeq 0.707 \\
\beta_{1+} &= -\delta_{1+} \simeq 0.745e^{1.931i} \\
\beta_{0\pm} &= \delta_{0\pm} \simeq 0.667 \\
\alpha_{1-} &= -\gamma_{1-} \simeq 0.707e^{1.971i} \\
\beta_{1-} &= -\delta_{1-} \simeq 0.745e^{1.071i}.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.3.2 on a :

$$\rho_1 = \frac{1}{4}|\Psi_{1+}\rangle\langle\Psi_{1+}| + \frac{1}{4}|\Psi_{2+}\rangle\langle\Psi_{2+}| + \frac{1}{4}|\Psi_{1-}\rangle\langle\Psi_{1-}| + \frac{1}{4}|\Psi_{2-}\rangle\langle\Psi_{2-}|,$$

puis :

$$\begin{aligned}
\rho_X &= \frac{0.9}{4}|\Psi_{1+}\rangle\langle\Psi_{1+}| + \frac{0.9}{4}|\Psi_{2+}\rangle\langle\Psi_{2+}| \\
&\quad + \frac{0.9}{4}|\Psi_{1-}\rangle\langle\Psi_{1-}| + \frac{0.9}{4}|\Psi_{2-}\rangle\langle\Psi_{2-}| + 0.1|11\rangle\langle 11|.
\end{aligned}$$

Pour avoir une décomposition de  $\rho$  en une somme d'états purs produits, il suffit de calculer les matrices  $U_A$  et  $U_B$  qui correspondent respectivement, dans l'espace des états, aux rotations  $O$  et  $P$  dans l'espace physique. En notant  $\theta_O$ , l'angle de la rotation  $O$  et  $\vec{n}_O$  son axe, on a donc :

$$U_A = \cos\left(\frac{\theta_O}{2}\right)\text{Id} - i\sin\left(\frac{\theta_O}{2}\right)\vec{n}_O \cdot \vec{\sigma} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\text{Id} - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sigma_y,$$

soit dans la base  $(|1\rangle, |0\rangle)$  :

$$U_A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{pmatrix}.$$

De même on obtient :

$$U_B \simeq 0.816\text{Id} - 0.150i\sigma_x - 0.557i\sigma_y,$$

soit dans la base  $(|1\rangle, |0\rangle)$  :

$$U_B \simeq \begin{pmatrix} 0.816 & -0.557 - 0.150i \\ 0.557 - 0.150i & 0.816 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\rho = (U_A \otimes U_B)\rho_X(U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)$ , on a :

$$\begin{aligned}
\rho_X &= \frac{0.9}{4}|\Phi_{1+}\rangle\langle\Phi_{1+}| + \frac{0.9}{4}|\Phi_{2+}\rangle\langle\Phi_{2+}| \\
&\quad + \frac{0.9}{4}|\Phi_{1-}\rangle\langle\Phi_{1-}| + \frac{0.9}{4}|\Phi_{2-}\rangle\langle\Phi_{2-}| + 0.1|\varphi\rangle\langle\varphi|
\end{aligned}$$

avec  $|\Phi_{i\pm}\rangle = (U_A \otimes U_B)|\Psi_{i\pm}\rangle$  et  $|\varphi\rangle = (U_A \otimes U_B)|11\rangle$ . Soit :

$$\begin{aligned}
|\Phi_{1+}\rangle &\simeq [(-0.729 - 0.466i)|1\rangle + (0.463 - 0.193i)|0\rangle] \\
&\quad \otimes [(-0.586 + 0.469i)|1\rangle + (0.502 + 0.428i)|0\rangle] \\
|\Phi_{2+}\rangle &\simeq [(0.188 + 0.466i)|1\rangle + (0.843 + 0.193i)|0\rangle] \\
&\quad \otimes [(-0.157 - 0.669i)|1\rangle + (0.586 - 0.428i)|0\rangle] \\
|\Phi_{1-}\rangle &\simeq [(-0.525 + 0.602i)|1\rangle + (0.548 + 0.249i)|0\rangle] \\
&\quad \otimes [(-0.080 + 0.434i)|1\rangle + (0.841 + 0.311i)|0\rangle] \\
|\Phi_{2-}\rangle &\simeq [(-0.016 - 0.602i)|1\rangle + (0.759 - 0.249i)|0\rangle] \\
&\quad \otimes [(-0.663 - 0.634i)|1\rangle + (0.247 - 0.311i)|0\rangle] \\
|\varphi\rangle &\simeq [\cos(\pi/8)|1\rangle + \sin(\pi/8)|0\rangle] \\
&\quad \otimes [0.816|1\rangle + (0.557 - 0.150i)|0\rangle].
\end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned}
|\Phi_{1+}\rangle &\simeq (0.646 - 0.069i)|11\rangle + (-0.167 - 0.546i)|10\rangle \\
&\quad + (-0.181 + 0.330i)|01\rangle + (0.315 + 0.101i)|00\rangle \\
|\Phi_{2+}\rangle &\simeq (0.282 - 0.199i)|11\rangle + (0.310 + 0.193i)|10\rangle \\
&\quad + (-0.003 - 0.594i)|01\rangle + (0.577 - 0.248i)|00\rangle \\
|\Phi_{1-}\rangle &\simeq (-0.219 - 0.276i)|11\rangle + (-0.629 + 0.343i)|10\rangle \\
&\quad + (-0.152 + 0.218i)|01\rangle + (0.383 + 0.380i)|00\rangle \\
|\Phi_{2-}\rangle &\simeq (-0.376 + 0.409i)|11\rangle + (-0.191 - 0.144i)|10\rangle \\
&\quad + (-0.663 - 0.323i)|01\rangle + (0.110 - 0.298i)|00\rangle \\
|\varphi\rangle &\simeq 0.754|11\rangle + (0.515 - 0.139i)|10\rangle \\
&\quad + 0.312|01\rangle + (0.213 - 0.057i)|00\rangle.
\end{aligned}$$

### 2.3.4 Méthode de Sanpera, Tarrach et Vidal pour décomposer les états séparables en états purs produits.

Comme indiqué dans l'introduction à la décomposition en états purs produits, dans [90] les auteurs proposent une stratégie pour décomposer n'importe quel état séparable de deux qubits en une somme d'au plus quatre états purs produits. On propose de donner les grandes lignes de leur démarche puis d'appliquer leur méthode sur l'exemple précédemment traité par notre algorithme.

#### Présentation générale de la méthode.

Les auteurs de [90] se basent sur le critère d'intrication de Peres-Horodecki exposé dans [81, 52] qui affirme qu'une matrice densité  $\rho$  représentant un état

d'un système de deux qubits<sup>14</sup> est séparable si et seulement si sa transposée partielle, par exemple par rapport au qubit  $B$  dans la base<sup>15</sup>  $(|b_1\rangle, |b_2\rangle)$ ,  $\rho^{tB}$  est positive<sup>16</sup>. On rappelle que si

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}, \quad \text{où } p_i \in [0, 1] \text{ et } \sum_i p_i = 1$$

et qu'on se fixe une base  $(|b_1\rangle, |b_2\rangle)$  du qubit  $B$ , alors la transposée partielle  $\rho^{tB}$  (par rapport à cette base) est :

$$\rho^{tB} = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}^t.$$

où  $\rho_{Bi}^t$  est la transposée de la matrice représentant  $\rho_{Bi}$  dans la base  $(|b_1\rangle, |b_2\rangle)$ .

On se fixe pour commencer une base  $(|a_1\rangle, |a_2\rangle)$  du qubit  $A$  et une base  $(|b_1\rangle, |b_2\rangle)$  du qubit  $B$ . On va supposer que  $\text{rg}(\rho) = \text{rg}(\rho^{tB}) = 4$  (les autres cas sont plus faciles) et évidemment que  $\rho \geq 0$  et  $\rho^{tB} \geq 0$  (condition de séparabilité de Peres-Horodecki). On choisit un état pur produit quelconque  $|e_1 f_1\rangle = |e_1\rangle \otimes |f_1\rangle$  de  $\mathbb{C}^4$  et on pose pour  $p \in ]0, 1[$  :

$$\rho(p) = \frac{1}{1-p} [\rho - p |e_1 f_1\rangle \langle e_1 f_1|],$$

$$\rho(p)^{tB} = \frac{1}{1-p} [\rho^{tB} - p |e_1 \bar{f}_1\rangle \langle e_1 \bar{f}_1|].$$

La notation  $|\bar{f}_1\rangle$  signifie qu'on prend le vecteur colonne conjugué de  $|f_1\rangle$  qui a été écrit dans la base  $(|a_1\rangle, |a_2\rangle)$ .  $|e_1 \bar{f}_1\rangle \langle e_1 \bar{f}_1|$  est donc bien la transposée partielle par rapport au qubit  $B$  de  $|e_1 f_1\rangle \langle e_1 f_1|$ . Comme les rangs de  $\rho$  et de  $\rho^{tB}$  sont maximaux leurs valeurs propres sont strictement positives. De plus  $\rho$  et de  $\rho^{tB}$  étant de trace un, leurs valeurs propres sont strictement inférieures à un, de sorte que l'on a  $\rho < 1$  et  $\rho^{tB} < 1$ . On cherche alors le plus petit  $p \in ]0, 1[$  tel que  $\rho(p)$  ou  $\rho(p)^{tB}$  admettent une valeur propre nulle. On est assuré de trouver un tel  $p$  en vertu de l'argument suivant.

Pour tout  $|\chi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  :

$$\begin{aligned} \langle \chi | (1-p)\rho(p) | \chi \rangle &= \langle \chi | \rho | \chi \rangle - p |\langle \chi | e_1 f_1 \rangle|^2 \\ &< 1 - p |\langle \chi | e_1 f_1 \rangle|^2 \end{aligned}$$

14. Ce critère est également valable pour un système composé d'un qubit et d'un qutrit. En dimensions supérieures, c'est simplement une condition nécessaire d'intrication.

15. Pour alléger la notation, on ne mentionne pas la base  $(|b_1\rangle, |b_2\rangle)$ .

16. Ou de manière équivalente si sa transposée partielle par rapport au qubit  $A$ ,  $\rho^{tA}$  est positive.

car  $\rho < 1$ .

Si on note  $\lambda(p)$  la plus petite valeur propre de  $\tilde{\rho}(p) := \rho - p|e_1 f_1\rangle\langle e_1 f_1|$  définie pour tout  $p \in [0, 1]$ , alors  $p \mapsto \lambda(p)$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Mais pour tout  $p \in [0, 1]$ , on a :

$$\lambda(p) = \min_{\|\chi\|=1} \langle \chi | \tilde{\rho}(p) | \chi \rangle \leq \langle e_1 f_1 | \tilde{\rho}(p) | e_1 f_1 \rangle < 1 - p$$

par l'inégalité précédente appliquée pour  $|\chi\rangle = |e_1 f_1\rangle$ .

En particulier  $\lambda(1) < 0$  et de plus  $\lambda(0)$  est par définition la plus petite valeur propre de  $\rho$ , donc  $\lambda(0) > 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $p_0 \in ]0, 1[$  tel que  $\lambda(p_0) = 0$ . Ainsi  $\rho(p_0)$  admet une valeur propre nulle (le même raisonnement fonctionne pour  $\rho^{tB}$ ).

On note  $p_1$  le plus petit  $p$  cherché et on suppose que  $\text{rg}(\rho(p_1)) = 3$  et  $\text{rg}(\rho(p_1)^{tB}) = 4$ . Notons que  $\rho(p_1)$  et  $\rho(p_1)^{tB}$  sont des états (car ils sont positifs hermitiens et de trace un) donc  $\rho(p_1)$  est séparable par le critère de Peres-Horodecki et on peut toujours trouver  $|e_2 f_2\rangle \in \text{Im}(\rho(p_1))$ . On définit alors :

$$\rho_1(p) = \frac{1}{1-p} [\rho(p_1) - p|e_2 f_2\rangle\langle e_2 f_2|].$$

De même que précédemment on considère le plus petit  $p \in ]0, 1[$  tel que  $\rho_1(p)$  possède une seconde valeur propre nulle ou  $\rho_1(p)^{tB}$  admette une première valeur propre nulle. Ce ne peut être le premier cas qui se produit à moins que simultanément  $\rho_1(p)^{tB}$  admette deux valeurs propres nulles en vertu du lemme suivant :

**Lemme 2.3.6.** *Soit  $\omega$  un état du système à deux qubits. Si  $\text{rg}(\omega) = 2$  et  $\omega$  est séparable alors on peut écrire  $\omega$  comme un mélange statistique de deux états purs produits. Ainsi  $\omega^{tB}$  est aussi de rang 2.*

□ On prouve ce lemme en remarquant que  $\text{Im}(\omega)$  est un sous-espace engendré par deux états purs produits de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Quitte à utiliser des transformations locales de  $SU(2) \otimes SU(2)$ , on peut toujours supposer que :

$$\text{Im}(\omega) = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ e^{i\phi} \sin(\alpha) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ e^{i\psi} \sin(\beta) \end{pmatrix}; \mu, \nu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Si  $\sin(\alpha) \sin(\beta) = 0$  alors tous les vecteurs de  $\text{Im}(\omega)$  sont des états purs produits. Dans ce cas la décomposition spectrale de  $\omega$  fournit nécessairement un mélange statistique de deux états purs produits.

Sinon il n'existe que deux états purs produits dans  $\text{Im}(\omega)$ . Comme  $\omega$  est séparable, nécessairement  $\omega$  est mélange statistique de ces deux états. □

On reprend donc en considérant  $p_2$ , le plus petit  $p$  tel que  $\rho_1(p)^{tB}$  admette une première valeur propre nulle. On a donc  $\text{rg}(\rho_1(p_2)) = \text{rg}(\rho_1(p_2)^{tB}) = 3$ .

On poursuit le cheminement en cherchant un  $|e_3 f_3\rangle$  dans  $\text{Im}(\rho_1(p_2))$  et tel que  $|e_3 \bar{f}_3\rangle \in \text{Im}(\rho_1(p_2)^{tB})$ .

L'existence d'un tel état est garantie par le fait que  $\rho_1(p_2)$  est un état séparable (d'après le critère de Peres-Horodecki car  $\rho_1(p_2) \geq 0$  et  $\rho_1(p_2)^{tB} \geq 0$ ). Ainsi on a les décompositions en états purs produits suivantes :

$$\begin{aligned}\rho_1(p_2) &= \sum_i q_i |e_i^1 f_i^1\rangle \langle e_i^1 f_i^1| \text{ et} \\ \rho_1(p_2)^{tB} &= \sum_i q_i |e_i^1 \bar{f}_i^1\rangle \langle e_i^1 \bar{f}_i^1|,\end{aligned}$$

où les sommes ont au moins trois termes car  $(\text{rg})(\rho_1(p_2)) = (\text{rg})(\rho_1(p_2)^{tB}) = 3$ , ce qui nous suffit pour trouver  $|e_3 f_3\rangle$  qui convient.

On pose alors

$$\rho_2(p) = \frac{1}{1-p} [\rho_1(p_2) - p |e_3 f_3\rangle \langle e_3 f_3|].$$

On cherche toujours le plus petit  $p \in ]0, 1[$  tel que  $\rho_2(p)$  ou  $\rho_2(p)^{tB}$  admette une seconde valeur propre nulle. Mettons que cela arrive dans le premier cas en  $p_3$  et qu'alors  $\text{rg}(\rho_2(p_3)) = 2$  (si le rang vaut 0 ou 1, alors l'algorithme se finit). Le lemme 2.3.6 nous assure qu'on aura également  $\text{rg}(\rho_2(p_3)^{tB}) = 2$  et que :

$$\rho_2(p_3) = p_4 |e_4 f_4\rangle \langle e_4 f_4| + (1 - p_4) |e_5 f_5\rangle \langle e_5 f_5|$$

pour  $p_4 \in [0, 1]$ .

Au final on a écrit  $\rho$  comme un mélange statistique de cinq états purs produits :

$$\begin{aligned}\rho &= p_1 |e_1 f_1\rangle \langle e_1 f_1| + p_2 (1 - p_1) |e_2 f_2\rangle \langle e_2 f_2| + p_3 (1 - p_1) (1 - p_2) |e_3 f_3\rangle \langle e_3 f_3| \\ &\quad + p_4 (1 - p_1) (1 - p_2) (1 - p_3) |e_4 f_4\rangle \langle e_4 f_4| \\ &\quad + (1 - p_1) (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4) |e_5 f_5\rangle \langle e_5 f_5|. \tag{2.12}\end{aligned}$$

On remarque qu'on a traité le cas le plus difficile où  $\text{rg}(\rho) + \text{rg}(\rho^{tB}) = 8$ . Si  $\text{rg}(\rho) + \text{rg}(\rho^{tB}) < 8$ , la méthode fonctionne de la même façon mais alors on aura nécessairement au moins une étape de moins. On aboutira donc à une décomposition en au plus quatre états purs produits.

Dans le cas où  $\text{rg}(\rho) + \text{rg}(\rho^{tB}) = 8$ , si on veut aboutir à une décomposition en quatre états purs produits, il suffit de choisir un état  $|ef\rangle$  lors de la

première étape de l'algorithme tel que  $\text{rg}(\rho(p_1)) = \text{rg}(\rho(p_1)^{tB}) = 3$ .  
On montre ici que cela est possible. Pour ce faire on définit :

$$\omega_i(p) = \frac{1}{1-p} [\rho - p|e_i f_i\rangle\langle e_i f_i|], \text{ avec } p \in ]0, 1[ \text{ et } i = 1, \dots, 5$$

où  $|e_i f_i\rangle$  sont les vecteurs définis dans la décomposition (2.12) obtenue précédemment. On construit ensuite deux ensembles à cinq éléments  $S = \{s_i\}_{i=1, \dots, 5}$  et  $\tilde{S} = \{\tilde{s}_i\}_{i=1, \dots, 5}$  définis par :

$$\begin{aligned} s_i &= \min\{x \in ]0, 1[ \text{ tel que } \omega_i(x) \geq 0 \text{ et } \text{rg}(\omega_i(x)) = 3\} \\ \tilde{s}_i &= \min\{x \in ]0, 1[ \text{ tel que } \omega_i(x)^{tB} \geq 0 \text{ et } \text{rg}(\omega_i(x)^{tB}) = 3\} \end{aligned}$$

Par exemple  $s_1$  correspond au  $p_1$  de la première étape de l'algorithme.

On va montrer qu'il est impossible d'avoir  $s_i < \tilde{s}_i \forall i$  ou  $s_i > \tilde{s}_i \forall i$ . Pour ce faire on commence par montrer les expressions suivantes :

$$s_i = \frac{1}{\langle e_i f_i | \rho^{-1} | e_i f_i \rangle}, \quad (2.13)$$

$$\tilde{s}_i = \frac{1}{\langle e_i f_i | (\rho^{tB})^{-1} | e_i f_i \rangle}. \quad (2.14)$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi | e_i f_i \rangle \langle e_i f_i | \phi \rangle &= |\langle \phi | \sqrt{\rho} (\sqrt{\rho})^{-1} | e_i f_i \rangle|^2 \\ &\leq \langle \phi | \rho | \phi \rangle \langle e_i f_i | \rho^{-1} | e_i f_i \rangle \quad \forall \phi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi

$$\rho - \frac{1}{\langle e_i f_i | \rho^{-1} | e_i f_i \rangle} | e_i f_i \rangle \langle e_i f_i | \geq 0.$$

D'autre part on a égalité dans (2.15) seulement pour les vecteurs  $|\phi\rangle$  colinéaires à  $\rho^{-1} | e_i f_i \rangle$  donc  $\rho - \frac{1}{\langle e_i f_i | \rho^{-1} | e_i f_i \rangle} | e_i f_i \rangle \langle e_i f_i |$  admet une valeur propre nulle et est de rang inférieur à trois. Ce qui prouve la formule pour  $s_i$  (la même preuve fonctionne pour  $\tilde{s}_i$ ).

Supposons par l'absurde que  $s_i < \tilde{s}_i \forall i$  et notons  $\pi_i = p_i \prod_{k=1}^{i-1} (1 - p_k)$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$  et  $\pi_5 = \prod_{k=1}^4 (1 - p_k)$  de telle sorte que (2.12) s'écrit :

$$\rho = \sum_{i=1}^5 \pi_i | e_i f_i \rangle \langle e_i f_i |.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^5 \pi_i s_i^{-1} > \sum_{i=1}^5 \pi_i \tilde{s}_i^{-1}$$

qui se réécrit en utilisant les formules pour les  $s_i$  et  $\tilde{s}_i$  :

$$\sum_{i=1}^5 \pi_i \langle e_i f_i | \rho^{-1} | e_i f_i \rangle > \sum_{i=1}^5 \pi_i \langle e_i \bar{f}_i | (\rho^{tB})^{-1} | e_i \bar{f}_i \rangle.$$

Comme  $\rho = \sum_{i=1}^5 \pi_i |e_i f_i\rangle \langle e_i f_i|$ , l'inégalité précédente est :

$$\text{tr}\{\rho \rho^{-1}\} > \text{tr}\{\rho^{tB} (\rho^{tB})^{-1}\},$$

ce qui est absurde. Par symétrie, on aboutit de même à une absurdité en supposant que  $s_i > \tilde{s}_i \forall i$ .

Ainsi on a deux possibilités :

- . soit il existe un  $j$  tel que  $s_j = \tilde{s}_j$ . Il suffit alors de choisir  $|ef\rangle = |e_j f_j\rangle$  dans la première étape de l'algorithme.
- . soit il existe  $k \neq l$  tel que  $s_k > \tilde{s}_k$  et  $s_l < \tilde{s}_l$ . Alors par continuité des applications  $s$  et  $\tilde{s}$  définies sur l'ensemble des états purs produits et connexité de cet ensemble (c'est l'image par les transformations unitaires locales du connexe  $\{|11\rangle\}$ ), il existe un état pur produit  $|ef\rangle$  tel que  $s(|ef\rangle) = \tilde{s}(|ef\rangle)$  et on conclut comme précédemment.

**Remarque 2.3.2.** Le dernier argument pour passer d'une décomposition de cinq états purs produits à quatre états purs produits est une jolie preuve théorique. Il fonctionne dans la pratique, "exceptionnellement", si il existe effectivement un  $j$  tel que  $s_j = \tilde{s}_j$  (cela demande tout de même de refaire tous les calculs). Dans le cas contraire, c'est une méthode inadaptée au calcul effectif. On restera alors avec une décomposition en cinq états purs produits.

### Application de la méthode sur un exemple.

Dans le but de comparer l'efficacité des méthodes nous proposons de reprendre le même exemple que celui traité par notre méthode, soit dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  :

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.275 & 0.047 + 0.093i & 0.038 - 0.074i & 0.029 - 0.045i \\ 0.047 - 0.093i & 0.260 & 0.033 + 0.098i & -0.003 + 0.074i \\ 0.038 + 0.074i & 0.033 - 0.098i & 0.258 & 0.044 - 0.068i \\ 0.029 + 0.045i & -0.003 - 0.074i & 0.044 + 0.068i & 0.207 \end{pmatrix}.$$

$\text{rg}(\rho) = \text{rg}(\rho^{tB}) = 4$ , on est donc dans le cas le plus difficile. En gardant les mêmes notations que dans l'exposé précédent on pose par simplicité  $|e_1 f_1\rangle = |11\rangle$  et on calcule  $p_1$  :

$$p_1 = \min(s_1, \tilde{s}_1) = \min\left(\frac{1}{\langle 11 | \rho^{-1} | 11 \rangle}, \frac{1}{\langle 11 | (\rho^{tB})^{-1} | 11 \rangle}\right) \\ \simeq \min(0.109, 0.164) = 0.109.$$



Ensuite on cherche  $|e_2 f_2\rangle \in \text{Im}(\rho(p_1)) = v^\perp$  où  $v$  est un vecteur propre de  $\rho_1$  de valeur propre 0 :

$$v \simeq \begin{pmatrix} 0.607 - 0.173i \\ -0.161 + 0.492i \\ -0.242 - 0.371i \\ -0.371 \end{pmatrix}.$$

On cherche par simplicité  $|e_2 f_2\rangle$  sous la forme :

$$|e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } |f_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ avec } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

et on écrit la condition d'orthogonalité :

$$\langle v | e_2 f_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow (-0.242 + 0.371i)\alpha - 0.371\beta = 0$$

Un choix possible est :

$$|e_2 f_2\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.643 \\ -0.419 + 0.642i \end{pmatrix}$$

On considère alors :

$$\rho_1(p) = \frac{1}{1-p} [\rho(p_1) - p |e_2 f_2\rangle \langle e_2 f_2|].$$

On cherche  $p_2 \in ]0, 1[$  tel que  $\rho_1(p_2)^{tB}$  admette une valeur propre nulle. Il est donné par :

$$p_2 = \frac{1}{\langle e_2 \bar{f}_2 | (\rho_1^{tB})^{-1} | e_2 \bar{f}_2 \rangle} \simeq 0.096$$

Alors  $\rho_2 = \rho_1(p_2)$  est de rang trois de même que  $\rho_2^{tB}$ .

À présent, on cherche  $|e_3 f_3\rangle$  tel que :

$$\begin{cases} |e_3 f_3\rangle \in \text{Im}(\rho_2) \\ |e_3 \bar{f}_3\rangle \in \text{Im}(\rho_2^{tB}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle v_{\rho_2} | e_3 f_3 \rangle = 0 \\ \langle v_{\rho_2^{tB}} | e_3 \bar{f}_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

où  $v_{\rho_2}$  et  $v_{\rho_2^{tB}}$  sont des vecteurs propres de valeur propre nulle respectivement pour  $\rho_2$  et  $\rho_2^{tB}$ . En cherchant  $|e_3\rangle$  et  $|f_3\rangle$  sous la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}$ , on trouve après résolution d'un système d'équations du second degré :

$$\begin{aligned} \beta &\simeq -0.277 - 0.337i \\ \delta &\simeq 0.741 - 2.060i. \end{aligned}$$

On normalise ensuite, ce qui donne :

$$|e_3 f_3\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0.381 \\ 0.282 - 0.784i \\ -0.105 - 0.129i \\ -0.343 + 0.122i \end{pmatrix} \text{ et } |e_3 \bar{f}_3\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0.381 \\ 0.282 + 0.784i \\ -0.105 - 0.129i \\ 0.187 - 0.313i \end{pmatrix}.$$

On pose comme l'indique la méthode :

$$\rho_2(p) = \frac{1}{1-p} [\rho_2 - p |e_3 f_3\rangle \langle e_3 f_3|].$$

On doit trouver le plus petit  $p \in ]0, 1[$  tel que  $\rho_2(p)$  admette deux valeurs propres nulles. Ici on ne peut plus utiliser la formule (2.13) car  $\rho_2$  n'est pas inversible. On le cherche donc numériquement et on trouve  $p_3 \simeq 0.400$ . Et on peut vérifier que  $\rho_3 := \rho_2(0.400)$  et  $\rho_3^{tB} := \rho_2^{tB}(0.400)$  admettent, tout deux, deux valeurs propres nulles et deux valeurs propres strictement positives avec la formule dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  :

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 0.247 & 0.026 - 0.007i & 0.105 - 0.186i & 0.147 - 0.062i \\ 0.026 + 0.007i & 0.075 & 0.021 + 0.123i & 0.122 - 0.003i \\ 0.105 + 0.186i & 0.021 - 0.123i & 0.442 & 0.125 - 0.106i \\ 0.147 + 0.062i & 0.122 + 0.003i & 0.125 + 0.106i & 0.236 \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste plus qu'à effectuer la dernière étape de l'algorithme qui consiste à écrire  $\rho_3$  comme un mélange statistique de deux états purs produits. On a commencé par les chercher dans des vecteurs propres,  $v_1 \simeq \begin{pmatrix} 0.343 - 0.305i \\ 0.122 + 0.174 \\ 0.749 \\ 0.392 + 0.171i \end{pmatrix}$  et  $v_2 \simeq \begin{pmatrix} 0.468 + 0.316i \\ 0.345 - 0.177i \\ -0.412 - 0.091i \\ 0.593 \end{pmatrix}$ , associés aux deux valeurs propres non nulles de  $\rho_3$ ; mais cela ne fonctionne pas sur cet exemple car ces vecteurs propres sont intriqués (on le voit en calculant leur concurrence de Wootters par exemple). On sait donc par la preuve du lemme 2.3.6 qu'il n'existe que deux états purs produits dans  $\text{Im}(\rho_3)$ . On les note  $|e_4 f_4\rangle \langle e_4 f_4|$  et  $|e_5 f_5\rangle \langle e_5 f_5|$  et on les cherche (on renormalisera par la suite) sous la forme :

$$|\tilde{e}_4 \tilde{f}_4\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \lambda_4 v_1 + \mu_4 v_2$$

$$|\tilde{e}_5 \tilde{f}_5\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_5 \end{pmatrix} = \lambda_5 v_1 + \mu_5 v_2.$$

Après résolution d'un système d'équations du second degré on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda_4 &\simeq 2.648 + 0.360i \\ \mu_4 &\simeq 0.650 + 1.024i \\ \lambda_5 &\simeq 0.315 + 1.045i \\ \mu_5 &\simeq 0.581 - 0.953i. \end{aligned}$$

Ce qui donne après normalisation :

$$|e_4f_4\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0.341 \\ 0.227 + 0.253i \\ 0.616 - 0.073i \\ 0.464 + 0.410i \end{pmatrix} \text{ et } |e_5f_5\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0.641 \\ -0.071 - 0.160i \\ -0.058 + 0.719i \\ 0.186 - 0.065i \end{pmatrix}.$$

En écrivant  $\rho_3 = p_4|e_4f_4\rangle\langle e_4f_4| + (1 - p_4)|e_5f_5\rangle\langle e_5f_5|$ , on trouve facilement :

$$p_4 \simeq 0.556.$$

On a finalement trouvé, grâce à la méthode de Sanpera, Tarrach et Vidal, une décomposition de  $\rho$  en une somme de cinq états purs produits :

$$\rho = \sum \pi_i |e_i f_i\rangle\langle e_i f_i|$$

où les  $|e_i f_i\rangle$  sont donnés ci-dessus et où :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1 \simeq 0.109 \\ \pi_2 &= p_2(1 - p_1) \simeq 0.085 \\ \pi_3 &= p_3(1 - p_1)(1 - p_2) \simeq 0.322 \\ \pi_4 &= p_4(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) \simeq 0.269 \\ \pi_5 &= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) \simeq 0.215. \end{aligned}$$

Comme expliqué plus haut, on s'arrête dans ce cas pratique à une décomposition en cinq états purs produits car ici  $s_i \neq \tilde{s}_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Ce qui est aussi bien que notre algorithme passant par les états X pour cet exemple. Cependant la méthode de Wootters suivante est, comme nous allons le voir, plus forte car elle permet une décomposition pratique en quatre états purs produits :

### 2.3.5 Méthode de Wootters pour décomposer les états séparables en états purs produits.

L'article [111] de Wootters est très riche. Évidemment le résultat essentiel est la mesure de l'intrication donnée par une fonction appelée concurrence. On a déjà utilisé dans cette thèse ce puissant outil (car facilement calculable) pour évaluer l'intrication de deux qubits. Mais il y a d'autres résultats dans ce même article. Tout d'abord on a remarqué dans la partie 2.2.1 que Wootters donne dans [111] l'argument essentiel pour prouver la convexité de la concurrence. Enfin on va voir ici qu'il donne un algorithme très efficace pour décomposer n'importe quel état séparable d'un système à deux qubits en une somme d'au plus quatre états purs produits.

### Présentation générale de la méthode.

Soit  $\rho$  un état séparable d'un système à deux qubits. D'après [111], la concurrence de  $\rho$  est nulle. On rappelle que  $C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$  où  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$  sont les valeurs propres de la matrice  $\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ , avec :

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \bar{\rho} \sigma_y \otimes \sigma_y,$$

Ainsi, on a ici  $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \leq 0$ .

On commence par calculer une décomposition spectrale de  $\rho$  :

$$\rho = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle\langle v_i|$$

où  $n \leq 4$  est le rang de  $\rho$  et où les  $|v_i\rangle$  sont des vecteurs propres orthogonaux mais non normés de telle sorte que  $\langle v_i|v_i\rangle$  corresponde à la  $i$ -ème valeur propre de  $\rho$ .

On cherche ensuite une nouvelle décomposition convexe de  $\rho$  :

$$\rho = \sum_{i=1}^n |x_i\rangle\langle x_i|, \text{ où } \langle x_i|\tilde{x}_j\rangle := \langle x_i|(\sigma_y \otimes \sigma_y)\tilde{x}_j\rangle = \lambda_i\delta_{ij}. \quad (2.16)$$

On dit que les  $|x_i\rangle$  sont "tilde-orthogonaux" (par abus de langage car  $\langle x|\tilde{y}\rangle$  n'est pas un produit scalaire ni même une forme sesquilinéaire hermitienne permettant de parler d'orthogonalité). On peut toujours écrire ces  $|x_i\rangle$  grâce à une matrice unitaire  $U$  d'ordre  $n$  :

$$|x_i\rangle = \sum_{j=1}^n u_{ij}|v_j\rangle.$$

La condition de tilde-orthogonalité sur les  $|x_i\rangle$  devient une condition sur la matrice  $U$  :

$$\delta_{ij}\lambda_i = \langle x_i|\tilde{x}_j\rangle = (\bar{U}\tau\bar{U}^t)_{ij}$$

où  $\tau$  est une matrice d'ordre  $n$  dont les coefficients sont  $\tau_{ij} = \langle v_i|\tilde{v}_j\rangle$ . La matrice  $\tau$  est symétrique (car  $\sigma_y$  est hermitienne et les éléments de matrice de  $\sigma_y \otimes \sigma_y$  dans la base canonique ( $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ ) sont réels) mais pas nécessairement hermitienne. De plus  $\bar{U}^t$  est bien la matrice transposée de  $\bar{U}$  et non son adjointe. Ainsi  $\bar{U}$  ou plutôt son inverse n'est pas une matrice de passage permettant une décomposition spectrale de  $\tau$ . L'existence et la construction d'une telle matrice unitaire  $U$  vient du théorème de Schur ou plus précisément de son corollaire 2.3.2 ci-dessous :

**Théorème 2.3.3.** (Schur) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que les valeurs propres de  $A\bar{A}$  sont toutes réelles positives alors il existe  $T$  une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont réels positifs et  $U$  une matrice unitaire telles que  $A$  se décompose de la façon suivante :

$$A = U^t T U.$$

□ On propose ici la jolie preuve constructive tiré du livre [51] de Horn et Johnson.

Soit  $x$  un vecteur propre de  $A\bar{A}$  de valeur propre  $\lambda$ . Par hypothèse  $\lambda \geq 0$ . Alors de deux choses l'une :

- i) soit  $A\bar{x}$  et  $x$  sont liés.
- ii) soit  $A\bar{x}$  et  $x$  sont indépendants.

Dans le premier cas i), comme  $x \neq 0$ , il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $A\bar{x} = \mu x$ . Mais alors :

$$A\bar{A}x = A(\overline{A\bar{x}}) = A(\overline{\mu x}) = \bar{\mu}A\bar{x} = \bar{\mu}\mu x = |\mu|^2 x$$

et nécessairement  $|\mu|^2 = \lambda$ .

Dans le second cas ii), on pose  $y = A\bar{x} + \bar{\mu}x$ . Par indépendance de  $A\bar{x}$  et  $x$ , on a  $y \neq 0$ . On choisit  $\mu$  tel que  $|\mu|^2 = \lambda$ . Alors

$$A\bar{y} = A(\overline{A\bar{x} + \bar{\mu}x}) = A\bar{A}x + \mu A\bar{x} = \lambda x + \mu A\bar{x} = \mu(\bar{\mu}x + A\bar{x}) = \mu y.$$

Dans les deux cas on trouve  $w \neq 0$  et  $\mu \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|\mu|^2 = \lambda$  tels que  $A\bar{w} = \mu w$ . On peut même choisir  $w$  normé et quitte à ajouter une phase à  $w$ , on peut considérer que  $\mu$  est un réel positif.

On calcule ensuite une base orthonormée de  $\mathbb{C}^n$  dont le premier vecteur est  $w$ . En notant  $W_1 = (w, w_2, \dots, w_n)$  la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base, on a :

$$\overline{W_1}^t A \overline{W_1} = \begin{pmatrix} \mu & * & - & * \\ 0 & & & \\ | & & A_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\begin{aligned} (\overline{W_1}^t A \overline{W_1}) (\overline{W_1}^t A \overline{W_1}) &= W_1^\dagger A \underbrace{\overline{W_1} W_1^t}_{=Id} A W_1 = W_1^\dagger A \overline{A} W_1 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & * & - & * \\ 0 & & & \\ | & & A_2 \overline{A_2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dernière matrice est conjuguée à la matrice  $A\bar{A}$ , elle a donc les mêmes valeurs propres positives. Ainsi  $A_2\bar{A}_2$  a toutes ses valeurs propres positives et on peut appliquer à  $A_2$  le même argument que celui appliqué précédemment à  $A$ .

Par récurrence, on trouve donc  $n$  matrices unitaires  $W_i$  tels que :

$$W_n^\dagger \dots W_1^\dagger A \bar{W}_1 \dots \bar{W}_n = T$$

où  $T$  est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous réels positifs.  $\square$

**Corollaire 2.3.2.** *Soit  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice symétrique, alors il existe une matrice diagonale  $D$  dont tous les éléments diagonaux sont réels positifs et une matrice unitaire  $U$ , telles que  $S$  se décompose de la façon suivante :*

$$S = U^t D U.$$

$\square$  Comme  $S$  est symétrique,  $S\bar{S} = S S^\dagger$  a donc toutes ses valeurs propres réelles positives. En appliquant le théorème de Schur à  $S$ , on trouve donc  $U$  unitaire et  $T$  triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont réels positifs, telles que  $S = U^t T U$ . Mais comme  $S$  est symétrique, on a :

$$S^t = (U^t T U)^t = U^t T^t U = S = U^t T U.$$

Ainsi  $T = T^t$  est donc en fait une matrice diagonale qu'on peut noter  $D$ .  $\square$

Le corollaire 2.3.2 montre que l'on peut trouver des vecteurs  $|x_i\rangle$  pour  $i = 1, \dots, n$  tels que (2.16) soit vraie.

Si  $n = 3, 4$ , on pose (si  $n = 3$ , il suffit de choisir le vecteur nul pour  $|x_4\rangle$ ) :

$$\begin{aligned} |z_1\rangle &= \frac{1}{2} \left( e^{i\theta_1} |x_1\rangle + e^{i\theta_2} |x_2\rangle + e^{i\theta_3} |x_3\rangle + e^{i\theta_4} |x_4\rangle \right) \\ |z_2\rangle &= \frac{1}{2} \left( e^{i\theta_1} |x_1\rangle + e^{i\theta_2} |x_2\rangle - e^{i\theta_3} |x_3\rangle - e^{i\theta_4} |x_4\rangle \right) \\ |z_3\rangle &= \frac{1}{2} \left( e^{i\theta_1} |x_1\rangle - e^{i\theta_2} |x_2\rangle + e^{i\theta_3} |x_3\rangle - e^{i\theta_4} |x_4\rangle \right) \\ |z_4\rangle &= \frac{1}{2} \left( e^{i\theta_1} |x_1\rangle - e^{i\theta_2} |x_2\rangle - e^{i\theta_3} |x_3\rangle + e^{i\theta_4} |x_4\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

où les réels  $\theta_j$  sont choisis tels que :

$$\sum_j e^{2i\theta_j} \lambda_j = 0,$$

ce qui est toujours possible grâce à la condition  $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \leq 0$ . En effet, sans perdre de généralité, on peut toujours poser  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_4 = \frac{\pi}{2}$  et

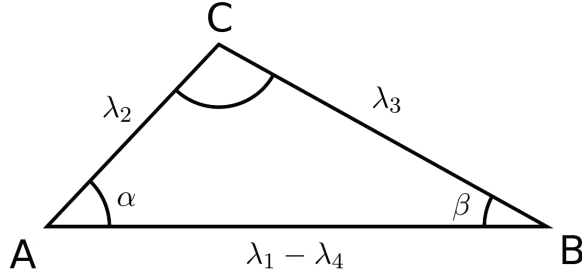


FIGURE 2.2 – Triangle ABC.

$\epsilon = \lambda_1 - \lambda_4$ . Comme  $\lambda_1 \geq \lambda_4$ , on a  $\epsilon \geq 0$ . Le problème revient à trouver, comme sur la figure 2.2 un triangle  $ABC$  de base  $[AB]$  de longueur  $\epsilon$  et dont les deux autres côtés  $[AC]$  et  $[BC]$  ont respectivement pour longueur  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . On trouve alors facilement que l'angle  $\alpha$  entre  $[AB]$  et  $[AC]$  vérifie :

$$\cos(\alpha) = \frac{\epsilon^2 - (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{2\epsilon\lambda_2}$$

et que celui entre  $[BC]$  et  $[AB]$  vérifie :

$$\sin(\beta) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \sin \alpha.$$

En posant :

$$\theta_2 = \frac{\pi + \alpha}{2} \text{ et } \theta_3 = \frac{\pi - \beta}{2},$$

on a le résultat voulu.

Cela nous assure la séparabilité des  $|z_i\rangle$  car :

$$C(|z_i\rangle) = |\langle z_i | \tilde{z}_i \rangle| = \left| \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 e^{2i\theta_j} \langle x_j | \tilde{x}_j \rangle \right| = \left| \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 e^{2i\theta_j} \lambda_j \right| = 0.$$

Le calcul montre aisément que  $\sum_{i=1}^4 |z_i\rangle\langle z_i| = \sum_{i=1}^4 |x_i\rangle\langle x_i|$ . On a donc une décomposition de  $\rho$  en une somme de quatre états purs produits donnés par les  $|z_i\rangle$ .

Il reste à traiter le cas où  $n = 2$  car si  $n = 1$  il n'y a rien à faire. Le plus simple est d'utiliser le lemme 2.3.6 pour trouver une décomposition de  $\rho$  en une somme de deux états purs produits.

### Application de la méthode sur un exemple.

De nouveau nous proposons de reprendre le même exemple que celui traité plus haut, soit dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  :

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.275 & 0.047 + 0.093i & 0.038 - 0.074i & 0.029 - 0.045i \\ 0.047 - 0.093i & 0.260 & 0.033 + 0.098i & -0.003 + 0.074i \\ 0.038 + 0.074i & 0.033 - 0.098i & 0.258 & 0.044 - 0.068i \\ 0.029 + 0.045i & -0.003 - 0.074i & 0.044 + 0.068i & 0.207 \end{pmatrix}.$$

On rappelle qu'ici  $n = \text{rg}(\rho) = 4$ .

On commence donc par calculer une décomposition spectrale de  $\rho = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i|$  avec :

$$v_1 \simeq \begin{pmatrix} -0.086 + 0.016i \\ 0.043 - 0.094i \\ 0.039 + 0.083i \\ 0.082 \end{pmatrix}, v_2 \simeq \begin{pmatrix} -0.115 - 0.088i \\ 0.106 - 0.051i \\ 0.215 + 0.017i \\ -0.334 \end{pmatrix},$$

$$v_3 \simeq \begin{pmatrix} -0.373 + 0.205i \\ -0.200 + 0.263i \\ -0.155 + 0.167i \\ -0.121 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 \simeq \begin{pmatrix} 0.173 + 0.187i \\ -0.017 - 0.355i \\ -0.345 + 0.180i \\ -0.272 \end{pmatrix}.$$

Puis on forme la matrice  $\tau$  dont les coefficients sont les  $\tau_{ij} = \langle v_i | \tilde{v}_j \rangle$  :

$$\tau \simeq \begin{pmatrix} 0.033 + 0.003i & 0 & 0 & -0.007 - 0.014i \\ 0 & -0.029 + 0.077i & -0.194 - 0.137i & 0.002 + 0.001i \\ 0 & -0.194 - 0.137i & -0.116 + 0.099i & 0.003 - 0.004i \\ -0.007 - 0.014i & 0.002 + 0.001i & 0.003 - 0.004i & 0.234 - 0.340i \end{pmatrix}.$$

On cherche ensuite à appliquer le corollaire 2.3.2 du théorème de Schur. On calcule donc les valeurs propres de la matrice  $\tau\bar{\tau}$ . Ce sont 0.001, 0.171, 0.053 et 0.090. On cherche alors un vecteur propre normé de  $\tau\bar{\tau}$  ayant 0.171 pour valeur propre :

$$x \simeq \begin{pmatrix} 0.018 - 0.030i \\ 0.001i \\ 0.008 \\ 0.999 \end{pmatrix}.$$

Puis on calcule  $\tau\bar{x}$  qui se trouve être colinéaire à  $x$  :

$$\tau\bar{x} = \mu x \simeq (0.234 - 0.340i)x.$$

En considérant  $w = \left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^{\frac{1}{2}} x$  (pour que  $\tau\bar{w} = |\mu|w$ ), on a :

$$\tau\bar{w} \simeq 0.413w$$



On complète ensuite  $w$  en une base orthonormée de  $\mathbb{C}^4$  dont la matrice dans la base canonique  $W_1$  s'écrit :

$$W_1 \simeq \begin{pmatrix} 0.001 - 0.035i & 0 & 0.007 + 0.004i & -0.915 - 0.403i \\ 0.001 + 0.001i & 0.772 - 0.623i & 0.015 - 0.127i & -0.001i \\ 0.007 - 0.004i & 0.086 + 0.094i & -0.990 - 0.053i & -0.008 \\ 0.884 - 0.465 & 0 & 0.008 & 0.004 + 0.035i \end{pmatrix}.$$

On calcule alors :

$$W_1^\dagger \tau \overline{W_1} \simeq \begin{pmatrix} 0.413 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \tau_2 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ où}$$

$$\tau_2 \simeq \begin{pmatrix} -0.132 - 0.037i & 0.068 + 0.189i & 0.001 + 0.001i \\ 0.068 + 0.189i & -0.129 + 0.162i & -0.001 + 0.001i \\ 0.001 + 0.001i & -0.001 + 0.001i & 0.025 - 0.023i \end{pmatrix}.$$

Comme prévu par la théorie  $\tau_2$  est bien une matrice symétrique. On cherche donc de nouveau un vecteur propre  $y$  normé, associé à la plus grande valeur propre de  $\tau_2 \overline{\tau_2}$  qui est 0.090 et on trouve :

$$y \simeq \begin{pmatrix} 0.175 - 0.383i \\ 0.907 \\ 0.007 + 0.001i \end{pmatrix}$$

On remarque que  $\tau_2 \overline{y}$  est colinéaire à  $y$ . De même que précédemment on change la phase de  $y$  pour tomber sur

$$w_2 \simeq \begin{pmatrix} 0.421 - 0.001i \\ 0.378 + 0.824i \\ 0.003 + 0.007i \end{pmatrix}$$

tel que  $\tau_2 \overline{w_2} \simeq 0.300 w_2$ . Puis on complète  $w_2$  en une base orthonormée de  $\mathbb{C}^3$  dont la matrice  $W_2$  dans la base canonique est :

$$W_2 \simeq \begin{pmatrix} 0.421 - 0.001i & -0.847 - 0.324i & -0.003 + 0.007i \\ 0.378 + 0.824i & 0.026 + 0.421i & -0.005 \\ 0.003 + 0.007i & -0.005i & 1.000 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite :

$$W_2^\dagger \tau_2 \overline{W_2} \simeq \begin{pmatrix} 0.300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \tau_3 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ où } \tau_3 \simeq \begin{pmatrix} -0.198 + 0.117i & -0.001 - 0.001i \\ -0.001 - 0.001i & 0.025 - 0.023i \end{pmatrix}.$$

En répétant la démarche précédente, on trouve la matrice unitaire

$$W_3 \simeq \begin{pmatrix} 0.264 + 0.965i & -0.001 + 0.008i \\ -0.007 + 0.003i & 1 \end{pmatrix}.$$

telle que

$$W_3^\dagger \tau_3 \overline{W_3} \simeq \begin{pmatrix} 0.230 & 0 \\ 0 & 0.025 - 0.023i \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de poser  $w_4 \simeq \left( \frac{0.025 - 0.023i}{|0.025 - 0.023i|} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0.932 - 0.364i$  et <sup>17</sup>

$$U^t = W_1 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & W_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & W_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & w_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & w_4 \end{pmatrix} \\ \simeq \begin{pmatrix} 0.001 - 0.035i & 0 & -0.001i & -0.998 - 0.043i \\ 0.001 + 0.001i & 0.435 - 0.299i & -0.482 - 0.700i & 0.001 - 0.001i \\ 0.007 - 0.004i & -0.294 - 0.797i & 0.495 - 0.183i & 0 \\ 0.884 - 0.465i & 0.003 + 0.007i & -0.003 + 0.001i & 0.016 + 0.031i \end{pmatrix}.$$

qui est unitaire. On obtient la décomposition du théorème de Schur :

$$\tau \simeq U^t \begin{pmatrix} 0.413 & & & \\ & 0.300 & & \\ & & 0.230 & \\ & & & 0.034 \end{pmatrix} U = U^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix} U.$$

On pose donc comme dans la présentation générale de la méthode :

$$|x_i\rangle = \sum_{j=1}^n u_{ij} |v_j\rangle$$

où les  $u_{ij}$  sont les coefficients de la matrice  $U$ .

Enfin il s'agit de trouver des réels  $\theta_j$  vérifiant la condition :

$$\sum_{j=1}^4 e^{2i\theta_j} \lambda_j = 0.$$

Comme expliqué plus haut, on pose  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_4 = \frac{\pi}{2}$  et  $\epsilon = \lambda_1 - \lambda_4 \simeq 0.379$ . On trouve alors grâce à la figure 2.2,

$$\alpha \simeq 0.650 \\ \beta \simeq 0.913,$$

---

<sup>17</sup>. On utilise la notation classique pour les matrices creuses, où les espaces vides sont à considérer comme des zéros.

soit :

$$\theta_2 = \frac{\pi + \alpha}{2} \simeq 1.896$$

$$\theta_3 = \frac{\pi - \beta}{2} \simeq 1.114$$

Finalement en appliquant (2.17), on a une décomposition de  $\rho$  en une somme de quatre états purs produits :

$$\rho = \sum_{j=1}^4 |z_j\rangle\langle z_j|,$$

avec :

$$|z_1\rangle \simeq \begin{pmatrix} -0.186 + 0.138i \\ -0.279 - 0.067i \\ -0.123 + 0.193i \\ -0.281 + 0.037i \end{pmatrix}, \quad |z_2\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0.140 + 0.064i \\ -0.027 + 0.040i \\ -0.199 + 0.383i \\ -0.109 - 0.080i \end{pmatrix},$$

$$|z_3\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0.096 - 0.057i \\ -0.071 - 0.308i \\ -0.113 - 0.017i \\ -0.145 + 0.291i \end{pmatrix}, \quad |z_4\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0.429 + 0.036i \\ 0.010 - 0.274i \\ -0.003 + 0.081i \\ 0.051 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.6 Comparaison des trois méthodes de décomposition en états purs produits d'un état séparable de deux qubits.

D'un point de vue quantitatif, c'est-à-dire si le critère est le nombre d'états d'états purs produits apparaissant dans la décomposition de  $\rho$ , les méthodes de Sanpera-Tarrach-Vidal et de Wootters sont meilleures car elles permettent d'obtenir des décompositions en au plus quatre états purs produits contre au plus cinq pour la nôtre. Il s'agit cependant de nuancer ce résultat pour l'algorithme de Sanpera-Tarrach-Vidal car nous avons vu que l'argument qui permet de passer d'une décomposition en cinq états purs produits à une décomposition en quatre états purs produits est un argument d'existence inadapté au calcul pratique.

D'autre part un critère intéressant pour comparer les trois algorithmes présentés est la complexité des calculs à effectuer.

Pour notre méthode, l'étape la plus difficile consiste à trouver les rotations qui font passer de  $\rho$  à un état X. En effet par la suite il suffit d'appliquer des formules explicites pour obtenir la décomposition souhaitée. En particulier notre méthode a un degré de difficulté nul si  $\rho$  est déjà un état X. Notons qu'il n'a pas été très difficile dans l'exemple traité d'obtenir les rotations.

La méthode de Sanpera-Tarrach-Vidal a été de loin la plus longue à mettre en oeuvre. Il s'agit d'inverser des matrices pour calculer  $p_1$  puis  $p_2$ .

Le calcul de  $p_3$  était quant à lui non explicite et s'est fait numériquement. De plus les calculs des  $|e_i f_i\rangle$  ont demandé des résolutions laborieuses de systèmes d'équations.

Enfin la méthode de Wootters paraît la plus élégante et la plus aisée à utiliser de prime abord. On a dû cependant pour la mettre en place trouver les valeurs propres de  $\rho$ ,  $\tau$  et  $\tau_2$ . Ceci demande de trouver les racines de polynômes de degrés 4 et 3. Cela est très aisé numériquement mais beaucoup plus laborieux analytiquement avec les formules de Cardan et Tartaglia!

Notre méthode paraît la plus adaptée pour les calculs analytiques. En particulier on donne des formules explicites pour tous les états de  $\mathcal{E}_{XS}$ . Celle de Sanpera-Tarrach-Vidal oblige à recourir au calcul numérique (cf. le calcul de  $p_3$  dans l'exemple traité). Quant à celle de Wootters elle permet théoriquement de s'en passer mais cela s'avère très laborieux dans la pratique.

## Chapitre 3

# Modèles d'interactions répétées.

### 3.1 Introduction.

#### 3.1.1 Description du modèle.

Comme on l'a esquissé en Introduction, il existe une approche bien plus commode que celle basée sur le théorème de Davies pour traiter les systèmes quantiques ouverts markoviens. C'est la théorie des interactions répétées.

Elle est calquée sur l'expérience du MASER à un atome ([106]) où une cavité QED (qui joue le rôle du petit système  $S$ ) est traversée par un jet d'atomes. Le jet est réglé de telle sorte qu'à chaque instant un seul atome se trouve dans la cavité et donc peut interagir avec le champ électromagnétique y régnant. L'environnement  $E$  est donc ici constitué par cette chaîne d'atomes. Cela conduit évidemment à une évolution markovienne pour le petit système  $S$  car une fois qu'un atome a interagi avec lui, ce dernier ne le reverra plus.

Avec ce point de vue sur l'environnement, Attal et Pautrat ont développé dans [7] une théorie markovienne des systèmes quantiques ouverts appelée théorie des interactions répétées. On va l'expliquer et la mettre en oeuvre dans ce chapitre sur un exemple original dans le but d'évaluer l'évolution de l'intrication de deux qubits couplés à un environnement.

On considère deux qubits  $A$  et  $B$  initialement intriqués dans le modèle d'interactions répétées suivant :

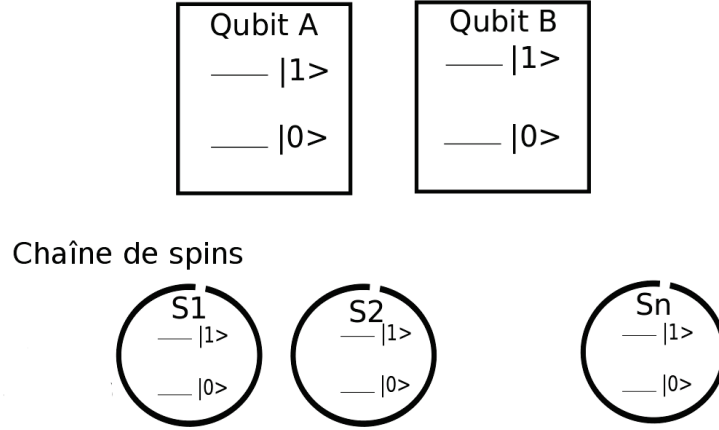


FIGURE 3.1 – Schéma du modèle d’interactions répétées.

- . Pendant un temps  $\tau_A$ , le qubit  $A$  interagit avec un élément de la chaîne.
- . Puis pendant un temps  $\tau_B$ , le qubit  $B$  interagit avec le même élément de chaîne.
- . Ensuite on répète ce processus avec un nouvel élément de la chaîne...

On aurait pu prendre deux chaînes : une pour le qubit  $A$  et une pour le qubit  $B$ . L’intérêt du présent modèle est qu’il modélise l’interaction de deux qubits avec un environnement commun. De plus il se rapproche de la nouvelle expérience décrite dans [49] proposée par Serge Haroche et son équipe dans le cadre du projet DECLIC. On souhaite ici remercier chaleureusement Stéphane Attal, Professeur à l’Institut Camille Jordan à Lyon, qui nous a donné l’idée d’étudier ce modèle riche.

L’idée du modèle étant présentée, nous allons à présent le définir plus précisément et plus mathématiquement en nous inspirant fortement de l’article [5] de Stéphane Attal et d’Alain Joye. On considère donc un petit système des deux qubits  $A$  et  $B$  décrit par l’espace de Hilbert  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  et son hamiltonien  $h_0$  où :

$$h_0 = \epsilon_A \sigma_+ \sigma_-^{(A)} + \epsilon_B \sigma_+ \sigma_-^{(B)},$$

avec  $O^{(A)} := O_A \otimes Id_B$  et de même pour  $B$ .

Ainsi la différence d’énergie entre les deux niveaux du qubit  $A$  [resp.  $B$ ] est  $\epsilon_A$  [resp.  $\epsilon_B$ ]. Puis on considère une chaîne de spins<sup>1</sup> décrite par l’espace de

1. On appellera spins les éléments de la chaîne au lieu de qubits pour les distinguer des

Hilbert <sup>2</sup>  $\mathcal{H}_c = \otimes_{j \geq 1} \mathbb{C}^2$  et par son hamiltonien :

$$h_c = \sum_{j=1}^{\infty} \delta a^\dagger(j) a(j),$$

où  $a(j)$  est l'opérateur d'annihilation sur le site  $j$ , c'est-à-dire le  $j$ -ième élément de la chaîne, et l'opérateur identité sur les autres spins <sup>3</sup>. Précisément si on considère  $(|1\rangle_j, |0\rangle_j)$  une base de l'espace de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  du  $j$ -ième élément de la chaîne, alors on a :

$$a(j)|1\rangle_j = |0\rangle_j \text{ et } a(j)|0\rangle_j = 0.$$

On considère que les éléments de la chaîne sont identiques et la différence d'énergie entre les deux niveaux des spins est ici donnée par  $\delta$ .

Initialement on suppose que le système complet formé des qubits  $A$  et  $B$  et de la chaîne de spins est dans l'état :

$$\rho_{\text{total}}(0) = \rho(0) \otimes \left( \otimes_{j \geq 1} \frac{e^{-\beta \delta a^\dagger(j) a(j)}}{1 + e^{-\beta \delta}} \right)$$

où  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  pour  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. Ainsi à  $t = 0$  le système complet est dans un état découplé : le petit système est dans l'état  $\rho(0)$  et la chaîne est à l'équilibre thermique à la température  $T$ .

Enfin, en notant  $\tilde{\tau} := \tilde{\tau}_A + \tilde{\tau}_B$  la dynamique est donnée par l'hamiltonien dépendant du temps suivant :

$$H(t, \lambda) = H_0 + H_c + \lambda H_{\text{int}}(t),$$

où

$$H_0 = h_0 \otimes Id, \quad H_c = Id \otimes h_c,$$

et pour  $t \in [(k-1)\tilde{\tau}, (k-1)\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A[$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$

$$H_{\text{int}}(t) = H_{\text{int},A}(k) = \delta[\sigma_+^{(A)} \otimes a(k) + \sigma_-^{(A)} \otimes a^\dagger(k)],$$

tandis que pour  $t \in [(k-1)\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A, k\tilde{\tau}[$

$$H_{\text{int}}(t) = H_{\text{int},B}(k) = \delta[\sigma_+^{(B)} \otimes a(k) + \sigma_-^{(B)} \otimes a^\dagger(k)].$$

---

qubits  $A$  et  $B$ .

2. Ce produit tensoriel infini est construit comme limite inductive des produits finis puis complétion.

3. On opte pour cette notation pour distinguer ces opérateurs agissant sur la chaîne de ceux agissant sur le petit système.

Dans la définition de  $H_{\text{int}}$ , on a fait apparaître l'énergie  $\delta$  pour que  $\lambda H_{\text{int}}$  soit homogène à une énergie quand  $\lambda$  n'a pas de dimension, c'est donc un paramètre réel qui décrit l'intensité du couplage du petit système avec la chaîne. De plus, on note pour commencer les temps d'interaction avec des "tildes". Pour  $j = A, B$ ,  $\tilde{\tau}_j$  est homogène à un temps et on définit :

$$\tau_j := \frac{\delta \tilde{\tau}_j}{\hbar} = \delta \tilde{\tau}_j \text{ et } \tau = \tau_A + \tau_B$$

sans dimension en posant pour la constante de Planck  $\hbar = 1$ .

Dans ce modèle il est important de remarquer que c'est le même élément de la chaîne, le  $k$ -ième spin, qui interagit pendant l'intervalle de temps  $[(k-1)\tilde{\tau}, (k-1)\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A[$  avec le qubit  $A$ , puis avec le qubit  $B$  pendant l'intervalle de temps  $[(k-1)\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A, k\tilde{\tau}[$ . C'est cela qui va permettre une modélisation de l'interaction des deux qubits avec un bain commun.

### 3.1.2 Présentation des résultats de ce chapitre.

Le but de ce chapitre est d'étudier l'intrication des deux qubits pour ce modèle d'interactions répétées.

On note  $\mathcal{U}(\lambda, \tau, \beta)$ , l'opérateur d'évolution, pour la matrice densité des deux qubits, associé à une interaction d'une durée renormalisée  $\tau$  avec un élément de la chaîne ; et  $\mathcal{U}(0)$  est l'opérateur d'évolution libre des deux qubits sur le temps  $\tau$ .

On commence par établir en section 3.3 le théorème 3.3.1 :

**Théorème 3.1.1.** *On suppose que la condition de résonance,  $\epsilon_A = \epsilon_B = \delta =: \epsilon$ , est satisfaite, alors :*

$$\rho(t) := \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ t/\lambda^2 \in \mathbb{N}}} \mathcal{U}(0)^{\frac{-t}{\lambda^2}} \mathcal{U}(\lambda, \tau, \beta)^{\frac{t}{\lambda^2}} (\rho(0)) = \exp[t\Gamma_\beta](\rho(0))$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta(\rho) &= -i[h_{\text{eff}}, \rho] + \mathcal{D}_\beta(\rho) \text{ avec} \\ h_{\text{eff}} &= \frac{-i}{2} \frac{1 - e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} C \text{ où } C = \tau_A \tau_B \left[ \sigma_-^{(A)} \otimes \sigma_+^{(B)} - \sigma_+^{(A)} \otimes \sigma_-^{(B)} \right] \text{ et} \\ \mathcal{D}_\beta(\rho) &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \left[ L \rho L^\dagger - \frac{1}{2} \{L^\dagger L, \rho\} + e^{-\beta\epsilon} \left( L^\dagger \rho L - \frac{1}{2} \{LL^\dagger, \rho\} \right) \right] \\ &\text{pour } L = \tau_A \sigma_-^{(A)} \otimes Id + \tau_B Id \otimes \sigma_-^{(B)}. \end{aligned}$$

Ce théorème donne l'évolution de l'état des deux qubits (en schéma d'interaction) au temps  $\frac{\tilde{\tau}t}{\lambda^2}$ , où  $t$  est un paramètre sans dimension, dans la limite



de van Hove  $\begin{cases} \lambda \rightarrow 0 \\ \tau \text{ fixé} \end{cases}$ , qui correspond physiquement à une énergie d'interaction très petite devant l'énergie  $\epsilon$  (des niveaux excités) de chaque qubit.

On donne un résultat analogue dans la limite de couplage singulier (théorème 3.4.2 de la section 3.4) :

**Théorème 3.1.2.** *On suppose que la condition de résonance,  $\epsilon_A = \epsilon_B = \delta =: \epsilon$ , est satisfaite, alors on a la limite forte suivante :*

$$\rho(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)^{\frac{t}{\tau}}(\rho) = e^{t(-i[h_0 + \widetilde{h}_{\text{eff}}] + \widetilde{\mathcal{D}}_\beta)}(\rho).$$

où  $\widetilde{h}_{\text{eff}}$  et  $\widetilde{\mathcal{D}}_\beta$  sont obtenus à partir de  $h_{\text{eff}}$  et  $\mathcal{D}_\beta$  en remplaçant  $\tau_A$  par  $p := \tau_A/\tau$  et  $\tau_B$  par  $1 - p := \tau_B/\tau$ .

Ce théorème donne l'état des deux qubits au temps  $t$  dans la limite de couplage singulier où  $\begin{cases} \tau \rightarrow 0 \\ \lambda^2 \tau = 1 \end{cases}$ .

De façon surprenante on retrouve le même lindbladien effectif dans ces deux limites alors que génériquement, comme il a été observé dans [5], le régime de van Hove diffère du second par la présence de l'opération "sharp", introduite dans le théorème de Davies. Ici, l'opération sharp ne modifie en fait pas le lindbladien<sup>4</sup>, comme on le verra plus loin (cf. proposition 3.3.2).

On va alors étudier  $\rho(t)$  donné par ces deux limites et surtout sa concurrence associée.

Tout d'abord, la proposition 3.6.1 de la section 3.6 montre que les états stationnaires et asymptotiques des deux qubits sont dans les limites de couplage faible ou singulier :

. Si  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B$  : une combinaison linéaire de l'état thermique et de l'état de Bell maximalement intriqué  $\sigma := |\psi\rangle\langle\psi|$  où  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|10\rangle - |01\rangle]$  (déjà rencontré dans le premier chapitre) dépendant uniquement du choix de l'état initial (cf. formule (3.32)).

. l'état thermique sinon.

### 3.1.2.1. Intrication asymptotique pour $0 \leq \beta < \infty$ .

Cela nous permet d'affirmer que pour  $0 < \beta < \infty$  on aura désintrication en temps fini<sup>5</sup> (cf. proposition 3.6.2 de la section 3.6).

De plus pour  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B$ , la présence de l'état  $\sigma$  maximalement intriqué va entraîner une concurrence asymptotique non nulle en général.

4. On avait déjà observé ce phénomène dans le chapitre d'introduction.

5. C'est, comme dans le chapitre d'Introduction, la continuité des valeurs propres de  $\rho\tilde{\rho}$  qui assure la désintrication en temps fini.

### 3.1.2.2. Pour $\beta = \infty$ .

L'état stationnaire et asymptotique étant  $|00\rangle\langle 00|$ , on sait que la concurrence asymptotique est nulle.

On va étudier plus finement ce cas  $\beta = \infty$  quand l'état initial appartient à  $\mathcal{E}_X$ , c'est-à-dire (voir chapitre précédent) que dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ , on a :

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & c & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

avec les conditions :

- .  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels positifs de somme un.
- .  $y$  est complexe tel que  $|y|^2 \leq ad$ .
- .  $x$  est complexe tel que  $|x|^2 \leq bc$ .

Pour  $\beta = \infty$  et  $\tau_A \neq \tau_B$  [resp.  $\tau_A = \tau_B$ ], les formules analytiques pour la matrice densité, établies en section 3.8.1 [resp. formule (3.28) de la section 3.8.2] nous permettent d'obtenir, dans la proposition 3.8.1 [resp. proposition 3.8.4] de la même section, le comportement asymptotique de la concurrence en fonction de l'état initial choisi :

**Proposition 3.1.1.** *Pour  $\beta = \infty$  et pour tout état initial de  $\mathcal{E}_X$ , si  $\tau_B > \tau_A$  alors*

$$C(\rho(t)) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 4(a+b) \frac{\tau_A \tau_B}{\tau_B^2 - \tau_A^2} e^{-\tau_A^2 t} \text{ si } a+b \neq 0$$

$$C(\rho(t)) = 0 \quad \forall t \text{ sinon};$$

si  $\tau_A > \tau_B$  alors

$$C(\rho(t)) = 2 \max\{0, C_1(t), C_2(t)\} \text{ avec}$$

$$C_1(t) = \left[ \left| \frac{2\tau_A \tau_B}{\tau_A^4 - \tau_B^4} (\tau_A^2 - 3\tau_B^2)a - \frac{2\tau_A \tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} b + x \right| - \sqrt{a} \right] e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} t}$$

$$+ o_{t \rightarrow \infty}(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} t}),$$

$$C_2(t) = \left[ |y| - \sqrt{a+b} \left[ \frac{\tau_A^6 - 5\tau_A^4 \tau_B^2 + 3\tau_A^2 \tau_B^4 + 9\tau_B^6}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2 (\tau_A^2 + \tau_B^2)} a + \frac{4\tau_A^2 \tau_B^2}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2} b \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \frac{\tau_A \tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} \Re x + c \right]^{\frac{1}{2}} \right] e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} t} + o_{t \rightarrow \infty}(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} t});$$

si  $\tau_A = \tau_B$  alors

$$C(\rho(t)) \sim_{t \rightarrow \infty} 2(a+b) \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 te^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \text{ si } a+b \neq 0$$

$$C(\rho(t)) = 0 \quad \forall t \text{ sinon.}$$

On recentre ensuite l'étude du cas où  $\beta = \infty$  pour un choix d'état initial parmi les états de Bell généralisé dans le but d'exhiber des comportements singuliers pour l'évolution de l'intrication.

**3.1.2.2.a. Évolution de la concurrence pour un état initial  $\rho(0) = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  avec  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \gamma|01\rangle$ .** Dans ce cas on observe un phénomène spectaculaire de rebond de la concurrence. Précisément si  $\tau_A \neq \tau_B$  [resp.  $\tau_A = \tau_B$ ], on a la proposition 3.8.2 [resp. remarque 3.8.7] de la section 3.8.1 [resp. section 3.8.2] qui dit que :

**Proposition 3.1.2.** *Si on choisit  $\rho_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  avec  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \gamma|01\rangle$  pour  $\alpha \neq 0$  et  $\arg(\alpha) = \arg(\gamma)$  comme état initial,*

- . si  $\frac{\tau_A}{\tau} \in \{0\} \cup \left[\frac{(1-\gamma/\alpha) + \sqrt{1+(\gamma/\alpha)^2}}{2}, 1\right]$  alors la concurrence ne s'annule jamais.
- . si  $\frac{\tau_A}{\tau} \in ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, \frac{(1-\gamma/\alpha) + \sqrt{1+(\gamma/\alpha)^2}}{2}[$  alors la concurrence présente un point de rebond<sup>6</sup> en  $t_{\text{dés-réint}} = \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{1/2-p} \ln \left(1 + \frac{1/2-p}{p(1-p)} \frac{\gamma}{\alpha}\right)$  où  $p := \frac{\tau_A}{\tau}$ .
- . si  $\tau_A = \tau_B$ , on retrouve le même phénomène de rebond qui apparaît au temps  $t_{\text{dés-réint}} = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{2}{\tau}\right)^2$ .

Cette proposition sont illustrée sur les figures 3.2 et 3.3.

---

6. Un point de rebond de la concurrence est un point où la concurrence s'annule uniquement en ce point au moins sur un voisinage de ce point.

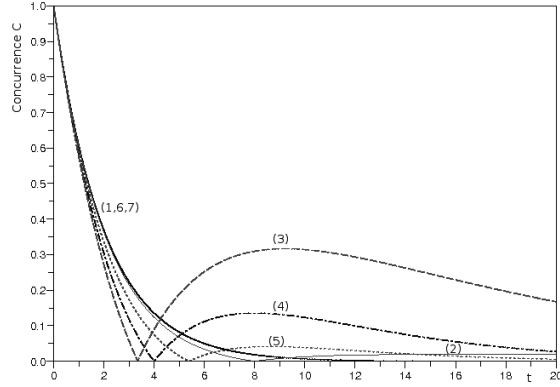


FIGURE 3.2 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = p\tau$ ,  $\tau = 1$  et pour l'état initial  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$  en fonction de  $t$  pour (1) :  $p = 0$ , (2) :  $p = 0.001$ , (3) :  $p = 0.3$ , (4) :  $p = 0.5$ , (5) :  $p = 0.6$ , (6) :  $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , (7) :  $p = 1$ . Les courbes (1) et (7) sont effectivement les mêmes. La courbe (6) en diffère très légèrement mais cela ne peut apparaître sur le graphique.

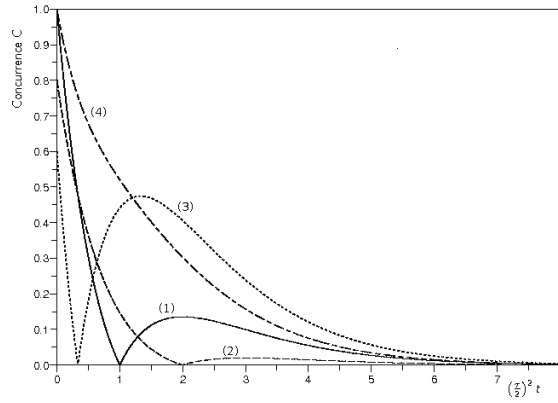


FIGURE 3.3 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  en fonction de  $(\frac{\tau}{2})^2 t$  avec pour états initiaux : (1) :  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$ , (2) :  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|10\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|01\rangle$ , (3) :  $|\Phi\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|01\rangle$ , (4) :  $|\Phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$ .

On montre de façon perturbative, dans la même section, comment ce phénomène disparaît aux petites températures pour laisser place à l'apparition d'un palier d'intrication nulle (cf. figure 3.4<sup>7</sup>).

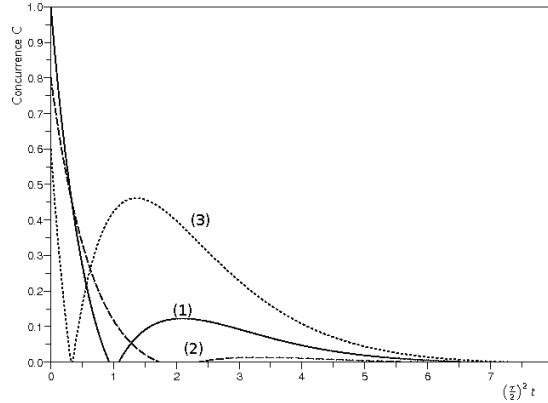


FIGURE 3.4 – Concurrence des deux qubits pour  $e^{-\beta\epsilon} = 0.001$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  en fonction de  $(\frac{\tau}{2})^2 t$  pour les états initiaux : (1) :  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$ , (2) :  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|10\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|01\rangle$ , (3) :  $|\Phi\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|01\rangle$ .

**3.1.2.2.b. Évolution de la concurrence pour un état initial pour  $\rho(0) = \rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  avec  $|\Psi\rangle = \alpha|11\rangle + \gamma|00\rangle$ .** A contrario on n'observe pas de phénomène de rebond de la concurrence dans ce cas, mais l'apparition d'un ou deux paliers d'intrication nulle, défini comme un intervalle de temps non réduit à un point où la concurrence est nulle, comme le montre la figure 3.5 et la proposition 3.8.5 de la section 3.8.2 :

**Proposition 3.1.3.** *Si  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = \tau_B$  et si on choisit  $\rho_\Psi$  comme état initial, il existe deux constantes  $c_1 \simeq 1,093$  et  $c_2 \simeq 1,106$  telles que :*

- . si  $c_1 \leq \frac{1}{|\alpha|^2} \leq c_2$  alors il existe deux paliers où la concurrence s'annule.
- . sinon la concurrence s'annule uniquement sur un palier.

Pour conclure l'étude du cas où la température de la chaîne est nulle ( $\beta = \infty$ ), on propose d'exhiber un autre phénomène spectaculaire de résurgence de l'intrication qui apparaît par exemple quand on choisit  $|11\rangle\langle 11|$  pour état initial. On montre dans la section 3.8.1 que pour ce choix d'état initial, on a intrication non nulle pour  $t$  assez grand si  $\tau_A \in ]0, p_0\tau[$  où  $p_0 \simeq 0.584$  est

<sup>7</sup> Volontairement on ne représente pas sur cette figure la courbe pour  $|\Phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$  car le but est ici de montrer la disparition du point de rebond au profit d'un palier, hors il se trouve que ce cas ne présente pas de point de rebond pour  $\beta = \infty$ .

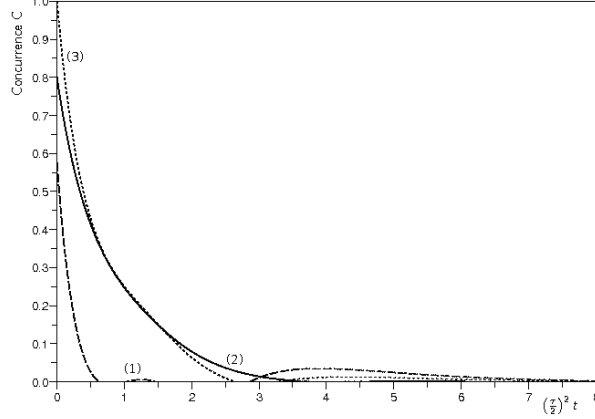


FIGURE 3.5 – Concurrence des deux qubits, pour  $\beta = \infty$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$ , en fonction de  $(\frac{\tau}{2})^2 t$  avec pour état initial : (1) :  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1.1}}|11\rangle + \sqrt{\frac{0.1}{1.1}}|00\rangle$ , (2) :  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|11\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|00\rangle$ , (3) :  $|\Psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$ .

l'unique racine dans  $]1/2, 1]$  du polynôme  $Q(X) = 4X^4 - 12X^3 + 12X^2 - 2X - 1$ . Dans ce cas, comme initialement, la concurrence est nulle, il existe nécessairement un temps minimum  $t_{\text{intri}}(\tau_A)$  tel que  $C(\rho(t_{\text{intri}}(\tau_A))) = 0$  et  $C(\rho(t)) > 0$  pour  $t$  appartenant à un voisinage à droite de  $t_{\text{intri}}(\tau_A)$  ce que confirme la figure 3.6. Le temps  $t_{\text{intri}}(\tau_A)$  est donc le premier instant où il y a création d'intrication. En posant  $p := \frac{\tau_A}{\tau}$ , on a simulé numériquement la fonction  $t_{\text{intri}}$  et on l'a représentée sur la figure 3.7. Elle suggère que  $t_{\text{intri}}$  a une limite finie en  $0^+$  ce que confirme la proposition 3.8.3 de la même section :

**Proposition 3.1.4.** *Si  $\beta = \infty$  et  $\rho(0) = |11\rangle\langle 11|$ , on a  $\lim_{\tau_A \rightarrow 0^+} t_{\text{intri}}(\tau_A) = t_0 \tau^2$ , où  $t_0$  est l'unique zéro sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $f$  définie par  $f(t) = 4[-2e^{-t} + 3e^{-\frac{1}{2}t} - 1]^2 - [(-9t - 20)e^{-t} + 24e^{-\frac{t}{2}} + (t - 4)]e^{-t}$ , soit numériquement  $t_0 \simeq 2.197$ .*

**Remarque 3.1.1.** La figure 3.7 semble indiquer que  $t_{\text{intri}}$  tend vers l'infini en  $p_0$ . Malheureusement nous n'avons ni pu montrer ce résultat analytiquement, ni numériquement car les erreurs numériques étaient trop importantes. Pour  $p \geq p_0$ , la concurrence est, si elle est non nulle, de toute façon très petite ( $C \leq 10^{-20}$ ).

**Remarque 3.1.2.** Les phénomènes de production d'intrication présentés dans cette section sont dûs à l'hamiltonien effectif  $h_{\text{eff}}$ . En fait tout se passe

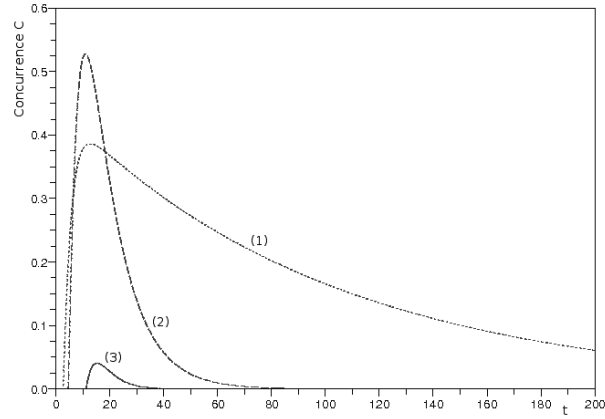


FIGURE 3.6 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = p\tau$ ,  $\tau = 1$  et pour l'état initial  $|11\rangle\langle 11|$  en fonction de  $t$  pour (1) :  $p = 0.1$ , (2) :  $p = 0.3$ , (3) :  $p = 0.5$ .

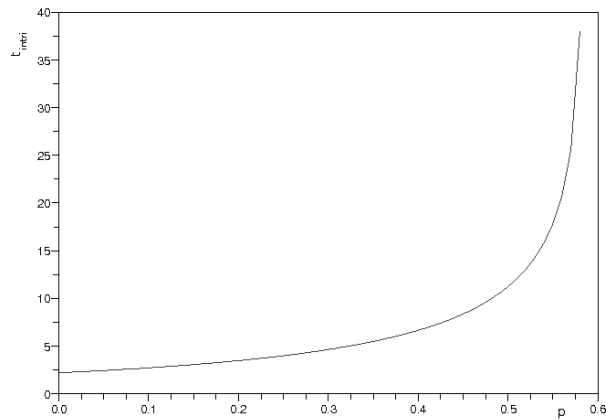


FIGURE 3.7 –  $t_{\text{intri}}$  en fonction de  $p$  pour  $\tau = 1$ .

ici comme si les deux qubits interagissaient entre eux, ce qui, on le sait, est souvent source d'intrication.

**3.1.2.3. Pour  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B$ .**

Dans ce cas, en se servant des formules analytiques établies au début de la section 3.9, on donne, dans la proposition 3.9.1, le comportement asymptotique de la concurrence en fonction de l'état initial choisi dans  $\mathcal{E}_X$  (cf. figure 3.8) :

**Proposition 3.1.5.** *Pour  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  et pour tout état initial de  $\mathcal{E}_X$ , on a :*

*Si  $a + d + 2\Re(x) < 0$  alors  $C(\rho(t)) \sim_{t \rightarrow \infty} -[a + d + 2\Re(x)]$ .*

*Si  $a + d + 2\Re(x) > 0$  alors il existe un  $t_0$  tel que  $C(\rho(t)) = 0 \forall t \geq t_0$ .*

*Si  $a + d + 2\Re(x) = 0$  avec  $a + d \neq 0$  ou  $\Im(x) \neq 0$  alors*

$$C(\rho(t)) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{2} [4\Im(x)^2 + (a - d)^2] e^{-2t}.$$

*Si  $a + d + 2\Re(x) = 0$  avec  $a + d = 0$  et  $\Im(x) = 0$*

*alors  $C(\rho(t)) = 0 \forall t \geq 0$ .*

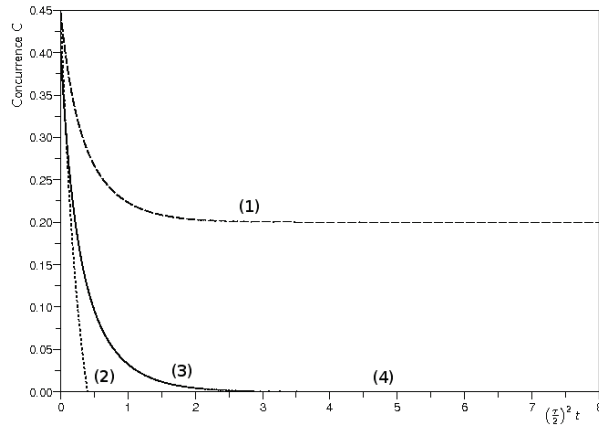


FIGURE 3.8 – Concurrence dans le cas où  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  en fonction de  $(\frac{\tau}{2})^2 t$  pour l'état initial donné par la matrice X telle que : (1) :  $a = d = y = 0$ ,  $b = \frac{1}{3}$ ,  $c = \frac{2}{3}$  et  $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ , (2)  $b = c = x = 0$  et  $a = d = y = \frac{1}{2}$ , (3)  $a = \frac{1}{5}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{3}{10}$ ,  $d = \frac{1}{4}$ ,  $x = \frac{-1+i}{6}$ ,  $y = \frac{1}{7}$ , (4)  $a = d = b = x = y = 0$ ,  $b = \frac{1}{3}$  et  $c = \frac{1}{3}$  (cette courbe est confondue avec l'axe des abscisses).

L'évolution qualitative en temps pour ce cas est donnée par le théorème 3.9.1 de la même section :



**Théorème 3.1.3.** *Si  $\beta = 0$ ,  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  et si  $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ , alors  $t \mapsto C(\rho(t))$  est une fonction décroissante.*

## 3.2 Évolution exacte.

Notre but est de comprendre, pour le modèle décrit dans la section 3.1.1, l'évolution de l'intrication entre les deux qubits. On a donc besoin de calculer à tous temps la matrice densité réduite  $\rho(t)$  donnée par :

$$\rho(t) = \text{tr}_{\mathcal{H}_c}(\rho_{\text{total}}(t)).$$

où  $\rho_{\text{total}}(t)$  est calculée via l'évolution de Schrödinger.

L'opérateur d'évolution entre les temps  $(k-1)\tilde{\tau}$  et  $(k-1)\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A$  est :

$$V_{k,\tilde{\tau}_A} = e^{-i\tilde{\tau}_A(H_0+H_c+\lambda H_{\text{int},A}(k))}.$$

Quant à celui entre les temps  $(k-1)\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_A$  et  $k\tilde{\tau}$ , c'est :

$$V_{k,\tilde{\tau}_B} = e^{-i\tilde{\tau}_B(H_0+H_c+\lambda H_{\text{int},B}(k))}.$$

Ainsi entre les temps  $(k-1)\tilde{\tau}$  et  $k\tilde{\tau}$ , l'opérateur d'évolution est :

$$\begin{aligned} V_k &= V_{k,\tilde{\tau}_B} V_{k,\tilde{\tau}_A} = e^{-i\tilde{\tau} Id \otimes \sum_{j \neq k} \delta a^\dagger(j)a(j)} U_k \text{ avec} \\ U_k &= e^{-i\tilde{\tau}_B(H_0+Id \otimes \delta a^\dagger(k)a(k)+\lambda H_{\text{int},B}(k))} e^{-i\tilde{\tau}_A(H_0+Id \otimes \delta a^\dagger(k)a(k)+\lambda H_{\text{int},A}(k))} \end{aligned}$$

On remarque que  $U_k$  ne fait intervenir que le  $k$ -ième élément de la chaîne et qu'il commute avec  $e^{-i\tilde{\tau} Id \otimes \sum_{j \neq k} \delta a^\dagger(j)a(j)}$ . Ceci va grandement simplifier les calculs. Ainsi pour  $t = k\tilde{\tau}$ , on a :

$$\begin{aligned} \rho(k\tilde{\tau}) &= \text{tr}_{\mathcal{H}_c}(\mathcal{V}(k\tilde{\tau})(\rho_{\text{total}}(0))) \text{ où } \mathcal{V}(k\tilde{\tau}) = (V_k \dots V_1) \cdot (V_1^\dagger \dots V_k^\dagger) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_k} \left( e^{-i\tilde{\tau} \sum_{j=1}^{(k-1)} (k-j)\delta a^\dagger(j)a(j)} (U_k \otimes \dots \otimes U_1) e^{-i\tilde{\tau} \sum_{j=2}^k (j-1)\delta a^\dagger(j)a(j)} \right. \\ &\quad \left. \rho_{\text{total}}(0) e^{i\tilde{\tau} \sum_{j=2}^k (j-1)\delta a^\dagger(j)a(j)} (U_1^\dagger \otimes \dots \otimes U_k^\dagger) e^{i\tilde{\tau} \sum_{j=1}^{(k-1)} (k-j)\delta a^\dagger(j)a(j)} \right) \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_k} \left( U_k \otimes \dots \otimes U_1 \rho_{\text{total}}(0) U_1^\dagger \otimes \dots \otimes U_k^\dagger \right). \end{aligned}$$

La dernière égalité est dûe d'une part à la cyclicité de la trace et d'autre part au fait que  $\rho_{\text{total}}(0)$  commute avec  $e^{i\tilde{\tau} \sum_{j=2}^k (j-1)\delta a^\dagger(j)a(j)}$ .

On remarque que chaque élément de la chaîne a la même influence sur les deux qubits, aussi on peut simplifier les notations en ôtant l'indice référant à l'élément de chaîne impliqué. On note donc :

$$. H(0) = h_0 \otimes Id + Id \otimes \delta a^\dagger a \text{ l'hamiltonien libre du petit système et d'un élément de la chaîne,}$$

- .  $H_{\text{int},A} = \delta\sigma_+^{(A)} \otimes a + \delta\sigma_-^{(A)} \otimes a^\dagger$  [resp.  $H_{\text{int},B}$ ] l'hamiltonien d'interaction du petit système avec un élément de la chaîne et
- .  $U := e^{-i\tilde{\tau}_B(H(0)+\lambda H_{\text{int},B})} e^{-i\tilde{\tau}_A(H(0)+\lambda H_{\text{int},A})}$  l'opérateur d'évolution correspondant.

Les éléments de la chaîne au delà du  $k$ -ième n'intervenant pas, la markovianité du modèle et le choix de l'état thermique pour la chaîne entraînent :

$$\begin{aligned} \rho(k\tilde{\tau}) &= \mathcal{U}(\lambda, \tilde{\tau}, \beta)^k(\rho(0)) \\ &= \frac{1}{(1 + e^{-\beta\delta})^k} \left[ \mathcal{U}_{00} + e^{-\beta\delta}\mathcal{U}_{01} + \mathcal{U}_{10} + e^{-\beta\delta}\mathcal{U}_{11} \right]^k(\rho(0)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où les  $\mathcal{U}_{nm}$  sont des opérateurs sur l'ensemble des états du petit système tels que :

$$\mathcal{U}_{nm}(\rho) = \langle n|U|m\rangle \rho\langle m|U^\dagger|n\rangle = U_{nm}\rho U_{nm}^\dagger \quad (3.2)$$

Ici  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  sont respectivement l'état fondamental et excité d'un élément de la chaîne<sup>8</sup>. De plus ici on note  $O_{nm} = \langle n|O|m\rangle$  pour tout opérateur  $O$  sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^2$  qu'on aura réduit sur  $\mathcal{H}_0$ . À présent on se propose de faire le calcul explicite dans différents régimes.

### 3.3 Etablissement du résultat fondamental dans la limite de van Hove.

On considère ici le cas limite suivant :

- .  $\tau$  est fini
- .  $\lambda \rightarrow 0$
- . On note  $k$  le nombre d'interactions, alors  $k = \frac{t}{\lambda^2} \rightarrow \infty$

On commence par développer en théorie de perturbation l'opérateur  $U$  pour  $\tau$  fixé<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} U &= \left[ e^{-i\tilde{\tau}_B H(0)} + \lambda F_B(\tilde{\tau}_B) + \lambda^2 G_B(\tilde{\tau}_B) + O(\lambda^3) \right] \\ &\quad \times \left[ e^{-i\tilde{\tau}_A H(0)} + \lambda F_A(\tilde{\tau}_A) + \lambda^2 G_A(\tilde{\tau}_A) + O(\lambda^3) \right] \\ &= e^{-i\tilde{\tau} H(0)} + \lambda \left[ e^{-i\tilde{\tau}_B H(0)} F_A(\tilde{\tau}_A) + F_B(\tilde{\tau}_B) e^{-i\tilde{\tau}_A H(0)} \right] \\ &\quad + \lambda^2 \left[ G_B(\tilde{\tau}_B) e^{-i\tilde{\tau}_A H(0)} + e^{-i\tilde{\tau}_B H(0)} G_A(\tilde{\tau}_A) + F_B(\tilde{\tau}_B) F_A(\tilde{\tau}_A) \right] + O(\lambda^3), \end{aligned}$$

avec pour  $j = A, B$  :

$$\begin{aligned} F_j(\tilde{\tau}_j) &= -ie^{-i\tilde{\tau}_j H(0)} \int_0^{\tilde{\tau}_j} ds e^{isH(0)} H_{\text{int},j} e^{-isH(0)} \\ G_j(\tilde{\tau}_j) &= -e^{-i\tilde{\tau}_j H(0)} \int_0^{\tilde{\tau}_j} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 e^{is_1 H(0)} H_{\text{int},j} e^{-i(s_1-s_2)H(0)} H_{\text{int},j} e^{-is_2 H(0)}. \end{aligned}$$

8. Il ne faut pas faire la confusion avec les états des qubits.

9. On effectue le développement jusqu'à l'ordre deux en  $\lambda$  car les termes d'ordre un ne vont pas contribuer comme on le verra par la suite.

Comme  $H(0)_{nm} = \langle n|H(0)|n \rangle = \delta_{nm}H(0)_{nn}$ , on a :

$$\begin{aligned} U_{nm} &= \delta_{nm}e^{-i\tilde{\tau}H(0)_{mm}} + \lambda \left[ e^{-i\tilde{\tau}_B H(0)_{nn}} F_A(\tilde{\tau}_A)_{nm} + F_B(\tilde{\tau}_B)_{nm} e^{-i\tilde{\tau}_A H(0)_{mm}} \right] \\ &+ \lambda^2 \left[ G_B(\tilde{\tau}_B)_{nm} e^{-i\tilde{\tau}_A H(0)_{mm}} + e^{-i\tilde{\tau}_B H(0)_{nn}} G_A(\tilde{\tau}_A)_{nm} + (F_B(\tilde{\tau}_B)F_A(\tilde{\tau}_A))_{nm} \right] \\ &+ O(\lambda^3). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} U_{00} &= e^{-i\tilde{\tau}h_0} + \lambda \left[ e^{-i\tilde{\tau}_B h_0} F_A(\tilde{\tau}_A)_{00} + F_B(\tilde{\tau}_B)_{00} e^{-i\tilde{\tau}_A h_0} \right] \\ &+ \lambda^2 \left[ G_B(\tilde{\tau}_B)_{00} e^{-i\tilde{\tau}_A h_0} + e^{-i\tilde{\tau}_B h_0} G_A(\tilde{\tau}_A)_{00} + (F_B(\tilde{\tau}_B)F_A(\tilde{\tau}_A))_{00} \right] + O(\lambda^3), \end{aligned}$$

$$U_{01} = \lambda \left[ e^{-i\tilde{\tau}_B h_0} F_A(\tilde{\tau}_A)_{01} + F_B(\tilde{\tau}_B)_{01} e^{-i\tilde{\tau}_A (h_0 + \delta)} \right] + O(\lambda^2),$$

$$U_{10} = \lambda \left[ e^{-i\tilde{\tau}_B (h_0 + \delta)} F_A(\tilde{\tau}_A)_{10} + F_B(\tilde{\tau}_B)_{10} e^{-i\tilde{\tau}_A h_0} \right] + O(\lambda^2),$$

$$\begin{aligned} U_{11} &= e^{-i\tilde{\tau}(h_0 + \delta)} + \lambda \left[ e^{-i\tilde{\tau}_B (h_0 + \delta)} F_A(\tilde{\tau}_A)_{11} + F_B(\tilde{\tau}_B)_{11} e^{-i\tilde{\tau}_A (h_0 + \delta)} \right] \\ &+ \lambda^2 \left[ G_B(\tilde{\tau}_B)_{11} e^{-i\tilde{\tau}_A (h_0 + \delta)} + e^{-i\tilde{\tau}_B (h_0 + \delta)} G_A(\tilde{\tau}_A)_{11} + (F_B(\tilde{\tau}_B)F_A(\tilde{\tau}_A))_{11} \right] \\ &+ O(\lambda^3). \end{aligned} \tag{3.3}$$

On a pour  $j = A, B$  :

$$F_j(\tilde{\tau}_j)_{nm} = 0 \tag{3.4}$$

à cause de la linéarité du hamiltonien d'interaction en  $a$  et  $a^\dagger$ , puis

$$\begin{aligned} F_j(\tilde{\tau}_j)_{01} &= [F_j(-\tilde{\tau}_j)_{10}]^\dagger = -ie^{-i\tilde{\tau}_j h_0} \int_0^{\tilde{\tau}_j} ds e^{ish_0} \delta\sigma_+^{(j)} e^{-is(h_0 + \delta)} \\ &= -ie^{-i\tilde{\tau}_j h_0} \int_0^{\tilde{\tau}_j} ds e^{is(\epsilon_j - \delta)} \delta\sigma_+^{(j)} \\ &= \begin{cases} -i\tilde{\tau}_j e^{-i\tilde{\tau}_j h_0} \delta\sigma_+^{(j)} & \text{si } \epsilon_j = \delta \\ \frac{1 - e^{i\tilde{\tau}_j(\epsilon_j - \delta)}}{\epsilon_j - \delta} e^{-i\tilde{\tau}_j h_0} \delta\sigma_+^{(j)} & \text{si } \epsilon_j \neq \delta \end{cases} \\ F_j(\tilde{\tau}_j)_{10} &= [F_j(-\tilde{\tau}_j)_{01}]^\dagger = \begin{cases} -i\tilde{\tau}_j e^{-i\tilde{\tau}_j (h_0 + \delta)} \delta\sigma_-^{(j)} & \text{si } \epsilon_j = \delta \\ \frac{1 - e^{i\tilde{\tau}_j(\delta - \epsilon_j)}}{\delta - \epsilon_j} e^{-i\tilde{\tau}_j (h_0 + \delta)} \delta\sigma_-^{(j)} & \text{si } \epsilon_j \neq \delta \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

en utilisant les relations de commutation  $[h_0, \sigma_{\pm}^{(j)}] = \pm \epsilon_j \sigma_{\pm}^{(j)}$  et le fait que  $e^{ish_0} \sigma_{\pm}^{(j)} e^{-ish_0} = e^{\pm i s \epsilon_j} \sigma_{\pm}^{(j)}$ . Enfin, on a :

$$\begin{aligned} [F_B(\tilde{\tau}_B)F_A(\tilde{\tau}_A)]_{00} &= F_B(\tilde{\tau}_B)_{01}F_A(\tilde{\tau}_A)_{10} \\ [F_B(\tilde{\tau}_B)F_A(\tilde{\tau}_A)]_{01} &= 0 \\ [F_B(\tilde{\tau}_B)F_A(\tilde{\tau}_A)]_{10} &= 0 \\ [F_B(\tilde{\tau}_B)F_A(\tilde{\tau}_A)]_{11} &= F_B(\tilde{\tau}_B)_{10}F_A(\tilde{\tau}_A)_{01}. \end{aligned}$$

De même on obtient :

$$\begin{aligned} G_j(\tilde{\tau}_j)_{00} &= G_j(-\tilde{\tau}_j)_{00}^\dagger = -e^{-i\tilde{\tau}_j h_0} \int_0^{\tilde{\tau}_j} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 e^{i(s_1-s_2)(\epsilon_j-\delta)} \delta^2 \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} \\ &= \begin{cases} -\frac{\tilde{\tau}_j^2}{2} e^{-i\tilde{\tau}_j h_0} \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} & \text{si } \epsilon_j = \delta \\ \frac{-1}{i(\epsilon_j-\delta)} \left[ \frac{e^{i(\epsilon_j-\delta)\tilde{\tau}_j}-1}{i(\epsilon_j-\delta)} - \tilde{\tau}_j \right] e^{-i\tilde{\tau}_j h_0} \sigma_+^{(j)} \sigma_-^{(j)} & \text{si } \epsilon_j \neq \delta \end{cases} \\ G_j(\tilde{\tau}_j)_{01} &= 0 \\ G_j(\tilde{\tau}_j)_{10} &= 0 \\ G_j(\tilde{\tau}_j)_{11} &= G_j(-\tilde{\tau}_j)_{11}^\dagger \\ &= \begin{cases} -\frac{\tilde{\tau}_j^2}{2} e^{-i\tilde{\tau}_j(h_0+\delta)} \delta^2 \sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(j)} & \text{si } \epsilon_j = \delta \\ \frac{-1}{i(\delta-\epsilon_j)} \left[ \frac{e^{i(\delta-\epsilon_j)\tilde{\tau}_j}-1}{i(\delta-\epsilon_j)} - \tilde{\tau}_j \right] e^{-i\tilde{\tau}_j(h_0+\delta)} \delta^2 \sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(j)} & \text{si } \epsilon_j \neq \delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi en notant  $\mathcal{U}(0) := e^{-i\tilde{\tau}h_0} \cdot e^{i\tilde{\tau}h_0}$ , on a d'après (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{nm} &= \delta_{nm} \mathcal{U}(0) + \lambda^2 \mathcal{U}_{nm}^{(2)} + O(\lambda^3), \text{ avec} \\ \mathcal{U}_{00}^{(2)} &= e^{-i\tilde{\tau}h_0} \cdot \left( e^{i\tilde{\tau}Ah_0} G_B(-\tilde{\tau}_B)_{00} + G_A(-\tilde{\tau}_A)_{00} e^{i\tilde{\tau}Bh_0} \right. \\ &\quad \left. + F_A(-\tilde{\tau}_A)_{01} F_B(-\tilde{\tau}_B)_{10} \right) + \left( G_B(\tilde{\tau}_B)_{00} e^{-i\tilde{\tau}Ah_0} + e^{-i\tilde{\tau}Bh_0} G_A(\tilde{\tau}_A)_{00} \right. \\ &\quad \left. + F_B(\tilde{\tau}_B)_{01} F_A(\tilde{\tau}_A)_{10} \right) \cdot e^{i\tilde{\tau}h_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{01}^{(2)} &= \left( e^{-i\tilde{\tau}Bh_0} F_A(\tilde{\tau}_A)_{01} + F_B(\tilde{\tau}_B)_{01} e^{-i\tilde{\tau}A(h_0+\delta)} \right) \\ &\quad \times \cdot \left( F_A(-\tilde{\tau}_A)_{10} e^{i\tilde{\tau}Bh_0} + e^{i\tilde{\tau}A(h_0+\delta)} F_B(-\tilde{\tau}_B)_{10} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{10}^{(2)} &= \left( e^{-i\tilde{\tau}B(h_0+\delta)} F_A(\tilde{\tau}_A)_{10} + F_B(\tilde{\tau}_B)_{10} e^{-i\tilde{\tau}Ah_0} \right) \\ &\quad \times \cdot \left( F_A(-\tilde{\tau}_A)_{01} e^{i\tilde{\tau}B(h_0+\delta)} + e^{i\tilde{\tau}Ah_0} F_B(-\tilde{\tau}_B)_{01} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{11}^{(2)} &= e^{-i\tilde{\tau}(h_0+\delta)} \cdot \left( e^{i\tilde{\tau}_A(h_0+\delta)} G_B(-\tilde{\tau}_B)_{11} + G_A(-\tilde{\tau}_A)_{11} e^{i\tilde{\tau}_B(h_0+\delta)} \right. \\
&\quad \left. + F_A(-\tilde{\tau}_A)_{10} F_B(-\tilde{\tau}_B)_{01} \right) \\
&\quad + \left( G_B(\tilde{\tau}_B)_{11} e^{-i\tilde{\tau}_A(h_0+\delta)} + e^{-i\tilde{\tau}_B(h_0+\delta)} G_A(\tilde{\tau}_A)_{11} \right. \\
&\quad \left. + F_B(\tilde{\tau}_B)_{10} F_A(\tilde{\tau}_A)_{01} \right) \cdot e^{i\tilde{\tau}(h_0+\delta)} \tag{3.7}
\end{aligned}$$

En intégrant ces décompositions perturbatives dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(\lambda, \tau, \beta)^k &= \left[ \mathcal{U}(0) + \lambda^2 \mathcal{T}_\beta + O(\lambda^3) \right]^k \tag{3.8} \\
\text{avec } \mathcal{T}_\beta &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\delta}} \left( \mathcal{U}_{00}^{(2)} + \mathcal{U}_{10}^{(2)} + e^{-\beta\delta} \left( \mathcal{U}_{01}^{(2)} + \mathcal{U}_{11}^{(2)} \right) \right).
\end{aligned}$$

On voit dans l'équation précédente (3.8) qu'il faut que le nombre d'interactions  $k$  croissent en  $1/\lambda^2$  pour espérer avoir une limite finie quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Ce choix, que nous adoptons ici, correspond à la classique limite de van Hove. On pose donc comme indiqué plus haut  $k = \frac{t}{\lambda^2}$ . Le paramètre  $t$  sera fixé quand on prendra la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . La limite de van Hove est une limite aux temps longs. Mais ce paramètre  $t$  va nous permettre d'avoir une liberté supplémentaire sur l'échelle des temps considérés. Il nous permettra de visualiser l'évolution de la matrice densité aux temps longs.

De plus on remarque, toujours dans le but d'avoir une limite finie dans (3.8), qu'il faut passer en schéma d'interaction, c'est-à-dire intégrer l'évolution libre donnée par  $\mathcal{U}(0)^{\frac{t}{\lambda^2}}$ . On souhaite donc montrer que l'opérateur  $\mathcal{U}(0)^{\frac{t}{\lambda^2}} \left[ \mathcal{U}(0) + \lambda^2 \mathcal{T}_\beta + O(\lambda^3) \right]^{\frac{t}{\lambda^2}}$  admet une limite finie quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Pour cela il suffit d'appliquer la proposition 3.1 de l'article [5] d'Attal et Joye :

**Proposition 3.3.1.** *Soient  $V(x)$ ,  $x \in [0, x_0]$  et  $R$  des opérateurs bornés sur un espace de Banach  $\mathcal{B}$  tels que  $V(x) = V(0) + xR + O(x^{3/2})$ , et où  $V(0)$  est une isométrie dont la décomposition spectrale est  $V(0) = \sum_{j=0}^r e^{-iE_j} P_j$  avec  $r < \infty$ . On pose  $h = \sum_{j=0}^r E_j P_j$  donc  $V(0) = e^{-ih}$ . Soit  $t_0 \geq 0$  on a uniformément en  $t$  pour  $t \in [0, t_0]$  si  $x \rightarrow 0$  avec  $t/x \in \mathbb{N}$  :*

$$V(0)^{-\frac{t}{x}} V(x)^{\frac{t}{x}} = e^{te^{ih} R^\sharp} + O(x^{1/2})$$

avec  $K^\sharp = \sum_{j=0}^r P_j K P_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{ish} K e^{-ish} ds$  pour tout  $K \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ .

□ On reproduit, dans l'annexe F, la preuve d'Attal et Joye de cette proposition [5]. □

Appliquée à notre cas la proposition 3.3.1 donne en remplaçant  $h$  par  $\mathcal{U}(0)$ ,  $x$  par  $\lambda^2$  et  $V(x)$  par  $\mathcal{U}(\lambda, \beta)$  :

**Théorème 3.3.1.** Soient  $\{\mu\}$  l'ensemble des valeurs propres de  $\mathcal{U}(0)$  et  $P_\mu$  les projecteurs orthogonaux correspondants. Alors

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ t/\lambda^2 \in \mathbb{N}}} \mathcal{U}(0) \frac{-t}{\lambda^2} \mathcal{U}(\lambda, \tau, \beta) \frac{t}{\lambda^2} (\rho(0)) = \exp [t\Gamma_\beta^\#](\rho(0))$$

avec  $\Gamma_\beta = \mathcal{U}(0)^{-1} \mathcal{T}_\beta$  et  $\Gamma_\beta^\# = \sum_{\{\mu\}} P_\mu \Gamma_\beta P_\mu$ .

Explicitons les opérateurs intervenant dans ce théorème. On commence par décrire  $\mathcal{U}(0)$ . Pour ce faire on considère la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  des qubits  $A$  et  $B$ . Sur  $Vect(\{|ij\rangle\langle kl|\}_{i,j,k,l=0,1})$ ,  $\mathcal{U}(0)$  est une isométrie. Ses valeurs propres et ses vecteurs propres sont respectivement si  $\epsilon_A \neq \epsilon_B$  :

$$\begin{aligned} & e^{-i\tau(\epsilon_A + \epsilon_B)} \text{ et } |11\rangle\langle 00| \\ & e^{-i\tau\epsilon_A} \text{ et } |11\rangle\langle 01|, |10\rangle\langle 00| \\ & e^{-i\tau\epsilon_B} \text{ et } |11\rangle\langle 10|, |01\rangle\langle 00| \\ & e^{-i\tau(\epsilon_A - \epsilon_B)} \text{ et } |10\rangle\langle 01| \\ & 1 \text{ et } |11\rangle\langle 11|, |10\rangle\langle 10|, |01\rangle\langle 01|, |00\rangle\langle 00| \\ & e^{i\tau(\epsilon_A - \epsilon_B)} \text{ et } |01\rangle\langle 10| \\ & e^{i\tau\epsilon_A} \text{ et } |01\rangle\langle 11|, |00\rangle\langle 10| \\ & e^{i\tau\epsilon_B} \text{ et } |10\rangle\langle 11|, |00\rangle\langle 01| \\ & e^{i\tau(\epsilon_A + \epsilon_B)} \text{ et } |00\rangle\langle 11| \end{aligned}$$

et si  $\epsilon_A = \epsilon_B = \epsilon$  c'est-à-dire, si les deux qubits ont même énergie :

$$\begin{aligned} & e^{-2i\tau\epsilon} \text{ et } |11\rangle\langle 00| \\ & e^{-i\tau\epsilon} \text{ et } |11\rangle\langle 10|, |11\rangle\langle 01|, |10\rangle\langle 00|, |01\rangle\langle 00| \\ & 1 \text{ et } |11\rangle\langle 11|, |10\rangle\langle 10|, |10\rangle\langle 01|, |01\rangle\langle 10|, |01\rangle\langle 01|, |00\rangle\langle 00| \\ & e^{i\tau\epsilon} \text{ et } |10\rangle\langle 11|, |01\rangle\langle 11|, |00\rangle\langle 10|, |00\rangle\langle 01| \\ & e^{2i\tau\epsilon} \text{ et } |00\rangle\langle 11|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

**Hypothèse 3.3.1.** Dès lors nous allons considérer ce second cas où  $\epsilon_A = \epsilon_B = \epsilon$ . En effet en pratique les expériences d'intrication sont souvent réalisées avec des qubits identiques. De plus nous allons également supposer que les éléments de la chaîne ont mêmes énergies que les qubits  $A$  et  $B$  :  $\epsilon = \delta$ . On traite donc le cas où les qubits sont en résonance avec les éléments de la chaîne. Ce qui, on le rappelle, est le cas dans la plupart des expériences d'optique quantique notamment les anciennes (avant 2004) expériences de l'équipe de Serge Haroche<sup>10</sup> ([21, 85, 50, 48]).

10. Dans les expériences actuelles, ils étudient justement le cas hors résonance.

Sous cette hypothèse, en remplaçant les équations (3.5) et (3.6) dans (3.7) et en utilisant le fait que  $h_0$  commute avec  $\sigma_{\pm}^{(j)}\sigma_{\mp}^{(j)}$  et que  $e^{i\tau h_0}\sigma_{\pm}^{(j)}e^{-i\tau h_0} = e^{\pm i\tau\epsilon}\sigma_{\pm}^{(j)}$ , on obtient les expressions suivantes pour les opérateurs intervenant dans  $\Gamma_{\beta}$  du théorème 3.3.1 :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(0)^{-1}\mathcal{U}_{10}^{(2)}(\rho) &= [\tau_A\sigma_-^{(A)} + \tau_B\sigma_-^{(B)}]\rho[\tau_A\sigma_+^{(A)} + \tau_B\sigma_+^{(B)}] \\ \mathcal{U}(0)^{-1}\mathcal{U}_{01}^{(2)}(\rho) &= [\tau_A\sigma_+^{(A)} + \tau_B\sigma_+^{(B)}]\rho[\tau_A\sigma_-^{(A)} + \tau_B\sigma_-^{(B)}] \\ \mathcal{U}(0)^{-1}\mathcal{U}_{00}^{(2)}(\rho) &= -\left[\frac{\tau_A^2}{2}\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(A)} + \frac{\tau_B^2}{2}\sigma_+^{(B)}\sigma_-^{(B)} + \tau_A\tau_B\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(B)}\right]\rho + \text{h.c.} \\ \mathcal{U}(0)^{-1}\mathcal{U}_{11}^{(2)}(\rho) &= -\left[\frac{\tau_A^2}{2}\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(A)} + \frac{\tau_B^2}{2}\sigma_-^{(B)}\sigma_+^{(B)} + \tau_A\tau_B\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(B)}\right]\rho + \text{h.c.}\end{aligned}$$

où h.c. désigne l'hermitique conjugué. En sommant ces quatre relations on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta}(\rho) &= -i[h_{\text{eff}}, \rho] + \mathcal{D}_{\beta}(\rho) \text{ avec} \\ h_{\text{eff}} &= \frac{-i}{2} \frac{1 - e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} C \text{ où } C = \tau_A\tau_B \left[ \sigma_-^{(A)} \otimes \sigma_+^{(B)} - \sigma_+^{(A)} \otimes \sigma_-^{(B)} \right] \text{ et} \\ \mathcal{D}_{\beta}(\rho) &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \left[ L\rho L^{\dagger} - \frac{1}{2}\{L^{\dagger}L, \rho\} + e^{-\beta\epsilon} \left( L^{\dagger}\rho L - \frac{1}{2}\{LL^{\dagger}, \rho\} \right) \right] \\ &\text{pour } L = \tau_A\sigma_-^{(A)} \otimes Id + \tau_B Id \otimes \sigma_-^{(B)},\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du théorème fondamental 3.1.1 exposé dans l'introduction.

On remarque alors facilement avec ces formules que l'opération "sharp" n'est ici qu'un artefact :

**Proposition 3.3.2.** *On a  $\Gamma_{\beta}^{\sharp} = \Gamma_{\beta}$*

□ Pour prouver cette proposition, il suffit d'utiliser l'autre expression de l'opération "sharp" déjà introduite pour le théorème de Davies [24]. Pour cela on note  $\mathcal{L}_0 = -i[h_0, \cdot]$  le lindbladien de l'évolution libre, alors :

$$\Gamma_{\beta}^{\sharp}(\rho) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} \int_{-s}^s dv e^{v\mathcal{L}_0} \left( \Gamma_{\beta}(e^{-v\mathcal{L}_0}(\rho)) \right).$$

Un calcul direct montre que  $\Gamma_{\beta}$  commute avec  $\mathcal{L}_0$  ce qui conclut la preuve. □

Il faut noter ici que la véracité de cette proposition tient au choix particulier du hamiltonien d'interaction <sup>11</sup>.

On obtient donc ici une équation de Lindblad, comme toujours dans la limite de van Hove [24], de lindbladien  $\Gamma_{\beta} = -i[h_{\text{eff}}, \cdot] + \mathcal{D}_{\beta}$ . On s'attendait à

<sup>11</sup>. En particulier si on avait des termes du type  $\sigma_-^j a$  ou  $\sigma_+^j a^{\dagger}$ , la proposition 3.3.2 serait fausse.

trouver la partie dissipative  $\mathcal{D}_\beta$  car il modélise un système de deux qubits en interaction résonnante de type Jaynes–Cummings avec un bain commun. En particulier on retrouve à température nulle le lindbladien choisi au premier chapitre. Mais ce modèle original d’interactions répétées, et c’est la toute la force de cette théorie, produit également un hamiltonien effectif dont il n’était pas immédiat, a priori, de donner l’expression. La forme de  $h_{\text{eff}}$  montre qu’il produit une interaction effective entre les deux qubits. Aussi on peut penser qu’il va avoir tendance à créer de l’intrication<sup>12</sup>. On va donc dans la suite de ce chapitre étudier l’intrication des deux qubits et on verra en particulier que, contre-intuitivement, le phénomène le plus marquant du point de vue l’intrication n’apparaît qu’à température de la chaîne infinie, c’est-à-dire lorsque  $h_{\text{eff}}$  est nul. On verra cependant que  $h_{\text{eff}}$  peut aussi produire de l’intrication.

### 3.4 Que se passe-t-il dans la limite $\lambda^2\tau = 1$ et $\tau \rightarrow 0$ ?

On s’intéresse à cette limite essentiellement pour deux raisons.

D’une part, c’est en quelque sorte une limite opposée à celle de van Hove où la constante de couplage tendait vers 0. Ici au contraire la constante de couplage tend vers l’infini comme :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \infty.$$

D’autre part c’est la limite originelle dans laquelle les premiers résultats de la théorie des interactions répétées ont été obtenus. En effet Attal et Pautrat ont montré dans [7] qu’à chaque modèle d’interactions répétées, considéré dans la présente limite, on peut faire correspondre des bruits quantiques et un opérateur de Lindblad. Ce point est fondamental car comme on l’a vu précédemment c’est une des raisons majeures du succès des interactions répétées. On répète qu’il existe de nombreuses situations physiques où il n’est pas évident a priori de choisir un lindbladien décrivant le problème, alors les interactions répétées peuvent nous être d’un grand secours.

Pour commencer on propose d’établir un résultat analogue au théorème 3.3.1 en suivant la méthode d’Attal et Joye dans [5]. On reprend les mêmes notations que dans l’Introduction et dans la partie consacrée à la limite de van Hove. On suppose de plus immédiatement que  $\epsilon_A = \epsilon_B = \epsilon = \delta$  (Hypothèse 3.3.1).

Le nombre d’interactions ici est  $k := \frac{\tilde{t}}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \infty$  où  $\tilde{t} \in \mathbb{R}_+$  est un paramètre sans dimension. Ainsi le temps  $t$  au bout de  $k$  interactions est donné

---

12. On rappelle que le meilleur moyen pour créer un système intriqué est de faire interagir ses deux parties.



par  $t = k\tilde{\tau} = \frac{\tilde{t}\tau}{\delta} = \frac{\tilde{t}}{\delta}$ . Comme ce temps est fini, on va pouvoir directement donner la limite  $\tau \rightarrow 0$  dans l'équation (3.1)<sup>13</sup> :

$$\rho(t) = \rho(k\tilde{\tau}) = \mathcal{U}(\lambda, \tau, \beta)^k(\rho(0)) = \mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)^{\frac{\tilde{t}}{\tau}}(\rho(0)). \quad (3.10)$$

De même que pour la limite de van Hove, on obtient perturbativement<sup>14</sup>

$$\mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right) = \mathcal{U}(0) + \tau\tilde{\Gamma}_\beta + O(\tau^2) \quad (3.11)$$

où

$$\tilde{\Gamma}_\beta = -i[\tilde{h}_{\text{eff}}, \cdot] + \tilde{\mathcal{D}}_\beta$$

où en posant  $\tau_A = p\tau$  et donc  $\tau_B = (1-p)\tau$  pour  $p \in [0, 1]$  et :

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= p\sigma_-^{(A)} \otimes Id + (1-p)Id \otimes \sigma_-^{(B)} \\ \tilde{C} &= p(1-p) \left[ \sigma_-^{(A)} \otimes \sigma_+^{(B)} - \sigma_+^{(A)} \otimes \sigma_-^{(B)} \right]. \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{eff}} &= -\frac{i}{2} \frac{1 - e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \tilde{C} \\ \tilde{\mathcal{D}}_\beta(\rho) &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \left[ \tilde{L}\rho\tilde{L}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \tilde{L}^\dagger\tilde{L}, \rho \} + e^{-\beta\epsilon} (\tilde{L}^\dagger\rho\tilde{L} - \frac{1}{2} \{ \tilde{L}\tilde{L}^\dagger, \rho \}) \right] \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right) - Id = O(\tau)$  et le théorème de Chernoff suivant est tout à fait adapté pour calculer la limite, quand  $\tau \rightarrow 0$ , de l'équation (3.10) :

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $\{S(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  une famille d'opérateurs sur un espace de Banach  $\mathcal{B}$  telle que  $S(0) = Id$  et  $\|S(\tau)\| \leq 1 \forall \tau \geq 0$ .*

*Si  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{S(\tau) - Id}{\tau} = \Gamma$  existe au sens fort dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  et génère un semigroupe de contractions, alors on a la limite au sens fort suivante :*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} S(\tau)^{\frac{\tilde{t}}{\tau}} = e^{t\Gamma}.$$

On ne donnera pas ici la preuve de ce théorème. On renvoie par exemple au livre de Bratelli et Robinson [10]. On va par contre vérifier les hypothèses du théorème pour  $S(\tau) = \mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)$ .

La forme (3.11) montre que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right) = Id$ .

Ensuite on a d'après (3.1) :

$$\|\mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)(\rho)\| \leq \|\rho\| \text{ i.e. } \|\mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)\| \leq 1.$$

13. On n'a pas besoin de soustraire comme pour le théorème 3.3.1 l'évolution libre.

14. On utilise les formules (3.7) en remplaçant  $\lambda^2$  par  $\frac{1}{\tau}$  car  $\lambda^2\tau = 1$  ici.

Enfin :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)(\rho) &= e^{-i\tau h_0/\epsilon} \rho e^{i\tau h_0/\epsilon} + \tau \tilde{\Gamma}_\beta(\rho) + O(\tau^{3/2}) \\ &= \rho + \tau \left\{ -i[h_0/\epsilon, \rho] + \tilde{\Gamma}_\beta(\rho) \right\} + O(\tau^{3/2}).\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la limite suivante existe au sens fort :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right) - Id}{\tau} = -i\left[\frac{h_0}{\epsilon}, \cdot\right] + \tilde{\Gamma}_\beta. \quad (3.12)$$

Enfin on reconnaît dans  $\tilde{\mathcal{D}}_\beta$  la partie dissipative d'un lindbladien. Alors le théorème de Lindblad nous assure que  $-i\left[\frac{h_0}{\epsilon} + \tilde{h}_{\text{eff}}, \cdot\right] + \tilde{\mathcal{D}}_\beta$  génère un semigroupe de contractions. Les hypothèses du théorème de Chernoff sont satisfaites par la famille  $\{\mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)\}_{\tau \geq 0}$  et il vient :

**Théorème 3.4.2.** *Dans le contexte présent on a la limite forte suivante :*

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)^{\frac{t}{\tau}}(\rho) \\ &= e^{t\left(-i\left[\frac{h_0}{\epsilon}, \cdot\right] + \tilde{\Gamma}_\beta\right)}(\rho) = e^{t\left(-i\left[\frac{h_0}{\epsilon} + \tilde{h}_{\text{eff}}, \cdot\right] + \tilde{\mathcal{D}}_\beta\right)}(\rho).\end{aligned}$$

**Remarque 3.4.1.** Le théorème 21 de l'article [7] d'Attal et Pautrat fournit une preuve plus directe de ce résultat mais uniquement dans le cas où la chaîne est dans un état pur. Ce qui signifie, ici, qu'on traite le cas de la température nulle. Nous tenons ici à remercier Stéphane Attal qui nous a expliqué ce calcul lors d'une rencontre à Lyon. En ayant recours à la représentation GNS (cf. [46],[94]) déjà mentionnée dans le chapitre d'Introduction, Attal et Joye parviennent dans [4] à adapter la méthode de l'article [7] au cas où la chaîne se trouve dans l'état thermique. On propose dans l'annexe G une preuve du théorème 3.4.2 en utilisant les théorèmes généraux exposés dans [4].

Faisons le lien avec le théorème 3.3.1 de la limite de van Hove. On peut réécrire le résultat avec les notations présentées ici sous la forme :

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ t/\lambda^2 \in \mathbb{N}}} \mathcal{U}(0)^{\frac{-t}{\lambda^2}} \mathcal{U}(\lambda, \tau, \beta)^{\frac{t}{\lambda^2}}(\rho) = \exp[t\Gamma_\beta^\sharp](\rho)$$

avec  $\Gamma_\beta = \left(\tau^2 \tilde{\Gamma}_\beta\right)$ .

Trois différences apparaissent :

- . Le facteur  $\tau^2$  disparaît dans la limite  $\tau \rightarrow 0$  avec  $\lambda^2 \tau = 1$ . Ce qui est évident !
- . Dans le cas de la limite de couplage faible,  $\lambda \rightarrow 0$ , l'évolution libre a été soustraite donc elle n'apparaît pas dans le résultat final du théorème 3.3.1. Ce qui est aussi évident !

- Enfin la différence majeure entre les deux résultats pourrait être la présence de l'opération "sharp" dans la limite de couplage faible et son absence dans l'autre. Ce fait générique propre aux deux limites choisies avait été remarqué dans [5]. Cependant comme on l'a vu pour ce modèle on a exceptionnellement  $\Gamma_\beta^\sharp = \Gamma_\beta$ .

Fondamentalement, les limites de van Hove et de couplage singulier fournissent donc le même lindbladien  $\Gamma_\beta$ . Il faut cependant garder en tête que dans le cas de la limite de van Hove,  $\rho(t)$  est une approximation à grand temps de la matrice densité du petit système, tandis que dans la limite de couplage singulier c'est une approximation à tous temps car dans ce cas  $t$  représente le temps d'évolution. Dans la suite de ce chapitre on va étudier  $\rho(t)$  donnée par ces deux limites et surtout sa concurrence associée.

Pour cela on choisit d'effectuer les calculs en partant du théorème 3.3.1, c'est-à-dire dans la limite de van Hove, avec le formalisme sharp ( $\sharp$ ) car il permet de se restreindre à des espaces plus petits. De plus, dans cette limite, l'évolution libre étant soustraite, les formules sont allégées. Pour passer des résultats que nous allons donner à ceux correspondant dans la limite de couplage singulier, il suffit de remplacer  $\tau_A$  par  $p$ ,  $\tau_B$  par  $1 - p$  et d'ajouter les phases dues à l'évolution libre. En fait l'essentiel de ce qui va suivre concerne la concurrence des états X décrits au chapitre précédent. Dans ce cas l'évolution libre n'affecte que l'élément de matrice  $y$  en lui ajoutant une phase de  $e^{-2i\epsilon}$ . Or c'est le module de  $y$  qui intervient dans le calcul de la concurrence. Ainsi nos résultats sont directement applicables aux deux modèles.

### 3.5 Formulation matricielle du lindbladien $\Gamma_\beta^\sharp$ .

On propose ici de donner une formulation matricielle de l'opérateur  $\Gamma_\beta^\sharp$  intervenant dans le théorème 3.3.1 car cela va être bien commode pour effectuer le calcul de  $\rho(t)$ . On note donc  $(\rho_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  la matrice de  $\rho$  dans la base  $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$  et on a d'après la formule (3.9) :

$$P_{e^{-2i\tau\epsilon}} \Gamma_\beta P_{e^{-2i\tau\epsilon}}(\rho) = \rho_{14} \Gamma_\beta(|11\rangle\langle 00|)$$

Or  $\mathcal{U}(0)^{-1} \mathcal{U}_{10}^{(2)}(|11\rangle\langle 00|)$  et  $\mathcal{U}(0)^{-1} \mathcal{U}_{01}^{(2)}(|11\rangle\langle 00|)$  sont nuls ; puis  $|11\rangle\langle 00|$  est vecteur propre de  $\mathcal{U}(0)^{-1} \mathcal{U}_{00}^{(2)}(|11\rangle\langle 00|)$  et  $\mathcal{U}(0)^{-1} \mathcal{U}_{11}^{(2)}(|11\rangle\langle 00|)$  pour la valeur propre  $\frac{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)}{2}$ . Il vient donc :

$$P_{e^{-2i\tau\epsilon}} \Gamma_\beta P_{e^{-2i\tau\epsilon}}(\rho) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \left( \frac{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)}{2} + \frac{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)}{2} e^{-\beta\epsilon} \right) \rho_{14} |11\rangle\langle 00|$$

Soit

$$P_{e^{-2i\tau\epsilon}}\Gamma_\beta P_{e^{-2i\tau\epsilon}}(\rho) = \frac{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)}{2}\rho_{14}|11\rangle\langle 00| \text{ et de même on obtient}$$

$$P_{e^{2i\tau\epsilon}}\Gamma_\beta P_{e^{2i\tau\epsilon}}(\rho) = \frac{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)}{2}\rho_{41}|00\rangle\langle 11|.$$

Puis en effectuant le même genre de calculs on a :

$$P_{e^{-i\tau\epsilon}}\Gamma_\beta P_{e^{-i\tau\epsilon}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & \rho'_{12} & \rho'_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \rho'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\begin{pmatrix} \rho'_{12} \\ \rho'_{13} \\ \rho'_{24} \\ \rho'_{34} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} M_{e^{-i\tau\epsilon}} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{13} \\ \rho_{24} \\ \rho_{34} \end{pmatrix}, \text{ où} \quad (3.13)$$

$$M_{e^{-i\tau\epsilon}} = \begin{pmatrix} -\left[\tau_A^2 + \frac{1+e^{-\beta\epsilon}}{2}\tau_B^2\right] & -e^{-\beta\epsilon}\tau_A\tau_B & & \\ -\tau_A\tau_B & -\left[\frac{1+e^{-\beta\epsilon}}{2}\tau_A^2 + \tau_B^2\right] & & \\ \tau_A\tau_B & \tau_B^2 & & \\ \tau_A^2 & \tau_{ATB} & & \\ & e^{-\beta\epsilon}\tau_{ATB} & e^{-\beta\epsilon}\tau_A^2 & \\ & e^{-\beta\epsilon}\tau_B^2 & e^{-\beta\epsilon}\tau_{ATB} & \\ -\left[\frac{1+e^{-\beta\epsilon}}{2}\tau_A^2 + e^{-\beta\epsilon}\tau_B^2\right] & & -e^{-\beta\epsilon}\tau_{ATB} & \\ -\tau_{ATB} & & -\left[e^{-\beta\epsilon}\tau_A^2 + \frac{1+e^{-\beta\epsilon}}{2}\tau_B^2\right] & \end{pmatrix}.$$

De même on a :

$$P_{e^{i\tau\epsilon}}\Gamma_\beta P_{e^{i\tau\epsilon}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \rho'_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho'_{42} & \rho'_{43} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\begin{pmatrix} \rho'_{21} \\ \rho'_{31} \\ \rho'_{42} \\ \rho'_{43} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} M_{e^{i\tau\epsilon}} \begin{pmatrix} \rho_{21} \\ \rho_{31} \\ \rho_{42} \\ \rho_{43} \end{pmatrix}, \text{ où } M_{e^{i\tau\epsilon}} = M_{e^{-i\tau\epsilon}},$$

ce qui est simplement dû au fait que  $\rho(t)$  est une matrice densité donc  $\rho_{21}(t) = \rho_{12}(t)$  et cetera. Enfin on a :

$$P_1\Gamma_\beta P_1(\rho) = \begin{pmatrix} \rho'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho'_{22} & \rho'_{23} & 0 \\ 0 & \rho'_{32} & \rho'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho'_{44} \end{pmatrix} \text{ où}$$

$$\begin{pmatrix} \rho'_{11} \\ \rho'_{22} \\ \rho'_{23} \\ \rho'_{32} \\ \rho'_{33} \\ \rho'_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} M_1 \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ \rho_{23} \\ \rho_{32} \\ \rho_{33} \\ \rho_{44} \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -(\tau_A^2 + \tau_B^2) & e^{-\beta\epsilon}\tau_B^2 & e^{-\beta\epsilon}\tau_A\tau_B \\ \tau_B^2 & -(\tau_A^2 + e^{-\beta\epsilon}\tau_B^2) & -e^{-\beta\epsilon}\tau_A\tau_B \\ \tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & \frac{-(1+e^{-\beta\epsilon})}{2}(\tau_A^2 + \tau_B^2) \\ \tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & 0 \\ \tau_A^2 & 0 & -\tau_A\tau_B \\ 0 & \tau_A^2 & \tau_A\tau_B \\ -(\tau_A^2 + \tau_B^2) & e^{-\beta\epsilon}\tau_B^2 & e^{-\beta\epsilon}\tau_A\tau_B \\ \tau_B^2 & -(\tau_A^2 + e^{-\beta\epsilon}\tau_B^2) & -e^{-\beta\epsilon}\tau_A\tau_B \\ \tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & \frac{-(1+e^{-\beta\epsilon})}{2}(\tau_A^2 + \tau_B^2) \\ \tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & 0 \\ \tau_A^2 & 0 & -\tau_A\tau_B \\ 0 & \tau_A^2 & \tau_A\tau_B \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.5.1.** Si  $\epsilon_A \neq \epsilon_B$ , on aurait des espaces plus petits à considérer. En particulier  $M_1$  deviendrait une matrice  $4 \times 4$ . Ce qui rendrait son exponentiation plus facile. Cependant les expressions seraient plus complexes car la condition de résonance  $\delta = \epsilon_j$  ne pourrait être satisfaite.

À présent, tirons profit de nos calculs :

### 3.6 Etats stationnaires et asymptotiques du modèle.

De  $\rho(t) = \exp[\Gamma_\beta t]\rho(0)$ , on tire :

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \Gamma_\beta \rho(t).$$

Ainsi un état stationnaire du modèle est un état appartenant au noyau de  $\Gamma_\beta$ . On cherche donc  $\ker(\Gamma_\beta)$ . Or on a :

$$\ker(\Gamma_\beta) = \bigcap_{\mu} \ker(P_\mu \Gamma_\beta P_\mu).$$

Il suffit donc de calculer les  $\ker(P_\mu \Gamma_\beta P_\mu)$ . On commence facilement :

$$\begin{aligned} \ker(P_{e^{-2i\tau\epsilon}} \Gamma_\beta P_{e^{-2i\tau\epsilon}}) &= \{\rho \in \mathcal{E} \text{ tel que } \rho_{14} = 0\} \\ \ker(P_{e^{2i\tau\epsilon}} \Gamma_\beta P_{e^{2i\tau\epsilon}}) &= \{\rho \in \mathcal{E} \text{ tel que } \rho_{41} = 0\}. \end{aligned}$$

Ensuite on va montrer que :

$$\begin{aligned}\ker(P_{e^{-i\tau\epsilon}}\Gamma_\beta P_{e^{-i\tau\epsilon}}) &= \{\rho \in \mathcal{E} \text{ tel que } \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0\} \\ \ker(P_{e^{i\tau\epsilon}}\Gamma_\beta P_{e^{i\tau\epsilon}}) &= \{\rho \in \mathcal{E} \text{ tel que } \rho_{21} = \rho_{31} = \rho_{42} = \rho_{43} = 0\}.\end{aligned}$$

Pour ce faire il suffit de voir que :

**Lemme 3.6.1.** *Si  $\tau_A, \tau_B \neq 0$  alors  $\ker(M_{e^{-i\tau\epsilon}}) = \{0\}$  c'est-à-dire que  $0 \notin \text{Sp}(M_{e^{-i\tau\epsilon}})$ .*

□ On a :

$$\text{Sp}(M_{e^{-i\tau\epsilon}}) = \left\{ \frac{-\tau_A^2}{2}(1 + e^{-\beta\epsilon}), \frac{-\tau_B^2}{2}(1 + e^{-\beta\epsilon}), \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right\}$$

avec :

$$b = \frac{3}{2}(\tau_A^2 + \tau_B^2)(1 + e^{-\beta\epsilon}) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}4c &= [2(\tau_A^2 + \tau_B^2)^2 + \tau_A^2\tau_B^2] (1 + e^{-\beta\epsilon})^2 - 16\tau_A^2\tau_B^2 e^{-\beta\epsilon} \\ &= [5\tau_A^2\tau_B^2 + 2(\tau_A^4 + \tau_B^4)] (1 + e^{-2\beta\epsilon}) + 2[2(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2 + \tau_A^2\tau_B^2] (1 + e^{-\beta\epsilon}).\end{aligned} \quad (3.15)$$

Les deux premières valeurs propres sont clairement strictement négatives car on élimine les cas dégénérés où  $\tau_A = 0$  ou  $\tau_B = 0$  qui correspondraient à un couplage d'un seul des deux qubits avec la chaîne. Quant aux deux dernières, elles sont réelles car :

$$b^2 - 4c = \frac{1}{4}(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2(1 + e^{-\beta\epsilon})^2 + 16\tau_A^2\tau_B^2 e^{-\beta\epsilon} \geq 0.$$

La plus grande des deux valeurs propres,  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ , est strictement négative car  $b > 0$  et  $4c > 0$  d'après les formules (3.14) et (3.15). On vient de montrer que toutes les valeurs propres de  $M_{e^{-i\tau\epsilon}}$  sont strictement négatives. Ce qui prouve le lemme. □

Il reste à étudier le noyau de  $M_1$  :

**Lemme 3.6.2.** *Supposons que  $\tau_A, \tau_B \neq 0$ , alors*

$$\begin{aligned}\ker(M_1) &= \text{Vect}((1, 1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, -1, -1, 1, 0)) \text{ si } \beta = 0 \text{ et } \tau_A = \tau_B. \\ \ker(M_1) &= \text{Vect}\left((e^{-2\beta\epsilon}, e^{-\beta\epsilon}, 0, 0, e^{-\beta\epsilon}, 1)\right) \text{ sinon.}\end{aligned}$$

□ En effet dans le premier cas  $M_1$  est la matrice hermitienne :

$$M_1 = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que 0 est valeur propre double et que l'espace propre correspondant est  $\text{Vect}((1, 1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, -1, -1, 1, 0))$ .

Dans le second cas, on remarque simplement que  $(e^{-2\beta\epsilon}, e^{-\beta\epsilon}, 0, 0, e^{-\beta\epsilon}, 1)$  appartient à  $\ker(M_1)$ . Puis on va montrer que 0 est valeur propre simple de  $M_1$  ce qui conclura la preuve.

Pour ce faire on calcule le spectre de  $M_1$  :

$$\text{Sp}(M_1) = \left\{0, -\tau_A^2(1 + e^{-\beta\epsilon}), -\tau_B^2(1 + e^{-\beta\epsilon}), \frac{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)}{2}(1 + e^{-\beta\epsilon}), \lambda_-, \lambda_+\right\}$$

avec :

$$\lambda_{\pm} = \frac{-3}{4}(\tau_A^2 + \tau_B^2)(1 + e^{-\beta\epsilon}) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(\tau_A^2 + \tau_B^2)^2(1 + e^{-\beta\epsilon})^2 + 128(\tau_A\tau_B)^2e^{-\beta\epsilon}}. \quad (3.16)$$

On a clairement  $\lambda_- < 0$ , mais qu'en est-il de  $\lambda_+$  ?

$$\lambda_+ < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sqrt{(\tau_A^2 + \tau_B^2)^2(1 + e^{-\beta\epsilon})^2 + 128(\tau_A\tau_B)^2e^{-\beta\epsilon}} < \frac{3}{4}(\tau_A^2 + \tau_B^2)(1 + e^{-\beta\epsilon})$$

$$\Leftrightarrow 16(\tau_A\tau_B)^2e^{-\beta\epsilon} < (\tau_A^2 + \tau_B^2)^2(1 + e^{-\beta\epsilon})^2.$$

Or on a :

$$4e^{-\beta\epsilon} \leq (1 + e^{-\beta\epsilon})^2 \text{ avec égalité ssi } \beta = 0$$

$$4(\tau_A\tau_B)^2 \leq (\tau_A^2 + \tau_B^2)^2 \text{ avec égalité ssi } \tau_A = \tau_B.$$

Ainsi dans notre cas ( $\beta \neq 0$  ou  $\tau_A \neq \tau_B$ ),  $\lambda_+ < 0$  et donc 0 est valeur propre simple (les cas dégénérés où  $\tau_A = 0$  ou  $\tau_B = 0$  sont toujours exclus). □

Retraduisons cette partie d'algèbre linéaire en termes plus physiques. On vient de montrer que les états stationnaires du modèle sont :

$$\rho_{\beta}^{th} := \frac{1}{(1 + e^{-\beta\epsilon})^2} \begin{pmatrix} e^{-2\beta\epsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } \beta \neq 0 \text{ ou } \tau_A \neq \tau_B$$

et des combinaisons linéaires acceptables des états :

$$\rho_0^{th} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \beta = 0 \text{ et } \tau_A = \tau_B.$$

Une combinaison linéaire  $\lambda\rho_0^{th} + \mu\sigma$  est acceptable si  $\lambda\rho_0^{th} + \mu\sigma$  est un état. La condition de trace unité force  $\mu = 1 - \lambda$ . Puis la positivité exige  $\lambda \in [0, \frac{4}{3}]$ .

**Remarque 3.6.1.** On s'attendait à trouver l'état thermique comme état stationnaire. Ce qui est plus surprenant c'est l'apparition d'une infinité d'états stationnaires à température infinie si  $\tau_A = \tau_B$ .

Dans ce qui précède on a fait plus que déterminer les états stationnaires du modèle. On a calculé le spectre de  $\Gamma_\beta$ . Il est constitué de la valeur propre 0 et de valeurs propres strictement négatives. On définit un état asymptotique comme un état obtenu à partir de la formule  $e^{t\Gamma_\beta}(\rho)$  en faisant tendre  $t$  vers l'infini. Ici les états asymptotiques du modèle sont donc les états stationnaires. On résume tout ceci dans :

**Proposition 3.6.1.** *Les états stationnaires et asymptotiques du modèle sont :*

- . la famille d'états  $\left\{ \lambda\rho_0^{th} + (1 - \lambda)\sigma, \lambda \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \right\}$  si  $\begin{cases} \beta = 0 \\ \tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2} \end{cases}$
- . l'état de Gibbs,  $\rho_\beta^{th}$  sinon.

**Remarque 3.6.2.** Le taux de convergence à l'équilibre est donné par l'inverse de la valeur absolue de la plus grande valeur propre de l'opérateur  $\frac{\Gamma_\beta}{1+e^{-\beta\epsilon}}$ . En particulier pour  $\beta\epsilon \ll 1$  et  $|\tau_A - \tau_B| \ll \tau$ , ce taux est très lent donné par  $\frac{(\tau/2)^2}{3}(s^2 + \frac{(\beta\epsilon)^2}{2}) + o(s^2, (\beta\epsilon)^2)$  où on a posé  $s := \frac{|\tau_A - \tau_B|}{\tau}$ .<sup>15</sup>

Cette proposition nous permet d'obtenir un premier résultat concernant l'intrication dans ce modèle.

**Proposition 3.6.2.** *Si  $0 < \beta < \infty$ , on a toujours désintrication en temps fini.*

□ On rappelle que la concurrence de Wootters est donnée par la formule suivante dans [111] :

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$$

où  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$  sont les valeurs propres de  $\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$  avec  $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\bar{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ . Or par ce qui précède on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\beta^{th}$  et pour  $\rho = \rho_\beta^{th}$ , on a  $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = \frac{-2e^{-\beta\epsilon}}{(1+e^{-\beta\epsilon})^2} < 0$ . Ainsi par continuité de la fonction  $t \mapsto \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t) - \lambda_4(t)$  il existe une valeur  $t_{\text{désintrication}} < \infty$  tel que pour tout  $t \geq t_{\text{désintrication}}$ , on a  $C(\rho(t)) = 0$  □

15. On obtient cette formule en développant  $\lambda_+$  dans la formule (3.16).



**Remarque 3.6.3.** Dans le cas où  $\beta = \infty$ ,  $\rho(\infty) = |00\rangle\langle 00|$  est l'état du vide et  $\lambda_1(\infty) - \lambda_2(\infty) - \lambda_3(\infty) - \lambda_4(\infty) = 0$ . La démonstration précédente ne s'applique plus. On peut seulement affirmer que  $C(\rho(\infty)) = 0$ . Mais il restera à voir de quelle manière la concurrence tend vers 0.

Dans le cas où  $\beta = 0$ , il peut y avoir intrication asymptotique non nulle en fonction du choix de l'état initial. On renvoie à la proposition 3.9.1, à la figure 3.17 de la section 3.9 et à la discussion qui suit. Ce fait remarquable, dû à la présence de l'état noir  $\sigma$ , avait déjà été observé dans le premier chapitre.

### 3.7 Motivations pour l'étude du cas où $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ :

Tous les éléments du théorème 3.3.1 ont été calculés. Il ne reste plus qu'à l'appliquer. Cependant au vu des longues expressions constatées, on va restreindre notre étude au cas des états initiaux de forme X étudiés dans le chapitre précédent. On renvoie à ce même chapitre qui présente et motive physiquement l'étude de ces états. Ici, comme on va le voir par la suite, on a une motivation supplémentaire pour les choisir comme états initiaux.

On suppose donc qu'initialement l'état des deux qubits peut être représenté dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  par la matrice :

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \bar{x} & c & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ |x| \leq \sqrt{bc} \\ |y| \leq \sqrt{ad} \end{cases} . \quad (3.17)$$

La forme X va perdurer au cours du temps, car d'après la formule (3.13) si  $\rho_{12}(0), \rho_{13}(0), \rho_{24}(0), \rho_{34}(0)$  sont nuls alors il en est de même pour  $\rho_{12}(t), \rho_{13}(t), \rho_{24}(t), \rho_{34}(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . C'est cela qui nous a poussé, avec la formule explicite de la concurrence, à choisir ces états initiaux. On note donc :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \exp[t\Gamma_\beta](\rho(0)) \\ &= \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & y(t) \\ 0 & b(t) & x(t) & 0 \\ 0 & \bar{x}(t) & c(t) & 0 \\ \bar{y}(t) & 0 & 0 & d(t) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Par ce qui précède on a simplement :

$$y(t) = e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} y \text{ et } \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ x(t) \\ \bar{x}(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{M_1}{1+e^{-\beta\epsilon}}t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ x \\ \bar{x} \\ c \\ d \end{pmatrix} . \quad (3.18)$$

Par contre pour trouver  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $d(t)$  et  $x(t)$  cela demande un peu plus de travail. Il s'agit de calculer  $\exp\left(\frac{tM_1}{1+e^{-\beta\epsilon}}\right)$ . L'écriture suivante,

$$M_1 = \begin{pmatrix} -(\tau_A^2 + \tau_B^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_B^2 & -\tau_A^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & -\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & 0 & -\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} & 0 & 0 \\ \tau_A^2 & 0 & -\tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & -\tau_B^2 & 0 \\ 0 & \tau_A^2 & \tau_A\tau_B & \tau_A\tau_B & \tau_B^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$+ e^{-\beta\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & \tau_B^2 & \tau_A\tau_B & \tau_A\tau_B & \tau_A^2 & 0 \\ 0 & -\tau_B^2 & -\tau_A\tau_B & -\tau_A\tau_B & 0 & \tau_A^2 \\ 0 & 0 & -\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} & 0 & -\tau_A\tau_B & \tau_A\tau_B \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} & -\tau_A\tau_B & \tau_A\tau_B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_A^2 & \tau_B^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\tau_A^2 + \tau_B^2) \end{pmatrix},$$

montre que  $M_1$  est la somme de deux matrices triangulaires supérieures et inférieures. Malheureusement ces deux matrices ne commutent pas ! Nous ne sommes pas parvenus à effectuer ce calcul dans le cas général même en nous aidant de logiciels de calcul formel comme xcas ou maple. Aussi nous allons restreindre notre étude à certains cas particuliers intéressants :

### 3.8 Expressions analytiques pour la matrice densité et évolutions de l'intrication si $\beta = \infty$ et $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ .

#### 3.8.1 Cas $\beta = \infty$ et $\tau_A \neq \tau_B$ .

##### 3.8.1.a. Formules générales.

Ici  $M_1$  se réduit à la première matrice de l'expression (3.19) qui est triangulaire inférieure. Après exponentiation on obtient :

$$a(t) = e^{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} a \quad (3.20)$$

$$b(t) = \left(-e^{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} + e^{-\tau_A^2 t}\right) a + e^{-\tau_A^2 t} b \quad (3.21)$$

$$x(t) = \frac{-2\tau_A\tau_B}{\tau_A^4 - \tau_B^4} \left[ 2(\tau_A^2 - \tau_B^2) e^{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} + (3\tau_B^2 - \tau_A^2) e^{\frac{-1}{2}(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} - (\tau_A^2 + \tau_B^2) e^{-\tau_A^2 t} \right] a - \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} \left[ e^{\frac{-1}{2}(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} - e^{-\tau_A^2 t} \right] b + e^{\frac{-1}{2}(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} x \quad (3.22)$$

$$c(t) = \frac{1}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2 (\tau_A^2 + \tau_B^2)} \left[ (-\tau_A^6 - 7\tau_A^4\tau_B^2 + 17\tau_A^2\tau_B^4 - 9\tau_B^6) e^{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + (8\tau_A^4\tau_B^2 - 24\tau_A^2\tau_B^4)e^{\frac{-1}{2}(\tau_A^2+\tau_B^2)t} + (4\tau_A^4\tau_B^2 + 4\tau_A^2\tau_B^4)e^{-\tau_A^2t} \\
& + (\tau_A^6 - 5\tau_A^4\tau_B^2 + 3\tau_A^2\tau_B^4 + 9\tau_B^6)e^{-\tau_B^2t}]a \\
& - \frac{4\tau_A^2\tau_B^2}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2} \left[ 2e^{\frac{-1}{2}(\tau_A^2+\tau_B^2)t} - e^{-\tau_A^2t} - e^{-\tau_B^2t} \right] b \\
& + \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} \left[ \frac{-1}{2}(\tau_A^2+\tau_B^2)t - e^{-\tau_B^2t} \right] (x + \bar{x}) + e^{-\tau_B^2t}c \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(t) &= \frac{-1}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2(\tau_A^2 + \tau_B^2)} \left[ (-\tau_A^6 - 7\tau_A^4\tau_B^2 + 17\tau_A^2\tau_B^4 - 9\tau_B^6)e^{-(\tau_A^2+\tau_B^2)t} \right. \\
& + (8\tau_A^4\tau_B^2 - 24\tau_A^2\tau_B^4)e^{\frac{-1}{2}(\tau_A^2+\tau_B^2)t} \\
& + (\tau_A^6 + 3\tau_A^4\tau_B^2 + 3\tau_A^2\tau_B^4 + \tau_B^6)e^{-\tau_A^2t} + (\tau_A^6 - 5\tau_A^4\tau_B^2 + 3\tau_A^2\tau_B^4 + 9\tau_B^6)e^{-\tau_B^2t} \\
& \left. + (-\tau_A^6 + \tau_A^4\tau_B^2 + \tau_A^2\tau_B^4 - \tau_B^6) \right] a \\
& + \frac{1}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2} \left[ 8\tau_A^2\tau_B^2e^{\frac{-1}{2}(\tau_A^2+\tau_B^2)t} - (\tau_A^2 + \tau_B^2)^2e^{-\tau_A^2t} \right. \\
& \left. - 4\tau_A^2\tau_B^2e^{-\tau_B^2t} + (\tau_A^2 - \tau_B^2)^2 \right] b \\
& - \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} \left[ \frac{-1}{2}(\tau_A^2+\tau_B^2)t - e^{-\tau_B^2t} \right] (x + \bar{x}) + (1 - e^{-\tau_B^2t})c + d. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

**Remarque 3.8.1.** On note que ces formules sont en accord avec la proposition 3.6.1 car  $(a(t), b(t), x(t), \bar{x}(t), c(t), d(t)) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ .

Qu'en déduit-on en ce qui concerne l'évolution de la concurrence ? Tout d'abord comme on l'avait noté dans la remarque 3.6.3, asymptotiquement la concurrence est nulle. Mais il reste à savoir de quelle façon elle tend vers 0. Pour ce faire on commence par rappeler que, pour un état  $\rho \in \mathcal{E}_X$  comme ci-dessus, la concurrence est donnée par la formule (cf. chapitre précédent) :

$$C(\rho) = 2 \max\{0, C_1(\rho), C_2(\rho)\} \text{ avec} \tag{3.25}$$

$$C_1(\rho) := |x| - \sqrt{ad} \text{ et } C_2(\rho) := |y| - \sqrt{bc}. \tag{3.26}$$

**Remarque 3.8.2.** C'est cette formule simple qui motive notre choix d'état initial.

On notera parfois abusivement  $C(t)$  [resp.  $C_i(t)$ ] au lieu de  $C(\rho(t))$  [resp.  $C_i(\rho(t))$ ] pour  $t \geq 0$ .

### 3.8.1.b. Concurrence asymptotique.

**Proposition 3.8.1.** *Pour  $\beta = \infty$  et pour tout état initial de  $\mathcal{E}_X$ , si  $\tau_B > \tau_A$  alors*

$$C(\rho(t)) \sim_{t \rightarrow \infty} 4(a+b) \frac{\tau_A\tau_B}{\tau_B^2 - \tau_A^2} e^{-\tau_A^2t} \text{ si } a+b \neq 0$$

$$C(\rho(t)) = 0 \quad \forall t \text{ sinon ;}$$

si  $\tau_A > \tau_B$  alors

$C(\rho(t)) = 2 \max\{0, C_1(t), C_2(t)\}$  avec

$$C_1(t) = \left[ \left| \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^4 - \tau_B^4} (\tau_A^2 - 3\tau_B^2)a - \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} b + x \right| - \sqrt{a} \right] e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} + o_{t \rightarrow \infty}(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t}),$$

$$C_2(t) = \left[ |y| - \sqrt{a+b} \left[ \frac{\tau_A^6 - 5\tau_A^4\tau_B^2 + 3\tau_A^2\tau_B^4 + 9\tau_B^6}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2(\tau_A^2 + \tau_B^2)} a + \frac{4\tau_A^2\tau_B^2}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2} b - 4\frac{\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} \Re x + c \right]^{\frac{1}{2}} \right] e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} + o_{t \rightarrow \infty}(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t}).$$

□ Si  $a + b = 0$  alors  $a = b = x = y = 0$  à cause de la positivité de  $\rho$ . Mais alors d'après (3.18) et (3.22) :

$$x(t) = y(t) = 0 \text{ donc } C(t) = 0 \forall t.$$

On suppose donc que  $a+b \neq 0$  et on fait un développement asymptotique, ( $t \rightarrow \infty$ ), des formules (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) et (3.24) pour  $\tau_B > \tau_A$  et on obtient :

$$|y(t)| = e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} |y| = o(e^{-\tau_A^2 t}),$$

$$|x(t)| = 2(a+b) \frac{\tau_A\tau_B}{\tau_B^2 - \tau_A^2} e^{-\tau_A^2 t} + o(e^{-\tau_A^2 t}),$$

$$\sqrt{a(t)d(t)} = \sqrt{e^{-(\tau_A^2 + \tau_B^2)t} a(1 + o(1))} = o(e^{-\tau_A^2 t}).$$

Ainsi  $C_2(t) \leq |y(t)| = o(C_1(t))$  ne va pas contribuer asymptotiquement à la concurrence et il reste :

$$C(t) = 2C_1(t) \sim 4(a+b) \frac{\tau_A\tau_B}{\tau_B^2 - \tau_A^2} e^{-\tau_A^2 t}.$$

Traitons à présent le cas où  $\tau_A > \tau_B$ . On obtient dans ce régime :

$$|y(t)| = e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} |y|,$$

$$|x(t)| = \left| \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^4 - \tau_B^4} (\tau_A^2 - 3\tau_B^2)a - \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} b + x \right| e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} + o(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t}),$$

$$\sqrt{ad(t)} = \sqrt{a} e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} + o(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t}),$$

$$\sqrt{bc(t)} = \sqrt{a+b} \left[ \frac{\tau_A^6 - 5\tau_A^4\tau_B^2 + 3\tau_A^2\tau_B^4 + 9\tau_B^6}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2(\tau_A^2 + \tau_B^2)} a + \frac{4\tau_A^2\tau_B^2}{(\tau_A^2 - \tau_B^2)^2} b - \frac{4\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} \Re x + c \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} + o(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t}).$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

Dans les deux sous-sections suivantes, on souhaite exhiber des phénomènes surprenants de la concurrence quand  $\beta = \infty$ .

**3.8.1.c. Si l'état initial est  $\rho_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  avec  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \gamma|01\rangle$ .**

On va à présent recentrer encore l'étude sur une sous-classe d'états initiaux de  $\mathcal{E}_X$ . En effet on propose de s'intéresser à l'évolution de la concurrence pour les choix d'états purs initiaux  $\rho_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  avec  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \gamma|01\rangle$  avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  qui sont des états X (ce sont des états de Bell généralisés cf. chapitre précédent). Alors  $a(t)$  et  $y(t)$  sont nuls par (3.20) et (3.18). Ainsi la concurrence vaut en utilisant (3.22) :

$$\begin{aligned} C(\rho_\Phi(t)) &= 2|x(t)| \\ &= 2|\alpha| \left| \gamma e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} - \alpha \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^2 - \tau_B^2} (e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2}t} - e^{-\tau_A^2 t}) \right| \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Remarque 3.8.3.** Si  $\alpha = 0$ , alors la concurrence est identiquement nulle.

Si  $\alpha \neq 0$  et  $\arg(\alpha) \neq \arg(\gamma)$ , alors la concurrence ne s'annule jamais. On l'illustre sur la figure 3.9.

Le cas le plus intéressant est  $\alpha \neq 0$  et  $\arg(\alpha) = \arg(\gamma)$  car la concurrence peut présenter un point de rebond, c'est-à-dire la concurrence s'annule en un point. Précisément on a :

**Proposition 3.8.2.** *Sous les hypothèses de cette section, en choisissant  $\rho_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  avec  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \gamma|01\rangle$  pour  $\alpha \neq 0$  et  $\arg(\alpha) = \arg(\gamma)$  comme état initial, on a*

- . si  $\frac{\tau_A}{\tau} \in \{0\} \cup \left[ \frac{(1-\gamma/\alpha) + \sqrt{1+(\gamma/\alpha)^2}}{2}, 1 \right]$  alors la concurrence ne s'annule jamais.
- . si  $\frac{\tau_A}{\tau} \in ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, \frac{(1-\gamma/\alpha) + \sqrt{1+(\gamma/\alpha)^2}}{2}[$  alors la concurrence présente un point de rebond en  $t_{\text{dés-réint}} = \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{1/2-p} \ln \left( 1 + \frac{1/2-p}{p(1-p)} \frac{\gamma}{\alpha} \right)$  où  $p := \frac{\tau_A}{\tau}$ .

Cette proposition est illustrée sur la figure 3.10.

**Remarque 3.8.4.** Le cas où  $\tau_A = \tau_B$  sera étudié dans la section suivante.

$\square$  Le second cas est immédiat en appliquant la formule (3.27).

Ensuite il est facile de voir que si  $\tau_A = 0$  ou  $\tau_A = \tau$  alors la formule (3.27) devient simplement  $C(\rho_\Phi(t)) = 2|\alpha| \gamma |e^{-\frac{\tau^2}{2}t}|$ .

Il reste à voir ce qui se passe pour  $\frac{\tau_A}{\tau} \in \left[ \frac{(1-\gamma/\alpha) + \sqrt{1+(\gamma/\alpha)^2}}{2}, 1 \right]$ . On a annulation de la concurrence ssi d'après (3.27) :

$$e^{-\frac{\tau_A^2 - \tau_B^2}{2}t} = 1 - \frac{\tau_A^2 - \tau_B^2}{2\tau_A\tau_B} \frac{\gamma}{\alpha}$$

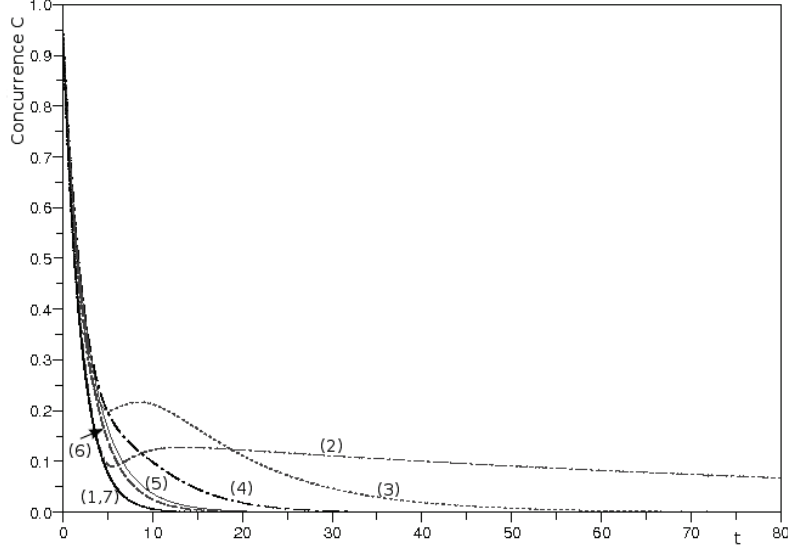


FIGURE 3.9 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = p\tau$ ,  $\tau = 1$  et pour l'état initial  $|\Phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}|10\rangle + \frac{-1+i}{\sqrt{3}}|01\rangle$  en fonction de  $t$  pour (1) :  $p = 0$ , (2) :  $p = 0.1$ , (3) :  $p = 0.3$ , (4) :  $p = 0.5$ , (5) :  $p = 0.7$ , (6) :  $p = 0.8$ , (7) :  $p = 1$ .

Ainsi une condition nécessaire pour avoir annulation de la concurrence est  $1 - \frac{\tau_A^2 - \tau_B^2}{2\tau_A\tau_B} \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ . En posant  $p = \frac{\tau_A}{\tau}$ , cette condition se réécrit  $Q(p) < 0$  où  $Q(X) = X^2 + (\frac{\gamma}{\alpha} - 1)X - \frac{\gamma}{2\alpha}$ . Les racines de  $Q$  étant  $p_{\pm} = \frac{(1-\gamma/\alpha) \pm \sqrt{1+(\gamma/\alpha)^2}}{2}$ , cela conclut le lemme.  $\square$

#### 3.8.1.d. Si l'état initial est $\rho(0) = |11\rangle\langle 11|$ .

Notons que  $\rho(0)$  est une matrice de la forme (3.17) dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  avec  $a = 1$  et  $b = c = d = x = y = 0$ . Sa concurrence est évidemment nulle initialement car c'est un état produit.

Or ici d'après la proposition 3.8.1 on a :

- si  $0 < \tau_A < \tau_B$ ,  $C(\rho(t)) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4\tau_A\tau_B}{\tau_B^2 - \tau_A^2} e^{-\tau_A^2 t}$

- si  $\tau_A > \tau_B > 0$ , on a :

$$C(\rho(t)) = 2 \max \left\{ 0, \left( \left| \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^4 - \tau_B^4} (\tau_A^2 - 3\tau_B^2) \right| - 1 \right) e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} t} + o(e^{-\frac{\tau_A^2 + \tau_B^2}{2} t}) \right\}.$$

Ainsi par continuité de la concurrence, on sait déjà que pour  $0 < \tau_A \leq \frac{\tau}{2}$ , il existe nécessairement  $t_{\text{intri}}(\tau_A)$  tel que  $C(\rho(t_{\text{intri}}(\tau_A))) = 0$  et  $C(\rho(t)) > 0$

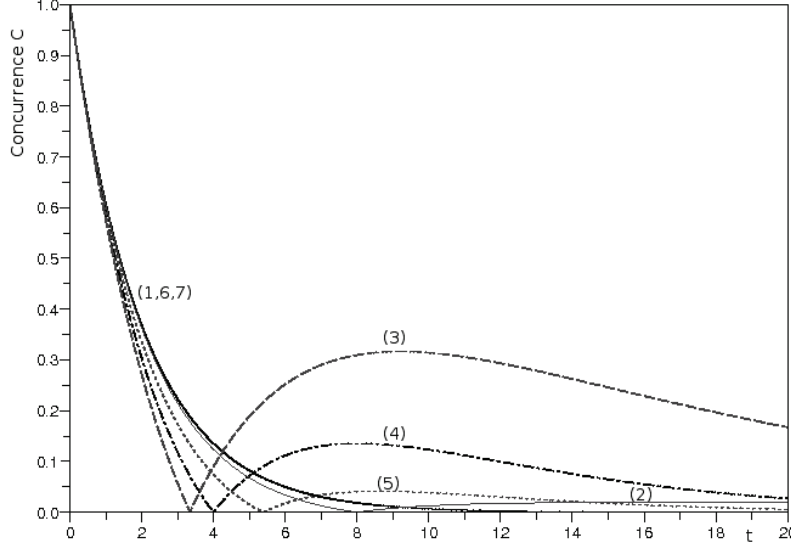


FIGURE 3.10 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = p\tau$ ,  $\tau = 1$  et pour l'état initial  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$  en fonction de  $t$  pour (1) :  $p = 0$ , (2) :  $p = 0.001$ , (3) :  $p = 0.3$ , (4) :  $p = 0.5$ , (5) :  $p = 0.6$ , (6) :  $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , (7) :  $p = 1$ . Les courbes (1) et (7) sont effectivement les mêmes, mais la courbe (6) en diffère très légèrement mais cela ne peut apparaître sur le graphique.

pour  $t$  appartenant à un voisinage à droite de  $t_{\text{intri}}(\tau_A)$ .

En étudiant la fonction  $\tau_A \mapsto \left| \frac{2\tau_A\tau_B}{\tau_A^4 - \tau_B^4} (\tau_A^2 - 3\tau_B^2) \right| - 1$ , on montre que celle-ci est strictement positive sur  $] \frac{\tau}{2}, p_0\tau[$  et négative sur  $[p_0\tau, \tau]$  où  $p_0$  est l'unique racine dans  $] \frac{1}{2}, 1]$  du polynôme  $Q(X) = 4X^4 - 12X^3 + 12X^2 - 2X - 1$ . Numériquement on a  $p_0 \simeq 0.584$ . Ainsi on va observer le phénomène de création d'intrication décrit ci-dessus au moins pour  $\tau_A \in ]0, p_0\tau[$  ce que confirme la figure 3.11.  $t_{\text{intri}}(\tau_A)$  est donc le premier instant où il y a création d'intrication.

En posant  $p := \frac{\tau_A}{\tau}$ , on a simulé numériquement la fonction  $t_{\text{intri}}$  et on l'a représentée sur la figure 3.12. On remarque que  $t_{\text{intri}}$  devient très grand au voisinage de  $p_0\tau$ . Cependant on ne peut avoir de résultats numériques trop proches de ce point car les erreurs numériques sont trop importantes (de toute façon même si il y a création d'intrication, celle-ci est très faible car on observe numériquement une concurrence inférieure à  $10^{-20}$  pour  $\tau_A \geq p_0\tau$ ). Nous n'avons pas non plus réussi à montrer analytiquement que  $t_{\text{intri}}$  tend

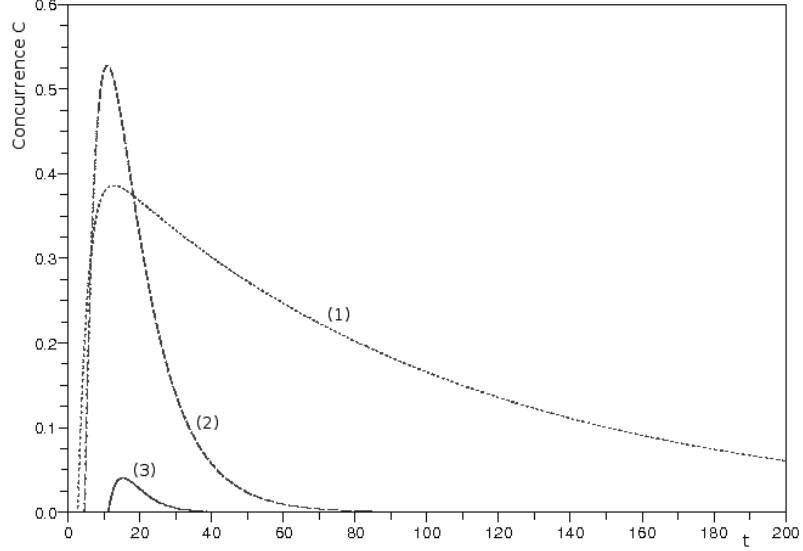


FIGURE 3.11 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = p\tau$ ,  $\tau = 1$  et pour l'état initial  $|11\rangle\langle 11|$  en fonction de  $t$  pour (1) :  $p = 0.1$ , (2) :  $p = 0.3$ , (3) :  $p = 0.5$ .

vers l'infini quand  $p$  tend vers  $p_0$  par valeurs inférieures. On résume cela dans :

**Remarque 3.8.5.** Pour  $\tau_A \in [p_0\tau, \tau]$ , les erreurs numériques sont trop importantes pour conclure sur l'existence d'un temps d'intrication au moins numériquement.

Enfin les cas  $\tau_A = \tau$  et  $\tau_A = 0$  sont triviaux, car alors seulement un des qubits interagit avec la chaîne et donc il ne peut y avoir création d'intrication.

Par contre au voisinage de zéro les choses diffèrent, la figure 3.12 suggère que  $t_{\text{intri}}$  converge vers une valeur proche de 2.2 en 0 et en effet on a :

**Proposition 3.8.3.** On a  $\lim_{\tau_A \rightarrow 0^+} t_{\text{intri}}(\tau_A) = \frac{t_0}{\tau^2}$ , où  $t_0$  est l'unique zéro sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $f$  définie par

$$f(t) = 4[-2e^{-t} + 3e^{-\frac{1}{2}t} - 1]^2 - [(-9t - 20)e^{-t} + 24e^{-\frac{t}{2}} + (t - 4)]e^{-t},$$

soit  $t_0 \simeq 2.197$ .



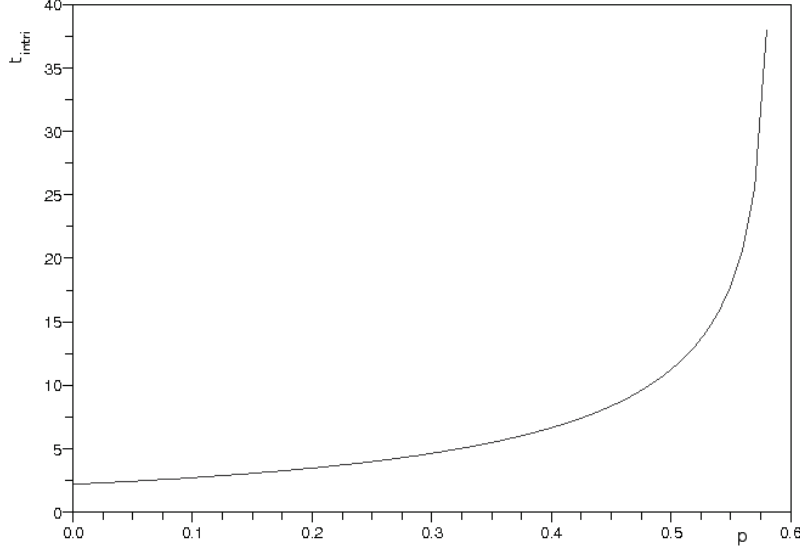


FIGURE 3.12 –  $t_{\text{intri}}$  en fonction de  $p$  pour  $\tau = 1$ .

□ Ici  $y(t) = 0$ , donc la concurrence est donnée par  $C(t) = 2 \max\{0, |x(t)| - \sqrt{a(t)d(t)}\}$ . En posant  $\tau = 1$ , on obtient à partir de (3.20), (3.22) et (3.24), les formules perturbatives suivantes pour tout  $t \leq t_0$  où  $t_0 > 0$  est fixé :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2[-2e^{-t} + 3e^{-\frac{1}{2}t} - 1]p + o_{p \rightarrow 0}(p) \\ a(t) &= e^{-t} + o_{p \rightarrow 0}(1) \\ d(t) &= [(-9t - 20)e^{-t} + 24e^{-\frac{t}{2}} + (t - 4)]p^2 + o_{p \rightarrow 0}(p^2) \end{aligned}$$

Notre problème revient donc à étudier la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  définie dans la proposition car on a  $C(t) > 0$  ssi  $f(t) > 0$ . On remarque que  $f$  est strictement positive uniquement sur  $]t_0, +\infty[$  où  $t_0$  est l'unique zéro sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $f$ . □.

Ce phénomène de production d'intrication est dû à l'hamiltonien effectif  $h_{\text{eff}}$ . En fait tout se passe ici comme si les deux qubits interagissaient entre eux, ce qui, on le sait, est souvent source d'intrication. Notons cependant que l'intrication créée à l'instant  $t_{\text{intri}}$  disparaît asymptotiquement quand  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.8.2 Cas $\beta = \infty$ et $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$ .

#### 3.8.2.a. Concurrence asymptotique.

Dans ce cas on obtient soit à partir du cas précédent en passant à la limite  $\tau_A, \tau_B \rightarrow \frac{\tau}{2}$ , soit plus simplement en effectuant le calcul directement :

$$\begin{aligned}
a(t) &= e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} a \\
b(t) &= \left[ -e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \right] a + e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} b \\
x(t) &= \left[ -2e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + \left(2 - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t\right) e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \right] a - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} b + e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} x \\
c(t) &= \left[ -5e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + \left(5 - 4\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t + \left(\frac{\tau}{2}\right)^4 t^2\right) e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \right] a + \left(\frac{\tau}{2}\right)^4 t^2 e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} b \\
&\quad - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} (x + \bar{x}) + e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} c \\
d(t) &= \left[ 5e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + \left(-6 + 4\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t - \left(\frac{\tau}{2}\right)^4 t^2\right) e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + 1 \right] a \\
&\quad + \left[ (-1 - \left(\frac{\tau}{2}\right)^4 t^2) e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + 1 \right] b + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} (x + \bar{x}) \\
&\quad + (1 - e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t}) c + d.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

On donne ici une proposition analogue à la proposition 3.8.1 :

**Proposition 3.8.4.** *Pour  $\beta = \infty$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  et pour tout état initial de  $\mathcal{E}_X$ , on a :*

$$\begin{aligned}
C(\rho(t)) &\sim_{t \rightarrow \infty} 2(a+b) \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \text{ si } a+b \neq 0 \\
C(\rho(t)) &= 0 \quad \forall t \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

**Remarque 3.8.6.** Dans le cas non trivial où  $a+b \neq 0$ , la proposition nous dit qu'au moins au delà d'un certain temps les deux qubits sont intriqués.

En comparant cette proposition à la proposition 3.8.1, on remarque qu'ici la décroissance exponentielle de la concurrence est modulée par un facteur  $t$ .

□ Dans le premier cas où  $a+b \neq 0$ , il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\sim_{t \rightarrow \infty} (a+b) \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \\
\sqrt{ad(t)} &\begin{cases} \sim \sqrt{a} e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \text{ si } a \neq 0 \\ = 0 \text{ sinon} \end{cases} = o(|x(t)|).
\end{aligned}$$

Ainsi  $C_1(\rho(t)) \sim (a+b) \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t}$  et  $C_2$  ne vas pas contribuer car :

$$C_2(\rho(t)) \leq |y(t)| = |y| e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} = o(|x(t)|).$$

Dans le second cas où  $a + b = 0$ , on conclut comme dans la preuve de la proposition 3.8.1.  $\square$

Comme dans le cas  $\tau_A \neq \tau_B$ , on va à présent recentrer l'étude à une sous-classe d'états de  $\mathcal{E}_X$ . En effet on propose de s'intéresser à l'évolution de la concurrence pour les choix d'états purs initiaux suivants<sup>16</sup> :

- .  $\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  avec  $|\Psi\rangle = \alpha|11\rangle + \beta|00\rangle$ .
- .  $\rho_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  avec  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \beta|01\rangle$

### 3.8.2.b. Si l'état initial est $\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ avec $|\Psi\rangle = \alpha|11\rangle + \gamma|00\rangle$ .

Alors on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \alpha \bar{\gamma} \\ x(t) &= \left[ -2e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + \left(2 - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t\right) e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \right] |\alpha|^2 \\ a(t) &= e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} |\alpha|^2 \\ b(t) &= \left[ -e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \right] |\alpha|^2 \\ c(t) &= \left[ -5e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + \left(5 - 4\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t + \left(\frac{\tau}{2}\right)^4 t^2\right) e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} \right] |\alpha|^2 \\ d(t) &= \left[ 5e^{-2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + \left(-6 + 4\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t - \left(\frac{\tau}{2}\right)^4 t^2\right) e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t} + 1 \right] |\alpha|^2 + |\gamma|^2. \end{aligned}$$

Ce cas est plus difficile à traiter. Néanmoins on arrive à obtenir :

**Proposition 3.8.5.** *Si  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = \tau_B$  et si on choisit  $\rho_\Psi$  comme état initial, il existe deux constantes  $c_1 \simeq 1,093$  et  $c_2 \simeq 1,106$  telles que :*

- . si  $c_1 \leq \frac{1}{|\alpha|^2} \leq c_2$  alors il existe deux paliers où la concurrence s'annule.
- . sinon la concurrence s'annule uniquement sur un palier.

Ceci est illustré sur la figure 3.13.

$\square$  Pour alléger les calculs, on pose  $\frac{\tau}{2} = 1$ . On a en utilisant  $|\gamma|^2 = 1 - |\alpha|^2$  :

$$\begin{aligned} C(t) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t) \leq 0 \\ C_2(t) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x(t)|^2 - \sqrt{ad(t)} \leq 0 \\ |y(t)|^2 - \sqrt{bc(t)} \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} g(t) \leq \frac{1}{|\alpha|^2} \text{ avec } g(t) := -e^{-2t} + (t^2 - 2)e^{-t} + (t - 2)^2 \\ f(t) \geq \frac{1}{|\alpha|^2} \text{ avec } f(t) := 1 + (1 - e^{-t})(-5e^{-t} + 5 - 4t + t^2) \end{cases} \end{aligned}$$

en excluant le cas trivial où  $|\alpha| = 0$ . Ainsi  $C(t) = 0$  ssi  $g(t) \leq \frac{1}{|\alpha|^2} \leq f(t)$ . Il s'agit donc d'étudier les fonctions  $f$  et  $g$  représentées sur la figure 3.14. On commence par remarquer que  $f(t) \geq g(t) \forall t \in \mathbb{R}_+$ . Puis l'étude de la fonction  $f$  montre qu'elle est strictement croissante sur  $[0, t_1]$  et sur  $[t_2, +\infty[$

16. Ce sont les états de Bell généralisés dont on a parlé dans le second chapitre.

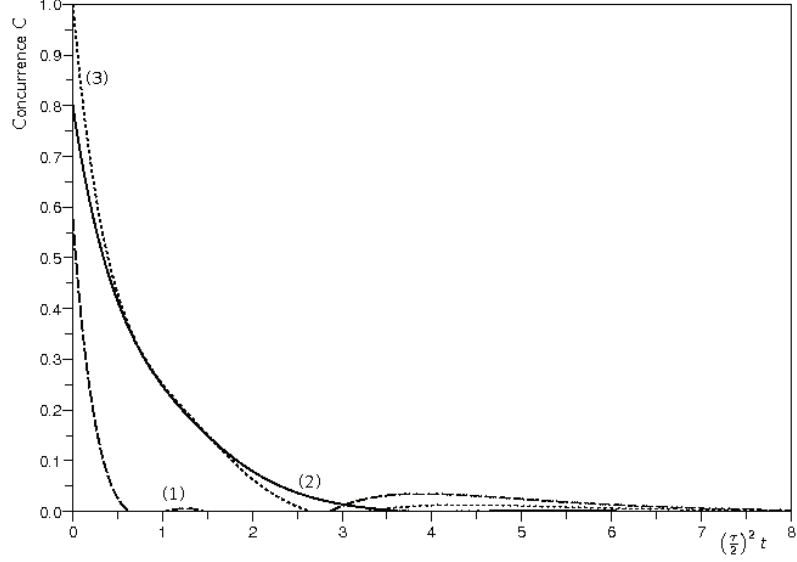


FIGURE 3.13 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$  et  $\tau_A = \tau_B$  en fonction de  $\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t$  avec pour état initial :

$$\begin{aligned} (1) : |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1.1}}|11\rangle + \sqrt{\frac{0.1}{1.1}}|00\rangle \\ (2) : |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}}|11\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|00\rangle \\ (3) : |\Psi\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \end{aligned}$$

et strictement décroissante sur  $]t_1, t_2[$  où  $t_1 < t_2$  sont les deux solutions strictement positives de l'équation  $-10e^{-2t} + (t^2 - 6t + 14)e^{-t} + 2t - 4 = 0$ . On a numériquement :

$$\begin{aligned} t_1 &\simeq 0,807 \text{ et } f(t_1) \simeq 1,106 \\ t_2 &\simeq 1,281 \text{ et } f(t_2) \simeq 1,093. \end{aligned}$$

Quant à  $g$ , elle est strictement décroissante sur  $[0, t_3]$  et strictement croissante sur  $]t_3, +\infty[$  où  $t_3$  est l'unique solution de l'équation  $2e^{-2t} + (-t^2 + 2t + 2)e^{-t} + 2(t - 2) = 0$  et on a :

$$t_3 \simeq 1,763 \text{ et } g(t_3) \simeq 0,217.$$

On a donc trois régimes :

- si  $1 \leq \frac{1}{|\alpha|^2} \leq f(t_2)$  alors  $C$  s'annule uniquement sur  $[t_-, t_+]$  où  $t_-$  [resp.  $t_+$ ] est l'unique solution de l'équation  $f(t) = \frac{1}{|\alpha|^2}$  [resp.  $g(t) = \frac{1}{|\alpha|^2}$ ].

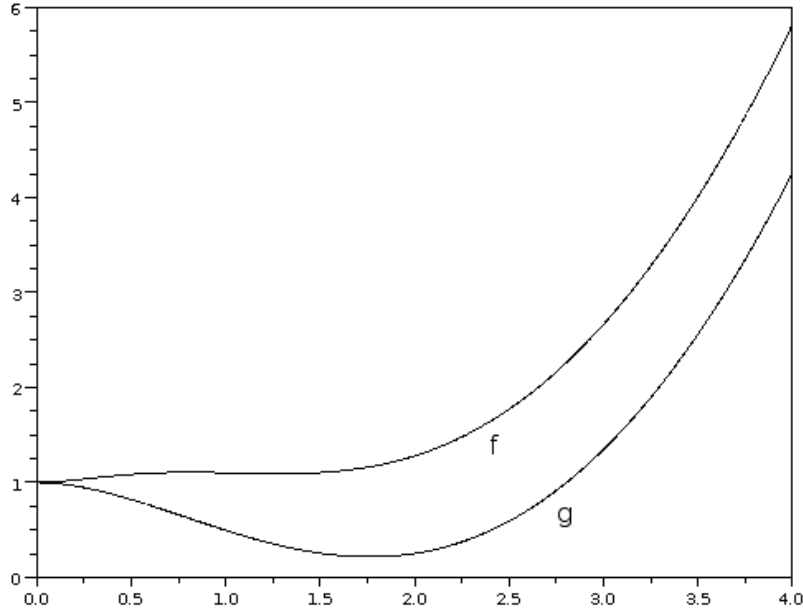


FIGURE 3.14 – Représentation des fonctions  $f$  et  $g$ .

- si  $f(t_2) \leq \frac{1}{|\alpha|^2} \leq f(t_1)$  alors  $C$  s'annule uniquement sur  $[t_-^1, t_+^1] \cup [t_-^2, t_+^2]$  où les  $t_{\pm}^i$  vérifient  $f(t_-^1) = f(t_+^1) = f(t_-^2) = g(t_+^2) = \frac{1}{|\alpha|^2}$ .
- si  $f(t_1) < \frac{1}{|\alpha|^2}$  alors  $C$  s'annule uniquement sur  $[t_-, t_+]$  où  $t_-$  [resp.  $t_+$ ] est l'unique solution de l'équation  $f(t) = \frac{1}{|\alpha|^2}$  [resp.  $g(t) = \frac{1}{|\alpha|^2}$ ].

Ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

**3.8.2.c. Si l'état initial est  $\rho_{\Phi} = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  avec  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \gamma|01\rangle$ .**

Ici pour  $t \geq 0$ , on a  $a(t)$  et  $y(t)$  nuls par (3.18) et (3.28), donc la concurrence est simplement donnée, en réutilisant (3.28) et (3.25), par :

$$\begin{aligned}
C(\rho_{\Phi}(t)) &= 2|x(t)| \\
&= 2 \left| -\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t e^{-(\frac{\tau}{2})^2 t} |\alpha|^2 + e^{-(\frac{\tau}{2})^2 t} \alpha \bar{\gamma} \right| \\
&= 2|\alpha| \left| \gamma - \alpha \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t \right| e^{-(\frac{\tau}{2})^2 t}. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

**Remarque 3.8.7.** Si  $\alpha = 0$ , alors  $C(t) = 0 \forall t$ . Si  $\alpha \neq 0$  et  $\arg \alpha \neq \arg \gamma$  alors  $C(t) \neq 0 \forall t$ .

Enfin si  $\alpha \neq 0$  et si  $\arg \alpha = \arg \gamma$ , alors on retrouve le phénomène de désintrication-réintrication ou rebond qui apparaît au temps  $t_{\text{dés-réint}} = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\tau}{\tau}\right)^2$ . On illustre cette formule (3.29) sur la figure 3.15.

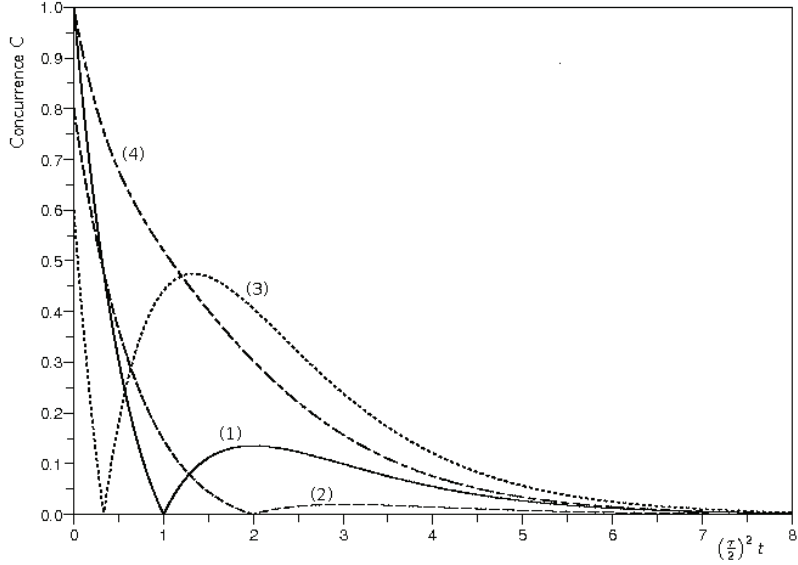


FIGURE 3.15 – Concurrence des deux qubits pour  $\beta = \infty$ ,  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  en fonction de  $\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t$  avec pour états initiaux :

- (1) :  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$
- (2) :  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|10\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|01\rangle$
- (3) :  $|\Phi\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|01\rangle$
- (4) :  $|\Phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$

Pour voir comment ce phénomène de rebond de la concurrence évolue à petite température, on propose dans la section suivante de faire une théorie de perturbation :

### 3.8.3 Développement perturbatif autour de la température nulle.

On rappelle qu'on suppose  $\tau_A = \tau_B$ , alors on sait déjà que  $y(t) = e^{-\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t}$ .

Ici le paramètre  $q := e^{-\beta\epsilon}$  est petit. On va donc faire un développement perturbatif en  $q$  de la formule (3.18). On réécrit donc la matrice à exponentier

sous la forme :

$$\frac{t}{1 + e^{-\beta\epsilon}} M_1 = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 t \frac{A(q)}{1+q},$$

avec  $A(q) := A_0 + qA_1$  où :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le spectre de  $A_0$  se lit directement sur sa diagonale car  $A_0$  est triangulaire. On voit qu'on a deux valeurs propres simples 0 et -2. Par contre la valeur propre -1 est de multiplicité 4. En jordanisant  $A_0$ , on fait apparaître deux blocs de Jordan pour cette valeur propre. Un de taille 1 et un autre de taille 3.

On peut également trouver une matrice de Jordan<sup>17</sup> pour  $\frac{A(q)}{1+q}$  :

$$\frac{A(q)}{1+q} \sim \begin{pmatrix} \mu_-(q) & & & & & \\ & \mu_+(q) & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} \mu_-(q) &= \frac{-3}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+34q+q^2}}{1+q} = -2 - 8q + O(q^2) \\ \mu_+(q) &= \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+34q+q^2}}{1+q} = -1 + 8q + O(q^2). \end{aligned}$$

On voit bien ici comment changent les valeurs propres sous l'effet de la perturbation :

- .  $-2 \rightarrow \mu_-(q)$
- .  $0 \rightarrow 0$
- .  $-1 \rightarrow -1$  et  $\mu_+(q)$

Le bloc de Jordan relatif à la valeur propre  $-1$  va faire apparaître des singularités pour les vecteurs propres perturbés correspondants comme prédit par la théorie de Kato. Mais on laisse ces calculs pour l'annexe H et on donne ici seulement le résultat qui nous intéresse :

<sup>17</sup>. On choisit de représenter les matrices creuses par des blancs à la place des zéros. De plus on utilise la notation classique  $M \sim N$  pour signifier que  $M$  est semblable à  $N$ .

**Proposition 3.8.6.** *Si  $\tau_A = \tau_B$  en posant  $q := e^{-\beta\epsilon}$  et  $\frac{\tau}{2} = 1$ , et en choisissant  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , alors  $a$  uniformément en  $t$  pour  $t \in [0, t_0]$  :*

$$\begin{aligned} x(t) = & \left\{ (2-t)e^{-t} - 2e^{-2t} + q [(-4t^2 + 27t - 44)e^{-t} + (16t + 44)e^{-2t}] \right\} a \\ & + \left\{ -te^{-t} + q [(-4t^2 + 11t - 10)e^{-t} + 10e^{-2t}] \right\} b \\ & + e^{-t}x + q [(-4t - 4)e^{-t} + 4e^{-2t}] (x + \bar{x}) \\ & + q [(t-2)e^{-t} + 2e^{-2t}] c + qte^{-t}d + O(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) = & \left\{ e^{-2t} + q [(t^2 - 8t + 18)e^{-t} - (8t + 18)e^{-2t}] \right\} a \\ & + q \left\{ (t^2 - 4t + 5)e^{-t} - 5e^{-2t} \right\} b \\ & + q \left\{ (-t + 2)e^{-t} - 2e^{-2t} \right\} (x + \bar{x}) \\ & + q(e^{-t} - e^{-2t})c + O(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(t) = & \left\{ (e^{-t} - e^{-2t}) + q [1 + (-t^2 + 8t - 19)e^{-t} + (8t + 18)e^{-2t}] \right\} a \\ & + \left\{ e^{-t} + q [1 + (-t^2 + 4t - 6)e^{-t} + 5e^{-2t}] \right\} b \\ & + q \left\{ (t-2)e^{-t} + 2e^{-2t} \right\} (x + \bar{x}) \\ & + q(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})c + q(1 - e^{-t})d + O(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(t) = & \left\{ (t^2 - 4t + 5)e^{-t} - 5e^{-2t} \right. \\ & \left. + q \left[ 1 + \left(\frac{8}{3}t^3 - 30t^2 + 104t - 147\right)e^{-t} + (40t + 146)e^{-2t} \right] \right\} a \\ & + \left\{ t^2e^{-t} + q \left[ 1 + \left(\frac{8}{3}t^3 - 14t^2 + 24t - 26\right)e^{-t} + 25e^{-2t} \right] \right\} b \\ & + \left\{ -te^{-t} + q [(-4t^2 + 11t - 10)e^{-t} + 10e^{-2t}] \right\} (x + \bar{x}) \\ & + \left\{ e^{-t} + q [1 + (-t^2 + 4t - 6)e^{-t} + 5e^{-2t}] \right\} c \\ & + q \left\{ 1 - (t^2 + 1)e^{-t} \right\} d + O(q^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
d(t) = & \left\{ 1 + (-t^2 + 4t - 6)e^{-t} + 5e^{-2t} \right. \\
& + q \left[ -2 + \left(\frac{-8}{3}t^3 + 30t^2 - 104t + 148\right)e^{-t} - (40t + 146)e^{-2t} \right] \left. \right\} a \\
& + \left\{ 1 - (t^2 + 1)e^{-t} \right. \\
& + q \left[ -2 + \left(\frac{-8}{3}t^3 + 14t^2 - 24t + 27\right)e^{-t} - 25e^{-2t} \right] \left. \right\} b \\
& + \{te^{-t} + q[(4t^2 - 11t + 10)e^{-t} - 10e^{-2t}]\} (x + \bar{x}) \\
& + \{1 - e^{-t} + q[-2 + (t^2 - 4t + 7)e^{-t} - 5e^{-2t}]\} c \\
& + \{1 + q[-2 + (t^2 + 2)e^{-t}]\} d + O(q^2).
\end{aligned}$$

Dans la suite on posera comme dans la proposition précédente  $\tau/2 = 1$  dans le but de simplifier les formules. Quelles informations peut-on tirer de ces formules au sujet de la concurrence ?

Asymptotiquement on sait déjà qu'il y a désintrication en temps fini par la proposition 3.6.2. Par contre la théorie de perturbation présentée ici va nous permettre de voir comment la température modifie le phénomène de désintrication-réintrication observé à température nulle pour les états initiaux  $|\Phi\rangle = \alpha|10\rangle + \gamma|01\rangle$  avec  $\arg(\alpha) = \arg(\gamma)$  (cf. Remarque 3.8.7). On rappelle que ce phénomène apparaît au temps  $t_{\text{dés-réint}} = \frac{\tau}{\alpha}$  (pour  $\alpha, \gamma \neq 0$ ) car la concurrence prend la forme  $C(\rho_\Phi(t)) = 2|\alpha||\gamma - \alpha t|e^{-t}$ .

On rappelle qu'ici  $\tau_A = \tau_B$  et on suppose que  $\rho(0) = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ . On a toujours  $y(t) = 0$  donc  $C_2$  ne va pas contribuer à la concurrence. Il suffit d'étudier  $C_1$ . Pour cela on note, grâce à la proposition 3.8.6, pour tout  $t \leq t_0$  :

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t) + qx_1(t) + O(q^2) \\
a(t) &= a_0(t) + qa_1(t) + O(q^2) = qa_1(t) + O(q^2) \\
d(t) &= d_0(t) + qd_1(t) + O(q^2)
\end{aligned}$$

car  $a_0(t) = 0$ . Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
C_1(t, q) &= |x(t)| - \sqrt{ad(t)} = |x_0(t)| - \sqrt{q} \sqrt{a_1(t)d_0(t)} + O(q) \\
&= C_1(t, 0) + \Delta C_1(t) \sqrt{q} + O(q).
\end{aligned}$$

On a donc une première correction de l'ordre de  $\sqrt{q}$ . On explicite ce terme<sup>18</sup> :

$$\begin{aligned} \Delta C_1(t) &= -\sqrt{a_1(t)d_0(t)} \\ &= -\left[ \{(t^2 - 4t + 5)e^{-t} - 5e^{-2t}\} |\alpha|^2 + \{(-t + 2)e^{-t} - 2e^{-2t}\} 2|\alpha\gamma| \right. \\ &\quad \left. + (e^{-t} - e^{-2t})|\gamma|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \{1 - (t^2 + 1)e^{-t}\} |\alpha|^2 + te^{-t}|\alpha\gamma| + \{1 - e^{-t}\} |\gamma|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pour voir ce que devient le phénomène de désintrication-réintrication, il faut étudier cette fonction  $\Delta C_1$  au temps  $t_{\text{dés-réint}} = \frac{|\gamma|}{|\alpha|}$  :

$$\Delta C_1\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\right) = -\sqrt{5|\alpha|^2 e^{-\frac{|\gamma|}{|\alpha|}} - [1 + 4|\alpha|(|\alpha| + |\gamma|)] e^{-2\frac{|\gamma|}{|\alpha|}} \sqrt{1 - e^{-\frac{|\gamma|}{|\alpha|}}}}.$$

On voit que  $\Delta C_1\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\right) \leq 0$ , mais a-t-on  $\Delta C_1\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\right) < 0$ ? L'annulation ne peut pas venir du second terme car  $\gamma \neq 0$ . On va réécrire le membre sous la racine du premier terme, soit  $a_1\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\right)$ , en remplaçant  $|\gamma|$  par  $\sqrt{1 - |\alpha|^2}$  :

$$a_1\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\right) = e^{-\frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{|\alpha|}} \left[ 5|\alpha|^2 - \left[ 1 + 4|\alpha|(|\alpha| + \sqrt{1 - |\alpha|^2}) \right] e^{-\frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{|\alpha|}} \right].$$

On a  $a_1\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\right) = 0$  ssi  $f(|\alpha|) = 0$  où :

$$f(z) := 5z^2 - \left[ 1 + 4z(z + \sqrt{1 - z^2}) \right] e^{-\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}}.$$

Or une étude de la fonction  $f$  montre que celle-ci ne s'annule qu'en  $-1$ . Ainsi on a bien :

$$\Delta C_1\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\right) < 0.$$

Ce résultat nous assure que le comportement exceptionnel de la concurrence à  $t_{\text{dés-réint}}$  va disparaître dès qu'on va "brancher la température". À la place on va avoir apparition de tout un palier avec concurrence nulle.

□ La preuve de cela repose sur deux points :

- . le fait que la correction, à petite température, à la fonction  $C_1$  en  $t_{\text{dés-réint}}$  soit strictement négative.

---

18. Il n'y a pas de problème ici à prendre les racines. En effet comme  $\begin{cases} a(t) \geq 0 \\ d(t) \geq 0 \end{cases}$ , on

a les estimations a priori  $\begin{cases} a_1(t) \geq 0 \\ d_0(t) \geq 0 \end{cases}$ .

. la continuité de la fonction  $(t, q) \mapsto C_1(t, q)$  dans ses deux variables  $\square$ .

La figure 3.16 illustre ce phénomène d'ouverture du point de rebond avec l'apparition d'un palier. Pour ce faire, on a repris les mêmes états initiaux<sup>19</sup> qu'à la figure 3.15. On a choisi  $q = 0.001$  et on a effectué une simulation numérique via scilab.

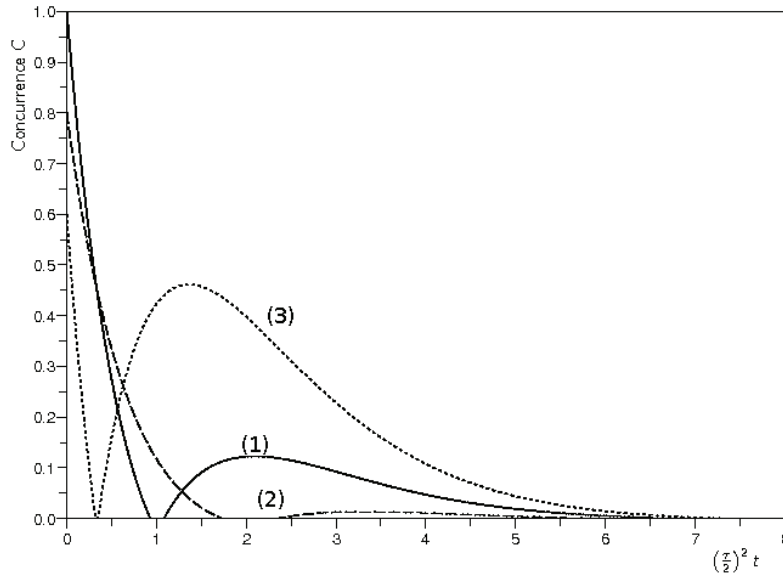


FIGURE 3.16 – Concurrence des deux qubits pour  $e^{-\beta\epsilon} = 0.001$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  en fonction de  $(\frac{\tau}{2})^2 t$  pour les états initiaux :

- (1)  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$
- (2)  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|10\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|01\rangle$
- (3)  $|\Phi\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|01\rangle$

**Remarque 3.8.8.** On voit que la taille du palier dépend du choix de l'état initial (pour  $|\Phi\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|01\rangle$  on le distingue à peine mais il y a bien un très fin palier). On pouvait le pressentir grâce à notre formule pour  $\Delta C_1$ .

<sup>19</sup>. Nous avons préféré ne pas surcharger la figure avec l'état initial  $|\Phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|01\rangle$  car il ne présentait pas de point de rebond à température nulle (cf. courbe (4) de la figure 3.15). Ici le but est d'illustrer l'ouverture de ce point de rebond.

### 3.9 Expressions analytiques pour la matrice densité et évolutions de l'intrication si $\beta = 0$ , $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$ et si $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ .

On n'a pas pu traiter le cas général  $\tau_A \neq \tau_B$  pour  $\beta = 0$  car les formules obtenues à l'aide d'un logiciel de calcul formel tiennent sur plus d'une cinquantaine de pages.

Si  $\tau_A = \tau_B$  et  $\rho(0) \in \mathcal{E}_X$ , il vient en posant pour simplifier les écritures  $\frac{\tau}{2} = 1$  :

$$\begin{aligned}
 a(t) &= s_1(t)a + s_3(t)[b + 2\Re(x) + c] + s_2(t)d \\
 b(t) &= s_3(t)a + s_1(t)b - s_3(t)2\Re(x) + s_2(t)c + s_3(t)d \\
 c(t) &= s_3(t)a + s_2(t)b - s_3(t)2\Re(x) + s_1(t)c + s_3(t)d \\
 d(t) &= s_2(t)a + s_3(t)[b + 2\Re(x) + c] + s_1(t)d \\
 x(t) &= s_3(t)[a - b] + s_1(t)x + s_2(t)\bar{x} - s_3(t)[c - d]
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 s_1(t) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\
 s_2(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\
 s_3(t) &= \frac{1}{6}(1 - e^{-3t}).
 \end{aligned}$$

Ce cas est intéressant car on le rappelle c'est le seul à admettre une famille à un paramètre  $\left\{ \lambda\rho_0^{th} + (1 - \lambda)\sigma \text{ avec } \lambda \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \right\}$  d'états asymptotiques. En ce qui concerne la concurrence, on a :

$$C(\lambda\rho_0^{th} + (1 - \lambda)\sigma) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{3\lambda}{2} \right\} \tag{3.31}$$

donc ces états sont intriqués ssi  $\lambda \in \left[0, \frac{2}{3}\right[$ .

Pour un état initial donné, on a un état asymptotique défini par :

$$\lambda = \frac{2}{3} [1 + (a + d) + 2\Re(x)]. \tag{3.32}$$

Pour prouver cette formule, il suffit de faire tendre, dans (3.30),  $t$  vers l'infini et on obtient par exemple :

$$\begin{aligned}
 a(\infty) &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}[b + c + 2\Re(x)] + \frac{1}{3}d \\
 &= \frac{1}{6} [1 + (a + d) + 2\Re(x)].
 \end{aligned}$$

Comme on sait que  $a(\infty) = \langle 11 | \lambda \rho_0^{th} + (1 - \lambda) \sigma | 11 \rangle = \frac{\lambda}{4}$ , cela suffit pour prouver (3.32).

Ainsi d'après (3.31) on a concurrence asymptotique non nulle ssi  $(a + d) + 2\Re(x) < 0$  et précisément dans ce cas la concurrence vaut  $C(\rho(\infty)) = -[a + d + 2\Re(x)]$ .

La propriété suivante résume ce qui précède et traite le cas où  $(a + d) + 2\Re(x) \geq 0$  en ce qui concerne l'asymptotique de la concurrence :

**Proposition 3.9.1.** *Pour  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  et pour tout état initial de  $\mathcal{E}_X$ , on a :*

*Si  $a + d + 2\Re(x) < 0$  alors  $C(\rho(t)) \sim_{t \rightarrow \infty} -[a + d + 2\Re(x)]$ .*

*Si  $a + d + 2\Re(x) > 0$  alors il existe un  $t_0$  tel que  $C(\rho(t)) = 0 \forall t \geq t_0$ .*

*Si  $a + d + 2\Re(x) = 0$  avec  $a + d \neq 0$  ou  $\Im(x) \neq 0$  alors*

$$C(\rho(t)) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{2} [4\Im(x)^2 + (a - d)^2] e^{-2t}.$$

*Si  $a + d + 2\Re(x) = 0$  avec  $a + d = 0$  et  $\Im(x) = 0$*

*alors  $C(\rho(t)) = 0 \forall t \geq 0$ .*

On illustre cette propriété sur la figure 3.17.

□ Le premier cas vient d'être traité.

Pour le second ( $a + d + 2\Re(x) > 0$ ), il suffit de remarquer que  $C_1(\rho(\infty))$  et  $C_2(\rho(\infty))$  sont strictement négatifs. On conclut ce cas par continuité de  $C_1$  et  $C_2$ .

Si ( $a + d + 2\Re(x) = 0$ ) un développement asymptotique s'impose (car  $C_1(\rho(\infty)) = 0$ ). Tout d'abord, on remarque que c'est  $C_1$  qu'il va falloir développer car  $C_2(\rho_\infty) = \frac{-1}{3}$ . On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{a(t)d(t)} &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a-d)e^{-t}\right)^2 + O(e^{-3t})} \\ |x(t)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + (\Im(x)e^{-t})^2 + O(e^{-3t})}. \end{aligned}$$

donc :

$$C_1(t) = \frac{3}{4} [4\Im(x)^2 + (a - d)^2] e^{-2t} + O_{t \rightarrow \infty}(e^{-3t})$$

permet de conclure pour le troisième cas.

Dans le dernier cas, les égalités  $a + d + 2\Re(x) = 0$  et  $\Im(x) = 0$  entraînent  $a = d = x = 0$  et on a nécessairement  $\rho(0) = b|10\rangle\langle 10| + c|01\rangle\langle 01|$  donc

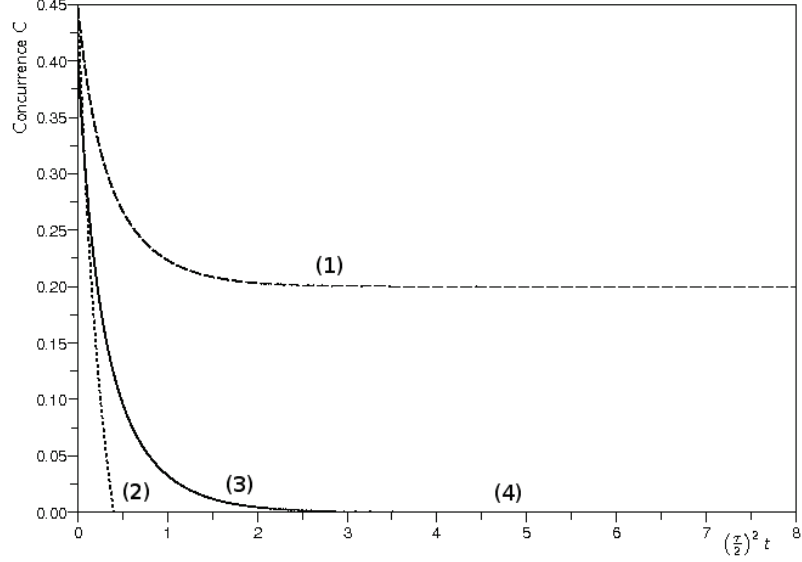


FIGURE 3.17 – Concurrence dans le cas où  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$  en fonction de  $(\frac{\tau}{2})^2 t$  pour l'état initial donné par la matrice X telle que :

- (1)  $a = d = y = 0, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$  et  $x = -0.1 + 0.2i$
- (2)  $a = d = y = 0, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$  et  $x = 0.1 + 0.2i$
- (3)  $a = d = y = 0, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$  et  $x = 0.2i$
- (4)  $a = d = x = y = 0, b = \frac{1}{3}$  et  $c = \frac{2}{3}$  (courbe confondue avec l'axe des abscisses)

$y = 0$  et  $C_2(t) \leq 0 \forall t$ . Puis il est facile de calculer qu'ici  $C_1(t) = 0 \forall t$  ce qui conclut la preuve.  $\square$

Si la température de la chaîne est infinie et les temps d'interaction sont égaux, on a un phénomène d'intrication asymptotique curieux. Cependant l'évolution de l'intrication ne présente pas de phénomènes spectaculaires comme le dit :

**Théorème 3.9.1.** *On considère  $\rho(t)$  donné par le théorème 3.3.1 avec  $\beta = 0$  et  $\tau_A = \tau_B = \frac{\tau}{2}$ . Alors  $t \mapsto C(\rho(t))$  est une fonction décroissante.*

$\square$  On commence par énoncer un lemme trivial mais utile :

**Lemme 3.9.1.**  $C_1 \leq -C_2$  et  $C_2 \leq -C_1$ .

$\square$  En effet, comme  $|x| \leq \sqrt{bc}$  et  $|y| \leq \sqrt{ad}$ , on a  $C_1 = |x| - \sqrt{ad} \leq$

$\sqrt{bc} - |y| = -C_2$ . De même on prouve l'autre inégalité.  $\square$

Ainsi, si  $C_1(t) > 0$  [resp.  $C_2(t) > 0$ ] alors  $C_2(t) < 0$  [resp.  $C_1(t) < 0$ ] et donc  $C(t) = 2C_1(t)$  [resp.  $C(t) = 2C_2(t)$ ]. Il suffit donc d'étudier indépendamment les fonctions  $C_1$  et  $C_2$  sur les domaines où elles sont positives. On propose ici une méthode qui distingue les cas :

**I) Cas où  $C_1(t) > 0$**

On a d'après (3.30) :

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)} \text{ avec} \\ f(t) &:= |x(t)|^2 = (\Im(x)e^{-t})^2 + (\alpha_1 + \gamma e^{-3t})^2 \text{ et} \\ g(t) &:= -\left(\frac{a-d}{2}e^{-t}\right)^2 + (\alpha_2 + \gamma e^{-3t})^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec  $\alpha_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}(a+d+x+\bar{x})$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(a+d+x+\bar{x})$  et  $\gamma = \frac{1}{6}(2(a+d) - 1 - (x+\bar{x}))$ . Notons que  $\alpha_2 \geq 0$  (car  $1+a+d+x+\bar{x} \geq 1+a+d-2|x| \geq 1+a+d-2\sqrt{bc} \geq 1+a+d-b-c = 2a+2d$ ). On suppose pour l'instant que  $C_1(t) \geq 0$ , c'est-à-dire que  $f(t) \geq g(t)$ .

La dérivée de  $C_1$ , quand elle existe, est quant à elle donnée par la formule :

$$\frac{d}{dt}C_1(t) = \frac{\Delta(t)}{\sqrt{fg(t)}}, \quad (3.34)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= -\sqrt{g(t)}[(\Im(x)e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})] \\ &\quad + \sqrt{f(t)}[-\left(\frac{a-d}{2}e^{-t}\right)^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})]. \end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver que  $\Delta(t) \leq 0$ .

I.1) Cas où  $a+d+x+\bar{x} > 0$  et  $\gamma \leq 0$ , alors  $\alpha_2 \geq \alpha_1$

On réécrit  $\Delta(t)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= -[\sqrt{g(t)}(\Im(x)e^{-t})^2 + \sqrt{f(t)}\left(\frac{a-d}{2}e^{-t}\right)^2] \\ &\quad + 3\gamma e^{-3t} \underbrace{[\sqrt{f(t)}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) - \sqrt{g(t)}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})]}_{:=v(t)}. \end{aligned}$$

On remarque que le premier terme est négatif donc il suffit de montrer que  $v(t)$  est positif car on rappelle qu'ici  $\gamma \leq 0$ . On commence par remarquer trivialement que  $\alpha_2 + \gamma e^{-3t}$  est positif car :

$$\alpha_2 + \gamma e^{-3t} \geq \alpha_2 + \gamma = \frac{a+d}{2} \geq 0.$$

De deux choses l'une, soit  $\alpha_1 + \gamma e^{-3t}$  est négatif alors  $v(t)$  est positif (somme de deux termes positifs), soit  $\alpha_1 + \gamma e^{-3t}$  est positif et on minore  $v(t)$  de la façon suivante :

$$v(t) = \underbrace{\sqrt{f(t)}}_{\geq \sqrt{g(t)} \geq 0} \underbrace{(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})}_{\geq \alpha_1 + \gamma e^{-3t} \geq 0} - \sqrt{g(t)}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t}) \geq 0.$$

I.2) Cas où  $a + d + x + \bar{x} > 0$  et  $\gamma > 0$

Dans ce cas on a toujours

$$\alpha_2 + \gamma e^{-3t} \geq 3\gamma e^{-3t} > 0 \quad (3.35)$$

donc  $3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) \leq (\alpha_2 + \gamma e^{-3t})^2$ . Pour prouver (3.35), il suffit de montrer, comme  $\gamma > 0$ , que  $\alpha_2 - 2\gamma > 0$ . Et en effet :

$$\alpha_2 - 2\gamma = \frac{1}{2}[b + c + x + \bar{x}] \geq \frac{1}{2}[b + c - 2|x|] \geq \frac{1}{2}[b + c - 2\sqrt{bc}] \geq 0.$$

Si<sup>20</sup>  $3\gamma e^{-3t} \geq \alpha_1 + \gamma e^{-3t} \geq 0$ , alors  $(\mathfrak{F}(x)e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t}) \geq f(t)$  :

$$\Delta(t) \leq -\sqrt{g(t)}f(t) + \sqrt{f(t)}g(t) = -\sqrt{fg(t)}(\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}) \leq 0.$$

Si  $3\gamma e^{-3t} < \alpha_1 + \gamma e^{-3t}$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= -\sqrt{g(t)}f(t) + \sqrt{g(t)}[(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})^2 - 3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})] \\ &\quad + \sqrt{f(t)}g(t) - \sqrt{f(t)}[(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})^2 - 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})] \\ &\leq \underbrace{-\sqrt{fg(t)}(\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)})}_{\leq 0} \\ &\quad + \underbrace{\sqrt{g(t)}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})(\alpha_1 - 2\gamma e^{-3t}) - \sqrt{f(t)}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})(\alpha_2 - 2\gamma e^{-3t})}_{\leq 0}. \end{aligned}$$

La première majoration est la même que dans le cas précédent. Pour la seconde on utilise  $3\gamma e^{-3t} \leq \alpha_1 + \gamma e^{-3t}$  qui donne avec  $a + d + x + \bar{x} > 0$  et  $\gamma > 0$  :

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \gamma e^{-3t} &> \alpha_1 + \gamma e^{-3t} > 0 \\ \alpha_2 - 2\gamma e^{-3t} &> \alpha_1 - 2\gamma e^{-3t} > 0. \end{aligned}$$

Si  $3\gamma e^{-3t} \geq 0 > \alpha_1 + \gamma e^{-3t}$ , en remarquant que :

$$-\sqrt{g(t)}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t}) < -\sqrt{f(t)}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t}),$$

---

20. On traitera le cas  $3\gamma e^{-3t} \geq 0 > \alpha_1 + \gamma e^{-3t}$  à la fin car c'est le plus délicat.



on obtient la première majoration (car  $\gamma > 0$  ici) :

$$\Delta(t) < \sqrt{f(t)} \left[ -\left(\frac{a-d}{2}e^{-t}\right)^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 - \alpha_1) \right] - \sqrt{g(t)} (\Im(x)e^{-t})^2.$$

En faisant apparaître  $f(t)$  et  $g(t)$ , on peut réécrire cette inéquation sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta(t) < & 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 - \alpha_1) \sqrt{f(t)} \\ & + \sqrt{f(t)}g(t) - (\alpha_2 + \gamma e^{-3t})^2 \sqrt{f(t)} \\ & - \sqrt{g(t)}f(t) + (\alpha_1 + \gamma e^{-3t})^2 \sqrt{g(t)}. \end{aligned}$$

qu'on réarrange en :

$$\begin{aligned} \Delta(t) < & -\sqrt{f(t)g(t)}(\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}) \\ & - [(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})^2 - 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 - \alpha_1)]\sqrt{f(t)} + (\alpha_1 + \gamma e^{-3t})^2 \sqrt{g(t)} \end{aligned}$$

puis en :

$$\begin{aligned} \Delta(t) < & \underbrace{-[\sqrt{f(t)g(t)} + (\alpha_1 + \gamma e^{-3t})^2]}_{\leq 0} (\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}) \\ & - \underbrace{[(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})^2 - (\alpha_1 + \gamma e^{-3t})^2 - 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 - \alpha_1)]}_{:=w(t)} \sqrt{f(t)}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que  $w(t)$  est positif pour conclure. Or en effet :

$$\begin{aligned} w(t) &= \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{\geq 0} (\alpha_2 + \alpha_1 \underbrace{-\gamma e^{-3t}}_{> \alpha_1 \text{ car ici } \alpha_1 + \gamma e^{-3t} < 0}) \\ &> \alpha_2 + 2\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - (a + d + x + \bar{x})) \\ &\geq \frac{1}{2}(b + c - 2|x|) \geq \frac{1}{2}(b + c - 2\sqrt{bc}) \geq 0. \end{aligned}$$

I.3) Cas où  $a + d + x + \bar{x} \leq 0$  et  $\gamma \geq 0$

Ici on va montrer que :

$$-[(\Im(x)e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})] \leq -3\gamma e^{-3t} \sqrt{f(t)} \quad (3.36)$$

$$-\left(\frac{a-d}{2}e^{-t}\right)^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) \leq 3\gamma e^{-3t} \sqrt{g(t)}. \quad (3.37)$$

Si les inégalités (3.36) et (3.37) sont vérifiées alors on a :

$$\Delta(t) \leq \sqrt{g(t)}(-3\gamma e^{-3t} \sqrt{f(t)}) + \sqrt{f(t)}3\gamma e^{-3t} \sqrt{g(t)} = 0$$

On commence par prouver l'inégalité (3.36). Elle est équivalente à :

$$\begin{aligned} & [(\Im(x)e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})]^2 \geq (3\gamma e^{-3t})^2 f(t) \\ \Leftrightarrow & (\Im(x)e^{-t})^2 [(\Im(x)e^{-t})^2 - 3(\gamma e^{-3t})^2 + 6\gamma e^{-3t}\alpha_1] \geq 0. \end{aligned}$$

On peut exclure le cas où  $(\mathfrak{S}(x)e^{-t})^2 = 0$  alors :

$$(3.36) \Leftrightarrow (\mathfrak{S}(x)e^{-t})^2 + 3(\gamma e^{-3t}) \left( \underbrace{2\alpha_1 - \gamma e^{-3t}}_{\substack{\geq 2\alpha_1 - \gamma \\ = \frac{1-(a+d)}{2} - \frac{a+d+x+\bar{x}}{2} \geq 0}} \right) \geq 0.$$

La dernière inégalité étant vraie, on est assuré de la véracité de (3.36).

On passe à la preuve de (3.37) à présent.

Si  $-(\frac{a-d}{2}e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) \leq 0$ , alors (3.37) est trivialement vraie. On suppose donc le contraire, c'est-à-dire que  $(\frac{a-d}{2}e^{-t})^2 \leq 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})$ . Dans ce cas (3.37) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & [-(\frac{a-d}{2}e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})]^2 \leq (3\gamma e^{-3t})^2 g(t) \\ \Leftrightarrow & (\frac{a-d}{2}e^{-t})^2 \left[ (\frac{a-d}{2}e^{-t})^2 + (3\gamma e^{-3t})^2 - 6\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) \right] \leq 0. \end{aligned}$$

On peut exclure le cas où  $a = d$  alors :

$$(3.37) \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{a-d}{2}e^{-t}\right)^2}_{\leq 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})} + (3\gamma e^{-3t})^2 - 6\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) \leq 0,$$

car on rappelle qu'on a supposé que  $(\frac{a-d}{2}e^{-t})^2 \leq 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t})$ . Or on a :

$$3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) + (3\gamma e^{-3t})^2 - 6\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) = 3\gamma e^{-3t}(2\gamma - \alpha_2).$$

Il suffit donc de montrer que  $2\gamma \leq \alpha_2$ . Or :

$$\begin{aligned} 2\gamma - \alpha_2 &= \frac{1}{6}(-3 + 3(a+d) - 3(x+\bar{x})) \\ &= \frac{-1}{2} \left( (b+c) + \underbrace{(x+\bar{x})}_{\geq -2|x| \geq -2\sqrt{bc} \geq -(b+c)} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (3.37) est également vraie, ce qui termine la preuve de la négativité de  $\Delta(t)$  dans ce cas.

I.4) Cas où  $a + d + x + \bar{x} \leq 0$  et  $\gamma < 0$  alors  $\alpha_1 \geq \frac{1}{6}$

Ici on va procéder de même que précédemment en montrant que :

$$-[(\mathfrak{S}(x)e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})] \leq -3\gamma e^{-3t}\sqrt{f(t)} \quad (3.38)$$

$$-(\frac{a-d}{2}e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) \leq 3\gamma e^{-3t}\sqrt{g(t)}. \quad (3.39)$$

Si  $-[(\mathfrak{F}(x)e^{-t})^2 + 3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})] \leq 0$ , alors (3.38) est prouvée. On suppose donc le contraire, c'est-à-dire que  $(\mathfrak{F}(x)e^{-t})^2 \leq -3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})$ . L'inéquation (3.38) est équivalente à :

$$(\mathfrak{F}(x)e^{-t})^2 \left[ \underbrace{\underbrace{(\mathfrak{F}(x)e^{-t})^2}_{\leq -3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})} - 3(\gamma e^{-3t})^2 + 6\gamma e^{-3t}\alpha_1}_{\leq -3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t}) + 3(\gamma e^{-3t})^2 + 6\gamma e^{-3t}\alpha_1 = 3\gamma\alpha_1 e^{-3t} \leq 0} \right] \leq 0$$

qui est donc vraie car on rappelle qu'on a supposé que  $(\mathfrak{F}(x)e^{-t})^2 \leq -3\gamma e^{-3t}(\alpha_1 + \gamma e^{-3t})$  et car ici  $\alpha_1 \geq 0$  et  $\gamma < 0$ .

Quant à (3.39), elle est équivalente par un calcul analogue au cas I.3) à  $a = d$  ou

$$\left(\frac{a-d}{2}e^{-t}\right)^2 + (3\gamma e^{-3t})^2 - 6\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) \geq 0$$

Or

$$(3\gamma e^{-3t})^2 - 6\gamma e^{-3t}(\alpha_2 + \gamma e^{-3t}) = \underbrace{3\gamma e^{-3t}}_{\leq 0} \underbrace{(\gamma e^{-3t} - 2\alpha_2)}_{\leq 0} \geq 0$$

donc (3.39) est vraie (car on rappelle que  $\alpha_2 \geq 0$ ).

### Décroissance de la Concurrence sur le domaine où $C_1$ est strictement positive

On a montré dans cette partie que pour un instant  $t$  où  $C_1(t) > 0$  et où la fonction  $C_1$  est dérivable on a  $\frac{dC_1}{dt}(t) \leq 0$ . Quels sont les points où  $C_1$  n'est pas dérivable mais où elle est strictement positive (quand  $C_1$  s'annule, elle ne contribue pas à la concurrence) ? Ce sont les points  $t$  tels que  $g(t) = 0$  (et  $f(t) > 0$ ). Mais  $g(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 + \gamma e^{-3t} = \pm \frac{a-d}{2}e^{-t}$ . Ce sont donc les points  $t$  tels que  $e^{-t}$  est racine des polynômes  $\gamma X^3 \mp \frac{a-d}{2}X + \alpha_2$ . Il y en a au plus six. La fonction  $C_1$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et dérivable sauf peut-être en six points et de dérivée négative, on est assuré de sa décroissance sur les intervalles de temps où elle est strictement positive et donc de la décroissance de la concurrence sur ces intervalles.

### **II) Cas où $C_2(t) > 0$**

On a d'après (3.30) et (3.18) :

$$C_2(t) = |y|e^{-t} - \sqrt{h(t)}$$

$$\text{avec } h(t) = b(t)c(t) = (\zeta + \theta e^{-3t})^2 - \left(\frac{b-c}{2}e^{-t}\right)^2 \quad (3.40)$$

pour  $\zeta = \frac{1}{6}[2 - (a + d) - (x + \bar{x})] \geq \frac{1}{6}$  et  $\theta = \frac{1}{6}[2(b + c) - 1 - (x + \bar{x})]$ .  
 Quand  $C_2$  est dérivable on a :

$$\frac{dC_2}{dt}(t) = -|y|e^{-t} - \frac{-3\theta e^{-3t}(\zeta + \theta e^{-3t}) + (\frac{b-c}{2}e^{-t})^2}{\sqrt{h(t)}}. \quad (3.41)$$

Il est à noter que :

$$\zeta + \theta e^{-3t} = \frac{b(t) + c(t)}{2} \geq 0.$$

Ainsi si  $\theta \leq 0$ , dans le membre droit de (3.41), on a une somme de termes négatifs donc  $\frac{dC_2}{dt}(t) \leq 0$ . On considère donc à présent le cas  $\theta > 0$ . Comme  $C_2(t) > 0$ , on a  $|y|e^{-t} > \sqrt{h(t)}$  donc :

$$\begin{aligned} \frac{dC_2}{dt}(t)\sqrt{h(t)} &= -\underbrace{|y|e^{-t}}_{\geq \sqrt{h(t)}}\sqrt{h(t)} - \left[ -3\theta e^{-3t}(\zeta + \theta e^{-3t}) + (\frac{b-c}{2}e^{-t})^2 \right] \\ &\leq -(\zeta + \theta e^{-3t})^2 + 3\theta e^{-3t}(\zeta + \theta e^{-3t}) \\ &\leq \underbrace{(\zeta + \theta e^{-3t})}_{\geq 0}(2\theta e^{-3t} - \zeta). \end{aligned}$$

On va montrer que  $2\theta e^{-3t} \leq \zeta$ , il en découlera que  $\frac{dC_2}{dt}(t) \leq 0$ . On sépare ici l'étude en deux cas.

II.1) Cas où  $C_2(0) = |y| - \sqrt{bc} \geq 0$  Comme on a supposé que  $\theta > 0$ , il suffit en fait de montrer que  $2\theta - \zeta \leq 0$ . Or un calcul montre que :

$$2\theta - \zeta = -\frac{(a + d) - (x + \bar{x})}{2}.$$

Comme ici  $C_2 \geq 0$ , on a par le lemme 3.9.1  $C_1(0) = |x| - \sqrt{ad} \leq 0$ . On peut donc majorer :

$$\begin{aligned} 2\theta - \zeta &= -\frac{(a + d) - (x + \bar{x})}{2} \\ &\leq -\frac{1}{2}[(a + d) - 2|x|] \leq -\frac{1}{2}[(a + d) - 2\sqrt{ad}] \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve dans ce cas.

II.2) Cas où  $C_2(0) = |y| - \sqrt{bc} < 0$

On va montrer qu'en fait ce cas est exclu car si  $C_2(0) < 0$  alors  $C_2(t) < 0$ . En effet, comme  $\zeta + \theta e^{-3t} \geq 0$  on a d'après (3.40) :

$$C_2(t) < 0 \Leftrightarrow \theta e^{-3t} - \sqrt{|y|^2 + (\frac{b-c}{2})^2 e^{-t}} + \zeta > 0.$$

Mais  $C_2(0) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{|y|^2 + (\frac{b-c}{2})^2} < \zeta + \theta$  (prendre  $t = 0$  dans l'inéquation ci-dessus). Donc il suffit de montrer que  $\theta e^{-3t} - (\zeta + \theta)e^{-t} + \zeta > 0$ . On pose pour cela  $P(X) = \theta X^3 - (\zeta + \theta)X + \zeta$ . Le problème revient à montrer que ce polynôme est positif sur  $]0, 1]$ . Ces racines sont  $1$ ,  $x_+ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\zeta + \theta}{\theta}}$  et  $x_- = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\zeta + \theta}{\theta}}$  (car on rappelle que  $\zeta > 0$  et qu'on a supposé  $\theta > 0$ ). On voit que  $P$  est positif sur  $]0, 1]$  ssi  $x_+ - 1 \geq 0$ . Mais

$$x_+ - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\zeta + \theta}{\theta}} \geq 0 \Leftrightarrow 2\zeta - \theta \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x + \bar{x}.$$

La dernière égalité étant vraie, cela prouve que  $C_2(t) < 0$ .

Décroissance de la Concurrence sur le domaine où  $C_2$  est strictement positive

Par le même argument que dans la partie où  $C_1$  était strictement positive, on montre ici la décroissance de la concurrence sur les intervalles de temps où  $C_2$  est strictement positive.

### Conclusion sur la décroissance de la Concurrence

Les deux parties précédentes montrent finalement la décroissance de la concurrence sur tous les intervalles de temps où elle est strictement positive. La décroissance de la concurrence sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier vient alors de sa continuité. Ce qui conclut la preuve du théorème.  $\square$



# Conclusion.

Cette thèse a été l'occasion d'aborder un domaine riche à la frontière entre Physique et Mathématiques.

Le premier chapitre, qui a une dominante Physique, propose un protocole pour protéger l'intrication d'un système de deux qubits en interaction avec des bains de photons.

Le second est quant à lui plus algébrique et géométrique. D'une part, il propose une étude de  $\mathcal{E}_X$ , l'ensemble des matrices densités de deux qubits ayant une forme  $X$  dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ . D'autre part, il donne des formules explicites pour décomposer tout état séparable de  $\mathcal{E}_X$  en états purs produits, ainsi qu'un algorithme, qu'on compare à ceux déjà connus, pour décomposer une classe plus importante d'états séparables de deux qubits.

Enfin le dernier chapitre traite le plus complètement possible un modèle d'interactions répétées de deux qubits en interaction avec la même chaîne de spins. Ce qui nous a permis de retrouver des phénomènes surprenants pour l'évolution de l'intrication des qubits.

Pour conclure, mentionnons que le futur est assez excitant dans ce domaine. En effet l'équipe de Serge Haroche du Laboratoire Kastler Brossel a pris la décision de construire une expérience d'Optique Quantique avec deux cavités (projet DECLIC décrit dans [49]). En faisant passer un jet d'atomes (cf expérience du MASER à un atome) successivement dans l'une et dans l'autre on retrouve le modèle d'interactions répétées étudié dans le dernier chapitre de cette thèse.





# Annexe A

## Preuve du théorème de Schmidt 0.2.1.

On rappelle l'énoncé du théorème à démontrer :

**Théorème A.0.2.** Soient  $\mathcal{H}_A$  et  $\mathcal{H}_B$  deux espaces de Hilbert de dimension finie. Pour tout état pur  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , il existe deux bases orthonormales de  $\mathcal{H}_A : \{|\chi_j^A\rangle\}$  et de  $\mathcal{H}_B : \{|\chi_j^B\rangle\}$  et des réels  $d_j > 0$  tels que :

$$|\Psi\rangle = \sum_j d_j |\chi_j^A\rangle \otimes |\chi_j^B\rangle.$$

Les bases en question sont les bases de Schmidt et les coefficients réels positifs  $d_j$  sont les coefficients de Schmidt.

□ Dans la base canonique, on a  $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} m_{ij} |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle$ . On considère alors  $M^\dagger M$  (de taille  $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \times \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ ). C'est une matrice hermitienne semi-définie positive. D'après le théorème spectral, il existe  $V$  unitaire telle que :

$$V^\dagger M^\dagger M V = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $D$  (de taille  $d \times d$ ) est diagonale définie positive ie tous ses coefficients sont réels strictement positifs. Soit :

$$\begin{pmatrix} V1^\dagger \\ V2^\dagger \end{pmatrix} M^\dagger M \begin{pmatrix} V1 & V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V1^\dagger M^\dagger M V1 & V1^\dagger M^\dagger M V2 \\ V2^\dagger M^\dagger M V1 & V2^\dagger M^\dagger M V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

où  $V1$  est de taille  $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \times d$  et  $V2$  de taille  $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \times (\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) - d)$ .

On a  $V1^\dagger M^\dagger M V1 = D$  et  $M V2 = 0$ . On pose alors  $U1 = D^{-1/2} V1^\dagger M^\dagger$  de taille  $d \times \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ . On complète  $U1$  en formant la matrice  $U = \begin{pmatrix} U1 \\ U2 \end{pmatrix}$ .

On choisit évidemment  $U2$  de taille  $(\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) - d) \times \dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ . Puis on lui demande de vérifier  $U2U1^\dagger = 0$ . Ou plus géométriquement on demande que  $U$  soit une matrice unitaire. C'est possible car on a déjà :

$$U1U1^\dagger = D^{-1/2}V1^\dagger M^\dagger MV1D^{-1/2} = D^{-1/2}DD^{-1/2} = I_{d \times d}.$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} U1 \\ U2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V1 & V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La seule égalité non triviale est :  $U2MV1 = 0$ . Mais  $MV1 = U1^\dagger D^{1/2}$ , donc  $U2MV1 = U2U1^\dagger D^{1/2}$ . C'est bien une matrice nulle car on a demandé  $U2U1^\dagger = 0$ .

Il suffit alors de considérer les bases :  $\{|\chi_j^A\rangle = \sum_i u_{ij}|\phi_i^A\rangle\}$  et  $\{|\chi_j^B\rangle = \sum_k v_{jk}|\phi_k^B\rangle\}$  pour avoir le résultat voulu.  $\square$

## Annexe B

# Preuve du théorème de Wootters 0.2.2.

On rappelle l'énoncé du théorème à démontrer :

**Théorème B.0.3.** *Soit  $\rho$  un état d'un système quantique formé de deux qubits, alors son intrication de formation est donnée par :*

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho))$$

où  $\mathcal{E} : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  est une fonction strictement croissante convexe donnée par :

$$\mathcal{E}(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right)$$

avec :

$$h(x) = -x \log(x) - (1 - x) \log(1 - x).$$

$C(\rho)$  est appelée la concurrence de  $\rho$  et on a :

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (\text{B.1})$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres dans l'ordre décroissant de la matrice hermitienne suivante<sup>1</sup> :

$$R := \sqrt{\sqrt{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\bar{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\sqrt{\rho}}.$$

□ On reprend ici la preuve originelle de Wootters dans [111].

L'idée consiste naturellement à trouver une décomposition de  $\rho$  en états purs qui minimise l'intrication de formation. Précisément on va construire

---

1. Dans la formule suivante,  $\sigma_y$  est la seconde matrice de Pauli et  $\bar{\rho}$  est la matrice conjuguée de  $\rho$ .

dans cette preuve une suite de décompositions permettant d'aboutir à ce résultat.

Le cas  $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \leq 0$ , traité en section 2.3.5, conduit à une décomposition en états purs produits, donc à une intrication nulle.

On se place donc dans le cas où  $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 > 0$ . De même qu'en section 2.3.5, on commence par donner une décomposition où  $n = \text{rg}(\rho)$  :

$$\rho = \sum_{i=1, \dots, n} |x_i\rangle\langle x_i| \text{ où } \langle x_i | \tilde{x}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Puis la seconde décomposition est  $\rho = \sum_{i=1, \dots, n} |y_i\rangle\langle y_i|$  avec :

$$|y_1\rangle = |x_1\rangle \text{ et } |y_j\rangle = i|x_j\rangle \text{ pour } j \neq 1.$$

Celle-ci est telle que la moyenne de la préconcurrence est égale à  $C(\rho)$ . On rappelle que la préconcurrence,  $\mathcal{C}(\psi)$ , déjà rencontrée dans le premier chapitre est définie pour un état non forcément normalisé par :

$$\mathcal{C}(\psi) = \frac{\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}.$$

À présent on souhaite trouver une troisième et dernière décomposition  $\rho = \sum_{i=1, \dots, n} |z_i\rangle\langle z_i|$  telle que  $\mathcal{C}(z_i) = C(\rho) \forall i$ . Ainsi l'intrication de formation associée sera nécessairement égale à  $\mathcal{E}(C(\rho))$ . On cherche les  $|z_i\rangle$  sous la forme :

$$|z_i\rangle = \sum_{j=1, \dots, n} O_{ij} |y_j\rangle$$

où  $O$  est une matrice orthogonale de telle sorte que la préconcurrence moyenne est inchangée entre les deux décompositions :

$$\sum_{i=1, \dots, n} \langle z_i | \tilde{z}_i \rangle = \sum_{i=1, \dots, n} (OYO^t) = \text{tr}(OYO^t) = \text{tr}(Y) = \sum_{i=1, \dots, n} \langle y_i | \tilde{y}_i \rangle$$

où  $Y_{ij} = \langle y_i | \tilde{y}_j \rangle$ .

Comme  $\{|y_i\rangle\}$  a la bonne préconcurrence moyenne, soit on a  $\mathcal{C}(y_i) = C(\rho) \forall i$ , soit un état a sa préconcurrence strictement supérieure et un autre a sa préconcurrence strictement inférieure à  $C(\rho)$ . Alors on considère les transformations orthogonales qui modifient uniquement ces deux états. Parmi ces transformations il en existe une qui les échange. Ainsi par continuité on va trouver une transformation orthogonale telle que l'un des deux nouveaux états a sa préconcurrence égale à  $C(\rho)$ . En répétant ce processus on arrive à la décomposition souhaitée.

On a donc trouvé une décomposition de  $\rho$  telle que  $\sum_{i=1,\dots,n} p_i E(z_i) = \mathcal{E}(C(\rho))$ . Il ne reste donc plus qu'à voir qu'il n'existe pas une autre décomposition ayant une intrication moyenne plus petite. Par convexité de la fonction  $\mathcal{E}$ , il suffit en fait de voir qu'il n'existe pas une autre décomposition avec une concurrence moyenne plus petite.

Mais la concurrence moyenne pour une décomposition générale de  $\rho$  est donnée par :

$$\mathbb{E}[C] = \sum_{i=1,\dots,m} |(UYU^t)_{ii}| = \sum_{i=1,\dots,m} \left| \sum_{j=1,\dots,n} (U_{ij})^2 Y_{jj} \right|$$

où  $U$  est une matrice de taille  $m \times n$  dont les  $n$  colonnes sont orthonormées. On minore par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C] &= \sum_{i=1,\dots,m} \left| \sum_{j=1,\dots,n} (U_{ij})^2 Y_{jj} \right| \\ &\geq \left| \sum_{ij} (U_{ij})^2 Y_{jj} \right| \\ &= \left| \lambda_1 - \sum_{j=2,\dots,n} \left( \sum_{i=1,\dots,m} (U_{ij})^2 \right) \lambda_j \right| \end{aligned}$$

en choisissant tous les  $(U_{i1})^2 \in \mathbb{R}_+$  (ce qui ne restreint pas la généralité car on peut ajuster les phases des autres éléments de matrice pour compenser). Enfin, toujours par inégalité triangulaire et en tenant compte de la normalité des colonnes de  $U$ , on a :

$$\left| \lambda_1 - \sum_{j=2,\dots,n} \left( \sum_{i=1,\dots,m} (U_{ij})^2 \right) \lambda_j \right| \geq \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = C(\rho)$$

ce qui conclut la preuve du théorème de Wootters.  $\square$



## Annexe C

# Dérivation d'équations différentielles stochastiques à partir de modèles de sauts quantiques.

On tient à préciser au lecteur que les arguments suivants sont formels et en aucun cas on ne prétend donner des dérivations complètement rigoureuses<sup>1</sup> des propositions C.0.2 et C.0.3.

### C.0.1 Le cas de la détection homodyne.

La proposition suivante nous montre que la dynamique d'un modèle général de sauts quantiques pour une détection homodyne converge, dans la limite où les intensités des lasers sont grandes, vers une équation différentielle stochastique. Ce résultat a été mentionné au chapitre 1.

**Proposition C.0.2.** *On considère un modèle de sauts quantiques où les opérateurs de sauts sont  $J_j$  et les taux associés  $\gamma_j$ . Les amplitudes associées à la détection homodyne sont  $\alpha_j = |\alpha|e^{i\theta_j}$ . On note  $\delta t = 1/|\alpha|^p$  avec  $p > 2$ , le pas de temps associé au modèle de sauts quantiques (ie tous les  $\delta t$ , il y a possibilité de saut) et  $dt = 1/|\alpha|^r$  avec  $r < 2$ . Alors à cette échelle de temps  $dt$  dans la limite où  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , le problème est décrit par l'équation différentielle*

---

1. Notamment on suppose formellement qu'on peut toujours trouver des solutions des équations différentielles stochastiques qui apparaîtront.

stochastique suivante :

$$\begin{aligned}
|d\Psi\rangle = & -iH_0dt + \sum_j \left[ \frac{-\gamma_j}{2} J_j^\dagger J_j dt \right. \\
& + \gamma_j [(\Re\langle e^{-i\theta} J_j \rangle) e^{-i\theta} J_j - \frac{1}{2} (\Re e^{-i\theta} J_j)^2] dt \\
& \left. + \sqrt{\gamma_j} (e^{-i\theta} J_j - \Re\langle e^{-i\theta} J_j \rangle) dz_j \right] |d\Psi\rangle \quad (C.1)
\end{aligned}$$

où  $dz_j$  sont des variables aléatoires réelles indépendantes, gaussiennes, centrées et de variance  $dt$ .

□ Comme l'apparition d'un saut survient avec une très faible probabilité, on peut considérer (hypothèse simplificatrice) les évènements d'apparition des différents sauts comme indépendants les uns des autres. Ainsi on peut se restreindre au cas plus simple où le modèle n'est décrit que par un opérateur de saut  $J$  avec 1 pour taux associé (il suffira d'ajouter  $\sqrt{\gamma}$  chaque fois que  $J$  apparaît pour avoir le résultat pour un taux de sauts général  $\gamma$ ).

La détection homodyne (où  $\alpha$  est l'amplitude du laser) fait apparaître deux opérateurs de sauts en lieu et place de  $J$  (avec le même taux  $1/2$ )

$$\begin{aligned}
& \cdot J + \alpha Id \\
& \cdot J - \alpha Id
\end{aligned}$$

comme on renormalise la fonction d'onde après chaque saut, on peut directement travailler avec les opérateurs de sauts :

$$\begin{aligned}
& \cdot Id + \frac{J}{\alpha} \\
& \cdot Id - \frac{J}{\alpha}
\end{aligned}$$

On considérera directement  $\alpha = |\alpha|$  réel positif. Le passage au cas général se fera en ajoutant le facteur de phase  $e^{-i\theta}$  devant les opérateurs de sauts. On rappelle que sans saut, la fonction d'onde évolue via l'opérateur  $^2e^{-i\delta t H_0 - \frac{\delta t}{2} J^\dagger J} \simeq Id - i\delta t H_0 - \frac{\delta t}{2} J^\dagger J$ . On considère donc les opérateurs de sauts infinitésimaux  $\delta W_i$  avec les probabilités  $\delta p_i$  associées :

$$\begin{aligned}
& \cdot \delta W_a = \frac{J}{\alpha} \text{ avec } \delta p_a = \frac{\delta t}{2} \langle \Psi | (J^\dagger + \alpha)(J + \alpha) | \Psi \rangle \\
& \cdot \delta W_b = \frac{-J}{\alpha} \text{ avec } \delta p_b = \frac{\delta t}{2} \langle \Psi | (J^\dagger - \alpha)(J - \alpha) | \Psi \rangle \\
& \cdot \delta W_c = -i\delta t H_0 - \frac{\delta t}{2} J^\dagger J \text{ avec } \delta p_c = 1 - (\delta p_a + \delta p_b)
\end{aligned}$$

On regarde ensuite le problème sur un grain de temps  $\Delta t = \frac{1}{\alpha^q} \gg \delta t$  tel que :

(i) La probabilité de détection d'un photon soit faible d'où :  $\delta t \alpha^2 \gg 1 \iff p > 2$ .

(ii) La modification de la fonction d'onde entre  $t$  et  $t + \Delta t$  soit petite donc :

$$\delta t \frac{\Delta t}{\delta t} = \Delta t \ll 1 \text{ (car } \frac{\Delta t}{\delta t} \delta p_c \delta W_c \ll 1)$$

---

2. En toute rigueur, on prend  $e^{-i\delta t H_0 + \frac{-\delta t}{2} [\frac{1}{2}(J^\dagger + \alpha)(J + \alpha) + \frac{1}{2}(J^\dagger - \alpha)(J - \alpha)]} = e^{-i\delta t H_0 + \frac{-\delta t}{2} J^\dagger J} e^{-\frac{\delta t}{2} \alpha^2}$ . Mais le second terme étant proportionnel à l'identité, on peut directement l'ôter car il disparaîtra dans la procédure de renormalisation.



.  $\frac{\Delta t}{\delta t} \delta t \alpha^2 \frac{1}{\alpha} = \Delta t \alpha \ll 1$  (car  $\frac{\Delta t}{\delta t} \delta p_i \delta W_i \ll 1$  pour  $i = a, b$ )  
De là  $q > 1$ .

La variation de la fonction d'onde non renormalisée,  $|\phi\rangle$ , entre  $t$  et  $t + \Delta t$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} |\Delta\phi(t)\rangle &:= |\phi(t + \Delta t)\rangle - |\phi(t)\rangle \\ &= \left[ \sum_{m=1}^{\frac{\Delta t}{\delta t}} M_a(t_m) \delta W_a + M_b(t_m) \delta W_b + M_c(t_m) \delta W_c + O((\alpha \delta t)^2) \right] |\phi(t)\rangle \end{aligned}$$

où  $t_m = t + m\delta t$  sont les instants de mesure,  $M_i(t_m)$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de Bernoulli de paramètre  $\delta p_i$  qui comptent le nombre de sauts<sup>3</sup>.

Pour utiliser le théorème de Poisson multidimensionnel<sup>4</sup>, on réécrit cette équation sous la forme :

$$|\Delta\phi\rangle - \frac{\Delta t}{\delta t} \delta W_c |\phi\rangle = \left[ \sum_{m=1}^{\frac{\Delta t}{\delta t}} (\delta W_a - \delta W_c, \delta W_b - \delta W_c) M(t_m) \right] |\phi\rangle$$

où  $M(t_m)$  sont des variables aléatoires i.i.d. telles que :

$$\begin{aligned} M(t_m) &= (1, 0)^t \quad \text{avec probabilité } \delta p_a(t_m) \\ &= (0, 1)^t \quad \text{avec probabilité } \delta p_b(t_m) \\ &= (0, 0)^t \quad \text{avec probabilité } \delta p_c(t_m). \end{aligned}$$

Estimons les probabilités :

$$\begin{aligned} \delta p_a(t_m) &= \frac{\delta t \alpha^2}{2} + \delta t \alpha \Re\langle \phi(t_m) | J | \phi(t_m) \rangle + O(\Delta\phi(t_m) \delta t \alpha) + O(\delta t) \\ &= \frac{\delta t \alpha^2}{2} + \delta t \alpha \Re\langle \phi(t_m) | J | \phi(t_m) \rangle + O(\Delta t \delta t \alpha) + O(\delta t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta p_b(t_m) &= \frac{\delta t \alpha^2}{2} - \delta t \alpha \Re\langle \phi(t_m) | J | \phi(t_m) \rangle + O(\Delta\phi(t_m) \delta t \alpha) + O(\delta t) \\ &= \frac{\delta t \alpha^2}{2} - \delta t \alpha \Re\langle \phi(t_m) | J | \phi(t_m) \rangle + O(\Delta t \delta t \alpha) + O(\delta t). \end{aligned}$$

---

3. Le  $O((\alpha \delta t)^2)$  provient du fait qu'on néglige les termes quadratiques du type  $M_a(t_m) \delta W_a M_a(t_n) \delta W_a$ . On remarque que l'erreur due à l'approximation linéaire de  $e^{-iH_0 dt - \frac{\delta t}{2} J^\dagger J}$  est d'ordre plus petit :  $O(\delta t^2)$ , de même que les termes quadratiques  $M_c(t_m) \delta W_c M_c(t_n) \delta W_c$ .

4. On rappelle qu'en une dimension, le théorème de Poisson (ou de convergence vers la loi de Poisson) dit que la somme de  $n$  variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli de paramètre  $p_n$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n p_n = \lambda \in \mathbb{R}_+$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

Puis calculons la moyenne suivante<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \left| \Delta\phi \right\rangle - \frac{\Delta t}{\delta t} \delta W_c \mid \phi \right] &= \Delta t [2\Re(\langle J \rangle)J \mid \phi] + O(\alpha^2 \delta t) + O(1/\alpha) + O(\Delta t) \\ &= \Delta t [2\Re(\langle J \rangle)J \mid \phi] + O(1/\alpha) + O(\alpha^2 \delta t).\end{aligned}$$

Pour appliquer le théorème de Poisson multidimensionnel à  $\left| \Delta\phi \right\rangle - \frac{\Delta t}{\delta t} \delta W_c \mid \phi - \mathbb{E} \left[ \left| \Delta\phi \right\rangle - \frac{\Delta t}{\delta t} \delta W_c \mid \phi \right]$ , il faut s'assurer que la probabilité de faire un saut multiplié par le nombre de pas de temps ie  $\frac{\Delta t}{\delta t}$  a une limite finie quand  $\alpha \rightarrow \infty$ . Ainsi le choix  $\Delta t = 1/\alpha^2$  s'impose. Par le théorème de Poisson multidiimensionnel, il vient<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned}\left| \Delta\phi \right\rangle - \frac{\Delta t}{\delta t} \delta W_c \mid \phi - 2\Delta t \Re(\langle J \rangle)J \mid \phi \\ &= (\delta W_a, \delta W_b)P \mid \phi + O_{\text{dét=déterministe}}\left(\frac{\Delta t}{\alpha}\right) + O_{\text{dét}}(\alpha^2 \delta t \Delta t) \\ &\quad + O_{\text{prob=probabiliste}}(\Delta t) \\ \text{où } P = (l, k)^t \text{ avec probabilité } p_{(l,k)} &= \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(\frac{1}{2})^l}{l!} \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!}\end{aligned}$$

qu'on réécrit :

$$\begin{aligned}\left| \Delta\phi \right\rangle &= \left( -iH_0 - \frac{J^\dagger J}{2} + 2\Re(\langle J \rangle)J \right) \Delta t \mid \phi + O_{\text{dét}}\left(\frac{\Delta t}{\alpha}\right) + O_{\text{dét}}(\alpha^2 \delta t \Delta t) \\ &\quad + \left( \frac{J}{\alpha}, -\frac{J}{\alpha} \right) P \mid \phi + O_{\text{prob}}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).\end{aligned}$$

A présent, dans le but de faire apparaître des processus de Wiener, on va moyenner sur un "grain de temps"  $dt \gg \Delta t$  encore plus gros. La modification de la fonction d'onde entre  $t$  et  $t + dt$  est petite donc :

$$\begin{aligned}\cdot dt &\ll 1 \\ \cdot \frac{dt}{\Delta t} \frac{1}{\alpha} &\ll 1 \iff dt \ll \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

La variation de la fonction d'onde non renormalisée,  $\mid \phi \rangle$ , entre  $t$  et  $t + dt$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\left| d\phi \right\rangle &= \left( -iH_0 - \frac{J^\dagger J}{2} + 2\Re(\langle J \rangle)J \right) dt \mid \phi + O_{\text{dét}}\left(\frac{dt}{\alpha}\right) + O_{\text{dét}}(\alpha^2 \delta t dt) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\frac{dt}{\Delta t}} \left( \frac{J}{\alpha}, -\frac{J}{\alpha} \right) P_m \mid \phi + O_{\text{prob}}(dt)\end{aligned}$$

5. Le premier terme négligé provient des termes quadratiques. On avait un  $O(\alpha^2 \delta t^2)$  sur l'échelle  $\delta t$ . Il vient à présent, sur  $\Delta t$ , un  $O(\alpha^2 \delta t \Delta t)$ . Ce terme compte également l'erreur faite en remplaçant  $\delta W_i - \delta W_c$  par  $\delta W_i$  ( $i = a, b$ ). Les  $O(1/\alpha)$  et  $O(\Delta t)$  proviennent respectivement des erreurs  $O(\Delta t \delta t \alpha)$  et  $O(\delta t)$  sur les probabilités de sauts.

6. On a répercuté les erreurs déterministes de l'équation ci-dessus. Quant aux erreurs probabilistes  $O_{\text{prob}}(\Delta t)$ , elles viennent du fait qu'on approche les probabilités de sauts par  $\frac{\delta t \alpha^2}{2}$  ie qu'on oublie des termes en  $O(\delta t \alpha)$ . On remarque que l'erreur commise en remplaçant  $\delta W_i - \delta W_c$  par  $\delta W_i$  ( $i = a, b$ ) est un  $O_{\text{prob}}(\delta t) \ll O_{\text{prob}}(\Delta t)$ .

où les  $P_m$  sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi que  $P$ , donc de moyenne  $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ . Pour préparer l'utilisation du théorème central limite, on calcule :

$$\mathbb{E} [| d\phi \rangle] = \left( -iH_0 - \frac{J^\dagger J}{2} + 2\Re(\langle J \rangle)J \right) dt | \phi \rangle + O_{\det}\left(\frac{dt}{\alpha}\right) + O_{\det}(\alpha^2 \delta t dt)$$

car  $\delta W_a + \delta W_b = 0$ .

On souhaite obtenir des processus de Wiener de variance  $dt$ , pour cela on doit avoir  $\sqrt{\Delta t} = \frac{1}{\alpha}$ , ce qui est le cas ! Le théorème central limite nous donne alors <sup>7</sup> :

$$\sum_{m=1}^{\frac{dt}{\Delta t}} (J, -J) P_m \xrightarrow{\text{"loi"}}_{\alpha \rightarrow \infty} (J, -J) Z \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dt/2 & 0 \\ 0 & dt/2 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, il vient :

$$| d\phi \rangle = \left[ -iH_0 - \frac{1}{2} J^\dagger J + 2\Re(\langle J \rangle)J \right] dt | \phi \rangle + O_{\det}\left(\frac{dt}{\alpha}\right) + O_{\det}(\alpha^2 \delta t dt)$$

$$\left[ \sqrt{\frac{1}{2}} J dz_1 - \sqrt{\frac{1}{2}} J dz_2 \right] | \phi \rangle + O_{\text{prob}}(dt)$$

où  $dz_i$  sont des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, dt)$  de moyenne nulle et de variance  $dt$ .

Comme la somme de deux gaussiennes indépendantes, centrées, de variance  $\frac{dt}{2}$  est une gaussienne, centrée, de variance  $dt$ , on peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$| d\phi \rangle = \left[ -iH_0 - \frac{1}{2} J^\dagger J + 2\Re(\langle J \rangle)J \right] dt | \phi \rangle + O_{\det}\left(\frac{dt}{\alpha}\right) + O_{\det}(\alpha^2 \delta t dt)$$

$$+ J dz | \phi \rangle + O_{\text{prob}}(dt) \quad \text{où } dz \text{ suit une loi } \mathcal{N}(0, dt).$$

A présent, on considère directement l'équation sans les termes négligeables car on a obtenu ce qu'on voulait, une équation différentielle stochastique avec des processus de Wiener :

$$| d\phi \rangle = \left[ -iH_0 - \frac{1}{2} J^\dagger J + 2\Re(\langle J \rangle)J \right] dt | \phi \rangle + J dz | \phi \rangle.$$

Pour connaître l'évolution de la fonction d'onde normalisée  $\Psi$ , il suffit de calculer la norme de  $\phi$  :

$$| \Psi(t + dt) \rangle = \frac{| \phi \rangle + | d\phi \rangle}{\| \phi + d\phi \|}.$$

---

7. On n'a pas soustrait  $\mathbb{E}[P_m]$  car  $(J, -J)\mathbb{E}[P_m] = 0$

Mais comme  $|\phi(t)\rangle = |\Psi(t)\rangle$  est normalisée, on a par calcul d'Itô :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\phi + d\phi\|} &= \frac{1}{\|\phi\|} + d\left(\frac{1}{\sqrt{\|\phi\|^2}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\langle\phi | d\phi\rangle + \langle d\phi | \phi\rangle + \langle d\phi | d\phi\rangle}{\left(\sqrt{\|\phi\|^2}\right)^{3/2}} + \frac{3}{8} \frac{(d\|\phi\|^2)^2}{\left(\sqrt{\|\phi\|^2}\right)^{5/2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} [2\Re\langle\phi | d\phi\rangle + \langle d\phi | d\phi\rangle] + \frac{3}{8} [2\Re\langle\phi | d\phi\rangle + \langle d\phi | d\phi\rangle]^2. \end{aligned}$$

Evaluons par le calcul d'Itô  $\Re\langle\phi | d\phi\rangle$  et  $\langle d\phi | d\phi\rangle$  :

$$\begin{aligned} \Re\langle\phi | d\phi\rangle &= -\frac{dt}{2}\langle J^\dagger J\rangle + 2dt(\Re\langle J\rangle)^2 + dz\Re\langle J\rangle \\ \langle d\phi | d\phi\rangle &= dt\langle J^\dagger J\rangle. \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\frac{1}{\|\phi + d\phi\|} = 1 - dz\Re\langle J\rangle - \frac{dt}{2}(\Re\langle J\rangle)^2.$$

Puis :

$$\begin{aligned} |\Psi(t + dt)\rangle &= \left(1 - \Re\langle J\rangle dz - \frac{1}{2}(\Re\langle J\rangle)^2 dt\right) \times \\ &\quad \left(1 - iH_0 - \frac{1}{2}J^\dagger \sigma_- dt + 2\Re(\langle J\rangle)J dt + J dz\right) |\Psi(t)\rangle. \end{aligned}$$

Toujours via le calcul d'Itô, on dérive pour  $|\Psi(t + dt)\rangle - |\Psi(t)\rangle =: |d\Psi\rangle$  :

$$\begin{aligned} |d\Psi\rangle &= \left[-iH_0 dt - \frac{1}{2}J^\dagger J dt + [(\Re\langle J\rangle)J - \frac{1}{2}(\Re\langle J\rangle)^2] dt \right. \\ &\quad \left. + (J - \Re\langle J\rangle) dz\right] |\Psi\rangle. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

On peut remarquer que dans cette démonstration, nous avons considéré trois échelles de temps les plus générales  $\delta t \ll \Delta t \ll dt$ . Mais pour avoir convergence dans les théorèmes probabilistes, nous avons dû nous restreindre à  $\Delta t = \frac{1}{\alpha^2}$ . Nous tenions à signaler ce fait curieux !

### C.0.2 Le cas de la détection hétérodyne.

Nous avons vu que physiquement la détection homodyne consistait à coupler les photons émis à un laser accordé à leur fréquence. Si il existe un désaccord  $\Omega_j$  entre la fréquence du laser  $j$  et la fréquence des photons, on

parle alors de détection hétérodyne. Celle-ci peut être décrite par les sauts quantiques  $J_j \pm \alpha_j e^{-i\Omega_j t}$  avec  $\gamma_j/2$  pour taux de sauts associé. Si on regarde la détection hétérodyne extrême, on a une proposition analogue à ce qui vient d'être discuté :

**Proposition C.0.3.** *On note  $\delta t = 1/|\alpha|^p$  avec  $p > 2$  et , le pas de temps associé au modèle de sauts quantiques (ie tous les  $\delta t$ , il y a possibilité de saut). On pose  $\Omega_j = |\alpha|^{q_j}$  pour  $q_j < 2$  et  $dt = 1/|\alpha|^r$  avec  $r < q$ . Alors à cette échelle de temps  $dt$  dans la limite où  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , le problème est décrit par l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\begin{aligned} |d\Psi\rangle = & \left[ -iH_0 dt + \sum_j \left[ -\frac{\gamma_j}{2} J_j^\dagger J_j dt \right. \right. \\ & + \gamma_j \left[ \frac{1}{2} \langle J_j^\dagger \rangle J_j - \frac{1}{4} \langle J_j^\dagger \rangle \langle J_j \rangle \right] dt \\ & \left. \left. + \sqrt{\gamma_j} (e^{-i\theta} J_j dz_j - \Re(\langle e^{-i\theta} J_j \rangle dz_j)) \right] \right] |d\Psi\rangle \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

où  $dz_j$  sont des processus indépendants de Wiener complexes vérifiant les règles d'Itô suivantes :  $dz_j dz_{j'} = 0$  et  $dz_j \overline{dz_{j'}} = \delta_{j,j'} dt$ .

□ Pour réutiliser la proposition précédente, on se place sur une échelle de temps  $dt' \ll \frac{1}{\Omega}$ . Moralement, on souhaite négliger la dépendance en temps provenant de  $e^{\Omega it}$  sur l'échelle de temps  $dt'$ . Pour simplifier la preuve, on prendra encore  $\alpha = |\alpha|$  (si tel n'est pas le cas, il suffit d'ajouter la phase  $e^{-i\theta}$  devant les opérateurs de sauts), et uniquement un seul opérateur de saut avec un  $\gamma = 1$ .

Sous ces hypothèses, la variation de la fonction d'onde non renormalisée entre  $t$  et  $t + dt'$  est donnée par<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} |d\phi\rangle = & \left[ [-iH_0 - \frac{1}{2} J^\dagger J + \langle J^\dagger \rangle J + \langle J \rangle J e^{2i\Omega t}] dt' + O_{\text{dét}}\left(\frac{dt'}{\alpha}\right) + O_{\text{dét}}(\alpha^2 \delta t dt') \right. \\ & \left. + O_{\text{dét}}(\Omega dt'^2) + (e^{i\Omega t} J dz + O_{\text{prob}}(dt') + O_{\text{prob}}(\Omega dt' dz)) \right] |\phi\rangle. \end{aligned}$$

Ensuite, on passe à l'échelle de temps  $dt$  plus longue telle que  $\Omega dt \gg 1$ . Les termes quadratiques déterministes peuvent être négligés car ils vont avoir une contribution  $O(dt'^2) \ll O(\Omega dt'^2)$ .

Quant à  $e^{i\Omega(t+mdt')} J dz(t_m) e^{i\Omega(t+ndt')} J dz(t_n)$ , c'est un  $O_{\text{prob}}(dt')$  car les va-

---

8. Les termes négligés où  $\Omega$  n'apparaît pas sont les mêmes que ceux apparaissant dans la preuve de la proposition C.0.2. Quant à  $O_{\text{dét}}(\Omega dt'^2)$  et  $O_{\text{prob}}(\Omega dt' dz)$ , ils viennent du fait qu'on approche  $e^{i\Omega(t+dt')}$  par  $e^{i\Omega t}$ .

riables aléatoires  $dz(t_m)$  et  $dz(t_n)$  sont indépendantes. Il vient donc :

$$\begin{aligned} |d\Phi\rangle = \sum_{m=1}^{dt/dt'} & \left[ [-iH_0 - \frac{1}{2}J^\dagger J + \langle J^\dagger \rangle J + \langle J \rangle J e^{2i\Omega(t+mdt')} ] dt' \right. \\ & + O_{\det}\left(\frac{dt'}{\alpha}\right) + O_{\det}(\alpha^2 \delta t dt') + O_{\det}(\Omega dt'^2) \\ & \left. + e^{i\Omega(t+mdt')} J dz(t+mdt') + O_{\text{prob}}(dt') + O_{\text{prob}}(\Omega dt' dz) \right] | \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Mais  $\sum_{m=1}^{dt/dt'} dt' \langle J \rangle J e^{2i\Omega(t+mdt')}$  est une somme de Riemann. On peut l'approcher à la limite par  $\int_0^{dt} \langle J \rangle J e^{2i\Omega(t+u)} du = \frac{e^{2i\Omega(t+dt)} - e^{2i\Omega t}}{2i\Omega} \langle J \rangle J$  qui est un  $O(\frac{1}{\Omega}) \ll O(dt)$ . Il reste uniquement :

$$|d\Phi\rangle = \left[ [-iH_0 - \frac{1}{2}J^\dagger J + \langle J^\dagger \rangle J] dt + J dw(t) \right] |d\Phi\rangle \quad (\text{C.3})$$

où  $dw(t) = \int_t^{t+dt} e^{i\Omega s} dz(s)$  est une intégrale stochastique obtenue en prenant la limite  $\alpha \rightarrow \infty$  de l'expression  $\sum_{m=1}^{dt/dt'} e^{i\Omega(t+mdt')} dz(t+mdt')$ . On renvoie à l'excellent ouvrage [45] de Gallardo traitant des intégrales stochastiques. Elle satisfait les règles d'Ito suivantes :

$$\begin{aligned} \cdot \quad d\overline{w}dw &= dt \\ \cdot \quad dw dw &= 0 \end{aligned}$$

□ Pour le voir, il suffit grâce au théorème de Fubini, de remplacer le produit d'intégrales par une intégrale sur le carré  $[t, t+dt]^2$ . Puis en intégrant ensuite par bandes diagonales, on a le résultat voulu. □

Pour finir, il s'agit de renormaliser la fonction d'onde  $|\Phi + d\Phi\rangle$ . On rappelle pour cela que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\Phi + d\Phi\|} &= \frac{1}{\|\Phi\|} + d \left( \frac{1}{\sqrt{\|\Phi\|^2}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(d\|\Phi\|^2) + \frac{3}{8}(d\|\Phi\|^2)^2. \end{aligned}$$

Ici on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\Phi + d\Phi\|} &= 1 - \frac{1}{2}[2\langle J^\dagger \rangle \langle J \rangle dt + \langle J^\dagger \rangle dw^\dagger + \langle J \rangle dw] \\ &\quad + \frac{3}{8}[2\langle J^\dagger \rangle \langle J \rangle dt + \langle J^\dagger \rangle dw^\dagger + \langle J \rangle dw]^2. \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{1}{\|\Phi + d\Phi\|} = 1 - \frac{1}{4}\langle J^\dagger \rangle \langle J \rangle dt - \frac{1}{2}(\langle J^\dagger \rangle dw^\dagger + \langle J \rangle dw).$$

On a donc la dynamique suivante pour la fonction d'onde normalisée :

$$\begin{aligned}
|\Psi(t + dt)\rangle &= \frac{\Phi(t + dt)}{\|\Phi(t + dt)\|} \\
&= \left[ \left[ 1 - iH_0 - \frac{1}{2}J^\dagger J + \langle J^\dagger \rangle J \right] dt + Jdw \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}\langle J^\dagger \rangle \langle J \rangle dt - \frac{1}{2}(\langle J^\dagger \rangle dw^\dagger + \langle J \rangle dw) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\langle J^\dagger \rangle J dt \right] |d\Phi\rangle,
\end{aligned}$$

qu'on réécrit :

$$\begin{aligned}
|\Psi(t + dt)\rangle - |\Psi(t)\rangle &= |d\Psi\rangle \\
&= \left[ \left[ -\frac{1}{2}J^\dagger J + \frac{1}{2}\langle J^\dagger \rangle J - \frac{1}{4}\langle J^\dagger \rangle \langle J \rangle \right] dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\langle J \rangle dw + \langle J^\dagger \rangle dw^\dagger) \right] |d\Phi\rangle. \square
\end{aligned}$$





## Annexe D

### Solution de l'équation de Lindblad (1.21) avec la condition initiale $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ où $|\psi\rangle = c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{00}|00\rangle$ .

On rappelle que l'équation de Lindblad (1.21) est :

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma J\rho J^\dagger - \frac{\gamma}{2}\{J^\dagger J, \rho\} \text{ avec } J = \sigma_-^A \otimes Id_B + Id_A \otimes \sigma_-^B. \quad (\text{D.1})$$

Alors en posant  $\rho(t) = (\rho_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 4}$  dans la base  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$ , on a avec la condition initiale  $\rho(0) = \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  où  $|\psi\rangle = c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{00}|00\rangle$  :

$$\rho_{11}(t) = \rho_{12}(t) = \rho_{13}(t) = \rho_{14}(t) = 0$$

puis :

$$\begin{aligned} \rho_{22}(t) &= \frac{1 + 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}}{4} |c_{10}|^2 + \frac{1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}}{4} |c_{01}|^2 \\ &\quad + \frac{-1 + e^{-2\gamma t}}{4} (c_{10}\bar{c}_{01} + \bar{c}_{10}c_{01}) \\ \rho_{33}(t) &= \frac{1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}}{4} |c_{10}|^2 + \frac{1 + 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}}{4} |c_{01}|^2 \\ &\quad + \frac{-1 + e^{-2\gamma t}}{4} (c_{10}\bar{c}_{01} + \bar{c}_{10}c_{01}) \\ \rho_{44}(t) &= 1 - (\rho_{22}(t) + \rho_{33}(t)) \end{aligned}$$

et enfin :

$$\rho_{23}(t) = \frac{-1 + e^{-2\gamma t}}{4} (|c_{10}|^2 + |c_{01}|^2) + \frac{1 + 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}}{4} c_{10} \overline{c_{01}} \\ + \frac{1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}}{4} \overline{c_{10}} c_{01}$$

$$\rho_{24}(t) = \frac{\overline{c_{00}}}{2} [(c_{10} - c_{01}) + (c_{10} + c_{01})e^{-\gamma t}]$$

$$\rho_{34}(t) = \frac{\overline{c_{00}}}{2} [-(c_{10} - c_{01}) + (c_{10} + c_{01})e^{-\gamma t}].$$

## Annexe E

### Preuve des propositions 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4.

On commence par donner une preuve tirée de l'article [53] d'Horodecki de la proposition 2.3.2 qui est :

**Proposition E.0.4.** *Soit  $\rho$  un état défini par (2.5) avec  $C$  diagonale. On note  $c_1, c_2$  et  $c_3$  les éléments diagonaux de  $C$ , alors nécessairement le point  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$ , de coordonnées  $(c_1, c_2, c_3)$  dans la base canonique, appartient au tétraèdre  $\mathcal{T}$  dont les quatre sommets ont respectivement pour coordonnées  $(-1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 1)$  et  $(1, 1, -1)$ .*

*Si on suppose de plus que  $\rho$  est séparable, alors le point  $M$  appartient à l'octaèdre  $\mathcal{O}$  dont les sommets  $O_{\pm}^i$  pour  $i = 1, 2, 3$  ont respectivement pour coordonnées  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$  et  $(0, 0, \pm 1)$ .*

□  $\rho$  est positif si et seulement si pour tout projecteur  $P$ , on a :

$$\text{tr}(\rho P) \geq 0$$

En particulier cette inégalité doit être vérifiée pour les quatre projecteurs sur les états de Bell définis dans la base canonique  $(|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle)$  par :

$$\begin{aligned} |\psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle \\ |\phi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \end{aligned}$$

On peut représenter ces quatre projecteurs  $P_i$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$  avec (2.5) par  $\vec{a}^i, \vec{b}^i$  et  $T^i$ . Un calcul montre que  $\vec{a}^i = \vec{b}^i = \vec{0}$  et que  $T^i$  sont des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont :

$$\begin{aligned} &(-1, -1, -1) \text{ pour } T^0 \\ &(-1, 1, 1) \text{ pour } T^1 \\ &(1, -1, 1) \text{ pour } T^2 \\ &(1, 1, -1) \text{ pour } T^3. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Les quatre inégalités  $\text{tr}(\rho P_i)$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$  s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} 1 - (c_1 + c_2 + c_3) &\geq 0, & 1 - c_1 + c_2 + c_3 &\geq 0, \\ 1 + c_1 - c_2 + c_3 &\geq 0 \text{ et } & 1 + c_1 + c_2 - c_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui montre la première partie de la propriété.

Pour la seconde, on considère l'opérateur d'échange,  $V$ , sur  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  défini par :

$$V(\phi \otimes \tilde{\phi}) = \tilde{\phi} \otimes \phi \text{ pour tout } \phi \otimes \tilde{\phi} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2.$$

Un calcul dans la base canonique montre facilement que :

$$\text{tr}_{\mathbb{C}^4}(V(A \otimes B)) = \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(AB) \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2).$$

Si  $\rho$  est séparable, on rappelle qu'il s'écrit :

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$$

avec tous les  $p_i$  positifs de somme un et  $\rho_i^j$  pour  $j = A, B$  des opérateurs hermitiens positifs sur  $\mathbb{C}^2$ . Alors :

$$\text{tr}_{\mathbb{C}^4}(V\rho) = \sum p_i \underbrace{\text{tr}_{\mathbb{C}^2}(\rho_i^A \rho_i^B)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Cette inégalité reste vraie pour les opérateurs  $V_i := (\sigma_i \otimes \sigma_i)V(\sigma_i \otimes \sigma_i)$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$  où  $\sigma_0 = \text{Id}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = \sigma_y$  et  $\sigma_3 = \sigma_z$  car une conjugaison par un unitaire transforme un état séparable en un état séparable, on a donc :

$$\text{tr}_{\mathbb{C}^4}(V^i \rho) \geq 0. \tag{E.2}$$

On remarque que  $V^i$  peut être représenté par :

$$V_i = \frac{1}{4} \left( 2\text{Id} \otimes \text{Id} - \sum_{j=1}^3 d_{jj}^i \sigma_j \otimes \sigma_j \right)$$

où les matrices diagonales  $D^i$  (dont les coefficients diagonaux sont  $d_{11}^i, d_{22}^i, d_{33}^i$ ) vérifient  $D^i = -T^i$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$ . Alors les inégalités (E.2) impliquent que le point  $M$  appartient au tétraèdre  $\tilde{\mathcal{T}}$  symétrique de  $\mathcal{T}$  par rapport à l'origine du repère. Par ce qui précède  $M$  appartient aussi à  $\mathcal{T}$ . L'intersection de ces deux tétraèdres étant l'octaèdre défini dans la proposition, ceci clôt la preuve de cette proposition.  $\square$

On donne ici une réciproque partielle à la proposition E.0.4 toujours tirée de [53] (proposition 2.3.3 du deuxième chapitre) :

**Proposition E.0.5.** Soit  $\rho$  définie par (2.5) avec  $C$  diagonale et  $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$ . On note  $c_1, c_2$  et  $c_3$  les éléments diagonaux de  $C$ , alors  $\rho$  est un état si et seulement si le point  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$ , de coordonnées  $(c_1, c_2, c_3)$  dans la base canonique, appartient au tétraèdre  $\mathcal{T}$  défini dans la proposition E.0.4.

De plus si le point  $M$  appartient à l'octaèdre  $\mathcal{O}$  défini dans la proposition E.0.4 alors  $\rho$  est un état séparable.

□ La proposition E.0.4 montre que la condition  $M \in \mathcal{T}$  est nécessaire pour que  $\rho$  soit un état. Montrons ici qu'elle est aussi suffisante dans le cas où  $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$ . Tout d'abord si  $M \in \mathcal{T}$  alors il s'écrit comme la combinaison convexe suivante :

$$M = \sum_{i=0}^3 p_i T_i$$

où les  $T^i$  (définis en (E.1)) sont les sommets du tétraèdre  $\mathcal{T}$  et où les  $p_i$  sont des réels positifs de somme un. En exprimant  $\rho$  dans la base canonique ( $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ ) :

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(p_1 + p_2) & 0 & 0 & 2(p_2 - p_1) \\ 0 & 2(p_0 + p_3) & 2(p_3 - p_0) & 0 \\ 0 & 2(p_3 - p_0) & 2(p_0 + p_3) & 0 \\ 2(p_2 - p_1) & 0 & 0 & 2(p_1 + p_2) \end{pmatrix}$$

on remarque qu'elle est de la forme  $X$ . Or on sait, d'après la proposition 2.1.1 du deuxième chapitre, que  $\rho$  représente un état si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\frac{|p_3 - p_0|}{2} \leq \frac{p_0 + p_3}{2} \text{ et} \\ \frac{|p_2 - p_1|}{2} \leq \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Ce qui est clairement le cas ici car les  $p_i$  sont tous positifs. Ceci conclut donc la preuve de la première partie de la proposition.

Ensuite on suppose en plus que  $M$  appartient à l'octaèdre  $\mathcal{O}$ . Alors  $M$  s'écrit comme la combinaison convexe suivante :

$$M = \sum_{i=1,2,3; s=\pm} p_{is} O_s^i$$

où les  $O_{\pm}^i$  (définis dans la proposition E.0.4) sont les sommets de l'octaèdre  $\mathcal{O}$  et où les  $p_{i\pm}$  sont des réels positifs de somme un. De même que précédemment en exprimant  $\rho$  dans la base canonique on a :

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 & 0 & \tilde{y} \\ 0 & \tilde{b} & \tilde{x} & 0 \\ 0 & \tilde{x} & \tilde{c} & 0 \\ \tilde{y} & 0 & 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}\tilde{a} = \tilde{d} &= \frac{1}{4}[2p_{3+} + p_{1+} + p_{1-} + p_{2+} + p_{2-}] \\ \tilde{b} = \tilde{c} &= \frac{1}{4}[2p_{3+} + p_{1+} + p_{1-} + p_{2+} + p_{2-}] \\ \tilde{x} &= \frac{1}{4}[(p_{1+} + p_{2+}) - (p_{1-} + p_{2-})] \\ \tilde{y} &= \frac{1}{4}[(p_{1+} - p_{2+}) - (p_{1-} - p_{2-})].\end{aligned}$$

On remarque trivialement que  $|\tilde{x}| \leq \sqrt{\tilde{a}\tilde{d}}$  et  $|\tilde{y}| \leq \sqrt{\tilde{b}\tilde{c}}$ . Ce qui montre, d'après le lemme 2.2.1 du deuxième chapitre, que  $\rho$  est séparable et conclut la preuve de cette proposition.  $\square$

Ensuite on va démontrer la proposition 2.3.4 qu'on rappelle :

**Proposition E.0.6.** *Avec les notations de la définition 2.3.2, on pose  $K = -\left[\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b} \cdot Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in [1,3]^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j\right]$ , et on définit :*

$$\begin{aligned}l_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(K^2) = 2[(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr}(C^t C))] \\ l_1 &= \frac{1}{3} \text{tr}(K^3) = 8[\det(C) - \vec{a} \cdot C \vec{b}] \\ l_0 &= \frac{1}{4} \text{tr}(K^4) - \frac{1}{8} (\text{tr}(K^2))^2 \\ &= -\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + 4(C^t \vec{a})^2 + 4(C \vec{b})^2 + 4\vec{a}^2 \vec{b}^2 \\ &\quad + 2 \left[ (\text{tr}(C^t C))^2 - \sum_{(i,j,k,l) \in [1,3]^4} c_{ik} c_{il} c_{jk} c_{jl} \right] + 8 \left[ \det(C - \vec{a} \vec{b}^t) - \det(C) \right].\end{aligned}$$

Alors  $\rho$  de la définition 2.3.2 est positive (et donc est une matrice densité) ssi :

$$l_2 + l_1 + l_0 \leq 1 \tag{E.3}$$

$$2l_2 + l_1 \leq 4 \tag{E.4}$$

$$l_2 \leq 6 \tag{E.5}$$

$\square$   $\rho$  est positive ssi  $K \leq Id \otimes Id$ .  $K$  est une matrice hermitienne de trace nulle. Ses valeurs propres sont réelles et sont les racines du polynôme :

$$\chi_K = X^4 - l_2 X^2 - l_1 X - l_0,$$

qui ne possède pas de termes cubiques car  $K$  est de trace nulle. De plus si on note  $\kappa_i$  les racines de  $\chi_K$ , on peut les paramétrer par uniquement trois

réels  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  :

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3 \\ \kappa_2 &= -(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3 \\ \kappa_3 &= -(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3 \\ \kappa_4 &= (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3\end{aligned}$$

Dans un premier temps nous allons exprimer les  $l_i$  en fonction des  $\lambda_i$ . Ceci va nous être utile tout d'abord pour obtenir les expressions des  $l_i$  introduites dans la proposition. Mais de plus cela va être la clé pour montrer le critère de positivité.

Commençons donc par écrire  $l_2$  en fonction des  $\lambda_i$  :

$$\begin{aligned}-l_2 &= \kappa_1 \underbrace{(\kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)}_{-\kappa_1} + \kappa_2 \underbrace{(\kappa_3 + \kappa_4)}_{-(\kappa_1 + \kappa_2)} + \kappa_3 \underbrace{\kappa_4}_{-(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)} \\ &= -(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2) - \underbrace{(\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + \kappa_2 \kappa_3)}_{\frac{1}{2}[\kappa_4^2 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)]},\end{aligned}$$

$$\text{soit } l_2 = \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = \frac{1}{2}\text{tr}(K^2) = 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

On obtient directement la dernière expression en écrivant les  $\kappa_i$  en fonction des  $\lambda_i$ . De plus en évaluant directement cette trace, on a :

$$\begin{aligned}l_2 &= \frac{1}{2}\text{tr}(K^2) \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}\left(\left[\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b} \cdot Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j\right]^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}\left(\left[\vec{a}^2 Id + \vec{b}^2 Id + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}^2 Id\right]\right) \\ &= 2\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}^2\right).\end{aligned}$$

Pour  $l_1$ , on a :

$$\begin{aligned}l_1 &= \left[\kappa_1 \kappa_2 \underbrace{(\kappa_3 + \kappa_4)}_{2\lambda_3} + \kappa_3 \kappa_4 \underbrace{(\kappa_1 + \kappa_2)}_{-2\lambda_3}\right] \\ &= 2\lambda_3 \left[ \underbrace{\kappa_1 \kappa_2}_{\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \underbrace{\kappa_3 \kappa_4}_{\lambda_3^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right] \\ &= 8\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.\end{aligned}$$

D'autre part si on calcule  $\text{tr}(K^3)$  en fonction des  $\lambda_i$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
\text{tr}(K^3) &= \kappa_1^3 + \kappa_2^3 + \kappa_3^3 + \kappa_4^3 \\
&= [(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3]^3 - [(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_3]^3 - [(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3]^3 \\
&\quad + [(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3]^3 \\
&= 6\lambda_3[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2] \\
&= 24\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \\
\text{Ainsi } l_1 &= \frac{1}{3}\text{tr}(K^3)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression nous permet d'exprimer  $l_1$  en fonction de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $C$  :

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{1}{3}\text{tr}(K^3) \\
&= -\frac{1}{3}\text{tr}\left(\left[\vec{a}.\vec{\sigma} \otimes Id + \vec{b}.Id \otimes \vec{\sigma} + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j\right]^3\right) \\
&= -\frac{1}{3}\text{tr}\left(6\vec{a}.C\vec{b}Id \otimes Id + \left[\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j\right]^3\right) \\
&= 8 \det C - 8\vec{a}.C\vec{b}.
\end{aligned}$$

Ensuite on s'attaque à :

$$\begin{aligned}
l_0 &= -\det K = -\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4 \\
&= -[(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3][-(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3][-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3][(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3] \\
&= -[[(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3][(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_3]][[(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_3][(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3]] \\
&= -[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \lambda_3^2][(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_3^2] \\
&= 2(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2) - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4).
\end{aligned}$$

Cette expression va nous servir dans la preuve. De plus elle nous permet de montrer facilement que  $l_0 = \frac{1}{4}\text{tr}(K^4) - \frac{1}{8}[\text{tr}(K^2)]^2$ . En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\text{tr}(K^4) - \frac{1}{8}[\text{tr}(K^2)]^2 &= \frac{1}{4}(\kappa_1^4 + \kappa_2^4 + \kappa_3^4 + \kappa_4^4) - \frac{1}{2}l_2^2 \\
&= \frac{1}{4}[[(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3]^4 + [-(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_3]^4 \\
&\quad + [-(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3]^4 + [(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3]^4] \\
&\quad - 2[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2]^2 \\
&= 2(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2) - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4) \\
&= l_0.
\end{aligned}$$



Cette formule va nous permettre de démontrer l'expression annoncée dans la proposition pour  $l_0$ . Pour ce faire, on commence par calculer :

$$\begin{aligned}
K^2 &= (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^2 \otimes Id + Id \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma})^2 + \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right)^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) \\
&+ (\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id) \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) + \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) (\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes Id) \\
&+ (Id \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma}) \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) + \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) (Id \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma}),
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
K^2 &= (\vec{a}^2 + \vec{b}^2) Id \otimes Id + \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right)^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) \\
&+ \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \{ \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \sigma_i \} \otimes \sigma_j \right) + \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \{ \vec{b} \cdot \vec{\sigma}, \sigma_j \} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'anticommutativité des matrices de Pauli, on peut simplifier en :

$$\begin{aligned}
K^2 &= (\vec{a}^2 + \vec{b}^2) Id \otimes Id + \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right)^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) \\
&+ 2 \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} a_i Id \otimes \sigma_j \right) + 2 \left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} b_j \sigma_i \otimes Id \right).
\end{aligned}$$

Ensuite dans cette expression on évalue (toujours en tenant compte de l'anticommutativité des matrices de Pauli) :

$$\begin{aligned}
&\left( \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right)^2 \\
&= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}^2 Id \otimes Id + 2(c_{23}c_{32} - c_{22}c_{33})\sigma_x \otimes \sigma_x \\
&\quad + 2(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31})\sigma_x \otimes \sigma_y + 2(c_{22}c_{31} - c_{21}c_{32})\sigma_x \otimes \sigma_z \\
&\quad + 2(c_{33}c_{12} - c_{32}c_{13})\sigma_y \otimes \sigma_x + 2(c_{13}c_{31} - c_{11}c_{33})\sigma_y \otimes \sigma_y \\
&\quad + 2(c_{32}c_{11} - c_{31}c_{12})\sigma_y \otimes \sigma_z + 2(c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23})\sigma_z \otimes \sigma_x \\
&\quad + 2(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21})\sigma_z \otimes \sigma_y + 2(c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22})\sigma_z \otimes \sigma_z.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
K^2 &= (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}^2) Id \otimes Id \\
&+ 2 \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} a_i Id \otimes \sigma_j + 2 \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij} b_j \sigma_i \otimes Id \\
&+ 2(a_1 b_1 + c_{23} c_{32} - c_{22} c_{33}) \sigma_x \otimes \sigma_x + 2(a_1 b_2 + c_{21} c_{33} - c_{23} c_{31}) \sigma_x \otimes \sigma_y \\
&+ 2(a_1 b_3 + c_{22} c_{31} - c_{21} c_{32}) \sigma_x \otimes \sigma_z + 2(a_2 b_1 + c_{33} c_{12} - c_{32} c_{13}) \sigma_y \otimes \sigma_x \\
&+ 2(a_2 b_2 + c_{13} c_{31} - c_{11} c_{33}) \sigma_y \otimes \sigma_y + 2(a_2 b_3 + c_{32} c_{11} - c_{31} c_{12}) \sigma_y \otimes \sigma_z \\
&+ 2(a_3 b_1 + c_{13} c_{22} - c_{12} c_{23}) \sigma_z \otimes \sigma_x + 2(a_3 b_2 + c_{11} c_{23} - c_{13} c_{21}) \sigma_z \otimes \sigma_y \\
&+ 2(a_3 b_3 + c_{12} c_{21} - c_{11} c_{22}) \sigma_z \otimes \sigma_z.
\end{aligned}$$

On voit qu'il apparait trois types de termes : ceux en  $Id \otimes Id$ , ceux en  $\sigma_i \otimes Id$  ou en  $Id \otimes \sigma_j$  et enfin ceux en  $\sigma_i \otimes \sigma_j$ . Quand on évalue  $\text{tr}(K^4) = \text{tr}(K^2 K^2)$ , on ne garde que les produits de même nature car les autres s'annulent en prenant la trace. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\text{tr}(K^4) &= \text{tr}(K^2 K^2) \\
&= (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} c_{ij}^2) \text{tr}(Id \otimes Id) \\
&+ 4 \left[ \sum_{(i,j,k) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^3} c_{ij} a_i c_{kj} a_k + \sum_{(i,j,k) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^3} c_{ij} b_j c_{ik} b_k \right] \text{tr}(Id \otimes Id) \\
&+ 4[(a_1 b_1 + c_{23} c_{32} - c_{22} c_{33})^2 + (a_1 b_2 + c_{21} c_{33} - c_{23} c_{31})^2 \\
&\quad + (a_1 b_3 + c_{22} c_{31} - c_{21} c_{32})^2 + (a_2 b_1 + c_{33} c_{12} - c_{32} c_{13})^2 \\
&\quad + (a_2 b_2 + c_{13} c_{31} - c_{11} c_{33})^2 + (a_2 b_3 + c_{32} c_{11} - c_{31} c_{12})^2 \\
&\quad + (a_3 b_1 + c_{13} c_{22} - c_{12} c_{23})^2 + (a_3 b_2 + c_{11} c_{23} - c_{13} c_{21})^2 \\
&\quad + (a_3 b_3 + c_{12} c_{21} - c_{11} c_{22})^2] \text{tr}(Id \otimes Id),
\end{aligned}$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \text{tr}(K^4) &= (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr}(C^t C))^2 + 4(C^t \vec{a})^2 + 4(C \vec{b})^2 \\
&+ 4[(a_1 b_1 + c_{23} c_{32} - c_{22} c_{33})^2 + (a_1 b_2 + c_{21} c_{33} - c_{23} c_{31})^2 \\
&\quad + (a_1 b_3 + c_{22} c_{31} - c_{21} c_{32})^2 + (a_2 b_1 + c_{33} c_{12} - c_{32} c_{13})^2 \\
&\quad + (a_2 b_2 + c_{13} c_{31} - c_{11} c_{33})^2 + (a_2 b_3 + c_{32} c_{11} - c_{31} c_{12})^2 \\
&\quad + (a_3 b_1 + c_{13} c_{22} - c_{12} c_{23})^2 + (a_3 b_2 + c_{11} c_{23} - c_{13} c_{21})^2 \\
&\quad + (a_3 b_3 + c_{12} c_{21} - c_{11} c_{22})^2].
\end{aligned}$$

Si on développe les trois dernières lignes de l'expression précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\text{tr}(\mathbf{K}^4) &= (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr}(C^t C))^2 + 4(C^t \vec{a})^2 + 4(C\vec{b})^2 \\
&\quad + 4\vec{a}^2 \vec{b}^2 \\
&\quad + 4[(c_{23}c_{32} - c_{22}c_{33})^2 + (c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31})^2 + (c_{22}c_{31} - c_{21}c_{32})^2 \\
&\quad + (c_{33}c_{12} - c_{32}c_{13})^2 + (c_{13}c_{31} - c_{11}c_{33})^2 + (c_{32}c_{11} - c_{31}c_{12})^2 \\
&\quad + (c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23})^2 + (c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21})^2 + (c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22})^2] \\
&\quad + 8[a_1 b_1 (c_{23}c_{32} - c_{22}c_{33}) + a_1 b_2 (c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) + a_1 b_3 (c_{22}c_{31} - c_{21}c_{32}) \\
&\quad + a_2 b_1 (c_{33}c_{12} - c_{32}c_{13}) + a_2 b_2 (c_{13}c_{31} - c_{11}c_{33}) + a_2 b_3 (c_{32}c_{11} - c_{31}c_{12}) \\
&\quad + a_3 b_1 (c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23}) + a_3 b_2 (c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) + a_3 b_3 (c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22})].
\end{aligned}$$

Mais le dernier crochet se réécrit de façon plus compacte  $\det(C - \vec{a}\vec{b}^t) - \det(C)$ .

Quant à l'avant dernier, on peut remarquer que c'est

$$\frac{1}{2} \left[ (\text{tr}(C^t C))^2 - \sum_{(i,j,k,l) \in [1,3]^4} c_{ik} c_{il} c_{jk} c_{jl} \right]. \text{ Il vient finalement :}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\text{tr}(\mathbf{K}^4) &= \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + 4(C^t \vec{a})^2 + 4(C\vec{b})^2 + 4\vec{a}^2 \vec{b}^2 \\
&\quad + 2 \left[ (\text{tr}(C^t C))^2 - \sum_{(i,j,k,l) \in [1,3]^4} c_{ik} c_{il} c_{jk} c_{jl} \right] + 8 \det(C - \vec{a}\vec{b}^t) - \det(C).
\end{aligned}$$

D'où on conclut :

$$\begin{aligned}
l_0 &= \frac{1}{4}\text{tr}(\mathbf{K}^4) - \frac{1}{8}(\text{tr}(\mathbf{K}^2))^2 \\
&= - \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + 4(C^t \vec{a})^2 + 4(C\vec{b})^2 + 4\vec{a}^2 \vec{b}^2 \\
&\quad + 2 \left[ (\text{tr}(C^t C))^2 - \sum_{(i,j,k,l) \in [1,3]^4} c_{ik} c_{il} c_{jk} c_{jl} \right] + 8 \det(C - \vec{a}\vec{b}^t) - \det(C).
\end{aligned}$$

A présent que nous avons toutes les expressions voulues pour les  $l_i$ , on va montrer le critère de positivité.

Commençons par montrer que les conditions de la proposition sont nécessaires. On suppose donc que  $\rho$  est positive ou de façon équivalente que  $K$  est plus petit que l'identité ie  $\kappa_i \leq 1$ . Alors nécessairement

$$\chi_K(1) \geq 0 \iff l_2 + l_1 + l_0 \leq 1.$$

Mais en invoquant le théorème de Gauss-Lucas, on sait que les racines du polynôme dérivé,  $\chi_K'$  sont dans l'enveloppe convexe de celles de  $\chi_K$ . En

particulier elles sont majorées par 1, d'où :

$$\chi_K'(1) \geq 0 \iff 2l_2 + l_1 \leq 4.$$

Enfin en réappliquant le même argument avec  $\chi_K'$  et  $\chi_K''$ , on trouve :

$$\chi_K''(1) \geq 0 \iff l_2 \leq 6.$$

Réciproquement supposons que les trois inégalités précédentes sont vérifiées. La seconde s'écrit en termes des  $\lambda_i$  :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \leq 1.$$

En faisant jouer à  $\lambda_1$  puis à  $\lambda_2$  et enfin à  $\lambda_3$  un rôle particulier, elle devient :

$$\begin{aligned} (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1)^2 &\leq (1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_3^2) \\ (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2)^2 &\leq (1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_3^2) \\ (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3)^2 &\leq (1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2) \end{aligned} .$$

Ainsi nécessairement soit tous les  $\lambda_i^2 > 1$ , soit tous les  $\lambda_i^2 \leq 1$ . Le premier cas est à exclure à cause de de l'inégalité (E.5) qui s'écrit :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \leq 3.$$

Ainsi

$$\lambda_1^2 \leq 1, \quad \lambda_2^2 \leq 1 \text{ et } \lambda_3^2 \leq 1.$$

Or :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_4) = -\frac{1}{2}(\kappa_2 + \kappa_3), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(\kappa_2 + \kappa_4) = -\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_3), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}(\kappa_3 + \kappa_4) = -\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \end{aligned}$$

En combinant ces expressions aux trois inégalités précédentes on a :

$$\kappa_i + \kappa_j \leq 2 \quad \forall i \neq j.$$

Ainsi au plus un des  $\kappa_i$  est strictement supérieur à 1. Or cette dernière possibilité est à écarter à cause de la condition (E.3) :

$$1 - l_2 - l_1 - l_0 = \chi_K(1) = \prod_{i=1,2,3,4} (1 - \kappa_i) \geq 0.$$

On vient donc de montrer que si les inégalités (E.3), (E.4) et (E.5) sont vérifiées alors nécessairement  $\kappa_i \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$ , ce qui conclut la preuve de cette proposition.  $\square$

## Annexe F

### Preuve de la proposition 3.3.1.

On rappelle l'énoncé de la proposition à démontrer :

**Proposition F.0.7.** *Soient  $V(x)$ ,  $x \in [0, x_0)$  et  $R$  des opérateurs bornés sur un espace de Banach  $\mathcal{B}$  tels que  $V(x) = V(0) + xR + O(x^{3/2})$ , et où  $V(0)$  est une isométrie dont la décomposition spectrale est  $V(0) = \sum_{j=0}^r e^{-iE_j} P_j$  avec  $r < \infty$ . On pose  $h = \sum_{j=0}^r E_j P_j$  donc  $V(0) = e^{-ih}$ . Soit  $t_0 \geq 0$  on a uniformément en  $t$  pour  $t \in [0, t_0]$  si  $x \rightarrow 0$  avec  $t/x \in \mathbb{N}$  :*

$$V(0)^{-\frac{t}{x}} V(x)^{\frac{t}{x}} = e^{te^{ih} R^\sharp} + O(x^{1/2})$$

avec  $K^\sharp = \sum_{j=0}^r P_j K P_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{ish} K e^{-ish} ds$  pour tout  $K \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ .

□ On reprend, ici, la démonstration d'Attal-Joye dans [5] qui se fait en deux temps. On commence par montrer que  $V(0)^{-\frac{t}{x}} V(x)^{\frac{t}{x}}$  est proche de  $V(0)^{-\frac{t}{x}} e^{-i(h+xJ)^{\frac{t}{x}}}$  où l'opérateur  $J$  est défini ci-dessous. Ce qui est l'objet du lemme F.0.2. Puis on montre dans le lemme F.0.3 que cet opérateur  $V(0)^{-\frac{t}{x}} e^{-i(h+xJ)^{\frac{t}{x}}}$  est voisin de  $e^{-itJ^\sharp} = e^{te^{ih} R^\sharp}$ . Ce qui conclut par inégalité triangulaire la démonstration de la proposition F.0.7.

**Lemme F.0.2.** *Avec les mêmes notations que dans la proposition F.0.7, on pose :*

$$J = \sum_{j,k=0}^r \alpha_{jk} P_j R P_k \text{ où } \alpha_{jk} = \begin{cases} \frac{E_j - E_k}{e^{-iE_j} - e^{-iE_k}} & \text{si } j \neq k \\ ie^{iE_j} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Soit  $t_0 \geq 0$  on a uniformément en  $t$  pour  $t \in [0, t_0]$  si  $x \rightarrow 0$  avec  $t/x \in \mathbb{N}$  :

$$\|V(0)^{-\frac{t}{x}} V(x)^{\frac{t}{x}} - V(0)^{-\frac{t}{x}} e^{-i(h+xJ)^{\frac{t}{x}}}\| = O(x^{1/2}).$$

□ Comme  $V(0)$  est une isométrie, il suffit de montrer que :

$$\|V(x)^{\frac{t}{x}} - e^{-i(h+xJ)^{\frac{t}{x}}}\| = O(x^{1/2}).$$

Pour ce faire on commence par remarquer, en notant  $m = \frac{t}{x} \in \mathbb{N}$ , que :

$$V(x)^m - e^{-i(h+xJ)^m} = \sum_{k=0}^{m-1} V(x)^k (V(x) - e^{-i(h+xJ)}) e^{-i(h+xJ)^{m-1-k}}. \quad (\text{F.1})$$

Puis le terme entre parenthèse se réécrit grâce à la théorie de perturbation :

$$\begin{aligned} V(x) - e^{-i(h+xJ)} &= \left( V(0) + xR + O(x^{3/2}) \right) - \left( e^{-ih} + x(-i)e^{-ih} \int_0^1 e^{ihs} J e^{-ihs} ds + O(x^2) \right) \\ &= x \left( R + ie^{-ih} \int_0^1 e^{ihs} J e^{-ihs} ds \right) + O(x^{3/2}). \end{aligned}$$

Mais l'opérateur  $J$  a été choisi pour éliminer le terme dans la parenthèse. En effet :

$$\begin{aligned} ie^{-ih} \int_0^1 e^{ihs} J e^{-ihs} ds &= \sum_j ie^{-iE_j} \int_0^1 e^{iE_j s} \alpha_{jj} P_j R P_j e^{-iE_j s} ds \\ &\quad + \sum_{j \neq k} ie^{-iE_j} \int_0^1 e^{iE_j s} \alpha_{jk} P_j R P_k e^{-iE_k s} ds \\ &= - \sum_j P_j R P_j - \sum_{j \neq k} P_j R P_k = -R. \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\|V(x)\| = 1 + O(x) \text{ et } \|e^{-i(h+xJ)}\| = 1 + O(x).$$

Ainsi on peut majorer dans (F.1) :

$$\begin{aligned} \|V(x)^m - e^{-i(h+xJ)^m}\| &\leq cx^{3/2} \sum_{k=0}^{m-1} \|V(x)\|^k \|e^{-i(h+xJ)}\|^{m-1-k} \\ &\leq cx^{3/2} m(1+dx)^{m-1} \leq ct x e^{\frac{t}{x} \ln(1+dx)} \\ &\leq x^{1/2} ct_0 e^{dt_0} = O(x^{1/2}) \end{aligned}$$

avec  $c$  et  $d$  des constantes positives. Ce qui conclut la preuve du lemme F.0.2.  $\square$

**Lemme F.0.3.** *Pour tout  $0 \leq t \leq t_0 < \infty$ , si  $x \rightarrow 0$  et  $t/x \in \mathbb{N}$ , on a avec les mêmes notations que précédemment et uniformément en  $t$  :*

$$\|V(0)^{\frac{-t}{x}} e^{-i\frac{t}{x}(h+xJ)} - e^{-itJ^\#}\| = O(x).$$

**Remarque F.0.1.** Le théorème 1.4 de Davies dans [25] est identique à ce lemme F.0.3 à ceci près qu'il ne donne pas l'estimation  $O(x)$  de l'erreur.

□ Soit  $f \in \mathcal{B}$  et

$$f_x(t) = e^{ith/x} e^{-i\frac{t}{x}(h+xJ)} f \text{ et } f(t) = e^{-itJ^\sharp} f.$$

Il s'agit de majorer la norme de la différence de ces deux fonctions. Pour ce faire on écrit la différence de ces deux fonctions sous la forme suivante grâce au théorème fondamental de l'intégration :

$$\begin{aligned} & i(f_x(t) - f(t)) \\ &= \int_0^t \left( e^{ish/x} J e^{-ish/x} f_x(s) - J^\sharp f(s) \right) ds \\ &= \int_0^t \left( e^{ish/x} J e^{-ish/x} (f_x(s) - f(s)) + (e^{ish/x} J e^{-ish/x} - J^\sharp) f(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire il vient donc :

$$\|f_x(t) - f(t)\| \leq \|J\| \int_0^t \|f_x(s) - f(s)\| ds + \mathcal{F}(x, t_0)$$

où

$$\mathcal{F}(x, t_0) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} \left\| \int_0^t \left( e^{ish/x} J e^{-ish/x} - J^\sharp \right) e^{-isJ^\sharp} f \, ds \right\|. \quad (\text{F.2})$$

On va faire apparaître un  $x$  en facteur de cette équation. Pour ce faire, on commence par réécrire l'intégrand dans (F.2) :

$$\begin{aligned} e^{ish/x} J e^{-ish/x} - J^\sharp &= e^{ish/x} (J - J^\sharp) e^{-ish/x} \\ &= \sum_{j \neq k} e^{ish/x} P_j J P_k e^{-ish/x} = \sum_{j \neq k} e^{is(E_j - E_k)/x} P_j J P_k \\ &= \sum_{j \neq k} \frac{x}{i(E_j - E_k)} \frac{d}{ds} e^{is(E_j - E_k)/x} P_j J P_k. \end{aligned}$$

Puis en intégrant (F.2) par parties, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( e^{ish/x} J e^{-ish/x} - J^\sharp \right) e^{-isJ^\sharp} f \, ds \quad (\text{F.3}) \\ &= \sum_{j \neq k} \int_0^t \frac{x}{i(E_j - E_k)} \frac{d}{ds} e^{is(E_j - E_k)/x} P_j J P_k e^{-isJ^\sharp} f \, ds \\ &= \sum_{j \neq k} \left[ \frac{x}{i(E_j - E_k)} e^{is(E_j - E_k)/x} P_j J P_k e^{-isJ^\sharp} f \right]_0^t \\ & \quad + \sum_{j \neq k} \int_0^t \frac{x}{(E_j - E_k)} e^{is(E_j - E_k)/x} P_j J P_k J^\sharp e^{-isJ^\sharp} f \, ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\|J^\sharp\| \leq \|J\|$  et  $\|e^{-isJ^\sharp}\| \leq e^{t\|J\|}$ , on peut majorer la norme de (F.3) par :

$$\sum_{j \neq k} \frac{x\|J\|(2+t\|J\|)e^{\|J\|t}}{|E_j - E_k|} \|f\|.$$

Ainsi :

$$\mathcal{F}(x, t_0) \leq \max(2, t_0)(r^2 - r)\|f\| \frac{(1 + \|J\|)\|J\|e^{\|J\|t_0}}{\inf_{j \neq k} |E_j - E_k|} x,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|f_x(t) - f(t)\| &\leq \|J\| \int_0^t \|f_x(s) - f(s)\| ds \\ &\quad + \max(2, t_0)(r^2 - r)\|f\| \frac{(1 + \|J\|)\|J\|e^{\|J\|t_0}}{\inf_{j \neq k} |E_j - E_k|} x. \end{aligned}$$

On va alors utiliser la version suivante du lemme de Gronwall [87] :

**Lemme F.0.4.** *Soient  $\phi$  une fonction continue positive sur  $[0, t_0]$ ,  $c_1$  et  $c_2$  des constantes positives telles que :*

$$\phi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \phi(s) ds. \quad (\text{F.4})$$

Alors pour tout  $t \in [0, t_0]$ , on a :

$$\phi(t) \leq c_1 e^{c_2 t}. \quad (\text{F.5})$$

En appliquant le lemme de Gronwall avec  $\phi(t) = \|f_x(t) - f(t)\|$ ,  $c_1 = \max(2, t_0)(r^2 - r)\|f\| \frac{(1 + \|J\|)\|J\|e^{\|J\|t_0}}{\inf_{j \neq k} |E_j - E_k|} x$  et  $c_2 = \|J\|$  on obtient :

$$\|f_x(t) - f(t)\| \leq c_1 e^{c_2 t} \leq c_1 e^{c_2 t_0} = O(x).$$

Il ne reste donc plus qu'à prouver le lemme de Gronwall. Pour ce faire on remarque que les deux majorants de  $\phi(t)$  dans (F.4) et (F.5) sont égaux à  $t = 0$ . Il suffit donc de montrer que le rapport entre ces deux termes décroît. On pose donc :

$$g(t) := \frac{c_1 + c_2 \int_0^t \phi(s) ds}{c_1 e^{c_2 t}}.$$

En dérivant on a :

$$g'(t) = \frac{1}{(c_1 e^{c_2 t})^2} \left[ \phi(t) - \left( c_1 + c_2 \int_0^t \phi(s) ds \right) \right] c_1 c_2 e^{c_2 t}.$$

Le terme entre crochets est négatif par hypothèse ce qui conclut la preuve du lemme de Gronwall et du lemme F.0.3.  $\square$



## Annexe G

# Dérivation du théorème 3.4.2 via les théorèmes de l'article [4] d'Attal et Joye.

On rappelle le théorème à montrer :

**Théorème G.0.4.** *Avec les notations du troisième chapitre, on pose  $\tau_A = p\tau$  et donc  $\tau_B = (1-p)\tau$  pour  $p \in [0, 1]$ , alors on a la limite forte suivante :*

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau, \beta\right)^{\frac{t}{\tau}}(\rho) \\ &= e^{t(-i[h_0, \cdot] + \tilde{\Gamma}_\beta)}(\rho) = e^{t(-i[h_0 + h_{\text{eff}}^{\tilde{C}}, \cdot] + \tilde{\mathcal{D}}_\beta)}(\rho),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}h_{\text{eff}}^{\tilde{C}} &= -\frac{i}{2} \frac{1 - e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \tilde{C} \\ \tilde{\mathcal{D}}_\beta(\rho) &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \left[ \tilde{L}\rho\tilde{L}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \tilde{L}^\dagger \tilde{L}, \rho \} + e^{-\beta\epsilon} (\tilde{L}^\dagger \rho \tilde{L} - \frac{1}{2} \{ \tilde{L} \tilde{L}^\dagger, \rho \}) \right],\end{aligned}$$

pour :

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= p\sigma_-^{(A)} \otimes Id + (1-p)Id \otimes \sigma_-^{(B)} \\ \tilde{C} &= p(1-p) \left[ \sigma_-^{(A)} \otimes \sigma_+^{(B)} - \sigma_+^{(A)} \otimes \sigma_-^{(B)} \right].\end{aligned}$$

□ Comme indiqué, l'idée est ici de se baser sur les résultats généraux de l'article [4] pour obtenir le résultat qui a déjà été dérivé en utilisant le théorème de Chernoff. Aussi ici on ne redécrit pas la théorie utilisant les bruits quantiques développée par Attal-Pautrat dans [7] et adaptée par Attal-Joye dans [4] au cas thermique. On va plutôt voir la façon dont fonctionne leur méthode et effectuer le calcul explicite pour notre modèle car la seule différence entre le modèle générique étudié dans [4] et le nôtre consiste en

la dépendance en temps du hamiltonien d'interaction pour notre cas. Mais toutes les preuves fonctionnent en fait de la même manière.

Pour commencer il s'agit de développer perturbativement l'opérateur d'évolution  $U$  introduit au troisième chapitre. Dans la base <sup>1</sup>  $(|0\rangle, |1\rangle)$  d'un élément de chaîne, on a pour  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$  :

$$e^{-i\tau A(H(0)+\lambda H_{\text{int},A})} = \begin{pmatrix} Id + (-iph_0 - \frac{p^2}{2}\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(A)})\tau + O(\tau^2) & \\ -ip\sigma_-^{(A)}\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}) & \\ & -ip\sigma_+^{(A)}\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}) \\ & Id + (-ip(h_0 + \epsilon) - \frac{p^2}{2}\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(A)})\tau + O(\tau^2) \end{pmatrix},$$

$$e^{-i\tau B(H(0)+\lambda H_{\text{int},B})} = \begin{pmatrix} Id + (-i(1-p)h_0 - \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_+^{(B)}\sigma_-^{(B)})\tau + O(\tau^2) & \\ -i(1-p)\sigma_-^{(B)}\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}) & \\ & -i(1-p)\sigma_+^{(B)}\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}) \\ & Id + (-i(1-p)(h_0 + \epsilon) - \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_-^{(B)}\sigma_+^{(B)})\tau + O(\tau^2) \end{pmatrix}$$

et donc :

$$U = e^{-i\tau B(H(0)+\lambda H_{\text{int},B})} e^{-i\tau A(H(0)+\lambda H_{\text{int},A})} = (U_{ij})_{0 \leq i, j \leq 1}$$

avec :

$$U_{00} = Id + \left( -ih_0 - p(1-p)\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(B)} - \frac{p^2}{2}\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(A)} - \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_+^{(B)}\sigma_-^{(B)} \right)\tau + O(\tau^2)$$

$$U_{01} = -i(p\sigma_+^{(A)} + (1-p)\sigma_+^{(B)})\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2})$$

$$U_{10} = -i(p\sigma_-^{(A)} + (1-p)\sigma_-^{(B)})\sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2})$$

$$U_{11} = Id + \left( -i(h_0 + \epsilon) - p(1-p)\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(B)} - \frac{p^2}{2}\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(A)} - \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_-^{(B)}\sigma_+^{(B)} \right)\tau + O(\tau^2) \quad (\text{G.1})$$

Si la chaîne était dans un état pur, il suffirait d'appliquer le théorème 21 de l'article [7] pour conclure. Ici comme indiqué, l'astuce consiste à se placer dans le cadre d'application de l'article [7] en passant dans la représentation GNS (cf. [46],[94]) où l'état thermique devient un état pur.

L'idée de la représentation GNS est de doubler l'espace  $\mathbb{C}^2$ , d'un élément de chaîne, en l'espace  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  des endomorphismes sur  $\mathbb{C}^2$  de telle manière que l'état thermique d'un élément de la chaîne, qu'on notera abusivement  $\rho_\beta$ , devienne un état pur sur  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ . Mais on souhaite également garder la

---

1. Dans le troisième chapitre on avait choisi  $(|1\rangle, |0\rangle)$  comme base d'un élément de la chaîne. Ici on préfère inverser l'ordre et prendre la même base  $(|0\rangle, |1\rangle)$  que dans l'article [4] pour que le lecteur intéressé puisse s'y référer facilement. En effet on répète qu'on va ici reprendre sans démonstrations les résultats de [4].

structure d'espace de Hilbert. Aussi on munit  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  du produit scalaire suivant :

$$\langle C, D \rangle = \text{tr}(\rho_\beta C^\dagger D) \text{ pour } C, D \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2).$$

Ainsi équipé  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  devient un espace de Hilbert de dimension quatre qu'on note  $\mathcal{H}_{\text{GNS}}$ . Pour effectuer les calculs dans cet espace on en donne une base orthonormée  $(X_0^0, X_0^1, X_1^0, X_1^1)$  où :

$$\begin{aligned} X_0^0 &= Id \\ X_0^1 &= \sqrt{\frac{1 + e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon}}} a \\ X_1^0 &= \sqrt{1 + e^{-\beta\epsilon}} a^\dagger \\ X_1^1 &= \sqrt{\frac{1 + e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{\beta\epsilon}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{\beta\epsilon} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ensuite la représentation GNS, notée  $\pi$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{GNS}}) \\ C &\mapsto \pi(C) \text{ tel que } \pi(C)D = CD \quad \forall C, D \in \mathcal{H}_{\text{GNS}} \end{aligned}$$

En particulier on a  $\langle X_0^0, \pi(C)X_0^0 \rangle = \text{tr}(\rho_\beta C) \quad \forall C \in \mathcal{H}_{\text{GNS}}$ . C'est d'ailleurs pour avoir cette formule qu'on a choisi  $X_0^0 = Id$ .

Maintenant si on a un opérateur  $K$  sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^2$ , ce qui est le cas de  $U$ , alors la représentation GNS le transforme en un opérateur  $\pi(K)$  sur  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{\text{GNS}}$  qu'on peut représenter par une matrice  $4 \times 4$  à coefficients dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ , qu'on note :

$$K_{kl}^{ij} = \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(\rho_\beta (X_l^k)^\dagger K X_j^i)$$

On transforme donc  $U$  en  $\pi(U)$  et on calcule ses éléments de matrice perturbativement grâce à la formule (G.1) en vue d'appliquer le théorème 13

de l'article [7] :

$$\begin{aligned}
U_{00}^{00} &= \text{tr}_{\mathbb{C}^2}(\rho_\beta U) \\
&= Id - \tau \left[ i(h_0 + \frac{\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} Id) \right. \\
&\quad + \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} (p(1-p)\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(B)} - \frac{p^2}{2}\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(A)} - \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_+^{(B)}\sigma_-^{(B)}) \\
&\quad \left. + \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} (p(1-p)\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(B)} - \frac{p^2}{2}\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(A)} - \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_-^{(B)}\sigma_+^{(B)}) \right] + O(\tau^2) \\
U_{00}^{10} &= -i\sqrt{\tau} \sqrt{\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}}} \tilde{L} + O(\tau^{3/2}) \\
U_{00}^{01} &= -i\sqrt{\tau} \sqrt{\frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}}} \tilde{L}^\dagger + O(\tau^{3/2}) \\
U_{01}^{00} &= -i\sqrt{\tau} \sqrt{\frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}}} \tilde{L} + O(\tau^{3/2}) \\
U_{10}^{00} &= -i\sqrt{\tau} \sqrt{\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}}} \tilde{L}^\dagger + O(\tau^{3/2}).
\end{aligned}$$

Ensuite il suffit de remarquer par le calcul que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} U_{01}^{01} = \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{10}^{10} = \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{11}^{11} = Id$$

et que :

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow 0} U_{01}^{10} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{10}^{01} = \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{11}^{00} = \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{00}^{11} = 0 \\
\lim_{\tau \rightarrow 0} U_{11}^{10} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{11}^{01} = \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{10}^{11} = \lim_{\tau \rightarrow 0} U_{01}^{11} = 0.
\end{aligned}$$

Alors par application du théorème 13 de l'article [7] on obtient la version suivante du théorème 7 de l'article [4] :

**Théorème G.0.5.** *Le modèle d'interactions répétées étudié ici avec pour constante de couplage  $\lambda = \frac{1}{\tau}$  converge fortement quand  $\tau$  tend vers zéro vers*

le modèle de Langevin quantique suivant :

$$\begin{aligned}
dU_t = & - \left[ i \left( h_0 + \frac{\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} Id \right) + \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \left( p(1-p)\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(B)} - \frac{p^2}{2}\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(A)} \right. \right. \\
& - \left. \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_+^{(B)}\sigma_-^{(B)} \right) + \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \left( p(1-p)\sigma_+^{(A)}\sigma_-^{(B)} - \frac{p^2}{2}\sigma_-^{(A)}\sigma_+^{(A)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{(1-p)^2}{2}\sigma_-^{(B)}\sigma_+^{(B)} \right) \right] U_t dt \\
& - i \sqrt{\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}}} (\tilde{L} U_t da_{00}^{10}(t) + \tilde{L}^\dagger U_t da_{10}^{00}(t)) \\
& - i \sqrt{\frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon}}} (\tilde{L} U_t da_{01}^{00}(t) + \tilde{L}^\dagger U_t da_{00}^{01}(t)),
\end{aligned}$$

où les  $da_{ij}^{kl}$  sont les bruits quantiques définis dans [7].

En posant :

$$\begin{aligned}
W &= -i \sqrt{\frac{1 - e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}}} \tilde{L} \\
A_1^0(t) &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon}}} a_{01}^{00}(t) + \sqrt{\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}}} a_{00}^{10}(t) \\
A_0^1(t) &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon}}} a_{00}^{01}(t) + \sqrt{\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}}} a_{10}^{00}(t),
\end{aligned}$$

l'équation précédente se réécrit :

$$\begin{aligned}
dU_t = & - \left[ i \left( h_0 + \tilde{h}_{eff} \right) + i \frac{\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 + e^{-\beta\epsilon}} Id \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon}}} W^\dagger W + \sqrt{\frac{e^{-\beta\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}}} W W^\dagger \right) \right] U_t dt \\
& + W U_t dA_0^1(t) + W^\dagger dA_1^0(t).
\end{aligned}$$

En appliquant alors le théorème 12 de l'article [4] à notre cas, on obtient alors la limite forte :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \rho(t) = -i [h_0 + \tilde{h}_{eff}, \rho(t)] + \tilde{\mathcal{D}}_\beta(\rho(t))$$

ce qui est la version différentielle du théorème 3.4.2 et ce qui conclut donc sa preuve.  $\square$



## Annexe H

# Calculs perturbatifs autour de la température nulle pour

$$\tau_A = \tau_B.$$

Pour alléger les formules on pose  $\frac{\tau}{2} = 1$ . Il s'agit d'obtenir un développement perturbatif de la formule :

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ x(t) \\ \bar{x}(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = e^{\left(\frac{t}{1+e^{-\beta\epsilon}} M_1\right)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ x \\ \bar{x} \\ c \\ d \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & e^{-\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} & 0 \\ 1 & -(1+e^{-\beta\epsilon}) & -e^{-\beta\epsilon} & -e^{-\beta\epsilon} & 0 & e^{-\beta\epsilon} \\ 1 & -1 & -(1+e^{-\beta\epsilon}) & 0 & -e^{-\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} \\ 1 & -1 & 0 & -(1+e^{-\beta\epsilon}) & -e^{-\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -(1+e^{-\beta\epsilon}) & e^{-\beta\epsilon} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2e^{-\beta\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Ici le paramètre  $q := e^{-\beta\epsilon}$  est petit. On va donc faire un développement perturbatif en  $q$ . On réécrit donc la matrice à exponentiel sous la forme :

$$\frac{t}{1+e^{-\beta\epsilon}} M_1 = \frac{t}{1+q} A(q),$$

avec  $A(q) := A_0 + qA_1$  où :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a  $\frac{A(q)}{1+q}(0) = A_0$ . Le spectre de  $A_0$  se lit directement sur sa diagonale car elle est triangulaire. On voit qu'on a deux valeurs propres simples 0 et -2. Par contre la valeur propre -1 est de multiplicité 4. En jordanisant  $A_0$ , on fait apparaître deux blocs de Jordan pour cette valeur propre. Un de taille 1 et un autre de taille 3.

On peut également trouver une matrice de Jordan pour  $\frac{A(q)}{1+q}$  :

$$\frac{A(q)}{1+q} \sim \begin{pmatrix} \mu_-(q) & & & & & \\ & \mu_+(q) & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$\mu_-(q) = \frac{-3}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+34q+q^2}}{1+q} = -2 - 8q + O(q^2)$$

$$\mu_+(q) = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+34q+q^2}}{1+q} = -1 + 8q + O(q^2).$$

On voit bien ici comment change les valeurs propres sous l'effet de la perturbation :

- .  $-2 \rightarrow \mu_-(q)$
- .  $0 \rightarrow 0$
- .  $-1 \rightarrow -1$  et  $\mu_+(q)$

Le bloc de Jordan relatif à la valeur propre  $-1$  va faire apparaître des singularités pour les vecteurs propres perturbés correspondants comme prédit par





$$c_{11}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{13}{16}(e^{-t} - \lambda_+) - \frac{1}{4}te^{-t} + \lambda_- \right] \\ + \left[ -18\lambda_- + \frac{577}{32}\lambda_+ - \frac{1}{32}e^{-t} + te^{-t} \right] q$$

$$c_{21}(t, q) = \left[ \frac{-1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} + \left[ \left( \frac{1}{16}(3e^{-t} + 13\lambda_+) - \frac{1}{4}te^{-t} - \lambda_- \right) \right] \\ + \left[ 1 - te^{-t} - \frac{1}{32}(31e^{-t} - 577\lambda_+) + 18\lambda_- \right] q$$

$$c_{31}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{-1}{8}e^{-t} + \frac{17}{8}\lambda_+ - 2\lambda_- \right] + 44(\lambda_- - \lambda_+)q$$

$$c_{41}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{-1}{8}e^{-t} + \frac{17}{8}\lambda_+ - 2\lambda_- \right] + 44(\lambda_- - \lambda_+)q$$

$$c_{51}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q^2} + \left[ \frac{5}{16}(e^{-t} - \lambda_+) - \frac{t}{4}e^{-t} \right] \frac{1}{q} \\ + \left[ te^{-t} - 5\lambda_- + \frac{1}{32}(161\lambda_+ - e^{-t}) \right] \\ + \left[ 1 - 2te^{-t} - e^{-t} + 146(\lambda_- - \lambda_+) \right] q$$

$$c_{61}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q^2} + \left[ \frac{5}{16}(\lambda_+ - e^{-t}) + \frac{t}{4}e^{-t} \right] \frac{1}{q} \\ + \left[ 1 - te^{-t} + 5\lambda_- - \frac{1}{32}(161\lambda_+ + 31e^{-t}) \right] \\ + \left[ -2 + 2(1+t)e^{-t} + 146(\lambda_+ - \lambda_-) \right] q$$

$$\begin{aligned}
c_{12}(t, q) &= \left[ \frac{1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{5}{16}(e^{-t} - \lambda_+) - \frac{1}{4}te^{-t} \right] \\
&\quad + \left[ -5\lambda_- + \frac{161}{32}\lambda_+ - \frac{1}{32}e^{-t} + te^{-t} \right] q \\
c_{22}(t, q) &= \left[ \frac{-1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{16}(11e^{-t} + 5\lambda_+) + \frac{1}{4}te^{-t} \right] \\
&\quad + \left[ 1 - te^{-t} - 5\lambda_- - \frac{1}{32}(161\lambda_+ + 31e^{-t}) \right] q \\
c_{32}(t, q) &= \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + 10(\lambda_- - \lambda_+)q \\
c_{42}(t, q) &= \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + 10(\lambda_- - \lambda_+)q \\
c_{52}(t, q) &= \left[ \frac{1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q^2} + \left[ \frac{-1}{4}e^{-t} + \frac{3}{16}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} \\
&\quad + \left[ te^{-t} + \frac{1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + [1 - 2te^{-t} - e^{-t} + 25(\lambda_- - \lambda_+)] q \\
c_{62}(t, q) &= \left[ \frac{-1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q^2} + \left[ \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{3}{16}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} \\
&\quad + \left[ 1 - te^{-t} - \frac{31}{32}(\lambda_+ + e^{-t}) \right] + [-2 + (2+t)e^{-t} - 25(\lambda_- - \lambda_+)] q
\end{aligned}$$

$$c_{13}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] + \left[ \frac{-1}{8}e^{-t} + \frac{17}{8}\lambda_+ - 2\lambda_- \right] q$$

$$c_{23}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ e^{-t} - \frac{17}{8}\lambda_+ + 2\lambda_- \right] q$$

$$c_{33}(t, q) = \left[ \frac{1}{2}(\lambda_+ + e^{-t}) \right] + [4(\lambda_- - \lambda_+)] q$$

$$c_{43}(t, q) = \left[ \frac{1}{2}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + [4(\lambda_- - \lambda_+)] q$$

$$c_{53}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + [10(\lambda_- - \lambda_+)] q$$

$$c_{63}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] + [10(\lambda_+ - \lambda_-)] q$$

$$c_{14}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] + \left[ \frac{-1}{8}e^{-t} + \frac{17}{8}\lambda_+ - 2\lambda_- \right] q$$

$$c_{24}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ e^{-t} - \frac{17}{8}\lambda_+ + 2\lambda_- \right] q$$

$$c_{34}(t, q) = \left[ \frac{1}{2}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + [4(\lambda_- - \lambda_+)] q$$

$$c_{44}(t, q) = \left[ \frac{1}{2}(\lambda_+ + e^{-t}) \right] + [4(\lambda_- - \lambda_+)] q$$

$$c_{54}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + [10(\lambda_- - \lambda_+)] q$$

$$c_{64}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] + [10(\lambda_+ - \lambda_-)] q$$

$$c_{15}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(e^{-t} - \lambda_+) \right] + \left[ \frac{13}{16}\lambda_+ - \lambda_- + \frac{3}{16}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} \right] q$$

$$c_{25}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ 1 - \frac{t}{4}e^{-t} - \frac{1}{16}(19e^{-t} + 13\lambda_+) + \lambda_- \right] q$$

$$c_{35}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - 17\lambda_+ + 2\lambda_-) \right] q$$

$$c_{45}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - 17\lambda_+ + 2\lambda_-) \right] q$$

$$c_{55}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{t}{4}e^{-t} + \frac{1}{16}(11e^{-t} + 5\lambda_+) \right] \\ + \left[ 1 - te^{-t} - \frac{1}{32}(31e^{-t} + 161\lambda_+) + 5\lambda_- \right] q$$

$$c_{65}(t, q) = \left[ \frac{-1}{32}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ 1 - \frac{t}{4}e^{-t} - \frac{1}{16}(11e^{-t} + 5\lambda_+) \right] \\ + \left[ -2 - 5\lambda_- + te^{-t} + \frac{1}{32}(63e^{-t} + 161\lambda_+) \right] q$$

$$c_{16}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(e^{-t} - \lambda_+) \right] + \left[ \frac{5}{16}(\lambda_+ - e^{-t}) + \frac{1}{4}te^{-t} \right] q$$

$$c_{26}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ 1 - \frac{t}{4}e^{-t} - \frac{1}{16}(11e^{-t} + 5\lambda_+) \right] q$$

$$c_{36}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] q$$

$$c_{46}(t, q) = \left[ \frac{1}{8}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] + \left[ \frac{1}{8}(e^{-t} - \lambda_+) \right] q$$

$$c_{56}(t, q) = \left[ \frac{1}{32}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ \frac{t}{4}e^{-t} + \frac{3}{16}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \\ + \left[ 1 - te^{-t} - \frac{1}{32}(31e^{-t} + \lambda_+) \right] q$$

$$c_{66}(t, q) = \left[ \frac{-1}{32}(e^{-t} - \lambda_+) \right] \frac{1}{q} + \left[ 1 - \frac{t}{4}e^{-t} + \frac{3}{16}(\lambda_+ - e^{-t}) \right] \\ + \left[ -2 + te^{-t} + \frac{1}{32}(63e^{-t} + \lambda_+) \right] q$$

Ici on aimerait développer le résultat précédent en puissances de  $q$ . Le problème, c'est qu'on n'a pas d'estimation de l'erreur pour des temps arbitrairement grands. Aussi on se fixe un temps  $t_0 < \infty$ . Alors on peut énoncer le résultat suivant :

**Proposition H.0.8.** Soit  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , on a uniformément en  $t$  pour  $t \in [0, t_0]$  :

$$\begin{aligned} x(t) = & \{ (2-t)e^{-t} - 2e^{-2t} + q [(-4t^2 + 27t - 44)e^{-t} + (16t + 44)e^{-2t}] \} a \\ & + \{ -te^{-t} + q [(-4t^2 + 11t - 10)e^{-t} + 10e^{-2t}] \} b \\ & + e^{-t}x + q [(-4t - 4)e^{-t} + 4e^{-2t}] (x + \bar{x}) \\ & + q [(t-2)e^{-t} + 2e^{-2t}] c + qte^{-t}d + O(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) = & \{ e^{-2t} + q [(t^2 - 8t + 18)e^{-t} - (8t + 18)e^{-2t}] \} a \\ & + q \{ (t^2 - 4t + 5)e^{-t} - 5e^{-2t} \} b \\ & + q \{ (-t + 2)e^{-t} - 2e^{-2t} \} (x + \bar{x}) \\ & + q(e^{-t} - e^{-2t})c + O(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(t) = & \{ (e^{-t} - e^{-2t}) + q [1 + (-t^2 + 8t - 19)e^{-t} + (8t + 18)e^{-2t}] \} a \\ & + \{ e^{-t} + q [1 + (-t^2 + 4t - 6)e^{-t} + 5e^{-2t}] \} b \\ & + q \{ (t-2)e^{-t} + 2e^{-2t} \} (x + \bar{x}) \\ & + q(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})c + q(1 - e^{-t})d + O(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(t) = & \left\{ (t^2 - 4t + 5)e^{-t} - 5e^{-2t} \right. \\ & \left. + q \left[ 1 + \left( \frac{8}{3}t^3 - 30t^2 + 104t - 147 \right) e^{-t} + (40t + 146)e^{-2t} \right] \right\} a \\ & + \left\{ t^2e^{-t} + q \left[ 1 + \left( \frac{8}{3}t^3 - 14t^2 + 24t - 26 \right) e^{-t} + 25e^{-2t} \right] \right\} b \\ & + \{ -te^{-t} + q [(-4t^2 + 11t - 10)e^{-t} + 10e^{-2t}] \} (x + \bar{x}) \\ & + \{ e^{-t} + q [1 + (-t^2 + 4t - 6)e^{-t} + 5e^{-2t}] \} c \\ & + q \{ 1 - (t^2 + 1)e^{-t} \} d + O(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(t) = & \left\{ 1 + (-t^2 + 4t - 6)e^{-t} + 5e^{-2t} \right. \\ & \left. + q \left[ -2 + \left( \frac{-8}{3}t^3 + 30t^2 - 104t + 148 \right) e^{-t} - (40t + 146)e^{-2t} \right] \right\} a \\ & + \left\{ 1 - (t^2 + 1)e^{-t} + q \left[ -2 + \left( \frac{-8}{3}t^3 + 14t^2 - 24t + 27 \right) e^{-t} - 25e^{-2t} \right] \right\} b \\ & + \{ te^{-t} + q [(4t^2 - 11t + 10)e^{-t} - 10e^{-2t}] \} (x + \bar{x}) \\ & + \{ 1 - e^{-t} + q [-2 + (t^2 - 4t + 7)e^{-t} - 5e^{-2t}] \} c \\ & + \{ 1 + q[-2 + (t^2 + 2)e^{-t}] \} d + O(q^2). \end{aligned}$$

□ La démonstration de ce résultat repose simplement sur les développements suivants de  $\lambda_-$  et  $\lambda_+$  :

$$\lambda_- = e^{t\mu_-(q)} = e^{-2t} - 8qte^{-2t} + O(q^2)$$

$$\lambda_+ = e^{t\mu_+(q)} = e^{-t} + 8qte^{-t} + O(q^2)$$

uniformément en  $t$  pour  $t \in [0, t_0]$ . □



# Bibliographie

- [1] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. HK, 2002.
- [2] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :1804–1807, 1982.
- [3] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment : A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :91–94, 1982.
- [4] S. Attal and A. Joye. The langevin equation for a quantum heat bath. *Journal of Functional Analysis*, 247 :253–288, 2007.
- [5] S. Attal and A. Joye. Weak coupling and continuous limits for repeated quantum interactions. *Journal of Statistical Physics*, 126 :1241–1283, 2007.
- [6] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open Quantum Systems, Volume I : The Hamiltonian Approach, Volume II : The Markovian Approach, Volume III : Recent Developments*, volume 1880-1881-1882 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [7] S. Attal and Y. Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Annales Henri Poincaré*, 7 :59–104, 2006.
- [8] L.E. Ballentine. *Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 1990.
- [9] J.S. Bell. On the einstein-poldolsky-rosen paradox. *Physics*, 1 :195–200, 1964.
- [10] O. Brattelli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*. Texts and Monograph in Physics, Springer, 1981.
- [11] D. Braun. Creation of entanglement by interaction with a common heat bath. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :277901, 2002.
- [12] H-P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [13] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli. Random repeated interaction quantum systems. *Comm. Math. Phys.*, 284 :553–581, 2008.

- [14] A. Buchleitner, C. Viviescas, and M. Tiersch, editors. *Entanglement and Decoherence*, volume 768 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, 2009.
- [15] D.E. Browne C.-Y. Lu, T. Yang, and J.-W. Pan. Demonstration of shor’s quantum factoring algorithm using photonic qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :250504, 2007.
- [16] H.J. Carmichael. An open system approach to quantum optics. In *Lectures Notes in Physics*, volume Series M18. Springer, 1993.
- [17] A.R.R. Carvalho, M. Busse, O. Brodier, C. Viviescas, and A. Buchleitner. Optimal dynamical characterization of entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :190501, 2007.
- [18] A.R.R Carvalho and J.J. Hope. Stabilizing entanglement by quantum-jump-based feedback. *Phys. Rev. A*, 76 :010301, 2007.
- [19] A.R.R. Carvalho and M. Franca Santos. Distant entanglement protected through artificially increased local temperature. *New Journal of Physics*, 13 :013010, 2011.
- [20] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique Quantique vol 2*. Hermann, 1997.
- [21] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes-Introduction à l’électrodynamique quantique*. EDP Sciences-CNRS Éditions, 2001.
- [22] C. Cormick and J.P. Paz. Observing different phases for the dynamics of entanglement in an ion trap. *Phys. Rev. A*, 81 :022306, 2010.
- [23] J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :580–583, 1992.
- [24] E.B. Davies. Markovian master equations. *Comm. Math. Phys.*, 39 :91–110, 1974.
- [25] E.B. Davies. Markovian master equation ii. *Math. Ann.*, 219 :147–158, 1976.
- [26] L. Diosí. Irreversible quantum dynamics. In F. Benatti and R. Flora-nini, editors, *Lectures Notes in Physics*, volume 622. Springer, 2003.
- [27] P.J. Dodd and J.J. Halliwell. Disentanglement and decoherence by open system dynamics. *Phys. Rev. A*, 69 :052105, 2004.
- [28] L.M Duan, G. Giedke, J.I. Cirac, and P. Zoller. Inseparability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :2722–2725, 2000.
- [29] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considere complete? *Physical Review*, 47 :777–780, 1935.

- [30] B-G. Englert and N. Metwally. Remarks on 2-q-bit states. *Appl. Phys. B*, 72 :35–42, 2001.
- [31] A. Furusawa et al. Unconditional quantum teleportation. *Science*, 282 :706–709, 1998.
- [32] B.P. Lanyon et al. Experimental demonstration of a compiled version of shor’s algorithm with quantum entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :250505, 2007.
- [33] C. Langer et al. Long-lived qubit memory using atomic ions. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :060502, 2005.
- [34] C. Rauschenbeutel et al. Step-by-step engineered multiparticle entanglement. *Science*, 288 :2024–2028, 2000.
- [35] D. Leibfried et al. Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate. *Nature*, 422 :412–415, 2003.
- [36] H. Häffner et al. Robust entanglement. *Appl. Phys. B*, 81 :151–153, 2005.
- [37] L. Mazolla et al. Sudden death and sudden birth of entanglement in common structured reservoirs. *Phys. Rev. A*, 79 :042302, 2009.
- [38] M.P. Almeida et al. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science*, 316 :579–582, 2007.
- [39] S. Fasel, N. Gisin, G. Ribordy, and H. Zbinden. Quantum key distribution over 30 km of standard fiber using energy-time entangled photon pairs : a comparison of two chromatic dispersion reduction methods. *European Physical Journal D*, 30 :143–148, 2004.
- [40] R.P. Feynman. *The principle of least action in quantum mechanics*. PhD thesis, Princeton University, 1942.
- [41] R.P. Feynman and F.L. Vernon. The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Ann. Phys.*, 24 :118–173, 1963.
- [42] Z. Ficek and R. Tanas. Dark periods and revivals of entanglement in a two-qubit system. *Phys. Rev. A*, 74 :024304, 2006.
- [43] M.C. Fischer, B. Gutierrez-Medina, and M.G. Raizen. Observation of the quantum zeno and anti-zeno effects in an unstable system. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :040402, 2001.
- [44] S.J. Freedman and J.F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28 :938–941, 1972.
- [45] L. Gallardo. *Mouvement Brownien Et Calcul D’itô*. Hermann , Collection : Méthodes, 2008.
- [46] I.M. Gelfand and M.A. Naimark. On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a hilbert space. *Math. Sbornik*, 12 :197–217, 1943.

- [47] F. Haake and R. Reibold. Strong damping and low-temperature anomalies for the harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, 32 :2462–2475, 1985.
- [48] S. Haroche. Cours au collège de france. 2001-2011.
- [49] S. Haroche. *Cours et travaux du Collège de France, résumés 2008-2009*, volume 109. Collège de France, 2010.
- [50] S. Haroche and J-M. Raymond. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities and Photons*. Oxford University Press, 2006.
- [51] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [52] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. Separability of mixed states : necessary and sufficient conditions. *Phys. Lett. A*, 223 :1–8, 1996.
- [53] P. Horodecki. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Phys. Lett. A*, 232 :333–339, 1997.
- [54] R. Horodecki and M. Horodecki. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. *Phys. Rev. A*, 54(3) :1838–1843, 1996.
- [55] L.P. Hughston, R. Jozsa, and W.K. Wootters. A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix. *Phys. Lett. A*, 183 :14–18, 1993.
- [56] V. Jaksic and C.-A. Pillet. From resonances to master equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, 67 :425–445, 1997.
- [57] A. Joye. Repeated interaction quantum systems : Deterministic and random. *World Scientific*, Proceedings of the QMath10 Conference, edited by I. Beltita, G. Nenciu, R. Purice, 2008.
- [58] R. Rossi Jr. Entanglement preservation on two coupled cavities. *Phys. Lett. A*, 374 :2331–2334, 2010.
- [59] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1966.
- [60] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique 3, Mécanique Quantique*. Éditions Mir, 1975.
- [61] R. Vargas Le-Bert. *Systèmes Quantiques d’Interactions Répétées : L’approche Perturbative*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2009.
- [62] J.L. Lebowitz and H. Spohn. Irreversible thermodynamics for quantum systems weakly coupled to thermal reservoirs. *Advances in Chemical Physics*, 38 :109–142, 1978.
- [63] G. Lindblad. On the generator of quantum dynamical semigroups. *Commun. Math. Phys.*, 48 :119–130, 1976.
- [64] S. Maniscalco, F. Francica, R.L. Zaffino, and N. Lo Gullo. Protecting entanglement via the quantum zeno effect. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :090503, 2008.

- [65] E. Mascarenhas, D. Cavalcanti, V. Vedral, and M. França Santos. Physically realizable entanglement by local continuous measurements. *Phys. Rev. A*, 83 :022311, 2011.
- [66] E. Mascarenhas, B. Marques, D. Cavalcanti, M.O. Terra Cunha, and M. França Santos. Protection of quantum information and optimal singlet conversion through higher-dimensional quantum systems and environment monitoring. *Phys. Rev. A*, 81 :032310, 2010.
- [67] M. Merkli. Entanglement evolution via quantum resonances. *J. Math. Phys.*, 52 :092201, 2011.
- [68] M. Merkli, G.P. Berman, F. Borgonovi, and K. Gebresellasie. Evolution of entanglement of two qubits interacting through local and collective environments. *Quantum Information and Computation*, 11 :390–419, 2011.
- [69] A. Messiah. *Mécanique Quantique (tome 2)*. Dunod, 1995.
- [70] N. Metropolis and S. Ulam. The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247) :335–341, 1949.
- [71] G.L. Miller. Riemann’s hypothesis and tests for primality. *Journal of Computer and System Sciences*, 13(3) :300–317, 1976.
- [72] B. Misra and E.C.G. Sudarshan. The zeno’s paradox in quantum theory. *J. Math. Physics*, 18 :756–763, 1977.
- [73] D.M. Mundarin and M. Orszag. Entanglement preservation by continuous distillation. *Phys. Rev. A*, 79 :052333, 2009.
- [74] M. Mück. *Thermal Relaxation for Particle Systems in Interaction with Several Bosonic Heat Reservoirs*. PhD thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2004.
- [75] S. Nakajima. On quantum theory of transport phenomena. *Prog. Theor. Phys.*, 20 :948–959, 1958.
- [76] H. Nha and H.J. Carmichael. Entanglement within the quantum trajectory description of open quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :120408, 2004.
- [77] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [78] M. Orszag and M. Hernandez. Coherence and entanglement in a two-qubit system. *Adv. in Optics and Photonics*, 2 :229–286, 2010.
- [79] J.P. Paz and A.J. Roncaglia. Dynamical phases for the evolution of the entanglement between two oscillators coupled to the same environment. *Phys. Rev. A*, 79 :032102, 2009.
- [80] C. Pellegrini. *Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques*. PhD thesis, Univeristé Claude Bernard-Lyon I, 2008.

- [81] A. Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :1413–1415, 1996.
- [82] M.B. Plenio and P.L. Knight. The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.*, 70 :101–144, 1998.
- [83] I. Prigogine and P. Résibois. *Physica*, 27 :629–646, 1961.
- [84] M.O. Rabin. Probabilistic algorithm for testing primality. *Journal of Number Theory*, 12(1) :128–138, 1980.
- [85] J.M. Raymond, M. Brune, and S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, 73 :565–582, 2001.
- [86] M.D. Reid and P.D. Drummond. Quantum correlations of phase in non-degenerate parametric oscillation. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :2731–2733, 1998.
- [87] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l’usage de la licence et de l’agrégation*. Cassini, 2003.
- [88] I. Sainz and G. Bjork. Combating entanglement sudden death with non-local quantum error correction. *Int. J. Quant. Information*, 7 :245–255, 2009.
- [89] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.
- [90] A. Sanpera, R. Tarrach, and G. Vidal. Quantum inseparability as local pseudomixture. *Phys. Rev. A*, 58 :826–830, 1998.
- [91] M. Franca Santos, P. Milman, L. Davidovitch, and N. Zagury. Direct measurement of finite-time disentanglement induced by a reservoir. *Phys. Rev. A*, 70 :040305, 2006.
- [92] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31 :555–563, 1935.
- [93] F. Schwalb. *Quantum Mechanics*. Springer, 2002.
- [94] I.E. Segal. Irreducible representations of operator algebras. *Bull. Am. Math. Soc.*, 53 :73–88, 1947.
- [95] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27 :379–423 and 623–656, 1948.
- [96] P.W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J.Sci.Statist.Comput.*, 26 :1484–1511, 1997.
- [97] D. Spehner. *Contributions à la théorie du transport électronique dissipatif dans les solides aperiodiques*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse III, 2000.

- [98] D. Spehner and M. Orszag. Quantum jump dynamics in cavity qed. *J. Mat. Phys.*, 43 :3511–3537, 2002.
- [99] W.T. Strunz, F. Haake, and D. Braun. Universality of decoherence for macroscopic quantum superpositions. *Phys. Rev. A*, 67 :022101, 2003.
- [100] P.E. Toscheck and C. Wunderlich. What does an observed quantum system reveal to its observer? *Eur. Phys. J. D*, 14 :387–396, 2001.
- [101] L. van Hove. Quantum mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation. *Physica*, 21 :517–540, 1955.
- [102] L. van Hove. The approach to equilibrium in quantum statistics. a perturbation treatment to general order. *Physica*, 23 :441–480, 1957.
- [103] C. Viviescas, I. Guevara, A.R.R. Carvalho, M. Busse, and A. Buchleitner. Entanglement dynamics in open two-qubit systems via diffusive quantum trajectories. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :210502, 2010.
- [104] S. Vogelsberger and D. Spehner. Average entanglement for markovian quantum trajectories. *Phys. Rev. A*, 82 :052327, 2010.
- [105] S. Vogelsberger and D. Spehner. Entanglement evolution for quantum trajectories. *Journal of Physics : Conference Series*, 306 :012029, 2011.
- [106] H. Walther. Atoms in cavities and traps. *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, 32 :379–405, 1994.
- [107] V. Weisskopf and E. Wigner. Berechnung der natürlichen linienbreite auf grund der diracschen lichttheorie. *Zeitschrift für Physik*, 63(1) :54–73, 1930.
- [108] R.F. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40(8) :4277–4281, 1989.
- [109] H.M. Wiseman and G.J. Milburn. Quantum theory of field-quadrature measurements. *Phys. Rev. A*, 47 :642–662, 1993.
- [110] H.M. Wiseman and G.J. Milburn. *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, 2009.
- [111] W.K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Letters*, 80 :2245–2248, 1998.
- [112] S. Wu. The convex sum of product states for a separable states. *Phys. Lett. A*, 321 :301–307, 2004.
- [113] T. Yu and J.H. Eberly. Finite-time disentanglement via spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :140404, 2004.
- [114] W.H. Zureck. Decoherence and the transition from quantum to classical- revisited. *Los Alamos Science*, 27 :2–25, 2002.
- [115] R. Zwanzig. Ensemble method in the theory of irreversibility. *J. Chem. Phys.*, 33 :1338–1341, 1960.

**Résumé :**

On commence dans le chapitre d'introduction par rappeler les résultats majeurs sur l'intrication et les systèmes quantiques ouverts. Puis en particulier on prouve la désintrication en temps fini pour deux qubits (systèmes quantiques à deux niveaux d'énergie) en interaction avec des bains thermiques distincts à température positive.

On propose dans le premier chapitre de cette thèse une méthode pour empêcher la désintrication en temps fini basée sur des mesures continues sur les bains et utilisant la théorie des sauts quantiques et celle des équations différentielles stochastiques.

Dans le deuxième chapitre on étudie un sous-ensemble des états de deux qubits : celui des états qu'on peut représenter dans la base canonique pour une matrice ayant une forme de  $X$ . Cela nous permet d'obtenir des formules explicites pour la décomposition d'un état  $X$  séparable en au plus cinq états purs produits. On généralise ensuite cette étude à l'ensemble des états obtenus à partir d'états  $X$  par conjugaison avec des unitaires locaux. Puis on donne un algorithme pour décomposer tout état séparable de cet ensemble en une combinaison convexe de cinq états purs produits.

Le troisième chapitre de cette thèse propose l'étude de l'évolution de l'intrication de deux qubits dans un modèle d'interactions répétées avec la même chaîne de spins dans les limites de van Hove et de couplage singulier. En particulier on observe une intrication asymptotique non nulle quand la chaîne est à température infinie et des phénomènes de création d'intrication quand la chaîne est à température nulle.

**Mots clés :** systèmes quantiques ouverts, décohérence, intrication, qubits

**Abstract :**

In the introductory chapter we first give the major results about entanglement and open quantum systems. In particular we give the proof of entanglement sudden death (ESD) for two qubits (two level quantum systems) interacting with their own heat bath at positive temperature.

We propose in the first chapter a method to protect qubits against ESD, based on continuous measurements of the baths and using the theory of quantum jumps and stochastic differential equations.

In the second chapter, we study a subset of two qubits states : the set of states that we can represent in the canonical basis by an  $X$ -form matrix. We also give explicit formulas for decompositions of a separable  $X$ -state in a convex sum of five pure product states. We generalize this study to the set of states obtained from  $X$ -states by a conjugation with local unitary operators. Furthermore, we give an algorithm to decompose a separable state of this set in a convex sum of five pure product states.

Finally, in the third chapter we study entanglement of two qubits in a model of repeated interactions with the same spin chain in the van Hove and singular coupling limits. In particular we observe non zero asymptotic entanglement when the chain is at infinite temperature and phenomenons of entanglement sudden birth when the chain is at zero temperature.

**Keywords :** open quantum systems, decoherence, entanglement, qubits