# Lois limites fonctionnelles pour le processus empirique et applications

Sarah Ouadah

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE – PARIS VI

# THÈSE

Présentée pour obtenir

Le titre de Docteur en Sciences de
l'Université Pierre et Marie Curie – Paris VI

Spécialité : Mathématiques Appliquées
Ecole doctorale : Sciences Mathématiques de Paris Centre

---

## Lois Limites Fonctionnelles pour le Processus Empirique et Applications

---

par

Sarah Ouadah

sous la direction du Professeur Paul Deheuvels

Soutenue le 5 Décembre 2012 devant le jury composé de :

| | |
|---|---|
| M. Philippe BERTHET | Professeur, Université Toulouse III |
| M. Gérard BIAU | Professeur, Université Paris VI |
| M. Michel BRONIATOWSKI | Professeur, Université Paris VI |
| M. Paul DEHEUVELS | Professeur, Université Paris VI |
| M. Davy PAINDAVEINE | Professeur, Université Libre de Bruxelles |
| Mme Dominique PICARD | Professeur, Université Paris VII |
| M. Philippe VIEU | Professeur, Université Toulouse III |

Rapporteurs :

| | |
|---|---|
| M. Philippe BERTHET | Professeur, Université Paul Sabatier Toulouse III |
| Mme Aurore DELAIGLE | Professeur, Université de Melbourne, Australie |

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Paul Deheuvels. Je lui suis reconnaissante de m'avoir offert l'opportunité de faire de la recherche en me faisant découvrir des sujets riches et passionnants. Je le remercie de m'avoir poussée à être autonome, mais aussi pour toutes ses indications mathématiques qui finissent toujours par se révéler magiques. Je n'oublie pas les nombreuses anecdotes et allégories porteuses de bons conseils. Pour tout cela et pour m'avoir guidé jusqu'au terme de ma thèse, je souhaite lui exprimer ma gratitude.

J'exprime toute ma reconnaissance à Philippe Berthet et Aurore Delaigle pour avoir accepté de rapporter ma thèse et pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail. Je les remercie chaleureusement pour leur lecture minutieuse et leurs remarques constructives.

Je remercie Gérard Biau, Michel Broniatowski, Davy Paindaveine, Dominique Picard et Philippe Vieu de me faire l'honneur de participer à mon jury de thèse. Merci à Gérard Biau pour sa sympathie et l'intérêt qu'il a pu m'accorder durant ces trois ans. Merci à Michel Broniatowski pour sa disponibilité et sa bienveillance au moment où j'ai déposé ma thèse.

J'adresse mes remerciements à Paul Deheuvels, cette fois-ci en sa qualité de directeur du LSTA, laboratoire au sein duquel j'ai disposé des meilleures conditions pour écrire ma thèse. J'ai également eu la chance de participer à des colloques et d'y faire de belles rencontres avec des professeurs et doctorants d'autres universités françaises. Je tiens à remercier Pascal Epron, notre bibliothécaire et Louise Lamart notre secrétaire pour leur aide et leurs sourires quotidiens, ainsi que Corinne van Vlierberghe et Anne Durrande pour leur gentillesse. Merci aux membres de l'équipe Modal'X qui m'ont accueilli dans la dernière ligne droite.

Merci à tous les membres du sta et du pma : doctorants, maîtres de conférences et professeurs avec qui j'ai eu mainte fois le plaisir de discuter lors de séminaires, de pauses café et de déjeuners animés. Je remercie Agathe, Bertrand, Etienne, Fanny, Frédéric, Jean-Patrick, Nathalie, Olivier L., Philippe, Salim, Stéphane et Tabea.
Merci à Virgile, Olivier B., Zhansheng, Aurélie, Emmanuel, Claire, Abdullah et Assia, trois générations de doctorants colocataires de bureau. Merci à Baptiste, Benjamin, Cécile et Svetlana d'avoir si bien repris le flambeau d'organisateurs du groupe de travail des thésards (et merci aux filles pour les discussions mathématiques).

Merci à Robert Lutz, pour son enseignement et sa "*structure de la connaissance*" qui ont animé mon goût pour les mathématiques.

Premières amitiés humaines et statistiques de Jussieu, amitiés qui dureront toujours. Je pense à Clément, Davood, Florence, Maxime, Sarah et Shilan (ainsi qu'à la statistique non paramétrique). Merci à Clément d'avoir été mon confident de route. Merci à Elsa pour nos séances de travail dans la dernière ligne droite.

Je remercie de tout coeur Adrien pour son soutien infaillible et pour sa patience. L'intérêt

qu'il a toujours manifesté pour l'évolution de ma thèse compte beaucoup pour moi. Merci d'avoir généreusement accepté de suivre ce feuilleton scientifique qui paraissait épisode après épisode tel les aventures de *Pardaillan* (parallèle très subjectif !).

Je remercie mon père Tewfik Sari. Toujours disponible au bout du fil (SOS doctorante pipelette) pour m'écouter, plaisanter, me rassurer. Je me rends bien compte que c'est un luxe d'avoir un père chercheur et directeur de thèse qui a eu une influence positive sur mon parcours d'apprentie chercheuse.

Merci à ma mère Karima et mon frère Nassim pour leurs encouragements, leur confiance et leur amour. Ils m'ont toujours assuré que tout se passerait bien !

J'ai souvent eu la larme à l'œil en lisant les remerciements de thèse, même ceux de parfaits inconnus. C'est à mon tour d'écrire les miens, et je souris. J'espère que cette thèse, qui n'est qu'une étape, marquera le début d'une belle aventure dans le monde de la recherche.

## Résumé

Nous nous intéressons dans cette thèse à l'estimation non paramétrique de la densité à partir d'un échantillon aléatoire. Nous établissons des propriétés limites d'estimateurs de densité en les déduisant de lois limites fonctionnelles pour le processus empirique local, qui sont démontrées dans un contexte général. L'exposé de thèse, comprenant deux parties, est construit de la manière suivante. La première partie porte sur des lois limites fonctionnelles locales. Elles sont établies pour trois ensembles de suites de fonctions aléatoires, construites à partir : du processus empirique uniforme, du processus empirique de quantiles uniforme et du processus empirique de Kaplan-Meier. Ces lois sont uniformes relativement à la taille des incréments de ces processus empiriques locaux et décrivent le comportement asymptotique de la distance de Hausdorff entre chacun de ces trois ensembles et un ensemble de type Strassen. La deuxième partie porte sur l'estimation non paramétrique de la densité. Nous présentons plusieurs applications des lois limites fonctionnelles locales établies précédemment. Ces résultats comportent, d'une part, la description de lois limites pour des estimateurs non paramétriques de la densité, comprenant les estimateurs à noyau et les estimateurs de la densité par la méthode des plus proches voisins, et d'autre part, des lois limites pour les estimateurs à noyau de la densité des temps de survie et du taux de panne dans un modèle de censure à droite. Ces lois limites ont la particularité d'être établies, dans le cadre de la convergence en probabilité, uniformément relativement aux paramètres de lissage des estimateurs considérés.



**Mots-clefs** Lois limites fonctionnelles du type Strassen, processus empiriques, estimateurs fonctionnels non paramétriques, modèle de censure à droite, convergence en probabilité.



## Abstract

In this thesis, we are concerned with nonparametric estimation of the density given a random sample. We establish asymptotic properties of density estimators by deducing them from functional limit laws for the local empirical process in a general context. The thesis is divided in two main parts, we describe as follows. The first part is devoted to local functional limit laws which are established for three sets of sequences of random functions, built from: the uniform empirical process, the uniform quantiles process and from the Kaplan-Meier empirical process. The functional laws are uniform relative to the increments size of the local empirical processes and describe the asymptotic behavior of the Hausdorff set-distance between each one of the three sets and a Strassen-type set. The purpose of the second part is nonparametric density estimation. We present several statistical applications of the previous functional limit laws, which consist on limit laws describing the asymptotic behavior of nonparametric density estimators, such as kernel estimators, the nearest-neighbor estimator, and kernel estimators of lifetime density and failure rate in a right censorship model. These applications are new sharp uniform-in-bandwidth limit laws for the last estimators in the framework of convergence in probability.



**Keywords** Strassen-type functional limit laws, empirical processes, nonparametric functional estimators, right censorship model, convergence in probability.

# Table des matières

# Introduction

## 0.1 Présentation de la thèse

Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité $f(\cdot)$, relativement à la mesure de Lebesgue. La densité $f(\cdot)$ fournit une description *naturelle* de la loi de $X$, au sens qu'elle en permet une interprétation visuelle simple, en révélant directement les facteurs de concentration de cette distribution de probabilité. Nous nous intéressons dans cette thèse à l'estimation de cette densité $f(\cdot)$ à partir d'un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$, composé de répliques indépendantes et de même loi que $X$. L'estimation d'une densité de probabilité est un problème statistique ancien et classique, dont l'étude remonte à bien avant le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en particulier par les méthodes d'histogrammes. Nous n'en ferons pas ici une étude historique systématique, nous renvoyons le lecteur aux exposés et références présents dans les ouvrages et articles de : Parzen [97], Watson et Leadbetter [120], Deheuvels [19], Tapia et Thompson [112], Prakasa Rao [98], Bosq et Lecoutre [10], Devroye [45], Härdle [72], Deheuvels [21], et Berlinet et Devroye [5]. Nous mentionnons également la soixantaine de références pertinentes sur le sujet, présentes page 162, dans del Barrio et al. [41].

Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur des procédés d'*estimation non paramétrique*. Nous établirons des propriétés limites d'estimateurs de densité en les déduisant de *lois limites fonctionnelles* pour le *processus empirique local*, qui seront démontrées dans un contexte général. Ces lois fonctionnelles représentent la composante, originale et théorique, la plus importante de nos contributions. Elles seront développées dans les chapitres 1, 2 et 3 de la première partie du présent mémoire. Les applications statistiques qui en découlent fournissent, d'une part, une motivation pratique de ces résultats généraux, et d'autre part, sont d'intérêt de par elles-mêmes. Elles sont exposées dans les chapitres 4, 5 et 6 de la deuxième partie de notre thèse.

Dans la suite de l'introduction présente, nous aborderons successivement :

- le plan de notre mémoire de thèse ;
- des résumés des chapitres comprenant la partie originale de nos travaux ;
- une introduction aux lois limites fonctionnelles à travers un historique intégrant l'énoncé de nos contributions ;
- une introduction à l'estimation non paramétrique, et un résumé de nos résultats originaux, obtenus dans ce domaine.

L'exposé de thèse proprement dit, comprenant deux parties, est construit de la manière suivante.

- La première partie porte sur des lois limites fonctionnelles locales. Elles sont établies pour trois ensembles de suites de fonctions aléatoires, construites à partir : du processus empirique uniforme (voir le Chapitre 1), du processus empirique de quantiles uniforme (voir le Chapitre 2) et du processus empirique de Kaplan-Meier (voir le Chapitre 3). Les lois limites fonctionnelles locales présentées dans la première partie de la thèse portent sur des processus empiriques locaux, et sont uniformes relativement à la taille de leurs incréments. Nous parlerons alors de "lois limites fonctionnelles uniformes". Il ne faut pas confondre cette uniformité avec celles des variables aléatoires sous-jacentes, qui seront souvent supposées de loi uniforme sur $(0,1)$. De telles lois limites fonctionnelles locales sont motivées par l'estimation non paramétrique de la densité et nous mettrons en évidence les raisons pour lesquelles leur caractère d'uniformité, par rapport à la taille des incréments, a une grande importance pratique.

– La deuxième partie porte sur l'estimation non paramétrique de la densité. Nous présentons ici plusieurs applications des lois limites fonctionnelles locales établies dans la première partie. Ces résultats comportent, d'une part, la description de lois limites pour des estimateurs non paramétriques de la densité, comprenant les estimateurs à noyau (voir le Chapitre 4) et les estimateurs de la densité par la méthode *des plus proches voisins* (voir le Chapitre 5), et d'autre part, des lois limites pour les estimateurs à noyau de la densité des temps de survie et du taux de panne (ou de mortalité) (voir le Chapitre 6). Ces lois limites ont la particularité d'être uniformes relativement aux paramètres de lissage des estimateurs considérés. Dans le paragraphe 0.3 introductif, sur l'estimation non paramétrique, nous insisterons particulièrement sur le fait qu'une difficulté majeure dans l'estimation de la densité par la méthode des noyaux ou des plus proches voisins réside, précisément, dans le choix du paramètre de lissage.

Nous présentons ci-dessous des résumés de chacun des chapitres de notre thèse. Nous y mettons en évidence la partie originale de nos recherches. Par ailleurs, nous exposerons de manière plus détaillée, au sein des chapitres eux-mêmes, la comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature existante.

**Contributions de la première partie** Dans le Chapitre 1, nous nous intéressons au comportement limite des incréments de taille $h$ du processus empirique uniforme. Dans un premier temps, nous fournissons deux inégalités (voir la Proposition 1.2 et la Proposition 1.4) qui constituent la pierre angulaire de la construction de toutes les lois limites fonctionnelles locales établies, par la suite, dans cette première partie de thèse. Nous établissons deux lois limites fonctionnelles locales pour les incréments du processus empirique uniforme (voir le Théorème 1.5 et le Théorème 1.7). La deuxième est l'extension de l'autre dans un contexte d'uniformité relativement à la taille des incréments (on considère le supremum, relativement aux tailles d'incréments $h$, des distances de Hausdorff entre les ensembles de fonctions concernés). Ces lois limites décrivent le comportement asymptotique des distances de Hausdorff entre, d'une part, un ensemble aléatoire composé d'incréments du processus empirique, et d'autre part, l'ensemble de Strassen. Ces résultats sont établis dans le cadre de la convergence en probabilité. Les incréments considérés ont une taille $h$, comprise entre celle des incréments dits standards, et ceux dits grands (ou "large") (voir le point 2°) de la Remarque 1.6). Nous présentons, au passage de nouveaux lemmes analytiques (voir le Lemme 1.16 et le Lemme 6) dont l'intérêt pratique est de faciliter l'utilisation des lois limites fonctionnelles locales, établies dans la première partie de la thèse, pour développer les applications statistiques de la deuxième partie de la thèse. Mentionnons enfin que ce premier chapitre est motivé par les travaux du Chapitre 4.

Le Chapitre 2 est l'analogue du Chapitre 1 dans le contexte des processus de quantiles. L'étude du comportement limite des incréments du processus empirique de quantile uniforme remplace ici celle des incréments du processus empirique classique. En suivant le même plan que celui du Chapitre 1, nous présentons deux lois limites fonctionnelles locales (voir le Théorème 2.1 et le Théorème 2.3). La seconde d'entre elles est une version généralisée de la première, établie uniformément relativement à la taille $h$ des incréments. L'une et l'autre de ces lois décrivent le comportement limite des incréments du processus empirique de quantile uniforme. Deux techniques de démonstration sont utilisées ici (voir les paragraphes 2.3.1 et 2.3.2). La première approche consiste à décrire les incréments du processus empirique de quantile uniforme à partir de processus de sommes partielles. A partir de cette représentation, nous mettons en œuvre un argument identique à celui qui permet d'obtenir les inégalités de base du Chapitre 1 (voir la Proposition 2.5 et la Proposition 2.6). L'autre approche utilise le fait que ces lois limites fonctionnelles peuvent être déduites des lois limites fonctionnelles présentées dans le Chapitre 1, à l'aide d'une représentation du type Bahadur-Kiefer (voir Bahadur [2] et Kiefer [77]). Comme applications de ces résultats, nous donnons des lois limites nouvelles pour les modules de continuité du processus empirique uniforme, et du processus empirique de quantile uniforme. Leur originalité découle de leur uniformité relativement à la taille $h$ des incréments (voir le Corollaire 2.7). Ce chapitre est naturellement inspiré par le Chapitre 1, dont il fournit une version adaptée au processus de quantiles. Il est de plus, motivé par l'application présentée au Chapitre 5.

Les principaux résultats de ces deux premiers chapitres ont fait l'objet d'une publication dans un article [40], écrit en collaboration avec mon directeur de thèse Paul Deheuvels, et à paraître dans la revue *Journal of Theoretical Probability* (voir l'Annexe C).

Le Chapitre 3 est dédié à l'étude des incréments du processus empirique de Kaplan-Meier dans le cadre d'un modèle de censure à droite. De tels modèles de censure sont courants dans les applications biostatistiques. Par exemple, on peut s'intéresser aux durées de vie résiduelles de patients cancéreux, ayant dû subir l'ablation chirurgicale d'une tumeur maligne. On cherche alors à analyser leur durée de vie résiduelle à partir de l'instant de l'opération. De manière plus générale, de tels modèles s'appliquent à l'analyse de durées de vie séparant l'instant initial d'observation et l'arrivée d'un évènement d'intérêt, tel que, par exemple, une rechute observée pour la pathologie faisant l'objet du traitement. La durée de vie est modélisée par une variable aléatoire positive $X$ dont on désire estimer la loi de probabilité. Dans la pratique, il est courant qu'on ne puisse pas observer $X$ directement. C'est le cas, par exemple, quand un des patients quitte le milieu hospitalier avant la survenue de son décès (ou de sa rechute). Dans un tel cas, on sait seulement que la durée $X$ séparant le début de l'hospitalisation et le décès est supérieure à la durée de vie observée durant l'étude. Un autre cas de figure serait qu'un patient décède d'une cause indépendante de la pathologie pour laquelle il est traité (comme, par exemple, d'un accident de la route). On ne connaît pas alors sa durée de survie dans des circonstances "normales". On modélise ces phénomènes en supposant que l'on observe le minimum $\min(X, C)$ entre la variable d'intérêt $X$ et une variable aléatoire positive notée $C$, et que l'on appelle censure aléatoire à droite. On supposera que l'on observe également l'indicatrice $\mathbb{I}_{\{X \leq C\}}$ qui caractérise le fait que l'observation $X$ est censurée ou non par la variable $C$. Dans ce chapitre, nous présentons, dans un modèle de censure à droite, une loi limite fonctionnelle uniforme pour les incréments du processus empirique de Kaplan-Meier (voir le Théorème 3.2). Cette loi décrit le comportement limite en probabilité, lorsque la taille d'échantillon croît indéfiniment, de la distance de Hausdorff entre un ensemble composé d'incréments du processus empirique de Kaplan-Meier et une version de l'ensemble de Strassen. Nous établissons que cette convergence a lieu uniformément par rapport à la taille des incréments. Nous combinons ici les résultats de Deheuvels et Einmahl [33], avec les lois limites fonctionnelles locales obtenues pour les incréments du processus empirique uniforme. Comme première application de cette loi limite fonctionnelle locale, nous donnons des lois limites nouvelles pour le module de continuité du processus empirique de Kaplan-Meier (voir le Corollaire 3.4). Leur originalité vient de l'uniformité relativement à la taille $h$ des incréments. Ce chapitre est motivé par les applications décrites au sein du Chapitre 6. Les résultats de ce troisième chapitre ont donné lieu à un article soumis [96].

**Contributions de la deuxième partie** Nous considérons un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ de répliques indépendantes et identiquement distribuées d'une variable aléatoire réelle $X$, de densité $f(\cdot)$, continue sur un intervalle d'intérieur non vide $J \subseteq \mathbb{R}$. Nous étudions la convergence uniforme des estimateurs non paramétriques de la densité suivants : les estimateurs à noyau, les estimateurs de la densité par la méthode des plus proches voisins, les estimateurs à noyau de la densité des temps de survie et du taux de panne (ou de mortalité). Nos lois limites ont la particularité d'être établies, dans le cadre de la convergence en probabilité, uniformément relativement au paramètre de lissage, dit aussi *fenêtre*, de chacun de ces estimateurs fonctionnels. Nous établirons ces propriétés d'uniformité pour toutes les valeurs du paramètre de lissage pour lesquelles ces estimateurs sont convergents. De plus, nous obtenons alors des évaluations explicites asymptotiques des erreurs aléatoires correspondantes.

Dans le Chapitre 4, nous nous intéressons plus spécifiquement au comportement limite en probabilité des estimateurs à noyau de la densité. Nous obtenons pour ces estimateurs une loi limite en probabilité, uniforme relativement à la fenêtre (voir le Théorème 4.1). Cette loi est établie pour l'ensemble des fenêtres qui tendent vers 0 et qui sont asymptotiquement supérieures ou égales à $n^{-1}c \log n$ pour tout $c > 0$ fixé (voir la condition 4.1.3). L'originalité de ce résultat réside dans plusieurs aspects. D'une part, nous fournissons la valeur explicite de la limite asymptotique de l'erreur aléatoire des estimateurs à noyau de la densité. Notons qu'il est difficile d'obtenir cette constante en utilisant d'autres techniques de preuves comme celles de la théorie *des processus empiriques indexés par des fonctions* développée depuis les travaux fondateurs de Einmahl et Mason [62]. D'autre part, nous établissons un résultat de convergence uniforme relativement à la fenêtre $h > 0$, au sens de la "vraie" convergence uniforme et non pour une valeur particulière de $h$ comme il peut être obtenu en faisant usage des inégalités de concentration de type Talagrand. De ce fait, quel que soit le choix de la fenêtre $h > 0$ (comme, par exemple, par une méthode adaptative), du moment que $h \in \mathcal{H}_n$ vérifie la condition (4.1.3) du Théorème 4.1, la norme-sup de l'erreur aléatoire des estimateurs à noyau de la densité est bornée par une constante limite explicitement connue et qui ne dépend pas de $h$. De plus, ce terme aléatoire converge vers 0 avec une vitesse optimale en $\sqrt{\log_+(1/h)/nh}$. Au passage, nous construisons des bandes de certitude asymptotiques pour la densité $f(\cdot)$ (voir le Corollaire 4.9) en faisant notamment usage de techniques de bootstrap. Pour clore ce chapitre, nous présentons des simulations pour illustrer ces bandes de certitude découlant de notre théorème principal. Tout comme les principaux résultats des deux premiers chapitres, la loi limite uniforme relativement à la fenêtre pour les estimateurs à noyau de la densité est présentée dans notre article à paraître [40].

Les chapitres 5 et 6 sont les analogues du Chapitre 4 dans le contexte de différents estimateurs fonctionnels.

Dans le Chapitre 5, l'étude du comportement limite en probabilité des estimateurs de la densité par la méthode des plus proches voisins remplace ici celle des estimateurs à noyau de la densité. Nous présentons pour ces estimateurs une loi limite en probabilité, uniforme relativement à la fenêtre des observations, de manière équivalente relativement au nombre de plus proches voisins (voir le Théorème 5.2). Mentionnons que les travaux de ce chapitre ont fait l'objet d'un article soumis [95].

Dans le Chapitre 6, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de censure à droite. Nous présentons deux lois limites en probabilité, l'une pour les estimateurs à noyau de la densité des temps de survie (voir le Théorème 6.2), et l'autre pour les estimateurs à noyau du taux de panne (voir le Théorème 6.8). Ces lois limites sont uniformes relativement à la fenêtre et relativement au noyau. L'uniformité relative au noyau est établie pour l'ensemble des fonctions noyau qui sont continues à droite, à variation bornée et à support compact. Soulignons que cette uniformité s'applique également aux lois limites pour les estimateurs considérés dans les chapitres 4 et 5. A partir du premier résultat, nous donnons des bandes de certitude asymptotiques pour la densité des temps de survie (voir le Corollaire 6.4). Les travaux de ce chapitre sont présentés avec ceux du troisième chapitre dans un article soumis [96].

## 0.2 Première partie : Lois limites fonctionnelles

Le présent paragraphe est une introduction aux lois limites fonctionnelles à travers un historique. Nous y intégrerons l'énoncé de nos contributions. Les lois limites fonctionnelles générées par des processus aléatoires tels que le processus de Wiener et le processus empirique ont suscité un intérêt continu ces dernières décennies (voir, e.g., Strassen [107], Finkelstein [64], Deheuvels [22], Deheuvels et Einmahl [33], Deheuvels et Mason [35, 37], Deheuvels et Lifshits [34], Mason [87]). De tels résultats donnent une description du comportement asymptotique de ces processus. Ils représentent un sujet complexe et sont finement extraits d'arguments topologiques, de la théorie des grandes déviations ainsi que d'autres techniques probabilistes. Nous allons présenter quatres exemples introductifs. Considérons $\{W(t) : t \geq 0\}$ un processus de Wiener standard, vérifiant alors $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = s \wedge t$ pour $s, t \geq 0$. La célèbre loi du logarithme itéré qui suit, datant de 1948, est dûe à Lévy (voir le Theorem 51.I. p.242 dans [80]).

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{|W(T)|}{\sqrt{2T \operatorname{loglog} T}} = 1 \text{ presque sûrement [p.s.].}$$

En 1964, Strassen [107] donne une description plus complète du comportement de $W(xT)$, $0 \leq x \leq 1, T \to \infty$. Nous désignons par $(AC[0,1], \mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions absolûment continues sur $[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup $||\cdot||$ (voir la définition (1.2.1) au paragraphe 1.2 du Chapitre 1). On note $\dot{f}(\cdot)$ la dérivée de Lebesgue de $f \in AC[0,1]$. Introduisons

$$\mathbb{S} := \left\{ f \in \mathcal{AC}[0,1], f(0) = 0, \left\{ \int_0^1 \dot{f}(u)^2 du \right\}^{1/2} \leq 1 \right\},$$

l'ensemble dit de Strassen qui coïncide avec la boule unité de l'espace de Hilbert à noyau auto-reproduisant associé au processus de Wiener sur $[0,1]$. Notons de plus, que l'ensemble $\mathbb{S}$ est compact (voir le paragraphe B.1 de l'Annexe B). On définit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\eta_n(x) := \frac{W(nx)}{\sqrt{2n \operatorname{loglog} n}} \in C[0,1],$$

où $C[0,1]$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup. Strassen [107] a montré une loi limite fonctionnelle qui exprime le fait que la suite $\{\eta_n(\cdot)\}_{n\geq 3}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}[0,1]$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites coïncide avec $\mathbb{S}$ (voir le paragraphe B.2 de l'Annexe B).

**Remarque 0.1.** Cette notion de convergence d'un ensemble de suites de fonctions aléatoires vers un ensemble de fonctions déterministes (voir le paragraphe B.2 de l'Annexe B) s'exprime également grâce à la distance de Hausdorff que l'on définira et utilisera par la suite (voir ci-après et la définition (1.2.2) au paragraphe 1.2).

**Remarque 0.2.** La loi du logarithme itéré pour le processus de Wiener, due à Lévy [80], est une conséquence du théorème de Strassen [107]. On considère $\Theta : B[0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, une fonctionnelle continue sur $B[0,1]$, l'ensemble des fonctions bornées sur $[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, et bornée sur $\mathbb{S}$. Il suffit alors, d'appliquer le théorème de Strassen et le fait que l'on a presque sûrement (voir le Lemme 1.16 au paragraphe 1.6),

$$\limsup_{n\to\infty} \left( \sup_{0\leq x\leq 1} \Theta(\eta_n(x)) \right) = \sup_{g\in\mathbb{S}} \Theta(g).$$

En 1971, Finkelstein [64] a démontré le même type de résultat pour le processus empirique uniforme. Nous désignons par $\{\alpha_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus empirique uniforme basé sur les $n \geq 1$ premières observations de la suite $\{U_n : n \geq 1\}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $(0,1)$ (voir les définitions (1.3.7), (1.3.8) au paragraphe 1.3). Plus précisément, nous notons, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{U}_n(t) := \frac{1}{n} \#\{U_i \leq t : 1 \leq i \leq n\},$$

où $\#E$ désigne la cardinalité de l'ensemble $E$. Et nous posons

$$\alpha_n(t) := \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{U}_n(t) - t) & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0,1]. \end{cases}$$

On définit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\upsilon_n(x) := \frac{\alpha_n(x)}{\sqrt{2n \operatorname{loglog} n}} \in F[0,1],$$

où $F[0,1]$ est l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup. On considère l'ensemble

$$\mathbb{F} := \{f \in \mathbb{S} : f(1) = 1\},$$

appelé ensemble de Finkelstein. Finkelstein [64] a montré que la suite de fonctions $\{\upsilon_n(\cdot)\}_{n\geq 3}$ est relativement compacte dans $F[0,1]$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites est égal à $\mathbb{F}$ . Plus tard, en 1988, Mason [87] (voir aussi Deheuvels et Mason [35], [36], Eimahl et Mason [57] et Eimahl [55]) a étudié le comportement limite des queues du processus empirique uniforme local. Soit $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes positives vérifiant, lorsque $n \to \infty$

$(Ha)$ $\qquad 0 < h_n < 1, \quad h_n \downarrow 0; \quad nh_n \uparrow \infty; \quad nh_n / \operatorname{loglog} n \to \infty.$

On définit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\nu_n(x) := \frac{\alpha_n(h_n x)}{\sqrt{2h_n \operatorname{loglog} n}} \in B[0,1].$$

Mason [87] a montré que sous la condition $(Ha)$, la suite de fonctions $\{\nu_n(\cdot)\}_{n\geq 3}$ est relativement compacte dans $B(0,1)$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites est égal à $\mathbb{S}$. Einmahl et Mason [56] ont établi la version de ce résultat pour le processus empirique de quantile uniforme (voir aussi Kiefer [78], Deheuvels et Mason [35]). Nous désignons par $\{\beta_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus de quantile uniforme basé sur les $n \geq 1$ premières observations d'une suite $\{U_n : n \geq 1\}$ d'observations indépendantes de même loi uniforme sur $(0,1)$ (voir les définitions (2.1.1), (2.1.3) au paragraphe 2.1). Nous notons

$$\mathbb{V}_n(t) := \inf\{u \geq 0 : \mathbb{U}_n(u) \geq t\}, \text{ pour } 0 \leq t \leq 1,$$

$\mathbb{V}_n(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\mathbb{V}_n(t) = 1$ pour $t > 1$, la fonction emprique de quantile correspondant à $\mathbb{U}_n(\cdot)$. Et nous posons

$$\beta_n(t) := \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{V}_n(t) - t) & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Partant de cet apercu de loi limites fonctionnelles pour divers processus, nous allons concentrer notre attention sur deux ensembles fonctionnels particuliers, en vue d'applications statistiques. Pour tout choix de $a \geq 0$ et $t \in [0,1]$, nous posons, pour tout $s \in [0,1]$,

$$\xi_n(a,t;s) := \alpha_n(t+sa) - \alpha_n(t),$$

et

$$\zeta_n(a,t;s) := \beta_n(t+sa) - \beta_n(t).$$

Deheuvels et Mason [37], Deheuvels [22], Deheuvels et Einmahl [33] ont établi des lois limites fonctionnelles pour des ensembles d'incréments du type ci-dessus, à partir desquelles ils déduisent des lois limites pour des estimateurs fonctionnels de la densité. Par exemple, en 1992, Deheuvels et Mason [37] se sont intéressés au comportement limite des familles de suites de fonctions suivantes pour $h > 0$ (voir les définitions (1.3.10) au paragraphe 1.3 et (2.1.5) au paragraphe 2.1),

$$\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h) \quad := \quad \left\{ \frac{\xi_n(h,t;\cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} : t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I} \right\},$$

et

$$\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h) \quad := \quad \left\{ \frac{\zeta_n(h,t;\cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} : t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I} \right\},$$

où $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0,1]$ est un intervalle tel que $u < v$ et $\log_+ a = \log(a \vee e)$ pour $a \in \mathbb{R}$. Notons que le logarithme n'est plus itéré. Soit $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes positives qui vérifient la condition $(H.a)$ ainsi que la condition $\log(1/h_n)/\operatorname{loglog} n \to \infty$, lorsque $n \to \infty$ (voir, e.g., Deheuvels et Mason [37], Csőrgő et Révész [16], et Stute [108]). Notons que d'autres conditions peuvent être imposées à $\{h_n : n \geq 1\}$ (voir p.1302 dans Deheuvels et Einmahl [33] et le paragraphe 1.5). Comme mentionné dans la Remarque 0.1, la convergence d'un ensemble de suites de fonctions vers un autre ensemble de fonctions s'exprime commodément avec la distance de Hausdorff que l'on note $\Delta$ (voir la définition (1.2.2) au paragraphe 1.2). Ici, lorque $n \to \infty$, on a presque sûrement (voir le Theorem 3.1 dans [37]),

$$\Delta\left(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}\right) \to 0,$$

et

$$\Delta\left(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}\right) \to 0. \tag{0.2.1}$$

C'est dans l'esprit de ce résultat et avec la même base de techniques de preuve, que nous avons établi de nouvelles lois limites fonctionnelles locales.

Nous présentons, ci-dessous, trois de nos résultats principaux, sous la forme d'un unique énoncé constitué de deux points. Soit $\mathcal{A}_{n;\mathcal{I}}(h)$, $n \geq 1, h > 0$ un ensemble de suites de fonctions aléatoires et $\mathbb{A}$ un ensemble de fonctions déterministes, que nous expliciterons par la suite.

– Supposons que $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifie les conditions suivantes lorsque $n \to \infty$,

$$h_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty.$$

Alors, pour tout $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\Delta\left(\mathcal{A}_{n;\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{A}\ \right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

– Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que

$$b_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty.$$

Alors, pour $\mathcal{H}_n := [a_n, b_n]$ et $\mathcal{I}$ défini ci-dessus, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{A}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{A}\ \right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Les trois cas ci-dessous sont dignes d'intérêt :

1. $$\mathcal{A}_{n;\mathcal{I}}(h) = \mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h) \text{ et } \mathbb{A} = \mathbb{S};$$

2. $$\mathcal{A}_{n;\mathcal{I}}(h) = \mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h) \text{ et } \mathbb{A} = \mathbb{S};$$

   (où les ensembles $\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)$, $\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h)$ et $\mathbb{S}$ ont été définis précedemment) ;

3. $$\mathcal{A}_{n;\mathcal{I}}(h) = \mathcal{F}_{n,I}^{KM}(h, \psi_n) \text{ et } \mathbb{A} = \mathbb{S}_\Lambda;$$

   (où $\mathcal{F}_{n,I}^{KM}(h, \psi_n)$ désigne un ensemble de suites de fonctions construit à partir des incréments du processus empirique de Kaplan-Meier (voir la définition (3.1.5) au paragraphe 3.1 du Chapitre 3) et $I$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ sur lequel la densité des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ censurées à droite, est continue. L'ensemble $\mathbb{S}_\Lambda$ est défini par les points (3.1.6) et (3.1.9) du paragraphe 3.1.).

Les lois limites fonctionnelles locales présentées ici sont motivées par l'estimation non paramétrique de la densité abordée dans la deuxième partie de la thèse. En effet, le caractère d'uniformité de ces lois, par rapport à la taille des incréments, garantit une uniformité relativement au paramètre de lissage des lois limites établies pour des estimateurs de la densité. Dans le paragraphe suivant, nous insisterons justement sur le fait qu'une difficulté majeure dans l'estimation de la densité par la méthode des noyaux et des plus proches voisins réside dans le choix de ce paramètre.

## 0.3 Deuxième partie : Estimation non paramétrique de la densité

Nous considérons un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ de répliques indépendantes et identiquement distribuées d'une variable aléatoire réelle $X$, de densité $f(\cdot)$. L'histogramme est l'exemple basique d'un estimateur non paramétrique de la densité. Il divise le nombre d'observations qui tombent dans un intervalle donné par la longueur de l'intervalle. Les histogrammes sont utiles pour observer une forme très générale de la densité à estimer et conviennent pour des analyses relativement grossières. Ils présentent l'inconvénient de la discontinuité ainsi que le fait que les points au bord et au milieu d'un intervalle reçoivent le même traitement. Pour remédier à ce problème, Rosenblatt [101] proposa, en 1956, de centrer chaque cellule de l'histogramme au point où l'on estime. C'est ainsi qu'a été introduite la première forme rudimentaire de l'estimateur à noyau, qui est défini, pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, par (voir la définition (4.1.1) au paragraphe 4.1 du Chapitre 4)

$$f_{n,h}(x) \quad := \quad \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right),$$

où $K(\cdot)$, la fonction noyau, est la densité uniforme sur $[-1/2, 1/2]$, et $h > 0$ est la fenêtre des observations (ou paramètre de lissage). De manière plus générale, les estimateurs à noyau de la densité, dits de Akaike-Parzen-Rosenblatt (voir [1],[97],[101]), sont définis comme ci-dessus, mais cette fois-ci avec un choix de $K(\cdot)$ plus général. Ces estimateurs à noyau de la densité sont restés populaires au cours du temps de part leur propriété de consistance. Il est connu que lorsque la fenêtre $h > 0$ converge vers 0 et $nh$ converge vers l'infini, ces estimateurs sont convergents au sens $L_1$, que se soit en probabilité, en moyenne ou presque sûrement. Il est naturel de s'intéresser à d'autres types de convergence comme la convergence ponctuelle, la convergence uniforme, ou la convergence $L_2$, parmi d'autres. De ce fait, présentons maintenant un exemple qui est une application de la loi limite fonctionnelle (0.2.1) de Deheuvels et Mason [37], énoncée dans le paragraphe précédent. On considère $f_{n,h}(\cdot)$ l'estimateur à noyau de la densité $f(\cdot)$ supposée continue sur un intervalle d'intérieur non vide $J \subseteq \mathbb{R}$, et fixons $I = [a, b] \subset J$. Sous certaines conditions de régularité sur le noyau (voir les conditions $(K.1)$–$(K.2)$–$(K.3)$ au paragraphe 4.1 du Chapitre 4) et pour la suite de fenêtres $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifiant les conditions requises pour vérifier (0.2.1), on a presque sûrement (voir, e.g., Silverman [106], Stute [109], Deheuvels [22], Deheuvels et Mason [37]),

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{nh_n}{2\log_+(1/h_n)} \right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \pm \{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}f_{n,h_n}(x)\} = \sigma(f, K),$$

où $\sigma(f, K) = \sup_{x\in I} \left\{f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}$. Ci-dessus, et dans toute la suite du mémoire de thèse, par souci de concision, pour $g_n(\cdot)$ une suite de fonctions définie sur $I$, nous écrivons $\lim_{n\to\infty} (\sup_{t\in I} \pm g_n(t)) = c$, pour exprimer que $\lim_{n\to\infty} (\sup_{t\in I} g_n(t)) = c$ et $\lim_{n\to\infty} (\sup_{t\in I}(-g_n(t))) = c$. Remarquons que la notation $\lim_{n\to\infty} (\sup_{t\in I} \pm g_n(t)) = c$ est équivalente à $\lim_{n\to\infty} (\inf_{t\in I} \pm g_n(t)) = -c$.

En pratique, comme mentionné plus haut une difficulté majeure de l'estimation de la densité par la méthode des noyaux réside dans le choix de la fenêtre $h > 0$. Il est important de choisir $h$ de sorte qu'il y ait un bon compromis entre l'ordre du biais et celui de la variance. Plus $h$ est petit, plus le terme aléatoire (la variance dont l'ordre de grandeur est évalué) est grand et plus le terme déterministe (correspondant au biais de l'estimateur) est petit. Pour un $h$ trop grand, l'effet inverse se produit. Une des premières solutions proposée pour résoudre ce problème de choix de $h$ a été de choisir une fenêtre $h$ qui minimise l'*erreur moyenne quadratique* [MSE] (ou l'*erreur moyenne quadratique intégrée* [MISE] ou encore l'*erreur moyenne quadratique intégrée asymptotique* [AMISE]) (voir Wand et Jones [119]). Le choix (asymptotiquement) optimal de $h$ dépend de la densité inconnue (voir, e.g., [119]). Pour remédier à ce problème, c'est dans les années 90, que sont introduites les fenêtres *adaptatives*, qui dépendent des observations dont on dispose et/ou de leur emplacement. Il existe diverses méthodes adaptatives de choix de la fenêtre $h$ pour $f_{n,h}(x)$ (voir les sections 2.3 et 2.4 dans Deheuvels et Mason [39], Berlinet et Devroye [5]). Citons par exemple les méthodes de *plug-in* et de *cross-validation* (voir, e.g., Sheater et Jones [103], Hall et Marron [70], Hall et al. [71], et Jones et al. [75]) qui ne dépendent pas de la localisation de $x \in \mathbb{R}$, et la méthode des plus proches voisins (voir, e.g., Fix et Hodges [65], Loftsgaarden et Quensenberry [82] et le Chapitre 5) qui elle dépend de la localisation de $x \in I$. C'est en 2005, faisant suite à des travaux précurseurs de Deheuvels [21], que Eimahl et Mason [62] ont proposé une justification pratique de ces solutions qui est la convergence "uniforme en la fenêtre" $h$ des estimateurs à noyau de la densité. Grâce à la théorie des processus empiriques indexés par des fonctions, ils ont montré que, pour $r > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\frac{r\log n}{n}\le h\le 1} \left\{\frac{nh}{\log(1/h)\vee \operatorname{loglog} n}\right\}^{1/2} \left(\sup_{x\in I} |f_{n,h}(x) - \mathbb{E}f_{n,h}(x)|\right) < \infty.$$

L'intérêt de ce type de résultat est d'assurer la convergence des estimateurs sous des conditions générales, même lorsque $h$ est aléatoire. Ils ont fait l'usage de l'indexation du processus empirique par des fonctions combiné avec les propriétés des classes de Vapnik-Červonenkis (voir, e.g., van der Vaart et Wellner [113]) et les inégalités exponentielles de type Talagrand (voir Talagrand [110]). Suite au travaux de Einmahl et Mason [62], ces techniques ont été utilisées par nombre d'auteurs parmi lesquels nous citons Deheuvels et Mason [39], Dony [48], Dony et Einmahl [49, 50], Dony et al. [51], Dony et Mason [52], Mason [88, 89], Mason et Swanepoel [91], Viallon [118], Varron [114, 115], Varron et Van Keilegom [116].

C'est dans cet esprit de justification des critères de choix de la fenêtre, que nous établissons de nouvelles lois limites pour des estimateurs fonctionnels de la densité. Nos techniques de preuve sont différentes, elles se basent sur des lois limites fonctionnelles qui nous permettent d'obtenir une uniformité relative à la fenêtre (au sens de la définition de la convergence uniforme), ainsi que la valeur explicite de la limite asymptotique de l'erreur aléatoire des estimateurs considérés.

Nous présentons, ci-dessous, quatre de nos résultats principaux, sous la forme d'un unique énoncé. Soit $A_{n,h}(\cdot)$, $h > 0, n \ge 1$ une suite de fonctions aléatoires et $\sigma > 0$ une constante, que l'on explicitera à la suite de cet énoncé. Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \le b_n \le 1$ soient telles que,

$$b_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty.$$

Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \left| \left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \pm\{A_{n,h}(x)\} - \sigma \right| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Les quatre cas ci-dessous sont dignes d'intérêt :

1. $f_{n,h}(\cdot)$ désigne un estimateur à noyau de la densité $f(\cdot)$ (voir la définition (4.1.1) au Chapitre 4) :

$$A_{n,h}(x) = f_{n,h}(x) - \mathbb{E}f_{n,h}(x),$$
$$\sigma = \sigma(f,K) = \left\{ \sup_{x\in I} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \right\}^{1/2};$$

2. $f_{n,h}(\cdot)$ désigne un estimateur de la densité $f(\cdot)$ par la méthode des plus proches voisins (voir la définition (5.1.4) au Chapitre 5) :

$$A_{n,h}(x) = \frac{f_{n,h}(x) - M_h(x)}{f(x)} \text{ et } \sigma = 1;$$

(où $M_h(\cdot)$ est défini au point (5.1.3)) ;

3. $f_{n,h}(\cdot)$ désigne un estimateur à noyau de la densité des temps de survie $f(\cdot)$ (voir la définition (6.1.1) au Chapitre 6) :

$$A_{n,h}(x) = \{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\} \times \left\{\psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2},$$
$$\sigma = \sigma(\psi,K) =: \left\{ \sup_{x\in I} \psi(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \right\}^{1/2};$$

(où $G(\cdot)$ la fonction de répartition des temps de censure, $\psi(\cdot)$ une fonction continue et $\psi_n(\cdot)$ son estimateur, sont définis dans l'introduction 3.1 du Chapitre 3) ;

4. $\lambda_{n,h}(\cdot)$ désigne un estimateur à noyau du taux de panne $\lambda(\cdot)$ (voir les définition (6.1.19) et (6.1.17) au Chapitre 6) :

$$A_{n,h}(x) = \left\{\lambda_{n,h}(x) - \frac{\mathbb{E}\left(\lambda_{n,h}(x)\right)}{1-F(x)}\right\} \times \left\{\psi_n(x) \times \frac{1-H(x)}{\lambda(x)}\right\}^{1/2},$$
$$\sigma = \sigma(\psi,K) =: \left\{ \sup_{x\in I} \psi(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \right\}^{1/2};$$

(où $F(\cdot)$ et $H(\cdot)$, les fonctions de répartition respectives des temps de survie et des variables observés, sont définies dans l'introduction 3.1 du Chapitre 3).

Soulignons le fait que, dans les énoncés ci-dessus, nous n'avons pas présenté ces lois limites de manière uniforme relativement au noyau $K$, bien que cette uniformité soit valable dans les quatre situations. Nous raisonnons donc, pour simplifier, pour $K$ fixe. Notons que cet apport supplémentaire permettant à $K$ de varier dans un ensemble de noyaux non réduit à un seul élément est clairement présenté dans le Théorème 6.2 et le Théorème 6.8 du Chapitre 6.

# Première partie

# Lois Limites Fonctionnelles

# Chapitre 1

# Lois limites fonctionnelles pour le processus empirique

L'objet de ce chapitre est l'étude du comportement limite des incréments du processus empirique uniforme. Nous exposons ici, les grandes lignes des sujets que nous aborderons. Dans un premier temps, nous introduisons des suites de fonctions aléatoires, ainsi que les notations dont nous ferons l'usage tout au long de nos travaux. Nous établissons ensuite deux inégalités (voir la Proposition 1.2 et la Proposition 1.4) qui constituent la base de la construction du résultat principal de ce chapitre : une loi limite fonctionnelle locale pour les incréments du processus empirique uniforme (voir le Théorème 1.7) qui a la particularité d'être uniforme relativement à la taille des incréments. Nous présentons enfin deux lemmes analytiques (voir le Lemme 1.16 et le Lemme 6) qui faciliteront l'utilisation des lois limites fonctionnelles locales établies en vue du développement d'applications statistiques. Mentionnons que la majeure partie du présent chapitre a donné lieu à un article écrit en collaboration avec mon directeur de thèse Paul Deheuvels (voir le Theorem 1 (i), le Lemma 1 et le Lemma 2 dans Deheuvels et Ouadah [40]) et dont l'original est présenté dans l'Annexe C.

## 1.1 Prolongements de fonctions

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes. Pour tout $0 < M \leq \infty$, nous notons $\mathbb{S}_{[0,M]}$ l'ensemble de toutes les fonctions $f(\cdot)$, définies sur $[0,M]$ et telles qu'il existe une fonction $\psi(\cdot)$, définie sur $[0,M]$, et vérifiant

$$\begin{aligned} &(i) \quad f(t) = \int_0^t \psi(u)du \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq M; \\ &(ii) \quad |f|_{M,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^M \psi^2(u)du \right\}^{1/2} \leq 1. \end{aligned}$$

**Lemme 1.1.** *Pour tout $M > 0$, une fonction $f$ appartient à $\mathbb{S}_{[0,M]}$, si et seulement si elle est la restriction à $[0,M]$ d'une fonction appartenant à $\mathbb{S}_{[0,\infty]}$*

**Preuve.** Considérons une fonction $f \in \mathbb{S}_{[0,M]}$. Par définition, elle est définie sur $[0,M]$ et possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&(i) \quad f(t) = \int_0^t \psi(u)du \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le M;\\
&(ii) \quad |f|_{M,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^M \psi^2(u)du \right\}^{1/2} \le 1.
\end{aligned}$$

Nous étendons à $[0,\infty)$ le domaine de définition de cette fonction en posant

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour} \quad 0 \le t \le M,\\ f(M) & \text{pour} \quad t \ge M. \end{cases}$$

Nous posons, de même,

$$\widetilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(u) & \text{pour} \quad 0 \le u \le M,\\ 0 & \text{pour} \quad u \ge M. \end{cases}$$

On constate alors que $\widetilde{f}$ et $\widetilde{\psi}$ vérifient les propriétés

$$\begin{aligned}
&(iii) \quad \widetilde{f}(t) = \int_0^t \widetilde{\psi}(u)du \quad \text{pour} \quad t \ge 0;\\
&(iv) \quad |\widetilde{f}|_{\infty,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^\infty \widetilde{\psi}^2(u)du \right\}^{1/2} \le 1.
\end{aligned}$$

Réciproquement, considérons une fonction $g \in \mathbb{S}_{[0,\infty]}$. Par définition, une telle fonction est définie sur $[0,\infty)$, et telle que

$$\begin{aligned}
&(iii) \quad g(t) = \int_0^t \phi(u)du \quad \text{pour} \quad t \ge 0;\\
&(iv) \quad |g|_{\infty,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^\infty \phi^2(u)du \right\}^{1/2} \le 1,
\end{aligned}$$

alors, la restriction de $g$ à $[0,M]$, soit

$$\widehat{g}(t) = g(t) \quad \text{pour} \quad 0 \le g \le M,$$

est telle que

$$\begin{aligned}
&(i) \quad g(t) = \int_0^t \phi(u)du \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le M;\\
&(ii) \quad |f|_{M,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^M \phi^2(u)du \right\}^{1/2} \le \left\{ \int_0^\infty \phi^2(u)du \right\}^{1/2} \le 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\widehat{g} \in \mathbb{S}_{[0,M]}$. Ceci complète la démonstration du Lemme 1.1.□

Dans ce qui suit, pour tout choix de $M > 0$, nous supposerons, sans perte de généralité, grâce au Lemme 1.1, qu'une fonction $f \in \mathbb{S}_{[0,M]}$ est la restriction à $[0,M]$ d'une fonction de $\mathbb{S}_{[0,\infty]}$.

## 1.2 Notations

Nous désignons par $(B[0,M],\mathcal{U})$ l'ensemble $B[0,M]$ des fonctions bornées sur $[0,M]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup $||\cdot||$, définie pour toute fonction $f \in B[0,M]$ par

$$\|f\| = \sup_{0\le t\le M} |f(t)|. \tag{1.2.1}$$

Nous désignons, de même, par $(AC[0,M],\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions absolûment continues sur $[0,M]$ muni de $\mathcal{U}$, c'est à dire, de la forme

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \psi(s)ds \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le M,$$

où $\psi(\cdot)$ est intégrable sur $[0,M]$. Cette dernière fonction est la dérivée de Lebesgue de $f(\cdot)$, et est définie de manière unique sur $[0,M]$, à une partie de mesure nulle de $[0,M]$ près. Nous la noterons, indifféremment,

$$\dot f(t) = \tfrac{d}{dt} f(t) = \psi(t) \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le M.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $f \in B[0,M]$, nous posons

$$\mathcal{N}_\epsilon(f) = \{g \in B[0,M] : \|f-g\| < \epsilon\},$$

et, pour toute partie $A \subseteq B[0,M]$, avec la convention $\bigcup_\emptyset(\cdot) = \emptyset$, posons

$$A^\epsilon = \bigcup_{f\in A} \mathcal{N}_\epsilon(f) = \begin{cases} \{g \in B[0,M] : \exists f \in A,\ \|f-g\| < \epsilon\} & \text{lorsque} \quad A \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{lorsque} \quad A = \emptyset. \end{cases}$$

On définit la distance de Hausdorff entre les ensembles $A, B \subseteq B[0,M]$, par

$$\Delta(A,B) = \begin{cases} \inf\left\{\theta > 0 : A \subseteq B^\theta \text{ et } B \subseteq A^\theta\right\} & \text{lorsqu'un tel } \theta \text{ existe,} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Nous étendons la définition de $|f|_{M,\mathbb{H}}$ à $B[0,M]$ comme suit. Pour toute fonction $f \in B[0,M]$, nous posons

$$|f|_{M,\mathbb{H}} = \begin{cases} \left\{\int_0^M \dot f(u)^2 du\right\}^{1/2} & \text{si } f \in \mathcal{AC}[0,M] \text{ et } f(0) = 0, \\ \infty & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Nous désignons par

$$\mathbb{S} := \mathbb{S}_{[0,1]} = \{f \in B[0,1] : |f|_{1,\mathbb{H}} \le 1\} \tag{1.2.4}$$

la boule unité du noyau de l'espace de Hilbert auto-reproduisant associé au processus de Wiener sur $[0,1]$. Strassen a montré (voir Strassen [107]) que $\mathbb{S}$, l'ensemble dit de Strassen, est l'ensemble limite dans la loi du logarithme itéré fonctionnelle pour le processus de Wiener. Plus généralement, pour tout $\lambda > 0$, on introduit l'ensemble

$$\mathbb{S}_\lambda := \{f \in B[0,1] : |f|_{1,\mathbb{H}} \le \lambda\} = \left\{\lambda^{1/2} f : f \in \mathbb{S}\right\}. \tag{1.2.5}$$

Enfin, nous définissons la fonctionnelle $J(\cdot)$ sur les parties de $B[0,M]$ par

$$J(A) = \begin{cases} \inf_{f\in A} |f|^2_{M,\mathbb{H}} & \text{si} \quad A \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si} \quad A = \emptyset. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

## 1.3 Le processus empirique uniforme

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations de base de Deheuvels et Mason [37]. On désigne par $\{\alpha_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus empirique uniforme basé sur les $n \geq 1$ premières observations de la suite $\{U_n : n \geq 1\}$ d'observations indépendantes de même loi uniforme sur $(0, 1)$. Plus précisément, on note, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{U}_n(t) := n^{-1}\#\{U_i \leq t : 1 \leq t \leq n\}, \tag{1.3.7}$$

où $\#E$ désigne la cardinalité de l'ensemble $E$, et on pose

$$\alpha_n(t) := \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{U}_n(t) - t) & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0,1]. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

Ensuite, pour tout choix de $a \geq 0$ et $t \in [0, 1]$, nous posons, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\xi_n(a, t; s) := \alpha_n(t + sa) - \alpha_n(t). \tag{1.3.9}$$

Ces fonctions d'incréments (1.3.9) décrivent les oscillations du processus empirique uniforme. L'étude de leur comportement limite permet de décrire celui de plusieurs statistiques utiles. Citons par exemple les travaux de Csörgő et Révész [16], Shorack et Wellner [105], Csörgő et Horvath [17], et les applications données dans la présente thèse, dans sa Partie II intitulée "Estimation non paramétrique de la densité". Posons $\log_+ u = \log(u \vee e)$ pour $u \in \mathbb{R}$. Soient $0 < a_n \leq b_n \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ deux suites de constantes positives, et posons $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$. Pour $h \in \mathcal{H}_n$ (par exemple, $\mathcal{H}_n = \{h_n\}$, avec $h_n = a_n = b_n$), on s'intéresse au comportement limite, lorsque $n \to \infty$, de la famille de suites de fonctions

$$\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h) \quad := \quad \left\{ \frac{\xi_n(h, t; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} : t \in [0, 1 - h] \cap \mathcal{I} \right\}, \tag{1.3.10}$$

où $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ est un intervalle fixé, tel que $u < v$.

## 1.4 Inégalités de base

Les inégalités présentées dans les deux propositions qui suivent, sont des conséquences de résultats connus (voir le Theorem 3.1 de Deheuvels et Mason [37], le Theorem 1.3 et la preuve du Theorem 2.1 dans Deheuvels [22], le Theorem 1.2 et la Remark 1.3 de Deheuvels et Einmahl [24]). Cependant, une preuve détaillée de ces inégalités n'est pas présente dans la littérature. Nous établissons deux inégalités (voir, les propositions 1.2 et 1.4 dans ce paragraphe, et les propositions 2 et 3 dans Deheuvels et Ouadah [40]) sous des conditions minimales. Ces inégalités permettent la construction de lois limites fonctionnelles locales (voir le paragraphe 1.5).

**Proposition 1.2.** *Il existe une constante universelle $C_4 > 0$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, il existe des constantes $0 < a(\epsilon) \leq 1/e$, $0 < c(\epsilon) < \infty$ et $n(\epsilon) < \infty$, telles que, pour tout choix de $n \geq n(\epsilon)$ et $a > 0$ vérifiant*

$$\frac{na}{\log n} \geq c(\epsilon) \quad \textit{et} \quad a \leq a(\epsilon), \tag{1.4.11}$$

*on ait*

$$\mathbb{P}\left( \frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right) \leq C_4 a^{1+\epsilon}. \tag{1.4.12}$$

La démonstration de la Proposition 1.2 est reportée à la fin de ce paragraphe. Nous allons faire usage des propriétés suivantes (voir [37]). On désigne par $\{W(t) : t \geq 0\}$ un processus de Wiener standard (avec $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = s \wedge t$ pour $s, t \geq 0$), et par $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ un processus de Poisson standard continu à droite (avec $\mathbb{E}(\Pi(t)) = t$, pour $t \geq 0$). Pour tout $a \geq 0$, $t \geq 0$, $n \geq 1$ et $s \geq 0$, on pose

$$L_n(a, t; s) \quad = \quad n^{-1/2} \left(\Pi(nt + nsa) - \Pi(nt) - nsa\right). \tag{1.4.13}$$

Le Fait 1 ci-dessous est établi dans le Lemma 3.5, p.1265 de Deheuvels et Mason [37]. Le Fait 2 qui suit est une application des principes d'invariance forts de Komlós, Major et Tusnády [79] (voir (3.13), p. 1267 dans [37]). Le Fait 3 donné plus loin est une inégalité de grandes déviations, dûe à Schilder [102] (voir le Fact 4, p.922 de Deheuvels [25]). Le Fait 4 qui conclut cette liste de résultats admis est établi dans le Lemma 2.5 de Deheuvels [24].

**Fait 1.** *Pour tout choix de $n \geq 5$, et de $a, t$ vérifiant $0 \leq t \leq t + a \leq 1$ et $0 \leq a \leq 1/2$, on a, pour toute partie mesurable $A$ de $B[0, 1]$,*

$$\mathbb{P}\Big(\xi_n(a, t; \cdot) \in A\Big) \leq 2\mathbb{P}\Big(L_n(a, t; \cdot) \in A\Big). \tag{1.4.14}$$

**Fait 2.** *Il est possible de construire $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ et $\{W(t) : t \geq 0\}$ sur le même espace de probabilité, de telle sorte que, pour des constantes universelles $C_1$, $C_2$ et $C_3$, l'inégalité*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq x \leq T} |\Pi(x) - x - W(x)| \geq C_1 \log T + z\right) \leq C_2 \exp(-C_3 z), \tag{1.4.15}$$

*ait lieu pour tout $T > 0$ et $z \in \mathbb{R}$.*

**Fait 3.** *Pour tout $\lambda > 0$, on pose $W_{\{\lambda\}}(s) = (2\lambda)^{-1/2} W(s)$ pour $s \in [0, 1]$. Alors, pour toute partie fermée $F$ (resp. ouverte $G$) de $(B[0, 1], \mathcal{U})$, on a*

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \log \mathbb{P}\left(W_{\{\lambda\}}(\cdot\,) \in F\right) \leq -J(F), \tag{1.4.16}$$

$$\liminf_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \log \mathbb{P}\left(W_{\{\lambda\}}(\cdot\,) \in G\right) \geq -J(G), \tag{1.4.17}$$

*où $J(\cdot\,)$ est définie telle que dans* (1.2.6).

**Fait 4.** *Pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$J\Big(B[0, 1] - \mathbb{S}^{\epsilon}\Big) \geq (1 + \epsilon)^2. \tag{1.4.18}$$

**Preuve de la Proposition 1.2.** Soient $n \geq 5$, $0 < a \leq 1/e$ et $0 \leq t \leq t + a \leq 1$, choisis ainsi, de sorte que $\log_+(1/a) = \log(1/a)$ et les conditions du Fait 1 soient satisfaites. Fixons $0 < \epsilon \leq 1$ et posons $\epsilon_1 = \sqrt{1 + 2\epsilon} - 1$ et $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1^2$. On observe que $2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 = 2\epsilon$, tel que $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ et $0 < \epsilon_2 = \epsilon - \epsilon_1 < \epsilon$. Nous faisons usage de la définition (1.4.13), du Fait 1 et du fait que les accroissements du processus de Poisson sont stationnaires, pour écrire l'inégalité

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon}\right) \quad &\leq \quad 2\mathbb{P}\left(\frac{L_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a \log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon}\right) \\
&= \quad 2\mathbb{P}\left(\frac{\Pi(na\cdot) - na\cdot}{\sqrt{2na \log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

On note que l'on a la relation $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$. D'après l'inégalité ci-dessus et le Fait 2 on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon}\right) &\leq 2\mathbb{P}\left(\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1}\right) \\
&\quad +2\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{W(nas)-\{\Pi(nas)-nas\}}{\sqrt{2na\log(1/a)}}\right| \geq \epsilon_2\right) \\
&=: 2P_{1,n}(\epsilon_1) + 2P_{2,n}(\epsilon_2). \qquad (1.4.19)
\end{aligned}$$

**Remarque 1.3.** Justifions l'inégalité (1.4.19), ci dessus. Soient $A, B, C$ les ensembles suivants.

$$A = \{f : f \in \mathbb{S}^{\epsilon}\}, \quad B = \{g : g \in \mathbb{S}^{\epsilon_1}\}, \quad C = \{h : \|h\| < \epsilon_2\}.$$

On a $f = f - g + g$ et

$$\{g \in B \text{ et } f - g \in C\} \Rightarrow \{f \in A\}.$$

De ce fait, on a

$$\{f \notin A\} \Rightarrow \{g \notin B \text{ ou } f - g \notin C\}.$$

On obtient donc, le résultat voulu

$$\mathbb{P}[f \notin A] \leq \mathbb{P}[g \notin B] + \mathbb{P}[f - g \notin C].$$

Evaluons, tout d'abord, $P_{1,n}(\epsilon_1)$. Rappelons que nous avons l'égalité en loi suivante pour le processus de Wiener,

$$\{n^{-1/2}W(nt) : t \geq 0\} = \{W(t) : t \geq 0\}.$$

Alors, on observe que

$$\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log(1/a)}} = \frac{W(\cdot)}{\sqrt{2\log(1/a)}} = W_{\{\log(1/a)\}}(\cdot).$$

De ce fait, on évalue

$$P_{1,n}(\epsilon_1) = 2\mathbb{P}\left(\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1}\right) = 2\mathbb{P}\left(W_{\{\log(1/a)\}}(\cdot) \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1}\right).$$

On pose $F = B[0,1] - \mathbb{S}^{\epsilon_1}$, qui est fermé dans $(B[0,1], \mathcal{U})$. Par application de (1.4.18), on a l'inégalité

$$J(F) = J\Big(B[0,1] - \mathbb{S}^{\epsilon_1}\Big) \geq (1+\epsilon_1)^2.$$

D'après (1.4.16), il existe un $a(\epsilon) \in (0, 1/e]$, tel que, pour tout $0 < a \leq a(\epsilon)$,

$$\begin{aligned}
P_{1,n}(\epsilon_1) = \mathbb{P}\Big(W_{\{\log(1/a)\}}(\cdot) \in F\Big) &\leq \exp\Big(-\Big\{\log(1/a)\Big\}\Big\{(1+\epsilon_1)^2 - \epsilon_2\Big\}\Big) \\
&= a^{1+\epsilon+\epsilon_1} < a^{1+\epsilon}. \qquad (1.4.20)
\end{aligned}$$

Par application de (1.4.15) on constate, par ailleurs, que

$$\begin{aligned}
P_{2,n}(\epsilon_2) &= 2\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{W(nas)-\{\Pi(nas)-nas\}}{\sqrt{2na\log(1/a)}}\right| \geq \epsilon_2\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq x\leq na}|\Pi(x) - x - W(x)| \geq C_1\log(na) + z_n\right) \\
&\leq 2C_2\exp(-C_3 z_n), \qquad (1.4.21)
\end{aligned}$$

où

$$z_n := \epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)} - C_1\log(na). \tag{1.4.22}$$

De cette définition (1.4.22), nous déduisons que

$$\frac{C_3 z_n}{\log(1/a)} = C_3\epsilon_2\sqrt{2}\left\{\frac{na}{\log(1/a)}\right\}^{1/2}\left\{1 - \frac{C_1\log(na)}{\epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)}}\right\}. \tag{1.4.23}$$

On fixe $c > 0$, et on considère les deux cas suivants.

**Cas 1.** Pour $n^{-1/2} \le a \le 1/e$, on a

$$\frac{\log(na)}{\sqrt{na\log(1/a)}} \le \frac{\log(n/e)}{\sqrt{n^{1/2}\log n^{1/2}}} \le \frac{\sqrt{2\log n}}{n^{1/4}}.$$

**Cas 2.** Pour $\frac{c\log n}{n} \le a \le n^{-1/2}$, et tout

$$n \ge n_1(c) := \inf\left\{m \ge 5 : \forall n \ge m,\ \frac{1}{2}\log n \le \log\left(\frac{n}{c\log n}\right) \le \log n\right\},$$

on a

$$\frac{\log(na)}{\sqrt{na\log(1/a)}} \le \frac{\log n^{1/2}}{\sqrt{(c\log n)\log(\frac{n}{c\log n})}} \le \frac{\frac{1}{2}\log n}{\sqrt{\frac{1}{2}c}\ (\log n)} = \frac{1}{\sqrt{2c}}.$$

Maintenant, pour $c > 0$, et $n_1(c)$ définis au cas 2, posons

$$n_2(c,\epsilon_2) = \inf\left\{m \ge n_1(c) : \forall n \ge m,\ \frac{\sqrt{2\log n}}{n^{1/4}} \le \frac{\epsilon_2\sqrt{2}}{2C_1}\right\},$$

et sélectionnons $c > 0$ tel que

$$c = c(\epsilon_2) = \frac{1}{\epsilon_2^2}\max\left\{C_1^2, \frac{8}{C_3^2}\right\}.$$

On déduit des cas 1 et 2 que pour tout $a > 0$ tel que $\frac{c(\epsilon_2)\log n}{n} \le a \le 1/e$, lorsque $n \ge n_3(\epsilon_2) := n_2(c(\epsilon_2), \epsilon_2)$, on a,

$$\frac{C_1\log(na)}{\epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)}} \le \frac{C_1}{\epsilon_2\sqrt{2}}\max\left\{\frac{\sqrt{2\log n}}{n^{1/4}}, \frac{1}{\sqrt{2c(\epsilon_2)}}\right\} \le \frac{1}{2},$$

et

$$\left\{\frac{na}{\log(1/a)}\right\}^{1/2} \ge \left\{\frac{na}{\log(\frac{n}{c(\epsilon_2)\log n})}\right\}^{1/2} \ge \left\{\frac{na}{\log n}\right\}^{1/2} \ge \sqrt{c(\epsilon_2)} \ge \frac{2\sqrt{2}}{C_3\epsilon_2}.$$

On combine les inégalités précédentes avec (1.4.23) et la définition (1.4.22) de $z_n$ pour obtenir que

$$\frac{C_3 z_n}{\log(1/a)} \ge C_3\epsilon_2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{C_3\epsilon_2} \times \frac{1}{2} = 2.$$

Alors, d'après (1.4.21) et (1.4.23), on a

$$n \ge n_3(\epsilon_2) \quad \text{et} \quad \frac{c(\epsilon_2)\log n}{n} \le a \le 1/e \quad \Rightarrow \quad P_{2,n}(\epsilon_2) \le C_2 a^2.$$

Sous les hypothèses $0 < \epsilon \leq 1$ et $0 < a \leq 1/e < 1$, il s'ensuit que

$$P_{2,n}(\epsilon_2) \leq C_2 a^2 \leq C_2 a^{1+\epsilon}. \tag{1.4.24}$$

Ceci combiné avec (1.4.19) et (1.4.20), implique

$$P_n(\epsilon) \leq 2P_{1,n}(\epsilon_1) + 2P_{2,n}(\epsilon_2) \leq 2(C_2+1)a^{1+\epsilon},$$

d'où on obtient (1.4.12), où $C_4 = 2(C_2+1)$ et $n(\epsilon) = n_3(\epsilon_2)$, avec $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+2\epsilon}-1\right\}^2$.□

**Proposition 1.4.** *Pour toute fonction $f \in \mathbb{S}$ telle que $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, et $\epsilon$ tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$, il existe $a'(\epsilon, f) > 0$, $n_3(\frac{1}{2}\epsilon) < \infty$ et $c(\frac{1}{2}\epsilon) > 0$ (les deux derniers dépendant uniquement de $\epsilon$), tels que l'on ait la propriété suivante. Pour tout sous-intervalle $\mathcal{I} = [u, v]$ de $[0, 1]$, tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque*

$$n \geq n_3(\tfrac{1}{2}\epsilon), \quad \frac{c(\frac{1}{2}\epsilon)\log n}{n} \leq a \leq a'(\epsilon, f) \wedge \tfrac{1}{2}|\mathcal{I}| \quad et \quad \mathcal{I} \subseteq [0, 1-a], \tag{1.4.25}$$

*on a*

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{4}\left\{|\mathcal{I}| \wedge \frac{1}{2}\right\} a^{-\epsilon/2}\right). \tag{1.4.26}$$

La preuve de cette Proposition 1.4 est similaire à celle de la Proposition 1.2.

**Preuve.** Sans perte de généralité, on suppose $|\mathcal{I}| < \frac{1}{2}$, sinon, on remplace $\mathcal{I} = [u, v]$ par $[u, u + \frac{1}{2}]$. Soient $n \geq 5$, $0 < a < |\mathcal{I}| \wedge (1/e)$, et $\mathcal{I} \subseteq [0, 1-a]$ choisis, de telle sorte que $\log_+(1/a) = \log(1/a)$ et les hypothèses du Fait 1 soient vérifiées. On choisit $f \in \mathbb{S}$ tel que $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, et $\epsilon$ tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$, ce qui implique que $1 - \epsilon > 1 - \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}} > \frac{1}{2}$. On se réfère aux arguments donnés dans la preuve de (1.4.19), ainsi qu'à la définition (1.4.13) et aux faits (1.4.14) et (1.4.15), pour obtenir les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
Q_n(\epsilon) &:= \mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{L_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \\
&\leq 2\prod_{j=1}^{\lfloor|\mathcal{I}|/a\rfloor}\left\{1 - \mathbb{P}\left(\frac{L_n(a, t+(j-1)a;\cdot)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right)\right\} \\
&\leq 2\exp\left(-\lfloor|\mathcal{I}|/a\rfloor\mathbb{P}\left(\frac{\Pi(na\cdot) - na\cdot}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right)\right) \\
&\leq 2\exp\left(-\lfloor|\mathcal{I}|/a\rfloor\left\{P_{3,n}(\epsilon) - P_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon)\right\}\right),
\end{aligned} \tag{1.4.27}$$

où

$$P_{3,n}(\epsilon) := \mathbb{P}\left(\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)\right) = \mathbb{P}\left(W_{\log(1/a)}(\cdot) \in G\right),$$

et, avec $P_{2,n}(\cdot)$ défini comme dans (1.4.21),

$$P_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{W(nas) - \{\Pi(nas) - nas\}}{\sqrt{2na\log(1/a)}}\right| \geq \tfrac{1}{2}\epsilon\right).$$

Observons que $G := \mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)$ est un sous-ensemble ouvert de $(B[0,1],\mathcal{U})$. Par application de (1.4.17) et de l'hypothèse que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}} < \frac{1}{2}$, on a

$$J\left(\mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)\right) \le \left(|f|_{\mathbb{H}} - \tfrac{1}{2}\epsilon\right)^2 < \left(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon\right)^2 = 1 - \epsilon\left(1 - \tfrac{1}{4}\epsilon\right) < 1 - \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

Alors, d'après (1.4.17), il existe un $a_1'(\epsilon, f) \in (0, 1/e]$, tel que pour tout $0 < a \le a_1'(\epsilon, f)$,

$$P_{3,n}(\epsilon) = \mathbb{P}\left(W_{\log(1/a)}(\cdot\,) \in G\right) \ge \exp\left(-\Big\{\log(1/a)\Big\}\Big\{(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon)\Big\}\right) = a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}.$$

Considérons $n$ et $a$ tels que

$$n \ge n_3\left(\tfrac{1}{2}\epsilon\right) \text{ et } \frac{c\left(\frac{1}{2}\epsilon\right)\log n}{n} \le a \le (1/e) \wedge \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon}.$$

Rappelons (1.4.24), c'est à dire $P_{2,n}(\epsilon_2) \le C_2 a^2$. On peut écrire

$$C_2 a^2 = a^{1-\frac{1}{2}\epsilon} \times a \times C_2 a^{\frac{1}{2}\epsilon}.$$

Comme $a \le (1/e) \wedge \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon}$, le fait que $a \le 1/e$ implique que $a < \frac{1}{2}$. De plus, le fait que $a \le \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon}$ implique que

$$C_2 a^{\frac{1}{2}\epsilon} \le C_2 \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{(2/\epsilon)\times(\epsilon/2)} = 1.$$

On a donc

$$P_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon) \le C_2 a^2 \le \tfrac{1}{2} a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}.$$

En résumé de ces arguments, on obtient l'implication

$$n \ge n_3\left(\tfrac{1}{2}\epsilon\right) \text{ et } \frac{c\left(\frac{1}{2}\epsilon\right)\log n}{n} \le a \le (1/e) \wedge \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon} \Rightarrow P_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon) \le C_2 a^2 \le \tfrac{1}{2} a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}.$$

Ensuite, on observe que, si $a < \frac{1}{2}|\mathcal{I}|$, alors

$$\left\lfloor \frac{|\mathcal{I}|}{a} \right\rfloor \ge \frac{|\mathcal{I}|}{a} - 1 \ge \frac{|\mathcal{I}|}{2a}.$$

Ceci combiné avec (1.4.27), nous montre que

$$Q_n(\epsilon) \le 2\exp\left(-\frac{|\mathcal{I}|}{4a} \times a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}\right),$$

ce qui prouve (1.4.26). Notons que $n_3(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont identiques à ceux de la Proposition 1.2.□

## 1.5 Lois limites fonctionnelles

Nous présentons deux lois limites fonctionnelles qui résultent des inégalités de base présentées précedemment dans le paragraphe 1.4. Le Théorème 1.5 qui suit, en est une conséquence immédiate. Nous discutons des particularités de ce résultat et faisons une comparaison avec ceux de la littérature dans la Remarque 1.6 et le paragraphe qui suivent. La preuve est donnée au paragraphe 1.5.1.

**Théorème 1.5.** *Supposons que $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifie les conditions suivantes lorsque $n \to \infty$,*

$$h_n \to 0 \quad \textit{et} \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty. \tag{1.5.28}$$

*Alors, pour tout $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{1.5.29}$$

**Remarque 1.6.** 1°) Des résultats dans l'esprit de (1.5.29) (voir le paragraphe suivant la Remarque 1.6), ont été établis dans [37]–[22]–[32]–[33], pour $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifiant diverses conditions (voir 2°)) souvent plus restrictives que la condition (1.5.28) ; ainsi que pour des variantes de l'ensemble de suite de fonctions $\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h_n)$ (voir 3°)).

2°) Il est courant que l'on considère $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes positives vérifiant une ou plusieurs conditions, parmi les suivantes (voir, Deheuvels [22], p.1302 dans Deheuvels et Einmahl [33], Csörgő et Révész [16], et Stute [108])

$(H.1)$ $(i)$ $0 < h_n < 1$ et $h_n \to 0$, $(ii)$ $h_n \downarrow$, $(iii)$ $nh_n \uparrow \infty$;

$(H.2)$ $nh_n/\log\log n \to \infty$;

$(H.3)$ $nh_n/\log n \to c \in (0, \infty)$;

$(H.4)$ $nh_n/\log n \to 0$;

$(H.5)$ $nh_n/\log n \to \infty$;

$(H.5')$ $nh_n/\log(1/(h_n\sqrt{n})) \to \infty$;

$(H.6)$ $(\log(1/h_n))/\log\log n \to \infty$;

$(H.6')$ $(\log(1/h_n))/\log\log n \to d \in [0, \infty)$;

$(H.6'')$ $(\log(1/h_n\sqrt{n}))/\log\log n \to d \in [-\infty, \infty]$;

$(H.7)$ $(\log(1/h_n))/\log n \to 1$.

Nous distinguons quatre catégories d'incréments $\xi_n(h_n, t; s)$ qui dépendent de la vitesse à laquelle $h_n$ tend vers 0. Les incréments sont dits :

1. Incréments larges, lorsque $h_n$ vérifie les conditions
   – $(H.1)$ et $(H.1)(iii) \Rightarrow h_n > 1/n$ ;
   – $(H.6') \Rightarrow h_n = 1/(\log n)^{d_n}$, avec $d_n \to d \in [0, \infty)$;
   – $(H.6'') \Rightarrow h_n > \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$, avec $d \in [-\infty, 0]$.
2. Incréments standards, lorsque $h_n$ vérifie les conditions
   – $(H.1)$–$(H.5)$–$(H.6) \Rightarrow \frac{\log n}{n} < h_n < \frac{1}{(\log n)^\alpha}$, $\quad 0 < \alpha < \infty$.
3. Incréments intermédiaires, lorsque $h_n$ vérifie les conditions
   – $(H.3) \Rightarrow h_n = c_n \log n/n$ avec $c_n \to c \in (0, \infty)$ ;
   – $(H.6'') \Rightarrow$ pour $d = \infty$ : $h_n < \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^\alpha}, \alpha > 0$ ;
4. Incréments petits, lorsque $h_n$ vérifie les conditions
   – $(H.1)$–$(H.4)$–$(H.7) \Rightarrow \frac{1}{n} < h_n < \frac{\log n}{n}$.

Dans nos travaux de thèse, la suite $\{h_n : n \geq 1\}$ suit les conditions $(H.1)(i)$ et $(H.5)$. Les fonctions $\xi_n(h_n, t; s)$ se situent alors entre le cas des incréments standards et celui des incréments larges. Notons que l'appellation "large" est un anglicisme que nous utilisons par souci de simplification linguistique.

3°) Pour $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifiant certaines conditions, le comportement limite lorsque $n \to \infty$, des familles de suites de fonctions suivantes a été étudié (voir le paragraphe suivant la Remarque 1.6) antérieurement à celui de $\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^*_{n,\mathcal{I}}(h_n) &= \left\{ \frac{\xi_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \operatorname{loglog} n}} : t \in [0, 1-h_n] \cap \mathcal{I} \right\}, \\
\mathcal{F}^{**}_{n,\mathcal{I}}(h_n) &= \left\{ \frac{\xi_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h \{\log(1/h_n) + \operatorname{loglog} n\}}} : t \in [0, 1-h_n] \cap \mathcal{I} \right\},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ est un intervalle tel que $u < v$.

Considérons la condition (1.5.28) qui implique (1.5.29). La propriété (1.5.29) est inplicitement connue, une version presque sûre a été énoncée pour la première fois dans le Theorem 3.1 de Deheuvels et Mason [37], sous des conditions plus fortes que (1.5.28). La convergence (1.5.29) n'a pas lieu p.s. sans des conditions supplémentaires. Si en plus de la condition (1.5.29), on suppose les conditions $(H.1)(ii)$, $(iii)$ et $(H.6)$ satisfaites, alors (voir le Theorem 3.1 dans Deheuvels et Mason [37] et le Corollary 3 dans Mason [88]), lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\Delta(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o(1).$$

A présent, illustrons les points 2°) et 3°) de la Remarque 1.6 avec quelques exemples. Le Theorem 1.3 et le Theorem 2.1 de Deheuvels [22] montrent respectivement, que sous les conditions $(H.1)$ et $(H.6')$, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\Delta(\mathcal{F}^*_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_{d+1}) = o(1) \text{ et } \Delta(\mathcal{F}^{**}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_d) = o(1).$$

Deheuvels et Einmahl [32] ont établi que lorsque les conditions $(H.1)$ et $(H.2)$ sont vérifiées, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\Delta(\mathcal{F}^*_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) = o(1).$$

Le Théorème 1.2, p.1307 de Deheuvels et Einmahl [33] dit que, pour toute suite $\{h_n : n \geq 1\}$ suivant les conditions $(H.1)(i)$ et $(H.5)$–$(H.6)$ ou $(H.6')$, lorsque $n \to \infty$,

$$\Delta(\mathcal{F}^{**}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_{d/(d+1)}) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Dans le Théorème 1.7 suivant, nous présentons une extension du Théorème 1.5 dans un contexte d'uniformité relativement à la taille des incréments (on considère le supremum, relativement aux tailles d'incréments $h$, de la distance de Hausdorff entre les ensembles de fonctions concernés). La preuve est donnée au paragraphe 1.5.2.

**Théorème 1.7.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{1.5.30}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, et tout intervalle $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{1.5.31}$$

**Remarque 1.8.** 1°) Une motivation du Théorème 1.7 est l'estimation non paramétrique de la densité. En effet, ce résultat permet d'établir des lois limites pour les estimateurs à noyau de la densité (voir le Théorème 4.1 au Chapitre 4). C'est grâce au supremum sur les

$h \in \mathcal{H}_n$ que ces lois limites ont la particularité d'être uniformes relativement à la fenêtre de ces estimateurs.

2°) Une version de (1.5.31) peut être établie dans le cadre d'un modèle de censure à droite. Nous présenterons une loi limite fonctionnelle uniforme pour les incréments du processus empirique de Kaplan-Meier au Chapitre 3 (voir le Théorème 3.2).

3°) Varron et Van Keilegom [116] (voir aussi Varron [115]) ont montré une forme équivalente de la loi limite énoncée comme suit.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|\xi_n(h,t;\cdot)\|}{\sqrt{2h\log(1/h)}} = 1 \text{ p.s.}, \tag{1.5.32}$$

où $\mathcal{H}_n = [h_n', h_n'']$, et $h_n', h_n''$ sont des suites de constantes telles que $h_n'$ vérifie la condition $(H.1)$ et $h_n''$ vérifie les conditions $(H.5)$–$(H.6)$. En particulier, ils ont établi ce résultat dans le cas multidimensionnel. Il a été alors naturel de se demander si la loi limite (1.5.32) pouvait impliquer une loi limite fonctionnelle similaire à celle du Théorème 1.7 dans le cas multidimensionnel. Il s'avère que celle-ci permet bien d'obtenir une loi limite fonctionnelle mais qui est différente de celle énoncée dans notre théorème (voir le paragraphe A.2 de l'Annexe A). En effet, à partir de (1.5.32), on peut obtenir un résultat qui est dans l'esprit du Théorème 1.7, avec d'autres techniques que celles présentées dans ce chapitre. Nous pouvons montrer que, pour $\mathcal{H}_n = [h_n', h_n'']$, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\Delta\left(\bigcup_{h\in\mathcal{H}_n} \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o(1).$$

Indépendemment des conditions imposées à $h \in \mathcal{H}_n$ ci-dessus (qui sont plus contraignantes que la condition (1.5.30)), il est évident que (1.5.31) est un résultat plus fort que le résultat ci-dessus, en terme d'uniformité relativement à $h \in \mathcal{H}_n$. Par ailleurs, il faut remarquer que dans 1.5.32, rien n'assure le fait que la limite asymptotique, ici égale à 1, soit la même pour tout $h \in \mathcal{H}_n$. La différence d'uniformité relativement à $h$ réside en ce point.

4°) La version multidimensionnelle du Théorème 1.7 fait l'objet de l'article [29] de Deheuvels.

### 1.5.1 Preuve du Théorème 1.5

Soit $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ un intervalle fixé, tel que $u < v$ et considérons l'évènement suivant.

$$\left\{\exists t \in [0, 1-a] \cap \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right\} = \bigcup_{t\in[0,1-a]\cap\mathcal{I}} \left\{\frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right\}.$$

Nous allons travailler avec $\mathcal{I} = [0, 1]$. Posons $t_j = (j-1)a$, avec $j = 1, \dots, \lfloor 1/a\rfloor - 1$ et $t_{\lfloor 1/a\rfloor} = (1-a)$. Observons que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\left\{\frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right\} \subseteq \left\{\frac{\xi_n(a, t_j; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon/2}\right\} \bigcap \left\{\frac{\|\xi_n(a, t; \cdot) - \xi_n(a, t_j; \cdot)\|}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \geq \epsilon/2\right\}.$$

L'inclusion ci-dessus combinée avec l'inégalité de Bonferonni, implique que

$$\begin{aligned}
p_n(\epsilon) &:= \mathbb{P}\left(\exists t \in [0,1-a] \cap \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon}\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor 1/a \rfloor} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a,t_j;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon/2}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1-a]\cap\mathcal{I}} \frac{\|\xi_n(a,t;\cdot) - \xi_n(a,t_j;\cdot)\|}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \geq \epsilon/2\right) \\
&=: p_{1,n}(\epsilon/2) + p_{2,n}(\epsilon/2).
\end{aligned}$$

Une majoration de $p_{1,n}(\epsilon/2)$ est immédiate lorsque l'on utilise la Proposition 1.2 sous la condition (1.4.11) vérifiée pour $a$. Nous obtenons

$$p_{1,n}(\epsilon/2) \leq \lfloor 1/a \rfloor \times C_4 a^{1+\epsilon/2}.$$

On observe que $\lfloor 1/a \rfloor \leq (1/a) + 1 \leq 2/a$ car $a < 1/e$ dans la Proposition 1.2. Alors,

$$p_{1,n}(\epsilon/2) \leq 2C_4 a^{\epsilon/2}. \tag{1.5.33}$$

Maintenant, nous allons évaluer $p_{2,n}(\epsilon/2)$. Pour l'intervalle $\mathcal{I}$ et $a > 0$, nous considérons le module de continuité du processus empirique uniforme défini par

$$\omega_{n;\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a) = \sup_{\substack{s,t\in\mathcal{I} \\ |t-s|\leq a}} |\alpha_n(t) - \alpha_n(s)|\,.$$

Observons que

$$p_{2,n}(\epsilon/2) \leq \mathbb{P}\left(\frac{2\omega_{n;\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \geq \epsilon/2\right).$$

Mason, Shorack et Wellner on établi le Fait suivant (voir, e.g., l'Inequality 1 p.86 dans [92]).

**Fait 5.** *Soit* $0 < a \leq \delta \leq \frac{1}{2}$. *Pour tout* $\lambda > 0$, *on a*

$$\mathbb{P}\left(\omega_{n;\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a) \geq \lambda\sqrt{a}\right) \leq \frac{20}{a\delta^3}\exp\left(-(1-\delta)^4\frac{\lambda^2}{2}\psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{na}}\right)\right),$$

*où pour tout* $0 \leq x \leq 1$, $\psi(x) = 2h(1+x)/x^2$ *avec* $h(1+x) = (1+x)\log(1+x) - x$.

D'après le Fait ci dessus, pour $a \leq \delta \leq 1/2$ et $\sqrt{2\log(1/a)}\epsilon/4 > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{2\omega_{n;\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \geq \epsilon/2\right) \leq \frac{20}{a\delta^3}\exp\left(-(1-\delta)^4\log(1/a)\frac{\epsilon^2}{32}\psi\left(\sqrt{\frac{\log(1/a)\epsilon}{2na}}\right)\right). \tag{1.5.34}$$

D'après les inégalités (1.5.33) et (1.5.34), nous avons

$$\begin{aligned}
p_n(\epsilon) &\leq p_{1,n}(\epsilon/2) + p_{2,n}(\epsilon/2) \\
&\leq 2C_4 a^{\epsilon/2} + \frac{20}{a\delta^3}\exp\left(-(1-\delta)^4\log(1/a)\frac{\epsilon^2}{32}\psi\left(\sqrt{\frac{\log(1/a)\epsilon}{2na}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, considérons $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes positives qui, lorsque $n \to \infty$, vérifie la condition (1.5.28) :

$$h_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty.$$

Pour le choix de $a = h_n$ vérifiant l'hypothèse ci-dessus, nous obtenons que, lorsque $n \to \infty$, $p_{1,n}(\epsilon/2) = o(1)$. D'autre part, observons que, sous les mêmes conditions, lorsque $n \to \infty$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\log(1/a)\epsilon}{2na}}\right) = 2(1 + o(1))$ et on obtient $p_{2,n}(\epsilon/2) = o(1)$. Nous complétons la preuve du Théorème 1.5 en combinant le fait $p_n(\epsilon) = o(1)$ avec la Proposition 1.4, puis en faisant appel à (1.2.2) la définition de la distance de Hausdorff.□

### 1.5.2 Preuve du Théorème 1.7

#### "Bornes externes"

Dans cette section, nous allons démontrer la proposition suivante qui correspond à la partie "bornes externes" du Théorème 1.7.

**Proposition 1.9.** *Pour tout $0 < \varepsilon_0 < 1$ et $0 < \varepsilon_1 < 1$, il existe des constantes $0 < r_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) < \infty$ et $0 < b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) < \infty$ telles que, pour*

$$\mathcal{H}_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = \left[\frac{r_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \log n}{n}, b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1)\right],$$

*et tout $n$ assez grand, on ait*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_n(\varepsilon_0, \varepsilon_1)} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^{\varepsilon_1}\right) \geq 1 - \varepsilon_0. \tag{1.5.35}$$

Lorsque $\mathcal{H}_n$ vérifie les hypothèses du Théorème 1.7, une conséquence directe de la Proposition 1.9 est la suivante. Pour tout $0 < \epsilon < 1$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^{\epsilon}\right) \to 1. \tag{1.5.36}$$

Nous allons présenter deux lemmes et une proposition qui permettront d'établir la démonstration de la Proposition 1.9.

**Lemme 1.10.** *Pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe un $0 < a_1(\epsilon) \leq 1/e$, tel que l'on ait la propriété suivante. Pour tout $f \in \mathbb{S}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ et $t \leq s \leq s + \lambda a \leq t + a$, on pose*

$$f_{s,\lambda}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{f\left(\frac{s-t}{a} + \lambda u\right) - f\left(\frac{s-t}{a}\right)\right\} \quad \textit{pour} \quad 0 \leq u \leq 1. \tag{1.5.37}$$

*Alors, on a*

$$f_{s,\lambda} \in \mathbb{S} \quad \textit{et} \quad |f_{s,\lambda}|_{\mathbb{H}} \leq |f|_{\mathbb{H}}. \tag{1.5.38}$$

*De plus, pour tout $0 < a \leq a_1(\epsilon)$ et $0 \leq t \leq 1 - a$, on a les implications*

$$\left\{\frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\xi_n(\lambda a, s; \cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} \in \mathcal{N}_{6\epsilon}(f_{s,\lambda}) \textit{ pour tout } s, \lambda\right.$$
$$\left.\textit{tel que } t \leq s \leq t + (1-\lambda)a \textit{ et } \tfrac{1}{2} \leq \lambda \leq 1\right\}, \tag{1.5.39}$$

*et*

$$\left\{\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^\epsilon\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\xi_n(\lambda a,s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} \in \mathbb{S}^{6\epsilon}: \textit{ pour tout } s,\lambda\right.$$

$$\left. \textit{tel que } t \le s \le t+(1-\lambda)a \textit{ et } \tfrac{1}{2} \le \lambda \le 1\right\}. \tag{1.5.40}$$

**Preuve.** Soit $0 < a \le 1/e$. On considère que l'évènement

$$A_{n,\epsilon} = \left\{\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^\epsilon\right\}$$

a lieu. Alors il existe une fonction $f \in \mathbb{S}$ telle que

$$\left\|\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} - f\right\| < \epsilon. \tag{1.5.41}$$

D'après l'inégalité triangulaire et les définitions (1.2.3) de $|f|_{\mathbb{H}}$ et (1.2.4) de $\mathbb{S}$,

$$\left\|\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}}\right\| \le \epsilon + \|f\| = \epsilon + \sup_{0\le u\le 1}\left|\int_0^u \dot{f}(v)dv\right| \le \epsilon + |f|_{\mathbb{H}} \le \epsilon + 1.$$

Tenant compte de cette inégalité, de (1.5.41) et d'une application de l'inégalité triangulaire, on observe que, pour tout $\frac{1}{2} \le \lambda \le 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le u\le 1}\left|\frac{\xi_n(a,t;u)}{\sqrt{2a\log_+(1/(\lambda a))}} - f(u)\right| &\le \sup_{0\le u\le 1}\left|\frac{\xi_n(a,t;u)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} - f(u)\right| + \sup_{0\le u\le 1}\left|\frac{\xi_n(a,t;u)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}}\right| \\
&\quad \times \left|\left\{\frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))}\right\}^{1/2} - 1\right| \\
&\le \epsilon + \sup_{0\le u\le 1}\left|\frac{\xi_n(a,t;u)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}}\right| \\
&\quad \times \left|\left\{\frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))}\right\}^{1/2} - 1\right| \\
&\le \epsilon + (\epsilon+1)M(a),
\end{aligned} \tag{1.5.42}$$

avec

$$M(a) := \sup_{\frac{1}{2}\le\lambda\le 1}\left|\left\{\frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))}\right\}^{1/2} - 1\right| = \left|\left\{\frac{\log(1/a)}{\log(2/a)}\right\}^{1/2} - 1\right|.$$

Comme $M(a) \to 0$ lorsque $a \to 0$, il exite un $0 < a_1(\epsilon) \le 1/e$ tel que $M(a) < \epsilon/(\epsilon+1)$ pour tout $0 < a \le a_1(\epsilon)$. Alors, d'après (1.5.42), pour tout $0 < a \le a_1(\epsilon)$ et $\frac{1}{2} \le \lambda \le 1$, on a

$$\left\|\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} - \frac{f}{\sqrt{\lambda}}\right\| \le \sqrt{2}(\epsilon + (\epsilon+1)M(a)) \le 2\sqrt{2}\,\epsilon < 3\epsilon. \tag{1.5.43}$$

Pour une fonction $f \in \mathbb{S}$ telle que ci-dessus, et pour tout $0 < \lambda \leq 1$, $t \leq s \leq s+\lambda a \leq t+a$, on considère (1.5.37) :

$$f_{s,\lambda}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{f\left(\frac{s-t}{a}+\lambda u\right) - f\left(\frac{s-t}{a}\right)\right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq u \leq 1.$$

On observe que $f_{s,\lambda}(0) = 0$, $\dot{f}_{s,\lambda}(u) = \lambda^{1/2}\dot{f}\left(\frac{s-t}{a}+\lambda u\right)$ et

$$\int_0^1 (\dot{f}_{s,\lambda}(u))^2 du = \int_0^1 \left(\lambda^{1/2}\dot{f}\left(\frac{s-t}{a}+\lambda u\right)\right)^2 du = \int_{\frac{s-t}{a}}^{\frac{s-t}{a}+\lambda} \dot{f}(v)^2 dv \leq 1.$$

Autrement dit, on a $|f_{s,\lambda}|^2_{1,\mathbb{H}} \leq |f|^2_{1,\mathbb{H}} \leq 1$. Alors, il s'ensuit que $f_{s,\lambda} \in \mathbb{S}$. Ceci prouve que l'on a bien (1.5.38). Maintenant, observons que

$$\begin{aligned}
\xi_n(\lambda a, s; \cdot) &= \alpha_n(s+\lambda a\cdot) - \alpha_n(s) \\
&= \alpha_n(t + ((s-t)/a)a + \lambda a\cdot) - \alpha_n(t) \\
&\quad -\alpha_n(t+((s-t)/a)a) + \alpha_n(t) \\
&= \xi_n(a, t; (s-t)/a + \lambda\cdot) - \xi_n(a, t; (s-t)/a)
\end{aligned}$$

D'après cette observation, (1.5.43) et l'inégalité triangulaire, lorsque $0 < a \leq a_1(\epsilon)$, $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$, et $t \leq s \leq s+\lambda a \leq t+a$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\xi_n(\lambda a, s; \cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} - f_{s,\lambda}\right\| &\leq \left\|\frac{\xi_n(a, t; ((s-t)/a)+\lambda\cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} - \frac{f(((s-t)/a)+\lambda\cdot)}{\sqrt{\lambda}}\right\| \\
&+ \left\|\frac{\xi_n(a, t; (s-t)/a)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} - \frac{f((s-t)/a)}{\sqrt{\lambda}}\right\| < 6\epsilon,
\end{aligned}$$

D'où, les faits (1.5.39) et (1.5.40) sont vérifiés.□

Pour $0 < a \leq 1/e$, on pose $t_j = (j-1)a$ pour $j = 1, \ldots, N-1$, avec $N = \lfloor 1/a \rfloor$, et tel que $\lfloor u \rfloor$ vérifiant $\lfloor u \rfloor \leq u < \lfloor u \rfloor + 1$ désigne la partie entière de $u \in \mathbb{R}$. On pose également $t_N = 1 - 2a$.

**Lemme 1.11.** *Pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe un $0 < a_2(\epsilon) \leq 1/e$, tel que la propriété suivante soit vérifiée. Pour tout $0 < a \leq a_2(\epsilon)$, on a l'implication*

$$\bigcap_{j=1}^{N}\left\{\frac{\xi_n(2a, t_j; \cdot)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}} \in \mathbb{S}^{\epsilon/6}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon} : \forall 0 \leq t \leq 1-a\right\}. \tag{1.5.44}$$

**Preuve.** Nous allons appliquer la relation (1.5.40) du Lemme 1.10 pour un choix de $\epsilon/6$ au lieu de $\epsilon$, et $\lambda = 1/2$. Alors pour tout $0 < 2a \leq a_1(\epsilon/6)$ et $0 \leq t_j \leq 1-2a$, on a l'implication

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\xi_n(2a, t_j; \cdot)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}} \in \mathbb{S}^{\epsilon/6}\right\} \\
&\Rightarrow \left\{\frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon} : \forall t \quad t_j \leq t \leq t_j + (1-\frac{1}{2})2a = t_j + a\right\}.
\end{aligned}$$

On observe que $\bigcup_{j=1}^{N}[t_j,t_j+a]=[0,(N-1)a]\cup[1-2a,1-a]$. Comme $a(N-1)=a\lfloor 1/a\rfloor - a > a((1/a)-1)-a=1-2a$, il suit que $\bigcup_{j=1}^{N+1}[t_j,t_j+a]\supseteq[0,1-2a]\cup[1-2a,1-a]=[0,1-a]$. Alors, en posant $a_2(\epsilon)=\frac{1}{2}a_1(\epsilon/6)$, on obtient (1.5.44) d'après l'implication établie en début de preuve.□

**Proposition 1.12.** *Il existe $C_5>0$, une constante universelle telle que la propriété suivante soit vérifiée. Pour tout $0<\epsilon<1$, il existe des constantes $0<a_3(\epsilon)\le 1/e$ et $0<c_1(\epsilon)<\infty$, et un $n_1(\epsilon)<\infty$, tels que, pour tout $n\ge n_1(\epsilon)$ et $a>0$ vérifiant*

$$\frac{na}{\log n}\ge c_1(\epsilon) \quad et \quad a\le a_3(\epsilon), \tag{1.5.45}$$

*on ait*

$$\mathbb{P}\left(\exists\lambda\in\left[\tfrac{1}{2},1\right],\exists s\in[0,1-\lambda a]:\frac{\xi_n(\lambda a,s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}}\notin\mathbb{S}^{6\epsilon}\right)\le C_5a^{\epsilon/6}. \tag{1.5.46}$$

**Preuve.** On observe que $\bigcup_{t=0}^{1-a}[t,t+(1-\lambda)a]=[0,1-a+(1-\lambda)a]=[0,1-\lambda a]$. D'après cette observation et une application du Lemme 1.10, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(a) &:= \left\{\exists\lambda\in\left[\tfrac{1}{2},1\right],\exists s\in[0,1-\lambda a]:\frac{\xi_n(\lambda a,s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}}\notin\mathbb{S}^{6\epsilon}\right\}\\ &= \bigcup_{0\le t\le 1-a}\left\{\exists\lambda\in\left[\tfrac{1}{2},1\right],\exists s\in[t,t+(1-\lambda)a]:\frac{\xi_n(\lambda a,s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}}\notin\mathbb{S}^{6\epsilon}\right\}\\ &\subseteq \bigcup_{0\le t\le 1-a}\left\{\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}}\notin\mathbb{S}^{\epsilon}\right\}=\left\{\exists t\in[0,1-a]:\frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}}\notin\mathbb{S}^{\epsilon}\right\}.\end{aligned}$$

Puis, d'après le Lemme 1.11, lorsque $0<a\le a_1(\epsilon)\wedge a_2(\epsilon)$ et $n\ge 1$, on a

$$\mathcal{E}_n(a) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\lfloor 1/a\rfloor}\left\{\frac{\xi_n(2a,(j-1)a;\cdot)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}}\notin\mathbb{S}^{\epsilon/6}\right\}.$$

Remplaçons $\epsilon$ par $\epsilon/6$ et $a$ par $2a$ dans la Proposition 1.2. Alors, lorsque $0<a<a_3(\epsilon):=\frac{1}{2}a(\epsilon/6)\wedge a_1(\epsilon)\wedge a_2(\epsilon)$, $n\ge n_1(\epsilon):=n(\epsilon/6)$, et $na/\log n\ge c_1(\epsilon):=\frac{1}{2}c(\epsilon/6)$, on a

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_n(a)\right)\le\sum_{j=1}^{\lfloor 1/a\rfloor}\mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(2a,(j-1)a;\cdot)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}}\notin\mathbb{S}^{\epsilon/6}\right)\le\lfloor 1/a\rfloor C_4(2a)^{1+\epsilon/6}.$$

Pour finir, on observe que $\lfloor 1/a\rfloor\le(1/a)+1\le 2/a$ (car $a<1/e$ dans le Lemme 1.10 et le Lemme 1.11) et $2^{1+\epsilon/6}<2^2$ (car $0<\epsilon<1$) impliquent

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_n(a)\right)\le 8C_4a^{\epsilon/6}.$$

Pour obtenir l'inégalité (1.5.46), il suffit de poser $C_5=8C_4$.□

**Preuve de la Proposition 1.9.** Fixons $0<\varepsilon_0<1$ et $0<\varepsilon_1<1$. Dans le cadre des notations de la Proposition 1.12, on pose $\epsilon=\frac{1}{6}\varepsilon_1$ et $a=2^{-j}b$ pour $j=1,\ldots,K$ et $b>0$. On suppose que $b$ et $K\ge 1$ vérifient

$$\frac{n2^{-K}b}{\log n}\ge c(\tfrac{1}{6}\varepsilon_1) \quad \text{et} \quad b\le a_3(\tfrac{1}{6}\varepsilon_1), \tag{1.5.47}$$

et on applique plusieurs fois la Proposition 1.12 pour obtenir les inégalités

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\exists h \in [2^{-K}b, b],\ \exists t \in [0,1-h] : \frac{\xi_n(h,t;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} \notin \mathbb{S}^{\varepsilon_1}\right) \\
\leq\ & \sum_{j=0}^{K-1} \mathbb{P}\left(\exists \lambda \in \left[\tfrac{1}{2},1\right],\ \exists s \in [0,1-\lambda a] : \frac{\xi_n(\lambda 2^{-j}b,s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda 2^{-j}b\log_+(1/(\lambda 2^{-j}b))}} \notin \mathbb{S}^{\varepsilon_1}\right) \\
\leq\ & C_5 \sum_{j=0}^{K-1} \left(2^{-j}b\right)^{\frac{1}{36}\varepsilon_1} \leq C_5 b^{\frac{1}{36}\varepsilon_1} \sum_{j=0}^{K-1} \left\{2^{-\frac{1}{36}\varepsilon_1}\right\}^j \leq \frac{C_5 b^{\frac{1}{36}\varepsilon_1}}{1-2^{-\frac{1}{36}\varepsilon_1}}. \qquad (1.5.48)
\end{aligned}$$

Observons qu'il existe un $0 < b_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1) \leq a_3(\frac{1}{6}\varepsilon_1)$ tel que pour $b = b_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1)$, on ait

$$\frac{C_5 b^{\frac{1}{36}\varepsilon_1}}{1-2^{-\frac{1}{36}\varepsilon_1}} < \varepsilon_0.$$

Pour ce choix de $b > 0$, on choisit $K$ dans (1.5.48) de sorte que

$$2^{-K-1}b < \frac{c(\frac{1}{6}\epsilon_1)\log n}{n} \leq 2^{-K}b.$$

Pour finir, le choix $r_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1) = 2c(\frac{1}{36}\varepsilon_1)$ nous permet de conclure à (1.5.35).□

**"Bornes internes"**

Soit $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0,1]$. Rappellons la définition (1.3.10)

$$\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h) \quad = \quad \left\{\frac{\xi_n(h,t;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} : t \in [0,1-h] \cap \mathcal{I}\right\}.$$

Dans cette section, nous allons montrer la proposition suivante, qui correspond à la partie dite "bornes internes" du Théorème 1.7.

**Proposition 1.13.** *Fixons un intervalle $\mathcal{I} = [u,v] \in [0,1]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v-u| > 0$. Pour tout $0 < \varepsilon_0 < 1$ et $0 < \varepsilon_1 < 1$, il existe des constantes $0 < r_2(\varepsilon_0,\varepsilon_1) < \infty$ et $0 < b_2(\varepsilon_0,\varepsilon_1) < \infty$ telles que, si on pose*

$$\mathcal{H}_n(\varepsilon_0,\varepsilon_1) = \left[\frac{r_2(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\log n}{n}, b_2(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\right],$$

*alors, pour tout $n$ assez grand, on a,*

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcap_{h\in\mathcal{H}_n(\varepsilon_0,\varepsilon_1)} \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)^{\varepsilon_1}\right) \geq 1-\varepsilon_0. \qquad (1.5.49)$$

Une conséquence directe de la Proposition 1.13 est la suivante. Sous les hypothèses du Théorème 1.7, avec $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$, on a pour tout $0 < \epsilon < 1$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{h\in\mathcal{H}_n} \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)^{\epsilon}\right) \to 1. \qquad (1.5.50)$$

Dans ce qui suit, nous allons nous consacrer à la preuve de la Proposition 1.13. Commençons par introduire quelques notations. Pour tout $g \in B[0,1]$ et $0 < \lambda \le 1$, on pose

$$g_\lambda(u) = \lambda^{-1/2} g(\lambda u) \quad \text{pour} \quad 0 \le u \le 1 \quad \text{et} \quad g_{1/\lambda}(u) = \begin{cases} \lambda^{1/2} g(u/\lambda) & \text{pour} \quad 0 \le u \le \lambda, \\ \lambda^{1/2} g(1) & \text{pour} \quad \lambda < u \le 1. \end{cases}$$

On observe que pour tout $f, g \in B[0,1]$, et $0 < \lambda \le 1$,

$$[g_{1/\lambda}]_\lambda = g \quad \text{et} \quad \|f_\lambda - g_\lambda\| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|f - g\|. \tag{1.5.51}$$

De plus, lorsque $g \in \mathbb{S}$, on voit que $g_\lambda(0) = g_{1/\lambda}(0) = g(0) = 0$, et

$$\dot{g}_\lambda(u) = \lambda^{1/2} \dot{g}(\lambda u) \quad \text{et} \quad \dot{g}_{1/\lambda}(u) = \begin{cases} \lambda^{-1/2} \dot{g}(u/\lambda) & \text{pour} \quad 0 \le u \le \lambda, \\ 0 & \text{pour} \quad \lambda < u \le 1. \end{cases}$$

Alors, lorsque $g \in \mathbb{S}$,

$$\|g_\lambda\| \le |g_\lambda|_{\mathbb{H}}^2 = \int_0^1 \lambda \dot{g}(\lambda u)^2 du = \int_0^\lambda \dot{g}(v)^2 dv \le |g|_{\mathbb{H}}^2 \le 1, \tag{1.5.52}$$

d'où $g_\lambda \in \mathbb{S}$. De même,

$$\|g_{1/\lambda}\| \le |g_{1/\lambda}|_{\mathbb{H}}^2 = \int_0^\lambda \lambda^{-1} \dot{g}(u/\lambda)^2 du = \int_0^1 \dot{g}(v)^2 dv = |g|_{\mathbb{H}}^2 \le 1, \tag{1.5.53}$$

d'où $g_{1/\lambda} \in \mathbb{S}$.

**Lemme 1.14.** *Soient $f^{[1]}, \ldots, f^{[N]} \in B[0,1]$ et $\epsilon > 0$ tels que*

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \mathcal{N}_\epsilon \left( f^{[j]} \right). \tag{1.5.54}$$

*Alors, pour tout $0 < \lambda \le 1$, on a*

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \mathcal{N}_{\epsilon/\sqrt{\lambda}} \left( f_\lambda^{[j]} \right). \tag{1.5.55}$$

**Preuve.** On fixe $\epsilon > 0$, $0 < \lambda \le 1$ et $g \in \mathbb{S}$. D'après (1.5.53), on a $g_{1/\lambda} \in \mathbb{S}$. Alors, d'après (1.5.54), il existe un $j \in \{1, \ldots, N\}$, tel que $\|f^{[j]} - g_{1/\lambda}\| < \epsilon$. Ainsi, considérant (1.5.51), on obtient

$$\left\| f_\lambda^{[j]} - [g_{1/\lambda}]_\lambda \right\| = \left\| f_\lambda^{[j]} - g \right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad g \in \mathcal{N}_{\epsilon/\sqrt{\lambda}} \left( f_\lambda^{[j]} \right),$$

ce qui prouve (1.5.55).□

**Lemme 1.15.** *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $a_5(\epsilon) \in (0, 1/e]$, telle que, pour tout $\frac{1}{2} \le \lambda \le 1$ et $0 < a \le a_5(\epsilon)$, on ait l'implication*

$$\left\| \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} - f \right\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\xi_n(\lambda a;t;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} - f_\lambda \right\| < 2\epsilon\sqrt{2}. \tag{1.5.56}$$

**Preuve.** Supposons que le terme de gauche dans (1.5.56) a lieu pour une certaine fonction $f \in \mathbb{S}$. Alors, d'après (1.5.51), on a l'inégalité

$$\left\| \frac{\xi_n(a;t;\lambda\cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/a)}} - f_\lambda \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\| \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} - f \right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}}. \tag{1.5.57}$$

On remarque que $\xi_n(\lambda a;t;\cdot) = \xi_n(a;t;\lambda\cdot)$ puis on applique l'inégalité triangulaire et les inégalités (1.5.52) et (1.5.57), pour obtenir pour tout $0 < \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\xi_n(\lambda a;t;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} - f_\lambda \right\| &\leq \left\| \frac{\xi_n(a;t;\lambda\cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/a)}} - f_\lambda \right\| \times \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} \\
&\quad + \|f_\lambda\| \times \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| \\
&< \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} + \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} + \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right|.
\end{aligned}$$

On choisit $a_5(\epsilon) > 0$ assez petit de sorte que pour tout $0 < a \leq a_5(\epsilon)$, on ait

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1} \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| = \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(2/a)} \right\}^{1/2} - 1 \right| \leq \epsilon\sqrt{2}.$$

Comme $\epsilon/\sqrt{\lambda} \leq \epsilon\sqrt{2}$ pour tout $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$, l'implication (1.5.56) découle des inégalités précédentes.$\square$

**Preuve de la Proposition 1.13** Comme $\mathbb{S}$ est un sous-espace compact de $(B[0,1],\mathcal{U})$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite finie de fonctions $f^{[1]}, \ldots, f^{[N]} \in \mathbb{S}$, telle que $0 < |f^{[j]}|_{\mathbb{H}} < 1$ pour $j = 1, \ldots, N$, et

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{N}_\epsilon(f^{[j]}).$$

On considère la constante $a'(\epsilon, f)$ de la Proposition 1.4, et on choisit un intervalle $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0,1)$, tel que $|\mathcal{I}| = |v-u| > 0$. On se restreint au cas $\mathcal{I} \subseteq [0,1)$ parce qu'alors on aura $\mathcal{I} \subseteq [0, 1-a]$ lorsque $0 \leq a \leq a_3(\mathcal{I}) := 1-v$, et donc $\mathcal{I} \cap [0,1-a] = \mathcal{I}$. En vue d'utiliser (1.4.25) et (1.4.26), on considère $S(a)$, la somme d'une série convergente, qui est définie par

$$S(a) = 2N \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left( -\frac{1}{4} \left\{ |\mathcal{I}| \wedge \frac{1}{2} \right\} (2^{-k}a)^{-\epsilon/2} \right).$$

On remarque que $S(a) \downarrow 0$ lorsque $a \downarrow 0$. Alors, pour tout choix de $0 < \varepsilon_0 < 1$, il existe un $a_1'(\varepsilon_0)$ tel que $S(a) < \varepsilon_0$ pour tout $0 < a \leq a_1'(\varepsilon_0)$. Afin de satisfaire les conditions (1.4.25) de la Proposition 1.4, on fait les choix arbitraires suivants. Pour un choix de $\epsilon$ tel que

$$0 < \epsilon < \tfrac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq N} \left| f^{[j]} \right|_{\mathbb{H}},$$

on pose

$$a''(\varepsilon_0, \epsilon) = \min_{j=1,\ldots,N} \left\{ a'(\epsilon, f^{[j]}) \right\} \wedge \tfrac{1}{2}|\mathcal{I}| \wedge a_1'(\varepsilon_0) \wedge a_3(\mathcal{I}) \wedge a_5(\epsilon).$$

Nous allons montrer que, lorsque

$$n \geq n_3(\tfrac{1}{2}\epsilon) \quad \text{et} \quad a \in \mathcal{H}_n := \left[ 2c(\tfrac{1}{2}\epsilon) n^{-1} \log n, a''(\varepsilon_0, \epsilon) \right], \tag{1.5.58}$$

on a $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n) < \varepsilon_0$, où $\mathcal{B}_n$ désigne l'évènement

$$\mathcal{B}_n \quad := \quad \left\{ \exists j = 1, \ldots, N,\ \exists a \in \mathcal{H}_n,\ \forall\, t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a, t; \cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_{2\epsilon\sqrt{2}} \left( f^{[j]} \right) \right\}.$$

Pour cela, nous appliquons le Lemme 1.14 et le Lemme 1.15 pour observer que sous la condition (1.5.58),

$$\mathcal{B}_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{k=0}^{M} \mathcal{B}_n(k, j),$$

avec $a'' := a''(\varepsilon_0, \epsilon)$ , $M := \inf \left\{ k \geq 0 : 2^{-k} a'' \leq 2c(\tfrac{1}{2}\epsilon) n^{-1} \log n \right\}$, et, pour $k = 0, \ldots, M$ et $j = 1, \ldots, N$,

$$\mathcal{B}_n(k, j) := \left\{ \forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(2^{-k}a'', t; \cdot)}{\sqrt{2(2^{-k}a'') \log_+(1/(2^{-k}a''))}} \notin \mathcal{N}_\epsilon \left( f^{[j]} \right) \right\}.$$

Ensuite, nous combinons (1.4.25) et (1.4.26) avec la définition de $S(\cdot)$ et l'inégalité de Bonferroni, pour obtenir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\mathcal{B}_n\right) &\leq \mathbb{P}\left( \bigcup_{j=1}^{N} \left[ \bigcup_{k=0}^{M} \mathcal{B}_n(k, j) \right] \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{M} \mathbb{P}\left(\mathcal{B}_n(k, j)\right) \leq S(a'') < \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{1.5.59}$$

Ici, on a utilisé le fait que $a'' = a''(\epsilon_0, \epsilon) \leq a_1'(\epsilon_0)$, ce qui implique le fait que $S(a'') < \varepsilon_0$. Comme $\epsilon > 0$ peut être choisi aussi petit que nécessaire, on obtient (1.5.49) de la définition de l'évènement $\mathcal{B}_n$ et de l'inégalité (1.5.59), en sélectionnant $2\epsilon\sqrt{2} < \varepsilon_1$. La preuve de la Proposition 1.13 est alors complétée.□

**Preuve du Théorème 1.7.** Rappelons que sous les conditions du Théorème 1.7, la Proposition 1.2 et la Proposition 1.13 impliquent (1.5.36) et (1.5.50). Autrement dit, pour tout $0 < \epsilon < 1$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\left( \bigcup_{h \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^\epsilon \right) \to 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left( \mathbb{S} \subseteq \bigcup_{h \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)^\epsilon \right) \to 1.$$

D'après (1.2.2), la définition de la distance de Hausdorff, on obtient directement l'assertion (1.5.31).□

## 1.6 Lemmes analytiques et distance de Hausdorff

Soit $\Theta : B[0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle, continue sur $B[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, et bornée sur $\mathbb{S}$. On rappelle que $\mathbb{S}$ est un compact de $(B[0,1],\mathcal{U})$. Le lemme qui suit (voir le Lemma 1 dans Deheuvels et Ouadah [40]) facilite l'utilisation des lois limites fonctionnelles locales. Il permet de passer aisément des lois limites fonctionnelles de la Partie I (les théorèmes 1.5, 1.7, 2.1, 2.3 et 3.2) aux applications statistiques de la Partie II.

**Lemme 1.16.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $\mathcal{F} \subseteq B[0,1]$, on ait*

$$\Delta(\mathcal{F},\mathbb{S}) < \eta \quad \Rightarrow \quad \left|\sup_{g\in\mathcal{F}} \Theta(g) - \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f)\right| < \varepsilon. \tag{1.6.60}$$

Notons que ce lemme s'applique à $\mathbb{S}$, ainsi qu'à l'ensemble des compacts de $(B[0,1],\mathcal{U})$.

**Preuve.** Pour $g \in B[0,1]$ et $A \subseteq B[0,1]$, on note

$$\Delta(g,A) = \inf_{f\in A} \|f-g\| \quad \text{lorsque} \quad A \neq \emptyset, \quad \Delta(g,A) = \infty \quad \text{sinon.}$$

Sans perte de généralité on suppose $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car d'après (1.2.2), $\Delta(\emptyset,\mathbb{S}) = \infty$. Comme $\mathbb{S}$ est compact et $\Theta$ continue, il existe $f_0 \in \mathbb{S}$ telle que $\Theta(f_0) = \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1(\varepsilon) > 0$ tel que $\|g - f_0\| < \eta_1(\varepsilon) \Rightarrow |\Theta(g) - \Theta(f_0)| < \varepsilon$. Il suit que

$$\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}^{\eta_1(\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \exists g_0 \in \mathcal{F} : \|g_0 - f_0\| < \eta_1(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \sup_{g\in\mathcal{F}} \Theta(g) \geq \Theta(g_0) > \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f) - \varepsilon.$$

Maintenant, on considère l'hypothèse $(H)$ : pour tout $\eta > 0$, il existe $g \in \mathbb{S}^{\eta}$, tel que $\Theta(g) > \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$. Sous cette hypothèse, il existe une suite $\{g_n : n \geq 1\} \subseteq B[0,1]$, telle que $\Theta(g_n) > \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. On a donc $\Delta(g_n,\mathbb{S}) \to 0$ lorque $n \to \infty$, par exemple pour un choix de $\eta = \frac{1}{n}$. Cette propriété implique l'existence d'une suite $\{f_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{S}$, telle que $\|g_n - f_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme $\mathbb{S}$ est compact, il existe une sous-suite convergente $f_{n_k} \to \psi \in \mathbb{S}$ lorsque $k \to \infty$. Et on a donc $\Theta(g_{n_k}) \to \Theta(\psi) \leq \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f)$ lorsque $k \to \infty$, ce qui contredit $(H)$. Le fait que $(H)$ soit impossible implique l'existence d'un $\eta_2(\varepsilon) > 0$, tel que $g \in \mathbb{S}^{\eta_2(\varepsilon)} \Rightarrow \Theta(g) < \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$. Alors, on a l'implication

$$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{S}^{\eta_2(\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \sup_{g\in\mathcal{F}} \Theta(g) < \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon.$$

On pose $\eta(\varepsilon) = \eta_1(\varepsilon) \vee \eta_2(\varepsilon)$, pour finalement obtenir (1.6.60).□

Le fait suivant, établi par Deheuvels [29], est plus général que le précédant lemme dans le sens où il englobe une classe de fonctionnelles plus large. Notons $\mathcal{M}$ un sous-ensemble de $B[0,1]$, tel que $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{M} \subseteq B[0,1]$, et soit $\Gamma$ une classe non vide de fonctionnelles $\Theta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ , continues au sens de la topologie uniforme sur $\mathcal{M}$. On suppose que $\Gamma$ a la propriété d'equicontinuité suivante. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta(\epsilon)$ tel que, pour tout $\phi \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathbb{S}$, on ait

$$\|\phi - g\| < \eta(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad \sup_{\Theta\in\Gamma} |\Theta(\phi) - \Theta(g)| < \epsilon.$$

**Fait 6.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, on ait*

$$\Delta(\mathcal{F},\mathbb{S}) < \eta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \sup_{\Theta\in\Gamma} \left|\sup_{g\in\mathcal{F}} \Theta(g) - \sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f)\right| < \varepsilon. \tag{1.6.61}$$

Nous ferons usage du lemme suivant (voir le Lemma 2 dans Deheuvels et Ouadah [40]) dans les preuves des résultats de convergence des estimateurs à noyau de la densité (voir le Chapitre 4 et le Chapitre 3).

**Lemme 1.17.** *On note $\mathbb{I}(t) = t$ la fonction identité. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de fonctions mesurables de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Soit*

$$\theta = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \|\tau - \mathbb{I}\|.$$

*Pour tout sous-ensemble non vide $\mathcal{F}$ de $B[0,1]$, on pose $\mathcal{F} \circ \mathcal{T} = \{f \circ \tau : f \in \mathcal{F}, \tau \in \mathcal{T}\}$. Alors, on a*

$$\Delta(\mathcal{F} \circ \mathcal{T}, \mathbb{S}) \leq \Delta(\mathcal{F}, \mathbb{S}) + \sqrt{\theta}. \tag{1.6.62}$$

**Preuve.** D'après l'inégalité de Schwarz, pour tout $f \in \mathbb{S}$, on a

$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t \dot{f}(u)du \right| \leq \left\{ |t-s| \times \left| \int_s^t \dot{f}(u)^2 du \right| \right\}^{1/2} \leq \sqrt{|t-s|}, \quad 0 \leq s, t \leq 1. \tag{1.6.63}$$

Alors, pour tout $g \in \mathcal{F}$, $\tau \in \mathcal{T}$ et $f \in \mathbb{S}$, on a les inégalités

$$\begin{aligned} \|g \circ \tau - f\| &\leq \|g \circ \tau - f \circ \tau\| + \|f \circ \tau - f\| \leq \|g - f\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(\tau(t)) - f(t)| \\ &\leq \|g - f\| + \sqrt{\theta}. \end{aligned} \tag{1.6.64}$$

L'inclusion $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{S}^{\epsilon}$ revient à l'existence, pour tout $g \in \mathcal{F}$, d'une fonction $f \in \mathbb{S}$ telle que $\|g - f\| < \epsilon$. Tenant compte de (1.6.64), pour tout on a $\tau \in \mathcal{T}$, $\|g \circ \tau - f\| \leq \epsilon + \sqrt{\theta}$, d'où $\mathcal{F} \circ \mathcal{T} \subseteq \mathbb{S}^{\epsilon + \sqrt{\theta}}$. De même, l'inclusion $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}^{\epsilon}$ revient à l'existence, pour tout $f \in \mathbb{S}$, d'une fonction $g \in \mathcal{F}$ telle que $\|g - f\| < \epsilon$. Ceci implique que pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, $\|g \circ \tau - f\| \leq \epsilon + \sqrt{\theta}$, d'où $\mathbb{S} \subseteq (\mathcal{F} \circ \mathcal{T})^{\epsilon + \sqrt{\theta}}$. Finalement, on se réfère à (1.2.2) la définition de la distance de Hausdorff pour obtenir (1.6.62).□

# Chapitre 2

# Lois limites fonctionnelles pour le processus de quantiles

L'objet de ce chapitre est l'étude du comportement limite des incréments du processus empirique de quantile uniforme. Le résultat principal qui est une loi limite fonctionnelle uniforme pour ces suites de fonctions aléatoires (voir le Théorème 2.3), est analogue au résultat obtenu pour les incréments du processus empirique uniforme (voir le Théorème 1.5 au Chapitre 1) et en découle. C'est par une représentation du type Bahadur-Kiefer (voir Bahadur [2] et Kiefer [77]) qu'il est possible de faire le lien entre ces deux lois (voir les paragraphes 2.3.1 et 2.5, et le paragraphe 2.3.2 pour une autre méthode). Nous présentons également des lois limites pour les modules de continuité du processus empirique uniforme, et du processus empirique de quantile uniforme, qui sont uniformes relativement à la taille des incréments (voir le Corollaire 2.7). Une partie des résultats présentés est disponible dans l'article de Deheuvels et Ouadah [40] (voir le Theorem 1 (ii) et le Corollary 1).

## 2.1 Le processus empirique de quantile uniforme

Nous désignons par $\{\beta_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus empirique de quantile uniforme basé sur les $n \geq 1$ premières observations de la suite $\{U_n : n \geq 1\}$ d'observations indépendantes de même loi uniforme sur $(0, 1)$. On désigne par

$$\mathbb{V}_n(t) := \inf\{u \geq 0 : \mathbb{U}_n(u) \geq t\}, \text{ pour } 0 \leq t \leq 1, \tag{2.1.1}$$

$\mathbb{V}_n(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\mathbb{V}_n(t) = 1$ pour $t > 1$, la fonction emprique de quantile correspondant à $\mathbb{U}_n(\cdot)$. La fonction empirique de quantile $\mathbb{V}_n(\cdot)$ se définit également de la manière suivante. Pour tout $n \geq 0$, posons $U_{0,n} = 0$ et $U_{n+1,n} = 1$, et, pour tout $n \geq 1$, notons $U_{1,n} \leq \ldots \leq U_{n,n}$ la statistique d'ordre de $U_1, \ldots, U_n$, obtenue en classant ces variables aléatoires par ordre croissant. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$\mathbb{V}_n(t) := \begin{cases} U_{1,n} & \text{pour} \quad t = 0, \\ U_{i,n} & \text{pour} \quad \frac{i-1}{n} < t \leq \frac{i}{n}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Et on pose

$$\beta_n(t) := \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{V}_n(t) - t) & \text{si} \quad t \in [0, 1], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0, 1]. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Ensuite, pour tout choix de $a \geq 0$ et $t \in [0, 1]$, nous posons, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\zeta_n(a, t; s) := \beta_n(t + sa) - \beta_n(t). \tag{2.1.4}$$

Soient $0 < a_n \leq b_n \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$ deux suites de constantes positives, et posons $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$. Pour $h \in \mathcal{H}_n$, on s'intéresse au comportement limite, lorsque $n \to \infty$, de la famille de suites de fonctions

$$\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h) \quad := \quad \left\{ \frac{\zeta_n(h, t; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} : t \in [0, 1 - h] \cap \mathcal{I} \right\}, \tag{2.1.5}$$

où $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ est un intervalle fixé, tel que $u < v$.

## 2.2 Lois limites fonctionnelles

Le Théorème 2.1 est l'énoncé d'une loi limite fonctionnelle qui décrit le comportement limite des incréments du processus empirique de quantile uniforme. Cette loi est une conséquence de la loi limite fonctionnelle présentée dans le Théorème 1.5. D'un autre point de vue, elle résulte d'inégalités de base (voir la Proposition 2.5 et la Proposition 2.6 au paragraphe 2.3) du même type que celles présentées au paragraphe 1.4 (voir la Proposition 1.2 et la Proposition 1.4). La preuve est donnée au paragraphe 2.3, deux méthodes sont proposées (voir les paragraphes 2.3.1 et 2.3.2).

**Théorème 2.1.** *Supposons que $\{h_n : n \geq 1\}$ suit les conditions suivantes lorsque $n \to \infty$,*

$$h_n \to 0 \quad et \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty. \tag{2.2.6}$$

*Alors, pour tout $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\Delta\left(\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{2.2.7}$$

**Remarque 2.2.** 1°) Des résultats dans l'esprit de (2.2.7) ont été établi dans [22]–[24]–[37]–[118] (voir le paragraphe suivant la Remarque 2.2) pour $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifiant diverses conditions (voir 2°) de la Remarque 1.6), pour des variantes de l'ensemble de suite de fonctions $\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h_n)$ (voir 2°)).

2°) Pour $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifiant certaines conditions, le comportement limite lorsque $n \to \infty$, des familles de suites de fonctions suivantes a été étudié (voir le paragraphe suivant la Remarque 2.2).

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{*}_{n,\mathcal{I}}(h_n) \quad &:= \quad \left\{ \frac{\zeta_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \operatorname{loglog} n}} : t \in [0, 1 - h_n] \cap \mathcal{I} \right\}, \\
\mathcal{G}^{**}_{n,\mathcal{I}}(h_n) \quad &:= \quad \left\{ \frac{\zeta_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \left\{\log(1/h_n) + \operatorname{loglog} n\right\}}} : t \in [0, 1 - h_n] \cap \mathcal{I} \right\}, \\
\mathcal{G}^{***}_{n,\mathcal{I}}(h_n) \quad &:= \quad \left\{ \frac{\zeta_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \left\{\log_+(1/(h_n\sqrt{n})) + \operatorname{loglog} n\right\}}} : t \in [0, 1 - h_n] \cap \mathcal{I} \right\},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ est un intervalle tel que $u < v$.

3°) L'étude de l'ensemble de suites de fonctions $\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(\cdot)$ (voir (1.3.10)) a dans la littérature un statut privilégiée comparée à celle de l'ensemble de suites de fonctions $\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(\cdot)$. Cela vient en partie du fait, que les résultats sur le comportement limite lorsque $n \to \infty$, de $\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(\cdot)$ sont souvent des conséquences de ceux concernant $\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(\cdot)$. De ce fait, le cas de $\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(\cdot)$ est rarement explicitement traité. D'autre part, notons que ce lien entre ces deux ensembles de suites de fonctions n'est pas toujours vérifié (voir Deheuvels [24]).

Maintenant, nous procédons au même type d'analyse faite à la suite de la Remarque 1.6, concernant la condition (2.2.6) qui implique (2.2.7). La propriété (2.2.7) est implicitement connue. Une version presque sûre est énoncée dans le Theorem 3.1 de Deheuvels et Mason [37], sous des conditions plus fortes que (2.2.6). La convergence (2.2.7) n'a pas lieu p.s. sans des conditions supplémentaires. Si en plus de la condition (2.2.6), on suppose les conditions $(H.1)(ii), (iii)$ et $(H.6)$ vérifiées (voir 2°) de la Remarque 1.6), alors lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\Delta(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o(1).$$

On poursuit avec quelques exemples. Dans le Theorem 1.3 et le Theorem 2.1 de Deheuvels [22], il est respectivement établi que, sous les conditions $(H.1)$ et $(H.6')$, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\Delta(\mathcal{G}^{*}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_{d+1}) = o(1) \text{ et } \Delta(\mathcal{G}^{**}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_{d}) = o(1).$$

Deheuvels [24] montre dans le Theorem 2.1, que sous les conditions $(H.1)$–$(H.5')$ et $(H.6'')$, on a p.s.

$$\Delta(\mathcal{G}^{***}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) = o(1).$$

Le Théorème 2.3 suivant, est une version généralisée de la loi limite fonctionnelle du Théorème 2.1. Cette nouvelle loi limite fonctionnelle locale est établie uniformément relativement à la taille $h$ des incréments (voir le Theorem 1 $(ii)$ dans Deheuvels et Ouadah [40]). La preuve est présentée au paragraphe 2.5.

**Théorème 2.3.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{2.2.8}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, et tout intervalle $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{2.2.9}$$

**Remarque 2.4.** 1°) Le Théorème 2.3 ne peut être étendu à une version multidimensionnelle, il est spécifique au cas réel.

2°) Une motivation du Théorème 2.3 est l'estimation non paramétrique de la densité. En effet, ce résultat permet d'établir une loi limite pour l'estimateur de la densité par la méthode des plus proches voisins (voir le Théorème 5.1 au Chapitre 5). C'est grâce au supremum sur les $\lambda \in \mathcal{H}_n$ que cette loi limite a la particularité d'être uniforme relativement au paramètre de lissage de cet estimateur.

3°) Viallon [118] a établi un résultat dans l'esprit du Théorème 2.3, où l'intervalle $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ est tel que $a_n$ vérifie la condition $(H.1)$ et $b_n$ vérifie les conditions $(H.5)$ et $(H.6)$, avec en plus l'une des conditions suivantes lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{n}a_n \log(1/a_n)}{\log n \sqrt{\log\log n}} \to \infty \text{ ou } \frac{\sqrt{b_n \log(1/b_n)}}{a_n \log(1/a_n)} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right).$$

## 2.3 Preuve du Théorème 2.1

### 2.3.1 Méthode 1

La première méthode de preuve du Théorème 2.1 repose sur une représentation du type Bahadur-Kiefer (voir Bahadur [2] et Kiefer [77]). Elle est similaire à celle de la preuve du

Théorème 2.3 et en est d'ailleurs un cas particulier, dans lequel on ne considère pas le supremum sur $h \in \mathcal{H}_n$. C'est pourquoi, nous renvoyons à la preuve du Théorème 2.3 au paragraphe 2.5.

### 2.3.2 Méthode 2

Soit $\{S(t), t \geq 0\}$ un processus appelé sommes partielles et définie ci-après. Désignons par $\lceil t \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq t\}$, la partie entière supérieure de $t$. Dans la suite, on utilisera la notation $S(t) := S_{\lceil t \rceil}$. On considère $\{w_i : i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle standard. Alors, on pose

$$S_0 = 0 \text{ et } S_i = \sum_{j=1}^{i} w_j, i \geq 1.$$

La propriété suivante (voir le Theorem 3.1 p.138 dans del Barrio, Deheuvels et van de Geer [41]) porte sur les statistiques d'ordre (voir la définition au paragraphe 2.1).

**Fait 7.** *Pour tout $n \geq 0$, nous avons l'égalité en distribution*

$$\{U_{i,n} : i = 0, \ldots, n+1\} = \{S_i/S_{n+1} : i = 0, \ldots, n+1\}. \tag{2.3.10}$$

Le Fait suivant est une application des principes d'invariance forts de Komlós, Major et Tusnády [79].

**Fait 8.** *Il est possible de construire $\{S(t) : t \geq 0\}$ et le processus de Wiener $\{W(t) : t \geq 0\}$ sur un même espace de probabilité, de telle sorte que pour des constantes universelles $B_1$, $B_2$ et $B_3$, l'inégalité*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} |S_k - k - W(k)| \geq B_1 \log T + z\right) \leq B_2 \exp(-B_3 z), \tag{2.3.11}$$

*ait lieu pour tout $T > 0$ et $z \in \mathbb{R}$.*

D'après la définition (2.1.2) de $\mathbb{V}_n(t)$ et l'égalité en distribution (2.3.10), on voit que pour tout $n \geq 0$, on a l'égalité en distribution

$$\mathbb{V}_n(t) = \frac{S(nt)}{S(n+1)} = \frac{S(nt)}{n} \frac{n}{S_{n+1}}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Par application du théorème central limite, on observe que lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{n}{S_{n+1}} = \frac{n}{S_n - n + n + w_{n+1}} = \left\{1 + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}.$$

Tenant compte des deux précédentes observations et de la définition (2.1.4) de $\zeta_n(h, t; s)$ (voir aussi (2.1.2) la définition de $\mathbb{V}_n(t)$), lorsque $n \to \infty$ et $h \to 0$, on obtient l'égalité en distribution qui suit.

$$\begin{aligned}
\zeta_n(h, t; s) &= \sqrt{n}\left[\left\{\frac{S(n(t+sh)) - S(nt)}{n} - sh\right\}\left\{1 + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} + shO_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\{S(n(t+sh)) - S(nt) - nsh\} \times \left\{1 + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} + shO_{\mathbb{P}}(1) \\
&= n^{-1/2}\{S(n(t+sh)) - S(nt) - nsh\} \times \{1 + o_{\mathbb{P}}(1)\} + o_{\mathbb{P}}(1).
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

De ce fait, nous nous intéressons aux accroissements de $S(\cdot\,)$. Par définition des sommes partielles, pour $h \geq 0$ et $s \in \mathbb{R}$, on remarque que pour tout choix de $t \in \mathbb{R}$, on a l'égalité en distribution :

$$\begin{aligned} S(nt+nsh) - S(nt) - nsh &= \sum_{nt<i\leq nt+nsh} w_i - nsh \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil nsh \rceil} w_i - nsh + \kappa \\ &= S(nsh) - nsh + \kappa, \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

où $\kappa$ est une petite erreur majorée par $2\max_{1\leq i\leq n+1} w_i$.

**Proposition 2.5.** *Il existe une constante universelle $B_4 > 0$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, il existe des constantes $0 < h(\epsilon) \leq 1/e$, $0 < b(\epsilon) < \infty$ et $n(\epsilon) < \infty$, telles que, pour tout choix de $n \geq n(\epsilon)$ et $h > 0$, vérifiant*

$$\frac{nh}{\log n} \geq b(\epsilon) \quad et \quad h \leq h(\epsilon),$$

*on ait*

$$\mathbb{P}\left( \frac{S(nh\cdot) - nh\cdot}{\sqrt{2nh\log_+(1/h)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right) \leq B_4 h^{1+\epsilon}.$$

**Preuve.** Soit $0 < h \leq 1/e$ choisi ainsi, de sorte que $\log_+(1/h) = \log(1/h)$. Fixons $0 < \epsilon \leq 1$ et posons $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ tels que dans la Proposition 1.2 (voir le paragraphe 1.4 du Chapitre 1), donc vérifiant la relation $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$. D'après (2.3.11), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left( \frac{S(nh\cdot) - nh\cdot}{\sqrt{2nh\log_+(1/h)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right) &\leq \mathbb{P}\left( \frac{W(nh\cdot)}{\sqrt{2nh\log(1/h)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1} \right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left( \sup_{0\leq s\leq 1} \left| \frac{W(nhs) - \{S(nhs) - nhs\}}{\sqrt{2nh\log(1/h)}} \right| \geq \epsilon_2 \right) \\ &=: P_{1,n}(\epsilon_1) + \tilde{P}_{2,n}(\epsilon_2). \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Le détail de l'évaluation de $P_{1,n}(\epsilon_1)$ et $\tilde{P}_{2,n}(\epsilon_2)$ a déjà été donné dans la preuve de la Proposition 1.2. Il suffit juste de remplacer les constantes du Fait 2 pour l'évaluation de $P_{2,n}(\epsilon_2)$ par celles du Fait 8 pour l'évaluation de $\tilde{P}_{2,n}(\epsilon_2)$.□

On considère $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes positives qui, lorsque $n \to \infty$, vérifie la condition (2.2.6) :

$$h_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty.$$

D'après la Proposition 2.5 et l'égalité en distribution (2.3.13), pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, on bserve que

$$\mathbb{P}\left( \frac{S(nt+nsh_n) - S(nt) - nsh_n}{\sqrt{2nh_n\log_+(1/h_n)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right) \leq \tilde{B}_4 h_n^{1+\epsilon},$$

où l'on considère la constante $\tilde{B}_4 > 0$ au lieu de $B_4 > 0$ car l'on fait intervenir la constante $\kappa > 0$ de l'égalité (2.3.13). Ensuite, on applique des arguments identiques à ceux de la preuve du Théorème 1.5, pour obtenir que pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in \mathcal{I} : \frac{S(nt + nsh_n) - S(nt) - nsh_n}{\sqrt{2nh_n \log_+(1/h_n)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \leq L_4 h_n^\epsilon. \tag{2.3.15}$$

**Proposition 2.6.** *Pour toute fonction $f \in \mathbb{S}$ telle que $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, et $\epsilon$ tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$, il existe $h'(\epsilon, f) > 0$, $n_3(\frac{1}{2}\epsilon) < \infty$ et $b(\frac{1}{2}\epsilon) > 0$ (les deux derniers dépendant uniquement de $\epsilon$), tels que l'on ait la propriété suivante. Pour tout sous-intervalle $\mathcal{I} = [u, v]$ de $[0, 1]$, tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque*

$$n \geq n_3(\tfrac{1}{2}\epsilon), \qquad \frac{b(\frac{1}{2}\epsilon)\log n}{n} \leq h \leq h'(\epsilon, f) \wedge \tfrac{1}{2}|\mathcal{I}| \quad et \quad \mathcal{I} \subseteq [0, 1 - h],$$

*on a*

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{S(nt + nsh) - S(nt) - nsh_n}{\sqrt{2nh \log_+(1/h)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{4}\left\{|\mathcal{I}| \wedge \frac{1}{2}\right\} h^{-\epsilon/2}\right).$$

**Preuve.** Sans perte de généralité, on suppose $|\mathcal{I}| < \frac{1}{2}$, sinon, on remplace $\mathcal{I} = [u, v]$ par $[u, u + \frac{1}{2}]$. Soit $0 < h < |\mathcal{I}| \wedge (1/e)$ de sorte que $\log_+(1/h) = \log(1/h)$. On choisit $f \in \mathbb{S}$ tel que $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, et $\epsilon$ tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$. On se réfère aux arguments donnés dans la preuve de (1.4.27), ainsi qu'au point (2.3.13) et au Fait 8, pour obtenir les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} Q_n(\epsilon) &:= \mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{S(nt + nsh) - S(nt) - nsh}{\sqrt{2nh \log_+(1/h)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \\ &\leq \prod_{j=1}^{\lfloor |\mathcal{I}|/h \rfloor} \left\{1 - \mathbb{P}\left(\frac{A_n(h, t + (j-1)h; \cdot)}{\sqrt{2nh \log_+(1/h)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right)\right\} \\ &\leq 2\exp\left(-\lfloor |\mathcal{I}|/h \rfloor \left\{P_{3,n}(\epsilon) - \tilde{P}_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon)\right\}\right), \end{aligned}$$

où $A_n(h, t; s) := S(nt + nsh) - S(nt) - nsh$ et

$$P_{3,n}(\epsilon) \;:=\; \mathbb{P}\left(\frac{W(nh\cdot)}{\sqrt{2nh \log(1/h)}} \in \mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)\right) = \mathbb{P}\left(W_{\log(1/h)(\cdot)} \in G\right),$$

$$\tilde{P}_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon) \;=\; \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1}\left|\frac{W(nh\cdot) - \{S(nh\cdot) - nh\cdot\}}{\sqrt{2nh \log(1/h)}}\right| \geq \tfrac{1}{2}\epsilon\right).$$

L'évaluation de $P_{3,n}(\epsilon)$ et $\tilde{P}_{2,n}(\frac{1}{2}\epsilon)$ est identique à celle qui est faite dans la preuve de la Proposition 1.4 (le Fait 8 remplace le Fait 2).□

On observe que d'après la Proposition 2.6 et l'égalité (2.3.12), pour tout $0 < \epsilon < 1/2$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in \mathcal{I} : \frac{\zeta_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \log_+(1/h_n)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \geq 1 - 2\exp\left(-\frac{1}{4}\left\{|\mathcal{I}| \wedge \frac{1}{2}\right\} h_n^{-\epsilon/2}\right) \to 1.$$

Et de même, d'après (2.3.15), pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\left(\forall t : \frac{\zeta_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \log_+(1/h_n)}} \in \mathbb{S}^\epsilon\right) \geq 1 - L_4 h_n^\epsilon \to 1.$$

On combine les deux précédentes assertions avec la définition (1.2.2) de la distance de Hausdorff pour obtenir (2.2.7).

## 2.4 Modules de continuité

Comme applications des résultats du paragraphe 2.2, nous présentons des lois limites nouvelles pour les modules de continuité du processus empirique uniforme, et du processus empirique de quantile uniforme. Leur originalité vient de leur uniformité relativement à la taille $h$ des incréments.

Pour $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, nous considérons les statistiques suivantes

$$\omega_{n;\mathcal{I}}^{\pm}(h) = \sup_{\substack{s,t \in \mathcal{I} \\ |t-s| \leq h}} \pm\{\alpha_n(t) - \alpha_n(s)\}, \quad \omega_{n;\mathcal{I}}(h) = \omega_{n;\mathcal{I}}^-(h) \vee \omega_{n;\mathcal{I}}^+(h), \tag{2.4.16}$$

$$\delta_{n;\mathcal{I}}^{\pm}(h) = \sup_{\substack{s,t \in \mathcal{I} \\ |t-s| \leq h}} \pm\{\beta_n(t) - \beta_n(s)\}, \quad \delta_{n;\mathcal{I}}(h) = \delta_{n;\mathcal{I}}^-(h) \vee \delta_{n;\mathcal{I}}^+(h), \tag{2.4.17}$$

$$\Omega_{n;\mathcal{I}}^{\pm}(h) = \sup_{t \in \mathcal{I} \cap [0,1-h]} \pm\{\alpha_n(t+h) - \alpha_n(t)\}, \quad \Omega_{n;\mathcal{I}}(h) = \Omega_{n;\mathcal{I}}^-(h) \vee \Omega_{n;\mathcal{I}}^+(h), \tag{2.4.18}$$

$$\Xi_{n;\mathcal{I}}^{\pm}(h) = \sup_{t \in \mathcal{I} \cap [0,1-h]} \pm\{\beta_n(t+h) - \beta_n(t)\}, \quad \Xi_{n;\mathcal{I}}(h) = \Xi_{n;\mathcal{I}}^-(h) \vee \Xi_{n;\mathcal{I}}^+(h). \tag{2.4.19}$$

Le résultat qui suit (voir le Corollary 1 dans Deheuvels et Ouadah [40]) est un corollaire du Théorème 1.7 et du Théorème 2.3.

**Corollaire 2.7.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty.$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\omega_{n;\mathcal{I}}^{\pm}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\omega_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{2.4.20}$$

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\delta_{n;\mathcal{I}}^{\pm}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\delta_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{2.4.21}$$

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1),\quad \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1), \tag{2.4.22}$$

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Xi^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1),\quad \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Xi_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1). \tag{2.4.23}$$

La preuve du Corollaire 2.7 est présentée à la suite de ce paragraphe, dans lequel nous présentons des exemples de résultats de la littérature établis dans le même esprit que (2.4.20)–(2.4.21)–(2.4.22)–(2.4.23). Stute [108], Deheuvels et Mason [37], Csörgő et Révész [16] (voir le Chapitre 5), Shorack et Wellner [105] (voir le Chapitre 14), ont étudié les modules de continuité du processus empirique uniforme, pour $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite d'entiers vérifiant les conditions $(H.1)$–$(H.5)$ et $(H.6)$. Ces auteurs ont montré que, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega^{|\cdot|}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{\sqrt{2h_n\log(1/h_n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=1,$$

où $\omega^{|\cdot|}_{n;\mathcal{I}}(h_n)=\sup_{\substack{s,t\in\mathcal{I}\\ |t-s|\leq h_n}}|\alpha_n(t)-\alpha_n(s)|$ et où dans toute la suite

$$d_n=\sqrt{2h_n\log(1/h_n)}\text{ ou } d_n=\sqrt{2h_n\left\{\log(1/h_n)+\operatorname{loglog} n\right\}}.$$

Dans le cas où l'on remplace respectivement $(H.3)$ et $(H.6')$ par $(H.5)$ et $(H.6)$, Mason, Shorack et Wellner [92] (voir le résultat analogue dans le cas multivarié dans Einmahl et Ruymgaart [58, 59]), Deheuvels [22], et Deheuvels et Mason [37], ont montré que lorsque lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega^{|\cdot|}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=(\mu^{\pm}_c-1)(c/2)^{1/2},$$

où $\mu^{\pm}_c$ est un entier défini p.1246 dans [37] (noté $\delta^{\pm}_c$). Plus récemment, Viallon [118], et Mason et Swanepoel [91] ont établi des résultats proches du Corollaire 2.7, mais toutefois sensiblement différents. Ils ont montré que pour tout $c > 0$ et $0 < h_0 < 1$, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{\frac{c\log n}{n}\leq h<h_0}\frac{\omega^{|\cdot|}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{h(|\log h|\vee\operatorname{loglog} n)}}=O(1).$$

Remarquons qu'il est évident que (2.4.20) est un résultat plus fort que le résultat ci-dessus, en terme d'uniformité relative à $h \in \mathcal{H}_n$ et du fait que la constante limite dans (2.4.20) est explicitée. Le comportement limite des modules de continuité uniformes $\delta^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)$ et $\Xi^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)$, du processus empirique de quantile uniforme a été étudié par Mason [86], Deheuvels [20], Deheuvels et Devroye [31] (lorsque $nh_n = O(\log n)$), Deheuvels [22], Deheuvels et Mason [37], Berthet [6], qui ont montré, sous différentes conditions imposées à $\{h_n : n \geq 1\}$, des résultats de convergence p.s. lorsque $n \to \infty$, du type

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^{|\cdot|}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Xi^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{|\cdot|}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Xi^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h_n)}{d_n} = (\gamma^{\pm}_c - 1)(c/2)^{1/2},$$

où $\delta^{|\cdot|}_{n;\mathcal{I}}(h_n) = \sup_{\substack{s,t\in\mathcal{I}\\ |t-s|\le h_n}} |\beta_n(t) - \beta_n(s)|$ et $\gamma^{\pm}_c$ est un entier défini p.1246 dans [37].

**Preuve du Corollaire** 2.7. La fonctionnelle $\Theta(f) = \pm f(1)$ est continue sur $(C[0,1],\mathcal{U})$ et vérifie le fait que $\sup_{f\in\mathbb{S}}(\pm f(1)) = 1$ (voir par exemple, (4.1.3), p. 1276 dans [37]). Rappelons que sous les conditions du Théorème 1.7, on a (1.5.31) : lorsque $n \to \infty$

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

On observe que

$$\begin{aligned}
\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{f\in\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)}\Theta(f) - \sup_{f\in\mathbb{S}}\Theta(f)\right| &= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in\mathcal{I}\cap[0,1-h]}\frac{\pm\{\alpha_n(t+h)-\alpha_n(t)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| \\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right|.
\end{aligned}$$

On applique le Lemme 1.16 dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)$ et où l'on a (1.5.31) pour obtenir que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Sur le même principe, rappelons que sous les conditions du Théorème 2.3, on a (2.2.9) : lorsque $n \to \infty$

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Puis, on applique le Lemme 1.16 dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h)$ et où l'on a (2.2.9) pour obtenir que lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Xi^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Maintenant, on choisit $\Theta(f) = \sup_{0\le u,v\le 1} \pm\{f(u) - f(v)\}$ continue sur $(C[0,1],\mathcal{U})$ et qui vérifie $\sup_{f\in\mathbb{S}} \pm\{f(u) - f(v)\} = 1$. On observe que

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{f\in\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)}\Theta(f) - \sup_{f\in\mathbb{S}}\Theta(f)\right| \\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{\substack{t\in\mathcal{I}\cap[0,1-h]\\ 0\le u,v\le 1}}\frac{\pm\{\alpha_n(t+uh)-\alpha_n(t)-\alpha_n(t+vh)+\alpha_n(t)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| \\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{\substack{a,b\in\mathcal{I}\\ |a-b|\le h}}\frac{\pm\{\alpha_n(a)-\alpha_n(b)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| \\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right|.
\end{aligned}$$

et de même, que

$$\begin{aligned}\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{f\in\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h)}\Theta(f)-\sup_{f\in\mathbb{S}}\Theta(f)\right| &= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{\substack{a,b\in\mathcal{I}\\|a-b|\le h}}\frac{\pm\{\beta_n(a)-\beta_n(b)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right| \\ &= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\delta^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|.\end{aligned}$$

On conclut à (2.4.20) et (2.4.21) en appliquant le Lemme 1.16, comme précédemment.

## 2.5 Preuve du Théorème 2.3

Dans ce paragraphe, nous supposerons la condition (1.5.30) soit (2.2.8) du Théorème 1.7 vérifiée. Nous allons montrer que le fait que lorsque $n\to\infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h),\mathbb{S}\right)=o_{\mathbb{P}}(1), \tag{2.5.24}$$

implique que, lorsque $n\to\infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\Delta\left(\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h),\mathbb{S}\right)=o_{\mathbb{P}}(1). \tag{2.5.25}$$

Lorsque (2.5.24) est vrai, on a la propriété suivante énoncée dans le Corollaire 2.7. Lorsque $n\to\infty$, on a

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\omega_n(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1), \tag{2.5.26}$$

où $\omega_n(h)=\omega_{n;[0,1]}(h)$ (voir (2.4.16)) représente le module de continuité du processus empirique. A partir de (2.5.26), nous allons établir dans le Lemme 2.8, des bornes pour le module de continuité du processus empirique de quantile $\delta_n(h)=\delta_{n;[0,1]}(h)$ (voir (2.4.17)). Le fait qui suit présente deux relations. La première relation (2.5.27) qui suit se retrouve au point (1.6) dans Shorack [104]. La relation (2.5.28) vient des propriétés limites des espacements uniformes maximum (voir Devroye [42, 43] et (3.51) dans Deheuvels et Mason [37]).

**Fait 9.** *On a, presque sûrement,*

$$(i)\qquad \sup_{0\le t\le 1}|\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t))-t|=\frac{1}{n}\quad \textit{pour tout}\quad n\ge 1, \tag{2.5.27}$$

$$(ii)\qquad \sup_{0\le t\le 1}|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t))-t|=(1+o(1))\frac{\log n}{n}\quad \textit{lorsque}\quad n\to\infty. \tag{2.5.28}$$

**Lemme 2.8.** *Lorsque* $\mathcal{H}_n=[a_n,b_n]$ *vérifie* (2.2.8) *: lorsque* $n\to\infty$*, les suites* $0<a_n\le b_n\le 1$ *sont telles que,*

$$b_n\to 0\quad \textit{et}\quad \frac{na_n}{\log n}\to\infty,$$

*on a l'implication*

$$\begin{aligned}&\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\omega_n(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1)\\ \Rightarrow\ \forall\theta>0,\quad &\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left[\frac{\delta_n(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\right]\ge 1+\theta\right)\to 0.\end{aligned} \tag{2.5.29}$$

**Preuve.** Pour tout $\theta \in (-1,1)$ et $h > 0$, on pose

$$\widetilde{h}_n(h;\theta) := h\left\{1 + (1+\theta)\left(\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right)^{1/2}\right\}.$$

On se place sur l'événement de probabilité 1 où (2.5.27) a lieu et on applique l'inégalité triangulaire, pour obtenir les relations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned}
&\left\{\beta_n(t+h) - \beta_n(t) \geq (1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)}\right\} = \left\{\mathbb{V}_n(t+h) \geq \mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)\right\}\\
\subseteq\ & \left\{\mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)\Big) - \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t)\Big) \leq \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t+h)\Big) - \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t)\Big)\right\}\\
\subseteq\ & \left\{\mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)\Big) - \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t)\Big) \leq h + \frac{2}{n}\right\}\\
=\ & \left\{\alpha_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq \sqrt{n}\,(h - \widetilde{h}_n(h;\theta)) + \frac{2}{\sqrt{n}}\right\}\\
=\ & \left\{\alpha_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq -(1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right\}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on fixe un $\theta > 0$. Sous la condition (2.2.8), il existe un $n(\theta) < \infty$ tel que, pour tout $n \geq n(\theta)$ et $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, on ait

$$\widetilde{h} := \widetilde{h}_n(h;\theta) \in \mathcal{H}'_n := \left[\tfrac{1}{2}a_n, 2b_n\right],$$

et l'inégalité

$$-(1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)} + \frac{2}{\sqrt{n}} \leq -(1+\tfrac{1}{2}\theta)\sqrt{2\widetilde{h}_n\log_+(1/\widetilde{h}_n)}.$$

L'intervalle $\mathcal{H}'_n = [\frac{1}{2}a_n, 2b_n]$ vérifie (2.2.8) lorsque c'est le cas pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$. Pour $n \geq n(\theta)$, on voit que lorsque pour un certain $h \in \mathcal{H}_n$ et un certain $t \in [0,1]$,

$$\beta_n(t+h) - \beta_n(t) \geq (1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)},$$

il suit que, pour $\widetilde{h} = \widetilde{h}_n(h;\theta) \in \mathcal{H}'_n$ et $\widetilde{t} = \mathbb{V}_n(t) \in [0,1]$,

$$-\Big(\alpha_n\left(\widetilde{t} + \widetilde{h}\right) - \alpha_n\big(\widetilde{t}\big)\Big) \geq (1+\tfrac{1}{2}\theta)\sqrt{2\widetilde{h}\log_+(1/\widetilde{h})}.$$

De là, pour tout choix de $\theta > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}'_n}\left[\frac{\omega_n^-(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \tfrac{1}{2}\theta\right) \to 0\\
\Rightarrow\ &\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left[\frac{\delta_n^+(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \theta\right) \to 0.
\end{aligned}$$

On conserve les mêmes arguments, cette fois-ci avec un changement de signe, pour obtenir que pour tout $\theta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}'_n}\left[\frac{\omega_n^+(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \tfrac{1}{2}\theta\right) \to 0\\
\Rightarrow\ &\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left[\frac{-\delta_n(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \theta\right) \to 0.
\end{aligned}$$

On combine ces deux implications pour finalement conclure à (2.2.9).□

Utilisant la définition (1.3.9) de $\xi_n(h,t;s)$, pour $h>0$ et $t\in[0,1]$, on pose

$$\xi_n^V(h;t;u) := \xi_n(h;\mathbb{V}_n(t);u) = \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)+hu) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \text{ pour } u\in[0,1]. \tag{2.5.30}$$

Considérons $\mathcal{F}n;\mathcal{I}(h)$ l'ensemble de suites de fonctions défini au point (1.3.10). De manière analogue, pour tout $h\in\mathcal{H}_n$, on pose

$$\mathcal{F}^V_{n;\mathcal{I}}(h) \quad = \quad \left\{ \frac{\xi_n^V(h;t;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} : t\in[0,1-h]\cap\mathcal{I} \right\}, \tag{2.5.31}$$

où $\mathcal{I}=[u,v]\subseteq[0,1]$ tel que $u<v$.

**Lemme 2.9.** *Sous la condition* (2.2.8), *lorsque* $n\to\infty$, *on a*

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}^V_{n;\mathcal{I}}(h),\mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{2.5.32}$$

**Preuve.** On fixe $\epsilon>0$ et $\mathcal{I}=[u,v]\subseteq[0,1]$ tel que $|\mathcal{I}|=|v-u|>0$. Etant donné que sous la condition (1.5.30), l'assertion (2.5.24) est vérifiée, d'après (1.2.2) la définition de la distance de Hausdorff, il suffit de prouver que, lorsque $n\to\infty$,

$$\begin{aligned} &(i) \quad \mathbb{P}\left(\mathcal{F}^V_{n;\mathcal{I}}(h)\subseteq\mathbb{S}^\epsilon :\ \forall h\in\mathcal{H}_n\right)\to 1,\\ &(ii) \quad \mathbb{P}\left(\mathbb{S}\subseteq\mathcal{F}^V_{n;\mathcal{I}}(h)^\epsilon :\ \forall h\in\mathcal{H}_n\right)\to 1. \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

Par définition des incréments (1.3.9), et des définitions (2.5.30) et (2.5.31) ci-dessus, on a $\mathcal{F}^V_{n;\mathcal{I}}(h)\subseteq\mathcal{F}_{n;[0,1]}(h)$, alors (2.5.33)$(i)$ est une consequence de (2.5.24). Pour établir (2.5.33)$(ii)$, on fixe un intervalle $\mathcal{I}'=[u',v']$ tel que $u<u'<v'<v$. On considère l'évènement $\mathcal{C}_n := \{\mathbb{U}_n(s)\in\mathcal{I},\ \forall s\in\mathcal{I}'\}$. D'après le théorème de Glivenko-Cantelli, $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)\to 1$ lorsque $n\to\infty$. De plus, on a $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n\cap\mathcal{D}_n)\to 1$ lorsque $n\to\infty$, où

$$\mathcal{D}_n := \left\{\mathbb{S}\subseteq\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}'}(h)^{\varepsilon/2} : \forall h\in\mathcal{H}_n\right\}.$$

On se place sur l'événement $\mathcal{C}_n\cap\mathcal{D}_n$. Pour tout $f\in\mathbb{S}$ et $h\in\mathcal{H}_n=[a_n,b_n]$, il existe $s_n=s_n(h;f)\in\mathcal{I}'$, tel que

$$\left\|\frac{\xi_n(h;s_n;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - f\right\| < \frac{1}{2}\epsilon. \tag{2.5.34}$$

Observons que

$$\begin{aligned} \xi_n(h;s_n;\cdot)-\xi_n(h;\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n));\cdot) &= \alpha_n(s_n+h\cdot)-\alpha_n(s_n)\\ &\quad -\alpha_n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n))+h\cdot)-\alpha_n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n)))\\ &= \{\alpha_n(s_n+h\cdot)-\alpha_n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n))+h\cdot)\}\\ &\quad -\{\alpha_n(s_n)-\alpha_n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n)))\}\\ &\le 2\omega_n\Big(\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n)-\mathbb{I}\|\Big). \end{aligned}$$

On pose $t_n = t_n(h; f) = \mathbb{U}_n(s_n) = \mathbb{U}_n(s_n(h; f)) \in \mathcal{I}$. On applique l'inégalité triangulaire et la relation $\inf_{h\in\mathcal{H}_n} \sqrt{2h \log_+(1/h)} = \sqrt{2a_n \log_+(1/a_n)}$, pour obtenir les inégalités suivantes qui sont uniformes en $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\xi_n(h; s_n; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - \frac{\xi_n^V(h; t_n; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \right\| &= \left\| \frac{\xi_n(h; s_n; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - \frac{\xi_n(h; \mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n)); \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \right\| \\
&\leq \frac{2\omega_n\Big(\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}\|\Big)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \\
&\leq \frac{2\omega_n\Big(\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}\|\Big)}{\sqrt{2a_n \log_+(1/a_n)}}. \qquad (2.5.35)
\end{aligned}$$

Maintenant, on combine la condition (2.2.8) avec (2.5.28) du Fait 9, pour voir que lorsque $n \to \infty$,

$$\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}\| = (1 + o_{\mathbb{P}}(1)) \frac{\log n}{n} = o_{\mathbb{P}}(a_n). \qquad (2.5.36)$$

On fixe $\rho > 0$. Appliquons le résultat (2.5.26), en remplaçant l'intervalle $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ par $[\rho a_n, \rho a_n]$, pour obtenir que, lorsque $n \to \infty$,

$$\omega_n(\rho a_n) = (1 + o_{\mathbb{P}}(1))\rho_n^{1/2} \sqrt{2a_n \log_+(1/a_n)}\,. \qquad (2.5.37)$$

Comme $\rho > 0$ peut être choisi aussi petit qu'il convient dans (2.5.37), d'après (2.5.35) et (2.5.36), lorsque $n \to \infty$, on a

$$\frac{2\omega_n\Big(\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}\|\Big)}{\sqrt{2a_n \log_+(1/a_n)}} = o_{\mathbb{P}}(1). \qquad (2.5.38)$$

La réunion des points (2.5.34), (2.5.35) et (2.5.38), montre que lorsque $n \to \infty$, pour tout $f \in \mathbb{S}$ et $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, il existe $t_n \in \mathcal{I}$, tel que

$$\left\| \frac{\xi_n^V(h; t_n; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - f \right\| < \epsilon, \qquad (2.5.39)$$

avec une probabilité qui tend vers 1. D'où le résultat cherché (2.5.33)$(ii)$.□

**Preuve du Théorème 2.3.** Nous allons montrer (2.5.25) sachant que (2.5.24) est vérifié. D'après la définition (2.5.30), on a

$$\alpha_n(\mathbb{V}_n(t + hu)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) = \xi_n(h; \mathbb{V}_n(t); \tau_{n;t;h}(u)) = \xi_n^V(h; t; \tau_{n;t;h}(u)),$$

où pour $u \in [0, 1]$, on pose,

$$\tau_{n;t;h}(u) := \frac{\mathbb{V}_n(t + hu) - \mathbb{V}_n(t)}{h} = u + \frac{\beta_n(t + hu) - \beta_n(t)}{h\sqrt{n}} = u + \frac{\zeta_n(h; t; u)}{h\sqrt{n}}\,.$$

Observons que, pour tout $h > 0$ et $t, u \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\zeta_n(h; t; u) + \xi_n^V(h; t; \tau_{n;t;h}(u)) &= \beta_n(t + hu) - \beta_n(t) + \alpha_n(\mathbb{V}_n(t + hu)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \\
&= \sqrt{n}\,(\mathbb{V}_n(t + hu) - (t + hu) - \mathbb{V}_n(t) - t) \\
&\quad +\sqrt{n}\,(\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t + hu)) - \mathbb{V}_n(t + hu) - \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t)) + \mathbb{V}_n(t)) \\
&= \sqrt{n}\,(\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t + hu)) - (t + hu) + \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t)) - t)\,.
\end{aligned}$$

Usant des égalités ci-dessus, de l'inégalité triangulaire et de (2.5.27) du Fait 9, pour tout $h > 0$ et $t$ tel que $0 \leq t \leq t+h \leq 1$ et $u \in [0,1]$, on a

$$\left\|\zeta_n(h;t;u) + \xi_n^V(h;t;\tau_{n;t;h}(u))\right\| \leq 2\sqrt{n}\,\|\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n) - \mathbb{I}\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{2.5.40}$$

On applique (2.5.29) du Lemme 2.8, pour $\theta = 1$, et on observe que lorsque $n \to \infty$, on a avec probabilité 1, uniformément en tout $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, $t$ tel que $0 \leq t \leq t+h \leq 1$, et $u \in [0,1]$,

$$\|\tau_{n;t;h} - \mathbb{I}\| \leq \frac{\delta_n(h)}{h\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{2h\log_+(1/h)}}{h\sqrt{n}} \leq 2\left\{\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right\}^{1/2} \leq 2\left\{\frac{2\log_+(1/a_n)}{na_n}\right\}^{1/2} \to 0. \tag{2.5.41}$$

Rappelons la définition (2.5.31) de

$$\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}^V(h) = \left\{\frac{\xi_n^V(h;t;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} : t \in [0,1-h] \cap \mathcal{I}\right\},$$

et posons

$$\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}^{V,\tau}(h) = \left\{\frac{\xi_n^V(h;t;\tau_{n;t;h}(\cdot))}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} : t \in [0,1-h] \cap \mathcal{I}\right\}. \tag{2.5.42}$$

D'après (1.6.62) et (2.5.41), lorsque $n \to \infty$, on a avec probabilité qui tend vers 1

$$\Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}^{V,\tau}(h), \mathbb{S}\right) \leq \Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}^V(h), \mathbb{S}\right) + \sqrt{2}\left\{\frac{2\log_+(1/a_n)}{na_n}\right\}^{1/4}.$$

Ceci, combiné avec la condition (2.2.8) et l'assertion (2.5.32) du Lemme 2.9, implique que lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}^{V,\tau}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{2.5.43}$$

On combine l'inégalité triangulaire avec (2.5.40), (2.5.42), (2.5.43), et l'observation que $-\mathbb{S} = \{-f : f \in \mathbb{S}\} = \mathbb{S}$, pour voir que pour tout $h > 0$ et $t$ tel que $0 \leq t \leq t+h \leq 1$, et $u \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\|\zeta_n(h;t;u) - f\| &= \left\|\zeta_n(h;t;u) + \xi_n^V(h;t;\tau_{n;t;h}(u)) - \xi_n^V(h;t;\tau_{n;t;h}(u)) - f\right\| \\
&\leq \left\|\zeta_n(h;t;u) + \xi_n^V(h;t;\tau_{n;t;h}(u))\right\| + \left\|\xi_n^V(h;t;\tau_{n;t;h}(u)) + f\right\| \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n}} + o_{\mathbb{P}}(1) \\
&= o_{\mathbb{P}}(1).
\end{aligned}$$

La preuve du Théorème 2.3 est alors complétée.□

# Chapitre 3

# Loi limite fonctionnelle dans un modèle de censure

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de censure à droite. Nous présentons une loi limite fonctionnelle pour les incréments du processus empirique de Kaplan-Meier, qui est uniforme relativement à la taille de ces incréments (voir le Théorème 3.2). Comme application de ce résultat, nous donnons une loi limite nouvelle pour le module de continuité du processus empirique de Kaplan-Meier (voir le Corollaire 3.4). Nous combinons ici les résultats de Deheuvels et Einmahl [33], avec la loi limite fonctionnelle locale obtenue pour les incréments du processus empirique uniforme (voir le Théorème 1.7 du Chapitre 1). Les résultats présentés ici sont disponibles dans un article soumis (voir le Theorem 2 et le Corollary 1 dans Ouadah [96]).

## 3.1 Introduction et Résultat

On considère $X, X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées représentant les durées de vie. Nous supposons que la fonction de répartition $F(\cdot) := \mathbb{P}(X \leq \cdot)$ de $X$ possède une densité $f(\cdot) := \frac{\partial}{\partial \cdot} F(\cdot)$ continue et strictement positive sur $J := [A, B] \subseteq \mathbb{R}$ . Ensuite, on considère $C, C_1, C_2, \dots$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées représentant les temps de censure. Nous désignons par $G(\cdot) := \mathbb{P}(C \leq \cdot)$ la fonction de répartition de $C$. On définit le point extrême supérieur de $F$ (resp. $G$) par $S_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$ (resp. $S_G := \sup\{x : G(x) < 1\}$) et on fixe $[A, B] \subseteq [0, \Theta]$, avec $\Theta := \min(S_F, S_G) > 0$. Notons que d'après nos hypothèses $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ s'annulent en 0 et sont continues sur $J$. On considère $X$ censurée à droite, telle que $X$ et $C$ soient indépendantes. On note $\{(T_i, \delta_i) : 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des observations dont on dispose, où l'on pose

$$\begin{cases} T_i = X_i \wedge C_i, \\ \delta_i = \mathbb{1}_{X_i \leq C_i}, \end{cases}$$

avec $T$ ayant pour fonction de répartition $H(\cdot) := \mathbb{P}(T \leq \cdot) = 1 - (1 - F(\cdot))(1 - G(\cdot))$. À titre d'exemple d'un tel modèle de censure à droite, si on étudie le temps de survie de patients hospitalisés à la suite d'accidents graves, la censure correspond au cas où l'observation se termine à la fin de l'hospitatisation, et lorsque le patient est alors encore en vie. Dans ce cas, pour le $i^{\text{ème}}$ patient, $X_i$ désigne la durée de vie du patient (non observée), et $C_i$, sa durée d'hospitalisation (observée).

En présence de censure, la fonction de répartition empirique de la variable $X$ n'est plus valable car elle dépend de variables aléatoires parmi $X, X_1, X_2, \ldots$ qui ne sont pas observées. Afin d'estimer la loi de $X$, il a été donc nécessaire de construire un estimateur de la fonction de répartition en présence de données censurées, qui puisse avoir des propriétés analogues à celle de la fonction de répartition empirique classique. En 1958, Kaplan et Meier [76] ont introduit les estimateurs non paramétiques du maximum de vraisemblance de $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ (voir (1.1) et (1.2) dans Deheuvels et Einmahl [33]) définis, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_n(x) := 1 - \prod_{\substack{T_{i,n} \leq x \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{1 - \frac{\delta_{i,n}}{n-i+1}\right\} \tag{3.1.1}$$

et

$$G_n(x) := 1 - \prod_{\substack{T_{i,n} \leq x \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{1 - \frac{1-\delta_{i,n}}{n-i+1}\right\}. \tag{3.1.2}$$

où, pour tout $n \geq 1$, $T_{1,n} < \ldots < T_{n,n}$ est la statistique d'ordre de $T_1, \ldots, T_n$, obtenue en classant ces variables aléatoires par ordre croissant, et où pour $i = 1, \ldots, n$, $\delta_{i,n}$ est le $\delta_j$ correspondant à $T_{i,n} = T_j, 1 \leq j \leq n$. Ces estimateurs sont des fonctions continues par morceaux qui ne présentent des sauts qu'aux observations non censurées. Remarquons également que plus il y de données censurées, plus les sauts de l'estimateur sont grands. Par ailleurs, les estimateurs de Kaplan-Meier et la fonction de répartition empirique coïncident en l'absence de censure.

**Remarque 3.1.** Dans la littérature, ces estimateurs sont parfois écris de la manière suivante.

$$F_n(x) := 1 - \prod_{\substack{T_i \leq x \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{T_j \geq T_i}}\right\}^{\delta_i}$$

et

$$G_n(x) := 1 - \prod_{\substack{T_i \leq x \\ 1 \leq i \leq n}} \left\{1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{T_j \geq T_i}}\right\}^{1-\delta_i}.$$

On désigne par $\{\alpha_n^{KM}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, le processus empirique de Kaplan-Meier basé sur les observations $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$. Il est défini par

$$\alpha_n^{KM}(x) := n^{1/2}(F_n(x) - F(x)),$$

pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ . Ensuite, pour tout choix de $h \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$ , nous posons

$$\xi_n^{KM}(h, t; s) := \alpha_n^{KM}(t + sh) - \alpha_n^{KM}(t), s \in \mathbb{R} . \tag{3.1.3}$$

On désigne par $\psi(\cdot)$ une fonction spécifique qui est continue et positive sur J. Des exemples de fonctions $\psi(\cdot)$ sont données au point 3°) de la Remarque 6.3 du Chapitre 6. On note $\psi_n(\cdot)$ un estimateur de $\psi(\cdot)$ tel que lorsque $n \to \infty$, on a

$$\sup_{x \in I} |\psi_n(x)/\psi(x) - 1| \to 0 \text{ en probabilité}, \tag{3.1.4}$$

où $I := [C, D] \subset J$. Soient $0 < a_n \leq b_n \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ deux suites de constantes positives, et posons $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$. Pour $h \in \mathcal{H}_n$ et $\{\psi_n : n \geq 1\}$ une suite de fonctions positives et continues, on s'intéresse au comportement limite de la famille de suites de fonctions

$$\mathcal{F}_{n,I}^{KM}(h,\psi_n) := \left\{ \frac{\xi_n^{KM}(h,t;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} \times \left\{\psi_n(t) \times \frac{1-G(t)}{f(t)}\right\}^{1/2} : t \in I \right\}. \tag{3.1.5}$$

Nous renvoyons à la définition (1.2.2) de la distance de Hausdorff. Les ensembles de fonctions $\mathbb{S}$, et $\mathbb{S}_\lambda$ ci-dessous, sont décrits aux points (1.2.4) et (1.2.5) du paragraphe 1.2 du Chapitre 1). Pour tout $\lambda > 0$, on pose, en particulier

$$\mathbb{S}_\lambda := \{f \in B[0,1] : |f|_{1,\mathbb{H}} \le \lambda\} = \left\{\lambda^{1/2} f : f \in \mathbb{S}\right\}. \tag{3.1.6}$$

Le théorème suivant résulte d'une application de la loi fonctionnelle limite uniforme pour les incréments du processus empirique uniforme, établie dans le Théorème 1.7 (voir le paragraphe 1.5 du Chapitre 1). C'est une loi limite fonctionnelle locale pour les incréments du processus empirique de Kaplan-Meier, uniforme relativement à la taille des incréments.

**Théorème 3.2.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \le b_n \le 1$ sont telles que,*

$$b_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{3.1.7}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}_{n;I}^{KM}(h,\psi_n), \mathbb{S}_\Lambda\right) = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{3.1.8}$$

*où*

$$\Lambda := \sup_{x \in I} \psi(x). \tag{3.1.9}$$

**Remarque 3.3.** 1°) Dans le cas non censuré, où $G \equiv 0$, $\psi \equiv 1$ et où de plus, $X$ suit une distribution uniforme sur $[0,1]$, le Théorème 3.2 se réduit au Théorème 1.7.

2°) Deheuvels et Einmahl [32], [33] ont établi une loi limite fonctionnelle dans l'esprit de (1.3.9), sans l'uniformité relative à $h$ la taille des incréments. Ils traitent le cas où $\mathcal{H}_n = [h_n, h_n]$.

3°) Viallon [117] a obtenu une loi limite fonctionnelle dans l'esprit de (3.1.8), dans un sens plus faible (voir la discussion au paragraphe 6.1.1 du Chapitre 6) et sous des conditions plus contraignantes que (3.1.7).

4°) Une motivation du Théorème 3.2 est l'estimation non paramétrique. En effet, ce résultat permet d'établir des lois limites pour les estimateurs à noyau de la densité des temps de survie (voir le Théorème 6.2 au Chapitre 6) et du taux de panne (voir le Théorème 6.8 au Chapitre 6). C'est grâce au supremum sur les $h \in \mathcal{H}_n$ que ces lois limites ont la particularité d'être uniformes relativement à la fenêtre de ces estimateurs.

5°) La fonction $\psi(\cdot)$, et a fortiori $\psi_n(\cdot)$, peuvent prendre plusieurs formes qui sont explicitées au point 3°) de la Remarque 6.3 au paragraphe 6.1.1 du Chapitre 6. Nous avons introduit ces fonctions car elles permettent de considérer une large classe d'estimateurs à noyau dans le modèle de censure à droite (e.g., les estimateurs à noyau de la densité des temps de survie, du taux de panne).

Comme première application du Théorème 3.2, nous présentons de nouvelles lois limites pour le module de continuité du processus empirique de Kaplan-Meier. Leur originalité vient de l'uniformité relativement à la taille $h$ des incréments.

Nous considérons les statistiques suivantes.

$$\Omega^{\pm KM}_{n;I}(h) = \sup_{t\in I} \pm\{\alpha^{KM}_n(t+h) - \alpha^{KM}_n(t)\}, \quad \Omega^{KM}_{n;I}(h) = \Omega^{-KM}_{n;I}(h) \vee \Omega^{+KM}_{n;I}(h).$$

Le résultat qui suit est un corollaire du Théorème 3.2.

**Corollaire 3.4.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \le b_n \le 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty.$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\begin{aligned} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \left| \frac{\Omega^{\pm KM}_{n;I}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - \sup_{t\in I}\left\{\frac{f(t)}{1-G(t)}\right\}^{1/2} \right| &= o_{\mathbb{P}}(1), \\ \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \left| \frac{\Omega^{KM}_{n;I}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - \sup_{t\in I}\left\{\frac{f(t)}{1-G(t)}\right\}^{1/2} \right| &= o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

**Remarque 3.5.** 1°) La preuve est similaire à celle du Corollaire 2.7 (voir le paragraphe 2.4 du Chapitre 2). Il suffit de choisir $\psi(\cdot) = f(\cdot)/(1 - G(\cdot))$ et d'imposer le fait que la condition (3.1.4) soit satisfaite.

2°) Deheuvels et Einmahl [33] ont établi des lois limites dans l'esprit de (3.1.10), sans l'uniformité relativement à $h$ la taille des incréments. Ils traitent le cas où $\mathcal{H}_n = [h_n, h_n]$.

La preuve du Théorème 3.2 est donnée au paragraphe 3.2.6. Elle est précédée de tous les ingrédients techniques nécessaires à sa construction. Dans le paragraphe 3.2.1, nous exposons un corollaire du Théorème 1.7, et présentons d'autres faits et lemmes préliminaires dans les paragraphes 3.2.3 et 3.2.4.

## 3.2 Preuves

### 3.2.1 Loi limite fonctionnelle dans le cas non censuré

Nous présentons un corollaire de la loi limite fonctionnelle (1.5.31) du Théorème 1.7. Rappellons que pour tout choix de $a \ge 0$ et $t \in [0, 1]$, la fonction

$$\xi_n(a;t;u) := \alpha_n(t + hu) - \alpha_n(t) \text{ pour } u \in \mathbb{R}\ , \tag{3.2.11}$$

désigne les incréments du processus empirique uniforme (voir (1.3.9)). Pour $h > 0$, considérons l'ensemble de suites de fonctions

$$\mathcal{F}_{n;\mathcal{I},\gamma}(h) := \left\{ \frac{\xi_n(\gamma h;t;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} : t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I} \right\}, \tag{3.2.12}$$

avec $\gamma > 0$ et $\mathcal{I} := [r, s] \subseteq [0, 1]$ un intervalle fixé, tel que $r < s$.

**Corollaire 3.6.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0 \text{ et } \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{3.2.13}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, pour tout $\gamma > 0$ et $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ tel que $u < v$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I},\gamma}(h), \mathbb{S}_\gamma\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.14}$$

**Preuve.** Sous la condition (3.2.13), le Théorème 1.7 est vérifié. Pour tout $t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I}$ (resp. $f \in \mathbb{S}$), il existe donc, une fonction $f \in \mathbb{S}$ (resp. $t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I}$), telle que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\| \frac{\xi_n(h; t; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - f(\cdot) \right\| < \varepsilon.$$

Cette assertion implique la suivante, pour $0 < \gamma \leq 1$.

$$\left\| \frac{\xi_n(h; t; \gamma\cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - f(\gamma\cdot) \right\| < \varepsilon.$$

Rappelons que pour tout $g \in B[0, 1]$ et $0 < \lambda \leq 1$, on pose $g_\lambda(u) = \lambda^{-1/2} g(\lambda u)$ pour $0 \leq u \leq 1$ (voir le paragraphe 1.5.2). D'après la définition (3.2.11), observons que, pour tout $\gamma, h > 0$, $t \in [0, 1]$, et pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\xi_n(\gamma h; t; s) = \alpha_n(t + \gamma h s) - \alpha_n(t) = \xi_n(h; t; \gamma s).$$

D'après le rappel et l'observation ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left\| \frac{\xi_n(\gamma h; t; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - \gamma^{1/2} f_\gamma(\cdot) \right\| < \varepsilon.$$

Combinant le fait que $f_\gamma \in \mathbb{S}$ et la définition (1.2.5) de l'ensemble $\mathbb{S}_\gamma$, on obtient (3.2.14).□

### 3.2.2 Notations

Dans ce qui suit, nous adoptons certaines notations de base inspirées de celles de Deheuvels et Einmahl [33]. Pout toute fonction $L(\cdot)$ (qui peut donc être discontinue), nous posons $L(x-) := \lim_{t \uparrow x} L(t)$ et $L(x+) := \lim_{t \downarrow x} L(t)$. La fonction de répartition de $T$, notée $H(x) = H(x+)$, pour $x \in \mathbb{R}$, se décompose de la manière suivante.

$$H(x) = 1 - (1 - F(x))(1 - G(x)) =: H_1(x) + H_0(x),$$

où

$$H_1(x) := \mathbb{P}\left(T \leq x \text{ et } \delta = 1\right) = \int_0^x (1 - G_-(t)) dF(t) = H_1(x+), \tag{3.2.15}$$

et

$$H_0(x) := \mathbb{P}\left(T \leq x \text{ et } \delta = 0\right) = \int_0^x (1 - F_-(t)) dG(t) = H_0(x+).$$

On définit les versions empiriques de $H(\cdot)$, $H_1(\cdot)$ et $H_0(\cdot)$, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$H_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{T_i \leq x} =: H_{n,1}(x) + H_{n,0}(x),$$

où

$$H_{n,1}(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i \mathbb{1}_{Z_i \le x},$$

et

$$H_{n,0}(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\mathbb{1}_{T_i \le x}.$$

On considère le processus empirique suivant.

$$\mathcal{H}_{n,j}(x) := n^{1/2}\left(H_{n,j}(x) - H_j(x)\right) \text{ pour } j = 0, 1 \text{ et } x \in \mathbb{R} \ . \tag{3.2.16}$$

La fonction empirique cumulée de taux de panne est définie par

$$\Lambda_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - H_{n-}(u)} dH_{n,1}(u) = \Lambda_n(x+) \text{ pour } x \ge 0. \tag{3.2.17}$$

Les estimateurs de Kaplan-Meier de $F_n(\cdot)$ et $G_n(\cdot)$, tels qu'ils sont définis aux points (3.1.1) et (3.1.2), peuvent s'écrire de la manière suivante (voir, e.g., p.295 dans Shorack et Wellner [105]).

$$\begin{aligned} F_n(x) &:= 1 - \prod_{\substack{Z_{i,n} \le x \\ 1 \le i \le n}} \left\{1 - \frac{\delta_{i,n}}{n-i+1}\right\} \\ &= \int_0^x (1 - F_{n-}(u))\, d\Lambda(u) \\ &= \int_0^x \frac{1}{1 - G_{n-}(u)} dH_{n,1}(u) \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

et de même

$$G_n(x) := \int_0^x \frac{1}{1 - F_n(u)} dH_{n,0}(u). \tag{3.2.19}$$

### 3.2.3 Faits utiles

On commence par écrire le processus empirique de Kaplan-Meier comme suit (voir, e.g., (4.18) dans Deheuvels et Einmahl [33]).

$$\begin{aligned} \alpha_n^{KM}(x) &= \int_0^x \frac{1}{1 - G_{n-}(u)} d\mathcal{H}_{n,1}(u) + \int_0^x \frac{\beta_{n-}(u)}{1 - G_{n-}(u)} dF(u) \\ &=: \alpha_n'(x) + \alpha_n''(x). \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Nous allons travailler sur l'espace de probabilité qui est introduit dans le fait suivant (voir, Deheuvels et Einmahl [32]).

**Fait 10.** *Sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabiliste convenable, il est possible de définir* $\{X_n : n \ge 1\}$ *et* $\{Y_n : n \ge 1\}$ *jointement avec* $\{U_n : n \ge 1\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur* $(0, 1)$*, de telle sorte que la propriété suivante soit vérifiée. On a, presque sûrement*

$$H_{n,1}(x) = \mathbb{U}_n\left(H_1(x)\right) \text{ pour } 0 < H_1(x) < p$$

*et*

$$H_{n,0}(x) = \mathbb{U}_n\left(H_0(x) + p\right) - \mathbb{U}_n(p) \text{ pour } 0 < H_0(x) < 1 - p,$$

*où* $p = \mathbb{P}(\delta = 1)$ *et* $\mathbb{U}_n(\cdot)$ *est la fonction de répartition empirique définie au point* (1.3.7) .

On note $\{\beta_n^{KM}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ le processus empirique de Kaplan-Meier basé sur les observations $\{C_i : 1 \leq i \leq n\}$. Il est défini, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ , par

$$\beta_n^{KM}(x) := n^{1/2}(G_n(x) - G(x)).$$

La relation (3.2.21) suivante, découle d'une inégalité du type Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz pour l'estimateur de Kaplan-Meier (voir, e.g., le Theorem 2 dans Földes et Rejtő [66], et le Theorem 1 dans Bitouzé et al. [7]).

**Fait 11.** *Pour tout $0 \leq R < \Theta$ fixé, on a, pour tout $n \geq 1$,*

$$\sup_{0 \leq t \leq R} \left| \beta_n^{KM}(t) \right| = O_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.21}$$

### 3.2.4 Lemmes préliminaires

Dans ce paragraphe, nous présentons trois lemmes établis dans l'esprit des Lemmas 4.1–4.3 dans Deheuvels et Einmahl [33]. Le premier permet d'évaluer le module de continuité de $\alpha_n'(\cdot)$. Le second montre que les oscillations de $\alpha_n''(\cdot)$ peuvent être considérées comme négligeables et le troisième est une approximation des incréments $\xi_n^{KM}(h, t; s)$ pour tout $h \in \mathcal{H}_n$. On se place sur l'espace probabiliste du Fait 10. A partir de la définition du processus empirique uniforme (1.3.8) et de la définition (3.2.16) de $\mathcal{H}_{n,j}(\cdot), j = 0, 1$, on pose,

$$\begin{aligned} \omega_{n,1}(h) &:= \sup_{\substack{s,t \in I \\ |t-s| \leq h}} |\mathcal{H}_{n,1}(t) - \mathcal{H}_{n,1}(s)| \\ &= \sup_{\substack{s,t \in I \\ |t-s| \leq h}} |\alpha_n(H_1(t)) - \alpha_n(H_1(s))|, \quad h > 0 \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

et

$$\omega_{n,1}^* := \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \frac{\omega_{n,1}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}}. \tag{3.2.23}$$

Maintenant, on tient compte de (3.2.20) et on fait une intégration par parties, pour considérer (voir (4.25) dans [33])

$$\begin{aligned} A_{n,1}(s,t) &:= \alpha_n'(t) - \alpha_n'(s) - \frac{1}{1 - G_-(s)} \int_s^t d\mathcal{H}_{n,1}(u) \\ &= \left( \frac{1}{1 - G_{n-}(t)} - \frac{1}{1 - G_-(s)} \right) \{\mathcal{H}_{n,1}(t) - \mathcal{H}_{n,1}(s)\} \\ &\quad - \int_s^t \{\mathcal{H}_{n,1}(u) - \mathcal{H}_{n,1}(s)\} d\left\{ \frac{1}{1 - G_{n-}(u)} \right\}. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

**Lemme 3.7.** *Lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{\substack{s,t \in I \\ |t-s| \leq h}} \frac{|A_{n,1}(s,t)|}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} = \omega_{n,1}^* \times o_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.25}$$

**Preuve.** D'après le Fait 11, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sup_{t \in I} \left| \frac{1}{1 - G_{n-}(t)} - \frac{1}{1 - G_-(t)} \right| = O_{\mathbb{P}}(n^{-1/2}). \tag{3.2.26}$$

Comme $G(\cdot)$ est continue sur $J$, on voit que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{\substack{s,t\in I\\|t-s|\leq h}} \left|\frac{1}{1-G_-(t)} - \frac{1}{1-G_-(s)}\right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.27}$$

On combine la définition (3.2.23) de $\omega^*_{n,1}$ avec les observations (3.2.26) et (3.2.27), pour obtenir les relations suivantes lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{\substack{s,t\in I\\|t-s|\leq h}} \frac{1}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\left|\left(\frac{1}{1-G_{n-}(t)} - \frac{1}{1-G_-(s)}\right)\{\mathcal{H}_{n,1}(t)-\mathcal{H}_{n,1}(s)\}\right| \\
\leq\ & \omega^*_{n,1} \times \left\{\sup_{t\in I}\left|\frac{1}{1-G_{n-}(t)} - \frac{1}{1-G_-(t)}\right|\right. \\
&\qquad \left. + \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{\substack{s,t\in I\\|t-s|\leq h}} \left|\frac{1}{1-G_-(t)} - \frac{1}{1-G_-(s)}\right|\right\} \\
=\ & \omega^*_{n,1} \times \left\{O_{\mathbb{P}}(n^{-1/2}) + o_{\mathbb{P}}(1)\right\} \\
=\ & \omega^*_{n,1} \times o_{\mathbb{P}}(1).
\end{aligned}$$

De même, on observe que, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{\substack{s,t\in I\\|t-s|\leq h}} \frac{1}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\left|\int_s^t \{\mathcal{H}_{n,1}(u)-\mathcal{H}_{n,1}(s)\} d\left\{\frac{1}{1-G_{n-}(u)}\right\}\right| \\
\leq\ & \omega^*_{n,1} \times \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{\substack{s,t\in I\\|t-s|\leq h}} \left|\frac{1}{1-G_{n-}(t)} - \frac{1}{1-G_{n-}(s)}\right| \\
=\ & \omega^*_{n,1} \times \left\{2O_{\mathbb{P}}(n^{-1/2}) + o_{\mathbb{P}}(1)\right\} \\
=\ & \omega^*_{n,1} \times o_{\mathbb{P}}(1).
\end{aligned}$$

Les deux inégalités ci-dessus permettent de conclure à (3.2.25).□

**Lemme 3.8.** *On suppose $f(\cdot)$ uniformément bornée sur $[0,R], 0 < R < \Theta$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a uniformément en $0 \leq s \leq t \leq R$,*

$$|\alpha''_n(t) - \alpha''_n(s)| = \left|\int_s^t \frac{\beta^{KM}_{n-}(u)}{1-G_{n-}(u)} dF(u)\right| = O_{\mathbb{P}}(1) \times |t-s|. \tag{3.2.28}$$

**Preuve.** Soit $c(R) = \sup_{0\leq u\leq R}|f(u)|$. On utilise le Fait 11 , pour obtenir que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_s^t \frac{\beta^{KM}_{n-}(u)}{1-G_{n-}(u)} dF(u)\right| &\leq \frac{1}{1-G_{n-}(R)} \times \sup_{0\leq u\leq R}\left|\beta^{KM}_{n-}(u)\right| \times \{F(t)-F(s)\} \\
&\leq \frac{c(R)}{1-G(R)} \times O_{\mathbb{P}}(1) \times |t-s| = O_{\mathbb{P}}(1) \times |t-s|.\square
\end{aligned}$$

Pour tout choix de $h \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$ , posons

$$\begin{aligned}
\xi^{KM}_{n,1}(h;t;s) &:= \frac{1}{1-G_-(t)}\{\mathcal{H}_{n,1}(t+hs) - \mathcal{H}_{n,1}(t)\} \\
&= \frac{1}{1-G_-(t)}\{\alpha_n(H_1(t+hs)) - \alpha_n(H_1(t))\}, s \in \mathbb{R}\ . 
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

**Lemme 3.9.** *Lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{t \in I} \frac{1}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \left\| \xi_n^{KM}(h; t; \cdot\,) - \xi_{n,1}^{KM}(h; t; \cdot\,) \right\|$$
$$= \omega_{n,1}^* \times o_{\mathbb{P}}(1) + O_{\mathbb{P}}\left( \sqrt{\frac{b_n}{2 \log_+(1/a_n)}} \right). \tag{3.2.30}$$

**Preuve.** D'après les définitions (3.1.3), (3.2.20), (3.2.24) et (3.2.29), on observe que

$$\begin{aligned} \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{t \in I} &\left\| \xi_n^{KM}(h; t; \cdot\,) - \xi_{n,1}^{KM}(h; t; \cdot\,) \right\| \\ &\leq \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{\substack{t \in I \\ s \in [0,1]}} \left| \alpha_n''(t + hs) - \alpha_n''(t) \right| \\ &\quad + \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{\substack{t \in I \\ s \in [0,1]}} \left| A_{n,1}(t + sh, t) \right|, \end{aligned}$$

et on combine (3.2.25) du Lemme 3.7 avec (3.2.28) du Lemme 3.8.□

### 3.2.5 Approximation et loi limite fonctionnelle

L'objet de ce paragraphe est d'approximer (3.1.3) la fonction d'increment du processus empirique de Kaplan-Meier par une fonction d'incrément spécifique du processus empirique uniforme (3.2.11), et cela en vue d'appliquer (3.2.39) une nouvelle loi limite fonctionnelle. Pour $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$, $u < v$, on considère la statistique (2.4.16) (voir le paragraphe 2.4 du Chapitre 2), définie par

$$\omega_{n,\mathcal{I}}^{\pm}(h) \quad := \quad \sup_{\substack{s,t \in \mathcal{I} \\ |t-s| \leq h}} \pm \{\alpha_n(t) - \alpha_n(s)\}. \tag{3.2.31}$$

Le fait suivant est une conséquence du Théorème 1.7 et à fortiori du Corollaire 3.6 établi au paragraphe 3.2.1.

**Fait 12.** *Soient $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ et $\mathcal{I}$ tels que dans le Corollaire* 3.6. *Alors, lorsque $n \to \infty$, pour tout $\gamma > 0$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\omega_{n,\mathcal{I}}^{\pm}(\gamma h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - \gamma^{1/2} \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.32}$$

**Lemme 3.10.** *Lorsque $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ vérifie la condition* (3.2.13) *du Corollaire* 3.6*, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{t \in I} \frac{1}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \left\| \xi_n^{KM}(h; t; \cdot\,) - \xi_{n,1}^{KM}(h; t; \cdot\,) \right\| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.33}$$

**Preuve.** On pose

$$\delta = \max_{u \in I} \varphi(u) := \max_{u \in I} f(u)(1 - G(u)) > 0. \tag{3.2.34}$$

D'après la définition (3.2.15) de $H_1(\cdot\,)$, on a uniformément en $s, t \in I$,

$$|H_1(t) - H_1(s)| \leq \delta |t - s|. \tag{3.2.35}$$

Combinée avec les définitions (3.2.22) de $w_{n,1}(h)$ et (3.2.31) de $\omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)$, l'inégalité ci-dessus implique que pour tout $h \in \mathcal{H}_n$,

$$\omega_{n,1}(h) \leq \omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(\gamma h).$$

Alors, d'après la définiton (3.2.23) de $\omega^*_{n,1}$ et (3.2.32) du Fait 12, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, lorsque $n \to \infty$

$$\mathbb{P}\left(\omega^*_{n,1} \geq \varepsilon_0 + \delta^{1/2}\right) \to 0$$

On réunit les observations précédentes avec le fait que d'après la condition (3.2.13),

$$O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{b_n}{2\log_+(1/a_n)}}\right) = o_{\mathbb{P}}(1),$$

pour voir que, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\omega^*_{n,1} \times o_{\mathbb{P}}(1) + O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{b_n}{2\log_+(1/a_n)}}\right) \geq \varepsilon\right) \to 0,$$

avec $\varepsilon = o_{\mathbb{P}}(1)$. D'où, l'inégalité (3.2.30) nous permet de conclure.□

Soit $N \geq 1$ un entier arbitarire fixé. Pour $1 \leq i \leq N$, posons $t_{i,N} = C + (i-1)N^{-1}(D-C)$, où $[C,D] = I$, et rapportons nous aux définitions (3.2.11) des incréments du processus empirique uniforme et (3.2.34) de la fonction $\varphi(\cdot)$.

**Lemme 3.11.** *Lorsque* $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ *vérifie la condition* (3.2.13) *du Corollaire* 3.6*, lorsque* $n \to \infty$*, on a*

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\sup_{t\in I}\frac{1}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\left\|\xi^{KM}_{n,1}(h;t;\cdot) - \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; H_1(t);\cdot)}{1-G(t)}\right\| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.36}$$

**Preuve.** On pose

$$\epsilon_N := \max_{1\leq i\leq n}\left(\sup_{t_{i,N}\leq t\leq t_{i+1,N}+h}|f(t)(1-G(t)) - f(t_{i,N})(1-G(t_{i,N}))|\right).$$

Faisant usage du théorème des accroissements finis et de la définition ci-dessus, on voit que, pour tout $1 \leq i \leq N$, $t \in [t_{i,N}, t_{i+1,N}]$ et $s \in [0,1]$, pour $n$ assez grand,

$$|H_1(t+sh) - H_1(t) - s\varphi(t_{i,N})h| \leq \epsilon_N h.$$

Alors, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}&\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\sup_{t\in I}\frac{1}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\left\|\xi^{KM}_{n,1}(h;t;\cdot) - \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; H_1(t);\cdot)}{1-G(t)}\right\| \\ &\leq \left\{\frac{1}{1-G(D)}\right\} \times \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\frac{\omega^{\pm}_n(\epsilon_N h, \mathcal{I})}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}.\end{aligned}$$

Ceci, combiné avec (3.2.32) du Fait 12 et le fait qu'en choisissant $N$ assez grand pour que $\epsilon_N$ soit aussi petit que l'on veut, implique (3.2.36).□

Maintenant, on note $R$ une fonction continue et positive sur $J$ et définissons

$$M^{1/2} := \sup_{t \in I} R(t) \left\{ \frac{f(t)}{(1 - G(t))} \right\}^{1/2}. \tag{3.2.37}$$

Le lemme qui suit concerne le comportement limite quand $n \to \infty$, joint en $h \in \mathcal{H}_n$, de l'ensemble de suites de fonctions

$$\mathcal{G}_{n,I}(h, R) := \left\{ \frac{R(t)}{1 - G(t)} \times \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; H_1(t); \cdot\,)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} : t \in I \right\}. \tag{3.2.38}$$

**Lemme 3.12.** *Lorsque* $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ *vérifie la condition* (3.2.13) *du Lemme* 3.6*, lorsque* $n \to \infty$*, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{G}_{n,I}(h, R), \mathbb{S}_M\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.2.39}$$

**Preuve.** Fixons $\epsilon, \epsilon_0 > 0$ et considérons $I = [C, D]$. Tenant compte de (1.2.2) la définition de la distance de Hausdorff, il suffit de prouver que, lorsque $n \to \infty$,

$$(i) \quad \mathbb{P}\left(\mathcal{G}_{n,I}(h, R) \subseteq \mathbb{S}_M^{\epsilon} : \ \forall h \in \mathcal{H}_n\right) \to 1, \tag{3.2.40}$$

et

$$(ii) \quad \mathbb{P}\left(\mathbb{S}_M \subseteq \mathcal{G}_{n,I}(h, R)^{\epsilon} : \ \forall h \in \mathcal{H}_n\right) \to 1. \tag{3.2.41}$$

On renvoie le lecteur à (3.2.12) la définition de l'ensemble de suites de fonctions $\mathcal{F}_{n;\mathcal{I},\gamma}(\cdot\,)$. Comme $\{H_1(t) : t \in I\} \subseteq [0, 1]$, on observe que, pour tout $h \in \mathcal{H}_n$,

$$\left\{ \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; H_1(t); \cdot\,)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} : t \in I \right\} \subseteq \mathcal{F}_{n;\mathcal{I},\phi(t_{i,N})}(h).$$

De ce fait, d'après l'assertion (3.2.14) du Lemme 3.6, pour tout $t \in I$ et $h \in \mathcal{H}_n$, il existe une fonction $g \in \mathbb{S}$ (voir définition (3.1.6)) telle que

$$\left\| \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; H_1(t); \cdot\,)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - \varphi(t_{i,N})^{1/2} g(\cdot\,) \right\| < \epsilon_0 := \epsilon \times \frac{1 - G(t)}{R(t)},$$

ce qui implique que, pour tout $1 \leq i \leq N$, $t \in [t_{i,N}, t_{i+1,N}]$ et $h \in \mathcal{H}_n$,

$$\left\| \frac{R(t)}{1 - G(t)} \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; H_1(t); \cdot\,)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - \frac{R(t)}{1 - G(t)} \left\{ f(t_{i,N})(1 - G(t_{i,N}) \right\}^{1/2} g(\cdot\,) \right\| < \epsilon.$$

D'où, l'assertion (3.2.40)$(i)$ découle de (3.2.37) et (3.2.38) ci-dessus. Maintenant, établissons (3.2.40)$(ii)$. Soit la fonction $g_i \in \mathbb{S}_{\varphi(t_{i,N})}$, $1 \leq i \leq n$, d'après (3.2.14), pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $t_0 \in I$ tel que pour tout $h \in \mathcal{H}_n$,

$$\left\| \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; t_0; \cdot\,)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - g_i(\cdot\,) \right\| < \epsilon \times \frac{1 - G(t)}{R(t)},$$

avec $t \in [t_{i,N}, t_{i+1,N}]$, $1 \leq i \leq N$ fixé. Ceci implique que pour tout $h \in \mathcal{H}_n$,

$$\left\| \frac{R(t)}{1 - G(t)} \frac{\xi_n(\varphi(t_{i,N})h; t_0; \cdot\,)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - \frac{R(t)}{1 - G(t)} g_i(\cdot\,) \right\| < \epsilon.$$

Considérons la fonction $g^*(\cdot\,) = \frac{R(t_0)}{1 - G(t_0)} g_i(\cdot\,), t \in [t_{i,N}, t_{i+1,N}], 1 \leq i \leq N$. Comme $g_i \in \mathbb{S}_{\varphi(t_{i,N})}$, on observe que $g* \in \mathbb{S}_M$. Puis il suffit de choisir $t_0 = H_1(t)$ pour conclure à (3.2.40)$(ii)$.$\square$

### 3.2.6 Preuve du Théorème 3.2

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires à la preuve du Théorème 3.2. On a la relation suivante.

$$R(t) = \left\{ \psi(t) \times \frac{1 - G(t)}{f(t)} \right\}^{1/2} \Leftrightarrow \psi(t) = R(t)^2 \times \frac{f(t)}{1 - G(t)}.$$

Alors, d'après (3.1.9) la définition de $\Lambda$ et (3.2.37) celle de $M$, on remarque que

$$\Lambda = \sup_{t \in I} \psi(t) = M.$$

On considère les définitions (3.1.5) de l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}_{n,I}^{KM}(h, \psi_n)$ et (3.2.37), et on combine les approximations (3.2.33) et (3.2.39) avec la loi limite fonctionnelle (3.2.39). D'après (3.1.4), lorsque l'on remplace $\psi(\cdot\,)$ par $\psi_n(\cdot\,)$ le théorème est vérifié.$\square$

# Deuxième partie

# Estimation non paramétrique de la Densité

# Chapitre 4

# Estimateurs à noyau de la densité

Pour un échantillon aléatoire donné, nous étudions la convergence uniforme des estimateurs à noyau de la densité. Nous présentons une loi limite pour ces estimateurs (voir le Théorème 4.1 ou le Theorem 2 dans Deheuvels et Ouadah [40]) qui a la particularité d'être établie pour la convergence en probabilité, de manière uniforme relativement à la fenêtre. L'uniformité s'étend sur toutes les valeurs de fenêtres pour lesquelles ces estimateurs sont consistants. De plus, nous fournissons la valeur explicite de la limite asymptotique de l'erreur aléatoire. Un paragraphe est dédié à la construction de bandes de certitude asymptotiques pour la densité $f(\cdot)$ (voir le Corollaire 4.9) en faisant notamment usage de techniques de bootstrap. Pour finir, nous présentons des simulations pour illustrer ces bandes de certitude.

## 4.1 Loi limite uniforme

On considère $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires répliques de $X$, indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition $\mathbb{F}(\cdot) := \mathbb{P}(X \leq \cdot)$. On fixe des intervalles $I := [c, d] \subset J =: [c', d'] \subset \mathbb{R}$ , tels que $-\infty < c' < c < d < d' < \infty$. Nous supposons que la densité $f(\cdot) := \frac{\partial}{\partial x} F(\cdot)$ est continue et bornée sur $J$. Nous considérons l'estimateur à noyau de la densité, dit de Akaike-Parzen-Rosenblatt (voir [1],[97],[101]) défini, pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned} f_{n,h}(x) &:= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-t}{h}\right) dF_n(t), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

où

$$\mathbb{F}_n(t) := n^{-1} \# \{X_i \leq t : 1 \leq t \leq n\}, \tag{4.1.2}$$

désigne la fonction de répartition empirique basée sur les observations $X_1, \ldots, X_n$, $h > 0$ est la fenêtre des observations, et le noyau $K(\cdot)$ est une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

$(K.1)$ $K(\cdot)$ est à variation bornée et à support compact ;

$(K.2)$ $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$;

$(K.3)$ $K(\cdot)$ est une fonction continue à droite.

Le théorème suivant établi pour ces estimateurs $f_{n,h}(\cdot)$, est une loi limite en probabilité, uniforme relativement à la fenêtre. Il découle de la loi limite fonctionnelle uniforme pour les incréments du processus empirique uniforme présentée dans le Théorème 1.7 (voir le paragraphe 1.5 du Chapitre 1).

**Théorème 4.1.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que (voir la condition* (1.5.30) *du Théorème 1.7),*

$$b_n \to 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{4.1.3}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$,*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \left\{ \frac{nh}{2 \log_+(1/h)} \right\}^{1/2} \sup_{x \in I} \pm \{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\} - \sigma(f, K) \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{4.1.4}$$

*où*

$$\sigma(f, K) = \sup_{x \in I} \left\{ f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t) dt \right\}^{1/2}. \tag{4.1.5}$$

**Remarque 4.2.** 1°) L'assertion (4.1.4) reste vraie lorque $\sup_{x \in I} \pm \{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\}$ est remplacé par $\sup_{x \in I} |f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))|$.

2°) La loi limite (4.1.4) est aussi valable uniformément relativement au noyau. L'uniformité relative au noyau peut s'établir pour un ensemble des fonctions de noyau qui sont continues à droite, à variation uniformément bornée et à supports inclus dans un même compact. Notons que cet apport supplémentaire est clairement présenté dans le Théorème 6.2 et le Théorème 6.8 du Chapitre 6. La démonstration de cette possible extension fait appel à un récent Lemme de Deheuvels [29] (voir le Fait 6 au paragraphe 1.6 du Chapitre 1).

3°) Soulignons l'importance du fait que quel que soit le choix de la fenêtre $h > 0$ (comme, par exemple, par une méthode adaptative), du moment que $h \in \mathcal{H}_n$ vérifie la condition (4.1.3), la norme-sup de l'erreur aléatoire des estimateurs à noyau de la densité est bornée par une constante limite que l'on a explicitée. Notons que cette constante ne dépend d'aucune façon de la fenêtre $h$, ceci montre une des différences avec les lois limites obtenues avec la théorie du processus empirique indéxé par des fonctions combiné avec des inégalités exponentielles du type Talagrand (voir, e.g., la loi limite (4.1.9)). Nous ferons une comparaison détaillée de (4.1.4) avec les résultats de la littérature, dans le paragraphe ci-après.

4°) Quel que soit le choix de la fenêtre $h \in \mathcal{H}_n$, la norme-sup de l'erreur aléatoire des estimateurs à noyau de la densité converge vers 0 avec une vitesse optimale en $\sqrt{\log_+(1/h)/nh}$. Par définition, cette vitesse ne peut être meilleure.

5°) Donnons deux exemples qui illustrent l'intérêt pratique de notre théorème. Nous pouvons sélectionner la fenêtre des observations en utilisant une méthode adaptative, comme par exemple, la méthode plug-in (voir, e.g., Sheather et Jones [103]). On obtient une fenêtre

$$h_n^*(x) = n^{-1/5} \left\{ \frac{\tilde{f}_n(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t) dt}{(\tilde{f}_n''(x) \int_{\mathbb{R}} t^2 K(t) dt)^2} \right\} = O(n^{-1/5}),$$

qui appartien à $\mathcal{H}_n$ vérifiant (4.1.3) et où $\tilde{f}_n(\cdot)$ et $\tilde{f}_n''(\cdot)$ sont des estimateurs à noyau *pilotes.* Il est alors digne d'intérêt de remarquer que notre théorème, ainsi que les remarques

2°), 3°) et 4°) ci-dessus, sont alors réalisés pour $h_n^*$. Notons, par ailleurs, que si $h_n = h(n, X_1, \ldots, X_n)$ est un estimateur adaptatif et qu'au final il s'exprime en fonction de $n$, il suffit qu'il vérifie la condition (4.1.3) en probabilité. Maintenant, supposons que le critère de choix de $h$ est la méthode de cross-validation (voir, e.g., Hall et al. [71]). Notons $h^*$ la fenêtre obtenue et supposons que nous disposons d'un échantillon de taille $n = 1000$. Il suffit que $h^* > \log(1000)/1000$ pour que les remarques mentionnées aux points 2°), 3°) et 4°) soient vérifiées. Une autre approche serait de minimiser le critère de cross-validation sur les $h \in \mathcal{H}_n$.

6°) Des versions pondérées de (4.1.4) telles que dans le Theorem 1.2 de Deheuvels et Mason [39], peuvent être obtenues en utilisant un procédé identique à celui de la preuve du Théorème 4.1.

7°) Sur le même modèle, nous pouvons obtenir l'analogue de (4.1.4) pour les estimateurs à noyau des dérivées de la densité (voir, e.g., la section 4 dans Deheuvels et Mason [37] et Blondin [8, 9]).

8°) Une perspective d'amélioration de notre résultat est la suivante. Nous pourrions établir (4.1.4) sous des conditions minimales sur le noyau et la densité. D'une part, nous souhaiterions que la densité soit continue sur un intervalle $J$ non nécessairement borné. Et d'autre part, le support de la fonction noyau ne serait alors pas nécessairement compact. Cette perspective est envisageable au vue des articles de Deheuvels [26, 27] dans lesquels le même type de loi limite que (4.1.4) est établi sur de possibles intervalles non bornés et pour des noyaux à supports non bornés.

Considérons la condition (4.1.3) du Théorème 4.1 qui implique (4.1.4). Lorsque l'on choisit $\mathcal{H}_n = [h_n, h_n]$ dans le Théorème 4.1, on observe que cette relation implique que, lorsque $\{h_n : n \geq 1\}$ est une suite de constantes vérifiant,

$$h_n \to 0, \quad \text{et} \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty, \tag{4.1.6}$$

alors, lorsque $n \to \infty$,

$$\left\{ \frac{nh_n}{2\log_+(1/h_n)} \right\}^{1/2} \sup_{x \in I} \pm \{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \left\{ \sup_{x \in I} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \right\}^{1/2}. \tag{4.1.7}$$

La propriété (4.1.7) est bien connue (voir, e.g., le Theorem 1.1 dans Deheuvels et Einmahl [33], et le Theorem 1.2 dans Deheuvels et Mason [39]). Elle a été énoncée pour la première fois dans le Theorem B de Silverman [106] (pour une version presque sûre, voir aussi Deheuvels [22], Deheuvels et Mason [37] et Stute [109]) sous des conditions plus fortes que (4.1.6). La convergence (4.1.7) (et donc (4.1.4)) n'a pas lieu presque sûrement pour une densité $f(\cdot)$ arbitaire (continue sur $J$), sans des conditions supplémentaires. Si en plus de la condition (4.1.6), on suppose que

$$\frac{\log(1/h_n)}{\operatorname{loglog} n} \to c \in [0, \infty], \quad h_n \downarrow 0, \quad \text{et} \quad nh_n \uparrow \infty, \tag{4.1.8}$$

alors (voir, e.g., le Theorem 1.1 et la discussion, pp. 1304-1305 dans Deheuvels et Einmahl

[33]), on a, p.s.,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{nh_n}{2\left(\log_+(1/h_n)+\operatorname{loglog} n\right)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}\pm\{f_{n,h_n}(x)-\mathbb{E}(f_{n,h}(x))\}\\
&\qquad=\left\{\sup_{x\in I} f(x)\int_{\mathbb{R}}K^2(t)dt\right\}^{1/2},\\
&\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{nh_n}{2\left(\log_+(1/h_n)+\operatorname{loglog} n\right)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}\pm\{f_{n,h_n}(x)-\mathbb{E}(f_{n,h}(x))\}\\
&\qquad=\left(\frac{c}{c+1}\right)^{1/2}\left\{\sup_{x\in I} f(x)\int_{\mathbb{R}}K^2(t)dt\right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

avec la convention que $c/(c+1)=1$ lorsque $c=\infty$ dans (4.1.8). De ce fait, une version p.s. de (4.1.4) recquiert au minimum que la suite $a_n\in\mathcal{H}_n$ vérifie la première condition de (4.1.8) avec $c=\infty$.

De nombreux auteurs (voir, e.g., Einmahl et Mason [61], Deheuvels et Mason [39], Dony [48], Dony et Einmahl [49, 50], Dony et al. [51], Dony et Mason [52], Einmahl et Mason [62], Mason [88, 89], Mason et Swanepoel [91], Viallon [118]) ont utilisé la théorie du processus empirique indexé par des fonctions pour obtenir des théorèmes de convergence uniforme en la fenêtre dans l'esprit de (4.1.4). La plupart de ces résultats ont été donné pour la convergence presque sûre. Par exemple le Theorem 1 de Einmahl et Mason [62] montre que, pour tout $r>0$, on a p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{\frac{r\log n}{n}\le h\le 1}\left\{\frac{nh}{\log(1/h)\vee\operatorname{loglog} n}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}|f_{n,h}(x)-\mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)|\right)=:\mathcal{K}(I,r)<\infty,$$

où la valeur explicite de la constante $\mathcal{K}(I,r)$ est inconnue. Varron et Van Keilegom [116] (voir aussi Varron [114] et le Corollary 1.1, p. 1048 dans Varron [115]) on évalué la limite p.s.

$$\mathcal{L}\quad:=\quad\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\frac{nh}{2\log(1/h)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}|f_{n,h}(x)-\mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)|\right),\tag{4.1.9}$$

où $\mathcal{H}_n=[h_n',h_n'']$, et $h_n',h_n''$ sont des suites de constantes vérifiant (4.1.6)–(4.1.8), parmi d'autres conditions. Leurs méthodes de preuve sont appropriées pour obtenir une version p.s. de

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}|f_{n,h}(x)-\mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)|\xrightarrow{\mathbb{P}}\left\{\sup_{x\in I}f(x)\int_{\mathbb{R}}K^2(t)dt\right\}^{1/2},$$

qui s'avère être une version plus faible que (4.1.4) en terme de convergence uniforme relativement à $h\in\mathcal{H}_n$. Cette version est d'ailleurs une conséquence du Théorème 4.1. Par ailleurs, il faut remarquer que dans l'assertion ci-dessus, rien n'assure le fait que la limite asymptotique, ici égale à $\left\{\sup_{x\in I}f(x)\int_{\mathbb{R}}K^2(t)dt\right\}^{1/2}$, soit la même pour tout $h\in\mathcal{H}_n$.

Maintenant, faisons une remarque sur le biais de notre estimateur $f_{n,h}(\cdot)$. Pour prouver la consistance de l'estimateur à noyau $f_{n,h}(\cdot)$, on étudie la différence

$$f_{n,h}(x)-f(x)=\underbrace{f_{n,h}(x)-\mathbb{E}(f_{n,h}(x))}_{(1)}+\underbrace{\mathbb{E}(f_{n,h}(x))-f(x)}_{(2)},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Le terme (1) est aléatoire et le terme (2) est déterministe. Ce dernier correspond au biais de l'estimateur et son ordre dépend des propriétés analytiques de la densité $f(\cdot)$ et du noyau $K(\cdot)$ (voir, e.g., p.38 dans Silverman [106]). En pratique, il est important de choisir une fenêtre $h > 0$ de sorte qu'il y ait un bon compromis entre l'ordre du terme (1) et celui du biais (2) (compromis biais-variance). En effet, pour toute valeur de $n \geq 1$, lorsque la fenêtre décroit, (1) augmente et (2) diminue, et l'effet inverse se produit lorsqu'elle croit. Le Théorème 4.1 montre que le terme aléatoire (1) est de l'ordre $O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{\log_+(1/h)}{nh}}\right) = o_{\mathbb{P}}(1)$ pour tout $h \in \mathcal{H}_n$, uniformément en $x \in I$. On s'intéresse maintenant, à l'évaluation de l'ordre du biais (2), uniformément en $x \in I$ pour certains $h \in \mathcal{H}_n$. Nous désignons la dérivée de Lebesgue de $f(\cdot)$ d'ordre $l \geq 0$, par

$$f^{(l)}(x) = \tfrac{d^l}{dx} f(x) \text{ pour } x \in I. \tag{4.1.10}$$

Et, on considère une fonction noyau $K(\cdot)$ qui vérifie les conditions $(K.1)$-$(K.3)$. Pour tout entier $p, q \geq 0$, on pose

$$[t^p K^q] = \int_{\mathbb{R}} t^p K^q(t) dt.$$

Supposons que les conditions suivantes sont aussi vérifiées.

$(F.1)$ $f(\cdot)$ est $l$ fois continûment différentiable et il existe une constante $0 < c < \infty$ telle que $\sup_{x \in I} |f^{(l)}(x)| \leq c$ ;

$(K.4)$ $[t^p K] = 0$, pour $p = 1, \ldots, l-1$ et $[t^l K] \neq 0$.

D'après la définition (4.1.12) de $\mathbb{E}f_{n,h}(\cdot)$, on observe que pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_{n,h}(x)) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t) dt - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(z) f(x - zh) dz - f(x). \end{aligned}$$

On applique la formule de Taylor pour obtenir le développement limité d'ordre $l$ qui suit.

$$f(x - zh) = f(x) - zhf^{(1)}(x) + \frac{z^2h^2}{2} f^{(2)}(x) + \ldots + (-1)^l \frac{z^l h^l}{l!} f^{(l)}(x) + o(z^l h^l).$$

Alors, d'après les conditions $(K.3)$et $(K.4)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_{n,h}(x)) - f(x) &= f(x) \int_{\mathbb{R}} K(z) dz - \int_{\mathbb{R}} K(z) zhf^{(1)}(x) dz + f^{(2)}(x) \int_{\mathbb{R}} K(z) \frac{z^2h^2}{2} dz + \\ &\quad \ldots + f^{(l)}(x)(-1)^l \int_{\mathbb{R}} K(z) \frac{z^l h^l}{l!} dz + \int_{\mathbb{R}} K(z) o(z^l h^l) dz - f(x) \\ &= \frac{h^l}{l!} f^{(l)}(x)(-1)^l \int_{\mathbb{R}} z^l K(z) dz + o(z^l h^l). \end{aligned}$$

Tenant compte de l'égalité ci-dessus, lorsque la condition $(F.1)$ est vérifiée, lorsque $n \to \infty$, on voit que

$$\sqrt{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}} \sup_{x \in I} \pm \{\mathbb{E}(f_{n,h}(x)) - f(x)\} = O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}} \times h^l\right). \tag{4.1.11}$$

Dans le paragraphe qui suit, nous expliquons pourquoi ce résultat est satisfaisant. Lorsque $[tK] = 0$, $[t^2K] \neq 0$, et que $f(\cdot)$ a des dérivées continues d'ordre 1,2,3 sur $J$, en pratique, il est commun de choisir $h$ en minimisant l'erreur moyenne quadratique [MSE] (ou les erreurs moyenne quadratique intégrée [MISE] et moyenne quadratique intégrée asymptotique [AMISE]) (voir Wand et Jones [119]) définie ainsi.

$$MSE(x) := \{\mathbb{E}(f_{n,h}(x) - f(x))\}^2 + Var(f_{n,h}(x)).$$

Le choix optimal (pour MSE) est $h = h_n = Cn^{-1/5}$, où $C > 0$ est une constante appropriée :

$$C := \left( \frac{f(x)[K^2]}{\{\int_{\mathbb{R}} f^{(2)}(x)^2 dx\} [t^2 K]^2} \right)^{1/5},$$

où $f^{(2)}(\cdot)$ est défini au point (4.1.10). On remarque que la constante $C$ dépend de la densité qui est inconnue. Pour remédier à ce problème, des méthodes de choix de fenêtres dites adaptatives (*data-driven bandwidths*), qui dépendent donc des observations dont on dispose et éventuellement de leur emplacement, sont couramment utilisées. Il existe plusieurs méthodes de ce type pour l'estimation de $f_{n,h}(\cdot)$ (voir les sections 2.3 et 2.4 dans Deheuvels et Mason [39], Berlinet et Devroye [5]). Citons, par exemple, les méthodes plug-in (voir Sheater et Jones [103], et Hall et Marron [70]) et de cross-validation (voir Hall et al. [71], et Jones et al. [75]) qui ne dépendent pas de la localisation de $x \in \mathbb{R}$ , et la méthode des plus proches voisins (voir Fix et Hodges [65], Loftsgaarden et Quensenberry [82] et le Chapitre 5) qui elle dépend de la localisation de $x \in I$. Le choix de fenêtre optimal pour les méthodes de plug-in et de cross-validation est du type

$$h = h_n = cn^{-\delta}, \text{ où } 0 < c < \infty \text{ et } 1/5 \leq \delta < 1.$$

Nous évaluons la quantité de droite dans (4.1.11) pour différents $h \in \mathcal{H}_n$. Dans le cas présenté précedemment avec $h_n = cn^{-\delta}$, il suffit que $l \geq 2$ pour que le biais (2) tende vers 0. D'autre part, notons que si $h$ est du type $h = O(n^{-\alpha} \log n)$, $\alpha \geq 1$, il suffit de prendre $l > (1 - \alpha)/2\alpha$.

### 4.1.1 Preuve

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ , on observe que

$$\mathbb{E}(f_{n,h}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-t}{h}\right) dF(t). \tag{4.1.12}$$

Par un changement d'échelle, nous pouvons supposer que le support de $K(\cdot)$ est inclus dans $[0, 1]$ et poser $\tilde{K}(u) := K(-u)$. Compte tenu des définitions (4.1.1) de $f_{n,h}(x)$ et (4.1.12) de $\mathbb{E}f_{n,h}(x)$, des conditions $(K.1)$ et $(K.3)$, et en effectuant une intégration par parties, on voit que pour tout $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x)) &= h^{-1} \int_0^1 K\left(\frac{x-t}{h}\right) d\{\mathbb{F}_n(t) - \mathbb{F}(t)\} \\ &= h^{-1} \int_0^1 K(u) d\{\mathbb{F}_n(x - hu) - \mathbb{F}(x - hu) - \mathbb{F}_n(x) + \mathbb{F}(x)\} \\ &= -h^{-1} \int_0^1 \{\mathbb{F}_n(x + hu) - \mathbb{F}(x + hu) - \mathbb{F}_n(x) + \mathbb{F}(x)\} d\tilde{K}(u). \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, posons $\mathbb{F}_n(x) = \mathbb{U}_n(\mathbb{F}(x))$, où $\mathbb{U}_n(\cdot)$ désigne la fonction de répartion empirique uniforme (voir la définition (1.3.7) au paragraphe 1.3 du Chapitre 1).

Alors, d'après les égalités précédentes et usant de la définition (1.3.8) du processus empirique uniforme $\alpha_n(\cdot\,)$, on a

$$\begin{aligned} f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x)) &= -h^{-1}\int_0^1 \{\mathbb{U}_n(\mathbb{F}(x+hu)) - \mathbb{F}(x+hu) - \mathbb{U}_n(\mathbb{F}(x)) + \mathbb{F}(x)\} d\tilde{K}(u) \\ &= -h^{-1}n^{-1/2}\int_0^1 \{\alpha_n(\mathbb{F}(x+hu)) - \alpha_n(\mathbb{F}(x))\} d\tilde{K}(u). \qquad (4.1.13) \end{aligned}$$

pour $h \in \mathcal{H}_n$, et $x$ qui varie dans un intervalle $[C, D] \subseteq I = [c, d]$, tel que $C < D$. Soit $x_0 \in [C, D]$ un point en lequel $f$ atteint son maximum et tel que $f(x_0) = \sup_{x\in[C,D]} f(x) > 0$, pour éviter toute dégénérence. D'après (4.1.13), on observe que

$$n^{1/2}h\,(f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))) = -\int_0^1 \xi_n(hf(x_0); \mathbb{F}(x); \tau(u)) d\widetilde{K}(u),$$

où

$$\tau(u) = \frac{\mathbb{F}(x+hu) - \mathbb{F}(x)}{hf(x_0)} \quad \text{pour} \quad 0 \le u \le 1.$$

Une application de la formule de Taylor montre que

$$\|\tau - \mathbb{I}\| = \sup_{0\le u\le 1} |\tau(u) - u| \le \eta(C, D) := \sup_{C-h_0\le y\le D+h_0} \left|\frac{f(y)}{f(x_0)} - 1\right|. \qquad (4.1.14)$$

On considère $h \in \mathcal{H}_n$ et on suppose que l'on a alors, $h \le h_0$ pour un certain $h_0 > 0$ assez petit pour que $[C - h_0, D + h_0] \subseteq J = [c', d']$. D'après (1.5.31) du Théorème 1.7 (voir le paragraphe 1.5 du Chapitre 1), lorsque $n \to \infty$, on a

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\left\{\frac{\xi_n(hf(x_0); \mathbb{F}(x); \cdot)}{\sqrt{2hf(x_0)\log_+(1/(hf(x_0)))}} : C \le x \le D\right\}, \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Rappelons le Lemme 1.17 dans le fait suivant.

**Fait 13.** *On note $\mathbb{I}(t) = t$ la fonction identité. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble mesurable de fonctions de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Soit*

$$\theta = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \|\tau - \mathbb{I}\|.$$

*Pour tout sous-ensemble non vide $\mathcal{F}$ de $B[0, 1]$, on pose $\mathcal{F} \circ \mathcal{T} = \{f \circ \tau : f \in \mathcal{F}, \tau \in \mathcal{T}\}$. Alors, on a*

$$\Delta\,(\mathcal{F} \circ \mathcal{T}, \mathbb{S}) \le \Delta\,(\mathcal{F}, \mathbb{S}) + \sqrt{\theta}. \qquad (4.1.15)$$

Tenant compte de (4.1.14), on applique le Fait 13 pour obtenir que, pour tout $\eta_0 > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\left\{\frac{\xi_n(hf(x_0); \mathbb{F}(x); \tau(\cdot))}{\sqrt{2hf(x_0)\log_+(1/(hf(x_0)))}} : C \le x \le D\right\}, \mathbb{S}\right) \\ \ge \tfrac{1}{2}\eta_0 + \sqrt{\eta(C, D)}\Bigg) \to 0. \qquad (4.1.16) \end{aligned}$$

Maintenant, considérons une version améliorée du Lemme 1.16, présentée dans le fait qui suit.

**Fait 14.** *Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble de $B[0,1]$ tel que $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{M} \subseteq B[0,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, on ait*

$$\Delta(\mathcal{F}, \mathbb{S}) < \eta \quad \Rightarrow \quad \left| \sup_{g \in \mathcal{F}} \Theta(g) - \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) \right| < \varepsilon. \tag{4.1.17}$$

On pose $\Theta(g) = \int_0^1 \mp g(u) d\widetilde{K}(u)$ et on considère $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions $g(\cdot)$ intégrables sur $[0,1]$. On applique le Fait 14 avec cette fonctionnelle $\Theta(\cdot)$ et ce sous-ensemble $\mathcal{M}$, et on obtient que pour tout choix de $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait (4.1.17). On pose $\eta_0 = \eta$ dans (4.1.16), et on sélectionne $C$ et $D$ de sorte que $\sqrt{\eta(C,D)} \leq \frac{1}{2}\eta$. Alors, d'après (4.1.17) et (4.1.16), lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\left( \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \sup_{C \leq x \leq D} \left\{ \frac{\pm n^{1/2} h \left(f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\right)}{\sqrt{2hf(x_0)\log_+(1/(hf(x_0)))}} \right\} - \sup_{f \in \mathbb{S}} \int_0^1 \mp f(u) d\widetilde{K}(u) \right| \geq \varepsilon \right) \to 0. \tag{4.1.18}$$

Par application d'une intégration par parties suivie de l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathbb{S}} \int_0^1 \mp f(u) d\tilde{K}(u) &= \sup_{f \in \mathbb{S}_{[0,1]}} \int_0^1 \mp \dot{f}(u) \tilde{K}(u) du \\ &\leq \sup_{f \in \mathbb{S}_{[0,1]}} \left( \int_0^1 \mp \dot{f}(u)^2 du \right) \left( \int_0^1 \tilde{K}^2(u) du \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{K}^2(u) du. \end{aligned}$$

Pour le choix convenable d'une fonction $f \in \mathbb{S}$, linégalité de Schwarz ci-dessus s'exprime sous forme d'égalité :

$$\sup_{f \in \mathbb{S}} \int_0^1 \mp f(u) d\widetilde{K}(u) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \widetilde{K}^2(u) du \right\}^{1/2} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} K^2(u) du \right\}^{1/2}.$$

Maintenant, on reconsidère la relation (4.1.18). Celle-ci est équivalente à la suivante, lorsque $n \to \infty$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Bigg( \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Bigg| \sup_{C \leq x \leq D} \left\{ \frac{nh}{2\log_+(1/h)} \right\}^{1/2} &\left(f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\right) \\ - \left\{ f(x_0) \int_{\mathbb{R}} K^2(u) du \right\}^{1/2} &\left[ \left\{ \frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)} \right\}^{1/2} - 1 + 1 \right] \Bigg| \\ \geq \varepsilon \sqrt{f(x_0)} \left\{ \frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)} \right\}^{1/2} \Bigg) &\to 0. \end{aligned}$$

D'une manière générale, on a l'inégalité

$$|a + b| \geq |a| - |b|,$$

qui se déduit de l'inégalité du triangle

$$|a| = |a + b - b| \leq |a + b| + |b|.$$

On a donc, lorsque ces quantités sont aléatoires,

$$|a| \geq c + |b| \Leftrightarrow |a| - |b| \geq c \Rightarrow |a + b| \geq c,$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(|a+b|\geq c\right)\geq \mathbb{P}\left(|a|-|b|\geq c\right)=\mathbb{P}\left(|a|\geq c+|b|\right).$$

Par application de ce principe, on constate que l'événement

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h =\Bigg\{\Bigg| &\sup_{C\leq x\leq D}\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}(f_{n,h}(x)-\mathbb{E}(f_{n,h}(x)))\\ &-\left\{f(x_0)\int_{\mathbb{R}}K^2(u)du\right\}^{1/2}\left[\Big\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\Big\}^{1/2}-1+1\right]\Bigg|\\ &\geq \varepsilon\sqrt{f(x_0)}\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\Bigg\}\end{aligned}$$

contient l'événement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_h =\Bigg\{\Bigg| &\sup_{C\leq x\leq D}\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}(f_{n,h}(x)-\mathbb{E}(f_{n,h}(x)))\\ &-\left\{f(x_0)\int_{\mathbb{R}}K^2(u)du\right\}^{1/2}\Bigg|\Bigg\}\\ &\geq \varepsilon\sqrt{f(x_0)}\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\\ &+\left|\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}-1\right|\left\{f(x_0)\int_{\mathbb{R}}K^2(u)du\right\}^{1/2}\Bigg\}.\end{aligned}$$

De la relation $\mathcal{E}_h\supseteq\mathcal{F}_h$, on déduit la relation

$$\bigcup_{h\in\mathcal{H}_n}\mathcal{F}_h\subseteq\bigcup_{h\in\mathcal{H}_n}\mathcal{E}_h,$$

qui implique donc que lorsque $n\to\infty$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Bigg(&\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\Bigg|\sup_{C\leq x\leq D}\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}(f_{n,h}(x)-\mathbb{E}(f_{n,h}(x)))\\ &-\left\{f(x_0)\int_{\mathbb{R}}K^2(u)du\right\}^{1/2}\Bigg|\Bigg\}\\ &\geq \varepsilon\sqrt{f(x_0)}\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\\ &+\left|\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}-1\right|\left\{f(x_0)\int_{\mathbb{R}}K^2(u)du\right\}^{1/2}\Bigg)\to 0.\end{aligned}$$

Considérons l'expression

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sqrt{f(x_0)}\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\\ &+\left|\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}-1\right|\left\{f(x_0)\int_{\mathbb{R}}K^2(u)du\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Il existe un $h_0$ tel que, pour tout $0 < h \leq h_0$, on ait, à la fois

$$\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2} \leq 2 \quad \text{et} \quad \left|\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2} - 1\right| \leq 2\varepsilon.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sqrt{f(x_0)}\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\\&+\left|\left\{\frac{\log_+(1/(hf(x_0)))}{\log_+(1/h)}\right\}^{1/2} - 1\right|\left\{f(x_0)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)du\right\}^{1/2}\\&\leq 2\varepsilon\sqrt{f(x_0)}\left(1+\left\{\int_{\mathbb{R}} K^2(u)du\right\}^{1/2}\right).\end{aligned}$$

On conclut de tout ceci que, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Bigg(&\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\sup_{C\leq x\leq D}\Big(\pm\{f_{n,h}(x)-\mathbb{E}(f_{n,h}(x))\}\Big)\right.\\&\left.-\left\{\sup_{C\leq x\leq D} f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}\right| \geq 2\varepsilon\left\{\sup_{x\in I} f(x)\right\}^{1/2}\left(1+\left\{\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}\right)\Bigg) \to 0.\end{aligned}$$

On répète cette opération sur chacun des intervalles $[C, D]$ en nombre fini, dont l'union donne $I$ et qui vérifient $\sqrt{\eta(C, D)} < \frac{1}{2}\eta$. Comme le choix initial de $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient finalement (4.1.4).$\square$

## 4.2 Bandes de certitude et bootstrap

Cette partie est composée de deux paragraphes. Le paragraphe 4.2.1 porte sur une méthode de bootstrap et sur les résultats associés. Nous introduisons la méthode de bootstrap de Mason et Newton [90] et nous présentons deux résultats de Deheuvels et Derzko [30] sur la convergence des estimateurs à noyau. Ensuite, nous nous intéressons à l'extension de leurs résultats à l'uniformité relativement à la fenêtre. On voudrait montrer qu'un seul bootstrap permet de construire, de manière uniforme relativement à la fenêtre $h \in \mathcal{H}_n$, des bandes de certitude uniformes (en $x \in I$) et asymptotiques pour les estimateurs à noyau de la densité. Ce paragraphe est motivé par le paragraphe 4.2.2 qui traite des bandes de certitude asymptotiques. Nous y présentons cette notion ainsi qu'un corollaire du Théorème 4.1 qui montre que la valeur limite

$$\left\{\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right\}^{1/2} \times \sigma(f, K) = \left\{\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right\}^{1/2} \times \sup_{x\in I}\left\{f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2},$$

dans la relation (4.1.4) du Théorème 4.1 permet de construire des bandes de certitude asymptotique pour $\mathbb{E}f_{n,h}(x)$ pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathcal{H}_n$ (voir le Corollaire 4.9 au paragraphe 4.2.2). En pratique cette quantité n'est pas toujours évidente à évaluer. Ce n'est pas seulement dû au fait que cette constante dépende de la densité inconnue $f(\cdot)$, mais d'avantage du fait qu'elle dépende du terme $\log_+(1/h)$, $h \in \mathcal{H}_n$ (*"scale-dependent"*). La première difficulté est mineure dans la mesure où il suffit de remplacer la densité $f(\cdot)$ par un quelconque estimateur qui soit uniformément consistant sur $I$. Deheuvels [25] et

Deheuvels et Mason [39] ont montré qu'une application du lemme de Slutsky permet de faire ce changement sans perte de généralité. La deuxième difficultée présentée par le terme $\log_+(1/h)$, $h \in \mathcal{H}_n$, motive l'approche de rééchantillonage que nous allons présenter ci-après au paragraphe 4.2.1.

### 4.2.1 Bootstrap

Les méthodes de rééchantillonnage, dites aussi méthodes de bootstrap, appliquées à l'estimation non paramétrique de la densité font l'objet d'une vaste littérature. En particulier, nous citons les travaux de Efron [54], Härdle et Marron [73], Hall [69], Li et Datta [81], Claeskens et Van Keilegom [13], Deheuvels et Derzko [30] et Deheuvels [28]. Deheuvels et Derzko [30] ont introduit une méthodologie qui permet d'outrepasser les difficultés mentionnées dans l'introduction ci-dessus. Ils se sont basés sur le bootstrap introduit par Mason et Newton [90] que nous présentons dans ce qui suit.

On introduit $Z = Z_1, Z_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, qui est indépendante de la suite $X = X_1, X_2, \ldots$, et telle que

$(A.1)$ $\mathbb{E}\,(Z) = 1$ et $\mathbb{E}\,(Z^2) = 2\,;$

$(A.2)$ pour un certain $\epsilon > 0, \mathbb{E}\,(e^{tZ}) < \infty$ pour tout $|t| \leq \epsilon$.

On pose $T_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ et on définit $\{W_{i,n} : 1 \leq i \leq n\}$ une suite de poids aléatoires, par

$$W_{i,n} := \begin{cases} \frac{Z_i}{T_n} = \frac{Z_i}{\sum_{j=1}^n Z_j} & \text{lorsque} \quad T_n > 0, \\ \frac{1}{n} & \text{lorsque} \quad T_n \leq 0. \end{cases} \tag{4.2.19}$$

Maintenant, nous pouvons introduire une version bootstrappée de l'estimateur à noyau $f_{n,h}(\cdot)$. Pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f^*_{n,h}(x) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^n W_{i,n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right). \tag{4.2.20}$$

On présente dans le fait suivant deux résultats établis par Deheuvels et Derzko [30] (voir le Theorem 13.1.1 et le Corollary 13.1.1, et Deheuvels [28]).

**Fait 15.** *Pour $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes vérifiant*

$$h_n \to 0, \quad et \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty,$$

*et les conditions $(A.1)$–$(A.2)$ satisfaites, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{x\in I} \pm\{f^*_{n,h_n}(x) - f_{n,h_n}(x)\} = (1 + o_{\mathbb{P}}(1))\left\{\frac{2\log_+(1/h_n)}{nh_n}\right\}^{1/2} \times \sup_{x\in I}\left\{f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}. \tag{4.2.21}$$

*Sous les mêmes conditions, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{x\in I} \pm\{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\} = (1 + o_{\mathbb{P}}(1)) \sup_{x\in I} \pm\{f^*_{n,h_n}(x) - f_{n,h_n}(x)\}. \tag{4.2.22}$$

**Remarque 4.3.** 1°) Les assertions (4.2.21) et (4.2.22) sont aussi valables lorsque l'on remplace $\sup_{x\in I} \pm\{f^*_{n,h_n}(x) - f_{n,h_n}(x)\}$ par $\sup_{x\in I} \left|f^*_{n,h_n}(x) - f_{n,h_n}(x)\right|$ et de même pour $\sup_{x\in I} \pm \{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\}$.

2°) Notons que ces résultats ce basent sur la loi limite suivante établie par Deheuvels et Einmahl [33] (voir aussi Deheuvels [22], et Deheuvels et Mason [37]).

**Fait 16.** *Pour $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes vérifiant*

$$h_n \to 0, \quad et \quad \frac{nh_n}{\log n} \to \infty,$$

*lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{x\in I} \pm\{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\} = (1 + o_{\mathbb{P}}(1)) \left\{\frac{2\log_+(1/h_n)}{nh_n}\right\}^{1/2} \times \sup_{x\in I} \left\{f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.$$

Dans le paragraphe ci-après, on va voir que le Fait 15 implique qu'un seul bootstrap permet d'obtenir des bandes de certitude uniformes et asymptotiques satisfaisantes pour $\mathbb{E}f_{n,h}(\cdot)$ (voir le Corollaire 4.9). Mais avant cela, nous présentons deux conjectures qui sont une extension uniforme relativement à la fenêtre du Fait 15. Nous nous permettons d'inclure ces deux conjectures dans la thèse car elles se basent sur l'utilisation d'un résultat qui sera à paraître incessamment sous peu (voir le Fait 17 et la Remarque 4.7 ci-après).

**Conjecture 4.4.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ sont telles que,*

$$b_n \to 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty.$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ et les conditions $(A.1)$–$(A.2)$ vérifiées, lorsque $n \to \infty$,*

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sqrt{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}} \sup_{x\in I} \pm\{f^*_{n,h}(x) - f_{n,h}(x)\} = (1 + o_{\mathbb{P}}(1)) \sup_{x\in I} \left\{f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}. \tag{4.2.23}$$

**Remarque 4.5.** L'assertion (4.2.23) est équivalente au fait de dire que pour tout $h \in \mathcal{H}_n$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\sup_{x\in I} \pm\{f^*_{n,h}(x) - f_{n,h}(x)\} = (1 + o_{\mathbb{P}}(1)) \left\{\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right\}^{1/2} \times \sup_{x\in I} \left\{f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.$$

**Conjecture 4.6.** *Sous les conditions du Théorème 4.4, pour tout $h \in \mathcal{H}_n$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{x\in I} \pm\{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))\} = (1 + o_{\mathbb{P}}(1)) \sup_{x\in I} \pm\{f^*_{n,h}(x) - f_{n,h}(x)\}$$

**Corps de preuve de la Conjecture 4.4.** On souhaite suivre le principe de preuve du Theorem 13.1.1 de Deheuvels et Derzko [30] (voir p.182–185 dans [30]). Pour cela, on suppose que le Fait 17 présenté par la suite est vérifié. Comme notre résultat dépend ainsi d'un article en cours de publication, nous le présentons sous cette réserve (voir la Remarque 4.7). Introduisons quelques notations avant d'énoncer ce résultat. On note $G(\cdot) = \mathbb{P}(Z \leq \cdot)$ la fonction de distribution de la variable aléatoire $Z$ vérifiant les conditions $(A.1)$–$(A.2)$, et $H(\cdot)$ sa fonction de quantile associée. Les variables aléatoires $V_1 := F(X_1), V_2 := F(X_2), \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $(0,1)$, et elles vérifient, avec probabilité 1, que $Z_1 = H(V_1), Z_2 = H(V_2), \ldots$ On voit alors que le couple $(X,V)$ possède une densité jointe $f_{X,V}(x,v) = f(x)\mathbb{I}_{[0,1]}(v)$ continue sur $J \times [0,1]$. Cependant, d'après les travaux de Deheuvels et Mason [39], le couple $(X,V)$ ne satisferait pas les conditions recquises pour l'estimation de l'espérance conditionnelle, dite aussi fonction de régression et définie au point (4.2.24). De ce fait, on effectue la transformation qui suit. On désigne par $\phi(\cdot)$ la fonction de distribution d'une loi normale standard et par $\phi^{-1}(\cdot)$ la fonction de quantile associée. Ensuite, pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = \phi^{-1}(V_n)$ et on observe que $Z_n - 1 = \psi(Y_n) = H(\phi(Y_n)) - 1$, où $\psi(y) := H(\phi(y)) - 1$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. On voit maintenant que le couple $(X,Y)$ possède une densité jointe $f_{X,Y}(x,y) = f(x)\phi(y)$ continue sur $J \times \mathbb{R}$ . Sous l'hypothèse $(A.1)$, pour tout $x \in J$, on a

$$m_\psi(x) := \mathbb{E}(\psi(Y)|X = x) = \mathbb{E}(Z) - 1 = 0, \tag{4.2.24}$$

et

$$\sigma_\psi^2(x) := Var(\psi(Y)|X = x) = Var(Z) = 1.$$

Maintenant, pour tout $n \geq 1$ et $h > 0$, on pose

$$\begin{aligned}
r_{n,h}(x) &:= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n \psi(Y_i)K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \\
&= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n Z_iK\left(\frac{x - X_i}{h}\right) - f_{n,h}(x) \\
&= \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\right\} f_{n,h}^*(x) - f_{n,h}(x),
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

où $f_{n,h}^*(\cdot)$ est défini au point (4.2.20).

**Fait 17.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que*

$$b_n \to 0 \quad \textit{et} \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty.$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ et les conditions $(A.1)$–$(A.2)$ vérifiées, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I} \pm\{r_{n,h}(x) - \mathbb{E}(r_{n,h}(x))\} - C(\sigma_\psi^2, f, K)\right| = o_{\mathbb{P}}(1),$$

*où*

$$C(\sigma_\psi^2, f, K) = \sup_{x\in I}\left\{\sigma_\psi^2(x)f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.$$

Pour finir, grâce à la relation (4.2.25) et au Fait 17, il suffirait de poursuivre avec des arguments identiques à ceux présentés p.184–185 dans [30].□

**Remarque 4.7.** Le Fait 17 pourra être démontré en utilisant la loi limite fonctionnelle pour le processus empirique uniforme multidimensionnel qui est à paraître dans Deheuvels [29].

### 4.2.2 Bandes de certitude asymptotiques

Soit $\theta_n = \theta_n(X_1, \ldots, X_n) \geq 0$ une suite de fonctions mesurables positives qui dépendent des observations $X_1, \ldots, X_n$ et de $n \geq 1$, telle que, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x\in I} |f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))| \leq \theta_n(1+\varepsilon)\right) \to 1,$$

et

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x\in I} |f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))| \geq \theta_n(1-\varepsilon)\right) \to 1.$$

La statistique $\theta_n$ permet de construire des bandes de certitude asymptotiques uniformes sur $I$ pour $\mathbb{E}(f_{n,h}(x))$. On utilise le terme de bandes car elles représentent les bornes fonctionnelles supérieures et inférieures de $\mathbb{E}(f_{n,h}(x))$. Par ailleurs, on parle de bande de certitude et non de bande de confiance car dans le cas présent, $\theta_n$ ne dépend pas d'un niveau de confiance $\alpha \in (0,1)$. L'intérêt pratique de ces bandes de certitude asymptotiques apparaît avec l'illustration des fonctions $(f_{n,h}(x) - \theta_n) \vee 0$ et $(f_{n,h}(x) + \theta_n) \vee 0$, pour $x \in I$. En effet, $\mathbb{E}(f_{n,h}(x))$ doit être (au sens des deux probabilités ci-dessus), avec probabilité qui tend vers 1, pour tout $x \in I$, entre (ou proche de) la borne de certitude inférieure $(f_{n,h}(x) - \theta_n) \vee 0$ et la borne de certitude supérieure $(f_{n,h}(x) + \theta_n) \vee 0$. D'après le Fait 16, pour $h = h_n$ vérifiant l'hypothèse recquise, on peut faire le choix suivant de $\theta_n$.

$$\theta_n = \theta_{n,0} := \left\{\frac{2\log_+(1/h_n)}{nh_n}\right\}^{1/2} \times \left\{\sup_{x\in I} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.$$

**Remarque 4.8.** Au vu de nos résultat, il est possible d'obtenir en pratique des bandes de certitude à $n$ fixé pour des échantillons considérés "grands" avec des choix adéquats de $a > 0$ pour un terme de normalisation du type $\log_{a,K}(u) = \log\left(a \vee \{\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\}\right)$ dans l'expression de $\theta_{n,0}$ modifié en conséquence (voir les exemples pour une loi connue, et les quatre points de la discussion de la Remark 1.7 p.233–236 dans Deheuvels et Mason [39]).

Maintenant, tirons profit du Théorème 4.1 pour construire des bandes de certitudes asymptotiques pour $\mathbb{E}f_{n,h}(\cdot)$. Il suffit de choisir $\theta_{n,0}$ défini ci-dessus, où l'on remplace $h_n$ par n'importe quel $h \in \mathcal{H}_n$ (voir un autre exemple d'application au paragraphe 6.1.1 du Chapitre 6).

**Corollaire 4.9.** *Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(f_{n,h}(x)) \in [f_{n,h}(x) - (1+\varepsilon)\theta_{n,0}, f_{n,h}(x) + (1+\varepsilon)\theta_{n,0}], \forall x \in I, \forall h \in \mathcal{H}_n) \to 1,$$

*et*

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(f_{n,h}(x)) \in [f_{n,h}(x) - (1-\varepsilon)\theta_{n,0}, f_{n,h}(x) + (1-\varepsilon)\theta_{n,0}], \forall x \in I, \forall h \in \mathcal{H}_n) \to 0,$$

*où*

$$\theta_{n,0} := \left\{\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right\}^{1/2} \times \sup_{x\in I}\left\{f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.$$

*Alors, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, les intervalles $[A_{n,K,h}(x), B_{n,K,h}(x)]$ fournissents des bandes de certitude asymptotiques pour $\mathbb{E}(f_{n,h}(x))$ uniformément en tout $x \in I$ et tout $h \in \mathcal{H}_n$, et sont définis comme suit.*

$$[A_{n,K,h}(x), B_{n,K,h}(x)] := [f_{n,h}(x) - \theta_{n,0}, f_{n,h}(x) + \theta_{n,0}].$$

Nous avons mentionné, en introduction, que ce choix pourrait être améliorer pour en faire un usage plus facile en pratique. C'est par exemple, grâce au Fait 15 que pour $h = h_n$ vérifiant l'hypothèse recquise, on va pouvoir choisir les $\theta_n$ suivants :

$$\theta_n = \theta_{n,1} := \sup_{x \in I} \pm \{f^*_{n,h_n}(x) - f_{n,h_n}(x)\},$$

ou encore

$$\theta_n = \theta_{n,2} := \sup_{x \in I} |f^*_{n,h_n}(x) - f_{n,h_n}(x)|,$$

qui sont deux statistiques qui ne dépendent que des données et qui ne présentent pas de difficulté lorsque l'échantillon des observations est de taille ordinaire. De la même manière, la Conjecture 4.2.24 nous fournit un $\theta_{n,1}$ et un $\theta_{n,2}$ identiques à ceux définis ci-dessus mais cette fois-ci pour tout $h \in \mathcal{H}_n$.

### 4.2.3 Illustration

Ce paragraphe est une illustration du Corollaire 4.9 par quelques simulations. Nous présentons des exemples de bandes de certitude pour $\mathbb{E}(f_{n,h}(\cdot))$. On considère trois cas pour la distribution de $X$. On présente des exemples pour $X$ suivant une loi uniforme sur $(0, 1)$ (voir la Figure 4.1), puis une loi normale centrée réduite (voir la Figure 4.2) et enfin une loi exponentielle de paramètre 1 (voir la Figure 4.3). Pour le choix de la fenêtre $h$, il suffit de la sélectionner dans l'intervalle $\mathcal{H}_n$, on choisira une fenêtre $h = n^{-1/5}$. Le nombre d'observations total pour l'illustration du Corollaire 4.9 est $n = 300$. Pour chacun des exemples, nous représentons sur un intervalle $I$ choisi : $\mathbb{E}(f_{n,h}(\cdot))$ [E] en trait continu et les bandes de certitude [BC] l'encadrant en pointillés. Le noyau sélectionné est le noyau d'Epanechnikov, parabolique, à support compact et défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ , par $K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbb{1}_{|x| \le 1}$.

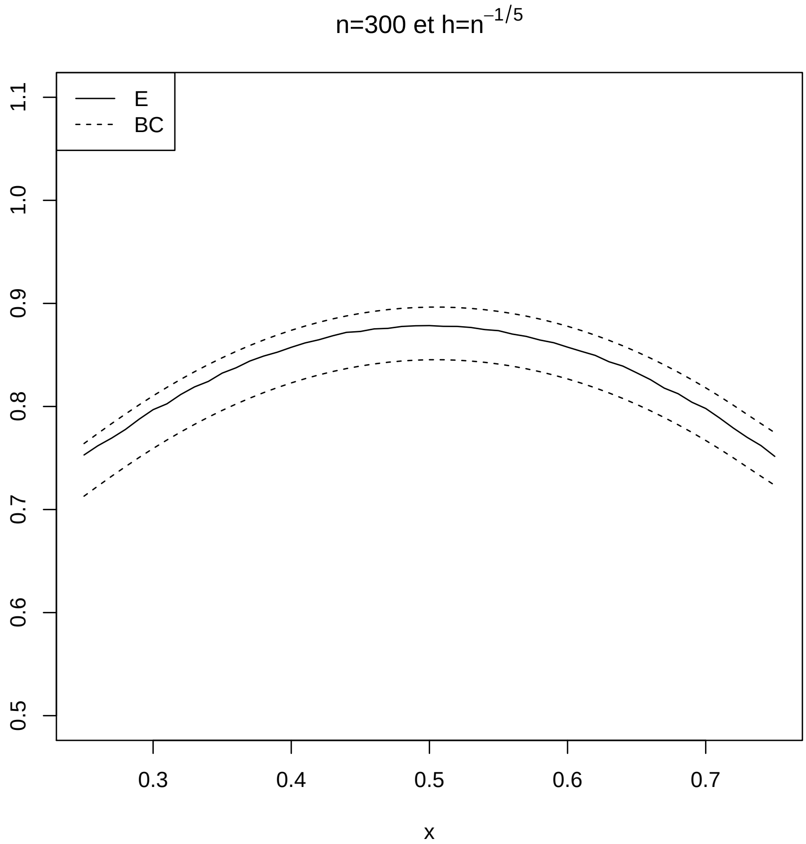


FIGURE 4.1 – Illustration du Corollaire 4.9 : Bandes de certitude pour $\mathbb{E}(f_{n,h}(\cdot))$ lorsque $X$ suit une $\mathcal{U}(0,1)$

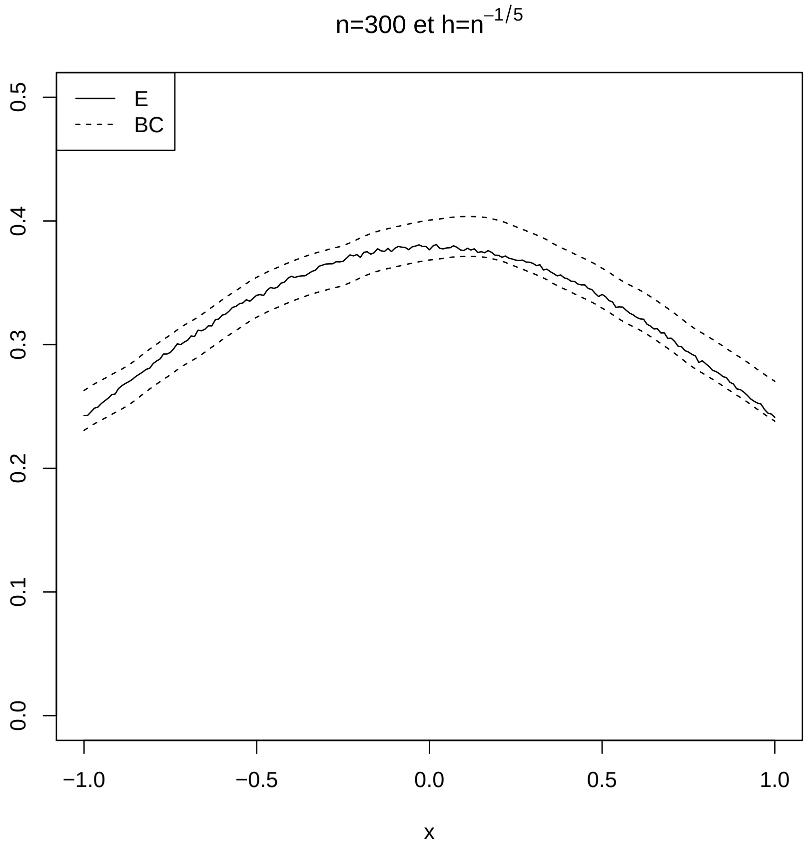


Figure 4.2 – Illustration du Corollaire 4.9 : Bandes de certitude pour $\mathbb{E}(f_{n,h}(\cdot))$ lorsque $X$ suit une $\mathcal{N}(0,1)$

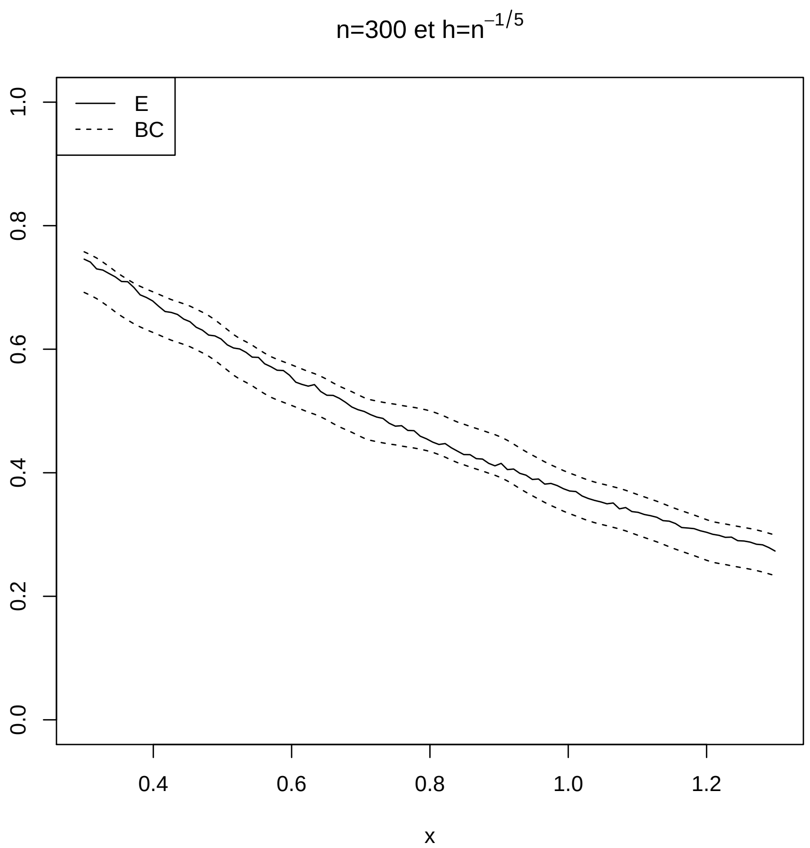


FIGURE 4.3 – Illustration du Corollaire 4.9 : Bandes de certitude pour $\mathbb{E}(f_{n,h}(\cdot))$ lorsque $X$ suit une $\mathcal{E}(1)$

# Chapitre 5

# Estimateur de la densité par la méthode des plus proches voisins

Dans ce chapitre, nous présentons deux lois limites pour l'estimateur de la densité par la méthode des plus proches voisins. La deuxième (voir le Théorème 5.2) est l'extension de l'autre (voir le Théorème 5.1) dans un contexte d'uniformité relativement à la fenêtre et de manière équivalente au nombre de plus proches voisins. Nos résultats sont établis pour la convergence en probabilité, et l'uniformité s'étend sur toutes les valeurs pour lesquelles l'estimateur est consistant. Nous fournissons également la valeur explicite de la limite asymptotique de l'erreur aléatoire de cet estimateur. Le présent chapitre a donné lieu à un article soumis (voir le Theorem 1 dans Ouadah [95]).

## 5.1 Introduction et Résultats

Nous nous intéressons à l'estimation non paramétrique de la densité $f(\cdot)$ d'une variable aléatoire $X$, par la méthode des plus proches voisins [NN] (nearest-neighbor), introduite par Fix et Hodges [65] et décrite de la manière suivante. On considère $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires répliques de $X$, indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition $\mathbb{F}(\cdot) := \mathbb{P}(X \leq \cdot)$. On note $\mathbb{F}_n(\cdot) := n^{-1}\#\{X_i \leq \cdot : 1 \leq i \leq n\}$, la fonction de répartition empirique, basée sur les $n \geq 1$ premières observations $X_1, \ldots, X_n$. Pour tout $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ , considérons les statistiques

$$R_{n,\lambda}(x) \quad := \quad \inf\{h > 0 : \mathbb{F}_n(x+h) - \mathbb{F}_n(x) \geq \lambda\}, \tag{5.1.1}$$

et

$$R_{\lambda}(x) \quad := \quad \inf\{h > 0 : \mathbb{F}(x+h) - \mathbb{F}(x) \geq \lambda\}, \tag{5.1.2}$$

et on utilise la convention $\inf_{\emptyset}(\cdot) = \infty$. Etant donné que $\mathbb{F}_n$ et $\mathbb{F}$ sont continues à droite, d'après les définitions (5.1.1) et (5.1.2), on voit que

$$\mathbb{F}_n(x + R_{n,\lambda}(x)) - \mathbb{F}_n(x) \geq \lambda \text{ et } \mathbb{F}(x + R_{\lambda}(x)) - \mathbb{F}(x) \geq \lambda.$$

Ceci entraine que $R_{n,\lambda}(x) \in (0, \infty]$ et $R_{\lambda}(x) \in (0, \infty]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Lorsque $f(\cdot) = \dot{\mathbb{F}}(\cdot)$ la densité de $X$ est continue au voisinage de $x \in \mathbb{R}$, on voit que, lorsque $\lambda \downarrow 0$,

$$M_{\lambda}(x) := \frac{\lambda}{R_{\lambda}(x)} \to f(x). \tag{5.1.3}$$

L'estimateur NN de $f(\cdot)$ de *fenêtre* $\lambda$, est l'équivalent empirique de $M_{\lambda}(\cdot)$, donné par

$$f_{n,\lambda}(x) := \frac{\lambda}{R_{n,\lambda}(x)}\,. \tag{5.1.4}$$

La convention $\lambda/\infty = 0$ pour $\lambda > 0$ donne un sens aux définitions (5.1.3) de $M_\lambda(x) \in (0,\infty]$ et (5.1.4) de $f_{n,\lambda}(x) \in (0,\infty]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. De nombreux auteurs se sont penchés sur la méthode NN. Parmi eux, nous citons Loftsgaarden et Quesenberry [82], Devroye et Wagner [46], Csőrgő et Révész [16], Mack [83], Deheuvels et Mason [37], et Viallon [118]. On fixe $I := [C,D] \subset J := [A,B]$, $-\infty < A < C < D < B < \infty$, des intervalles de $\mathbb{R}$, tels que $f(\cdot)$ soit continue et positive sur $J$. Les théorèmes suivants résultent d'une application des lois limites fonctionnelles pour les incréments du processus de quantile uniforme, présentées dans le Théorème 2.1 et le Théorème 2.3 (voir le Chapitre 2).

**Théorème 5.1.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, la suite $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ soit telle que dans le Théorème 2.1 :*

$$\lambda_n \to 0 \quad et \quad \frac{n\lambda_n}{\log n} \to \infty.$$

*Alors, lorsque $n \to \infty$,*

$$\left\{\frac{n\lambda_n}{2\log_+(1/\lambda_n)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \frac{\pm\{f_{n,\lambda_n}(x) - M_{\lambda_n}(x)\}}{f(x)} = 1 + o_{\mathbb{P}}(1).$$

**Théorème 5.2.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que dans le Théorème 2.3 :*

$$b_n \to 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{5.1.5}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$,*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \left| \left\{\frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \frac{\pm\{f_{n,\lambda}(x) - M_\lambda(x)\}}{f(x)} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.1.6}$$

**Remarque 5.3.** 1°) Nos arguments de preuve mettront en évidence le fait que la conclusion (5.1.6) du Theorem 5.2 reste toujours valide lorsque l'on remplace, respectivement, dans les definitions (5.1.3)–(5.1.4) de $M_\lambda(x)$ et $f_{n,\lambda}(x)$, $R_\lambda(x)$ et $R_{n,\lambda}(x)$, par

$$R^*_\lambda(x) = \inf\left\{h > 0 : \mathbb{F}(x + \tfrac{1}{2}h) - \mathbb{F}(x - \tfrac{1}{2}h) \geq \lambda\right\},$$

et

$$R^*_{n,\lambda}(x) = \inf\left\{h > 0 : \mathbb{F}_n(x + \tfrac{1}{2}h) - \mathbb{F}_n(x - \tfrac{1}{2}h) \geq \lambda\right\}.$$

2°) L'assertion (5.1.6) reste vraie, sous les conditions du Théorème 5.2, lorsque l'on remplace $\pm\{f_{n,\lambda}(x) - M_\lambda(x)\}$ par $|f_{n,\lambda}(x) - M_\lambda(x)|$.

3°) La méthode NN s'applique à la régression non paramétrique (voir, e.g., Beck [3], Collomb [14], Devroye [44], Burba et al. [11]).

4°) La consistance uniforme de $f_{n,\lambda}(\cdot)$ sur des intervalles bornés a été prouvé par Moore et Henrichon [93] (voir aussi Devroye et Wagner [46]), sous la condition que $f(\cdot)$ est uniformément continue et positive sur $\mathbb{R}$.

5°) Grâce à notre théorème, nous pouvons construire des bornes de certitude asymptotiques et uniformes pour $M_\lambda(\cdot)$. Et ceci, dans l'esprit de la méthode présentée p.232–233 dans Deheuvels et Mason [39], qui est décrite au paragraphe 4.2.2 du Chapitre 4 et appliquée notamment au paragraphe 6.1.1 du Chapitre 6.

6°) En ce qui concerne le terme de biais, nous renvoyons à la page 226 dans Bosq et Lecoutre [10] et à la condition $(F.1)$ donnée au paragraphe 4.1 du Chapitre 4 pour l'étude du biais des estimateurs à noyau.

Le Théorème 5.2 reste vrai, dans le cas où $a_n$ et $b_n$ sont des suites aléatoires vérifiant (5.1.5) en probabilité. Le fait d'établir des résultats uniformes realtivement au paramètre de lissage comme dans le Théorème 5.2, permet de décrire le comportement limite des estimateurs lorsque ce paramètre est éventuellement aléatoire ou dépend des données. Plusieurs méthodes de construction de telles suites de fenêtres sont proposées dans la littérature statistique (voir, e.g., les sections 2.4.1 et 2.4.2 dans Deheuvels et Mason [39], et Berlinet et Devroye [5]). Il est typiquement suggéré, d'utiliser des fenêtres de la forme $h = h_n^* = Z_n n^{-1/5}$ où $Z_n$ est une suite aléatoire, stochastiquement bornée et de limite inférieure (resp. supérieure) supérieure (resp. inférieure) à 0 (resp. $\infty$). Il s'avère que le Théorème 5.2 permet de décrire le comportement limite des estimateurs NN avec ce type de paramètre de lissage. On se réfère à Einmahl et Mason [62], et Deheuvels et Ouadah [40], pour des discussions et références concernant les estimateurs fonctionnels uniformes relativement à la fenêtre.

Maintenant, considérons le fait que la condition (5.1.5) du Théorème 5.2 implique (5.1.6). Lorsque l'on choisit $\mathcal{H}_n = [\lambda_n, \lambda_n]$ dans le Théorème 5.2, on observe que cette relation implique que, lorsque $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ est une suite de constantes vérifiant,

$$\lambda_n \to 0, \text{ et } \quad \frac{n\lambda_n}{\log n} \to \infty, \tag{5.1.7}$$

alors, lorsque $n \to \infty$,

$$\left\{\frac{n\lambda_n}{2\log_+(1/\lambda_n)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \left(\frac{\pm\{f_{n,\lambda_n}(x) - M_{\lambda_n}(x)\}}{f(x)}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 1. \tag{5.1.8}$$

La propriété (5.1.8) correspond au Théorème 5.1. Une version presque sûre de 5.1.8 a été démontré (voir, e.g., Csörgő et Révész [16], Mack [83], Deheuvels et Mason [37]) sous des conditions plus fortes que (5.1.7). La convergence (5.1.8) (et donc (5.1.6)) n'a pas lieu presque sûrement pour une densité $f(\cdot)$ arbitaire (continue sur $J$) sans des conditions supplémentaires. Si en plus de la condition (5.1.7), on suppose que

$$\frac{\log(1/\lambda_n)}{\operatorname{loglog} n} \to \infty, \qquad \lambda_n \downarrow 0, \quad \text{et} \quad n\lambda_n \uparrow \infty, \tag{5.1.9}$$

alors (voir, e.g., le Theorem 4.3 dans Deheuvels et Mason [37]), on a p.s.,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n\lambda_n}{2\log_+(1/\lambda_n)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \left(\frac{\pm\{f_{n,\lambda_n}(x) - M_{\lambda_n}(x)\}}{f(x)}\right) \quad = \quad 1.$$

De ce fait, si l'on souhaite établir une version presque sûre de (5.1.6), il faudrait que $a_n \in \mathcal{H}_n$ vérifie au moins la première condition de (5.1.9). Viallon [118] a établi un théorème de convergence uniforme relativement à $\lambda$ dans l'esprit de (5.1.6). Il montre que l'on a p.s.,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \left\{\frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \left|\frac{f_{n,\lambda}(x) - M_\lambda(x)}{f(x)}\right| = 1,$$

où $\mathcal{H}_n = [\lambda_n', \lambda_n'']$ avec $\lambda_n', \lambda_n''$ des suites de constantes vérifiant (5.1.7)–(5.1.9), et au moins une des conditions suivantes. Lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{n}\lambda_n' \log(1/\lambda_n')}{\log n \sqrt{\operatorname{loglog} \lambda_n'}} \to \infty, \text{ et } \frac{\sqrt{\lambda_n'' \log(1/\lambda_n'')}}{\lambda_n'' \log(1/\lambda_n'')} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right).$$

Notons que dans [118], $\mathbb{F}(\cdot)$ doit être deux fois continûment différentiables sur $J$, et tel que pour un certain $\gamma > 0$,

$$\sup_{u \in J} \frac{\mathbb{F}(u)(1-\mathbb{F}(u))|f'(u)|}{f^2(u)} \leq \gamma.$$

Viallon [118] a donc aussi montré que, pour $\mathcal{H}_n$ vérifiant certaines conditions, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left\{ \frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)} \right\}^{1/2} \sup_{x \in I} \left| \frac{f_{n,\lambda}(x) - M_\lambda(x)}{f(x)} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Indépendemment des conditions imposées à $\lambda$ dans [118] ou (4.1.8) (qui sont plus contraignantes que (5.1.5)), ce dernier résultat est plus faible que (5.1.6) en terme d'uniformité relative à $\lambda \in \mathcal{H}_n$. Par ailleurs, il faut remarquer que dans [118], rien n'assure le fait que la limite asymptotique, ici égale à 1, soit la même pour tout $\lambda \in \mathcal{H}_n$. Notre assertion (5.1.6) montre que ce fait est vérifié.

La preuve du Théorème 5.2 est donnée au paragraphe 5.2.3. Nous présentons des faits et préliminaires, nécessaires pour établir notre preuve, aux paragraphes 5.2.1 et 5.2.2. Nous proposons deux approches (voir les méthodes 1 et 2 au paragraphe 5.2.2). La deuxième méthode est plus courte que la première. Nous présentons tout de même la première approche car elle reste digne d'intérêt. Les preuves s'appuient sur la loi limite fonctionnelle pour le processus empirique de quantile présentée dans le Théorème 2.3 (voir aussi (2.4.23) du Corollaire 2.7).

## 5.2 Preuves

### 5.2.1 Faits utiles

Les arguments qui suivent sont nécessaires à la preuve du Théorème 5.2 et a fortiori à celle du Théorème 5.1. On désigne par $Q(t) := \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(x) \geq t\}$, pour $0 < t < 1$, la fonction de quantile associée à $\mathbb{F}(\cdot)$. On étend la définition de $Q(\cdot)$ aux extrémités de l'intervalle $[0,1]$, en posant

$$Q(0) := A := \lim_{t \downarrow 0} Q(t) \text{ et } Q(1) := B := \lim_{t \uparrow 1} Q(t).$$

Sans perte de généralité, nous prouverons le Théorème 5.2 sous les conditions que $J = [A, B]$ est le support de $\mathbb{F}(\cdot)$ et que la densité $f(\cdot) := \dot{\mathbb{F}}(\cdot)$ est continue et positive sur $J$. Ceci implique que la fonction de quantile $Q(\cdot)$ est différentiable sur $[0,1]$, de densité de quantile $q(\cdot) := \dot{Q}(\cdot)$ continue et positive sur $[0,1]$, et définie par

$$q(t) := \frac{1}{f(Q(t))} \in (0, \infty), \text{ pour } 0 \leq t \leq 1. \tag{5.2.10}$$

Sous ces hypothèses, les variables aléatoires $U_1 := F(X_1), U_2 := F(X_2), \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $(0,1)$, et elles vérifient, avec probabilité 1, que $X_1 = Q(U_1), X_2 = Q(U_2), \ldots$ On observe que (voir, e.g., la Proposition 1.1 p.98 dans del Barrio, Deheuvels et van de Geer [41]),

$$\mathbb{F}(Q(t)) = t \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } Q(\mathbb{F}(x)) = x \text{ pour } x \in J. \tag{5.2.11}$$

On désigne par $Q_n(t) := \inf\{x \geq 0 : \mathbb{F}_n(x) \geq t\}$ pour $0 < t < 1$, la fonction de quantile empirique associée à $\mathbb{F}_n(\cdot)$. De plus, on pose

$$Q_n(0) = \lim_{t\downarrow 0} Q_n(t) = \min\{X_1, \ldots, X_n\},$$

et

$$Q_n(1) = \lim_{t\uparrow 1} Q_n(t) = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Rappelons les définitions (1.3.7) de $\mathbb{U}_n(\cdot)$ la fonction de répartition empirique uniforme, basée sur les observations $U_1, \ldots, U_n$, et (2.1.1) de $\mathbb{V}_n(\cdot)$ la fonction empirique de quantile associée (voir le paragraphe 1.2 du Chapitre 1).

$$\mathbb{U}_n(u) := n^{-1}\#\{U_i \leq u : 1 \leq i \leq n\}, u \in \mathbb{R}\ ,$$

et

$$\mathbb{V}_n(v) := \inf\{u \geq 0 : \mathbb{U}_n(u) \geq v\}, 0 < v < 1.$$

Etendons la définition de $\mathbb{V}_n(\cdot\,)$ à 0 et 1, en posant

$$\mathbb{V}_n(0) = \lim_{v\downarrow 0} \mathbb{V}_n(v), \quad \mathbb{V}_n(1) = \lim_{v\uparrow 1} \mathbb{V}_n(v).$$

Observons que

$$Q_n(t) = Q(\mathbb{V}_n(t)),\ \text{pour}\ 0 \leq t \leq 1, \tag{5.2.12}$$

et

$$\mathbb{F}_n(x) = \mathbb{U}_n(\mathbb{F}(x)),\ \text{pour}\ x \in J. \tag{5.2.13}$$

Dans le fait qui suit, la relation (5.2.14) est bien connue, c'est la généralisation du cas uniforme de (2.48)(i) du Fact 6 de Deheuvels et Ouadah [40] (voir, e.g., (1.6) dans Shorack [104]). La relation (5.2.15) est une conséquence de l'inégalité de Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz [53] (voir, e.g., le Lemma 2 dans [53] et le Theorem 3.3 p. 140 dans del Barrio et al. [41]). Les lois limites (5.2.16) et (5.2.17) sont dûes à Deheuvels et Devroye [31].

**Fait 18.** *Pour tout $k \geq 1$ fixé, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$(i) \qquad \sup_{0\leq t\leq 1} |\mathbb{F}_n(Q_n(t)) - t| = n^{-1}\ \ p.s.; \tag{5.2.14}$$

$$(ii) \qquad \sup_{0\leq t\leq 1} |\beta_n(t)| = O_{\mathbb{P}}(1) : \tag{5.2.15}$$

$$(iii) \qquad \sup_{0\leq t\leq 1-k/n} \{\mathbb{V}_n(t + k/n) - \mathbb{V}_n(t)\} = O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n); \tag{5.2.16}$$

$$(iv) \qquad \sup_{0\leq t\leq 1} |\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t)) - t| = O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n). \tag{5.2.17}$$

Rappelons que

$$\alpha_n(u) := n^{1/2}\,(\mathbb{U}_n(u) - u)\ \ \text{pour}\ u \in \mathbb{R}\ , \tag{5.2.18}$$

désigne le processus empirique uniforme basé sur les observations $U_1, \ldots, U_n$ (voir la définition (1.3.8) au Chapitre 1) et qu'au point (5.2.15),

$$\beta_n(u) := n^{1/2}\,(\mathbb{V}_n(u) - u)\ \ \text{pour}\ u \in \mathbb{R}\ , \tag{5.2.19}$$

désigne le processus empirique de quantile uniforme correspondant (voir la définition (2.1.3) au Chapitre 2). Pour $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$, tel que $u < v$, on considère les statistiques (voir les définitions (2.4.16) et (2.4.19) au paragraphe 2.4 du Chapitre 2)

$$\omega_{n,\mathcal{I}}^{\pm}(h) \quad := \quad \sup_{\substack{s,t \in \mathcal{I} \\ |t-s| \leq h}} \pm\{\alpha_n(t) - \alpha_n(s)\} \tag{5.2.20}$$

et

$$\Xi_{n,\mathcal{I}}^{\pm}(h) \quad := \quad \sup_{t \in \mathcal{I} \cap [0,1-h]} \pm\{\beta_n(t+h) - \beta_n(t)\}. \tag{5.2.21}$$

Deux résultats du Corollaire 2.7 (voir le paragraphe 2.4 du Chapitre 2) sont rappelés dans le fait suivant.

**Fait 19.** *Soit* $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ *vérifiant l'hypothèse* (5.1.5) *du Théorème* 5.2*. Alors, lorsque* $n \to \infty$*, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\omega_{n,\mathcal{I}}^{\pm}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{5.2.22}$$

*et*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\Xi_{n,\mathcal{I}}^{\pm}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.23}$$

Nous aurons aussi besoin du lemme analytique suivant (voir le Lemme 1.16 au paragraphe 1.6 du Chapitre 1). Soit $\Theta : B[0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle, continue au sens de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, et bornée sur $\mathbb{S}$.

**Fait 20.** *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $\eta(\varepsilon) > 0$ *tel que, pour tout* $\mathcal{F} \subseteq B[0,1]$*, on ait*

$$\Delta(\mathcal{F}, \mathbb{S}) < \eta \quad \Rightarrow \quad \left| \sup_{g \in \mathcal{F}} \Theta(g) - \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) \right| < \varepsilon. \tag{5.2.24}$$

### 5.2.2 Lemmes préliminaires

**Remarque 5.4.** Dans les deux méthodes nous sommes partis de la différence entre $f_{n,\lambda}(Q_n(t))$ et $M_\lambda(Q(t))$ en vu de l'approximer par le module de continuité du processus empirique de quantile. Une première différence entre les deux méthodes apparaît à cette première étape. La méthode 1 s'annonce déjà plus longue car cette différence se décompose en deux termes alors qu'avec la décomposition de la méthode 2 la différence ne fait qu'un bloc. La méthode 1 avance au fur et à mesure, dans le sens où nous tentons d'affronter les difficultés dans l'ordre où elles se présentent et cela sans avoir une nette idée de celles-ci. Comme mentionné précedemment, la deuxième méthode va directement au but car ces difficultés sont connues d'avance et nous sommes déjà parés à les affronter. Nous savons qu'il va falloir considérer le cas I où nous supposons que $\mathbb{F}(t) = Q(t) = t$ et $f(t) = q(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$, puis passer au cas général. Grâce à la première méthode, plusieurs approximations et expressions des objets sont à disposition, tout devient plus simple.

#### Méthode 1

Dans ce paragraphe, nous supposerons que $\mathbb{F}(t) = Q(t) = t$ et $f(t) = q(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$, et que $\lambda$ varie dans $(0, \infty)$. On commence par écrire la décomposition suivante.

$$\begin{aligned} f_{n,\lambda}(Q(t)) - M_\lambda(Q(t)) \quad &= \quad f_{n,\lambda}(Q(t)) - f_{n,\lambda}(Q_n(t)) \\ &\quad\; + f_{n,\lambda}(Q_n(t)) - M_\lambda(Q(t)). \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

On se rapporte aux définitions (5.1.4) de $f_{n,\lambda}(\cdot)$, et (5.1.3) de $M_\lambda(\cdot)$, pour observer que

$$f_{n,\lambda}\left(Q_n(t)\right) - M_\lambda\left(Q(t)\right) \quad = \quad \frac{\lambda\left\{R_\lambda(Q(t)) - R_{n,\lambda}(Q_n(t))\right\}}{R_{n,\lambda}\left(Q_n(t)\right) R_\lambda\left(Q(t)\right)}. \tag{5.2.26}$$

Nous allons évaluer le terme de droite de l'assertion (5.2.26) dans les deux prochains lemmes. Pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq t \leq 1$, on pose $\epsilon_n(t) := \mathbb{F}_n\left(Q_n(t)\right) - t$.

**Lemme 5.5.** *Lorsque $n \to \infty$, nous avons*

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq t+\lambda\leq 1} & \Big| R_{n,\lambda}(Q_n(t)) - R_\lambda(Q(t)) - n^{-1/2}\Big\{\beta_n\left(t+\lambda\right) - \beta_n\left(t\right)\Big\}\Big| \\ & = O_{\mathbb{P}}\left(n^{-1}\log n\right). \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

*Soit $0 \leq a_n \leq 1/e$ une suite de réels telle que $na_n/\log n \to \infty$, et posons $\mathcal{K}_n = [a_n, 1/e]$ pour $n \geq 1$. Alors, lorsque $n \to \infty$,*

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda\in\mathcal{K}_n} \left\{\frac{n}{\lambda\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2} & \sup_{t\in[0,1-\lambda]} \Big| R_{n,\lambda}(Q_n(t)) - R_\lambda(Q(t)) \\ & -n^{-1/2}\Big\{\beta_n\left(t+\lambda\right) - \beta_n\left(t\right)\Big\}\Big| = o_{\mathbb{P}}\left(1\right). \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

**Preuve** Soient $t \in [0,1]$ et $\lambda \in [0, 1-t]$, et posons $x = Q(t) + h$. Combinant la définition (5.1.2) de $R_\lambda(\cdot)$ avec la relation $\mathbb{F}(Q(t)) = t$ présentée au point (5.2.11), on voit que

$$\begin{aligned} R_\lambda(Q(t)) \quad &= \quad \inf\left\{h > 0 : \mathbb{F}\left(Q(t)+h\right) - \mathbb{F}\left(Q(t)\right) \geq \lambda\right\} \\ &= \quad \inf\left\{x > 0 : \mathbb{F}(x) \geq t+\lambda\right\} - Q(t) \\ &= \quad Q(t+\lambda) - Q(t) = \lambda. \end{aligned} \tag{5.2.29}$$

Ensuite, posons $x = Q_n(t) + h$. D'après la definition (5.1.1) de $R_{n,\lambda}(\cdot)$, et la notation $\epsilon_n(t) = \mathbb{F}_n\left(Q_n(t)\right) - t$, on voit, de même, que

$$\begin{aligned} R_{n,\lambda}\left(Q_n(t)\right) \quad &= \quad \inf\left\{h > 0 : \mathbb{F}_n\left(Q_n(t)+h\right) - \mathbb{F}_n\left(Q_n(t)\right) \geq \lambda\right\} \\ &= \quad \inf\left\{x > 0 : \mathbb{F}_n(x) \geq \mathbb{F}_n\left(Q_n(t)\right) - t + t + \lambda\right\} - Q_n(t) \\ &= \quad \inf\left\{x > 0 : \mathbb{F}_n(x) \geq \epsilon_n(t) + t + \lambda\right\} - Q_n(t) \\ &= \quad Q_n(\epsilon_n(t) + t + \lambda) - Q_n(t) \\ &= \quad Q(\mathbb{V}_n(\epsilon_n(t) + t + \lambda)) - Q(\mathbb{V}_n(t)), \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

où nous avons fait usage de la relation $Q_n(s) = Q(\mathbb{V}_n(s))$ pour $0 \leq s \leq 1$ (voir le point (5.2.12)). On combine (5.2.29) avec (5.2.30), pour obtenir les relations

$$\begin{aligned} R_{n,\lambda}(Q_n(t)) - R_\lambda(Q(t)) \quad &= \quad \left\{Q\left(\mathbb{V}_n\left(\epsilon_n(t) + t + \lambda\right)\right) - Q(t+\lambda)\right\} \\ & \qquad - \left\{Q\left(\mathbb{V}_n(t)\right) - Q(t)\right\} \\ &=: \quad q_{1,n}(t,\lambda) - q_{2,n}(t). \end{aligned} \tag{5.2.31}$$

On voit que

$$\begin{aligned} q_{1,n}(t,\lambda) \quad &:= \quad Q\left(\mathbb{V}_n\left(\epsilon_n(t) + t + \lambda\right)\right) - Q(t+\lambda) \\ &= \quad \left\{Q\left(\mathbb{V}_n\left(\epsilon_n(t) + t + \lambda\right)\right) - Q\left(\mathbb{V}_n\left(t+\lambda\right)\right)\right\} \\ & \qquad + \left\{Q\left(\mathbb{V}_n\left(t+\lambda\right)\right) - Q(t+\lambda)\right\} \\ &=: \quad q_{3,n}(t,\lambda) + q_{2,n}(t+\lambda). \end{aligned} \tag{5.2.32}$$

On rappelle que d'après (5.2.14), on a $\sup_{0\leq t\leq 1}|\epsilon_n(t)| = n^{-1}$ p.s., pour déduire de (5.2.16) que lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{0\leq t\leq t+\lambda\leq 1}|\mathbb{V}_n(\epsilon_n(t)+t+\lambda) - \mathbb{V}_n(t+\lambda)| = O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n).$$

En posant $Q(t) = t$ dans (5.2.32), il vient de la relation ci-dessus que lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq t+\lambda\leq 1}|q_{3,n}(t,\lambda)| &= \sup_{0\leq t\leq t+\lambda\leq 1}|\mathbb{V}_n\left(\epsilon_n(t)+t+\lambda\right) - \mathbb{V}_n\left(t+\lambda\right)| \\ &= O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n).\end{aligned}$$

De là, à partir des relations (5.2.31) et (5.2.32), on constate que, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq t+\lambda\leq 1}\Big|R_{n,\lambda}(Q_n(t)) - R_\lambda(Q(t)) - \{q_{2,n}(t+\lambda) - q_{2,n}(t)\}\Big| \\ &= \sup_{0\leq t\leq t+\lambda\leq 1}\Big|\{q_{1,n}(t,\lambda) - q_{2,n}(t)\} - \{q_{2,n}(t+\lambda) - q_{2,n}(t)\}\Big| \\ &= O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n). \qquad (5.2.33)\end{aligned}$$

Considérant (5.2.31), et faisant appel à la définition (5.2.19) de $\beta_n(\cdot)$, on observe que,

$$q_{2,n}(t) := Q\left(\mathbb{V}_n(t)\right) - Q(t) = Q\left(t + n^{-1/2}\beta_n(t)\right) - Q(t).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}q_{2,n}(t+\lambda) - q_{2,n}(t) &= \left\{Q\left(t+\lambda+n^{-1/2}\beta_n(t+\lambda)\right) - Q(t+\lambda)\right\} \\ &\quad - \left\{Q\left(t+n^{-1/2}\beta_n(t)\right) - Q(t)\right\}.\end{aligned}$$

Lorsque l'on considère le cas $Q(t) = t$, la relation ci-dessus revient à la suivante.

$$q_{2,n}(t+\lambda) - q_{2,n}(t) = n^{-1/2}\Big\{\beta_n(t+\lambda) - \beta_n(t)\Big\}. \qquad (5.2.34)$$

Tenant compte de la définition de $\mathcal{K}_n$, on observe que la condition $\lambda \in \mathcal{K}_n$ implique que, pour tout $n$ assez grand,

$$\frac{\log n}{n} \leq a_n \leq \lambda \leq 1/e. \qquad (5.2.35)$$

Lorsque $n^{-1}\log n \leq \lambda \leq n^{-1/2}$, on a $\log(1/\lambda) \geq \frac{1}{2}\log n$, d'où

$$\frac{\sqrt{\lambda\log(1/\lambda)}}{n^{-1/2}\log n} = \sqrt{\frac{n\lambda}{\log n}} \times \sqrt{\frac{\log(1/\lambda)}{\log n}} \geq \sqrt{\frac{n\lambda}{2\log n}} \geq \sqrt{\frac{na_n}{2\log n}} \to \infty.$$

D'autre part, lorsque $n^{-1/2} \leq \lambda \leq 1/e$, on a

$$\frac{\sqrt{\lambda\log(1/\lambda)}}{n^{-1/2}\log n} \geq \sqrt{\frac{n^{1/2}}{(\log n)^2}} \to \infty.$$

D'après les relations ci-dessus, on voit que, lorsque $n \to \infty$,

$$\inf_{\lambda\in\mathcal{K}_n}\frac{n^{-1/2}\sqrt{\lambda\log(1/\lambda)}}{n^{-1}\log n} \geq \min\left\{\sqrt{\frac{na_n}{2\log n}}, \sqrt{\frac{n^{1/2}}{(\log n)^2}}\right\} \to \infty.$$

On obtient alors, que sous nos hypothèses, lorsque $n \to \infty$, on a

$$n^{-1}\log n = o\left(n^{-1/2}\inf_{\lambda\in\mathcal{K}_n}\sqrt{\lambda\log(1/\lambda)}\right).$$

Les assertions (5.2.31), (5.2.33), (5.2.34) et l'observation ci-dessus permettent de compléter la preuve du Lemme 5.5.□

**Lemme 5.6.** *Soit $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ un intervalle vérifiant la condition* (5.1.5) *du Théorème 5.2. Alors, lorsque $n \to \infty$,*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{R_\lambda\left(Q(t)\right)R_{n,\lambda}\left(Q_n(t)\right)}{\lambda^2}-1\right\}-\left\{\frac{2\log_+(1/\lambda)}{n\lambda}\right\}^{1/2}\right|$$
$$= o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.36}$$

**Preuve.** D'après (5.2.28) du Lemme 5.5, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\Bigg|\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{n^{1/2}\left\{R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_\lambda(Q(t))\right\}}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\}$$
$$-\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{\beta_n\left(t+\lambda\right)-\beta_n\left(t\right)}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\}\Bigg| = o_{\mathbb{P}}\left(1\right).$$

On considère (5.2.23) du Fait 19 et on en déduit que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{\beta_n\left(t+\lambda\right)-\beta_n\left(t\right)}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\}-\sqrt{2}\right| = o_{\mathbb{P}}(1),$$

ce qui entraîne, que lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{n^{1/2}\left\{R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_\lambda(Q(t))\right\}}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\}-\sqrt{2}\right| = o_{\mathbb{P}}\left(1\right). \tag{5.2.37}$$

On va utiliser l'hypothèse $Q(t) = t$, $t \in [0,1]$ et (5.2.29). On obtient alors, que $R_\lambda(Q(t)) = Q(t+\lambda) - Q(t) = \lambda$ pour $t \in [0, 1-\lambda]$, et donc

$$\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q_n(t))R_\lambda(Q(t))}{\lambda^2}-1\right\} = \sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q_n(t))}{R_\lambda(Q(t))}-1\right\}$$
$$= \sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_\lambda(Q(t))}{\lambda}\right\}$$
$$= \left\{\frac{\log_+(1/\lambda)}{n\lambda}\right\}^{1/2}\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{n^{1/2}\left\{R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_\lambda(Q(t))\right\}}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\}.$$

Ceci, combiné avec (5.2.37), implique que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left|\left\{\frac{n\lambda}{\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2}\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q_n(t))}{R_\lambda(Q(t))}-1\right\}-\sqrt{2}\right| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Cette dernière assertion est équivalente à (5.2.36).□

Maintenant, rappelons (5.1.4) la définition de $f_{n,\lambda}(\cdot)$, pour observer que

$$f_{n,\lambda}\left(Q(t)\right)-f_{n,\lambda}\left(Q_n(t)\right) \quad = \quad \frac{\lambda\left\{R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_{n,\lambda}(Q(t))\right\}}{R_{n,\lambda}\left(Q(t)\right)R_{n,\lambda}\left(Q_n(t)\right)}. \tag{5.2.38}$$

Nous allons évaluer le terme de droite de l'assertion (5.2.38) dans le lemme qui suit.

**Lemme 5.7.** *Lorsque $\mathcal{H}_n=[a_n,b_n]$ vérifie la condition* (5.1.5) *du Théorème 5.2, lorsque $n\to\infty$, on a*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left\{\frac{n}{\lambda\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2}\sup_{0\le t\le t+\lambda\le 1}\pm\{R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_{n,\lambda}(Q(t))\}=O_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.39}$$

**Preuve.** Dans toute la suite, nous supposerons que $\mathcal{H}_n$ vérifie la condition (5.1.5) du Théorème 5.2. Pour $t\in[0,1]$, et $\lambda\in[0,1-t]$, nous pouvons écrire

$$R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_{n,\lambda}(Q(t)) \quad =: \quad q_n(t,\lambda)-p_n(t,\lambda), \tag{5.2.40}$$

où

$$q_n(t,\lambda) \quad := \quad R_{n,\lambda}(Q_n(t))-R_\lambda(Q(t)), \tag{5.2.41}$$

et

$$p_n(t,\lambda) \quad := \quad R_{n,\lambda}(Q(t))-R_\lambda(Q(t)). \tag{5.2.42}$$

D'après (5.2.37), il s'ensuit que lorsque $n\to\infty$,

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left|\left\{\frac{n}{\lambda\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2}\sup_{t\in[0,1-\lambda]}\pm q_n(t,\lambda)-\sqrt{2}\right|=o_{\mathbb{P}}\left(1\right). \tag{5.2.43}$$

Tenant compte de (5.2.13) la relation $\mathbb{F}_n(x)=\mathbb{U}_n(\mathbb{F}(x))$ pour $x\in\mathbb{R}$ et de (5.2.18) la définition de $\alpha_n(\cdot\,)$, pour $n\ge 1$, $x\in\mathbb{R}$ et $h\ge 0$, on pose

$$\begin{aligned}
\tau_n(x,h) \quad &:= \quad n^{-1/2}\{\alpha_n(\mathbb{F}(x+h))-\alpha_n(\mathbb{F}(x))\}\\
&= \quad n^{-1/2}\{\alpha_n(x+h)-\alpha_n(x)\}\\
&= \quad \{\mathbb{F}_n(x+h)-\mathbb{F}(x+h)\}+\{\mathbb{F}_n(x)-\mathbb{F}(x)\}.
\end{aligned}$$

On rappelle (5.1.1) la définition de $R_{n,\lambda}(\cdot\,)$, pour voir que pour tout $\lambda>0$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
R_{n,\lambda}(x) \quad &= \quad \inf\left\{h>0:\mathbb{F}_n\left(x+h\right)-\mathbb{F}_n\left(x\right)\ge\lambda\right\}\\
&= \quad \inf\{h>0:\mathbb{F}_n\left(x+h\right)-\mathbb{F}_n\left(x\right)+\mathbb{F}(x+h)-\mathbb{F}(x)\\
&\qquad\qquad \ge\lambda+\mathbb{F}(x+h)-\mathbb{F}(x)\}\\
&= \quad \inf\{h>0:\mathbb{F}(x+h)-\mathbb{F}(x)\\
&\qquad\qquad \ge\lambda-\{\mathbb{F}_n(x+h)-\mathbb{F}(x+h)\}+\{\mathbb{F}_n(x)-\mathbb{F}(x)\}\}\\
&= \quad \inf\left\{h>0:h\ge\lambda-\tau_n(x,h)\right\}.
\end{aligned} \tag{5.2.44}$$

Etant donné que $\mathbb{F}_n(\cdot\,)$ est continue à droite, on voit que, pour tout $\lambda>0$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$R_{n,\lambda}(x)-\lambda-\frac{2}{n}<-\tau_n(x,R_{n,\lambda}(x))\le R_{n,\lambda}(x)-\lambda. \tag{5.2.45}$$

Considérant $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et $n \geq 1$, on pose $\mathcal{H}_n(\varepsilon) = [a_n/(1+\varepsilon), b_n/(1-\varepsilon)] \supseteq \mathcal{H}_n$. On fait usage de (5.2.22) du Fait 19, pour directement obtenir que lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n(\varepsilon)} \left| \sup_{x\in[0,1-h]} \pm \frac{n^{1/2}\tau_n(x,h)}{\sqrt{h\log_+(1/h)}} - \sqrt{2} \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.46}$$

Observons que , lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n(\varepsilon)} \frac{1}{h} \left\{ \frac{h\log_+(1/h)}{n} \right\}^{1/2} \to 0.$$

Ceci implique que, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left( \sup_{x\in[0,1-h]} |\tau_n(x,h)| \leq \varepsilon h | \forall h \in \mathcal{H}_n(\varepsilon) \right) \to 1. \tag{5.2.47}$$

Si on pose $h_1 = h_1(\lambda,\varepsilon) = \lambda/(1+\varepsilon)$ et $h_2 = h_2(\lambda,\varepsilon) = \lambda/(1-\varepsilon)$, pour tout $\lambda \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, alors $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_n(\varepsilon)$. Nous pouvons alors déduire de (5.2.47), que lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(h_1 + \tau_n(x,h_1) \leq \lambda \leq h_2 + \tau_n(x,h_2) | \forall \lambda \in \mathcal{H}_n, \forall x \in [0,1-\lambda]\right) \to 1.$$

L'assertion ci-dessus et (5.2.44) impliquent que lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left( \frac{\lambda}{1+\varepsilon} \leq R_{n,\lambda}(x) \leq \frac{\lambda}{1-\varepsilon} | \forall \lambda \in \mathcal{H}_n, \forall x \in [0,1-\lambda] \right) \to 1. \tag{5.2.48}$$

Etant donné que le choix initial de $0 < \varepsilon < 1$ est arbitraire, on conclut des précédents arguments, que lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \left\{ \sup_{x\in[0,1-\lambda]} \left| \frac{R_{n,\lambda}(x)}{\lambda} - 1 \right| \right\} = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.49}$$

Il est immédiat de remarquer que lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \left\{ \sup_{x\in[0,1-\lambda]} \left| \frac{\sqrt{R_{n,\lambda}(x)\log_+(1/R_{n,\lambda}(x))}}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda}} - 1 \right| \right\} = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.50}$$

De plus, (5.2.48) implique que, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(R_{n,\lambda}(x) \in \mathcal{H}_n(\varepsilon), \forall \lambda \in \mathcal{H}_n, \forall x \in [0,1-\lambda]\right) \to 1. \tag{5.2.51}$$

D'après la définition (5.2.42) de $p_n(t,\lambda)$ et les relations (5.2.44), (5.2.45) et (5.2.46), on voit que, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \left\{ \left\{ \frac{n}{\lambda\log_+(1/\lambda)} \right\}^{1/2} \sup_{t\in[0,1-\lambda]} \pm p_n(t,\lambda) \right\} \\
&= n^{1/2} \sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \left\{ \sup_{t\in[0,1-\lambda]} \pm \frac{R_{n,\lambda}(t) - \lambda}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda)}} \right\} \\
&= (1 + o_{\mathbb{P}}(1)) \sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \left\{ \sup_{t\in[0,1-\lambda]} \pm \frac{n^{1/2}\tau_n(t, R_{n,\lambda}(t))}{\sqrt{R_{n,\lambda}(t)\log_+(1/R_{n,\lambda}(t))}} \right\} \\
&\quad + O(n^{-1/2}) \sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \frac{1}{\sqrt{\lambda\log_+(1/\lambda)}}.
\end{aligned} \tag{5.2.52}$$

Maintenant,on se réfère à (5.2.51) et à (5.2.46) pour observer que, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a avec probabilité qui tend vers 1,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left\{ \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm \frac{n^{1/2}\tau_n(t, R_{n,\lambda}(t))}{\sqrt{R_{n,\lambda}(t)\log_+(1/R_{n,\lambda}(t))}} \right\} \\
&\leq \sup_{h \in \mathcal{H}_n(\varepsilon)} \left\{ \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm \frac{n^{1/2}\tau_n(x,h)}{\sqrt{h\log_+(1/h)}} \right\} = \sqrt{2} + o_{\mathbb{P}}(1).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, il s'ensuit de la condition (5.1.5) que, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \frac{n^{-1/2}}{\sqrt{\lambda \log_+(1/\lambda)}} = O\left( \frac{1}{\log n} \left\{ \frac{\log n}{n a_n} \right\}^{1/2} \right) \to 0.$$

Les deux dernières assertions combinées avec (5.2.40), (5.2.41), (5.2.42), (5.2.43) et (5.2.52) montrent que l'on a (5.2.39).

#### Méthode 2

Dans ce paragraphe, nous présentons deux lemmes (voir le Lemme 5.8 et le Lemme 5.9), qui sont une alternative aux lemmes 5.5, 5.6 et 5.7. Remarquons que cette approche est moins longue que celle qui a été proposée auparavant. Nous supposerons que $\mathbb{F}(t) = Q(t) = t$ et $f(t) = q(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$ (Cas I).
D'après les définitions (5.1.4) de $f_{n,\lambda}(\cdot)$, et (5.1.3) de $M_\lambda(\cdot)$, on commence par observer que

$$\begin{aligned}
f_{n,\lambda}(Q(t)) - M_\lambda(Q(t)) &= \frac{\lambda}{R_{n,\lambda}(Q(t))} - \frac{\lambda}{R_\lambda(Q(t))} \\
&= \frac{\lambda\{R_\lambda(Q(t)) - R_{n,\lambda}(Q(t))\}}{R_{n,\lambda}(Q(t))R_\lambda(Q(t))} \\
&= -\frac{\lambda^2}{R_{n,\lambda}(Q(t))R_\lambda(Q(t))} \left\{ \frac{R_{n,\lambda}(Q(t)) - R_\lambda(Q(t))}{\lambda} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.2.53}$$

Nous allons évaluer le terme de droite de l'assertion (5.2.53) dans les deux prochains lemmes.

**Lemme 5.8.** *Lorsque $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ vérifie la condition* (5.1.5) *du Théorème 5.2, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left| \left\{ \frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)} \right\}^{1/2} \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm \left\{ \frac{R_{n,\lambda}(Q(t)) - R_\lambda(Q(t))}{\lambda} \right\} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.54}$$

**Preuve.** Comme $\mathbb{F}(t) = Q(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 1$, on déduit de (5.2.12)–(5.2.13) que $\mathbb{V}_n(t) = Q_n(t)$ et $\mathbb{U}_n(t) = \mathbb{F}_n(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$. Alors, d'après (5.2.17) du Fait 18, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |Q_n(\mathbb{F}_n(t)) - t| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t)) - t| = O_{\mathbb{P}}\left(n^{-1}\log n\right).$$

On combine cette observation avec (5.1.1) la définition de $R_{n,\lambda}(\cdot\,)$ et (5.2.19) la définition de $\beta_n(\cdot\,)$ pour voir que, pour tout $\lambda > 0$ et $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} R_{n,\lambda}(x) - \lambda &= \inf\{h > 0 : \mathbb{F}_n(x+h) - \mathbb{F}_n(x)) \geq \lambda\} - \lambda \\ &= Q_n(\mathbb{F}_n(x) + \lambda) - x - \lambda \\ &= \mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(x) + \lambda) - \mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(x)) - \lambda + O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n) \\ &= n^{-1/2}\left\{\beta_n(\mathbb{U}_n(x) + \lambda) - \beta_n(\mathbb{U}_n(x))\right\} + O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n). \end{aligned} \tag{5.2.55}$$

On applique (5.2.16) du Fait 18, pour voir que lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda \geq 0}\Bigg| \sup_{0 \leq x \leq 1} \pm n^{-1/2}\left\{\beta_n(\mathbb{U}_n(x) + \lambda) - \beta_n(\mathbb{U}_n(x))\right\} \\ &\qquad - \sup_{0 \leq x \leq 1} \pm n^{-1/2}\left\{\beta_n(x+\lambda) - \beta_n(x)\right\}\Bigg| \\ &\leq 2n^{-1/2} \sup_{\substack{0 \leq s,t \leq 1 \\ |t-s| \leq 1/n}} |\beta_n(t) - \beta_n(s)| = O_{\mathbb{P}}\left(n^{-1}\log n\right). \end{aligned} \tag{5.2.56}$$

Rappelons que $Q(t) = t$ et que d'après (5.2.29), $R_\lambda(Q(t) = \lambda$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\lambda \in [0, 1-t]$. On déduit de l'ensemble des arguments ci-dessus que, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n}\left| \left\{\frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2} \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q(t)) - R_\lambda(Q(t))}{\lambda}\right\} - 1\right| \\ &= \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n}\left| \left\{\frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)}\right\}^{1/2} \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(t) - \lambda}{\lambda}\right\} - 1\right| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n}\left| \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm\left\{\frac{\beta_n(t+\lambda) - \beta_n(t)}{\sqrt{2\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\} - 1\right| \\ &\qquad + \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \frac{1}{\sqrt{2\lambda\log_+(1/\lambda)}} \times O_{\mathbb{P}}(n^{-1/2}\log n). \end{aligned} \tag{5.2.57}$$

D'après (5.2.23) du Fait 5.2.22, le premier terme de droite est égal à un $o_{\mathbb{P}}(1)$. Sous la condition (5.1.5), le second terme est égal à

$$O_{\mathbb{P}}\left(\left\{\frac{\log n}{na_n}\right\}^{1/2}\right) = o_{\mathbb{P}}(1).\square$$

**Lemme 5.9.** *Lorsque $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ vérifie la condition* (5.1.5) *du Théorème 5.2, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n}\left| \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}\left(Q(t)\right) R_\lambda\left(Q(t)\right)}{\lambda^2} - 1\right\} - \left\{\frac{2\log_+(1/\lambda)}{n\lambda}\right\}^{1/2}\right| \\ &= o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned} \tag{5.2.58}$$

**Preuve.** Nous utilisons l'assertion (5.2.29) et la condition que $Q(t) = t$, $t \in [0,1]$. Nous avons donc que $R_\lambda(Q(t)) = Q(t+\lambda) - Q(t) = \lambda$ pour $t \in [0, 1-\lambda]$, et ceci étant, on voit que

$$\sup_{t\in[0,1-\lambda]} \pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}\left(Q(t)\right) R_{\lambda}\left(Q(t)\right)}{\lambda^2}-1\right\} = \sup_{t\in[0,1-\lambda]} \pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q(t))}{R_{\lambda}(Q(t))}-1\right\}$$
$$= \sup_{t\in[0,1-\lambda]} \pm\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q(t))-R_{\lambda}(Q(t))}{\lambda}\right\}. \tag{5.2.59}$$

Il suffit alors de combiner les égalités ci-dessus avec (5.2.54) du Lemme 5.8, pour obtenir (5.2.58).□

### 5.2.3 Preuve du Théorème 5.2

**Cas I**

Nous supposons que $\mathbb{F}(t) = Q(t) = t$ et $f(t) = q(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$ (Cas I).

**Preuve du Théorème 5.2–I.**

**Méthode 1** Dans un premier temps, nous allons nous baser sur la méthode 1 du paragraphe 5.2.2. Nous allons combiner les assertions (5.2.25), (5.2.26) et (5.2.38) avec les résultats des lemmes 5.5, 5.6 et 5.7. Avant cela, considérons la remarque suivante qui va nous mener à l'utilisation de ces dernières combinaisons.

**Remarque 5.10.** Cette remarque montre une manière d'établir le corollaire du Théorème 2.3 (voir aussi la preuve du Corollaire 2.7 au paragraphe (2.4) du Chapitre 2). Pour tout choix de $a \geq 0$, $t \in [0,1]$ et $s \in [0,1]$, rappelons la définition (2.1.4) des incréments du processus empirique de quantile uniforme :

$$\zeta_n(a,t;s) := \beta_n(t+sa) - \beta_n(t).$$

D'après le Théorème 2.3 (voir le paragraphe 2.2 du Chapitre 2), lorsque $\mathcal{H}_n$ vérifie la condition (5.1.5), pour tout $\eta > 0$, lorsque $n \to \infty$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\left\{\frac{\zeta_n(\lambda;t;\cdot\,)}{\sqrt{2\lambda\log_+(1/\lambda)}} : t\in\mathcal{T}\right\}, \mathbb{S}\right) \geq \eta\right) \to 0,$$

où $\mathcal{T} := [0, 1-\lambda] \cap [u,v]$, tel que $[u,v] \subseteq [0,1], u < v$. On applique le Fait 20, avec la fonctionnelle $\Theta^{\pm}(g) := \pm g(1)$, et on obtient que pour tout choix de $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait (5.2.24). Ceci implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in\mathcal{T}} \pm\left\{\frac{\zeta_n(\lambda;t;1)}{\sqrt{2\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\} - \sup_{f\in\mathbb{S}} \pm f(1)\right| \geq \varepsilon\right) \to 0.$$

La fonctionnelle $\Theta(\cdot\,)$ vérifie le fait que $\sup_{g\in\mathbb{S}} \Theta^{\pm}(g) = 1$ (voir, e.g., (4.1.3), p.1276 dans Deheuvels et Mason [37]). On utilise cet argument et (2.1.4) la définition de $\zeta_n(h;t;u)$, pour voir que l'assertion ci-dessus est équivalente au fait que, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in\mathcal{T}} \pm\left\{\frac{\beta_n\left(t+\lambda\right)-\beta_n(t)}{\sqrt{2\lambda\log_+(1/\lambda)}}\right\} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \to 0. \tag{5.2.60}$$

Nous retrouvons, ici, l'assertion (5.2.23) du Fait 19.

Maintenant à partir de la combinaison des assertions (5.2.25), (5.2.26) et (5.2.38) avec les résultats (5.2.28), (5.2.36), (5.2.39) et (5.2.49), ainsi qu'avec (5.2.60) ci-dessus, nous obtenons que, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left( \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left| \sup_{t \in \mathcal{T}} \pm \left\{ \frac{\sqrt{n}\lambda \left\{ f_{n,\lambda}\left(Q(t)\right) - M_\lambda\left(Q(t)\right) \right\}}{\sqrt{2\lambda \log_+(1/\lambda)}} \right\} - O_{\mathbb{P}}(1) - 1 \right| \geq \varepsilon \right).$$

On déduit de l'inégalité triangulaire que $\mathbb{P}\left(|a| \geq c + |b|\right) \leq \mathbb{P}\left(|a+b| \geq c\right)$, où $a, b$ et $c$ peuvent êtrte aléatoires. Lorsque $n \to \infty$, on a donc

$$\mathbb{P}\left( \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left| \left\{ \frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)} \right\}^{1/2} \sup_{t \in \mathcal{T}} \pm \left\{ f_{n,\lambda}\left(Q(t)\right) - M_\lambda\left(Q(t)\right) \right\} - 1 \right| \geq \varepsilon + |O_{\mathbb{P}}(1)| \right) \to 0.$$

Etant donné que dans cette relation le choix de $\epsilon > 0$ est arbitraire et que $Q(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 1$, nous avons démontré (5.1.6) dans le Cas I.

**Méthode 2** Maintenant, si nous souhaitons utiliser la méthode 2, il suffit de combiner l'assertion (5.2.53) avec les résultats (5.2.54) et (5.2.58) du Lemme 5.8 et du Lemme 5.9).□

### Cas II

Nous considérons $\mathbb{F}(\cdot)$ et $Q(\cdot)$ tels que dans le paragraphe 5.1, c'est-à-dire dans le cas général. Nous poursuivons notre preuve dans le cadre de la méthode 2.

**Lemme 5.11.** *Lorsque $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ vérifie la condition* (5.1.5) *du Théorème 5.2, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left| \left\{ \frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)} \right\}^{1/2} \sup_{t \in [u,v]} \pm \left\{ \frac{\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda) - (t + \lambda)}{\lambda} \right\} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.61}$$

**Preuve.** D'après (5.2.17) du Fait 18 et (5.2.19) la définition de $\beta_n(\cdot)$, il est immédiat que, pour tout $\lambda > 0$ et $t \in [u, v]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda) - (t + \lambda) &= n^{-1/2} \left\{ \beta_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda) - \beta_n(\mathbb{U}_n(t)) \right\} \\ &\quad + O_{\mathbb{P}}\left( n^{-1} \log n \right). \end{aligned}$$

Ensuite, on déduit de l'assertion (5.2.56) du Lemme 5.8, combinée avec (5.2.23) la loi limite du Fait 19 et la condition (5.1.5), que lorsque $n \to \infty$, le résultat (5.2.61) est vérifié.□

Nous avons besoin de la variante du Lemme 5.8 énoncée comme suit.

**Lemme 5.12.** *Lorsque $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ vérifie la condition* (5.1.5) *du Théorème 5.2, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left| \left\{ \frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)} \right\}^{1/2} \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm \left\{ \frac{R_{n,\lambda}(Q(t)) - R_\lambda(Q(t))}{\lambda q(t)} \right\} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{5.2.62}$$

**Preuve.** Soient $\lambda > 0$, et $t \in [0, 1-\lambda]$. Nous combinons (5.1.1) et (5.2.29) les déefinitions respectives de $R_{n,\lambda}(\cdot)$ et de $R_\lambda(Q(t))$, avec les relations $\mathbb{F}(Q(t)) = t$, $Q_n(t) = Q(\mathbb{V}_n(t))$ et $\mathbb{F}_n(x) = \mathbb{U}_n(\mathbb{F}(x))$, for $x \in \mathbb{R}$, qui correspondent respectivement aux assertions (5.2.11), (5.2.12) et (5.2.13), pour voir que,

$$\begin{aligned} R_{n,\lambda}(Q(t)) - R_\lambda(Q(t)) &= \inf\{h > 0 : \mathbb{F}_n(Q(t)+h) - \mathbb{F}_n(Q(t)) \geq \lambda\} \\ &\quad -\{Q(t+\lambda) - Q(t)\} \\ &= \{Q_n(\mathbb{F}_n(Q(t)) + \lambda) - Q(t)\} \\ &\quad -\{Q(t+\lambda) - Q(t)\} \\ &= Q(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(F(Q(t))) + \lambda) - Q(t+\lambda) \\ &= Q(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda)) - Q(t+\lambda)\,. \end{aligned} \tag{5.2.63}$$

Fixons $\varepsilon$, tel que $0 < \varepsilon < q(u')$ et choisissons $0 \leq u' < u < v < v' \leq 1$, de tel sorte que

$$\sup_{s,t \in [u',v']} \left| \frac{q(t)}{q(s)} - 1 \right| < \varepsilon. \tag{5.2.64}$$

Si $\lambda$ varie dans l'intervalle $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, il existe un entier $n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ et $t \in [u, v]$, nous ayons $t + \lambda \in [u', v']$. De plus, pour l'événement suivant, défini par

$$\mathcal{A}_n = \{\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda) \in [u', v'] : \forall\, t \in [u, v] \text{ et } \lambda \in \mathcal{H}_n\}\,,$$

il est vérifié que $\mathbb{P}(\mathcal{A}_n) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. On se place sur cet évènement $\mathcal{A}_n$ et on applique le théorème des accroissements finis pour obtenir que, lorsque $n \to \infty$, pour tout $t \in [u, v]$ et $\lambda \in \mathcal{H}_n$, nous avons

$$\begin{aligned} & (1-\varepsilon) q(t) \left\{ \frac{\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda) - (t+\lambda)}{\lambda} \right\} \\ \leq \; & \frac{Q(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda)) - Q(t+\lambda)}{\lambda} \\ \leq \; & (1+\varepsilon) q(t) \left\{ \frac{\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t) + \lambda) - (t+\lambda)}{\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

On combine cette dernière observation avec la relation (5.2.63) et l'assertion (5.2.61) du Lemme 5.11, pour voir que, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left( \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left| \left\{ \frac{n\lambda}{2\log_+(1/\lambda)} \right\}^{1/2} \sup_{t \in [u,v]} \pm \left\{ \frac{R_{n,\lambda}(Q(t)) - R_\lambda(Q(t))}{\lambda q(t)} \right\} - 1 \right| > \varepsilon \right) \to 0.$$

Pour finir, nous faisons une partition de $[0, 1]$ en une réunion finie d'intervalles $[u', v']$ sur lesquels les oscillations de $q(\cdot)$ vérifient (5.2.64). Et nous choisissons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit pour compléter la preuve de (5.2.62).□

Nous avons besoin de la variante du Lemme 5.9 énoncée comme suit.

**Lemme 5.13.** *Lorsque $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ vérifie la condition* (5.1.5) *du Théorème 5.2, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_n} \left| \sup_{t \in [0,1-\lambda]} \pm \left\{ \frac{R_{n,\lambda}\left(Q(t)\right) R_\lambda\left(Q(t)\right)}{\lambda^2 q(t)^2} - 1 \right\} - \left\{ \frac{2\log_+(1/\lambda)}{n\lambda} \right\}^{1/2} \right| \\ & = o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned} \tag{5.2.65}$$

**Preuve.** La preuve suit le même principe de celle du Lemme 5.9, nous l'agrémentons de l'observation suivante. On utilise (5.1.3)–(5.2.10) les définitions de $M_\lambda(\cdot\,)$ et de $q(\cdot\,)$, pour voir, que lorsque $\lambda \to 0$, on a uniformément en $t \in (0,1]$,

$$\frac{\lambda q(t)}{R_\lambda(Q(t))} \to 1.$$

Pour conclure, suivons le principe des égalités (5.2.59).□

**Preuve du Théorème 5.2–II.** Maintenant, nous avons tous les ingrédients en main, pour démontrer le Théorème 5.2. Ecrivons les égalités suivantes, en utilisant les définitions (5.1.4), (5.1.3) et (5.2.10).

$$\begin{aligned}
& \frac{f_{n,\lambda}(Q(t)) - M_\lambda(Q(t))}{f(Q(t))} \\
= \quad & \frac{\lambda q(t)\{R_\lambda(Q(t)) - R_{n,\lambda}(Q(t))\}}{R_{n,\lambda}(Q(t))R_\lambda(Q(t))} \\
= \quad & -\frac{\lambda^2 q(t)^2}{R_{n,\lambda}(Q(t))R_\lambda(Q(t))}\left\{\frac{R_{n,\lambda}(Q(t)) - R_\lambda(Q(t))}{\lambda q(t)}\right\}. \qquad (5.2.66)
\end{aligned}$$

Nous complétons la preuve de (5.1.6) en assemblant l'observation ci-dessus avec les lemmes 5.12 et 5.13. (n'oublions pas de poser $Q(t) = x \in I$, $t \in [0, 1-\lambda]$).□

# Chapitre 6

# Estimateurs de la densité des temps de survie et du taux de panne

Dans ce chapitre, nous présentons des lois limites pour les estimateurs à noyau de la densité des temps de survie et du taux de panne dans un modèle de censure à droite (voir le Théorème 6.2 et le Théorème 6.8). Ces résultats sont uniformes, à la fois relativement à la fenêtre et au noyau, et sont établis pour la convergence en probabilité, pour toutes les valeurs pour lesquelles ces estimateurs sont consistants. Tout comme dans les deux chapitres précédents, la valeur de la limite asymptotique de l'erreur aléatoire des estimateurs est explicitée. Nous fournissons également des bandes de certitude asymptotiques uniformes pour l'estimateur de la densité des temps de survie (voir le Corollaire 6.4). Mentionnons que la majeure partie du présent chapitre a donné lieu à un article soumis (voir le Theorem 1, le Theorem 3 et le Theorem 4 dans Ouadah [96])

## 6.1 Lois limites uniformes

### 6.1.1 Estimateurs à noyau de la densité des temps de survie

Considérons le modèle de censure à droite, introduit précédemment au paragraphe 3.1 du Chapitre 3 de la Partie I. On suppose que $f(\cdot)$ la densité des temps de survie $X_1, \ldots, X_n$, est définie positive et continue sur $J$. Rappelons que $F(\cdot\,)$, $G(\cdot\,)$ et $H(\cdot\,)$ désignent respectivement les fonctions de répartition de $X = X_1$, $C$ et $T$ (voir le paragraphe 3.1 du Chapitre 3). Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions noyaux $K(\cdot\,)$ qui vérifient les conditions $(K.1)$–$(K.2)$–$(K.3)$ (voir le paragraphe 4.1 du Chapitre 4) et telles qu'il existe un $0 < M < \infty$ tel que $\sup_{K\in\mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}} |dK| \leq M$.

**Remarque 6.1.** De manière équivalente, nous pourrions remplacer cette dernière condition par la suivante. Dans $(K.1)$, $K(\cdot\,)$ est supposé à variation bornée et à support compact dans $\mathbb{R}$, il faudrait alors supposer que pour tout $K \in \mathcal{K}$ la variation totale de $K(\cdot\,)$ est bornée par une même constante $0 < D < \infty$ et que le support est le même.

L'estimateur à noyau de $f(\cdot\,)$ (voir, e.g., Watson et Leadbetter [121, 122], Tanner et Wong [111]) est défini, pour $K \in \mathcal{K}$, $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ , par

$$f_{n,K,h}(x) := \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-t}{h}\right) dF_n(t), \tag{6.1.1}$$

où $F_n(\cdot)$ est l'estimateur de Kaplan-Meier (voir la définition (3.1.1) au paragraphe 3.1 du Chapitre 3). Le théorème qui suit, est une loi limite pour $f_{n,K,h}(\cdot)$, qui est uniforme relativement à la fenêtre et relativement au noyau. Ce résultat est une conséquence de la loi limite fonctionnelle pour les incréments du processus empirique uniforme présentée au Théorème 3.2 (voir le Chapitre 3).

**Théorème 6.2.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{6.1.2}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{K\in\mathcal{K}} \left| \left\{ \frac{nh}{2\log_+(1/h)} \right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \left( \pm \{ f_{n,K,h}(x) - \mathbb{E}\,(f_{n,K,h}(x)) \} \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left\{ \psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)} \right\}^{1/2} \right) - \sigma(\psi, K) \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{6.1.3}$$

*où $\sigma(\psi, K) := \left\{ \sup_{x\in I} \psi(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \right\}^{1/2}$ (et où les fonctions $\psi(\cdot)$ et $\psi_n(\cdot)$ sont introduites au point* (3.1.4) *du Chapitre 3).*

**Remarque 6.3.** 1°) Dans le cas non censuré, où $G \equiv 0$ et $\psi \equiv 1$, le Théorème 6.2 se réduit au Théorème 4.1 du Chapitre 4, avec en plus l'uniformité relative au noyau.

2°) Sous (1.2.6), la loi (1.3.9) reste vraie lorsque l'on remplace $\pm \{ f_{n,K,h}(x) - \mathbb{E}\,(f_{n,K,h}(x)) \}$ par $| f_{n,K,h}(x) - \mathbb{E}\,(f_{n,K,h}(x)) |$.

3°) Rappelons que $\psi$ est une fonction spécifique continue et positive sur J. Nous pouvons la définir de diverses manières ; en voici quelques exemples (voir (1.13) dans [33]) :

$$\begin{aligned} &\psi^{(1)}(x) = 1, \quad \psi^{(2)}(x) = \frac{1}{1-G(x)}, \\ &\psi^{(3)}(x) = f(x), \quad \psi^{(4)}(x) = \frac{f(x)}{1-G(x)}, \\ &\psi^{(5)}(x) = \frac{f(x)\phi(x)}{(1-F(x))^2(1-G(x))}, \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

où $\phi(\cdot)$ est une fonction auxiliaire continue et positive sur $J$.

4°) Pour obtenir un estimateur $\psi_n(\cdot)$ de $\psi(\cdot)$, il suffit de remplacer respectivement dans (6.1.4) les fonctions $f(\cdot)$, $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ par $f_n(\cdot)$, $F_n(\cdot)$ et $G_n(\cdot)$.

5°) Lorsque l'on remplace $F(\cdot)$ par $F_n(\cdot)$ dans $\psi^{(5)}(\cdot)$ on obtient un estimateur du taux de panne $\lambda_{n,K,h}(\cdot)$, que l'on considère au paragraphe 6.1.2.

6°) Grâce à notre théorème, nous pouvons construire des bandes de certitude uniformes et asymptotiques pour $\mathbb{E}(f_{n,K,h}(\cdot))$ (voir le Corollaire 6.4). On utilisera la méthode présentée au paragraphe 4.2.2 du Chapitre 4 (voir aussi, p.232–233 dans Deheuvels et Mason [39], Deheuvels [28]).

Le fait d'établir des résultats uniformes relativement à la fenêtre, comme dans le Théorème 6.2, permet de décrire le comportement limite des estimateurs lorsque leur paramètre de lissage est éventuellement aléatoire ou dépend des données. D'où le but de nos résultats de convergence uniforme relativement à la fenêtre. Rappelons que plusieurs méthodes de construction de telles suites de fenêtres sont proposées dans la littérature statistique (voir, e.g., les sections 2.4.1 et 2.4.2 dans Deheuvels et Mason [39], et Berlinet et Devroye [5]), et suggèrent, de chosir des fenêtres de la forme $h_n := Z_n n^{-1/5}$ où $Z_n$ est une suite aléatoire, stochastiquement bornée et de limite inférieure (resp. supérieure) supérieure (resp. inférieure) à 0 (resp. $\infty$).

Maintenant, illustrons le fait que le Théorème 6.2 permet de construire des bandes de certitude uniformes et asymptotiques (voir, e.g. p.232–233 dans [39]) pour $\mathbb{E}(f_{n,K,h}(\cdot\,))$. Etant donné $h \in \mathcal{H}_n$ satisfaisant la condition (6.1.2) une suite de fenêtres éventuellement dépendantes des données, on considère $L_{n,K,h}(\cdot\,)$ des fonctions positives, éventuellement dépendantes des données, et définies pour tout $x \in I$, par

$$\begin{aligned} L_{n,K,h}(x) := \left\{ \sup_{x\in I} \psi(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \right\}^{1/2} \times \left\{ \frac{2\log_+(1/h}{nh} \right\}^{1/2} \\ \times 1/\left\{ \frac{(1-G(x))\psi_n(x)}{f(x)} \right\}^{1/2}, K \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit du Théorème 6.2, que pour tout choix de noyau $K \in \mathcal{K}$ et de fenêtre $h \in \mathcal{H}_n$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\sup_{x\in I} \pm \left\{ \frac{1}{L_{n,K,h}(x)} \right\} \{ f_{n,K,h_n}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,K,h_n}(x)\right) \} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1. \tag{6.1.5}$$

Lorsque l'assertion (6.1.5) est vérifiée, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\mathbb{E}\left(f_{n,K,h_n}(x)\right) \in [f_{n,K,h}(x) - (1+\varepsilon)L_{n,K,h}(x), \\ &\quad f_{n,K,h}(x) + (1+\varepsilon)L_{n,K,h}(x)], \forall x \in I, \forall K \in \mathcal{K}, \forall h \in \mathcal{H}_n) \to 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\mathbb{E}\left(f_{n,K,h_n}(x)\right) \in [f_{n,K,h}(x) - (1-\varepsilon)L_{n,K,h}(x), \\ &\quad f_{n,K,h}(x) + (1-\varepsilon)L_{n,K,h}(x)], \forall x \in I, \forall K \in \mathcal{K}, \forall h \in \mathcal{H}_n) \to 0. \end{aligned}$$

**Corollaire 6.4.** *Lorsque les deux assertions ci-dessus sont jointement vérifiées pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on obtient $[A_{n,K,h}(x), B_{n,K,h}(x)]$ des intervalles qui fournissents des bandes de certitude asymptotiques pour $\mathbb{E}f_{n,K,h}(x)$ uniformément en tout $x \in I$ et pour tout $K \in \mathcal{K}$ et $h \in \mathcal{H}_n$. Ils sont définis comme suit, pour tout $x \in I$, pour tout $K \in \mathcal{K}$, et pour tout $h \in \mathcal{H}_n$.*

$$[A_{n,K,h}(x), B_{n,K,h}(x)] := [f_{n,K,h}(x) - L_{n,K,h}(x), f_{n,K,h}(x) + L_{n,K,h}(x)].$$

**Remarque 6.5.** 1°) On parle de bandes de certitude plutôt que de bandes de confiance car les fonctions $L_{n,K,h}(\cdot\,)$ ne dépendent pas d'un niveau de confiance $\alpha \in (0,1)$, mais dépendent simplement de la limite asymptotique de l'erreur aléatoire dans la loi limite présentée dans le Théorème 6.2.

2°) Si nous voulons fournir des bandes de certitude pour $f(\cdot\,)$, le biais de notre estimateur $f_{n,K,h_n}(\cdot\,)$ doit être négligeable au sens où, pour tout $h \in \mathcal{H}_n$ et $K \in \mathcal{K}$, lorsque $n \to \infty$,

$$\sup_{x\in I} \pm \left\{ \frac{1}{L_{n,K,h}(x)} \right\} \{ \mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right) - f(x) \} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{6.1.6}$$

L'assertion (6.1.6) ci-dessus est satisfaite si on impose certaines conditions analytiques à $K(\cdot\,)$ et $f(\cdot\,)$ (voir, e.g., p.38 dans Silverman [106] et la remarque sur le biais au paragraphe 4.1 du Chapitre 4).

Nous présentons ci-dessous une illustration du Corollaire 6.4, en représentant les bandes de certitude pour $\mathbb{E}(f_{n,K,h}(\cdot))$ (voir la Figure 6.1). Nous supposons que $X$ (temps de survie) suit une loi normale centrée réduite et $C$ (temps de censure) suit une loi uniforme sur $(0,1)$. On impose 40% de censure. Pour le choix de la fenêtre $h$, il suffit de la sélectionner dans l'intervalle $\mathcal{H}_n$, on choisira une fenêtre $h = n^{-1/5}$. Le nombre d'observations total pour l'illustration du Corollaire 6.4 est $n = 300$. Nous représentons sur un intervalle $I$ choisi (ici les bornes de l'intervalle sont le minimum et le maximum des variables générées) : $\mathbb{E}(f_{n,K,h}(\cdot))$ [E] en trait continu et les bandes de certitude [BC] l'encadrant en pointillés. Le noyau sélectionné est le noyau d'Epanechnikov. Il est connu qu'en pratique, le choix

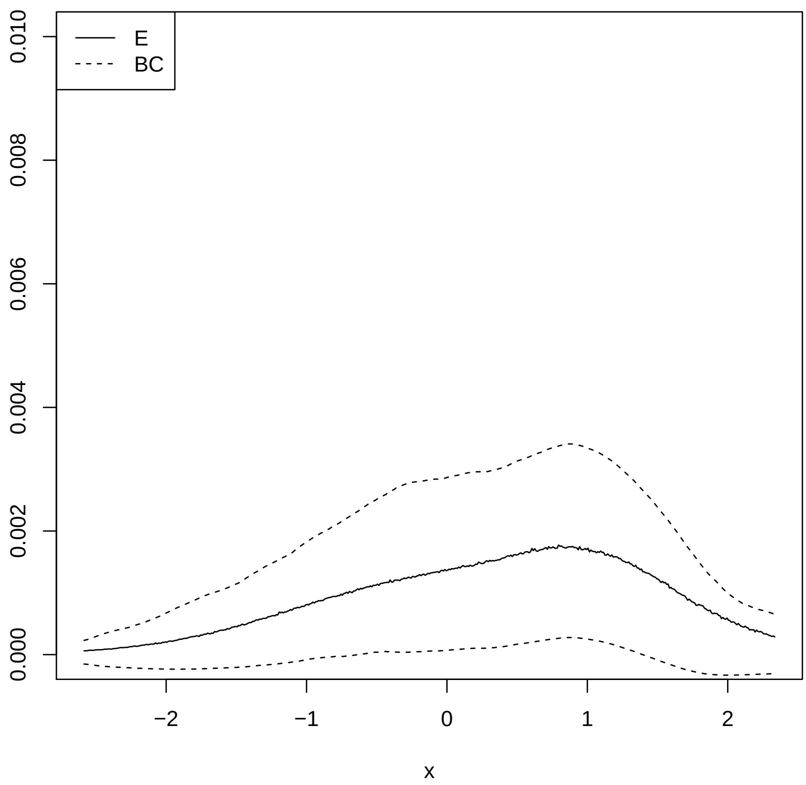


Figure 6.1 – Illustration du Corollaire 6.8 avec 40% de censure et $n = 300$

du noyau a peu d'effet sur l'estimation de la densité (voir, e.g., p.43 dans Silverman [106], Bosq et Lecoutre [10]). Néanmoins, mentionnons le fait que certains auteurs (voir, e.g., Epanechnikov [63], Marron et Nolan [85]) on proposé des choix de noyau (au sens d'une variance minimum) tel que le noyau d'*Epanechnikov* ou les noyaux dits *canoniques*, qui sont inclus dans $\mathcal{K}$, la classe de noyau que l'on considère ici et pour laquelle nos résultats sont uniformes relativement au noyau.

Dans ce paragraphe, nous allons voir dans quelle mesure le fait que la condition (6.1.2) du Théorème 6.2 implique (6.1.3) est intéressant. Lorsque l'on choisit $\mathcal{H}_n = [h_n, h_n]$ dans le Théorème 6.2, on observe que cette relation implique que, lorsque $\{h_n : n \geq 1\}$ est une suite de constantes vérifiant,

$$nh_n/\log n \to \infty, \text{ et } h_n \to 0, \text{ quand } n \to \infty, \tag{6.1.7}$$

et considérant une fonction noyau $K \in \mathcal{K}$ donné, lorsque $n \to \infty$, on a alors

$$\left\{\frac{nh_n}{2\log_+(1/h_n)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \pm \{f_{n,K,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,K,h_n}(x))\}$$
$$\times \left\{\psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \left\{\sup_{x\in I}\psi(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}. \qquad (6.1.8)$$

Des versions presque sûres de (6.1.8) ont été établies, sous diverses conditions, par Diehl et Stute [47] (avec $\psi \equiv 1$ et $c = \infty$), Giné et Guillou [67], et Deheuvels et Eimahl [32], [33]. Notons que (6.1.8) (et donc, (6.1.3)), n'a pas lieu presque sûrement pour une densité arbitraire $f(\cdot)$ continue sur $J$, et une suite de fenêtres $\{h_n : n \geq 1\}$ vérifiant (6.1.2). Si en plus de (6.1.7), on suppose que

$$\frac{\log(1/h_n)}{\operatorname{loglog} n} \to c \in (0,\infty], \quad h_n \downarrow 0, \text{ et } nh_n \uparrow \infty, \qquad (6.1.9)$$

alors, en posant $(c+1)/c := 1$ lorsque $c = \infty$ (voir, e.g., le Theorem 1.1, pp. 1304-1305 dans [33]), on a, p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{nh_n}{2\{\log_+(1/h_n)+\operatorname{loglog} n\}}\right\}^{1/2}$$
$$\times \sup_{x\in I} \pm \{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h_n}(x))\}\left\{\psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}$$
$$= \left(\frac{c+1}{c}\right)^{1/2}\left\{\sup_{x\in I}\psi(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2},$$
$$\text{et } \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{nh_n}{2\{\log_+(1/h_n)+\operatorname{loglog} n\}}\right\}^{1/2}$$
$$\sup_{x\in I} \pm \{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h_n}(x))\}\left\{\psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}$$
$$= \left\{\sup_{x\in I}\psi(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.$$

Ce dernier résultat n'est en général pas valide lorsque la première condition de (6.1.9) n'est pas vérifiée. Viallon [117] (voir, e.g., Maillot et Viallon [84]) a utilisé la théorie des processus empiriques indéxés par des fonctions pour obtenir un théorème de convergence uniforme relativement à la fenêtre dans l'esprit de (6.1.3), sans l'uniformité relative au noyau. Il a montré que, pour $K \in \mathcal{K}$ un noyau donné, on a p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}\Bigg(\pm\{f_{n,K,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,K,h}(x))\}$$
$$\times\left\{\psi_n(x)\times\frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}\Bigg) = \sigma(\psi, K), \qquad (6.1.10)$$

où $\mathcal{H}_n = [h'_n, h''_n]$, et $h'_n, h''_n$ sont des suites de constantes vérifiant (6.1.2)–(6.1.9), ainsi que la condition $h''_n \leq [(B-D) \wedge (1 - H_1(D))]$ pour tout $n \geq 1$ (J=[A,B], I=[C,D] et voir la définition (3.2.15) de $H_1(\cdot))$. Sa méthode de preuve est alors appropriée pour fournir, sous certaines conditions sur $\mathcal{H}_n$, une version presque sûre de

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}\left(\pm\left\{f_{n,K,h}(x)-\mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)\right\}\right.$$
$$\left.\times\left\{\psi_n(x)\times\frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}\right)\stackrel{\mathbb{P}}{\to}\sigma(\psi,K),\ \text{lorsque } n\to\infty.$$

Indépendemment des conditions imposées à $\mathcal{H}_n$ dans [117] ou (4.1.8) (qui sont plus contraignates que dans (1.2.6)), soulignons le fait que ce dernier résultat est plus faible que (6.1.3) en terme d'uniformité relative à la fenêtre et au noyau. De plus, la méthode utilisée par Viallon, ne peut sûrement pas être utilisée pour fournir une preuve alternative de notre résultat.

Dans ce qui suit, on va présenter une preuve du Théorème 6.2. Nous allons avoir besoin du lemme analytique énoncé dans le fait suivant, et qui se trouve être une légère variante du Fait 6 (voir le paragraphe 1.6 du Chapitre 1). Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble de $B[-T,T]$, tel que $\mathbb{S}_\lambda\subseteq\mathcal{M}\subseteq B[-T,T]$, $\lambda>0$, et soit $\Gamma$ une classe non vide de fonctionnelles $\Theta:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ , continues selon la topologie uniforme sur $\mathcal{M}$. On suppose que $\Gamma$ vérifie la propriété suivante d'equicontinuité. Pour tout $\epsilon>0$, il existe un $\eta(\epsilon)>0$ tel que, pour tout $\phi\in\mathcal{M}$ et $g\in\mathcal{S}_\lambda$, on ait

$$\|\phi-g\|<\eta(\epsilon)\quad\Rightarrow\quad\sup_{\Theta\in\Gamma}|\Theta(\phi)-\Theta(g)|<\epsilon.\tag{6.1.11}$$

**Fait 21.** *Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $\eta(\varepsilon)>0$ tel que, pour tout $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{M}$, on ait*

$$\Delta\left(\mathcal{F},\mathbb{S}_\lambda\right)<\eta(\varepsilon)\quad\Rightarrow\quad\sup_{\Theta\in\Gamma}\left|\sup_{g\in\mathcal{F}}\Theta(g)-\sup_{f\in\mathbb{S}_\lambda}\Theta(f)\right|<\varepsilon.\tag{6.1.12}$$

**Preuve du Théorème 6.2.** On va suivre certains des arguments de la preuve du Théorème 4.1 (voir le Chapitre 4). On limite la preuve au cas où pour un certain $0<T<\infty$, $\widetilde{K}(u):=K(-u)=0$ pour tout $|u|\geq T$ et $K\in\mathcal{K}$. Il suffit (voir, e.g., (4.2.5)–(4.2.6) dans [25] et (1.22) in [40]) de considérer le comportement limite de

$$\begin{aligned}&n^{1/2}h\left(f_{n,K,h}(x)-\mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)\right)\times\left\{\psi_n(x)\times\frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}\\&=-\int_{-T}^{T}\left(\alpha_n^{KM}(x+hu)-\alpha_n^{KM}(x)\right)\times\left\{\psi_n(x)\times\frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}d\widetilde{K}(u),\end{aligned}\tag{6.1.13}$$

pour $h\in\mathcal{H}_n$, $K\in\mathcal{K}$, et $x$ variant dans l'intervalle $I=[C,D]$. Observons que d'après (6.1.13) et la définition (3.1.3) de $\xi_n^{KM}(h;x;u)$ (voir le paragraphe 3.1 du Chapitre 3), on a

$$\begin{aligned}&n^{1/2}h\left(f_{n,K,h}(x)-\mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)\right)\times\left\{\psi_n(x)\times\frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}\\&=-\int_{-T}^{T}\xi_n^{KM}(h;x;u)\times\left\{\psi_n(x)\times\frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}d\widetilde{K}(u),\end{aligned}$$

Il suit du Théorème 3.2 (voir le Chapitre 3) que, pour tout $\eta_0 > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\Bigg( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\Bigg(\Bigg\{ \frac{\xi_n^{KM}(h;x;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/(h))}} \times \left\{\psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}$$

$$: x \in I \Bigg\}, \mathbb{S}_\Lambda\Bigg) \geq \eta_0\Bigg) \to 0. \tag{6.1.14}$$

On applique le Fait 21, avec $\Theta(g) := \int_{-T}^{T} \mp g(u)d\widetilde{K}(u)$ et $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions $g(\cdot)$ intégrables sur $[-T,T]$ et telles que $g(0)=0$, pour obtenir que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ vérifiant (6.1.12) (voir la Remarque 6.6). Si on pose $\eta_0 = \eta$ dans (6.1.14), on déduit de (6.1.12) et de (6.1.14) que, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\Bigg( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Bigg| \sup_{\widetilde{K}\in\mathcal{K}} \Bigg| \sup_{x\in I} \Bigg( \frac{\pm n^{1/2}h\left\{f_{n,K,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,,K,h}(x)\right)\right\}}{\sqrt{2h\log_+(1/(h))}}$$

$$\times \left\{\psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}\Bigg) - \sup_{f\in\mathbb{S}_\Lambda} \int_{-T}^{T} \mp f(u)d\widetilde{K}(u)\Bigg|\Bigg| \geq \varepsilon\Bigg) \to 0. \tag{6.1.15}$$

Il a déjà été vérifié (voir, e.g., (4.2.11) dans [25] et la preuve du Theorem 1.1. p.1329 dans [33]) que

$$\sup_{f\in\mathbb{S}_\Lambda} \int_{-T}^{T} \mp f(u)d\widetilde{K}(u) = \left\{\Lambda \int_{\mathbb{R}} \widetilde{K}^2(u)du\right\}^{1/2} = \left\{\sup_{x\in I}\psi(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(u)du\right\}^{1/2}.$$

On conclut de tout ceci que pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\Bigg( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{K\in\mathcal{K}} \Bigg| \left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \Big( \pm\left\{f_{n,K,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)\right\}$$

$$\times \left\{\psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)}\right\}^{1/2}\Big) - \left\{\sup_{x\in I}\psi(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}\Bigg| \geq \varepsilon\Bigg) \to 0. \tag{6.1.16}$$

La preuve du Théorème 6.2 est alors complétée.□

**Remarque 6.6.** Pour appliquer (6.1.12), il nous faut vérifier la propriété d'équicontinuité (6.1.11). Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta(\epsilon)$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathbb{S}$, on ait $\|\phi - g\| < \eta(\epsilon)$. La condition sur le noyau qu'il existe un $0 < M < \infty$ tel que $\sup_{K\in\mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}} |dK| \leq M$, est nécessaire pour avoir la relation suivante.

$$\begin{aligned}
\sup_{\Theta\in\Gamma} |\Theta(\phi) - \Theta(g)| &= \sup_{K\in\mathcal{K}} \Big|\int_{-T}^{T} \phi(u)dK(u) - \int_0^1 g(u)dK(u)\Big| \\
&= \sup_{K\in\mathcal{K}} \Big|\int_{-T}^{T} (\phi(u) - g(u))dK(u)\Big| \\
&< \eta(\epsilon) \sup_{K\in\mathcal{K}} \Big|\int_{-T}^{T} dK(u)\Big| < \eta(\epsilon)M = \epsilon.
\end{aligned}$$

De manière équivalente, cette condition supplémentaire permet pour tous les noyaux de $\mathcal{K}$, un contrôle uniforme du terme d'erreur $\sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta(f) = \sup_{f\in\mathbb{S}_\Lambda} \int_{-T}^{T} f(u)d\tilde{K}(u)$.

### 6.1.2 Estimateurs à noyau du taux de panne

Le taux de panne (ou de mortalité ou de hasard) correspondant à $F(\cdot\,)$, est noté

$$\begin{aligned}\lambda(x) \quad &:= \quad \frac{f(x)}{(1-F(x))} &(6.1.17)\\ &= \quad \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}(x\le X\le x+h|X\ge x)}{h}, \text{ pour } x\in\mathbb{R}\ . &(6.1.18)\end{aligned}$$

Le taux de panne évalué à la date $x$ caractérise la probabilité qu'il y ait décès dans un court intervalle de temps après $x$, conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'à $x$. Autrement dit, il correspond au risque de décès instantané pour les individus ayant survécu jusqu'à cette date. On considère $\lambda_{n,K,h}(\cdot\,)$ l'estimateur de $\lambda(\cdot\,)$, défini pour $K\in\mathcal{K}$, $h>0$ et $x\in\mathbb{R}$ , par

$$\lambda_{n,K,h}(x) := \frac{f_{n,K,h}(x)}{(1-F_n(x))}, \tag{6.1.19}$$

où $f_{n,K,h}(\cdot\,)$ est défini au point (6.1.1) et $F_n(\cdot\,)$ au point (3.1.1) (voir le Chapitre 3).

**Remarque 6.7.** De manière équivalente, nous pouvons définir l'estimateur $\lambda_{n,K,h}(\cdot\,)$ comme suit.

$$\lambda_{n,K,h}(x) := \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-t}{h}\right) d\Lambda_n(t),$$

où $\Lambda_n(\cdot\,)$ désigne la fonction empirique cumulée de taux de panne (voir la définition (3.2.17) au paragraphe 3.2.2 du Chapitre 3).

Le théorème suivant est une loi limite pour $\lambda_{n,K,h}(\cdot)$, qui est uniforme relativement à la fenêtre et relativement au noyau. C'est une conséquence du Théorème 3.2 (voir le Chapitre 3).

**Théorème 6.8.** *Soit $\mathcal{H}_n=[a_n,b_n]$ tel que dans le Théorème 3.2. Alors, lorsque $n\to\infty$,*

$$\begin{aligned}\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\sup_{K\in\mathcal{K}}\Bigg|\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}&\sup_{x\in I}\pm\left(\lambda_{n,K,h}(x)-\frac{\mathbb{E}\left(\lambda_{n,K,h}(x)\right)}{1-F(x)}\right)\\ &\times\left\{\psi_n(x)\times\frac{1-H(x)}{\lambda(x)}\right\}^{1/2}-\sigma(\psi,K)\Bigg| = o_{\mathbb{P}}(1),\end{aligned}$$

*où $\sigma(\psi,K) := \left\{\sup_{x\in I}\psi(x)\int_{\mathbb{R}}K^2(t)dt\right\}^{1/2}$.*

**Remarque 6.9.** 1°) La consistance uniforme de $\lambda_{n,K,h}(\cdot)$ sur des intervalles bornés, a été traitée par Zhang [123], et Deheuvels et Einmahl [33].

2°) Grâce à notre théorème, nous pouvons construire des bandes de certitudes uniformes et asymptotiques pour $\lambda(\cdot\,)$. Et ceci, dans le même principe que le Corollaire 6.4.

Le fait suivant est une inégalité du type Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz type pour le processus empirique de Kaplan-Meier (voir, e.g., le Theorem 2 dans Földes et Rejtő [66], et le Theorem 1 dans Bitouzé et al. [7]).

**Fait 22.** *Pour tout $0\le R<\Theta$ spécifique, pour tout $n\ge 1$, on a*

$$\sup_{0\le t\le R}\left|\alpha_n^{KM}(t)\right| = O_{\mathbb{P}}(1). \tag{6.1.20}$$

**Preuve du Théorème 6.8.** On considère la relation (6.1.16) de la preuve du Théorème 6.2. Pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\mathbb{P}\Bigg( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{K\in\mathcal{K}} \Bigg| \Big\{ \frac{nh}{2\log_+(1/h)} \Big\}^{1/2} \sup_{x\in I} \Big( \pm \left\{ f_{n,K,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right) \right\} \Big)$$
$$\times \left\{ \psi_n(x) \times \frac{1-G(x)}{f(x)} \right\}^{1/2} - \Big\{ \sup_{x\in I} \psi(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \Big\}^{1/2} \Bigg| \geq \varepsilon \Bigg) \to 0.$$

On effectue le remplacement de $\psi_n(\cdot\,)$ par

$$\left\{ \frac{1-F(\cdot\,)}{1-F_n(\cdot\,)} \right\}^2 \psi_n(\cdot\,).$$

Alors, d'après les définitions (6.1.17) de $\lambda(\cdot\,)$, (6.1.19) de $\lambda_{n,K,h}(\cdot\,)$, et la relation $H \equiv 1-(1-F)(1-G)$, on obtient que, lorsque $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\Bigg( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{K\in\mathcal{K}} \Bigg| \Big\{ \frac{nh}{2\log_+(1/h)} \Big\}^{1/2} \sup_{x\in I} \Big( \pm \left\{ \lambda_{n,K,h} - \frac{\mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)}{1-F_n(x)} \right\} \Big)$$
$$\times \left\{ \psi_n(x) \times \frac{1-H(x)}{\lambda(x)} \right\}^{1/2} - \Big\{ \sup_{x\in I} \psi(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \Big\}^{1/2} \Bigg| \geq \varepsilon \Bigg) \to 0.$$

On observe que

$$\lambda_{n,K,h} - \frac{\mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)}{1-F_n(x)} = \lambda_{n,K,h} - \frac{\mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)\left(F_n(x)-F(x)\right)}{(1-F_n(x))(1-F(x))} - \frac{\mathbb{E}\left(f_{n,K,h}(x)\right)}{1-F(x)}.$$

On conclut en appliquant (6.1.20) au deuxième terme de droite, combiné avec le fait que $h \in \mathcal{H}_n$ vérifie la condition (6.1.2).□

# Annexes

# Annexe A

# Variante de la loi de Strassen

## A.1 Le Théorème 1.7 et sa remarque

Nous rappelons ci-dessous le Théorème 1.7 (voir le paragraphe 1.5 du Chapitre 1) ainsi que le point 3°) de la Remarque 1.8.

**Théorème A.1.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0 \quad \textit{et} \quad \frac{na_n}{\log n} \to \infty. \tag{A.1.1}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, et tout intervalle $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{A.1.2}$$

Varron et Van Keilegom [116] (voir aussi Varron [115]) ont montré une forme équivalente de la loi limite énoncée comme suit.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{t \in [0,1]} \frac{\|\xi_n(h, t; \cdot)\|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1 \text{ p.s.}, \tag{A.1.3}$$

où $\mathcal{H}_n = [h'_n, h''_n]$, et $h'_n, h''_n$ sont des suites de constantes telles que $h'_n$ vérifie la condition $(H.1)$ et $h''_n$ vérifie les conditions $(H.5)$–$(H.6)$. En particulier, ils ont établi ce résultat dans le cas multidimensionnel. Il a été alors naturel de se demander si la loi limite $(A.1.3)$ pouvait impliquer une loi limite fonctionnelle similaire à celle du Théorème A.1 dans le cas multidimensionnel. Il s'avère que celle-ci permet bien d'obtenir une loi limite fonctionnelle mais qui est différente de celle énoncée dans notre théorème (voir le paragraphe A.2). En effet, à partir de $(A.1.3)$, on peut obtenir un résultat qui est dans l'esprit du Théorème $A.1$, avec d'autres techniques que celles présentées au Chapitre 1. Nous pouvons montrer que, pour $\mathcal{H}_n = [h'_n, h''_n]$, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\Delta\left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o(1).$$

Indépendemment des conditions imposées à $h \in \mathcal{H}_n$ ci-dessus (qui sont plus contraignantes que la condition $(A.1.1)$), il est évident que $(A.1.2)$ est un résultat plus fort que le résultat ci-dessus, en terme d'uniformité relativement à $h \in \mathcal{H}_n$. Par ailleurs, il faut remarquer que dans A.1.3, rien n'assure le fait que la limite asymptotique, ici égale à 1, soit la même pour tout $h \in \mathcal{H}_n$. La différence d'uniformité relativement à $h$ réside en ce point.

## A.2 Loi du type Strassen par la réciproque

L'objet de ce paragraphe est de voir comment nous pouvons obtenir une loi du type Strassen (voir le Théorème A.2) à partir d'une loi limite telle que ($A$.1.3) (voir le Fait 23). Le passage de la Proposition A.4 à la Proposition A.5 a attiré notre attention de part son caractère géométrique (voir le paragraphe A.2.1.

Nous nous plaçons dans le cas réel. Rappelons la définition (1.3.9) des incréments du processus empirique uniforme. Pour tout choix de $a \geq 0$ et $t \in [0,1]$, ils sont définis, pour tout $s \in [0,1]$, par

$$\xi_n(a,t;s) = \alpha_n(t+sa) - \alpha_n(t).$$

Pour $h > 0$, on considère la famille de suites de fonctions définie au point (1.3.10) par

$$\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h) \quad = \quad \left\{ \frac{\xi_n(h,t;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} : t \in [0,1-h] \cap \mathcal{I} \right\},$$

où $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0,1]$ est un intervalle fixé, tel que $u < v$. Nous présentons une loi limite fonctionnelle, autrement dit une loi limite de type Strassen, pour les incréments du processus empirique uniforme dans le Théorème A.2 suivant.

**Théorème A.2.** *Supposons que lorsque $n \to \infty$, les suites $0 < a_n \leq b_n \leq 1$ soient telles que,*

$$b_n \to 0, \quad nb_n \to \infty, \quad \log(1/b_n)/\operatorname{loglog} n \to \infty \quad et \quad a_n = o(b_n). \tag{A.2.4}$$

*Alors, pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, et pour tout intervalle $\mathcal{I}$, lorsque $n \to \infty$, on a presque sûrement,*

$$\Delta\left( \bigcup_{h \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S} \right) \quad = \quad o(1).$$

La démonstration du Théorème A.2 est reportée au paragraphe A.2.1. Nous souhaitons établir la preuve du Théorème A.2 à partir, entre autres, d'une adaptation du Theorem 2 de Varron et Van Keilegom [116] aux incréments du processus empirique uniforme. Cette adaptation est présentée dans le Fait 23. Par ailleurs, soulignons le fait que l'on verra dans la construction de la preuve que ce résultat ne permet pas d'obtenir la loi limite fonctionnelle du Théorème A.1.

**Fait 23.** *Sous la condition ($A$.2.4) du Théorème A.2, pour tout intervalle $\mathcal{I}$, on a presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \sup_{\substack{t \in \mathcal{I} \\ s \in [0,1]}} \frac{|\xi_n(h,t;s)|}{\sqrt{2h\log(1/h)}} \right) = 1. \tag{A.2.5}$$

Pour tout $h > 0$ et $t \in [0,1-h] \cap \mathcal{I}$, nous posons

$$Z_{i,n,h}^{(N)}(t) = \frac{\xi_n(h,t;\frac{i}{N})}{\sqrt{2h\log(1/h)}}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

où $N \geq 1$ est un entier arbitraire. Pour $h > 0$, on considère la famille de suites de fonctions suivante.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n,\mathcal{I}}(h) \quad &= \quad \left\{ Z_{i,n,h}^{(N)}(t) : 1 \leq i \leq N, t \in [0,1-h] \cap \mathcal{I} \right\} \\ &= \quad \left\{ \mathbf{Z}_n \in \mathbb{R}^N : t \in [0,1-h] \cap \mathcal{I} \right\}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{Z}_n = \left(Z^{(N)}_{1,n,h}(t), \ldots, Z^{(N)}_{N,n,h}(t)\right)$.

**Remarque A.3.** Soit $E = \{\frac{i}{N} : 0 \leq i \leq N\} \subset [0,1]$ un ensemble fini de points. On considère la projection $P : [0,1] \to E$, définie par

$$P(x) = \frac{i+1}{N}, \quad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right], i = 0, \ldots, N-1.$$

On observe que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|P(x) - x| \leq \frac{i+1}{N} - \frac{i}{N} = \frac{1}{N} =: \epsilon.$$

On peut alors espérer que les éléments de $\mathcal{D}_{n,\mathcal{I}}(h)$ forment une bonne discrétisation des éléments de $\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)$ pour $N$ assez grand et donc lorsque $\epsilon \to 0$.

L'étude du comportement limite de $\{\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h) : n \geq 1\}$ revient à celle du comportement limite de l'ensemble de suites de fonctions discrétisé $\{\mathcal{D}_{n,\mathcal{I}}(h) : n \geq 1\}$ pour la raison suivante. Pour $\mathcal{I}$, on considère la statistique (2.4.16) (voir le paragraphe 2.4 du Chapitre 2), définie par

$$\omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h) \quad := \quad \sup_{\substack{s,t \in \mathcal{I} \\ |t-s| \leq h}} \pm\{\alpha_n(t) - \alpha_n(s)\}. \tag{A.2.6}$$

Sous les conditions du Théorème A.2, pour tout entier $N \geq 1$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \frac{\omega_{n;\mathcal{I}}\left(\frac{1}{N}h\right)}{\sqrt{2h\log(1/h)}} = 1 \text{ p.s.} \tag{A.2.7}$$

Cette assertion se base sur le Fait 23 et en découle. Par ailleurs, une utilisation du Corollaire 2.7 du Chapitre 2, suivie d'une discrétisation et une application du lemme de Borel-Cantelli, fournirait le même résultat.

Maintenant, on rappelle que pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$|\mathbf{x}|^2 := \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$ et $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire associé.

**Proposition A.4.** *Lorsque la condition (A.2.4) du Théorème A.2 est vérifiée, pour tout choix de $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, on a presque sûrement,*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Z^{(N)}_{i,n,h}(t)\right) = |\Lambda|. \tag{A.2.8}$$

Cette Proposition A.4 est une conséquence directe du Fait 23 (et de $(A.2.7)$). Ensuite, on désigne respectivement par

$$B_N \quad := \quad \left\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \leq 1\right\},$$

et

$$S_N := \partial B_N = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1\right\},$$

la boule unité et la sphère unité de $\mathbb{R}^N, N > 1$. La Proposition A.5 suivante, décrit lorsque $n \to \infty$, le comportement limite des suites de fonctions $\{Z_{i,n,h}(t) : 1 \leq i \leq N, t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I}\}$.

**Proposition A.5.** *Sous la condition* (A.2.4) *du Théorème A.2, lorsque* $n \to \infty$, *on a presque sûrement,*

$$\Delta\left(\bigcup_{h\in\mathcal{H}_n} \mathcal{D}_{n,\mathcal{I}}(h), B_N\right) \quad = \quad o(1). \tag{A.2.9}$$

On considère les ensembles

$$\tilde{B}_N \quad = \quad \left\{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i^2 \leq 1/N\right\},$$

et

$$F_N \quad = \quad \left\{\left(f\left(\frac{1}{N}\right), f\left(\frac{2}{N}\right) - f\left(\frac{1}{N}\right), \ldots, f\left(\frac{N}{N}\right) - f\left(\frac{N-1}{N}\right)\right) \in \mathbb{R}^N : f \in \mathbb{S}\right\},$$

**Proposition A.6.** *Les ensembles* $\tilde{B}_N$ *et* $F_N$ *sont isomorphes.*

**Preuve de la Proposition A.6.** Par définition, pour tout $f \in C[0,1]$, on a

$$\left(f\left(\frac{1}{N}\right), f\left(\frac{2}{N}\right) - f\left(\frac{1}{N}\right), \ldots, f\left(\frac{N}{N}\right) - f\left(\frac{N-1}{N}\right)\right) \in \tilde{B}_N$$

si et seulement si

$$\sum_{i=1}^N N\left(f\left(\frac{i+1}{N}\right) - f\left(\frac{i}{N}\right)\right)^2 \leq 1. \tag{A.2.10}$$

Le Fait suivant est dû à Riesz [100].

**Fait 24.** *Soit* $f$ *une fonction réelle sur* $[0,1]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) $\quad f \in AC[0,1], \quad \int_0^1 (\dot{f}(x))^2 dx \leq 1;$

(*ii*) $\quad \sum_{i=1}^r r\left(f\left(\frac{i+1}{r}\right) - f\left(\frac{i}{r}\right)\right)^2 \leq 1, \quad r = 1,2,\ldots$ *et* $f \in C[0,1]$.

D'après le Fait 24, l'observation A.2.10 est équivalente au fait que $f \in \mathbb{S}$.□

**Remarque A.7.** Il nous est utile de remplacer $B_N$ par $\tilde{B}_N$. Il suffit de poser $\sum_{i=1}^N \lambda_i^2 = N$ dans la Proposition A.4.

Pour finir, il faut vérifier que les ensembles $\{f\left(\frac{i}{N}\right) - f\left(\frac{i-1}{N}\right) : 1 \leq i \leq N, f \in \mathbb{S}\}$ et $\{g(i) : 1 \leq i \leq N, g \in \mathbb{S}\}$ coïncident.

### A.2.1 Preuve de la Proposition A.5

Le principe de la preuve de la Proposition A.5 est dans l'esprit de celui de la preuve du Lemma 2 de Finkelstein [64]. La Proposition A.4 fait office d'outil de base à la place de la loi du logarithme itéré de Hartman-Wintner (voir [74]). Notons que l'on retrouve ce principe de preuve dans un article récent de Csörgő, Hu et Mei [18]. L'adaptation à notre cas est présentée dans ce qui suit.

Soit $L_N$ l'ensemble des points limites de toute suite de l'ensemble $\bigcup_{h\in\mathcal{H}_n} \mathcal{D}_{n,\mathcal{I}}(h)$. Montrons que $L_N \subseteq B_N$. D'après la Proposition A.4, pour tout choix de $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, on a presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} \sum_{i=1}^N \lambda_i Z_{i,n,h}^{(N)}(t) = |\Lambda|. \tag{A.2.11}$$

Notons qu'il est intéressant d'illustrer la preuve de cette inclusion dans le cas N=2 avec une figure. D'après l'inégalité de Schwarz, on observe que l'on a presque sûrement,

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i Z_{i,n,h}^{(N)}(t) \leq |\Lambda| \times |\mathbf{Z}_n|.$$

Par passage au supremum sur $t \in \mathcal{I}$ et $h \in \mathcal{H}_n$ et à la limite supérieure, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Z_{i,n,h}^{(N)}(t) \quad \leq \quad \limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} |\mathbf{Z}_n| \times |\Lambda|,$$

En combinant cette inégalité avec ($A$.2.11), on voit que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} |\mathbf{Z}_n| \geq 1.$$

Vérifions que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{N} Z_{i,n,h}^{(N)}(t)^2 = 1. \tag{A.2.12}$$

On suppose que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} |\mathbf{Z}_n| = 1+\delta, \quad \delta > 0.$$

On choisit $\{\Lambda_n : n \geq 1\}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\Lambda_n \in S_N$ et

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} \Lambda_n \times \mathbf{Z}_n = 1+\delta.$$

Comme $S_N$ est un ensemble compact, la suite $\Lambda_n$ admet une limite qui correspondra à $\Lambda$ qui est de norme 1, et tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} |\Lambda| \times |\mathbf{Z}_n| = 1+\delta.$$

D'après ($A$.2.11), on constate alors que $\delta = 0$ et on a bien

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{N} Z_{i,n,h}^{(N)}(t)^2 = 1 \text{ et a fortiori } L_N \subseteq B_N.$$

Maintenant, montrons que $B_N \subset L_N$. On commence par montrer que $S_N \subseteq L_N$, autrement dit, que l'ensemble des points limites $L_N$ contient la frontière de la boule $\partial B_N$. Soit $\Lambda \in S_N$. D'après la Proposition A.4, on a presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \sup_{t\in\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Z_{i,n,h}^{(N)}(t) = |\Lambda| = 1. \tag{A.2.13}$$

Evaluons la distance euclidienne entre $\Lambda$ et $Z_n$. On a

$$|\mathbf{Z}_n - \Lambda|^2 = |\mathbf{Z}_n|^2 + |\Lambda|^2 - 2\langle \Lambda | \mathbf{Z}_n \rangle.$$

On effectue un passage au supremum sur $t \in \mathcal{I}$ et $h \in \mathcal{H}_n$ et à la limite supérieure. Combinant les assertions ($A$.2.12), ($A$.2.13) et le fait que $\Lambda \in S_N$, on constate que cette distance tend presque sûrement vers 0. Alors, chaque point de la sphère est atteint par une suite de $\bigcup_{h\in\mathcal{H}_n}\mathcal{D}_{n,\mathcal{I}}(h)$. Cela signifie que, pour un entier $N$ donné, on a presque sûrement,

$$S_N \subseteq L_N. \tag{A.2.14}$$

Soit $\Pi$ la projection définie par

$$\begin{aligned}\Pi \quad : \quad & \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \\ & (x_1,\ldots,x_{n+1}) \to (x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Notons qu'il est intéressant d'illustrer ce qui suit dans le cas N=3 avec une figure. Un raisonnement par récurrence sur la dimension, permet de voir que l'inclusion $(A.2.14)$ est vraie pour tout entier positif $N$. On considère la suite

$$X_{i+1,n} = \left(Z^{(N)}_{1,n,h}(t),\ldots,Z^{(N)}_{i+1,n,h}(t)\right), i = 1,\ldots,N.$$

D'après la généralisation de $(A.2.14)$ à tout $N$, $\Pi(L_{i+1}) = L_i$, l'ensemble des points limites de la suite

$$\Pi(X_{i+1,n}) = X_{i,n} = \left(Z^{(N)}_{1,n,h}(t),\ldots,Z^{(N)}_{i,n,h}(t)\right)$$

contient $\Pi(S_{i+1}) = B_i$. Cette propriété permet de conclure.$\square$

# Annexe B

# Compléments

## B.1 Ensemble de Strassen

Pour toute fonction $f \in B[0,M]$,$0 < M \leq \infty$, on a introduit (voir les définitions (1.2.3) et (1.2.4) au paragraphe 1.2 du Chapitre 1)

$$|f|_{M,\mathbb{H}} = \begin{cases} \left\{\int_0^M \dot{f}(u)^2 du\right\}^{1/2} & \text{si } f \in \mathcal{AC}[0,M] \text{ et } f(0) = 0, \\ \infty & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

la norme hilbertienne définie sur $B[0,M]$ et

$$\mathbb{S} := \{f \in B[0,1] : |f|_{1,\mathbb{H}} \leq 1\},$$

l'ensemble de Strassen.

**Propriété B.1.** *L'ensemble de Strassen est un sous-ensemble compact de* $(C[0,1],\mathcal{U})$, *l'ensemble des fonctions continues sur* $[0,1]$ *muni de la topologie uniforme.*

**Preuve.** Combiner la preuve du Theorem 1.1 p.106 dans del Barrio, Deheuvels et van de Geer [41] et le point 1°) de l'Example 1.3 p.107 dans [41].

**Propriété B.2.** *L'ensemble de Strassen est la boule unité de l'espace de Hilbert à noyau auto-reproduisant associé au processus de Wiener sur* $[0,1]$.

## B.2 Convergences d'ensembles

On a défini la distance de Hausdorff entre les ensembles $A, B \subseteq B[0,M]$, par (voir la définition (1.2.2) au Chapitre 1)

$$\Delta(A,B) = \begin{cases} \inf\left\{\theta > 0 : A \subseteq B^\theta \text{ et } B \subseteq A^\theta\right\} & \text{lorsqu'un tel } \theta \text{ existe,} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{B.2.1}$$

Une définition équivalente de la distance de Hausdorff est la suivante. Pour toute fonction $f \in B[0,M]$, introduisons

$$d(f,B) := \inf_{g \in B} \|f - g\|$$

et

$$\delta(A,B) := \sup_{f \in A} d(f,B).$$

Alors, on définit la distance de Hausdorff entre les ensembles $A, B \subseteq B[0, M]$, par

$$\Delta(A, B) = \delta(A, B) \vee \delta(B, A).$$

Soient $\{A_n : n \geq 1\} \subset B[0, M]$ et $A \subset B[0, M]$. Lorsque $\Delta(A_n, A) \to 0$, quand $n \to \infty$, on dit que la suite d'ensembles $\{A_n : n \geq 1\}$ recouvre complètement $A$. Autrement dit, la suite $\{A_n : n \geq 1\}$ est relativement compacte et son ensemble limite est $A$. L'ensemble $A$ est alors à la fois l'adhérence asymptotique (ensemble limite extérieur) et l'intérieur asymptotique (ensemble limite intérieur) de $\{A_n : n \geq 1\}$. Considérons l'exemple de Strassen présenté dans l'introduction de la thèse, où la suite $\{\eta_n(\cdot)\}_{n \geq 3}$ est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(0,1), \mathcal{U})$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites est égal à $\mathbb{S}$. On traduit ces notions de relative compacité et d'ensemble limite par les deux propriétes suivantes.

$(i)$ pour toute suite d'entiers $n_k, k \geq 1$ il existe une sous-suite $n_{k_j}$ et une fonction $g \in \mathbb{S}$ telles que

$$\eta_{n_{k_j}}(x) \to g(x) \text{ uniformément en } x \in [0, 1],$$

$(ii)$ pour tout $g \in \mathbb{S}$, il existe une suite $n_k = n_k(f)$ tel que

$$\eta_{n_k}(x) \to g(x) \text{ uniformément en } x \in [0, 1].$$

## B.3 Probabilité extérieure

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace $\Omega$ muni d'une tribu $\mathcal{A}$.

**Définition B.3.** Soient $A, B \in \mathcal{A}$. L'application $\mathbb{P}_e : (\Omega, \mathcal{A}) \to [0, 1]$ est appelée probabilité extérieure si

$(i)$ $\mathbb{P}_e(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}_e(\Omega) = 1$ ;

$(ii)$ $\mathbb{P}_e$ est croissante : $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}_e(A) \leq \mathbb{P}_e(B)$ ;

$(iii)$ $\mathbb{P}_e$ est sous-additive : pour toute suite $\{A_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}_e\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_e(A_k).$$

Nous présentons cette définition pour la raison suivante. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléaroire réelles i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, on considère $g_n(X_1, \ldots, X_n; x), x \in \mathbb{R}$, une fonction mesurable. Cette mesurabilité n'assure pas le fait que

$$\sup_{x \in I} g_n(X_1, \ldots, X_n; x),$$

soit aussi mesurable. De ce fait, on usera de la convention qui suit. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de probablilité sur lequel nos variables aléatoires sont définies. Lorsque $\{A_n : n \geq 1\}$ sont des sous-ensembles (éventuellement non mesurables) de $\Omega$, on écrit $P(A_n) \to 1$ (ou encore $P(\bar{A}_n) \to 0$, avec $\bar{A}_n := \Omega - A_n$), lorsqu'il existe une suite $\{B_n : n \geq 1\} \subseteq \mathcal{A}$, telle que $\bar{A}_n \subseteq B_n$ pour tout $n \geq 1$ et $P(B_n) \to 0$. Autrement dit, il suffit de travailler sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_e)$.

## B.4 Notations $O_{\mathbb{P}}(1)$ et $o_{\mathbb{P}}(1)$

Soient $\{a_n : n \geq 1\}$ une suite de réels et $\{b_n : n \geq 1\}$ une suite de réels positifs. On note

$$a_n = \begin{cases} O(b_n) & \text{si pour un certain } M > 0, \frac{a_n}{b_n} \leq M < \infty \text{ pour tout } n \geq 1 \\ o(b_n) & \text{si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0. \end{cases}$$

On utilise des notations similaires pour des suites de variables aléatoires. On dit que $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires est bornée en probabilité si

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe une constante } 0 < M < \infty \text{ telle que } \mathbb{P}\left(|X_n| \geq M\right) \leq \varepsilon, n \geq 1.$$

Dans ce cas, on écrit $X_n = O_{\mathbb{P}}(1)$. Lorsque $X_n$ converge en probabilité vers 0, on écrit $X_n = o_{\mathbb{P}}(1)$. De plus, pour $\{X_n : n \geq 1\}$ et $\{Y_n : n \geq 1\}$ deux suites de variables aléatoires on a les propriétés suivantes.

*(i)* $X_n = o_{\mathbb{P}}(1) \Rightarrow X_n = O_{\mathbb{P}}(1)$

*(ii)* $O_{\mathbb{P}}(1) + O_{\mathbb{P}}(1) = O_{\mathbb{P}}(1)$ et $O_{\mathbb{P}}(1) \times O_{\mathbb{P}}(1) = O_{\mathbb{P}}(1)$,

*(iii)* $O_{\mathbb{P}}(1) + o_{\mathbb{P}}(1) = O_{\mathbb{P}}(1)$ et $O_{\mathbb{P}}(1) \times o_{\mathbb{P}}(1) = o_{\mathbb{P}}(1)$,

*(iv)* $O_{\mathbb{P}}(X_n) + O_{\mathbb{P}}(Y_n) = O_{\mathbb{P}}(X_n \vee Y_n)$ et $O_{\mathbb{P}}(X_n) \times O_{\mathbb{P}}(Y_n) = O_{\mathbb{P}}(X_n Y_n)$.

# Annexe C

# Uniform-in-Bandwidth Functional Limit Laws

**Abstract** [1] We provide uniform-in-bandwidth functional limit laws for the increments of the empirical and quantile processes. Our theorems, established in the framework of convergence in probability, imply new sharp uniform-in-bandwidth limit laws for functional estimators. In particular, they yield the explicit value of the asymptotic limiting constant for the uniform-in-bandwidth sup-norm of the random error of kernel density estimators.We allow the bandwidth to vary within the complete range for which the estimators are consistent.

**Keywords** Functional limit laws · Kernel density estimators · Nonparametric functional estimators · Convergence in probability · Weak laws · Laws of large numbers

## C.1 Introduction and Results

### C.1.1 A Functional Limit Law

Let $U_1, U_2, \ldots$ be independent and identically distributed [iid] uniform $(0,1)$ random variables [rv's]. Let $\mathbb{U}_n(u) := n^{-1}\#\{U_i \leq u : 1 \leq i \leq n\}$, $u \in \mathbb{R}$, be the empirical distribution function [df] based upon $U_1, \ldots, U_n$, where $\#$ denotes cardinality. Define the empirical quantile function [qf] pertaining to $\mathbb{U}_n(\cdot)$ by $\mathbb{V}_n(v) := \inf\{u \geq 0 : \mathbb{U}_n(u) \geq v\}$, $0 \leq v \leq 1$ ; $\mathbb{V}_n(v) := 0$, $v < 0$, and $\mathbb{V}_n(v) := 1$, $v > 1$. Denote the uniform empirical (resp. quantile) process by

$$\alpha_n(u) := n^{1/2}\left(\mathbb{U}_n(u) - u\right) \quad \text{and} \quad \beta_n(u) := n^{1/2}\left(\mathbb{V}_n(u) - u\right) \quad \text{for} \quad u \in \mathbb{R}.$$

For each *bandwidth* $h \geq 0$ and $t \in [0,1]$, consider the increment functions

$$\begin{aligned} &\xi_n(h;t;u) := \alpha_n(t+hu) - \alpha_n(t) \text{ and} \\ &\zeta_n(h;t;u) := \beta_n(t+hu) - \beta_n(t) \quad \text{for} \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

Set $\log_+ s := \log(s \vee e)$ for $s \in \mathbb{R}$. Let $0 < a_n \leq b_n \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$, be constants which will be made precise later on. We are concerned with the joint in $h \in \mathcal{H}_n := [a_n, b_n]$ limiting behavior, as $n \to \infty$, of the sets of functions

$$\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h) \quad := \quad \left\{ \xi_n(h;t;\cdot) \Big/ \sqrt{2h\log_+(1/h)} : t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I} \right\}, \tag{C.1.2}$$

and

1. Article écrit en collaboration avec Paul Deheuvels, et à paraître dans la revue *Journal of Theoretical Probability* [40].

$$\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h) \quad := \quad \left\{ \zeta_n(h;t;\cdot) \Big/ \sqrt{2h\log_+(1/h)} : t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I} \right\}, \tag{C.1.3}$$

where $\mathcal{I} := [u, v] \subseteq [0, 1]$ is a fixed interval, with $|\mathcal{I}| := |v - u| > 0$. When $\mathcal{I} = [0, 1]$, we set, for short, $\mathcal{F}_n(h) := \mathcal{F}_{n;[0,1]}(h)$ and $\mathcal{G}_n(h) := \mathcal{G}_{n;[0,1]}(h)$. Denote, by $(B[0, 1],\mathcal{U})$ (resp. $(AC[0, 1],\mathcal{U})$) the set of bounded (resp. absolutely continuous) functions on $[0, 1]$, endowed with the uniform topology $\mathcal{U}$ induced by $\|f\| := \sup_{u\in[0,1]} |f(u)|$. Set $\dot{f}(\cdot)$ for the Lebesgue derivative of $f \in AC[0, 1]$. For each $\epsilon > 0$ and $f \in B[0, 1]$, set $\mathcal{N}_\epsilon(f) := \{g \in B[0, 1] : \|f - g\| < \epsilon\}$, and, for each $A \subseteq B[0, 1]$, set $A^\epsilon := \bigcup_{f\in A} \mathcal{N}_\epsilon(f)$, with the convention that $\bigcup_\emptyset(\cdot) := \emptyset$. Define the corresponding Hausdorff set-distance of $A, B \subseteq B[0, 1]$, by

$$\begin{aligned} &\Delta(A, B) := \inf \left\{ \theta > 0 : A \subseteq B^\theta \text{ and } B \subseteq A^\theta \right\} \text{ whenever such a } \theta \text{ exists;} \\ &\Delta(A, B) := \infty \ \text{ otherwise.} \end{aligned} \tag{C.1.4}$$

Consider the norm defined on $B[0, 1]$ by

$$\begin{aligned} &|f|_{\mathbb{H}} := \left\{ \int_0^1 \dot{f}(u)^2 du \right\}^{1/2} \quad \text{when} \quad f(0) = 0 \quad \text{and} \quad f \in AC[0, 1]; \\ &|f|_{\mathbb{H}} := \infty \quad \text{otherwise.} \end{aligned} \tag{C.1.5}$$

Set $\mathbb{S} := \{f \in B[0, 1] : |f|_{\mathbb{H}} \le 1\}$. Fact 1 is established in Deheuvels [39] (see also Deheuvels and Einmahl [33]).

**Fact 1.** Assume that $\{h_n : n \ge 1\}$ fulfills the limiting conditions, as $n \to \infty$,

$$h_n \to 0 \quad \text{and} \quad nh_n/\log n \to \infty. \tag{C.1.6}$$

Then, for each $\mathcal{I} = [u, v]$ with $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, we have, as $n \to \infty$,

$$\Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1) \quad \text{and} \quad \Delta\left(\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{C.1.7}$$

The *uniform in bandwidth* version of Fact 1 stated in the following theorem constitutes our main result.

**Theorem C.1.** Assume that $0 < a_n \le b_n \le 1$ are such that, as $n \to \infty$,

$$b_n \to 0 \quad \text{and} \quad na_n/\log n \to \infty. \tag{C.1.8}$$

Then, with $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, for any $\mathcal{I} = [u, v]$ with $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, we have, as $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} &(i) \quad \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1), \text{ and} \\ &(ii) \quad \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta\left(\mathcal{G}_{n;\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned} \tag{C.1.9}$$

The proof of Theorem C.1 is postponed until Section C.2. In §C.1.2 and §C.1.3 below, we give some applications of this theorem. Our results on functional estimation, in §C.1.3, will motivate further the functional limit laws in $(C.1.9)$.

### C.1.2 Modulus of Continuity of Empirical and Quantile Processes

In this section, we provide uniform-in-bandwidth limit laws for the modulus of continuity of empirical and quantile processes (see, e.g., Stute [108], Mason et al. [92], and Mason [86]). We will need the following analytical lemma. Let $\Theta : B[0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ be a functional which is continuous with respect to the uniform topology $\mathcal{U}$, and bounded on $\mathbb{S}$. Observe that $\mathbb{S}$ is a compact subset of $(B[0,1], \mathcal{U})$.

**Lemma C.1.** For each $\varepsilon > 0$, there exists an $\eta(\varepsilon) > 0$, such that, for any $\mathcal{F} \subseteq B[0,1]$, we have

$$\Delta(\mathcal{F}, \mathbb{S}) < \eta \quad \Rightarrow \quad \Big| \sup_{g \in \mathcal{F}} \Theta(g) - \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) \Big| < \varepsilon. \tag{C.1.10}$$

**Proof.** Set, for $g \in B[0,1]$ and $A \subseteq B[0,1]$, $D(g, A) := \inf_{f \in A} \|f - g\|$ when $A \neq \emptyset$; $D(g, A) := \infty$ otherwise. Since, by $(C.1.4)$, $\Delta(\emptyset, \mathbb{S}) = \infty$, we may reduce our proof to the case where $\mathcal{F} \neq \emptyset$. By compactness of $\mathbb{S}$ and continuity of $\Theta$, there exists an $f_0 \in \mathbb{S}$ such that $\Theta(f_0) = \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f)$. Moreover, for each $\varepsilon > 0$, there exists an $\eta_1(\varepsilon) > 0$ such that $\|g - f_0\| < \eta_1(\varepsilon) \Rightarrow |\Theta(g) - \Theta(f_0)| < \varepsilon$. It follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}^{\eta_1(\varepsilon)} \quad &\Rightarrow \quad \exists g_0 \in \mathcal{F} : \|g_0 - f_0\| < \eta_1(\varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad \sup_{g \in \mathcal{F}} \Theta(g) \geq \Theta(g_0) > \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Consider the assumption $(H)$ : {for each $\eta > 0$, there exists a $g \in \mathbb{S}^\eta$, such that $\Theta(g) > \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$}. Under $(H)$, there exists a sequence $\{g_n : n \geq 1\} \subseteq B[0,1]$, such that $\Theta(g_n) > \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$ for each $n \geq 1$, and $D(g_n, \mathbb{S}) \to 0$ as $n \to \infty$. This implies the existence of $\{f_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{S}$, such that $\|g_n - f_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. By compactness of $\mathbb{S}$, there exists a convergent subsequence $f_{n_k} \to \psi \in \mathbb{S}$ as $k \to \infty$. We have, therefore, as $k \to \infty$, $\Theta(g_{n_k}) \to \Theta(\psi) \leq \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f)$, which contradicts $(H)$. The impossibility of $(H)$ implies the existence of an $\eta_2(\varepsilon) > 0$, such that $g \in \mathbb{S}^{\eta_2(\varepsilon)} \Rightarrow \Theta(g) < \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$. This, in turn, entails that

$$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{S}^{\eta_2(\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad \sup_{g \in \mathcal{F}} \Theta(g) < \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon.$$

We conclude $(C.1.10)$, by setting $\eta(\varepsilon) = \eta_1(\varepsilon) \vee \eta_2(\varepsilon)$ in the statement of the lemma.□

For $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0,1]$, consider the statistics

$$\omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h) := \sup_{\substack{s,t \in \mathcal{I} \\ |t-s| \leq h}} \pm\{\alpha_n(t) - \alpha_n(s)\}, \quad \text{and} \quad \delta^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h) := \sup_{\substack{s,t \in \mathcal{I} \\ |t-s| \leq h}} \pm\{\beta_n(t) - \beta_n(s)\}.$$

In view of Lemma C.1, we obtain the following corollary of Theorem C.1.

**Corollary C.2.** Let $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ and $\mathcal{I}$ be as in Theorem C.1. Then, as $n \to \infty$, we have

$$\begin{aligned} &(i) \quad \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1); \quad \text{and} \\ &(ii) \quad \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\delta^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned} \tag{C.1.11}$$

**Proof.** The functional $\Theta^{\pm}(f) = \sup_{0\leq s,t\leq 1} \pm\{f(t) - f(s)\}$ is continuous on $(C[0,1],\mathcal{U})$, and fulfills (see, e.g., (4.1.3), p. 1276 in [37]) $\sup_{f\in\mathbb{S}} \Theta^{\pm}(f) = 1$. By combining $(C.1.9)(i)$ with $(C.1.10)$, taken with $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)$, we obtain that, as $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\omega^{\pm}_{n;\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log(1/h)}} - 1\right| = \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{f\in\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)}\Theta(f) - \sup_{f\in\mathbb{S}}\Theta(f)\right| = o_{\mathbb{P}}(1),$$

which yields the first half of $(C.1.11)$. The proof of the second half is similar and omitted.□

### C.1.3 Uniform-in-Bandwidth Kernel Estimation

Let $X_1, X_2, \ldots$ be iid random copies of the rv $X$, with df $F(\cdot) := \mathbb{P}(X \leq \cdot)$. Fix $I = [c,d] \subset J = [c',d'] \subset \mathbb{R}$, with $-\infty < c' < c < d < d' < \infty$. Assume that the density $f(\cdot)$ of $X$ is defined and continuous on $J$. By a *kernel* is meant a right-continuous function $K(\cdot)$, of bounded variation and compact support on $\mathbb{R}$, such that $\int_{\mathbb{R}} K(t)dt = 1$. The kernel estimator of $f(x)$ (Parzen [97], Rosenblatt [101]) is defined, for $h > 0$ and $x \in \mathbb{R}$, by

$$f_{n,h}(x) := \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right).$$

Our next theorem, describing the *uniform in bandwidth* consistency of $f_{n,h}(\cdot)$, will be shown to follow from Theorem C.1. We discuss in Remark C.3 below its relevance with respect to the literature on functional estimation.

**Theorem C.2.** Let $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ be as in Theorem C.1. Then, as $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}\pm\left\{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\right\}\right.$$
$$\left.-\left\{\sup_{x\in I} f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}\right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{C.1.12}$$

**Remark C.3.** 1°) $(C.1.12)$ holds when $\sup_{x\in I}\pm\left\{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\right\}$ is replaced by $\sup_{x\in I}\left|f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\right|$. Weighted versions of $(C.1.12)$, such as that given in Theorem 1.2 of [39], may be obtained by the same arguments.
2°) The methods of proof of Theorem C.2 can be used for the description of a number of functional estimators. Among these, we mention kernel estimators of the density derivatives (refer to §4 in [37], and see, e.g., [8, 9]).
3°) To illustrate the sharpness of the conditions $(C.1.8)$ implying $(C.1.12)$, we observe that this relation implies (by choosing $\mathcal{H}_n = [h_n, h_n]$ in Theorem C.2) that, whenever $\{h_n : n \geq 1\}$ is a sequence of constants fulfilling, as $n \to \infty$,

$$(i)\quad nh_n/\log n \to \infty, \quad\text{and}\quad (ii)\quad h_n \to 0, \tag{C.1.13}$$

then, as $n \to \infty$,

$$\left\{\frac{nh_n}{2\log_+(1/h_n)}\right\}^{1/2}\sup_{x\in I}\pm\left\{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h_n}(x)\right)\right\}$$
$$\xrightarrow{\mathbb{P}}\left\{\sup_{x\in I} f(x)\int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}. \tag{C.1.14}$$

The property ($C$.1.14) (see, e.g., Theorem 1.1 in [33], Theorem 1.2 in [39]) was proved by Silverman [106], under more stringent conditions than ($C$.1.13) (see [22, 37, 33, 109]). In general, ($C$.1.14) fails to hold when either ($i$) or ($ii$) in ($C$.1.13) is not satisfied. The convergence in ($C$.1.14) (and hence in ($C$.1.12)) does not hold *almost surely* [a.s.] for an arbitrary $f(\cdot)$ (continuous on $J$), without additional conditions. Namely, if we assume, in addition to ($C$.1.13), that

$$(iii)\quad \frac{\log(1/h_n)}{\operatorname{loglog} n} \to c \in (0,\infty], \quad (iv) \quad h_n \downarrow 0, \quad \text{and} \quad (v) \quad nh_n \uparrow \infty, \tag{C.1.15}$$

then, setting $(c+1)/c := 1$ when $c = \infty$ (see, e.g., Theorem 1.1, pp. 1304-1305 in [33]), we have, a.s.,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{nh_n}{2\log_+(1/h_n)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \pm \{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h_n}(x))\} \\
&\quad = \left(\frac{c+1}{c}\right)^{1/2} \left\{\sup_{x\in I} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}, \\
&\liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{nh_n}{2\log_+(1/h_n)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} \pm \{f_{n,h_n}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h_n}(x))\} \\
&\quad = \left\{\sup_{x\in I} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

By all this, an a.s. version of ($C$.1.12) should minimally require ($iii$) in ($C$.1.15) to hold with $c = \infty$.

4°) A number of authors (see, e.g., Einmahl and Mason [61], Deheuvels and Mason [39], Dony [48], Dony and Einmahl [49, 50], Dony et al. [51], Dony and Mason [52], Einmahl and Mason [62], Mason [88, 89], Mason and Swanepoel [91], Viallon [118]) have used the theory of *empirical processes indexed by functions* to obtain uniform in bandwidth convergence theorems in the spirit of ($C$.1.12). Most of these results have been given in the setup of a.s. convergence. For example Theorem 1 of Einmahl and Mason [62] shows that, for each $r > 0$, a.s.,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \left( \sup_{\frac{r\log n}{n} \le h \le 1} \left\{\frac{nh}{\log(1/h) \vee \operatorname{loglog} n}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} |f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))| \right) \\
&\quad =: \mathcal{K}(I,r) < \infty,
\end{aligned} \tag{C.1.16}$$

where the explicit value of $\mathcal{K}(I,r)$ in ($C$.1.16) is unknown. Varron and Van Keilegom [116] (see also [114] and Corollary 1.1, p. 1048 in Varron [115]) have evaluated the a.s. limit

$$\mathcal{L} := \lim_{n\to\infty} \left( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \left\{\frac{nh}{2\log(1/h)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} |f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))| \right), \tag{C.1.17}$$

where $\mathcal{H}_n = [h'_n, h''_n]$, and $h'_n, h''_n$ are sequences of constants fulfilling ($C$.1.13)–($C$.1.15), among other conditions. The methods of proof of ($C$.1.17) are appropriate to provide a.s. versions of

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \left\{\frac{nh}{2\log_+(1/h)}\right\}^{1/2} \sup_{x\in I} |f_{n,h}(x) - \mathbb{E}(f_{n,h}(x))| \\
&\quad \xrightarrow{\mathbb{P}} \left\{\sup_{x\in I} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt\right\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{C.1.18}$$

On the other hand, it is not clear whether these methods may be used or not, to give alternate proofs of $(C.1.12)$, which turns out to be a much stronger statement than $(C.1.18)$. The interest of doing so would be to extend Theorem C.2 to multidimensional observations. Presently it is beyond reasonable hope to achieve this program without new technical arguments. This gives sufficient motivation for the present work. Moreover, the quantile process part of Theorem C.1 cannot be extended to higher dimensions, being specific to the univariate case. We refer to Viallon [118] for a discussion of the corresponding applications.

We provide below a proof of Theorem C.2. The following analytical lemma will be useful.

**Lemma C.4.** Denote by $\mathbb{I}(t) := t$ the identity. Let $\mathcal{T}$ be a set of measurable mappings of $[0,1]$ onto $[0,1]$. Set $\theta := \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \|\tau - \mathbb{I}\|$. For each (non-empty) subset $\mathcal{F}$ of $B[0,1]$, set $\mathcal{F}\circ\mathcal{T} := \{f\circ\tau : f\in\mathcal{F}, \tau\in\mathcal{T}\}$. Then, we have

$$\Delta\left(\mathcal{F}\circ\mathcal{T},\mathbb{S}\right) \leq \Delta\left(\mathcal{F},\mathbb{S}\right) + \sqrt{\theta}. \tag{C.1.19}$$

**Proof.** For any $f\in\mathbb{S}$, the Schwarz inequality shows that, for each $0\leq s,t\leq 1$,

$$|f(t)-f(s)| = \left|\int_s^t \dot{f}(u)du\right| \leq \left\{|t-s|\times\left|\int_s^t \dot{f}(u)^2du\right|\right\}^{1/2} \leq \sqrt{|t-s|}. \tag{C.1.20}$$

Therefore, for any $g\in\mathcal{F}$, $\tau\in\mathcal{T}$ and $f\in\mathbb{S}$, we have the inequalities

$$\|g\circ\tau - f\| \leq \|g\circ\tau - f\circ\tau\| + \|f\circ\tau - f\| \leq \|g-f\| + \sqrt{\theta}. \tag{C.1.21}$$

The inclusion $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{S}^\epsilon$ is equivalent to the existence, for each $g\in\mathcal{F}$, of an $f\in\mathbb{S}$ such that $\|g-f\|<\epsilon$. By $(C.1.21)$, this implies that, for each $\tau\in\mathcal{T}$, $\|g\circ\tau - f\|\leq\epsilon+\sqrt{\theta}$, whence $\mathcal{F}\circ\mathcal{T}\subseteq\mathbb{S}^{\epsilon+\sqrt{\theta}}$. Likewise, the inclusion $\mathbb{S}\subseteq\mathcal{F}^\epsilon$ is equivalent to the existence, for each $f\in\mathbb{S}$ of a $g\in\mathcal{F}$ such that $\|g-f\|<\epsilon$. This, in turn, implies that, for each $\tau\in\mathcal{T}$, $\|g\circ\tau - f\|\leq\epsilon+\sqrt{\theta}$, whence $\mathbb{S}\subseteq(\mathcal{F}\circ\mathcal{T})^{\epsilon+\sqrt{\theta}}$. By all this, we infer $(C.1.19)$ from $(C.1.4)$.□

**Proof of Theorem C.2.** We follow the arguments on pp. 1278–1281 of [25], to reduce the proof to the case where $\widetilde{K}(u) := K(-u) = 0$ for $u\notin[0,1]$. By setting $U_n = F(X_n)$ for $n=1,2,\ldots$, we need only (see, e.g., (4.2.5)–(4.2.6) in [25]) consider the limiting behavior of

$$n^{1/2}h\left(f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\right) = -\int_0^1 \left(\alpha_n(F(x+hu)) - \alpha_n(F(x))\right)d\widetilde{K}(u), \tag{C.1.22}$$

for $h\in\mathcal{H}_n$, and with $x$ varying within a specified $[C,D]\subseteq I=[c,d]$, with $C<D$. Let $x_0\in[C,D]$ be a point where $f(\cdot)$ reaches its maximum, with $f(x_0)=\sup_{x\in[C,D]} f(x) > 0$, to avoid degeneracy. Observe, via $(C.1.22)$, that

$$n^{1/2}h\left(f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\right) = -\int_0^1 \xi_n(hf(x_0);F(x);\tau(u))d\widetilde{K}(u),$$

where $\tau(u) := \{F(x+hu)-F(x)\}/\{hf(x_0)\}$ for $0\leq u\leq 1$. An application of Taylor's formula shows that

$$\|\tau - \mathbb{I}\| = \sup_{0\leq u\leq 1}|\tau(u)-u| \leq \eta(C,D) := \sup_{C-h_0\leq y\leq D+h_0}\left|\frac{f(y)}{f(x_0)} - 1\right|. \tag{C.1.23}$$

Here, we assume that $h\in\mathcal{H}_n$ imposes that $h\leq h_0$ for some $h_0>0$ so small that $[C-h_0, D+h_0]\subseteq J=[c',d']$. It follows from $(C.1.9)(i)$ in Theorem C.1 that, as $n\to\infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\Delta\left(\left\{\frac{\xi_n(hf(x_0);F(x);\cdot)}{\sqrt{2hf(x_0)\log_+(1/(hf(x_0)))}} : C\leq x\leq D\right\},\mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

By $(C.1.23)$ and an application of Lemma C.4, this shows, in turn, that, for each $\eta_0 > 0$, we have, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\Big( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Delta \left( \left\{ \frac{\xi_n(hf(x_0); F(x); \tau(\cdot))}{\sqrt{2hf(x_0)\log_+(1/(hf(x_0)))}} : C \leq x \leq D \right\}, \mathbb{S} \right)$$
$$\geq \tfrac{1}{2}\eta_0 + \sqrt{\eta(C,D)}\Big) \to 0. \tag{C.1.24}$$

By Lemma C.1, taken with $\Theta(g) := \int_0^1 \mp g(u)d\widetilde{K}(u)$, for each $\varepsilon > 0$, there exists an $\eta > 0$ fulfilling $(C.1.10)$. If we set $\eta_0 = \eta$ in $(C.1.24)$, and then, select $C, D$ so that $\sqrt{\eta(C,D)} \leq \frac{1}{2}\eta$, we infer from $(C.1.10)$ and $(C.1.24)$ that, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \left| \sup_{C\leq x\leq D} \left\{ \frac{\pm n^{1/2}h\left\{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\right\}}{\sqrt{2hf(x_0)\log_+(1/(hf(x_0)))}} \right\} - \sup_{g\in\mathbb{S}} \int_0^1 \mp g(u)d\widetilde{K}(u) \right| \geq \varepsilon \right) \to 0. \tag{C.1.25}$$

It is readily checked (see, e.g., (4.2.11) in [25]) that

$$\sup_{g\in\mathbb{S}} \int_0^1 \mp g(u)d\widetilde{K}(u) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \widetilde{K}^2(u)du \right\}^{1/2} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} K^2(u)du \right\}^{1/2}.$$

In view of $(C.1.23)$, we may partition the interval $I = [c,d]$ of Theorem C.2 into a finite union of intervals $[C,D]$, as above, each fulfilling $\sqrt{\eta(C,D)} < \frac{1}{2}\eta$. By writing $(C.1.25)$ for each of these intervals, we obtain that, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\Bigg( \sup_{h\in\mathcal{H}_n} \Bigg| \Big\{ \frac{nh}{2\log_+(1/h)} \Big\}^{1/2} \sup_{x\in I} \Big( \pm \left\{f_{n,h}(x) - \mathbb{E}\left(f_{n,h}(x)\right)\right\} \Big)$$
$$- \Big\{ \sup_{x\in I} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \Big\}^{1/2} \Bigg| \geq 2\varepsilon \Big\{ \sup_{x\in I} f(x) \Big\}^{1/2} \left( 1 + \Big\{ \int_{\mathbb{R}} K^2(t)dt \Big\}^{1/2} \right) \Bigg) \to 0.$$

Since the initial choice of $\varepsilon > 0$ in this relation is arbitrary, we conclude $(C.1.12)$, as sought.□

## C.2 Proofs

### C.2.1 Outer Bounds for Increments of Empirical processes

The following proposition constitutes an "outer-bound" part of Theorem C.1. By Lemma A1 of Berkes and Philipp [4], we assume that the random quantities we consider are defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

**Proposition C.5.** For each $0 < \varepsilon_0, \varepsilon_1 < 1$, there exist constants $0 < r_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1), b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) < \infty$ such that, setting

$$\mathcal{H}_{n,1}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) := \left[ r_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1)n^{-1}\log n, b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \right], \tag{C.2.26}$$

we have, for all $n$ sufficiently large,

$$\mathbb{P}\left( \bigcup_{h\in\mathcal{H}_{n,1}(\varepsilon_0,\varepsilon_1)} \mathcal{F}_n\left(h\right) \subseteq \mathbb{S}^{\varepsilon_1} \right) \geq 1 - \varepsilon_0. \tag{C.2.27}$$

Proposition C.5 implies that, under the assumptions of Theorem C.1, for each $0 < \epsilon < 1$, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h\in\mathcal{H}_n} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^\epsilon\right) \to 1. \tag{C.2.28}$$

The following arguments are oriented towards proving Proposition C.5. We denote by $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ a right-continuous Poisson process on $\mathbb{R}^+$, with $\mathbb{E}(\Pi(t)) = t$ for $t \geq 0$, and by $\{W(t) : t \geq 0\}$ a standard Wiener process on $\mathbb{R}^+$. The next fact follows from Komlós, Major and Tusnády [79] (see, e.g., (3.13), p. 1267 in [25]).

**Fact 2.** We may define $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ and $\{W(t) : t \geq 0\}$ on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, in such a way that, for universal positive constants $C_1, C_2, C_3$, for all $T \geq 0$ and $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq x\leq T} |\Pi(x) - x - W(x)| \geq C_1 \log_+ T + z\right) \leq C_2 \exp(-C_3 z). \tag{C.2.29}$$

Recalling the definition $(C.1.5)$ of $|\cdot|_{\mathbb{H}}$, introduce a functional $J(\cdot)$ on $(B[0,1], \mathcal{U})$, by setting

$$J(A) := \inf_{f\in A} |f|^2_{\mathbb{H}} \quad \text{when} \quad A \subseteq B[0,1], \quad A \neq \emptyset; \quad J(A) := \infty \quad \text{when} \quad A = \emptyset. \tag{C.2.30}$$

For each $\lambda > 0$, set $W_{\{\lambda\}}(s) := (2\lambda)^{-1/2} W(s)$ for $s \in [0,1]$. The next fact is due to Schilder [102].

**Fact 3.** Whenever $F$ (resp. $G$) is a closed (resp. open) subset of $(B[0,1], \mathcal{U})$, we have

$$\begin{aligned} &(i) \quad \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \log \mathbb{P}\left(W_{\{\lambda\}} \in F\right) \leq -J(F); \\ &(ii) \quad \liminf_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \log \mathbb{P}\left(W_{\{\lambda\}} \in G\right) \geq -J(G). \end{aligned} \tag{C.2.31}$$

Fact 4 below coincides with Lemma 3.5 in [25]. Set, for each $a \geq 0$, $t \geq 0$, $n \geq 1$ and $s \geq 0$,

$$L_n(a; t; s) = n^{-1/2}\Big\{\Pi(nt + nsa) - \Pi(nt) - nsa\Big\}. \tag{C.2.32}$$

**Fact 4.** For any $n \geq 5$, $0 \leq a \leq 1/2$ and $0 \leq t \leq t + a \leq 1$, we have, whenever the probabilities are meaningful,

$$\mathbb{P}\left(\xi_n(a; t; \cdot) \in A\right) \leq 2\mathbb{P}\left(L_n(a; t; \cdot) \in A\right). \tag{C.2.33}$$

For the next fact, we refer to Lemma 2.5, p. 2021 in [33].

**Fact 5.** For each $0 < \varepsilon < 1$, and for each $f \in B[0,1]$ and $0 < \epsilon < |f|_{\mathbb{H}} \leq 1$, we have

$$J\Big(B[0,1] - \mathbb{S}^\varepsilon\Big) \geq (1+\varepsilon)^2 \quad \text{and} \quad J(\mathcal{N}_\epsilon(f)) \leq (|f|_{\mathbb{H}} - \epsilon)^2. \tag{C.2.34}$$

**Proposition C.6.** There exists a $C_4 > 0$ such that the following holds. For each $0 < \epsilon \leq 1$, there exist constants $0 < a(\epsilon) \leq 1/e$ and $0 < c(\epsilon) < \infty$, together with an $n(\epsilon) < \infty$, such that, for all $n \geq n(\epsilon)$ and $a > 0$ fulfilling

$$na/\log n \geq c(\epsilon) \quad \text{and} \quad a \leq a(\epsilon), \tag{C.2.35}$$

we have

$$\mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a; t; \cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \leq C_4 a^{1+\epsilon}. \tag{C.2.36}$$

**Proof.** Below, we let $n \geq 5$, $0 < a \leq 1/e$ and $0 \leq t \leq t + a \leq 1$, so that $\log_+(1/a) = \log(1/a)$ and the assumptions in Fact 4 are fulfilled. Fix an arbitrary $0 < \epsilon \leq 1$, and set $\epsilon_1 = \sqrt{1+2\epsilon} - 1$ and $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1^2$. Observe that $2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 = 2\epsilon$, so that $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ and $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$. By combining these relations with $(C.2.32)$, $(C.2.33)$ and $(C.2.29)$, we obtain readily the inequalities

$$\begin{aligned}
P_n(\epsilon) \quad &:= \quad \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\frac{L_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \\
&= \quad 2\mathbb{P}\left(\frac{\Pi(na\cdot) - na\cdot}{\sqrt{2na\log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1}\right) \\
&+ \quad 2\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{W(na\cdot) - \{\Pi(na\cdot) - na\cdot\}}{\sqrt{2na\log(1/a)}}\right| \geq \epsilon_2\right) \\
&=: \quad 2P_{1,n}(\epsilon_1) + 2P_{2,n}(\epsilon_2).
\end{aligned} \tag{C.2.37}$$

Observe thar $P_{1,n}(\epsilon_1) = \mathbb{P}\left(W_{\{\log(1/a)\}} \in F\right)$, where $F := B[0,1] - \mathbb{S}^{\epsilon_1}$ is a closed subset of $(B[0,1],\mathcal{U})$. Since, by $(C.2.34)$, $J(F) \geq (1+\epsilon_1)^2$, we infer from $(C.2.31)(i)$ the existence of an $a(\epsilon) \in (0, 1/e]$, such that, for all $0 < a \leq a(\epsilon)$,

$$\begin{aligned}
P_{1,n}(\epsilon_1) \quad &= \quad \mathbb{P}\left(W_{\{\log(1/a)\}} \in F\right) \leq \exp\left(-\left\{\log(1/a)\right\}\left\{(1+\epsilon_1)^2 - \epsilon_2\right\}\right) \\
&= \quad a^{1+\epsilon+\epsilon_1} < a^{1+\epsilon}.
\end{aligned} \tag{C.2.38}$$

Next, we combine $(C.2.29)$ with $(C.2.37)$, to obtain the inequalities, for an arbitrary $\epsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
P_{2,n}(\epsilon_2) \quad &= \quad \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq x\leq na}|\Pi(x) - x - W(x)| \geq C_1\log(na) + z_n\Big) \\
&\leq \quad C_2\exp(-C_3 z_n),
\end{aligned} \tag{C.2.39}$$

where $z_n := \epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)} - C_1\log(na)$. Observe that

$$\frac{C_3 z_n}{\log(1/a)} = C_3\epsilon_2\sqrt{2}\left\{\frac{na}{\log(1/a)}\right\}^{1/2}\left\{1 - \frac{C_1\log(na)}{\epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)}}\right\}. \tag{C.2.40}$$

Fix any $c > 0$, and consider the following two cases.

**Case 1.** For $n^{-1/2} \leq a \leq 1/e$, we have

$$\frac{\log(na)}{\sqrt{na\log(1/a)}} \leq \frac{\log(n/e)}{\sqrt{n^{1/2}\log n^{1/2}}} \leq \frac{\sqrt{2\log n}}{n^{1/4}}.$$

**Case 2.** For $\frac{c\log n}{n} \leq a \leq n^{-1/2}$, and all $n \geq n_1(c) := \inf\left\{m \geq 5 : \forall n \geq m, \log\left(\frac{n}{c\log n}\right) \leq \log n\right\}$, we have

$$\frac{\log(na)}{\sqrt{na\log(1/a)}} \leq \frac{\log\sqrt{n}}{\sqrt{(c\log n)\log\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2c}}.$$

Set now, for $c > 0$ and $n_1(c)$ as defined above,

$$n_2(c,\epsilon_2) := \inf\left\{m \geq n_1(c) : \forall n \geq m,\ \frac{\sqrt{2\log n}}{n^{1/4}} \leq \frac{\epsilon_2\sqrt{2}}{2C_1}\right\},$$

and select $c > 0$ by setting $c = c(\epsilon_2) := \frac{1}{\epsilon_2^2} \max\left\{C_1^2\,,\frac{8}{C_3^2}\right\}$. In either Case 1 or Case 2, whenever $n \geq n_3(\epsilon_2) := n_2(c(\epsilon_2),\epsilon_2)$, we have, for all $a > 0$ such that $c(\epsilon_2)n^{-1}\log n \leq a \leq 1/e$,

$$\frac{C_1 \log(na)}{\epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)}} \leq \frac{C_1}{\epsilon_2\sqrt{2}} \max\left\{\frac{\sqrt{2\log n}}{n^{1/4}}\,,\frac{1}{\sqrt{2c(\epsilon_2)}}\right\} \leq \frac{1}{2}\,,$$

and

$$\left\{\frac{na}{\log(1/a)}\right\}^{1/2} \geq \left\{\frac{na}{\log(\frac{n}{c(\epsilon_2)\log n})}\right\}^{1/2} \geq \left\{\frac{na}{\log n}\right\}^{1/2} \geq \sqrt{c(\epsilon_2)} \geq \frac{2\sqrt{2}}{C_3\epsilon_2}\,,$$

whence

$$\frac{1}{\sqrt{2c(\epsilon_2)}} \leq \frac{\epsilon_2\sqrt{2}}{2C_1} \quad \text{and} \quad c(\epsilon_2) \geq \frac{8}{C_3^2\epsilon_2^2}\,.$$

By combining these inequalities with $(C.2.40)$, we obtain that, with $z_n$ as above,

$$\frac{C_3 z_n}{\log(1/a)} \geq C_3\epsilon_2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{C_3\epsilon_2} \times \frac{1}{2} = 2.$$

Therefore, we infer from $(C.2.39)$ and $(C.2.40)$, that

$$n \geq n_3(\epsilon_2) \quad \text{and} \quad c(\epsilon_2)n^{-1}\log n \leq a \leq 1/e \quad \Rightarrow \quad P_{2,n}(\epsilon_2) \leq C_2 a^2. \tag{C.2.41}$$

The inequalities $0 < \epsilon \leq 1$ and $0 < a \leq 1/e < 1$, allow us to rewrite the RHS of $(C.2.41)$ into $P_{2,n}(\epsilon_2) \leq C_2a^2 \leq C_2a^{1+\epsilon}$. This, when combined with $(C.2.37)$ and $(C.2.38)$ entails that $P_n(\epsilon) \leq 2P_{1,n}(\epsilon_1) + 2P_{2,n}(\epsilon_2) \leq 2(C_2+1)a^{1+\epsilon}$, which yields $(C.2.36)$, with $C_4 := 2(C_2+1)$ and $n(\epsilon) := n_3(\epsilon_2)$, with $\epsilon_2 := \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+2\epsilon}-1\right\}^2$.$\square$

**Proposition C.7.** For each $f \in \mathbb{S}$ such that $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, and $\epsilon$ such that $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$, there exist an $a'(\epsilon, f) > 0$, an $n_3(\frac{1}{2}\epsilon) < \infty$ and a $c(\frac{1}{2}\epsilon) > 0$ (both depending upon $\epsilon$ only), such that the following properties hold. For each sub-interval $\mathcal{I} = [u,v]$ of $[0,1]$, with $|\mathcal{I}| = |v-u| > 0$, whenever

$$n \geq n_3(\tfrac{1}{2}\epsilon), \quad c(\tfrac{1}{2}\epsilon)n^{-1}\log n \leq a \leq a'(\epsilon,f) \wedge \tfrac{1}{2}|\mathcal{I}| \quad \text{and} \quad \mathcal{I} \subseteq [0,1-a], \tag{C.2.42}$$

we have

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \leq 2\exp\left(-\tfrac{1}{4}\left\{|\mathcal{I}| \wedge \tfrac{1}{2}\right\}a^{-\epsilon/2}\right). \tag{C.2.43}$$

**Proof.** Assume that $|\mathcal{I}| \leq \frac{1}{2}$, otherwise, replace $\mathcal{I} = [u,v]$ by $[u, u+\frac{1}{2}]$. Let $n \geq 5$, $0 < a < |\mathcal{I}| \wedge (1/e)$, and $\mathcal{I} \subseteq [0, 1-a]$, so that $\log_+(1/a) = \log(1/a)$, and the assumptions in Fact 4 hold. Let $f \in \mathbb{S}$ be such that $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, and choose an $\epsilon$ such that $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$, and hence, $1 - \epsilon > 1 - \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}} > \frac{1}{2}$. By $(C.2.29)$, $(C.2.32)$ and $(C.2.33)$, we proceed as in the proof of $(C.2.37)$, to obtain that, with $\lfloor u \rfloor \leq u < \lfloor u \rfloor + 1$ denoting the integer part of

$u$,

$$\begin{aligned}
Q_n(\epsilon) &:= \mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{L_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \\
&\leq 2\prod_{j=1}^{\lfloor|\mathcal{I}|/a\rfloor}\left\{1-\mathbb{P}\left(\frac{L_n(a;t+(j-1)a;\cdot)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right)\right\} \\
&\leq 2\exp\left(-\lfloor|\mathcal{I}|/a\rfloor\mathbb{P}\left(\frac{\Pi(na\cdot)-na\cdot}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right)\right) \\
&\leq 2\exp\left(-\lfloor|\mathcal{I}|/a\rfloor\left\{P_{3,n}(\epsilon)-P_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon)\right\}\right), \qquad (C.2.44)
\end{aligned}$$

where $P_{3,n}(\epsilon) := \mathbb{P}\left(W(na)/\sqrt{2na\log(1/a)} \in \mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)\right) =: \mathbb{P}\left(W_{\{\log(1/a)\}} \in G\right)$, and, with $P_{2,n}(\cdot)$ as in $(C.2.39)$,

$$P_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon) \;:=\; \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{W(na\cdot)-\{\Pi(na\cdot)-na\cdot\}}{\sqrt{2na\log(1/a)}}\right| \geq \tfrac{1}{2}\epsilon\right).$$

Here, $G := \mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)$ is an open subset of $(B[0,1],\mathcal{U})$. By $(C.2.34)$ and the assumption that $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}} < \frac{1}{2}$, we get $J\left(\mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)\right) \leq \left(|f|_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2}\epsilon\right)^2 < \left(1-\frac{1}{2}\epsilon\right)^2 < 1-\frac{1}{2}\epsilon$. By $(C.2.31)(ii)$, this implies the existence of an $a_1'(\epsilon,f) \in (0,1/e]$, such that, for all $0 < a \leq a_1'(\epsilon,f)$, $P_{3,n}(\epsilon) = \mathbb{P}\left(W_{\{\log(1/a)\}} \in G\right) \geq \exp\left(-\left\{\log(1/a)\right\}\left\{(1-\frac{1}{2}\epsilon)\right\}\right) = a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}$. On the other hand, we may use $(C.2.41)$ to obtain that

$$\begin{aligned}
&n \geq n_3\left(\tfrac{1}{2}\epsilon\right) \text{ and } \frac{c\left(\frac{1}{2}\epsilon\right)\log n}{n} \leq a \leq (1/e)\wedge\left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon} \\
&\Rightarrow\; P_{2,n}(\tfrac{1}{2}\epsilon) \leq C_2 a^2 \leq \tfrac{1}{2}a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}. \qquad (C.2.45)
\end{aligned}$$

Next, we see that, if $a < \frac{1}{2}|\mathcal{I}|$, then $\left\lfloor\frac{|\mathcal{I}|}{a}\right\rfloor \geq \frac{|\mathcal{I}|}{a} - 1 \geq \frac{|\mathcal{I}|}{2a}$. By $(C.2.44)$, this entails that $Q_n(\epsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{|\mathcal{I}|}{4a} \times a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}\right)$, which suffices for $(C.2.43)$. In $(C.2.42)$, we let $n_3(\cdot)$ and $c(\cdot)$ be as in the proof of Proposition C.6.□

**Lemma C.8.** For each $f \in \mathbb{S}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ and $t \leq s \leq s+\lambda a \leq t+a$, set

$$f_{s,t,a,\lambda}(u) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{f\left(\frac{s-t}{a}+\lambda u\right) - f\left(\frac{s-t}{a}\right)\right\} \quad \text{for} \quad 0 \leq u \leq 1. \qquad (C.2.46)$$

Then, we have

$$f_{s,t,a,\lambda} \in \mathbb{S} \quad \text{and} \quad |f_{s,t,a,\lambda}|_{\mathbb{H}} \leq |f|_{\mathbb{H}}. \qquad (C.2.47)$$

Moreover, for any $0 < \epsilon < 1$, there exists an $0 < a_1(\epsilon) \leq 1/e$, such that, for each

$0 < a \leq a_1(\epsilon)$ and $0 \leq t \leq 1-a$,

$$\left\{ \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f) \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\xi_n(\lambda a;s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} \in \mathcal{N}_{6\epsilon}(f_{s,t,a,\lambda}) : \forall\, s \in [t, t+(1-\lambda)a],\ \forall\, \lambda \in [\tfrac{1}{2}, 1] \right\}, \quad \text{(C.2.48)}$$

$$\left\{ \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^\epsilon \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\xi_n(\lambda a;s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} \in \mathbb{S}^{6\epsilon} : \forall\, s \in [t, t+(1-\lambda)a],\ \forall\, \lambda \in [\tfrac{1}{2}, 1] \right\}. \quad \text{(C.2.49)}$$

**Proof.** Let $0 < a \leq 1/e$. Whenever the event on the LHS of $(C.2.48)$ holds for some $f \in \mathbb{S}$, we have

$$\left\| \xi_n(a;t;\cdot)/\sqrt{2a\log_+(1/a)} - f \right\| < \epsilon. \quad \text{(C.2.50)}$$

Since $f \in \mathbb{S}$, we have, by $(C.1.20)$, $\|f\| \leq |f|_{\mathbb{H}} \leq 1$. Thus, by $(C.2.50)$ and the triangle inequality, we get

$$\left\| \xi_n(a;t;\cdot)/\sqrt{2a\log_+(1/a)} \right\| \leq \epsilon + \|f\| \leq \epsilon + 1.$$

By combining again $(C.2.50)$ with the triangle inequality, we obtain likewise that, for each $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/(\lambda a))}} - f(\cdot) \right\| &\leq \epsilon + \left\| \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \right\| \times \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| \\ &\leq \epsilon + (\epsilon+1)M(a), \end{aligned} \quad \text{(C.2.51)}$$

where

$$M(a) := \sup_{\frac{1}{2}\leq\lambda\leq 1} \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| = \left| \left\{ \frac{\log(1/a)}{\log(2/a)} \right\}^{1/2} - 1 \right| \to 0 \quad \text{as} \quad a \downarrow 0.$$

There exists an $0 < a_1(\epsilon) \leq 1/e$ such that $M(a) < \epsilon/(\epsilon+1)$ for $0 < a \leq a_1(\epsilon)$. Thus, whenever $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$,

$$\left\| \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} - \frac{f(\cdot)}{\sqrt{\lambda}} \right\| \leq \frac{\epsilon + (\epsilon+1)M(a)}{\sqrt{\lambda}} \leq 2\epsilon\sqrt{2} < 3\epsilon. \quad \text{(C.2.52)}$$

For $f \in \mathbb{S}$, $0 < \lambda \leq 1$ and $0 \leq t \leq s \leq s + \lambda a \leq t + a \leq 1$, let $f_{s,t,a,\lambda}(\cdot)$ be as in $(C.2.46)$. Since $f_{s,t,a,\lambda}(0) = 0$, and $\dot{f}_{s,t,a,\lambda}(u) = \lambda^{1/2}\dot{f}\left(\frac{s-t}{a} + \lambda u\right)$, we see that $|f_{s,t,a,\lambda}|^2_{\mathbb{H}} \leq |f|^2_{\mathbb{H}} \leq 1$, so that $f_{s,t,a,\lambda} \in \mathbb{S}$, and $(C.2.47)$ holds. This, in combination with $(C.1.1)$, $(C.2.52)$ and the triangle inequality, implies that, whenever $f \in \mathbb{S}$ fulfills $(C.2.50)$, we have, for all $0 < a \leq a_1(\epsilon)$, $0 \leq t \leq 1-a$, $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, and $s \in [t, t+(1-\lambda)a]$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\xi_n(\lambda a;s;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} - f_{s,t,a,\lambda}(\cdot) \right\| &\leq \left\| \frac{\xi_n(a;t;((s-t)/a)+\lambda\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} - \frac{f(((s-t)/a)+\lambda\cdot)}{\sqrt{\lambda}} \right\| \\ &+ \left\| \frac{\xi_n(a;t;(s-t)/a)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} - \frac{f((s-t)/a)}{\sqrt{\lambda}} \right\| < 6\epsilon, \end{aligned}$$

which readily implies ($C$.2.48). The proof of ($C$.2.49) is similar and omitted.□

For a fixed $0 < a \le 1/e$, set $t_j(a) := (j-1)a$ for $j = 1, \dots, N-1$, where $N := \lfloor 1/a \rfloor$, and $t_N(a) := 1 - 2a$.

**Lemma C.9.** For each $0 < \epsilon < 1$, there exists an $0 < a_2(\epsilon) \le 1/e$, such that, for each $0 < a \le a_2(\epsilon)$, we have

$$\bigcap_{j=1}^{N} \left\{ \frac{\xi_n(2a; t_j(a); \cdot)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}} \in \mathbb{S}^{\epsilon/6} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{\xi_n(a; t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon} : \forall\, t \in [0, 1-a] \right\}. \tag{C.2.53}$$

**Proof.** Observe that $0 \le t_j(a) \le 1 - 2a$ for $j = 1, \dots, N$. By Lemma C.8, taken with the formal replacement of $\epsilon > 0$ by $\epsilon/6 > 0$, and setting $\lambda = \frac{1}{2}$ in ($C$.2.49), we see that, whenever $0 < 2a \le a_1(\epsilon/6)$, we have, for each $j = 1, \dots, N$,

$$\left\{ \frac{\xi_n(2a; t_j(a); \cdot)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}} \in \mathbb{S}^{\epsilon/6} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{\xi_n(a; s; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon} : \forall\, s \in [t_j(a), t_j(a) + a] \right\}. \tag{C.2.54}$$

Observe that $\bigcup_{j=1}^{N} [t_j(a), t_j(a) + a] = [0, a(N-1)] \cup [1-2a, 1-a]$. Since $a(N-1) > 1-2a$, $\bigcup_{j=1}^{N} [t_j(a), t_j(a) + a] \supseteq [0, 1-a]$. Therefore, we infer from ($C$.2.54) that ($C$.2.53) holds for all $0 < a \le a_2(\epsilon) := \frac{1}{2} a_1(\epsilon/6)$.□

**Proposition C.10.** There exists a universal constant $C_5 > 0$ such that the following holds. For each $0 < \epsilon < 1$, there exist an $0 < a_3(\epsilon) \le 1/e$, a $0 < c_1(\epsilon) < \infty$, and an $n_1(\epsilon) < \infty$, such that, for all $n \ge n_1(\epsilon)$ and $a > 0$ fulfilling

$$na/\log n \ge c_1(\epsilon) \quad \text{and} \quad a \le a_3(\epsilon), \tag{C.2.55}$$

we have

$$\mathbb{P}\left( \exists \lambda \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \exists s \in [0, 1-\lambda a] : \frac{\xi_n(\lambda a; s; \cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} \notin \mathbb{S}^{6\epsilon} \right) \le C_5 a^{\epsilon/6}. \tag{C.2.56}$$

**Proof.** Fix $0 < \epsilon < 1$. By ($C$.2.49) in Lemma C.8, we have, for all $0 < a \le a_1(\epsilon)$ and $n \ge 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n(a) &:= \left\{ \exists \lambda \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \exists s \in [0, 1-\lambda a] : \frac{\xi_n(\lambda a; s; \cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} \notin \mathbb{S}^{6\epsilon} \right\} \\
&= \bigcup_{0 \le t \le 1-a} \left\{ \exists \lambda \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \exists s \in [t, t + (1-\lambda)a] : \frac{\xi_n(\lambda a; s; \cdot)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/(\lambda a))}} \notin \mathbb{S}^{6\epsilon} \right\} \\
&\subseteq \bigcup_{0 \le t \le 1-a} \left\{ \frac{\xi_n(a; t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon} \right\} = \left\{ \exists t \in [0, 1-a] : \frac{\xi_n(a; t; \cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon} \right\}.
\end{aligned}$$

Thus, by ($C$.2.53) in Lemma C.9, whenever $0 < a \leq a_1(\epsilon) \wedge a_2(\epsilon)$ and $n \geq 1$, we have

$$\mathcal{E}_n(a) \quad \subseteq \quad \bigcup_{j=1}^{\lfloor 1/a \rfloor} \left\{ \frac{\xi_n(2a; t_j(a); \cdot)}{\sqrt{2(2a) \log_+(1/(2a))}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon/6} \right\}. \tag{C.2.57}$$

By Proposition C.6, taken with the formal replacements of $\epsilon$ by $\epsilon/6$, and of $a$ by $2a$, we infer from ($C$.2.57) that, if $0 < a < a_3(\epsilon) := \frac{1}{2}a(\epsilon/6) \wedge a_1(\epsilon) \wedge a_2(\epsilon)$, $n \geq n_1(\epsilon) := n(\epsilon/6)$, and $na/\log n \geq c_1(\epsilon) := \frac{1}{2}c(\epsilon/6)$, we have

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_n(a)\right) \leq \sum_{j=1}^{\lfloor 1/a \rfloor} \mathbb{P}\left( \frac{\xi_n(2a; t_j(a); \cdot)}{\sqrt{2(2a) \log_+(1/(2a))}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon/6} \right) \leq \lfloor 1/a \rfloor C_4 (2a)^{1+\epsilon/6}.$$

The observation that $\lfloor 1/a \rfloor \leq (1/a) + 1 \leq 2/a$ (which follows from $a < 1/e$ in Lemmas C.8–C.9), and $2^{1+\epsilon/6} < 2^2$ (since $0 < \epsilon < 1$), entails that $\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_n(a)\right) \leq 8C_4 a^{\epsilon/6}$. By setting $C_5 = 8C_4$, we so obtain ($C$.2.56).□

**Proof of Proposition C.5.** Fix $0 < \varepsilon_0, \varepsilon_1 < 1$. In view of ($C$.2.55), let the integer $K \geq 1$ and $b > 0$ be such that

$$\frac{n2^{-K}b}{\log n} \geq c(\tfrac{1}{6}\varepsilon_1) \quad \text{and} \quad b \leq a_3(\tfrac{1}{6}\varepsilon_1), \tag{C.2.58}$$

we apply Proposition C.10 taken with $\epsilon = \frac{1}{6}\varepsilon_1$ and $a = 2^{-j}b$, for $j = 0, \ldots, K-1$, to infer from ($C$.2.56) that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left( \exists h \in [2^{-K}b, b],\, \exists s \in [0, 1-h] : \frac{\xi_n(h; s; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \notin \mathbb{S}^{\varepsilon_1} \right) \\
\leq\ & \sum_{j=0}^{K-1} \mathbb{P}\left( \exists \lambda \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],\, \exists s \in [0, 1-\lambda a] : \frac{\xi_n(\lambda 2^{-j}b; s; \cdot)}{\sqrt{2\lambda 2^{-j} b \log_+(1/(\lambda 2^{-j}b))}} \notin \mathbb{S}^{\varepsilon_1} \right) \\
\leq\ & C_5 \sum_{j=0}^{K-1} \left(2^{-j}b\right)^{\frac{1}{36}\varepsilon_1} \leq C_5 b^{\frac{1}{36}\varepsilon_1} \sum_{j=0}^{K-1} \left\{2^{-\frac{1}{36}\varepsilon_1}\right\}^j \leq \frac{C_5 b^{\frac{1}{36}\varepsilon_1}}{1 - 2^{-\frac{1}{36}\varepsilon_1}}.
\end{aligned} \tag{C.2.59}$$

There exists a $0 < b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \leq a_3(\frac{1}{6}\varepsilon_1)$ such that, setting $b = b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ in ($C$.2.59), we get

$$\frac{C_5 b^{\frac{1}{36}\varepsilon_1}}{1 - 2^{-\frac{1}{36}\varepsilon_1}} < \varepsilon_0.$$

For this $b = b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) > 0$, and in view of ($C$.2.58)-($C$.2.59), we may choose $K \geq 1$ so that

$$2^{-K-1}b < \frac{c(\frac{1}{6}\epsilon_1) \log n}{n} \leq 2^{-K}b.$$

Thus, for the above choice of $b_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, and setting $r_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 2c(\frac{1}{36}\varepsilon_1)$ in ($C$.2.26), we obtain ($C$.2.27), as sought.□

### C.2.2 Inner Bounds for Increments of Empirical processes

Recall the definition ($C$.1.2) of $\mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)$. The next proposition gives the “inner-bound" part of Theorem C.1.

**Proposition C.11.** Fix an $\mathcal{I} = [u, v] \in [0, 1]$ with $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$. For each $0 < \varepsilon_0 < 1$ and $0 < \varepsilon_1 < 1$, there exist constants $0 < r_2(\varepsilon_0, \varepsilon_1) < \infty$ and $0 < b_2(\varepsilon_0, \varepsilon_1) < \infty$ such that, if we set

$$\mathcal{H}_{n,2}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) := \left[r_2(\varepsilon_0, \varepsilon_1)n^{-1}\log n, b_2(\varepsilon_0, \varepsilon_1)\right],$$

then, for all $n$ sufficiently large, we have

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcap_{h \in \mathcal{H}_{n,2}(\varepsilon_0,\varepsilon_1)} \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)^{\varepsilon_1}\right) \geq 1 - \varepsilon_0. \tag{C.2.60}$$

Proposition C.11 implies that, under the assumptions of Theorem C.1, with $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, for each $0 < \epsilon < 1$, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{h \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}}(h)^{\epsilon}\right) \to 1. \tag{C.2.61}$$

The remainder of this section is devoted to the proof of Proposition C.11. For any $g \in B[0, 1]$ and $0 < \lambda \leq 1$, set

$$g_\lambda(u) := \lambda^{-1/2} g(\lambda u) \quad \text{for} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \text{and} \quad g_{1/\lambda}(u) := \begin{cases} \lambda^{1/2} g(u/\lambda) & \text{for} \quad 0 \leq u \leq \lambda, \\ \lambda^{1/2} g(1) & \text{for} \quad \lambda < u \leq 1. \end{cases}$$

Setting $[g_{1/\lambda}]_\lambda := \phi_\lambda$ with $\phi := g_{1/\lambda}$, observe that, for any $f, g \in B[0, 1]$, and $0 < \lambda \leq 1$,

$$[g_{1/\lambda}]_\lambda = g \quad \text{and} \quad \|f_\lambda - g_\lambda\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|f - g\|. \tag{C.2.62}$$

Moreover, when $g \in \mathbb{S}$, we see that $g_\lambda(0) = g_{1/\lambda}(0) = g(0) = 0$, and

$$\dot{g}_\lambda(u) = \lambda^{1/2}\dot{g}(\lambda u) \quad \text{and} \quad \dot{g}_{1/\lambda}(u) = \begin{cases} \lambda^{-1/2}\dot{g}(u/\lambda) & \text{for} \quad 0 \leq u \leq \lambda, \\ 0 & \text{for} \quad \lambda < u \leq 1. \end{cases}$$

Therefore, by $(C.1.20)$, whenever $g \in \mathbb{S}$ and $0 < \lambda \leq 1$,

$$\|g_\lambda\|^2 \leq |g_\lambda|^2_{\mathbb{H}} = \int_0^1 \lambda \dot{g}(\lambda u)^2 du = \int_0^\lambda \dot{g}(v)^2 dv \leq |g|^2_{\mathbb{H}} \leq 1, \tag{C.2.63}$$

$$\|g_{1/\lambda}\|^2 \leq |g_{1/\lambda}|^2_{\mathbb{H}} = \int_0^\lambda \lambda^{-1}\dot{g}(u/\lambda)^2 du = \int_0^1 \dot{g}(v)^2 dv = |g|^2_{\mathbb{H}} \leq 1, \tag{C.2.64}$$

whence $g_\lambda \in \mathbb{S}$ and $g_{1/\lambda} \in \mathbb{S}$.

**Lemma C.12.** Let $f^{[1]}, \ldots, f^{[N]} \in B[0, 1]$ and $\epsilon > 0$ be such that

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \mathcal{N}_\epsilon\left(f^{[j]}\right). \tag{C.2.65}$$

Then, for each $0 < \lambda \leq 1$, we have

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^N \mathcal{N}_{\epsilon/\sqrt{\lambda}}\left(f^{[j]}_\lambda\right). \tag{C.2.66}$$

**Proof.** Fix $\epsilon > 0$, $0 < \lambda \leq 1$, and $g \in \mathbb{S}$. By $(C.2.64)$, $g_{1/\lambda} \in \mathbb{S}$, whence, by $(C.2.65)$, there exists a $j \in \{1, \dots, N\}$, such that $\|f^{[j]} - g_{1/\lambda}\| < \epsilon$. Thus, by $(C.2.62)$, $\left\| f_\lambda^{[j]} - [g_{1/\lambda}]_\lambda \right\| = \left\| f_\lambda^{[j]} - g \right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow g \in \mathcal{N}_{\epsilon/\sqrt{\lambda}}\left(f_\lambda^{[j]}\right)$, which suffices for $(C.2.66)$.□

**Lemma C.13.** For each $\epsilon > 0$, there exists an $a_5(\epsilon) \in (0, 1/e]$, such that, for all $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ and $0 < a \leq a_5(\epsilon)$,

$$\left\| \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} - f \right\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\xi_n(\lambda a;t;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} - f_\lambda \right\| < 2\epsilon\sqrt{2}. \tag{C.2.67}$$

**Proof.** Assume that the event in the LHS of $(C.2.67)$ holds for some $f \in \mathbb{S}$. Then, by $(C.2.62)$, we have the inequality

$$\left\| \frac{\xi_n(a;t;\lambda\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/a)}} - f_\lambda \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\| \frac{\xi_n(a;t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} - f \right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}}.$$

Since $\xi_n(\lambda a;t;\cdot) = \xi_n(a;t;\lambda\cdot)$, this, in turn, implies, via the triangle inequality and $(C.2.63)$, that, for all $0 < \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\xi_n(\lambda a;t;\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/(\lambda a))}} - f_\lambda \right\| &\leq \left\| \frac{\xi_n(a;t;\lambda\cdot)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/a)}} - f_\lambda \right\| \times \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} \\
&\quad + \|f_\lambda\| \times \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| \\
&< \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} + \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} + \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right|.
\end{aligned}$$

We now choose $a_5(\epsilon) > 0$ so small, that, for all $0 < a \leq a_5(\epsilon)$,

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1} \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/(\lambda a))} \right\}^{1/2} - 1 \right| = \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(2/a)} \right\}^{1/2} - 1 \right| \leq \epsilon\sqrt{2}.$$

Since $\epsilon/\sqrt{\lambda} \leq \epsilon\sqrt{2}$ for all $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$, we infer readily $(C.2.67)$ from the above inequalities.□

**Proof of Proposition C.11.** Since $\mathbb{S}$ is a compact subset of $(B[0,1], \mathcal{U})$, for each $\epsilon > 0$, there exists a finite sequence $f^{[1]}, \dots, f^{[R]} \in \mathbb{S}$, such that $0 < |f^{[j]}|_{\mathbb{H}} < 1$ for $j = 1, \dots, R$, and $\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^R \mathcal{N}_\epsilon(f^{[j]})$. Letting $a'(\epsilon, f)$ be as in Proposition C.7, we select an $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1)$, with $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$. We limit ourselves to $\mathcal{I} \in [0, 1)$ rather than $\mathcal{I} \in [0, 1]$, since then $\mathcal{I} \subseteq [0, 1-a]$ whenever $0 \leq a \leq a_3(\mathcal{I}) := 1 - v$, whence $\mathcal{I} \cap [0, 1-a] = \mathcal{I}$. The proof in the remaining case where $v = 1$ will follow along the same lines. In view of $(C.2.42)$ and $(C.2.43)$, we consider the sum of the convergent series

$$S(a) = 2R \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left( -\frac{1}{4} \left\{ |\mathcal{I}| \wedge \frac{1}{2} \right\} (2^{-k}a)^{-\epsilon/2} \right). \tag{C.2.68}$$

Obviously, $S(a) \to 0$ as $a \downarrow 0$. Therefore, for each choice of $0 < \varepsilon_0 < 1$, there exists an $a_1'(\varepsilon_0)$ such that $S(a) < \varepsilon_0$ for all $0 < a \le a_1'(\varepsilon_0)$. For an arbitrary choice of $\epsilon$ such that $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\min_{1\le j\le N} |f^{[j]}|_{\mathbb{H}}$, set

$$a''(\varepsilon_0,\epsilon) = \min_{1\le j\le N}\left\{a'(\epsilon, f^{[j]})\right\} \wedge \tfrac{1}{2}|\mathcal{I}| \wedge a_1'(\varepsilon_0) \wedge a_3(\mathcal{I}) \wedge a_5(\epsilon). \tag{C.2.69}$$

In view of $(C.2.42)$ and $(C.2.43)$, we now make use of Lemmas C.12 and C.13, to show that, whenever

$$n \ge n_3(\tfrac{1}{2}\epsilon) \quad \text{and} \quad a \in \mathcal{H}_n := \left[2c(\tfrac{1}{2}\epsilon)n^{-1}\log n, a''(\varepsilon_0,\epsilon)\right], \tag{C.2.70}$$

we have $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n) < \varepsilon_0$, where $\mathcal{B}_n$ denotes the event

$$\mathcal{B}_n := \left\{\exists j = 1,\ldots,R,\ \exists a \in \mathcal{H}_n,\ \forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a,t;\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_{2\epsilon\sqrt{2}}\left(f^{[j]}\right)\right\}. \tag{C.2.71}$$

Observe, by Lemmas C.12 and C.13, that, under $(C.2.70)$,

$$\mathcal{B}_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{R}\bigcup_{k=0}^{M} \mathcal{B}_n(k,j),$$

where, setting $a'' := a''(\varepsilon_0,\epsilon)$ for short, we set

$$M := \inf\left\{k \ge 0 : 2^{-k}a'' \le 2c(\tfrac{1}{2}\epsilon)n^{-1}\log n\right\},$$

and, for $k = 0,\ldots,M$ and $j = 1,\ldots,R$,

$$\mathcal{B}_n(k,j) := \left\{\forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(2^{-k}a'',t;\cdot)}{\sqrt{2(2^{-k}a'')\log_+(1/(2^{-k}a''))}} \notin \mathcal{N}_\epsilon\left(f^{[j]}\right)\right\}.$$

By combining $(C.2.42)$ and $(C.2.43)$, with the definition $(C.2.68)$ of $S(\cdot)$ and the Bonferroni inequality, we conclude that

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}_n) \le \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{R}\left[\bigcup_{k=0}^{M}\mathcal{B}_n(k,j)\right]\right) \le \sum_{j=1}^{R}\sum_{k=0}^{M}\mathbb{P}(\mathcal{B}_n(k,j)) \le S(a'') < \varepsilon_0. \tag{C.2.72}$$

Here, we have used the inequality $a'' = a''(\epsilon_0,\epsilon) \le a_1'(\epsilon_0)$, which is implied by $(C.2.69)$, to show that $S(a'') < \varepsilon_0$. Since $\epsilon > 0$ in $(C.2.71)$ may be chosen initially as small as desired, we infer $(C.2.60)$ from $(C.2.71)$ and $(C.2.72)$, by selecting this quantity to be such that $2\epsilon\sqrt{2} < \varepsilon_1$. This completes the proof of Proposition C.11.□

**Proof of Theorem C.1 - Part** $(i)$**.** In view of Propositions C.5 and C.11, we infer readily the proof of $(C.1.9)(i)$ from $(C.2.28)$ and $(C.2.61)$. We postpone until the end of §C.2.3 below the proof of $(C.1.9)(ii)$.

### C.2.3 Functional Limit Laws for the Increments of Quantile Processes

Throughout this section, we will assume that $\mathcal{H}_n$ and $\mathcal{I}$ fulfill assumptions of Theorem C.1. We recall from §C.2.1 and §C.2.2 that these conditions imply $(C.1.9)(i)$. Set $\omega_n(h) := \omega^+_{n;[0,1]}(h) \vee \omega^-_{n;[0,1]}(h)$. Since the arguments in §C.1.2, show that $(C.1.9)(i)$ implies $(C.1.11)(i)$, we have, as $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \left|\omega_n(h)/\sqrt{2h\log_+(1/h)} - 1\right| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{C.2.73}$$

The following fact will be needed (refer to (1.6) in Shorack [104], and (3.51) in Deheuvels and Mason [25]).

**Fact 6.** We have, almost surely,

$$\begin{aligned} &(i) \quad \|\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n) - \mathbb{I}\| = \frac{1}{n} \quad \text{for all } n \geq 1;\\ &(ii) \quad \|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}\| = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad \text{as } n \to \infty. \end{aligned} \tag{C.2.74}$$

Lemma C.14 below gives rough bounds for $\delta_n(h) := \delta^+_{n;[0,1]}(h) \vee \delta^-_{n;[0,1]}(h)$.

**Lemma C.14.** Under the assumptions of Theorem C.1, for each $\theta > 0$, we have, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\delta_n(h)/\sqrt{2h\log_+(1/h)}\right\} \geq 1+\theta\right) \to 0. \tag{C.2.75}$$

**Proof.** For each $\theta \in (-1,1)$, $n \geq 1$ and $h > 0$, set

$$\widetilde{h}_n(h;\theta) := h\left\{1 + (1+\theta)\left(\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right)^{1/2}\right\}.$$

On the event of probability 1 where $(C.2.74)(i)$ holds, we combine this relation with the triangle inequality, to obtain the following relations between events.

$$\begin{aligned} &\left\{\beta_n(t+h) - \beta_n(t) \geq (1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)}\right\} = \left\{\mathbb{V}_n(t+h) \geq \mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)\right\}\\ &\subseteq \left\{\mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)\Big) - \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t)\Big) \leq \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t+h)\Big) - \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t)\Big)\right\}\\ &\subseteq \left\{\mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)\Big) - \mathbb{U}_n\Big(\mathbb{V}_n(t)\Big) \leq h + \frac{2}{n}\right\}\\ &= \left\{\alpha_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq \sqrt{n}\,(h - \widetilde{h}_n(h;\theta)) + \frac{2}{\sqrt{n}}\right\}\\ &= \left\{\alpha_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h;\theta)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq -(1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right\}. \end{aligned}$$

Fix now $\theta > 0$. Under $(C.1.8)$, there exists an $n(\theta) < \infty$ such that, for all $n \geq n(\theta)$ and $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, we have $\widetilde{h} := \widetilde{h}_n(h;\theta) \in \mathcal{H}'_n := \left[\frac{1}{2}a_n, 2b_n\right]$, together with the inequality

$$-(1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)} + \frac{2}{\sqrt{n}} \leq -(1+\tfrac{1}{2}\theta)\sqrt{2\widetilde{h}_n\log_+(1/\widetilde{h}_n)}.$$

Thus, for $n \geq n(\theta)$, whenever the inequality $\beta_n(t+h) - \beta_n(t) \geq (1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)}$, holds for some $h \in \mathcal{H}_n$ and $t \in [0,1]$, the inequality $-\left(\alpha_n\left(\widetilde{t}+\widetilde{h}\right) - \alpha_n\left(\widetilde{t}\right)\right) \geq (1+\frac{1}{2}\theta)\sqrt{2\widetilde{h}\log_+(1/\widetilde{h})}$, also holds for $\widetilde{h} = \widetilde{h}_n(h;\theta) \in \mathcal{H}'_n$ and $\widetilde{t} = \mathbb{V}_n(t) \in [0,1]$. Next, by the formal remplacement of $\mathcal{H}_n$ by $\mathcal{H}'_n$ in Theorem C.1, we readily obtain that the following version of $(C.2.73)$ holds. For each $\theta > 0$, as $n \to \infty$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}'_n}\left\{\omega_n(h)/\sqrt{2h\log_+(1/h)} - 1\right\} \geq \tfrac{1}{2}\theta\right) \to 0.$$

This, in turn, implies that, for each of $\theta > 0$, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\delta_n^+(h)/\sqrt{2h\log_+(1/h)} - 1\right\} \geq \theta\right) \to 0.$$

By exactly the same arguments, with sign changes, we obtain that, for each $\theta > 0$, as $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\delta_n^-(h)/\sqrt{2h\log_+(1/h)} - 1\right\} \geq \theta\right) \to 0.$$

By combining above two relations, we obtain $(C.2.75)$ as sought.□

In view of $(C.1.1)$-$(C.1.2)$, set, for $h > 0$, $n \geq 1$ and $t \in [0,1]$,

$$\mathcal{F}^*_{n;\mathcal{I}}(h) := \left\{\xi_n(h;\mathbb{V}_n(t);\cdot)/\sqrt{2h\log_+(1/h)} : t \in [0,1-h]\cap\mathcal{I}\right\}. \tag{C.2.76}$$

**Lemma C.15.** Under the assumptions of Theorem C.1, we have, as $n \to \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\Delta\left(\mathcal{F}^*_{n;\mathcal{I}}(h),\mathbb{S}\right) = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{C.2.77}$$

**Proof.** Fix $\mathcal{I} \subseteq [0,1]$ with $|\mathcal{I}| > 0$. By $(C.1.4)$, we need only prove that, for each $\varepsilon > 0$, as $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} &(i) \quad \mathbb{P}\left(\mathcal{F}^*_{n;\mathcal{I}}(h) \subseteq \mathbb{S}^\epsilon : \ \forall h \in \mathcal{H}_n\right) \to 1; \quad \text{and} \\ &(ii) \quad \mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}^*_{n;\mathcal{I}}(h)^\epsilon : \ \forall h \in \mathcal{H}_n\right) \to 1. \end{aligned} \tag{C.2.78}$$

Since $\{\mathbb{V}_n(t) : t \in \mathcal{I}\} \subseteq [0,1]$, by $(C.2.76)$, $\mathcal{F}^*_{n;\mathcal{I}}(h) \subseteq \mathcal{F}_{n;[0,1]}(h)$ for all $h > 0$. Therefore, $(C.2.78)(i)$ follows from $(C.1.9)(i)$. Fix $\varepsilon > 0$ and $\mathcal{I}' = [u',v']$ with $u < u' < v' < v$, and consider the events $\mathcal{C}_n := \{\mathbb{U}_n(s) \in \mathcal{I} : \ \forall s \in \mathcal{I}'\}$ and $\mathcal{D}_n := \left\{\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}_{n;\mathcal{I}'}(h)^{\varepsilon/2} : \ \forall h \in \mathcal{H}_n\right\}$. By Glivenko-Cantelli, $\|\mathbb{U}_n - \mathbb{I}\| \to 0$, a.s. as $n \to \infty$, so that $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \to 1$. Moreover, by $(C.2.78)(i)$, taken with the formal replacement of $\mathcal{I}$ by $\mathcal{I}'$, we have $\mathbb{P}(\mathcal{D}_n) \to 1$ as $n \to \infty$. This implies that $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n \cap \mathcal{D}_n) \to 1$ as $n \to \infty$. On the event $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{D}_n$, for each $f \in \mathbb{S}$ and $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, there exists an $s_n(h;f) \in \mathcal{I}'$, such that

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\|\xi_n(h;s_n(h,f);\cdot)/\sqrt{2h\log_+(1/h)} - f\right\| < \tfrac{1}{4}\epsilon. \tag{C.2.79}$$

Observe that, on $\mathcal{C}_n\cap\mathcal{D}_n$, $t_n(h;f) := \mathbb{U}_n(s_n(h;f)) \in \mathcal{I}$. Moreover, on this same event, we infer from the triangle inequality, and the relation $\inf_{h\in\mathcal{H}_n}\sqrt{2h\log_+(1/h)} = \sqrt{2a_n\log_+(1/a_n)}$, that

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\|\frac{\xi_n(h;s_n(h,f);\cdot)-\xi_n(h;\mathbb{V}_n(t_n(h,f));\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\right\| \\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\|\frac{\xi_n(h;s_n(h,f);\cdot)-\xi_n(h;\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n(h,f)));\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\right\| \\
&\leq \frac{2\omega_n\Big(\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n)-\mathbb{I}\|\Big)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} \leq \frac{2\omega_n\Big(\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n)-\mathbb{I}\|\Big)}{\sqrt{2a_n\log_+(1/a_n)}}\,, \qquad \text{(C.2.80)}
\end{aligned}$$

where $\omega_n(\cdot)$ is as in $(C.2.73)$. In view of $(C.2.74)(ii)$, our assumptions imply that $\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n)-\mathbb{I}\| = O_{\mathbb{P}}(n^{-1}\log n) = o_{\mathbb{P}}(a_n)$ as $n\to\infty$. Thus, we infer from $(C.2.73)$ that

$$\omega_n\left(\|\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n)-\mathbb{I}\|\right)\Big/\sqrt{2a_n\log_+(1/a_n)} = o_{\mathbb{P}}(1),$$

so that the RHS of $(C.2.80)$ is $o_{\mathbb{P}}(1)$ as $n\to\infty$. Keeping in mind that $(C.2.80)$ holds on $\mathcal{C}_n\cap\mathcal{D}_n$, this last property, when combined with $(C.2.79)$ and the triangle inequality, readily implies that, with probability tending to 1 as $n\to\infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\|\xi_n(h;\mathbb{V}_n(t_n(h,f));\cdot)/\sqrt{2h\log_+(1/h)}-f\right\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

This, together with an easy argument based upon the compactness of $\mathbb{S}$, readily implies $(C.2.78)(ii)$.□

**Proof of Theorem C.1 - Part** $(ii)$**.** In view of $(C.2.76)$-$(C.2.77)$, to prove $(C.1.9)(ii)$, all we need is to show that, as $n\to\infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\frac{\zeta_n(h;t;\cdot)+\xi_n(h;\mathbb{V}_n(t);\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\right\|\right\} = o_{\mathbb{P}}(1). \qquad \text{(C.2.81)}$$

Set, for $h>0$, $t\in[0,1]$ and $u\in\mathbb{R}$, $\tau_{n;t;h}(u) := h^{-1}\{\mathbb{V}_n(t+hu)-\mathbb{V}_n(t)\} = u+\zeta_n(h;t;u)/\left(h\sqrt{n}\,\right)$, and observe that $\alpha_n(\mathbb{V}_n(t+hu))-\alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) = \xi_n(h;\mathbb{V}_n(t);\tau_{n;t;h}(u))$. By $(C.2.74)(i)$ and the triangle inequality, we get, a.s.,

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\zeta_n(h;t;\cdot)+\xi_n(h;\mathbb{V}_n(t);\tau_{n;t;h}(\cdot))\right\|\right\} \\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\Big\{\beta_n(t+h\cdot)-\beta_n(t)\Big\}+\Big\{\alpha_n(\mathbb{V}_n(t+h\cdot))-\alpha_n(\mathbb{V}_n(t))\Big\}\right\|\right\} \\
&= n^{1/2}\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\Big\{\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t+h\cdot))-(t+h\cdot)\Big\}-\Big\{\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t))-t\Big\}\right\|\right\} \\
&\leq 2\sqrt{n}\,\|\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n)-\mathbb{I}\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\,.
\end{aligned}$$

This, in turn, implies that

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left\{\sup_{t\in\mathcal{I}}\left\|\frac{\zeta_n(h;t;\cdot)+\xi_n(h;\mathbb{V}_n(t);\tau_{n;t;h}(\cdot))}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\right\|\right\} = o_{\mathbb{P}}(1). \qquad \text{(C.2.82)}$$

Making use of ($C$.2.75), taken with $\theta = 1$, we observe that, with probability tending to 1 as $n \to \infty$, we have

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left\{ \sup_{t \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{nh}{2 \log_+(1/h)} \right\}^{1/2} \|\tau_{n;t;h} - \mathbb{I}\| \right\} \leq \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \frac{\delta_n(h)}{\sqrt{2 \log_+(1/h)}} \leq 2. \tag{C.2.83}$$

By the arguments of Lemma 3.11 of [25], we infer from ($C$.2.73) and ($C$.1.8), that, on the event where ($C$.2.83) holds

$$\begin{aligned}
&\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left\{ \sup_{t \in \mathcal{I}} \left\| \frac{\xi_n(h; \mathbb{V}_n(t); \tau_{n;t;h}(\cdot)) - \xi_n(h; \mathbb{V}_n(t); \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \right\| \right\} \\
&\leq \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left\{ \frac{\omega_n \left( \|\tau_{n;t;h} - \mathbb{I}\| \right)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \right\} \\
&\leq \sup_{h \in \mathcal{H}_n} \frac{1}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \, \omega_n \left( 2 \left\{ \frac{2 \log_+(1/h)}{nh} \right\}^{1/2} \right) \\
&= o_{\mathbb{P}}(1) \quad \text{as} \quad n \to \infty.
\end{aligned} \tag{C.2.84}$$

By combining ($C$.2.82) with ($C$.2.84), we get ($C$.2.81). The proof of Theorem C.1 is therefore completed.□

# Bibliographie


[1] Akaike, H. (1954). An approximation of the density function. *Ann. Inst. Statist. Math.* **6**, 127–132.

[2] Bahadur, R. R. (1966) A note on quantiles in large samples. *Ann. Math. Statist.* **37**, 577–580.

[3] Beck, J. (1974). The exponential rate of convergence of error for $k_n$-NN nonparametric regression and decision. *Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform.* **8**, 303–311.

[4] Berkes, I. and Philipp, W. (1979). Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors. *Ann. Probab.* **7**, 29–54.

[5] Berlinet, A. et Devroye, Luc. (1994). A comparison of kernel density estimates. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **38**, 3–59.

[6] Berthet, P. (1997). On the rate of clustering to the Strassen set for increments of the uniform empirical process. *J. Theoret. Probab.* **10**, 557–579.

[7] Bitouzé, D., Laurent, B. et Massart, P. (1999) A Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz type inequality for the Kaplan-Meier estimator. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **3**, 735–763.

[8] Blondin, D. (2004a). Estimation nonparamétrique multidimensionnelle des dérivées de la régression. *C. R. Acad. Sci. Paris, Math.* **339**, 713–716.

[9] Blondin, D. (2004b). Lois limites uniformes et estimation non-paramétrique de la régression. *Doctoral Dissertation, Université Pierre et Marie Curie, Dec. 10, 2004.* Paris, France.

[10] Bosq D. et Lecoutre J.P. (1987). Théorie de l'estimation fonctionnelle. *Economie et statistiques avancées*, Economica, Paris, 342 p.

[11] Burba, F., Ferraty, F. et Vieu, P. (2009). k-nearest neighbour method in functional nonparametric regression. *J. Nonparametr. Stat. 21*, no. 4, 453–469.

[12] Chung, K. (1949). An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution. *Trans. Amer. Math. Soc.* **67**, 36–50.

[13] Claeskens, G. et Van Keilegom, I. (2003). Bootstrap confidence bands for regression curves and their derivatives. *Ann. Statist.* **3**, 1852–1884.

[14] Collomb, G. 1980. Estimation de la régression par la méthode des $k$ points les plus proches avec noyau : quelques propriétés de convergence ponctuelle, *Lecture Notes in Mathematics* **821**, Springer-Verlag, 159–175.

[15] Csörgő, M. (1983). Quantile processes with statistical applications. *Regional Conference Series in Applied Mathematics* **42**. 156 pp.

[16] Csörgő, M. et Révész, P. (1981). Strong approximations in probability and statistics. *Probability and Mathematical Statistics.* 284 pp.

[17] Csörgő, M. et Horváth, L. (1993). Weighted approximations in probability and statistics. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics.* John Wiley and Sons.

[18] Csörgő, M., Hu, Z. et Mei, H. (2001). Strassen-type law of the iterated logarithm for self-normalized sums. *J. Theor. Probab.*, à paraître.

[19] Deheuvels, P. (1977) Estimation non paramétrique de la densité par histogrammes généralisés. *Rev. Statist. Appl.* **25**, 5–42.

[20] Deheuvels, P. (1986) Strong laws for the kth order statistic when $k = clog2n$. *Probab. Theory Relat. Fields*, **72**, 133–154.

[21] Deheuvels, P. (1991) Laws of the iterated algorithm for density estimators. *Nonparametric functional estimation and related topics.* Roussas, G. (Ed.) 19–29. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[22] Deheuvels, P. (1992). Functional laws of the iterated logarithm for large increments of empirical and quantile processes. *Stochastic Process. Appl.* **43**, 133–163.

[23] Deheuvels, P. (1996) Functional laws of the iterated logarithm for small increments of empirical processes. *Statist. Neerlandica* **50**, 261–280.

[24] Deheuvels, P. (1997). Strong laws for local quantile processes. *Ann. Probab.* **25**, 2007–2054.

[25] Deheuvels, P. (2000). Strong approximation of quantile processes by iterated Kiefer processes. *Ann. Probab.* **28**, 909–945.

[26] Deheuvels, P. (2000). Uniform limit laws for kernel density estimators on possibly unbounded intervals. *Recent advances in reliability theory : methodology, practice and infrence.* N. Limnios et M. Nikulin, Edit. 477–492. Birkhauser, Boston.

[27] Deheuvels, P.(2001). Limit Laws for kernel density estimators for kernels with unbounded supports. *Asymptotics in Statistics and Probability.* Papers in Honor of George Gregory Roussas. 117–131. M.L. Puri Edit. VSP International Science Publishers, Pays Bas.

[28] Deheuvels, P. (2011). One bootstrap suffices to generate sharp uniform bounds in functionnal estimation. *Kybernetica*, **47**, 881–891.

[29] Deheuvels, P. (2012). Uniform-in-bandwidth functional limit laws for multivariate empirical processes. soumis.

[30] Deheuvels, P. et Derzko, G. (2008) Asymptotic certainty bands for kernel density estimators based upon a bootstrap resampling scheme. *Statistical models and methods for biomedical and technical systems.* 171–186, Stat. Ind. Technol., Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[31] Deheuvels, P. et Devroye, L. (1984). Strong laws for the maximal k-spacing when $k = c \log n$. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **66**, 315–334.

[32] Deheuvels, P. et Einmahl, J. H. J. (1996) On the strong limiting behavior of local functionals of empirical processes based upon censored data. *Ann. Probab.* **24**, 504–525.

[33] Deheuvels, P. et Einmahl, J. H. J. (2000). Functional limit laws for the increments of Kaplan-Meier product-limit processes and applications. *Ann. Probab.* **28**, 1301–1335.

[34] Deheuvels, P. et Lifshits, M. A. (1994). Necessary and sufficient conditions for the Strassen law of the iterated logarithm in nonuniform topologies. *Ann. Probab.* **22**, 1838–1856.

[35] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1990) Nonstandard functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes. *Ann. Probab.* **18**, 1693–1722.

[36] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1991) A tail empirical process approach to some nonstandard laws of the iterated logarithm. *J. Theoret. Probab.* **4**, 53–85.

[37] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1992). Functional laws of the iterated logarithm for the increments of empirical and quantile processes. *Ann. Probab.* **20**, 1248–1287.

[38] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1994). Functional laws of the iterated logarithm for local empirical processes indexed by sets. *Ann. Probab.* **22**, 1619–1661.

[39] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (2004). General asymptotic confidence bands based on kernel-type function estimators. *Statist. Infer. Stoch. Processes.* **7**, 225–277.

[40] Deheuvels, P. et Ouadah, S. (2011). Uniform in bandwidth functional limit laws. *J. Theor. Probab.*, accepté pour publication.

[41] del Barrio, E., Deheuvels, P. et van de Geer, S. (2007) Lectures on empirical processes. Theory and statistical applications. *EMS Series of Lectures in Mathematics.*

[42] Devroye, L. (1981). Laws of the iterated logarithm for order statistics of uniform spacings. *Ann. Probab.* **9**, 860–867.

[43] Devroye, L. (1982). A log log law for maximal uniform spacings. *Ann. Probab.* **10**, 863–868.

[44] Devroye, L. (1982). Necessary and sufficient conditions for the pointwise convergence of nearest neighbor regression function estimates. *Z. Wahrsch. Verv. Gebiete* **61**, 467–481.

[45] Devroye, L. (1987) A course in density estimation. *Birkhäuser Boston*, Boston.

[46] Devroye, L. et Wagner, T. J. (1977). The strong uniform consistency of nearest neighbor density estimates. *Ann. Statist.* **5**, 536–540.

[47] Diehl, S. et Stute, W. (1988). Kernel density and hazard function estimation in the presence of censoring. *J. Multivariate Anal.* **25**, 299–310.

[48] Dony, J. (2008). Nonparametric regression estimation - An empirical process approach to uniform in bandwidth consistency of kernel-tupe estimators and conditional $U$-statistics. *Doctoral Dissertation.* Vrije Universiteit Brussel, Belgium.

[49] Dony, J. et Einmahl, U. (2006). Weighted uniform consistency of kernel density estimators with general bandwidth sequences. *Elect. J. Probab.* **11**, 844–859.

[50] Dony, J. et Einmahl, U. (2009). Uniform in bandwidth consistency of kernel-type estimators at a fixed point. *IMS Collections.* **5**, 308–325.

[51] Dony, J., Einmahl, U. et Mason, D. M. (2006). Uniform in bandwidth consistency of local polynomial regression function estimators. *Austr. J. Statist.* **35**, 105–120.

[52] Dony, J. et Mason, D. M. (2008). Uniform in bandwidth conistency of conditional $U$-statistics. *Bernoulli.* **4**, 1108–1133.

[53] Dvoretzky, A., Kiefer, J. et Wolfowitz, J. (1956). Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator. *Ann. Math. Statist.* **27**, 642–669.

[54] Efron, B. (1979). Bootstrap methods : another look at the jackknife. *Ann. Statist.* **7**, 1–26.

[55] Einmahl, J. H. J. (1992) The a.s. behavior of the weighted empirical process and the LIL for the weighted tail empirical process. *Ann. Probab.* **20**, 681–615.

[56] Einmahl, J. H. J. et Mason, D. M. (1988). Strong limit theorems for weighted quantile processes. *Ann. Probab.* **16**, 1623–1643.

[57] Einmahl, J. H. J. et Mason, D. M. (1988). Laws of the iterated logarithm in the tails for weighted uniform empirical processes. *Ann. Probab.* **16**, 126–141.

[58] Einmahl, J. H. J. et Ruymgaart, F. H. (1985). A strong law for the oscillation modulus of the multivariate empirical process. *Statist. Decisions* **3**, 357–362.

[59] Einmahl, J. H. J. et Ruymgaart, F. H. (1987). The almost sure behavior of the oscillation modulus of the multivariate empirical process. *Statist. Probab. Lett.* **6**,87–96.

[60] Einmahl, U. et Mason, D. M. (1998). Strong approximations to the local empirical process. *Progr. Probab.*, **43**, 75–92.

[61] Einmahl, U. et Mason, D. M. (2000). An empirical process approach to the uniform consistency of kernel-type function estimators. *J. Theor. Probab.* **13**, 1–37.

[62] Einmahl, U. et Mason, D. M. (2005) Uniform in bandwidth consistency of kernel-type function estimators. *Ann. Statist.* **33**, 1380–1403.

[63] Epanechnikov, V.A. (1969). Non-parametric estimation of a multivariate probability density. *Theory of Probability and its Applications* **14**, 153–158.

[64] Finkelstein, H. (1971). The law of the iterated logarithm for empirical distributions. *Ann. Math. Statist.* **42**, 607–615.

[65] Fix, E. et Hodges, J. L. (1951). Discriminatory analysis. Nonparametric discrimination : consistency properties. Technical Report 4 , Project no. 21-49-004, USAF School of Aviation Medicine, Randoff Fiels, Texas.

[66] Földes, A. et Rejtő, L. (1981). A LIL type result for the product limit estimator. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **56**, 75–86.

[67] Giné, E. et Guillou, A. (2001). On consistency of kernel density estimators for randomly censored data : rates holding uniformly over adaptive intervals. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **37**, 503–522.

[68] Giné, E. et Guillou, A. (2002) Rates of strong uniform consistency for multivariate kernel density estimators. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **38**, 907–921.

[69] Hall, P. (1992). The bootstrap and Edgeworth expansion. *Springer Series in Statistics, New York*.

[70] Hall, P. et Marron, J. S. (1991). Lower bounds for bandwidth selection in density estimation. *Probab. Theory Related Fields* **90**, 149–173.

[71] Hall, P., Marron, J. S. et Park, Byeong U. (1992). Smoothed cross-validation. *Probab. Theory Related Fields* **92**, 1–20.

[72] Härdle, W. (1990) Applied nonparametric regression. *Cambridge University Press*, Cambridge.

[73] Härdle, W. et Marron, J. S. (1991). Bootstrap simultaneous error bars for nonparametric regression. *Ann. Statist.* **19**, 778–796.

[74] Hartman, P. et Wintner, A. (1941) On the law of the iterated logarithm. *Amer. J. Math.* **63**, 169–176.

[75] Jones, M. C., Marron, J. S. et Park, B. U. A simple root n bandwidth selector. *Ann. Statist.* **19**, 1919–1932.

[76] Kaplan, E. L. et Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Amer. Statist. Assoc.* **53**, 457–481.

[77] Kiefer, J. (1967). On Bahadur's representation of sample quantiles. *Ann. Math. Statist.* **38**, 1323–1342.

[78] Kiefer, J. (1972) Iterated logarithm analogues for sample quantiles when $p_n \downarrow 0$. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. I : Theory of statistics*, 227–244.

[79] Komlós, J., Major, P. et Tusnády, G. (1975). An approximation of partial sums of independent rv's and the sample df. I. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* **32**, 111–131.

[80] Lévy, P. (1948). Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Gauthier-Villars, Paris. 365 pp.

[81] Li, G. et Datta, S. (2001). A bootstrap approach to nonparametric regression for right censored data. *Ann. Inst. Statist. Math.* **53**, 708–729.

[82] Loftsgaarden, D. O. et Quesenberry, C. P. (1965). A nonparametric estimate of a multivariate density function. *Ann. Math. Statist.* **36**, 1049–1051.

[83] Mack, Y. P. (1983). Rate of strong uniform convergence of $k$-NN density estimates. *J. Statist. Plann. Inference* **8**, 185–192.

[84] Maillot, B. et Viallon, V. (2009). Uniform limit laws of the logarithm for nonparametric estimators of the regression function in presence of censored data.*Math. Methods Statist.* **18**, 159–184.

[85] Marron, J. S. et Nolan, D. (1988). Canonical kernels for density estimation. *Statist. Probab. Lett.* **7**, 195–199.

[86] Mason, D. M. (1984). A strong limit theorem for the oscillation modulus of the uniform empirical process. *Stoch. Processes Appl.* **17**, 127–136.

[87] Mason, D. M. (1988). A strong invariance theorem for the tail empirical process. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **24**, 491–506.

[88] Mason, D. M. (2004). A uniform functional law of the logarithm for the local empirical process. *Ann. Probab.* **32**, 1391–1418.

[89] Mason, D. M. (2011). Proving consistency of non-standard kernel estimators. *Statist. Infer. Stoch. Processes.* to appear.

[90] Mason, D. M et Newton, M. A. (1992). A rank statistisc approach to the consistency of a general bootstrap. *Ann. Statist.* **20** 1611–1624.

[91] Mason, D. M. et Swanepoel, J. (2011). A general result on the uniform in bandwidth consistency of kernel-type function estimators. *Test.* **20**, 72–94.

[92] Mason, D. M., Shorack, G. R. et Wellner, J. A. (1983). Strong limit theorems for oscillation moduli of the empirical process. *Z. Wahrscheinlichkeit. verw. Gebiete.* **65**, 93–97.

[93] Moore, D. S. et Henrichon, E. G. (1969). Uniform consistency of some estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.* **40**, 1499–1502.

[94] Moore, D. S. et Yackel, J. W. (1976). Large sample properties of nearest neighbor density function estimators. *Statistical decision theory and related topics. II*, 269–279.

[95] Ouadah, S. (2012). Uniform-in-Bandwidth Nearest-Neighbor Density Estimation, soumis.

[96] Ouadah, S. (2012). Uniform-in-Bandwidth Kernel Estimation for Censored Data, soumis.

[97] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.* **33** 1065–1076.

[98] Prakasa Rao, B. L. S. (1983). *Academic Press*, New York.

[99] Ralescu, S. S. (1995). The law of the iterated logarithm for the multivariate nearest neighbor density estimators. *J. Multivariate Anal.* **53**, no. 1, 159–179.

[100] Riesz, F. et Sz.-Nagy, B. (1955) Functional analysis. *Frederick Ungar.*

[101] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.* **27**, 832–837.

[102] Schilder, M. (1966). Asymptotic formulas for Wiener integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* **125**, 63–85.

[103] Sheather, S. J. et Jones, M. C. (1991). A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **53**,683–690.

[104] Shorack, G. R. (1982). Kiefer's theorem via the Hungarian construction. *Z. Wahrscheinlichkeit. verw. Gebiete.* **61**, 369–373.

[105] Shorack, G. R. et Wellner, J. A. (1986) Empirical processes with applications to statistics. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics.* John Wiley and Sons.

[106] Silverman, B. (1978). Weak and strong consistency of the kernel estimate of a density and its derivatives. *Ann. Statist.* **6**, 177–184. (Addendum : (1980). **8**, 1175–1176.)

[107] Strassen, V. (1964). An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z. Wahrscheinlichkeit. Verw. Gebiete.* **3**, 211–226.

[108] Stute, W. (1982a). The oscillation behavior of empirical processes. *Ann. Probab.* **10**, 86–107.

[109] Stute, W. (1982b). A law of the iterated logarithm for kernel density estimators. *Ann. Probab.* **10**, 414–422.

[110] Talagrand, M. (1996). New concentration inequalities in product spaces. *Invent. math.* **126**, 505–563.

[111] Tanner, M. A. et Wong, W.H. (1983). The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel method. *Ann. Statist.* **11**, 989–993.

[112] Tapia, R. A. et Thompson, J. R. (1978). Nonparametric probability density estimation. *Johns Hopkins University Press*, Baltimore.

[113] van der Vaart A. W. et Wellner J. A. (1996). Weak convergence and empirical processes–With applications to statistics, Springer series in statistics.

[114] Varron, D. (2004). Lois fonctionnelles uniforme du logarithme intéré pour les accroissements du processus empirique généralisé. Lois limites de type Chung-Mogulskii pour le processus empirique uniforme local. *Mémoire de Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Dec. 17, 2004.* Paris, France.

[115] Varron, D. (2008). A limited in bandwidth uniformity for the functional limit law of the increments of the empirical process. *Elect. J. Statist.* **2**, 1043–1064.

[116] Varron, D. et Van Keilegom, I. (2011). Uniform in bandwidth exact rates for a class of kernel estimators. *Ann. Inst. Statist. Math.* **63**, 1077–1102.

[117] Viallon, V. (2006). Processus empiriques, estimation non paramétrique et données censurées. *Mémoire de Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Dec. 2, 2006.* Paris, France.

[118] Viallon, V. (2007). Functional limit laws for the increments of the quantile process; with applications. *Electron. J. Stat.* **1**, 496–518.

[119] Wand, M. P. et Jones, M. C. (1995). Kernel smoothing. Monographs on Statistics and Applied Probability, 60. Chapman and Hall, Ltd., London, 212 p.

[120] Watson, G. S. et Leadbetter, M. R. (1963). On the estimation of the probability density. I. *Ann. Math. Statist.* **34**, 480–491.

[121] Watson, G. S. et Leadbetter, M. R. (1964a). Hazard analysis. II. *Sankhya- Ser. A* **26**, 101–116

[122] Watson, G. S. et Leadbetter, M. R. (1964b). Hazard analysis. I. *Biometrika* **51**, 175–184.

[123] Zhang, B. (1996) A law of the iterated logarithm for kernel estimators of hazard functions under random censorship. *Scand. J. Statist.* **23**, 37–47.