



HAL
open science

**Inférence bayésienne pour la reconstruction
d'écoulements complexes - Application au profil
NACA0012**

Romain Leroux

► **To cite this version:**

Romain Leroux. Inférence bayésienne pour la reconstruction d'écoulements complexes - Application au profil NACA0012. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Poitiers, 2012. Français. NNT: . tel-00766239

HAL Id: tel-00766239

<https://theses.hal.science/tel-00766239>

Submitted on 17 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)

Ecole doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur et l'Aéronautique

Secteur de Recherche : Mécanique des Fluides

Présentée par

Romain Leroux

Inférence bayésienne pour la reconstruction d'écoulements complexes

Application au profil NACA0012

Directeurs de thèse :

Ludovic Chatellier

Laurent David

Soutenue publiquement le 16 Mars 2012

Devant le jury composé de :

M. F. Le Gland, Directeur de recherche, INRIA, Rennes	Rapporteur
M. M. Stanislas, Professeur, LML, Lille	Rapporteur
M. A. Iollo, Professeur, IMB, Bordeaux	Examineur
M. P. Lubin, Maître de Conférences, I2M, Bordeaux	Examineur
M. B. Noack, Directeur de Recherche CNRS, PPRIME, Poitiers	Examineur
M. B. Tremblais, Maître de Conférences, XLIM-SIC, Poitiers	Examineur
M. L. Chatellier, Maître de Conférences, PPRIME, Poitiers	Directeur
M. L. David, Professeur, PPRIME, Poitiers	Directeur

Remerciements

Cette thèse est le fruit de mes travaux menés au sein du Laboratoire d'Études Aérodynamiques de Poitiers, devenu entretemps une composante de l'Institut PPRIME, sous la direction de M. Ludovic Chatellier et de M. Laurent David.

Je tiens à leur adresser mes plus sincères remerciements pour leur patience, leur disponibilité, leurs conseils avisés et les connaissances scientifiques qu'ils m'ont apportés ainsi que pour les nombreux points de vue échangés.

Je remercie également le laboratoire qui m'a accueilli ainsi que son directeur M. Jean-Paul Bonnet. Je tiens également à remercier M. Stanislas et M. Le Gland de m'avoir fait l'honneur de rapporter ce travail de thèse. J'exprime également ma gratitude à M. Pierre Lubin, M. Bernd Noack et M. Benoit Tremblais d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse ainsi qu'à M. Angelo Iollo de l'avoir présidé en ce jour du Vendredi 16 Mars de l'An 2012.

Mes remerciements vont à M. Francis Boissonneau toujours présent à mes nombreuses sollicitations informatiques ainsi qu'à l'ensemble du personnel technique du LEA, notamment M. Patrick Braud, M. Yvan Jolit, M. Laurent Dupuis, M. Romain Bellanger ainsi qu'à Mmes Catherine Écale et Chantal Leturc, secrétaires au LEA, et M. Serge Macia. Je tiens aussi à remercier les membres permanents de l'équipe Hydée (Anthony, Damien, Gérard, Lionel, Philippe, Sébastien, Serge, ...) ainsi que les thésards du LEA (Asmaa, Badreddine, Christophe, Guillaume, Jean-Charles, Laurent, Souria, Rémi, Tran, ...).

Pour finir, merci à mon père Guy, ma mère Marylise, et mes deux soeurs, Garance et Ludivine, pour leur indéfectible soutien en toutes circonstances, leur constante bonne humeur et leur joie de vivre si communicative.

”Décide seul de la tactique. Ne te confie qu’à ton sérieux.” René Char

Table des matières

Nomenclature	xiii
Introduction	1
1 Méthodes de réduction et d'estimation de systèmes dynamiques	5
1 Méthodes de réduction de données	6
1.1 Systèmes dynamiques	6
1.2 Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres	7
1.2.1 Définition générale de la POD	7
1.2.2 Application de la POD pour le contrôle d'écoulement	8
1.2.3 Décomposition Bi-orthogonale : BOD	9
1.3 Approximation des modes de Koopman : DMD (Dynamical Mode Decomposition)	10
1.4 Estimation stochastique linéaire (LSE)	11
2 Contrôle du modèle réduit POD-Galerkin	13
3 Méthode d'estimation de système dynamique : l'assimilation de données	15
3.1 L'assimilation séquentielle	16
3.1.1 Principe de l'assimilation séquentielle	16
3.1.2 Filtre de Kalman optimal	16
3.1.3 Filtres de Kalman sous-optimaux	17
3.2 L'assimilation variationnelle	18
3.2.1 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte	18
3.2.2 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible	19
3.3 Discussion	20
2 Inférence bayésienne pour le modèle réduit POD-Galerkin	22
1 Introduction	24
2 Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres	24
2.1 Définition générale	25
2.2 Propriétés de la POD	26
2.3 Optimalité de la POD	27
2.4 Troncature de la base POD	28
2.5 Cas discrétisé de dimension finie	29
2.6 Lien avec la Décomposition aux Valeurs Singulières et l'Analyse en Composantes Principales	30
2.7 Approche directe et snapshot POD	32
2.7.1 Approche directe	32

	2.7.2	Approche snapshot POD	32
	2.8	Choix du produit scalaire	33
	2.9	Dépendance de la POD et choix des réalisations	33
3		Modélisation d'ordre réduit d'écoulements	34
	3.1	Introduction	34
	3.2	Construction du modèle réduit POD-Galerkin	34
	3.3	Projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles	35
	3.4	Traitement du terme de pression	36
	3.5	Identification des coefficients d'un modèle d'ordre réduit par identification polynomiale	37
4		Inférence bayésienne dans les modèles de Markov cachés	38
	4.1	Modèle à espace d'état	39
	4.2	Inférence bayésienne	40
	4.3	Filtrage bayésien optimal	41
	4.3.1	Étape de prédiction	42
	4.3.2	Étape de correction	42
5		Résolution du filtrage optimal	43
	5.1	Filtre de Kalman	43
	5.2	Extensions du filtre de Kalman	45
	5.2.1	Filtre de Kalman étendu	46
	5.2.2	Filtre de Kalman de rang réduit : SEEK et SEIK	47
	5.3	Méthodes séquentielles de Monte-Carlo	47
	5.3.1	Principe de Monte-Carlo	47
	5.3.2	Filtre particulaire	48
	5.3.3	Filtre de Kalman d'ensemble	49
	5.3.4	Filtre de Kalman d'ensemble Square Root	51
6		Estimation des paramètres dans un modèle à espace d'état	53
	6.1	Principe du maximum de vraisemblance	54
	6.1.1	Le lisseur de Kalman linéaire	55
	6.2	Algorithme EM : Étapes d'Expectation et de Maximisation	57
	6.2.1	Étape E	57
	6.2.2	Étape M	57
	6.2.3	Cas de données manquantes	58
	6.3	Propriétés de l'algorithme EM	60
7		Conclusion	60
3		Dispositif expérimental, techniques de mesure, analyse de l'écoulement	61
1		Introduction	62
2		Montage expérimental	64
	2.1	Système d'alimentation du fluide	64
	2.2	Veine hydrodynamique	65
	2.3	Profil utilisé	66
3		Instrumentation de la manipulation	68
	3.1	Vélocimétrie par image de particules PIV	68
	3.1.1	Principe	68
	3.2	Mise en œuvre de la PIV	69

3.2.1	Ensemencement	69
3.2.2	Source Laser	69
3.2.3	Systèmes d'enregistrement des images	69
3.2.4	Traitement des images de particules	70
3.2.5	Post-traitement	71
3.3	Estimation de la précision	71
3.3.1	Effet de peak-locking	71
3.3.2	Répartition des vitesses de l'écoulement	72
3.3.3	Convergence des moyennes statistiques	73
4	Anémométrie film chaud	75
5	Résultats expérimentaux	76
4	Application de l'inférence bayésienne sur le modèle réduit POD-Galerkin	81
1	Introduction	82
2	POD appliquée à l'écoulement autour du profil NACA0012	84
2.1	Construction de la base POD	84
2.2	Détermination des coefficients de projection temporels POD	85
2.3	Troncature de la base POD	85
3	Modèle réduit POD-Galerkin	91
3.1	Détermination des coefficients de prédiction temporels	91
3.2	Procédure d'intégration du modèle réduit	92
3.3	Observations	95
4	Amélioration du modèle réduit POD-Galerkin par assimilation séquentielle de données	96
4.1	Erreurs en moyenne quadratique des estimateurs	97
4.2	Initialisation des filtres de Kalman	97
4.3	Modèle réduit linéaire et filtres KF, EnKF et SR-EnKF	100
4.4	Reconstruction de l'écoulement $u(x, y, t)$ avec le filtre EnKF	109
4.5	Observations	111
4.6	Conclusion	112
5	Application de l'algorithme EM dans le cas d'observations manquantes	113
5.1	Introduction	113
5.2	POD sous-échantillonnée	113
5.3	Modèle à espace d'état utilisé	114
5.4	Estimation de paramètres par algorithme EM	116
5.5	Application au modèle réduit POD-Galerkin	118
5.5.1	Erreur de reconstruction de l'algorithme EM	120
5.5.2	RMSE de l'algorithme EM	121
5.6	Observations	132
5.7	Conclusion	133
5	Reconstruction du signal temporel de la POD à l'aide du filtre de Kalman en utilisant un signal externe	134
1	Introduction	135
2	Modèle d'évolution	136
3	Modèle de mesure	136
3.1	Construction du modèle de mesure	136

3.2	Test de significativité des données	138
4	Correction du filtre EnKF	140
4.1	Détermination du paramètre α dans le cas de l'inflation multiplicative	141
5	Application du filtre EnKF avec mesure indirecte au modèle réduit POD-Galerkin	141
5.1	Estimation de l'opérateur G par régression PLS multilinéaire	143
5.2	Validation du filtre EnKF	146
5.3	Estimation des coefficients de prédiction temporels	149
5.4	Observations	149
5.5	Reconstruction du champ de vitesse	152
5.6	Observations	152
6	Conclusion	156
Conclusion et perspectives		157
Annexes		160
A	Équations du filtrage bayésien	160
B	Équations du filtre de Kalman	162
C	Convergence de l'algorithme EM	163
D	Régression dans le cas de données corrélées	164
D.1	Principe de la PLSR	164
D.2	Algorithmes utilisés pour la PLSR	165
D.3	Sélection du nombre de variables explicatives	166
D.4	Procédure pour la validation croisée	167
E	Définition : Consistance d'un estimateur d'état	168

Table des figures

1.1	Schématisation de l'approche séquentielle	17
1.2	Schématisation de l'approche variationnelle	20
2.1	Interprétation géométrique de l'Analyse en Composantes Principales (issue de Bergmann (2004)).	31
2.2	Dépendances entre les variables aléatoires du modèle à espace d'état discret.	40
2.3	Itération du filtre optimal	42
3.1	Visualisation par traceurs chimiques de l'écoulement naissant autour d'un Naca 0012 pour un nombre de Reynolds de 1000 (d'après (Pineau et al., 1994))	63
3.2	Comparaison DNS/PIV 2D2C dans la phase de décélération du mouvement d'uptroke de l'écoulement autour d'un profil Naca 0012. (Jardin et al., 2009)	63
3.3	Classification des différents types de lâcher tourbillonnaire en fonction de l'incidence et du nombre de Reynolds.	64
3.4	Description de chaque type de lâcher tourbillonnaire	64
3.5	Photo d'ensemble du dispositif expérimental.	65
3.6	Gamme de variation de débit des trois pompes PCM Moineau.	65
3.7	Veine hydrodynamique - Zone de visualisation.	66
3.8	Profil NACA0012 incliné à 20°	66
3.9	Densité spectrale de puissance pour les cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et $R_e = 2000$ et $X/c = 0, Y/c = 1$	67
3.10	Schéma explicatif du calcul des champs de vitesse par la méthode de PIV.	68
3.11	Chronogramme : procédure d'acquisition du système PIV2D-2C (Cas $R_e=1000$)	70
3.12	Paramètres du traitement des champs PIV.	71
3.13	Histogrammes des déplacements en fraction de pixels (<i>effet de peak-locking</i>) - $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	72
3.14	Histogrammes des déplacements en fraction de pixels (<i>effet de peak-locking</i>) - $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=2000$	72
3.15	Histogramme local brut des vitesses (composante V de l'écoulement) - Cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e=1000$ et $R_e=2000$	73
3.16	Convergence de \bar{U} pour N=2000 et N=10000	74
3.17	Convergence de \bar{V} pour N=2000 et N=10000	74
3.18	Convergence de $\hat{\sigma}_U$ pour N=2000 et N=10000	74
3.19	Convergence de $\hat{\sigma}_V$ pour N=10000	75
3.20	$\alpha = 10^\circ$ et $R_e=1000$	76
3.21	$\alpha = 10^\circ$ et $R_e=2000$	76
3.22	$\alpha = 15^\circ$ et $R_e=1000$	76
3.23	$\alpha = 15^\circ$ et $R_e=2000$	76

3.24	$\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	77
3.25	$\alpha = 20^\circ$ et $R_e=2000$	77
3.26	$\alpha = 30^\circ$ et $R_e=1000$	77
3.27	$\alpha = 30^\circ$ et $R_e=2000$	77
3.28	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement PIV à $T=500$ et $T=1000$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	79
3.29	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement PIV à $T=1500$ et $T=2000$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	79
3.30	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement PIV à $T=1000$ et $T=1500$ - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	79
3.31	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement PIV à $T=1500$ et $T=2000$ - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	80
4.1	Dépendances entre les variables aléatoires du modèle à espace d'état discret.	83
4.2	Énergie cinétique contenue dans le champ moyen pour chaque configuration.	87
4.3	Énergie cinétique moyenne normalisée capturée - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	87
4.4	Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$ POD - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	88
4.5	Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ POD - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	88
4.6	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - $T=500$ et $T=1000$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	88
4.7	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - $T=1500$ et $T=2000$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	89
4.8	Énergie cinétique moyenne normalisée capturée - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$.	89
4.9	Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ POD - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$. . .	90
4.10	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - $T=500$ et $T=1000$ - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	90
4.11	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - $T=1500$ et $T=2000$ - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	90
4.12	Portrait de phase des coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ POD - Cas $\alpha = 15^\circ, \alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	91
4.13	Évolution du modèle linéaire et quadratique en fonction des différentes configurations.	92
4.14	Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	93
4.15	Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ - Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	93
4.16	Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $R_e=1000$	93
4.17	Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $R_e=1000$	94
4.18	Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$	94
4.19	Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	94
4.20	Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	95
4.21	Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	95
4.22	Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ du filtre EnKF avec $N = 100$ et $N = 250$ - Modèle réduit linéaire	99
4.23	Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ KF et Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$	100
4.24	Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ EnKF et Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$	101
4.25	Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ SR-EnKF et Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$	101

4.26	Erreur E - KF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	102
4.27	Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	102
4.29	Erreur E - KF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	102
4.28	Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	103
4.30	Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	103
4.31	Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	103
4.32	Erreur E - KF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	104
4.33	Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	104
4.34	Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	104
4.35	Erreur E - KF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	105
4.36	Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	105
4.37	Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	105
4.38	RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	106
4.39	RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	106
4.40	RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	106
4.41	RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$	107
4.42	Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ - EnKF - cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$.	107
4.43	Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ - EnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$.	108
4.44	RMSE EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	108
4.45	RMSE EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	109
4.46	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=500 et T=1000 - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	109
4.47	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=1500 et T=2000 - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$	110
4.48	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=500 et T=1000 - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	110
4.49	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=500 et T=1000 - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$	110
4.50	Représentation schématique de la méthode des snapshots (a) Cas complet (b) Cas sous-échantillonnée régulièrement avec $(l_1 = 1, l_2 = 1)$ (c) Cas sous-échantillonnée par paquet $(l_1 = 2, l_2 = 1)$	114
4.51	Graphique acyclique d'un modèle à espace d'état avec un échantillonnage temporel régulier et graphique acyclique d'un modèle à espace d'état avec un échantillonnage temporel irrégulier.	115
4.52	Erreur E - $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ - $(l_1, l_2) = (2, 2)$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$. . .	120
4.53	Erreur E - $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ - $(l_1, l_2) = (2, 6)$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$. . .	120
4.54	Erreur E - $\alpha = 30^\circ$ à $R_e = 1000$ - $(l_1, l_2) = (2, 2)$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$. . .	120
4.55	Erreur E - $\alpha = 30^\circ$ à $R_e = 1000$ - $(l_1, l_2) = (2, 6)$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$. . .	121
4.56	RMSE - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide} = 50\%$ et 75%	121
4.57	RMSE - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide} = 50\%$ et 75%	121
4.58	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide} = 50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$.	122
4.59	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ - avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$.	122
4.60	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$.	123
4.61	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$	123

4.62	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$. . .	124
4.63	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$. . .	124
4.64	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$. . .	125
4.65	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$. . .	125
4.66	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$. . .	126
4.67	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ $(l_1, l_2) = (2, 2)$	126
4.68	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$. . .	127
4.69	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$. . .	127
4.70	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$. . .	128
4.71	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$. . .	128
4.72	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ - $(l_1, l_2) = (2, 6)$. . .	129
4.73	$a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$. . .	129
4.74	$a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$. . .	130
4.75	Erreur E - Modèle réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique - Cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ - avec $(l_1, l_2) = (10, 10)$	130
4.76	RMSE - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ - avec $\tau_{vide} = 75\%$	131
4.77	$a_1(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$	131
4.78	$a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$	131
4.79	$a_5(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$	132
4.80	$a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$	132
5.1	Modèle à espace d'état avec mesure indirecte	137
5.2	Série temporelle de la forme quadratique 3.8	139
5.3	Sélection du fenêtrage du type $[-N : N] * \frac{1}{f_s}$ pour le signal film chaud S	143
5.4	Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-100 : 100]$	144
5.5	Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-400, 400]$	144
5.6	Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-600, 600]$	145
5.7	Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-1000, 1000]$	145
5.8	Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-1500, 0]$	145
5.9	Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[0, -1500]$	146
5.10	Série temporelle de la forme quadratique (1.5) - Intervalle I_1 - Sans pondération de la covariance et avec pondération	148
5.11	Série temporelle de la forme quadratique (1.5) - Intervalle I_2 - Sans pondération de la covariance et avec pondération	148
5.12	Série temporelle de la forme quadratique (1.5) - Intervalle I_3 - Sans pondération de la covariance et avec pondération	149
5.13	Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF - Intervalle I_1 - Modèle réduit linéaire	150
5.14	Coefficients $a_{10}(t)$ EnKF Modèle réduit linéaire	150
5.15	Portrait de phase entre $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF - Intervalle I_1 Modèle réduit linéaire	150
5.16	Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF Intervalle I_1 - Modèle réduit quadratique	150
5.17	Coefficients $a_{10}(t)$ EnKF Intervalle I_1 - Modèle réduit quadratique	151
5.18	Relation de phase entre $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF - Intervalle I_1 Modèle réduit quadratique	151
5.19	RMSE sur chaque coefficient pour les intervalles I_1, I_2, I_3 - Modèle réduit linéaire	151
5.20	RMSE sur chaque coefficient pour les intervalles I_1, I_2, I_3 - Modèle réduit quadratique	151

5.21	Erreur de reconstruction E du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire et quadratique - Intervalle $[-600, 600]$	153
5.22	Erreur de reconstruction E du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire et quadratique - Intervalle $[-1500, 0]$	153
5.23	Erreur de reconstruction E du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire et quadratique - Intervalle $[0, 1500]$	153
5.24	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD à $T=500$ et $T=1000$	154
5.25	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD à $T=1500$ et $T=2000$	154
5.26	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire à $T=500$ et $T=1000$ - Intervalle I_1	154
5.27	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire à $T=1500$ et $T=2000$ - Intervalle I_1	155
5.28	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit quadratique à $T=500$ et $T=1000$ - Intervalle I_1	155
5.29	Norme $\ \vec{U}\ $ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit quadratique à $T=1500$ et $T=2000$ - Intervalle I_1	155
5.30	Schéma général de la validation croisée. À gauche, en bleu, la partie de construction des modèles PLSR avec entre 1 et k variables latentes et l'obtention des coefficients b_k pour chacun. À droite, en rouge, la prédiction de l'échantillon non retenue pour la calibration et le calcul du $PRESS$	168

Nomenclature

POD

S : sous-espace de dimension réduite engendré par les modes POD

n : dimension du sous-espace de projection

$u^{(k)}$: ensemble des clichés

N nombre de clichés contenus dans $u^{(k)}$

$\phi^{(j)}, \Phi$: mode POD d'indice j et matrice des modes POD

$a_k^{(j)}$: amplitude issue de la projection du cliché à l'instant k sur le mode POD $\phi^{(j)}$

a_k^j : amplitude associée au mode POD $\phi^{(j)}$ et vecteur d'amplitude à l'instant k

P_S : projecteur orthonormal sur le sous-espace S

\langle, \rangle : opérateur de moyenne temporelle

λ_j : valeur propre associée au mode POD $\phi^{(j)}$

R : opérateur aux valeurs propres

N_{POD} : nombre de modes POD de la troncature

$C(t, t')$: tenseur des corrélations temporelles

D_i, L_{ij}, C_{ijk} : termes constants, linéaires et quadratiques du modèle réduit POD-Galerkin basé sur les champs fluctuants

Filtre de Kalman

X_k : vecteur d'état

Y_k : vecteur des observations POD

S_k : vecteur des observations film chaud

F_k : opérateur des équations d'états

H_k : opérateur des observations

G_k : opérateur des observations entre Y_k et S_k

P_k : matrice de covariance

K_k : gain de Kalman

P_k^N : matrice de covariance empirique

K_k^N : gain de Kalman empirique

m_k^N : moyenne empirique

J : fonctionnelle coût

W_k, V_k : bruits blancs des équations d'états et d'observations

X_k^f : vecteur d'état forecast
 X_k^a : vecteur d'état analysed
 P_k^f : matrice de covariance forecast
 P_k^a : matrice de covariance analysed

Général

L^2 : espace des fonctions de carrés intégrables.
 H^1 : espace de Sobolev
 I_n : matrice identité de dimension n
 δ_{ij} : symbole de Kronecker
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire entre deux vecteurs de l'espace de Hilbert H
 $\|\cdot\|_H$: norme induite par le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H

Acronymes

3D-VAR : Assimilation variationnelle
 ACP Analyse en Composantes Principales
 BLUE Best Linear Unbiased Estimator
 BOD Bi-Orthogonal Decomposition
 DMD Dynamical Mode Decomposition
 DNS Simulation Numérique Directe
 EDO Équations Différentielles Ordinaires
 EKF Extended Kalman Filter
 EM Expectation Maximization
 EnKF Ensemble Kalman Filter
 EPOD Proper Extended Orthogonal Decomposition
 FFT Fast Fourier Transform
 HMM Hidden Markov Model
 iid indépendantes identiquement distribuées
 LSE Linear Stochastic Estimation
 PIV Partice Image Velocimetry
 PLSR Partial Least Square Regression
 POD Proper Orthogonal Decomposition
 PRESS Prediction Sum of Square
 QSE Quadratic Stochastic Estimation
 RIC Relative information Content
 ROM Reduced order Model
 SEEK, SEIK : Singular Evolutive Extended Kalman, Singular Evolutive Interpolated Kalman
 SIR Sampled Importance Resampling
 SR-EnKF Square Root Ensemble Kalman Filter
 SVD Singular Value Decomposition

Introduction

Les écoulements rencontrés dans les applications environnementales ou industrielles sont généralement instationnaires et couplés à d'autres phénomènes physiques. Le nombre de degrés de liberté nécessaire à une description précise de leur dynamique est donc très important. La modélisation de ces phénomènes physiques implique des coûts de calculs prohibitifs pour leur modélisation, en particulier pour ceux qui reposent sur une solution de système d'équations aux dérivées partielles comme, par exemple, la résolution des équations de Navier-Stokes complètes pour la simulation numérique d'écoulements turbulents. Une approche possible consiste à remplacer les équations d'états, par un modèle de plus faible dimension et à réduire ainsi le temps de calcul. La modélisation d'ordre faible ainsi construite doit permettre une approximation fidèle de l'évolution spatio-temporelle de l'ensemble des quantités physiques considérées tout en induisant une réduction significative du nombre de degrés de liberté du modèle. On s'intéresse ici à l'écoulement autour du profil d'aile NACA0012 à différents angles d'incidence et à différents nombres de Reynolds.

L'approche retenue dans le cadre de cette thèse est basée sur la projection de Galerkin du modèle physique sur une base de dimension réduite déterminée par décomposition orthogonale aux valeurs propres ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD). Grâce à sa propriété d'optimalité, la POD permet de définir, à partir d'un ensemble de solutions d'un écoulement, issues d'une base de données numériques ou expérimentales, la meilleure approximation de la base de données des champs de l'écoulement d'un point de vue énergétique à l'aide d'un nombre limité de fonctions propres. Une méthodologie de réduction de modèle, dénommée *POD-Galerkin*, permet ensuite de définir un modèle réduit d'écoulement par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD. Le modèle réduit correspondant est un système d'équations différentielles ordinaires de faible dimension qui gouverne l'évolution des coefficients temporels associés aux modes POD. Afin d'utiliser un modèle d'ordre réduit pour la reconstruction d'écoulement, sa précision et robustesse doivent être garanties. Il doit en effet reproduire le plus fidèlement possible la dynamique complexe contenue dans la base de données expérimentales et en même temps être robuste aux variations des paramètres d'entrée ou à l'évolution de la configuration de l'écoulement.

Dans cette thèse, la POD sera tout d'abord utilisée afin de définir une base réduite de l'écoulement à partir des données expérimentales d'écoulement mesurées par vélocimétrie par images de particules (PIV) autour d'un profil d'aile NACA0012 à différents angles d'incidence et nombres de Reynolds. Des techniques de correction, ou de calibration, issues de l'assimilation séquentielle de données sont ensuite appliquées aux modèles de dimension réduite correspondant aux configurations étudiées de façon à obtenir une prédiction de la dynamique de référence la plus précise possible.

Cette thèse se place donc dans le cadre de l'application de méthodes issues de l'assimilation séquentielle de données sur le modèle réduit POD-Galerkin pour la reconstruction d'écoulements instationnaires. L'assimilation de données est l'ensemble des techniques qui permettent de combiner de façon optimale l'information mathématique contenue dans les équations modélisant le phénomène et l'information physique provenant des observations, en vue de reconstituer l'état du système au cours du temps. L'état optimal est défini dans le sens de l'état le plus vraisemblable par rapport aux observations et au modèle. L'objectif est de corriger la trajectoire du modèle à partir d'informations passées et présentes chaque fois qu'une observation est disponible afin d'établir une prédiction de l'état du modèle au pas de temps suivant.

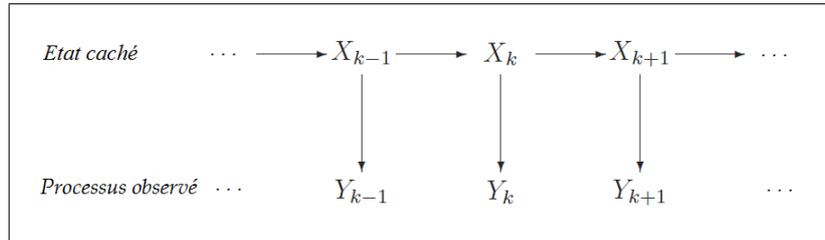
Deux types de processus sont alors à distinguer : les processus dont on ne connaît que les statistiques et les processus qui peuvent être représentés par des équations. À partir de ces processus, deux principales classes de méthodes d'assimilation de données peuvent être définies : les méthodes séquentielles et les méthodes variationnelles. Les méthodes variationnelles cherchent à identifier l'état du système à un instant, en utilisant des observations passées, présentes ou futures. Elles se placent dans un cadre déterministe où le modèle est considéré comme étant exact. Les données vérifient ainsi les équations du modèle, généralement des équations aux dérivées partielles. Les méthodes séquentielles se placent quant à elles dans un cadre stochastique où la dynamique du système est considérée comme chaotique et l'évolution du modèle est considérée comme un processus aléatoire. Elles ne tiennent compte que des observations disponibles avant l'instant d'analyse. L'objectif est en général de minimiser l'écart-type, représentant la dispersion de l'estimation de l'état du modèle. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux méthodes d'inférence bayésiennes dont le but est de prédire les quantités d'intérêt et de les corriger ensuite étant donné une nouvelle observation.

Dans le cas d'une application à un écoulement incompressible, on considère l'écoulement comme un état caché non directement mesurable d'un processus (X_k) . Cet état caché est alors relié à des mesures observées selon un processus (Y_k) par des modèles stochastiques qui prennent en compte les caractéristiques essentielles du phénomène physique étudié. On suppose de plus que sont définis un modèle d'évolution de l'état du système, reliant deux états successifs x_{k-1} et x_k , représenté par la densité de probabilité $p(x_k|x_{k-1})$, et un modèle de mesure, reliant une observation y_k à l'état caché x_k , représenté par la densité de probabilité $p(y_k|x_k)$. Les modèles stochastiques ainsi définis permettent de déterminer la densité *a posteriori* $p(x_k|y_{1:k})$ qui va déterminer le type de méthode d'inférence bayésienne à utiliser, en fonction de ses propriétés.

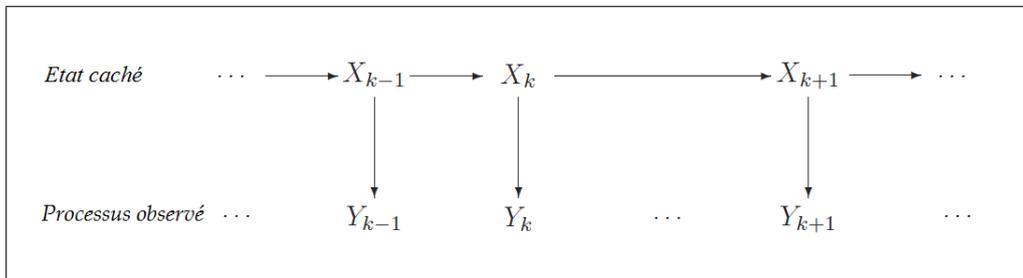
Dans ce travail, l'état (X_k) du système sera représenté par les coefficients temporels de la POD. Les observations résolues en temps seront de trois natures différentes : coefficients de projection temporels de la POD, sous-échantillonnée ou non et signal de tension fournis par une sonde film chaud. Selon la nature des observations utilisées dans le processus d'assimilation des données, les cas listés ci-dessous sont étudiés. Les dépendances statistiques entre états cachés et mesures selon ces différents cas seront également représentées.

1. Le premier cas test est celui où les observations sont de même nature que les variables d'état et le vecteur d'observations contient des observations pour chaque

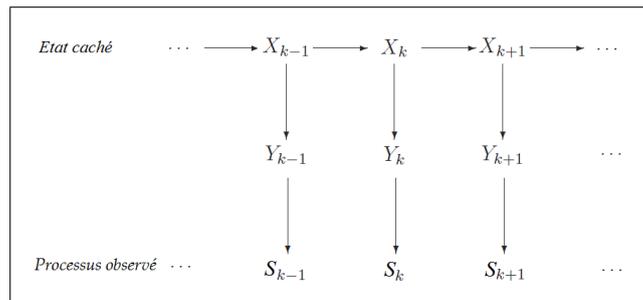
instant du calcul. Les observations utilisées dans ce cas correspondent aux coefficients de projection temporels de la POD.



2. Pour le second cas, les observations sont de même nature que les variables d'état mais le vecteur d'observations ne contient pas d'observations à tout instant, on dit alors que des observations sont manquantes. Les observations utilisées sont les coefficients de projection temporels de la POD dont la répartition est sous-échantillonnée selon un taux τ_{vide} correspondant au pourcentage de données manquantes.



3. Enfin, le troisième cas est celui où les observations sont de natures différentes des variables d'états. Les observations utilisées ici sont obtenues par mesures ponctuelles de scalaire qui suivent un processus (S_k) différent du processus (Y_k).



Organisation du manuscrit

Ce mémoire est constitué, outre ce chapitre introductif et la conclusion générale, de cinq chapitres et cinq annexes. Il est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré à un bilan bibliographique général des méthodes de réduction de modèle ainsi que de méthodes d'assimilation de données. Sans être exhaustif, un rappel est donné sur les principales méthodes utilisées en assimilation séquentielle et variationnelle de données.

Le chapitre 2 donne les bases mathématiques principales des méthodes utilisées dans le cadre de cette thèse. La première partie de ce chapitre est consacrée à un rappel sur la POD et la construction du modèle réduit POD-Galerkin. La seconde partie pose les hypothèses réalisées sur les modèles stochastiques et donne les équations récurrentes permettant l'inférence bayésienne sur un modèle de Markov caché. Le cas d'un modèle linéaire est tout d'abord présenté avec le filtre de Kalman linéaire. Les bases des méthodes d'approximation numérique par échantillonnage aléatoire, appelées méthodes de Monte Carlo, sont également données. Les principaux algorithmes non optimaux de Kalman (Filtre de Kalman étendu EKF, filtre de Kalman d'ensemble EnKF) sont également décrits. Ce chapitre se clôt sur l'estimation de paramètres dans les modèles à espace d'états par l'algorithme EM (*Expectation Maximization*). Sont introduits à cet effet le lisseur de Kalman et le principe de maximum de vraisemblance.

Le chapitre 3 est consacré à la description du dispositif expérimental et des techniques utilisées pour acquérir les données expérimentales utilisées au cours de ce travail. Le dispositif expérimental et le principe général de la technique des mesures par PIV et anémométrie film chaud sont rappelés. Des éléments de bibliographie sur les écoulements autour de profils d'aile à faible nombre de Reynolds sont également donnés. Les résultats obtenus sur le profil d'aile utilisé dans cette étude sont présentés et discutés.

Le chapitre 4 est consacré à la modélisation de dimension réduite des différentes configurations expérimentales. Les méthodes d'inférence bayésienne présentées au chapitre 2 sont appliquées aux modèles réduits POD-Galerkin représentant les écoulements mesurés par PIV autour d'un profil NACA0012. Les différentes méthodes d'inférence utilisées sur les modèles d'ordre réduit sont comparées en fonction de la complexité de la dynamique à reconstruire. L'inférence bayésienne sur des ensembles d'observations contenant des données manquantes est ensuite réalisée à l'aide de l'algorithme EM .

Le chapitre 5 aborde le problème d'une estimation utilisant des observations issues d'un signal fourni par une sonde à film chaud située hors de la zone de mesure PIV. La régression PLS (*Partial Least Square*) est tout d'abord utilisée afin de définir un opérateur de transition entre les variables d'états du modèle réduit POD-Galerkin et les observations issues d'une sonde à film chaud. Cette méthode permet ensuite de définir un modèle statistique bayésien permettant de tenir compte d'observations de nature physique différente de celle des variables d'état. La reconstruction de l'écoulement est alors réalisée à l'aide du filtre de Kalman d'ensemble et validée par une statistique du χ^2 .

Le présent mémoire s'achève par une conclusion qui résume les principales contributions de la thèse et présente les perspectives qui en découlent.

Chapitre 1

Méthodes de réduction et d'estimation de systèmes dynamiques

Sommaire

1	Méthodes de réduction de données	6
1.1	Systèmes dynamiques	6
1.2	Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres	7
1.2.1	Définition générale de la POD	7
1.2.2	Application de la POD pour le contrôle d'écoulement	8
1.2.3	Décomposition Bi-orthogonale : BOD	9
1.3	Approximation des modes de Koopman : DMD (Dynamical Mode Decomposition)	10
1.4	Estimation stochastique linéaire (LSE)	11
2	Contrôle du modèle réduit POD-Galerkin	13
3	Méthode d'estimation de système dynamique : l'assimilation de données	15
3.1	L'assimilation séquentielle	16
3.1.1	Principe de l'assimilation séquentielle	16
3.1.2	Filtre de Kalman optimal	16
3.1.3	Filtres de Kalman sous-optimaux	17
3.2	L'assimilation variationnelle	18
3.2.1	Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte	18
3.2.2	Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible	19
3.3	Discussion	20

1 Méthodes de réduction de données

La première partie de ce chapitre décrit la modélisation d'un système physique par système dynamique. La seconde partie est consacrée à un état de l'art sur la POD et la modélisation réduite à partir de la POD. La troisième partie aborde le problème du contrôle du modèle réduit basé sur la POD. La quatrième partie est, quant à elle, consacrée à une présentation générale de l'assimilation de données. Les principales méthodes séquentielles et variationnelles d'assimilation de données y sont évoquées.

1.1 Systèmes dynamiques

La modélisation d'un phénomène physique requiert en général la résolution d'un système dynamique composé d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles noté sous la forme symbolique suivante :

$$(S) \begin{cases} F : V \longrightarrow W \\ \frac{\partial u}{\partial t} + F(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où V et W sont des espaces de Hilbert de dimension infinie, $u(t) \in V$ l'inconnue du problème physique et F l'opérateur différentiel décrivant le système d'équations du phénomène physique étudié. La solution de ce système dynamique est caractérisée par un certain nombre de variables indépendantes et fournit une description du phénomène physique étudié. Dans le cadre de ce travail, le système dynamique correspond aux équations de Navier Stokes. Pour les systèmes dynamiques issus de problèmes physiques la dimension de l'espace des états est généralement très importante. La simulation numérique d'écoulements turbulents à l'aide des équations de Navier-Stokes complètes implique ainsi un coût de calcul très important. L'utilisation de modèles dynamiques à faible nombre de degrés de liberté s'avère donc nécessaire afin de diminuer ce coût de calcul. L'objectif des modèles réduits est de capturer les caractéristiques essentielles de l'écoulement et de permettre une description des structures cohérentes de la dynamique de l'écoulement. Les équations de ces modèles réduits sont souvent obtenues par des techniques de projection des équations du modèle d'ordre élevé sur une base de dimension réduite préalablement définie, ce qui permet au système dynamique réduit de conserver une partie des propriétés du système initial et de se limiter à la recherche d'une solution approchée.

Parmi les méthodes de réduction pour les systèmes linéaires, on peut citer celle de la troncature équilibrée (ou balanced truncation) (Moore, 1981) et celle s'appuyant sur la construction de sous-espaces de Krylov (Willcox, 2000). Ces méthodes sont basées sur la théorie du contrôle optimal afin de réduire la taille du système. Dans le cas de systèmes non linéaires et des systèmes de grande taille, ces méthodes ne sont pas utilisables directement. Pour les systèmes non linéaires, des méthodes dites empiriques ont été développées. Parmi ces méthodes on peut citer la projection sur les bases de Lagrange et d'Hermite. Des exemples de modèles réduits construits avec des bases de Lagrange peuvent être trouvés dans Holmes et al. (1996).

Dans leur travail sur l'écoulement dans une cavité, Ito and Ravindran (1998) et Ravindran (2000b) montrent que l'utilisation d'une telle base permet d'améliorer la performance du modèle. Parmi les autres méthodes de réduction existantes, on peut citer les méthodes utilisant des réseaux de neurones (Li et al., 2008), les ondelettes (Nguyen van yen et al.,

2009) ou l'empirical mode decomposition (Foucher and Mazellier, 2011). Existent également des méthodes spécifiques au type d'écoulement considéré comme les vortex model (Protas, 2008). La taille de la base utilisée dans les méthodes de réduction peut cependant devenir très importante si on considère un écoulement complexe sur une période de temps longue. La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) est un moyen efficace de répondre à ce problème, elle reste encore la méthode la plus utilisée en mécanique des fluides.

1.2 Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) est une méthode d'analyse de données qui permet d'approximer un système physique de dimension élevée par un autre système de dimension plus réduite. Elle a été introduite en mécanique des fluides par Lumley (1967) afin d'identifier les structures cohérentes au sein d'écoulements turbulents incompressibles. La POD est utilisée depuis dans de nombreux domaines comme la reconnaissance de formes, la compression d'image ou la prévision météorologique et est connue sous plusieurs appellations : décomposition de Karhunen-Loève (Loève, 1955), analyse en composantes principales (Jolliffe, 1986), fonctions propres de Sobolev et décomposition en fonctions empiriques. Initialement utilisée comme un outil de post-traitement des données, la POD a été largement utilisée depuis pour développer des modèles physiques simplifiés d'ordre réduit afin d'approximer les équations de Navier-Stokes pour la reconstruction et le contrôle d'écoulements.

La POD est une méthode linéaire qui consiste à déterminer une base orthogonale et ordonnée qui va servir à approximer de manière optimale des données, appelées généralement clichés (ou snapshots), connues sur un ensemble discret ou continu de grande dimension. Les clichés sont par exemple les solutions d'un modèle réduit ou des mesures expérimentales obtenues à différents instants. Cette base va ensuite permettre de créer et d'identifier les degrés de liberté les plus représentatifs de ces données dans un sous-espace de dimension faible et de construire un modèle de dimension réduite grâce à la projection de Galerkin.

1.2.1 Définition générale de la POD

On considère un processus spatio-temporel aléatoire $u(\mathbf{X})$ avec $\mathbf{X} = (x, y, t)$ défini sur $H(\Omega)$. L'espace H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de sa norme induite $\|\cdot\|_H$ et Ω un domaine spatio-temporel tel que $\Omega = \mathbf{X} \times [0, T]$ avec $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^3$ et $T > 0$. L'espace H est ici l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carrés intégrables où le produit scalaire est défini par $(\Phi, \Psi) = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{X})\Psi(\mathbf{X})d\mathbf{X}, \forall \Phi, \Psi \in L^2(\Omega)$.

La POD est une méthode d'approximation dont le but est de déterminer une base orthogonale et ordonnée, ou base modale, afin d'approximer au mieux le processus u sur un sous-espace de dimension N_{POD} . La POD va permettre d'obtenir une représentation fidèle du processus u à partir de l'extraction de cette base modale qui pourra être tronquée à un certain rang N_{POD} . L'approximation recherchée de u est de la forme suivante :

$$u(\mathbf{X}) \approx \sum_{i=1}^{N_{POD}} (u, \Phi_i) \Phi_i(\mathbf{X}) \quad (1.1)$$

La condition d'optimalité de cette base, au sens du produit scalaire considéré sur l'espace fonctionnel \mathbf{H} , consiste à déterminer les modes $\Phi_i \in \mathbf{H}(\Omega)$ orthonormés qui minimisent l'erreur quadratique suivante :

$$\left\langle \left\| u - \sum_{i=1}^{N_{POD}} (u, \Phi_i) \Phi_i(\mathbf{X}) \right\|^2 \right\rangle \quad (1.2)$$

où, dans le cas général, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble sur une famille de réalisations $\{u^n\}_{n=1, \dots, \infty}$. Les modes POD sont alors les solutions successives du problème d'optimisation sous contrainte suivant :

$$\Phi_{i+1} = \underset{\Psi \in \mathbf{H}(\Omega)}{\text{Arg max}} \langle (u - P_i u, \Psi)^2 \rangle \quad \text{avec} \quad (\Psi, \Psi) = 1 \quad (1.3)$$

où P_i est le projecteur orthogonal sur le sous-espace constitué par les i èmes premiers modes $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i\}$. Ainsi, la POD revient à chercher en moyenne les modes $\{\Phi_1, \dots, \Phi_i\}_{i \geq 1}$ déterministes les mieux corrélés aux réalisations discrètes de la variable aléatoire $u(\mathbf{X})$ (Lumley, 1967). Cela revient alors à maximiser la norme de la projection de u sur la droite vectorielle de direction Ψ en moyenne sur $\mathbf{H}^2(\Omega)$ indépendamment de la norme du mode Ψ . Ce problème admet la formulation équivalente suivante :

$$\max_{\Psi \in H^*(\Omega)} \frac{\langle (u, \Psi)^2 \rangle}{(\Psi, \Psi)} \quad \text{où} \quad H^*(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad (\Psi, \Psi) = 1 \quad (1.4)$$

Ce problème admet au moins une solution et sa résolution va permettre de définir une base optimale pour la représentation de u . Cette décomposition de u dans cette base est sa POD.

La projection de Galerkin sur la base des modes POD s'applique à des systèmes dynamiques non linéaires et permet dans le cas de fluides incompressibles d'assimiler les équations de Navier-Stokes à un système d'équations différentielles ordinaires dont le second membre est polynomial et quadratique. Les modes issus de la POD correspondent alors aux structures d'énergie cinétique maximale. Une revue détaillée de la POD peut être trouvée dans Sirovitch (1987), Aubry et al. (1988), Holmes et al. (1996), Delville et al. (1999), Cordier et al. (2008). Les propriétés de la POD seront davantage explicitées dans le chapitre 2.

1.2.2 Application de la POD pour le contrôle d'écoulement

La première utilisation de la POD pour le contrôle d'écoulements turbulents a été réalisée par Aubry et al. (1988). La nécessité de stabiliser le modèle d'ordre réduit est alors vite apparue. Dans Rempfer (2000), Rempfer utilise un exemple dont la solution est représentée exactement par un petit nombre de modes POD pour démontrer que le modèle d'ordre réduit construit par une projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles sur une base de dimension réduite issue d'une décomposition aux valeurs propres tronquée engendrait une réponse au comportement physique instable. Bien qu'aucune erreur ne fût attribuée à la troncature de la base POD, les structures représentées par le modèle réduit pouvaient être différentes de celles de l'écoulement réel. De nombreux travaux portant sur l'amélioration de la stabilité de modèles d'ordre réduit pour les écoulements d'un fluide incompressible turbulent ont été alors menés. Les modèles d'ordre réduit pour le contrôle d'écoulement ont notamment été

traités par Ukeiley et al. (2001), Hinze (2000). Les principes généraux pour le contrôle optimal utilisant des modèles réduits basés sur les équations de Navier-Stokes ont été décrits dans Ravindran (2000a), Ravindran (2000b). Il existe maintenant une vaste littérature concernant la modélisation réduite de type POD-Galerkin (Galletti et al., 2006), (Buffoni et al., 2006), (Galletti et al., 2004), (Ma and Karniadakis, 2002), ainsi que de nombreux résultats sur l'application de la POD dans le contrôle des écoulements (Bergmann et al., 2005), (Gillies, 1998), (Graham et al., 1998), (Ravindran, 2006), (Afanasiev and Hinze, 2001). Le contrôle d'écoulements utilisant les régions de confiance a été employé par Fahl (2000) et le contrôle optimal du sillage d'un cylindre circulaire en utilisant une région de confiance a été réalisé par Bergmann and Cordier (2008). Luchtenberg et al. (2009) l'a fait pour une configuration portante. Le contrôle d'écoulement en cavité à partir de mesures expérimentales et de son application pour la création d'un modèle de contrôle pour les écoulements en cavité peut être trouvé dans Samimy et al. (2007). L'extrapolation des fonctions POD à différentes géométries et différents paramètres de contrôle a été étudié par Bergmann et al. (2009). Une étude récente sur la sensibilité des coefficients POD pour des paramètres donnés a été fournie par Hay et al. (2009) dans laquelle la base POD est enrichie en utilisant une analyse de sensibilité. Les données expérimentales ont des erreurs numériques inhérentes qui affectent la procédure de réduction du modèle, cet aspect a été étudié par Rathinam and Petzold (2003). De nombreuses études ont également été menées pour l'étude de l'écoulement dans le sillage de divers obstacles parmi lesquelles on peut citer Noack et al. (2003), Sirisup and Karniadakis (2004) pour l'écoulement dans le sillage d'un cylindre de section circulaire ou de section carrée (Buffoni et al., 2006), (Cordier et al., 2009), (Couplet et al., 2005), (Galletti et al., 2004), (Kalb and Deane, 2007).

1.2.3 Décomposition Bi-orthogonale : BOD

L'information temporelle peut être reconstruite en utilisant la décomposition bi-orthogonale (Aubry, 1991). Cette décomposition permet de déterminer deux catégories de modes, relativement aux deux manières de calculer la matrice des inter-corrélations. Ainsi les vecteurs propres de la matrice des inter-corrélations en moyenne temporelle sont les modes spatiaux tandis que les vecteurs propres de la matrice des inter-corrélations en moyenne spatiale fournissent les modes temporels. Suivant la littérature relative à ce sujet, on qualifiera les structures temporelles comme les chrono-modes (Chronos) et les structures spatiales comme les topo-modes (Topo).

L'analyse spectrale des chronos fournit les fréquences temporelles caractéristiques des topos tandis que l'analyse dans le domaine temporel peut révéler la présence de périodicité temporelle ou de cycles limites. Bien que les fréquences soient capturées par les chronos modes, ces structures sont associées à plus d'une seule fréquence et il est généralement impossible d'identifier les structures relatives à une seule et unique fréquence en utilisant la POD. C'est pourquoi le seul moyen de classer les modes POD est d'utiliser un critère mathématique de l'énergie. Ce critère n'est cependant pas le plus approprié, en effet les structures de faibles énergies associées aux instabilités peuvent être significatives (Noack et al., 2008). De plus la fonction de corrélation fournit des statistiques du second ordre classées selon le contenu énergétique. En général, les structures de faibles énergies sont nécessaires pour une analyse de l'écoulement. La méthode est de plus restreinte à l'analyse des écoulements car les chronos sont obtenus au même titre que les topos et ne peuvent donc être utilisés comme inconnues pour déterminer un modèle d'ordre réduit. Enfin, c'est

une méthode statistique, ainsi les résultats obtenus sont intrinsèquement dépendants des conditions dans lesquelles les snapshots ont été acquis.

1.3 Approximation des modes de Koopman : DMD (Dynamical Mode Decomposition)

L'analyse des modes de Koopman, appelée DMD (*Dynamical Mode Decomposition*), est une technique nouvelle qui permet d'outrepasser ces problèmes. L'algorithme DMD proposé par Schmid (2010) et Rowley et al. (2009) fournit des modes qui approximent les modes de Koopman et a été appliqué à l'étude de données expérimentales avec des résultats encourageants. L'algorithme de la DMD appartient à la catégorie des méthodes d'Arnoldi utilisées extensivement pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres correspondant à un système linéarisé d'écoulement (Ruhe, 1984). Dans Schmid (2010) une amélioration de la méthode est introduite et appliquée aux écoulements non linéaires avec applications sur des données expérimentales. D'un point de vue mathématique, la théorie utilisée est celle de l'analyse spectrale de l'opérateur de Koopman (Mezic, 2005). Comme l'a montré Rowley et al. (2009), l'algorithme DMD approxime les modes de Koopman, qui peuvent être vus comme les composantes harmoniques moyennées de l'écoulement, oscillant à une certaine fréquence donnée par les valeurs propres de l'opérateur. D'un point de vue physique, il peut être montré que les modes de Koopman coïncident avec les modes globaux pour les écoulements linéarisés et avec les modes de Fourier pour les écoulements périodiques (Bagheri et al., 2009). Dans la méthode classique d'Arnoldi, la base est calculée via l'orthogonalisation de Gram Schmidt, ce qui requiert un modèle du système (Arnoldi, 1951). Le meilleur choix est représenté par une base orthonormale. Cependant, une deuxième possibilité est donnée en formant la base de projection en utilisant un ensemble de snapshots. La séquence correspondante de snapshots devient alors de plus en plus mal conditionnée mais cette alternative peut être appliquée dans le cas où un modèle du système n'est pas disponible. Les principales étapes de cet algorithme sont ici brièvement rappelées.

Soit u_k une snapshot au temps t_k et A une matrice de transition, les snapshots successives au temps t_{k+1} sont données par :

$$u_{k+1} = Au_k \quad (1.5)$$

La séquence correspondante de snapshots $X_r = [u_1 \ Au_1 \ Au_2 \ \dots \ Au_r]$ devient au cours du temps de plus en plus mal conditionnée. Cette observation motive la possibilité de développer la dernière snapshot r sur une base formée par les $r-1$ précédentes snapshots :

$$u_{r+1} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r + \tilde{u}_{r+1} \quad (1.6)$$

où \tilde{u}_{r+1} est l'erreur résiduelle. Le but est de minimiser le résidu tel que $\langle \tilde{u}_{r+1}, X_r \rangle = 0$. Cela revient à un problème de minimisation par moindres carrés où les éléments c_j sont les solutions. On introduit alors la matrice compagnon M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_r \end{pmatrix}$$

L'équation précédente peut alors être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$AX_r = x_r M + \tilde{u}_{r+1} e_r^t \quad (1.7)$$

La matrice compagnon propage à l'instant t_{k+1} la séquence entière de snapshot tandis que la dernière snapshot est reconstruite en utilisant les coefficients c_j . De plus, les valeurs propres de M, appelées *valeurs de Ritz*, approximent les valeurs propres du système réel. Les vecteurs propres associés sont donnés par $\tilde{\Phi} = X_r T$ où T sont les vecteurs propres de la matrice M. Un désavantage de cette méthode est la dépendance linéaire entre les données initiales. Une amélioration de l'algorithme est proposée par Schmid (2010) qui permet d'obtenir un problème aux valeurs propres mieux conditionné.

1.4 Estimation stochastique linéaire (LSE)

L'estimation stochastique linéaire (LSE) est également utilisée pour extraire des structures cohérentes de l'écoulement et obtenir des informations sur leur dynamique temporelle à partir d'une base de données expérimentales. C'est un outil d'interpolation-extrapolation spatiale du champ de vitesse instantané qui permet de reconstruire un champ de vitesse en utilisant la donnée du champ considéré à certains points dans le temps et l'espace. Dans cette section, on donne une description de l'estimation stochastique linéaire et quadratique d'après Gordeyev (2000).

Pour un vecteur de données E , qui représente les mesures courantes au point de coordonnées $u(x', y', t')$, l'approximation de u_i , $i = 1, \dots, N$, par estimation stochastique, notée \hat{u} , est la moyenne conditionnelle $\langle u | E \rangle$. Adrian (1977) a introduit cette technique afin d'estimer les moyennes conditionnelles pour des conditions arbitraires. L'idée est de développer $\langle u | E \rangle$ en une série de Taylor au voisinage de $E = 0$:

$$\hat{u}_i = \langle u | E \rangle = L_{ij} E_j + N_{ijk} E_j E_k + \dots \quad i, j, k = 1, \dots, N \quad (1.8)$$

et de tronquer cette série à partir d'un certain degré (Adrian, 1977), (Adrian and Moin, 1998). Les coefficients inconnus L, N, \dots peuvent être déterminés par approximation des moindres carrés entre l'approximation et la moyenne conditionnelle :

$$\langle [\langle u | E \rangle - L_{ij} E_j - N_{ijr} E_j E_r - \dots]^2 \rangle = 0 \quad (1.9)$$

L'estimation stochastique ne fait intervenir que des moments indépendants des signaux conditionneurs utilisés pour la reconstruction du champ complet, l'erreur est ainsi statistiquement décorrélée avec les données, on obtient alors :

$$\langle [\langle u | E \rangle - L_{ij} E_j - N_{ijr} E_j E_r - \dots] E_k \rangle = 0 \quad (1.10)$$

Dans le cas où la série contient seulement les termes du premier ordre, l'estimation des coefficients L_{ij} revient à résoudre le système linéaire suivant (également appelé équations de Yule-Walker) :

$$\langle u_i E_k \rangle = \langle E_j E_k \rangle L_{ij} \quad (1.11)$$

L'estimation stochastique linéaire de u sous la condition E est appelée Linear Stochastic Estimation (LSE) et est donnée par :

$$\hat{u}_i = \langle u | E \rangle = L_{ij} E_j \quad (1.12)$$

À l'instar de la POD, la LSE utilise le tenseur des corrélations R pour extraire les structures de l'écoulement. Le lien entre la LSE et la POD est immédiat et peut être trouvé dans Breteton (1992). La POD décompose l'écoulement en une infinité de modes orthogonaux $\phi_n(x,y,t)$, résultant de la résolution du problème aux valeurs propres :

$$Rb = \lambda b \quad (1.13)$$

Les modes propres sont utilisés pour décomposer l'écoulement sous la forme suivante :

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x,y,t) \quad (1.14)$$

Le tenseur des corrélations peut être décomposé sous la forme suivante :

$$R(x,x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x',y',t')\phi_n(x,y,t) \quad (1.15)$$

En utilisant les équations 1.11,1.14 et 1.15, l'équation 1.12 peut être réécrite sous la forme :

$$u(x,y,t) = u(x',y',t') \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x,t) f_n(x',y',t') \quad \text{où} \quad f_n(x,t) = \frac{\lambda_n \phi_n(x',y',t')}{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x',y',t')} \quad (1.16)$$

où $f_n(x',y',t')$ peut être vue comme une pondération de chaque mode $\phi_n(x,y,t)$, à la moyenne conditionnelle. Ainsi la LSE peut être traitée comme une somme pondérée d'un nombre infini de modes POD.

La LSE permet de reproduire exactement les signaux aux points de référence. Ainsi quand deux ou plusieurs structures distinctives existent dans l'écoulement, la LSE conduit à une sous-estimation du niveau d'énergie aux autres positions et peut donner une représentation erronée des structures cohérentes. Si la LSE ne capture pas correctement la moyenne conditionnelle, l'estimation peut être améliorée. La LSE est alors étendue à la Quadratic Stochastic Estimation (QSE) (Adrian, 1979) en incluant le second terme dans le développement en série de Taylor. La minimisation de l'erreur en moyenne quadratique conduit à l'ensemble d'équations linéaires pour L_{ij}^Q and N_{ijk} :

$$\langle E_j E_k \rangle + L_{ij}^Q + \langle E_j E_r E_k \rangle N_{ijr} = \langle u_i E_k \rangle \quad (1.17)$$

$$\langle E_j E_k E_s \rangle + L_{ij}^Q + \langle E_j E_r E_k E_s \rangle N_{ijr} = \langle u_i E_k E_s \rangle \quad (1.18)$$

où L_{ij}^Q est en général différent de L_{ij} . La QSE a par exemple été utilisée par Murray and Ukeiley (2003) afin de reproduire la dynamique du champ de vitesse d'un écoulement de cavité à partir de mesures de vitesse par PIV et de mesures de pressions pariétales.

La POD permet la reconstruction dynamique des structures cohérentes extraites de l'écoulement mais requiert pour cela la mesure simultanée des signaux de vitesse en tous les points de l'espace et donc l'utilisation de nombreuses sondes. Afin de pallier ce problème, une méthode appelée technique complémentaire, qui combine la LSE et la POD, a

ainsi été développée par Bonnet et al. (1994) et a été appliquée avec succès en écoulement de couche de mélange plane turbulente et dans une configuration de jet axisymétrique. Une stratégie de contrôle actif de l'écoulement dans un divergent a été développée par Taylor and Glauser (2004). Le champ de vitesse et les vecteurs propres correspondants sont déterminés grâce à des mesures de types PIV. La LSE est ensuite effectuée à partir des signaux instantanés de pression mesurés en paroi, puis le champ de vitesse instationnaire correspondant aux premiers modes POD est reconstruit à partir de la dynamique de la pression en paroi du divergent.

Dans le cadre d'application de méthodes statiques d'estimation de signaux, on peut également citer l'extended POD (EPOD) (Borée, 2003) qui permet d'estimer le taux de corrélation entre un signal (pression pariétale, vitesse ..) et chaque mode POD. L'importance de chaque mode POD sur la partie corrélée du signal analysé est déterminée, ce qui permet d'évaluer l'impact des différents mécanismes en jeu sur la variable physique étudiée. L'estimation de la partie corrélée du signal est identique à une décomposition LSE (Taylor and Glauser, 2004).

2 Contrôle du modèle réduit POD-Galerkin

Il est désormais connu que le modèle réduit POD-Galerkin est un modèle non robuste et structurellement instable. La divergence du modèle réduit POD-Galerkin au cours du temps d'assimilation des observations (issues de simulations numériques ou expérimentales) est un problème largement mentionné dans la littérature (Rempfer, 2000), (Noack et al., 2003). Ce manque de robustesse engendre une mauvaise représentation de la dynamique du système initial et rend impossible l'utilisation de ce modèle pour des problèmes d'optimisation ou de contrôle optimal. Afin d'illustrer ce phénomène, l'exemple de référence proposé par Noack et al. (2003) est rappelé ci-dessous. Pour cela, le système dynamique quadratique suivant est considéré :

$$\begin{cases} u = \mu u - v - uw & (2.1) \\ v = \mu v + u - vw & (2.2) \\ w = -w + u^2 + v^2 & (2.3) \end{cases}$$

avec $\mu = 1/10$. Ce système admet dans le plan $w=\mu$ une solution périodique stable qui définit un cycle limite : $u = \sqrt{\mu} \cos(t)$, $v = \sqrt{\mu} \sin(t)$ et $w=\mu$. Les vecteur $\phi_1 = (1 \ 0 \ 0)^t$ et $\phi_2 = (0 \ 1 \ 0)^t$ forment une base POD dans \mathbb{R}^3 de l'état fluctuant $\tilde{u} = u - \bar{u}$ de cette solution observée sur une période, où \bar{u} est l'état moyen $(0 \ 0 \ \mu)^t$. En considérant la décomposition $u = \bar{u} + a_1\phi_1 + a_2\phi_2$ et le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^3 , la projection de Galerkin appliquée au système précédent conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -a_2 & (2.4) \\ \dot{a}_2 = a_1 & (2.5) \end{cases}$$

Une petite perturbation de ce système autonome, par exemple $\dot{a}_1 = \epsilon_1 a_1 - a_2$ et $\dot{a}_2 = \epsilon_2 a_2 + a_1$, peut conduire à des valeurs de solutions qui divergent très rapidement de la solution de référence. La trajectoire périodique précédente n'est alors plus stable. L'instabilité structurale des modèles POD-Galerkin mise en relief par l'exemple précédent semble être la cause la plus probable de l'imprécision du modèle réduit développé.

De manière générale, les origines du manque de robustesse du modèle réduit POD-Galerkin se manifestent à différents niveaux : sur les conditions initiales du modèle sur

lesquelles l'effet d'une perturbation de faible amplitude peut entraîner une divergence rapide de la solution du modèle. Mais également sous la forme d'erreurs numériques qui se propagent dans le modèle ou résulter de la troncature réalisée sur la base utilisée pour décomposer les variables du modèle.

Des méthodes de calibration des systèmes d'EDO (*Équations Différentielles Ordinaires*) issus de la méthodologie POD-Galerkin sont donc nécessaires pour quantifier leur impact (à court et long terme), mais également pour s'assurer d'une convergence de la dynamique propre de ces systèmes vers la dynamique temporelle de la POD issue des données expérimentales. Les différentes sources d'erreurs citées se combinent entre elles dans le cas général, c'est pourquoi les méthodes de stabilisation du modèle réduit proposées dans la littérature reposent sur la résolution d'un phénomène physique particulier. La majorité de ces approches se fonde sur un procédé de calibration a posteriori des coefficients du modèle réduit en utilisant une approche variationnelle. Cependant l'utilisation de méthodes stochastiques peut être envisagée. L'intérêt de l'utilisation d'approches stochastiques pour la stabilisation du modèle réduit est présenté à la fin de cette partie.

Une première approche utilisée est de considérer l'instabilité intrinsèque du modèle réduit comme résultante d'un manque de dissipation énergétique des coefficients du modèle réduit. Le faible nombre de modes POD retenus selon le critère énergétique pour construire le modèle réduit POD-Galerkin implique une troncature des échelles dissipatives de l'écoulement. Les petites échelles de l'écoulement qui correspondent aux modes POD les plus faibles énergétiquement sont alors négligées, ce qui entraîne un défaut de dissipation énergétique. Afin de prendre en compte l'influence des petites échelles de l'écoulement sur la stabilité des modèles réduits POD-Galerkin, de nombreuses approches basées sur l'ajout d'une viscosité artificielle au modèle réduit ont été étudiées afin de le rendre plus dissipatif. Les viscosités obtenues au final dépendent de la nature des données initiales. Aubry et al. (1988) ont introduit une viscosité empirique, dite viscosité de turbulence, afin de modéliser l'effet des échanges énergétiques entre les modes POD retenus et tronqués. Cazemier et al. (1998) propose une autre définition de cette viscosité empirique en y ajoutant une contrainte de conservation en moyenne de l'énergie véhiculée par le modèle réduit Karamanos and Karniadakis (2000) pour le long terme et Bergmann et al. (2005) considère des viscosités, tourbillonnaires comme coefficients instationnaires de correction sur les termes constants et linéaires du modèle réduit qui minimisent l'erreur de prédiction du modèle réduit POD-Galerkin. Pour pallier l'instabilité structurale du modèle réduit causée par la troncature de la base modale, l'ajout à la base POD tronquée de modes significatifs du point de vue de la dynamique générale de l'écoulement mais contenant des modes peu énergétiques semble améliorer la robustesse du modèle réduit (Noack et al., 2003).

La stabilité des modèles réduits POD-Galerkin dépend également de l'espace fonctionnel considéré pour définir le produit scalaire utilisé dans la construction de la base POD. Iollo (1997) considère un espace H^1 au lieu de l'espace L^2 ce qui permet d'utiliser les gradients spatiaux dans le produit scalaire et ainsi, une meilleure prise en compte des petites échelles de l'écoulement.

3 Méthode d'estimation de système dynamique : l'assimilation de données

L'assimilation de données est l'ensemble des techniques qui vont permettre d'identifier l'évolution de l'état d'un système au cours du temps en se basant à la fois sur sa connaissance théorique et sur ses observations expérimentales. L'état d'un système dynamique est défini par l'ensemble des variables nécessaires à sa description appelées variables d'état. Pour analyser et faire des prévisions à partir de l'état de ce système au cours du temps, deux modèles sont nécessaires : le modèle des équations du système qui décrit l'évolution du système en propageant l'information au cours du temps et le modèle des observations qui lie les observations expérimentales à l'état de ce système.

Soit X_k le vecteur d'état décrivant l'état du système à l'instant k . Le système d'équations gouvernant l'état du système au cours du temps peut être représenté sous la forme suivante :

$$X_k = F_k(X_{k-1})$$

où X_k est un vecteur de dimension n décrivant l'état réel du système à l'instant k et n est le nombre de variables du modèle. L'opérateur F_k de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n est l'opérateur dynamique de transition entre deux instants k et $k + 1$. La relation qui relie les variables du modèle aux observations s'écrit sous la forme :

$$Y_k = H_k(X_{k-1})$$

où Y_k est un vecteur de dimension p qui contient les mesures effectuées au temps k et H_k est l'opérateur d'observations de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p qui relie les équations d'état aux équations d'observations. Cependant il est nécessaire de tenir compte des différentes sources d'erreurs sur le modèle : les erreurs sur les observations, les erreurs dues à la discrétisation du modèle, ou encore les erreurs sur les conditions initiales. C'est pourquoi les incertitudes sur les différentes sources d'erreurs sont modélisées en ajoutant une partie stochastique au modèle déterministe précédent. Le bruit blanc gaussien est le plus utilisé à cet effet les équations d'état et d'observation associées à l'espace d'état sont alors données par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = f_k(X_k, W_k) & (3.1) \\ Y_k = h_k(X_k) + V_k & (3.2) \end{cases}$$

où W_k et V_k sont des bruits blancs indépendants de dimension n et p et de matrice de covariance R_k et Q_k respectivement. On distinguera deux approches pour résoudre le problème de l'estimation de l'état du modèle suivant la manière dont les observations sont utilisées. Si les observations sont assimilées à chaque instant où elles sont disponibles, on parlera d'assimilation séquentielle, tandis que, si les observations sont assimilées de façon globale sur un intervalle de temps, on parlera d'assimilation variationnelle. On distinguera alors deux catégories de méthodes : l'approche stochastique basée sur la théorie de l'estimation statistique et l'approche variationnelle basée sur la théorie du contrôle optimal. D'autres méthodes d'assimilation classiques existent : schéma d'analyse de Cressman, méthodes de corrections successives, interpolation optimale mais ne sont pas présentées dans cette partie. Pour le détail de ces méthodes, on pourra consulter Bouttier and Courtier (1999), Daget (2007), Daley (1991) Kalnay (2003). Nous présentons ici les principales méthodes liées aux approches séquentielle et variationnelle de l'assimilation de données.

3.1 L'assimilation séquentielle

De nombreux problèmes pratiques relèvent de l'assimilation séquentielle de données, notamment toutes les situations pour lesquelles il est difficile, voire impossible, de mesurer l'état d'un système et où il faut alors se contenter de mesurer des quantités auxiliaires. L'estimation d'un système dynamique au cours du temps en fonction de données expérimentales et éventuellement incomplètes est un problème central dans de nombreuses applications. Parmi celles-ci on peut citer les applications en traitement du signal et image : restauration de signal audio (Godsill and Rayner, 1998), séparation de sources (Andrieu and Godsill, 2000), traitement de la parole (Vermaak et al., 2002), suivi de cible (Bar-Shalom et al., 2002), (Bréhard and Le Cadre, 2006), suivi d'entité (Arnaud and Cernuschi-Frias, 2005), (Pérez et al., 2002). Mais également des applications pour les modèles biologiques : propagation de maladies infectieuses (Hethcote, 2000), modèles proies-prédateurs (Murray, 1993), mouvement de cellules, taxie (Ionied et al., 2003). Les méthodes d'assimilation séquentielle sont également utilisées en sciences environnementales : météorologie (Houtekamer, 2001), (Houtekamer et al., 2005a), en océanographie (Evensen, 1994), (Bertino et al., 2003a). On trouve également des applications en mathématiques appliquées à la finance (Casarin, 2004).

3.1.1 Principe de l'assimilation séquentielle

Le principe de l'assimilation séquentielle est d'estimer successivement l'état d'un système au cours du temps en comparant les sorties d'un modèle paramétrique et les mesures expérimentales afin d'estimer les paramètres du modèle. La première étape est l'étape de prédiction qui consiste à estimer l'état du système à l'instant $k - 1$ et d'utiliser ensuite cette estimation pour construire une estimation a priori de l'état à l'instant k . Cette étape de prédiction est suivie d'une étape de correction où l'estimation a priori de l'état à l'instant k est calibrée avec l'observation disponible y_k à l'instant k pour produire une estimation a posteriori de l'état du système à cet instant.

Cette procédure en deux étapes est poursuivie itérativement dans l'intervalle de temps d'assimilation. L'objectif est de déterminer un estimateur qui combine les données observées et le modèle dynamique afin d'estimer le plus précisément possible l'état du système à chaque instant. Cet estimateur est issu d'une approche déterministe où l'estimateur est issu de la théorie de l'estimation bayésienne. Les équations analytiques de l'estimation s'obtiennent facilement et sont appelées filtre bayésien optimal. Il n'est cependant pas possible de les résoudre analytiquement, excepté dans le cas du modèle linéaire gaussien où elles sont équivalentes au filtre de Kalman linéaire.

3.1.2 Filtre de Kalman optimal

Le filtre de Kalman (Kalman and Bucy, 1961) est une méthode d'assimilation séquentielle de données qui permet d'estimer l'état le plus probable d'un système dynamique linéaire à partir des observations bruitées passées et présentes. Il se déduit de la formule de Bayes par maximum de vraisemblance ou par une estimation du minimum de la variance (cf. Annexe B). Son utilisation s'appuie sur les quatre hypothèses suivantes : le modèle dynamique doit être linéaire et assimilé à une chaîne de Markov cachée, les variables d'état doivent suivre une distribution de probabilité Gaussienne et les erreurs du modèle de mesure doivent être indépendantes et décorréélées dans le temps. Sous ces hypothèses, le filtre de Kalman est équivalent à l'estimateur BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*)

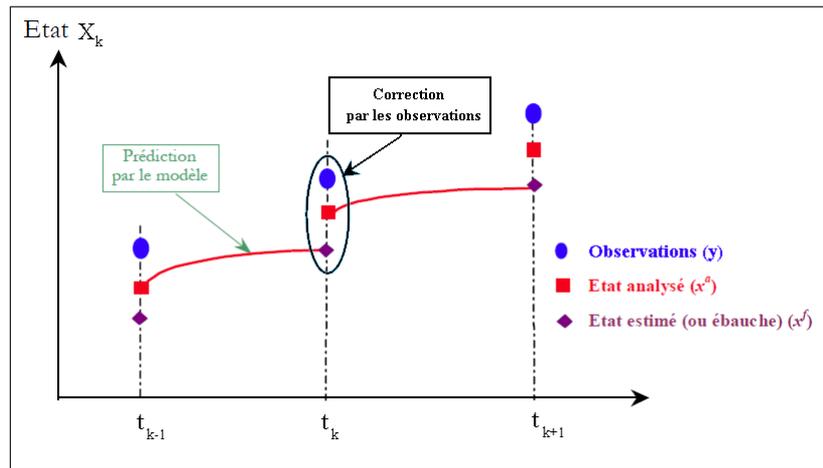


FIGURE 1.1 – Schématisation de l'approche séquentielle

Tran (2009) et fournit alors une estimation optimale.

Son application s'opère en deux étapes appliquées à deux instants successifs : la prévision (ou ébauche) par le modèle et la correction de la prévision (ou analyse) à l'aide de la nouvelle observation disponible. Ces deux étapes permettent de déterminer respectivement la matrice des covariances des erreurs de prévision P_k^f (f pour *forecast*) correspondant à la propagation des erreurs d'analyse précédente via les équations du système dynamique à laquelle on ajoute la matrice Q_k et la matrice de covariance des erreurs d'analyse P_k^a (a pour *analysed*) à laquelle on ajoute la matrice R_k . La matrice qui minimise la variance de l'erreur d'analyse est la matrice K_k appelée gain de Kalman.

Il n'est cependant pas adapté pour des applications de grandes dimensions car la dimension de l'état du système conduit à des calculs coûteux et la dimension des matrices de covariance d'erreur et de gain interdit leur stockage. Le coût de calcul devient alors une contrainte très forte sur le choix de la méthode d'assimilation. Le principe de l'assimilation via un filtre de Kalman est représenté via la figure 1.1

3.1.3 Filtres de Kalman sous-optimaux

Il existe néanmoins des approximations qui permettent de réduire notablement les coûts de calculs. Pour le filtre de Kalman, il existe une série de filtres dits réduits (SEEK, SEIK, EnKF...). Le filtre SEEK (Singular Evolutive Extended Kalman) a été initié par Cane et al. (1996) puis généralisé aux systèmes non linéaires par Pham et al. (1998). L'approche utilisée dans le filtre SEEK consiste à appliquer le filtre non plus dans l'espace entier mais plutôt sur une base réduite issue d'une analyse sur des composantes principales multi-variées (EOFs) qui sont calculées à partir d'un ensemble de champs du modèle échantillonnant une période spécifique. Les corrections sont ainsi faites suivant les directions tangentes à l'attracteur du modèle, où s'observe systématiquement la genèse des erreurs Brasseur et al. (2001) ce qui réduit de plus sensiblement ses coûts d'implémentation. Si l'on considère l'espace entier, le filtre SEEK est un filtre sous optimal, mais représente néanmoins un bon compromis pour la réduction des coûts de calcul.

La deuxième difficulté liée au filtre de Kalman est le caractère non linéaire des équations d'états qui dégradent son fonctionnement. Dans le cas de systèmes non linéaires et/ou non gaussiens, les solutions obtenues par le filtre de Kalman ne sont plus optimales. Ceci est dû au fait que le filtre de Kalman ne propage sans perte que les deux premiers

moments, moyenne et covariance, qui ne suffisent alors plus à caractériser complètement une distribution non gaussienne. La linéarisation du modèle ou l'utilisation d'un estimateur statistique d'ensemble pour pouvoir faire évoluer la matrice de covariances de l'erreur de filtrage font que cette dernière n'est qu'une approximation de la vraie matrice de covariance. L'utilisation du filtre de Kalman nécessite également des approximations portant sur la covariance de l'erreur d'estimation. Ces erreurs se propagent avec le temps et provoquent parfois la divergence de la procédure d'assimilation. Cette limitation conduit à l'utilisation des formes dégradées du filtre de Kalman tel que le Kalman étendu (EKF) dans lequel on linéarise les équations au voisinage de l'estimation courante de l'état. Le filtre EKF a été utilisé avec succès pour un modèle non linéaire de circulation océanique (Budgell, 1986). Bien que la linéarisation fasse perdre au filtre de Kalman son caractère optimal, son utilisation a montré des résultats satisfaisants lorsqu'il est appliqué à des modèles faiblement non linéaires Budgell (1986). Cependant ce filtre peut être instable et parfois diverger complètement en présence de fortes non linéarités (Gauthier et al., 1993).

Pour lever ce problème, un filtre appelé filtre de Kalman d'ensemble a été proposé par Evensen (1992), Evensen (1994). Il utilise la méthode de type Monte-Carlo pour estimer l'évolution de la matrice de covariance de l'état par un nuage d'états centrés autour de l'état courant, ce qui évite la linéarisation du modèle. Le filtre de Kalman d'Ensemble sera abordé plus en détails le chapitre 3.

3.2 L'assimilation variationnelle

Les méthodes d'assimilation variationnelles ont été introduites par Sasaki en 1955 et sont basées sur la théorie du contrôle optimal. Elles redéfinissent le problème du contrôle par un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes dont le but est de minimiser à l'aide d'une fonction coût J la somme d'une distance aux observations sur un intervalle de temps donné et d'une distance d'une estimation a priori de l'état initial de la trajectoire optimale. Ces méthodes peuvent être répertoriées en deux catégories selon la prise en compte des erreurs du modèle. Si le modèle est supposé parfait, c'est-à-dire qu'il ne tient pas compte des erreurs du modèle, on parlera alors d'assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte. On parlera d'assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible lorsque les erreurs du modèle sont prises en compte dans la procédure d'assimilation de données.

3.2.1 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte

Les méthodes d'assimilation variationnelle sous contrainte forte peuvent être répertoriées en deux catégories : l'assimilation variationnelle tridimensionnelle (3D-Var) et l'assimilation variationnelle quadridimensionnelle (4D-Var). Pour une revue détaillée de ces méthodes, on pourra consulter Daget (2007).

• Assimilation variationnelle tridimensionnelle 3D-Var

On suppose qu'on dispose d'une information $Y_k = y_k$ de l'état du système réel X_k à un instant k . Sachant une prédiction $X_k^f = x_k^f$ de covariance d'erreur de prédiction P_k^f la méthode 3D-Var consiste à minimiser une fonction de coût J sur l'espace d'état indépendamment du temps k :

$$J(x) = (x_k - x_k^f)^t (P_k)^{-1} (x_k - x_k^f) + (y_k - H_k x_k)^t (R_k)^{-1} (y_k - H_k x_k) \quad (3.3)$$

Pour obtenir tous les états optimaux successifs du système, il suffit alors d'intégrer le modèle en partant de la condition initiale optimale. L'opérateur des observations H_k est supposé linéaire donc la fonction $J(x)$ est une forme quadratique en fonction de x , ce qui implique l'unicité de la solution au problème de minimisation. Elle est optimale pour un modèle linéaire car elle coïncide avec celle de l'estimateur BLUE sans avoir besoin de calculer le gain K_k . Si aucune information n'est disponible à l'instant k , alors les observations locales sont interpolées. Comme en pratique les instants d'observations peuvent être différents des instants de prédiction ou d'estimations, la méthode d'assimilation variationnelle quadri-dimensionnelle 4D-Var est utilisée car la fonctionnelle à minimiser est définie sur l'ensemble de l'intervalle d'assimilation où toutes les observations contenues dans cet intervalle sont utilisées.

• Assimilation variationnelle quadridimensionnelle 4D-Var

Sachant une condition initiale du système α_0 et une séquence d'observation $Y_{1:k} = y_{1:k}$ dans l'intervalle de temps d'assimilation $[0, T]$ la méthode 4D-Var consiste à minimiser la fonction coût J sur l'espace d'état en tenant compte de la dimension temporelle :

$$J(x_0) = (x_0 - \alpha_0)^t (Q_0)^{-1} (x_0 - \alpha_0) + \sum_{k=1}^T (y_k - H_k x_k)^t (R_k)^{-1} (y_k - H_k x_k) \quad (3.4)$$

sous la contrainte de l'équation (1.1) du système dynamique. La condition initiale optimale x_0 est obtenue en résolvant l'équation :

$$\nabla J(\alpha_0) = 0 \quad (3.5)$$

Cette formulation est équivalente à celle du filtre de Kalman à l'instant final de l'intervalle d'assimilation sans calcul de gain ni propagations explicites de matrice de covariance. Si la fonction f_k est non linéaire, alors la fonction coût J est non linéaire en fonction de x_0 . La minimisation peut alors être facilitée en linéarisant la fonction f_k afin d'obtenir la fonction $J(x)$ de la forme quadratique par rapport à x_0 . Des méthodes comme la descente du gradient ou le gradient conjugué peuvent ensuite être utilisées mais la dimension du second terme rend l'évaluation de $\nabla J(x_0)$ plus compliquée. La minimisation peut être résolue en utilisant une méthode plus efficace appelée "méthode des représentants" (Bennett et al., 1996). L'évaluation des équations "forward" et "backward" de cette méthode implique des coûts importants en calcul. Pour un système dynamique non linéaire, la minimisation devient plus difficile et le minimum de la fonction coût J est approché par une méthode de descente du gradient.

Si l'opérateur d'observation H_k est linéaire, alors J est une forme quadratique en fonction de x , ce qui implique l'unicité de la solution. Si l'opérateur H_k est non linéaire, alors on utilise son linéaire tangent. De plus dans le cadre d'un modèle supposé parfait et en partant des mêmes données initiales, à la fin de la période d'assimilation $[0, T]$ l'analyse 4D-Var est égale à celle du filtre de Kalman au même instant. L'assimilation par la méthode 4D-Var est schématisée sur la figure 1.2

3.2.2 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible

Dans sa formulation générale, l'approche variationnelle peut tenir compte des erreurs du modèle. On parlera alors du problème d'assimilation variationnelle avec contrainte

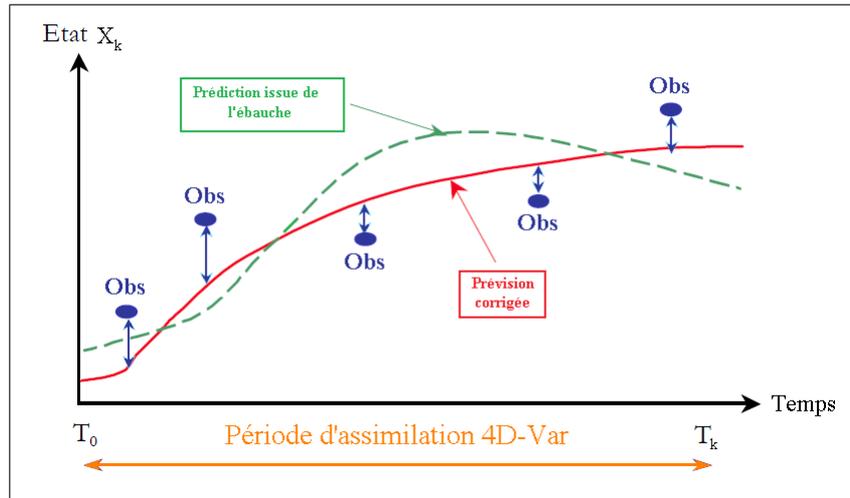


FIGURE 1.2 – Schématisation de l'approche variationnelle

faible et un terme d'erreur modèle s'ajoute à la fonction coût J à minimiser, dont les arguments de variables de contrôle sont complétés par les valeurs d'erreur. La fonction coût à minimiser est alors :

$$\begin{aligned}
 J(X(t_0), \dots, X(t_T), W(t_1), \dots, W(t_T)) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^T (Y_k - H_k X(t_k))^t R_k^{-1} (Y_k - H_k X(t_k)) \\
 &+ \frac{1}{2} (X(t_0) - x^f(t_0))^t (P_f(t_0))^{-1} (X(t_0) - x^f(t_0)) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^T (W(t_k))^t Q(t_k) W(t_k) \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

sous la contrainte des équations d'état du système. La complexité de prise en compte de l'erreur du modèle reste cependant l'un des points critiques de l'assimilation variationnelle car la dimension du vecteur de contrôle $(X(t_0), \dots, X(t_T), W(t_1), \dots, W(t_T))$ est alors trop importante.

3.3 Discussion

Contrairement aux méthodes séquentielles, les méthodes variationnelles n'assimilent pas les observations au fur et à mesure mais en une seule fois, en opérant globalement sur l'ensemble des observations disponibles dans la fenêtre d'assimilation pour réaliser la minimisation. Ainsi, le vecteur d'innovation $Y_k - H_k X(t_k)$ est calculé à différents instants grâce au modèle et permet de calculer l'incrément de correction de l'état initial. L'état optimal obtenu dépend donc de toutes les observations postérieures disponibles dans l'intervalle de temps étudié. Les meilleurs états du système sont obtenus en intégrant le modèle à partir de l'état initial optimal. Cette approche permet ainsi de calculer la trajectoire optimale du système et non plus la meilleure estimation de l'état pour une observation donnée.

Sous certaines hypothèses, les méthodes variationnelles fournissent des solutions équivalentes aux autres méthodes. La méthode 3D-Var donne une solution équivalente à l'estimateur BLUE sans évaluer le gain du filtre de Kalman qui requiert des calculs coûteux. Au delà de ces équivalences dans le cadre linéaire, l'extension au cadre non linéaire des

méthodes variationnelles est possible sans développement supplémentaire contrairement au BLUE ou au filtre de Kalman classique. Les performances des méthodes variationnelles, ainsi que des méthodes stochastiques, vont dépendre des données utilisées ainsi que du modèle étudié. Le filtre de Kalman et sa version étendue ainsi que le 4D-Var ne sont en général pas adaptés à l'assimilation de données sur des systèmes de grande taille et non linéaires car le coût de calcul devient trop important. Pour le filtre de Kalman, des filtres sous-optimaux dit de *rang réduit* existent tel que les filtres SEEK, SEIK ou EnKF) et permettent une réduction des coûts de calcul. Les méthodes variationnelles sont très présentes en météorologie, elles ont cependant certains inconvénients vis-à-vis des méthodes stochastiques :

- Les méthodes 3D-var et 4D-var reposent sur l'hypothèse d'un système dynamique parfait, ce qui permet de réduire la dimension du problème d'optimisation. Cette hypothèse est cependant rarement satisfaite en pratique. Comme le filtre de Kalman, l'assimilation 4D-Var sous contrainte dynamique faible permet de prendre en compte l'erreur du modèle mais le coût de calcul augmente également en conséquence.
- La détermination de l'adjoint devient vite complexe et une telle démarche requiert l'intégration du modèle direct ainsi que du modèle adjoint. L'écriture d'un code pour l'adjoint rend l'implémentation de ces méthodes peu modulaires à cause de la complexité des modèles non linéaires.
- La décorrélation temporelle des processus nécessite une méthode de découpage séquentielle.
- Si le modèle ou l'opérateur d'observation sont non linéaires, la fonction coût a une forme complexe et peut posséder des minima locaux dont la pertinence est difficilement estimée.
- Enfin, l'estimation étant déterministe, il est difficile de tirer un indice de confiance ou une probabilité a posteriori sur la qualité de l'analyse.

Dans le cadre de la calibration du modèle réduit POD-Galerkin, des méthodes stochastiques issues de l'assimilation séquentielle de données ont ici été retenues. L'inférence bayésienne sur le modèle réduit POD-Galerkin fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Inférence bayésienne pour le modèle réduit POD-Galerkin

Sommaire

1	Introduction	24
2	Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres	24
2.1	Définition générale	25
2.2	Propriétés de la POD	26
2.3	Optimalité de la POD	27
2.4	Troncature de la base POD	28
2.5	Cas discrétisé de dimension finie	29
2.6	Lien avec la Décomposition aux Valeurs Singulières et l'Analyse en Composantes Principales	30
2.7	Approche directe et snapshot POD	32
2.7.1	Approche directe	32
2.7.2	Approche snapshot POD	32
2.8	Choix du produit scalaire	33
2.9	Dépendance de la POD et choix des réalisations	33
3	Modélisation d'ordre réduit d'écoulements	34
3.1	Introduction	34
3.2	Construction du modèle réduit POD-Galerkin	34
3.3	Projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles	35
3.4	Traitement du terme de pression	36
3.5	Identification des coefficients d'un modèle d'ordre réduit par identification polynomiale	37
4	Inférence bayésienne dans les modèles de Markov cachés	38
4.1	Modèle à espace d'état	39
4.2	Inférence bayésienne	40
4.3	Filtrage bayésien optimal	41
4.3.1	Étape de prédiction	42
4.3.2	Étape de correction	42
5	Résolution du filtrage optimal	43
5.1	Filtre de Kalman	43

5.2	Extensions du filtre de Kalman	45
5.2.1	Filtre de Kalman étendu	46
5.2.2	Filtre de Kalman de rang réduit : SEEK et SEIK	47
5.3	Méthodes séquentielles de Monte-Carlo	47
5.3.1	Principe de Monte-Carlo	47
5.3.2	Filtre particulière	48
5.3.3	Filtre de Kalman d'ensemble	49
5.3.4	Filtre de Kalman d'ensemble Square Root	51
6	Estimation des paramètres dans un modèle à espace d'état	53
6.1	Principe du maximum de vraisemblance	54
6.1.1	Le lisseur de Kalman linéaire	55
6.2	Algorithme EM : Étapes d'Expectation et de Maximisation	57
6.2.1	Etape E	57
6.2.2	Etape M	57
6.2.3	Cas de données manquantes	58
6.3	Propriétés de l'algorithme EM	60
7	Conclusion	60

1 Introduction

Ce chapitre, divisé en deux parties, est consacré à l'ensemble des modèles et méthodes utilisés dans le cadre de cette thèse. La première partie est consacrée à la description théorique ainsi qu'à la mise en œuvre pratique de la décomposition aux valeurs propres. Dans la première partie de cette section est tout d'abord détaillé le principe de base de la POD. Ses principales propriétés sont ensuite données ainsi que la méthode de construction de la base de projection à partir des modes POD. Les liens entre la POD et les méthodes SVD (*Singular Value Decomposition*) et ACP (*Analyse en Composantes Principales*) sont ensuite rappelés. Le traitement du terme de pression ainsi que l'importance de la définition du produit scalaire y sont également évoqués. La seconde partie de cette section est consacrée à la projection de Galerkin et à la construction du modèle réduit POD-Galerkin.

L'inférence bayésienne dans les modèles de Markov cachés fait l'objet de la seconde partie. Le modèle générique statistique composé d'un modèle de Markov observé par une série d'observations y est décrit. La règle de Bayes y est également rappelée. Appliquée à ce modèle statistique générique, elle permet d'obtenir des équations de récurrence à partir desquelles est réalisée l'inférence sur le vecteur d'état d'intérêt caché conditionnellement aux observations. Sont alors présentés les algorithmes, déterministes et non déterministes, qui permettent de réaliser l'inférence dans ce cadre bayésien. À cet effet sont données les équations du filtre de Kalman linéaire, du lisseur de Kalman linéaire et du filtre EnKF. Basé sur le filtre de Kalman linéaire et le lisseur de Kalman linéaire, l'algorithme EM (*Expectation Maximisation*) permet de réaliser l'inférence bayésienne en prenant en compte des observations manquantes. Son principe, son algorithme et ses principales propriétés sont également donnés.

2 Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) est une méthode d'analyse de données qui permet d'approximer des systèmes physiques de dimension élevée par un autre système de dimension plus réduite. Elle a été introduite en mécanique des fluides par Lumley (1967) afin d'identifier les structures cohérentes au sein d'écoulements turbulents incompressibles et de construire ensuite un modèle réduit capable d'approximer la dynamique de l'écoulement. Son principe est utilisé depuis dans de nombreux domaines comme la reconnaissance de formes, la compression d'image ou la prévision météorologique et est connu sous plusieurs appellations : décomposition de Karhunen-Loève, analyse en composantes principales, fonctions propres de Sobolev ou décomposition en fonctions empiriques. Initialement utilisée comme un outil de post-traitement des données, la POD a été largement utilisée depuis pour développer des modèles physiques simplifiés d'ordre réduit afin d'approximer les équations de Navier-Stokes pour la reconstruction et le contrôle d'écoulements.

La première utilisation de la POD pour le contrôle d'écoulements turbulents a été réalisée par Aubry (1991) puis ensuite par Ukeiley et al. (2001). La nécessité de stabiliser le modèle d'ordre réduit est alors vite apparue (Rempfer, 2000). De nombreux travaux portant sur l'amélioration de la stabilité de modèles d'ordre réduit pour les écoulements d'un fluide incompressible turbulent ont été alors menés : Noack et al. (2003) et Sirisup and Karniadakis (2004) pour l'étude de l'écoulement dans le sillage d'un cylindre de section circulaire, ou de section carrée (Cordier et al., 2009), (Couplet, 2005), (Galletti

et al., 2004), (Kalb and Deane, 2007).

Les modèles d'ordre réduit pour le contrôle ont été traités par Ukeiley et al. (2001). Le contrôle d'écoulements utilisant les régions de confiance a été employé par Fahl (2000) et Bergmann and Cordier (2008) ont réalisé le contrôle optimal du sillage d'un cylindre circulaire en utilisant une région de confiance. Luchtenberg et al. (2009) l'a fait pour une configuration portante. On trouvera de nombreux exemples de ces applications de la POD en tant que méthode de traitement de données en mécanique des fluides dans Cordier et al. (2008).

La POD est une méthode linéaire qui consiste à déterminer une base orthogonale et ordonnée qui va servir à approximer de manière optimale des données, appelées généralement clichés (ou snapshots), connues sur un ensemble discret ou continu de grande dimension. Les clichés sont par exemple les solutions d'un modèle réduit ou des mesures expérimentales obtenues à différents instants. Cette base va ensuite permettre de créer et d'identifier les degrés de liberté les plus représentatifs de ces données dans un sous-espace de dimension faible et de construire un modèle de dimension réduite grâce à la projection de Galerkin. La projection de Galerkin sur la base des modes POD s'applique à des systèmes dynamiques non linéaires et permet dans le cas de fluides incompressibles d'assimiler les équations de Navier-Stokes à un système d'équations différentielles ordinaires dont le second membre est polynomial et quadratique. Les modes issus de la POD correspondent alors aux structures d'énergie cinétique maximale.

Cependant, la POD est à l'origine une méthode d'analyse de données, c'est pourquoi la dépendance des modes POD vis-à-vis des clichés qui ont servi à construire la base de projection peut remettre en cause la capacité du modèle réduit à reproduire de manière satisfaisante les caractéristiques topologiques et physiques de l'écoulement suivant les paramètres de l'écoulement considéré. Des techniques telles que celles appliquées dans Graham et al. (1998) ou Fahl (2000) peuvent alors être envisagées pour adapter la POD.

2.1 Définition générale

Afin de montrer que ce problème d'optimisation est équivalent à un problème aux valeurs propres on considère N réalisations ($N > 0$), ou *clichés* de u et on définit l'opérateur linéaire K par :

$$K : H(D) \longrightarrow H(D) \quad (2.1)$$

$$\Psi \longmapsto K(\Psi(\mathbf{X})) = (C(\mathbf{X},.), \Psi) \quad (2.2)$$

où $C(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \langle u(\mathbf{X})u(\mathbf{X}') \rangle$ est le tenseur symétrique des corrélations spatio-temporelles en deux points. L'opérateur de moyenne d'ensemble et le produit scalaire sur $H(D)$ commutent, l'opérateur K vérifie donc les propriétés suivantes :

$$(K\Phi, \Psi) = (\Phi, K\Psi) \quad \text{et} \quad K(\Phi, \Phi) \geq 0 \quad \forall \Phi \in H(\Omega) \quad (2.3)$$

L'opérateur K est symétrique et positif. D'après la théorie spectrale pour les opérateurs de Hilbert-Schmidt (Riesz and Nagy, 1955), l'opérateur K admet donc au plus une infinité dénombrable de valeurs propres réelles positives ou nulles que l'on peut classer par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\infty \geq 0 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty \quad (2.4)$$

Les fonctions propres de K sont orthogonales et choisies orthonormées. L'opérateur K permet ainsi de reformuler sous la forme suivante le problème de maximisation :

$$\text{Trouver } \Psi \in H^* \quad \text{tel que} \quad \frac{(K\Psi, \Psi)}{(\Psi, \Psi)} = \max_{\Psi \in H^*} \frac{(K\Phi, \Phi)}{(\Phi, \Phi)} \quad (2.5)$$

Soit Φ une solution de 2.5 et $\Psi \in H^*$ quelconque. Soit la fonction $F_\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F_\Phi(\varepsilon) = \frac{(K(\Psi + \varepsilon\Phi), \Psi + \varepsilon\Phi)}{(\Psi + \varepsilon\Phi, \Psi + \varepsilon\Phi)} \quad (2.6)$$

On a par définition, $F_\Phi(\varepsilon) \leq F_\Phi(0)$ donc $F'_\Phi(0) = 0$, d'où la relation suivante :

$$(\Psi, \Phi) = \frac{(K\Psi, \Psi)}{(\Psi, \Psi)} (\Psi, \Phi)$$

Cette relation est valable pour toute fonction $\Phi \in H^*$ et aussi pour $\Phi = 0$.

En posant $\lambda = \frac{(K\Psi, \Psi)}{(\Psi, \Psi)}$ le mode Ψ est alors solution de :

$$K\Psi = \lambda\Psi \quad (2.7)$$

Le problème d'optimisation est donc bien équivalent à un problème aux valeurs propres. Réciproquement, tout vecteur propre Ψ associé à la plus grande valeur propre λ de K satisfait la relation (2.11). Les modes POD considérés comme les fonctions propres de l'opérateur K associées aux N_{POD} plus grandes valeurs propres minimisent donc l'erreur de représentation du processus aléatoire u projeté sur une base réduite à N_{POD} dimensions.

2.2 Propriétés de la POD

La POD est une approximation de la variable aléatoire u par une combinaison linéaire des fonctions propres de l'opérateur K associées à ses plus grandes valeurs propres :

$$u(\mathbf{X}) \approx \sum_{i=1}^{N_{POD}} a_i \Phi_i(\mathbf{X}) \quad (2.8)$$

Les modes POD sont choisis orthonormés tels que :

$$(\Phi_i, \Phi_j) = \delta_{ij} \quad (2.9)$$

Les coefficients de projection a_i de l'approximation sont définis par :

$$a_i = (u, \Phi_i) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.10)$$

Chaque réalisation de u considérée dans la moyenne d'ensemble peut être décrite exactement dans la base formée des fonctions propres $\Phi_{i \geq 1}$ Holmes et al. (1996) :

$$u(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i(\mathbf{X}) \quad (2.11)$$

Le tenseur des corrélations en deux points s'exprime également à l'aide des fonctions propres de l'opérateur K :

$$C(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i(\mathbf{X}) \Phi_i(\mathbf{X}') \quad (2.12)$$

Les modes POD sont orthonormés, donc les coefficients de projection a_i vérifient la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle &= \langle (u, \Phi_i)(u, \Phi_j) \rangle \\ \langle a_i a_j \rangle &= \left\langle \int_H u(\mathbf{X}) \Phi_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \int_H u(\mathbf{X}') \Phi_j(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' \right\rangle \\ \langle a_i a_j \rangle &= \int_H \int_H \langle u(\mathbf{X}) u(\mathbf{X}') \rangle \Phi_i(\mathbf{X}') \Phi_j(\mathbf{X}) d\mathbf{X} d\mathbf{X}' \\ \langle a_i a_j \rangle &= \int_H K \Phi_i(\mathbf{X}') \Phi_j(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' \\ \langle a_i a_j \rangle &= (K \Phi_i, \Phi_j) \\ \langle a_i a_j \rangle &= \lambda_i (\Phi_i, \Phi_j) \\ \langle a_i a_j \rangle &= \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

Les coefficients de projection du processus aléatoire u sur les modes POD sont donc décorrélés.

2.3 Optimalité de la POD

L'optimalité de la base POD $\{\Phi_i\}$ pour la représentation des clichés de u sur un sous-espace de dimension N_{POD} est donnée par l'inégalité suivante :

$$\left\langle \left\| u - \sum_{i=1}^{N_{\text{POD}}} (u, \Phi_i) \Phi_i(\mathbf{X}) \right\|^2 \right\rangle \leq \left\langle \left\| u - \sum_{i=1}^{N_{\text{POD}}} (u, \Psi_i) \Psi_i(\mathbf{X}) \right\|^2 \right\rangle \quad (2.13)$$

pour toute base orthonormée $\{\Psi_i\}$.

En posant $b_i = (u, \Psi_i)$ cette propriété est équivalente à celle-ci :

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{POD}}} \langle a_i^2 \rangle \geq \sum_{i=1}^{N_{\text{POD}}} \langle b_i^2 \rangle \quad (2.14)$$

La relation $\langle a_i a_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$ montre ainsi que les valeurs propres λ_i les plus grandes maximisent en moyenne la projection des clichés de u sur les modes Φ_i . Autrement dit, elles minimisent l'erreur de représentation du processus aléatoire u projeté sur la base réduite à N_{POD} dimensions.

Les valeurs propres $\lambda_i = \langle a_i^2 \rangle$ correspondent à l'énergie cinétique moyenne capturée par le i ème mode POD au sens de la norme induite de l'espace fonctionnel $H(\Omega)$. Elles

donnent une norme de la projection moyenne des clichés sur les modes POD. On montre ainsi que :

$$\int_H C(\mathbf{X}, \mathbf{X}) d\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = E \quad (2.15)$$

où E désigne l'énergie cinétique totale du système. La somme des valeurs propres représente l'énergie cinétique totale du système. L'efficacité d'une base POD $\{\Phi_i\}$ est donc quantifiée par les valeurs propres λ_i . Les modes POD associés aux valeurs propres les plus grandes sont par conséquent les plus énergétiques et les plus à même de reproduire la réponse du système et donc la dynamique du processus u .

2.4 Troncature de la base POD

L'objectif est de construire à l'aide de la base des modes POD un modèle réduit à faible nombre de degrés de liberté et assurant le maximum de représentativité de la dynamique du processus considéré. C'est pourquoi en pratique la base des modes POD est tronquée pour ne conserver que les premiers modes POD associés aux valeurs propres les plus grandes. La décomposition POD n'est alors plus exacte et il faut définir un indicateur d'erreur afin de pouvoir estimer l'erreur de troncature. Le choix du critère de troncature de la base POD est un point délicat et constitue encore une des questions ouvertes au sujet de la POD. Deux critères sont généralement utilisés :

- L'erreur moyenne de représentation $E(N_{POD})$ définie par :

$$E(N_{POD}) = \langle \|u - \sum_{i=1}^{N_{POD}} (u, \Phi_i) \Phi_i(\mathbf{X})\|^2 \rangle \quad (2.16)$$

- Le contenu informationnel relatif $RIC(N_{POD})$ de la base POD défini par :

$$RIC(N_{POD}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{POD}} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i} \quad (2.17)$$

Le second critère est celui le plus utilisé dans la littérature. Il permet de déterminer un indice de troncature de la base POD basé sur le nombre de modes POD pour lequel l'énergie captée représente presque la totalité de l'énergie contenue dans le système. Or, en pratique, le nombre de snapshots utilisés pour constituer la base POD est fini ainsi que le nombre d'éléments propres de K . Les critères de troncature impliquent donc un choix arbitraire de nombres de valeurs propres qui conduisent à sélectionner dans la base POD un nombre plus ou moins important de fonctions propres. Cependant, la détermination d'une base composée des N_{POD} modes associés aux valeurs propres les plus grandes n'est pas nécessairement la plus judicieuse. Des modes de plus faible énergie correspondant à l'évolution lente de l'écoulement moyen peuvent être essentiels pour une caractérisation rigoureuse de la dynamique du système. De plus, l'erreur de reconstruction du modèle réduit peut être diminuée en choisissant des modes POD associés à des valeurs propres

plus petites (Henri and Yvon, 2005). Une autre approche de sélection des modes POD consiste à ne considérer que la dynamique prédominante du système physique et de ne sélectionner en conséquence que les modes les plus représentatifs qualitativement de cette dynamique.

2.5 Cas discrétisé de dimension finie

Pour le traitement de données expérimentales ou numériques, la POD est en pratique mise en oeuvre dans des espaces discrets de dimension finie. Dans ce contexte, l'ensemble des données $\{u^n\}_{n=1,\dots,N}$ à approximer par la POD peuvent être mis sous la forme matricielle suivante :

$$U = \begin{pmatrix} u^1(x_1, y_1, t_1) & u^2(x_1, y_1, t_1) & \dots & u^N(x_1, y_1, t_1) \\ u^1(x_2, y_2, t_2) & u^2(x_2, y_2, t_2) & \dots & u^N(x_2, y_2, t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^1(x_n, y_n, t_n) & u^2(x_n, y_n, t_n) & \dots & u^N(x_n, y_n, t_n) \end{pmatrix}$$

où n est le nombre de point de discrétisation spatiale et N le nombre de clichés collectés. Dans ce contexte la détermination de la base POD revient à résoudre le problème d'optimisation qui consiste à minimiser l'erreur de représentation suivante :

$$\min \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|u^i - \sum_{j=1}^{N_{POD}} (u^i, \Phi_j) \Phi_j\|^2 \quad (2.18)$$

Le produit scalaire utilisé pour définir la norme $L^2(\Omega) \|\cdot\|$ est le suivant :

$$(\Phi, \Psi) = \Phi^t M \Psi \quad (2.19)$$

où M est la matrice des poids d'intégration. Ce problème d'optimisation est équivalent à résoudre un problème aux valeurs propres en utilisant la matrice du tenseur des corrélations spatio-temporelles :

$$C = \frac{1}{N} U^t U \quad \text{avec} \quad C_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^k(X_i) u^k(X_j) \quad (2.20)$$

Les modes spatiaux ϕ_i sont les vecteurs propres orthonormés de C tels que :

$$CM\Phi = \lambda\Phi \quad (2.21)$$

Résoudre le problème (2.23) revient à résoudre le problème suivant :

$$\tilde{C}\tilde{\Phi} = \lambda\tilde{\Phi} \quad (2.22)$$

avec $\tilde{C} = \frac{1}{N} \tilde{U}^t \tilde{U}$, $\tilde{U} = (M^{\frac{1}{2}})^t U$, $\tilde{\Phi} = (M^{\frac{1}{2}})^t \Phi$ et $M^{\frac{1}{2}}$ issue de la décomposition de Cholesky de la matrice M . La matrice \tilde{C} est à valeurs réelles, symétrique et positive, elle est donc diagonalisable sur une base de vecteurs propres orthogonaux et ses valeurs propres sont positives ou nulles. L'approximation linéaire optimale de dimension N_{POD}

de la POD d'une snapshot u^i du processus $u(x,y,t)$ contenue dans la matrice U est donc de la forme :

$$u^i \approx \sum_{j=1}^{N_{POD}} a_j^i \Phi_j \quad \text{avec} \quad a_j^i = u_i^t M \Phi_j \quad (2.23)$$

Les coefficients temporels a_i et les modes Φ_i satisfont de plus les relations d'orthogonalité suivante :

$$\Phi_i^t M \Phi_j = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_i^k a_j^k = \lambda_i \delta_{ij} \quad (2.24)$$

2.6 Lien avec la Décomposition aux Valeurs Singulières et l'Analyse en Composantes Principales

La POD discrète s'apparente à une Décomposition aux Valeurs Singulières ou *Singular Value Decomposition* (SVD) de la matrice des réalisations A . En effet, si A est une matrice de taille $n \times N$, sa SVD est :

$$A = U \Sigma^t V \quad (2.25)$$

avec U, V des matrices de tailles respectives $n \times n$ et $N \times N$ telles que $U^t U = I_n$ et $V^t V = I_N$

Cette factorisation entre en jeu dans l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Les colonnes de la matrice A sont considérées comme une famille de N individus évoluant dans un espace à n dimensions. L'objectif de l'ACP via la SVD est de déterminer la ou les meilleures projections de ce nuage de points sur un espace de dimension plus petite afin de pouvoir effectuer une analyse graphique des données. Ce problème revient à chercher successivement les vecteurs qui maximisent la projection des colonnes (ou des lignes) de la matrice A . Les points correspondants aux colonnes de la matrice A sont notés M_i avec $i = 1, \dots, N$. On définit l'inertie totale du nuage de points par :

$$I_{totale} = \sum_{i=1}^N d^2(O M_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N A_{ij}^2 \quad (2.26)$$

O désigne l'origine du repère et $d(M, N)$ la distance euclidienne entre les points M et N . L'inertie du nuage de points projeté sur l'axe portant un vecteur normé u est :

$$I_u = \sum_{i=1}^N d^2(O H_i) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} u_j \right)^2 \quad (2.27)$$

où H_i est la projection du point M_i sur u (Figure 2.1).

Maximiser I_u est un problème d'optimisation similaire au cas continu. La solution est donc, comme dans le cas de la POD, le vecteur propre de la matrice de corrélation définie ici par $C = A^t A$, associé à la plus grande valeur propre. La base à N_{svd} dimensions, assurant la meilleure projection des données, est constituée des N_{svd} premiers vecteurs propres de C . Dans le cas où l'analyse des données porte sur les lignes de la matrice A , le vecteur maximisant l'inertie projetée est le premier vecteur propre de la matrice

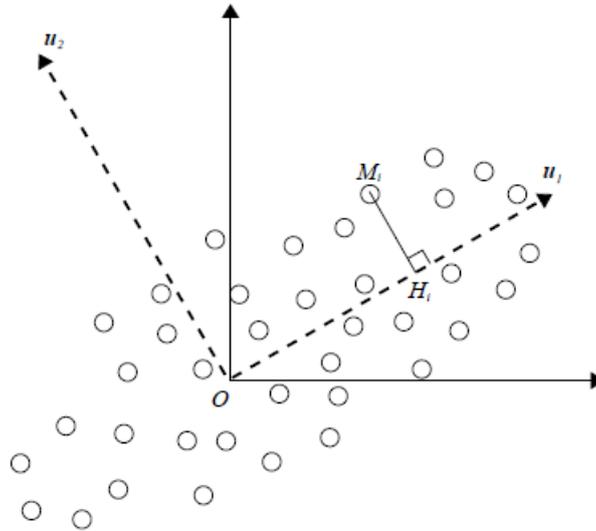


FIGURE 2.1 – Interprétation géométrique de l'Analyse en Composantes Principales (issue de Bergmann (2004)).

$A^t A$. Les matrices $A^t A$ et AA^t sont symétriques et positives de tailles respectives $n \times n$ et $N \times N$. Leurs valeurs propres sont positives ou nulles et leurs valeurs propres positives sont identiques. Les vecteurs propres associés forment deux bases orthogonales. Dans l'expression 2.25, la matrice U (resp. V) est constituée des vecteurs propres orthonormés de $A^t A$ (resp. AA^t) et les termes diagonaux de $\Sigma = \sqrt{\lambda_i}$. Par conséquent la décomposition tronquée assure une représentation de rang N_{svd} optimale de la base de données :

$$A \approx U_{N_{svd}} \Sigma_{N_{svd}}^t V_{N_{svd}} = \sum_{i=1}^{N_{svd}} \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^t \quad (2.28)$$

Le résidu :

$$\|A - U_{N_{svd}} \Sigma_{N_{svd}}^t V_{N_{svd}}\|_{Fro}^2 = \sum_{i=N_{svd}+1}^{rang(C)} \lambda_i \quad (2.29)$$

est minimum. La norme $\|\cdot\|_{Fro}$ est la norme de Froebenius. Le calcul pratique de la SVD nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres sur la matrice $A^t A$ ou AA^t pour le calcul de U ou V et. Si U ou V est connue alors V ou U peut être calculée directement. La SVD peut donc être calculée indifféremment par l'une ou l'autre des deux approches en privilégiant d'un point de vue pratique le problème aux valeurs propres de plus petite dimension. La SVD ainsi présentée et la POD discrète sont donc étroitement liées. La différence majeure étant que le produit scalaire mis en jeu dans la POD n'est pas le produit scalaire euclidien mais le produit scalaire pondéré par la matrice de masse M . En effectuant le changement de variables évoqué précédemment, il y a identité entre les deux approches. La POD opère sur un produit scalaire, donc une matrice carrée et la SVD sur une matrice quelconque.

2.7 Approche directe et snapshot POD

2.7.1 Approche directe

L'approche classique consiste à résoudre un problème aux valeurs propres mettant en jeu la matrice des corrélations spatiales C . Ses fonctions propres sont les modes POD spatiaux et les coefficients temporels sont obtenus par projection de u sur ces modes

2.7.2 Approche snapshot POD

L'approche dite snapshot POD a été introduite par Sirovitch (1987) et consiste à remplacer le tenseur des corrélations temporelles par un tenseur des corrélations spatiales de dimension plus faible. Les coefficients temporels a_i sont déterminés en résolvant un problème aux valeurs propres sur les corrélations temporelles C_t . Le processus u est ensuite projeté sur ces coefficients temporels et les modes POD spatiaux sont déterminés par la relation suivante :

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{\lambda_i T} \int_0^T u(x,t) a_i(t) dt \quad \text{pour } \lambda_i > 0 \quad (2.30)$$

Dans la pratique, les réalisations du processus u au cours du temps peuvent être stockés en colonnes sous la forme de matrices de réalisations :

$$Q = \begin{pmatrix} u(x_1, t_1) & u(x_1, t_2) & \dots & u(x_1, t_{N_t}) \\ u(x_2, t_1) & u(x_2, t_2) & \dots & u(x_2, t_{N_t}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x_{N_x}, t_1) & u(x_{N_x}, t_2) & \dots & u(x_{N_x}, t_{N_t}) \end{pmatrix}$$

où N_x désigne le nombre de points de discrétisation spatiale et N_t le nombre de clichés. Les matrices de corrélations spatiales et temporelles sont les suivantes :

$$C_x = \frac{1}{N_t} Q^t Q \quad \text{et} \quad C_t = \frac{1}{N_t} Q^t M Q \quad (2.31)$$

Les modes spatiaux Φ_i sont les vecteurs propres orthonormés de C_x tels que :

$$C_x M \Phi_i = \lambda_i \Phi_i \quad \text{et} \quad a_i(t_j) = Q_j^t M \Phi_i \quad (2.32)$$

Les coefficients temporels a_i sont les vecteurs propres orthogonaux de c_t tels que :

$$C_t a_i = \lambda_i a_i \quad \text{avec} \quad \frac{1}{N_t} a_i^t a_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (2.33)$$

Les modes spatiaux Φ_i sont obtenus a posteriori :

$$\Phi_i = \frac{1}{\lambda_i N_t} Q a_i \quad \text{pour } \lambda_i > 0 \quad (2.34)$$

Le nombre de points utilisés pour les discrétisations spatiales et temporelles détermine le type d'approche à utiliser. Ainsi si $N_x < N_t$ l'approche classique qui conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres de plus petite dimension sera mise en oeuvre et inversement la snapshot POD sera utilisée lorsque $N_x > N_t$.

2.8 Choix du produit scalaire

Dans le cadre de l'étude des fluides incompressibles, l'espace fonctionnel généralement considéré dans la littérature est l'espace de Hilbert $H(\Omega) = L^2(\Omega)$ et $\forall v, w \in L^2(\Omega)$ le produit scalaire considéré est défini par :

$$(u, w) = \int_{\Omega} u(x)w(x)dx \quad (2.35)$$

Cependant, l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ des fonctions de $L^2(\Omega)$ et de leurs dérivées d'ordre 1 peut également être utilisé. Le produit scalaire associé à cet espace fonctionnel est défini par :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int u(x)v(x)dx + \epsilon \int \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx \quad (2.36)$$

où ϵ est un paramètre de pondération défini arbitrairement. L'utilisation de cet espace semble améliorer la précision du modèle réduit POD-Galerkin pour les fluides incompressibles ainsi que sa stabilité numérique (Iollo, 1997) mais induit un coût de calcul supplémentaire important par rapport à l'utilisation du produit scalaire sur $L^2(\Omega)$

2.9 Dépendance de la POD et choix des réalisations

La décomposition aux valeurs propres peut être appliquée pour caractériser de façon optimale la dynamique spatio-temporelle d'écoulements compressibles instationnaires. En effet la base POD fournit une analyse optimale au sens d'une approximation des moindres carrés du sous-espace parcouru par les clichés à chaque instant. Or, par définition, la base POD est construite a posteriori à partir des clichés, les modes POD sont donc intrinsèquement dépendants de la base de données utilisée pour les générer. La base POD n'est donc optimale que pour l'approximation de ces mêmes données et est a priori mal adaptée à un élément quelconque de l'espace de départ. Le choix de l'ensemble des réalisations utilisées pour définir la base POD est donc un point important. C'est pourquoi généralement, sous l'hypothèse d'ergodicité, il est nécessaire de considérer un intervalle temporel $[0, T]$ suffisamment long par rapport à l'échelle de temps du phénomène physique observé afin de s'assurer d'une bonne convergence des moments statistiques. De plus, dans le cas de la POD, les snapshots successives stockées ne doivent pas être totalement décorrélés, sinon aucune réduction de dimension n'est en pratique envisageable.

Différentes approches peuvent être envisagées pour améliorer la représentativité de la base POD pour une dynamique spatio-temporelle d'écoulements compressibles donnée ou lorsque la configuration de l'écoulement subit des variations au cours du temps (géométrie variable, régime d'écoulement ..). Parmi elles on peut citer la construction de plusieurs bases POD pour des configurations physiques proches puis en considérant une base, ajouter des modes issus d'autres bases par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Une autre méthode est la construction d'une unique base POD mais à partir de réalisations obtenues dans différentes configurations (Bourguet, 2008). Plusieurs bases POD successives peuvent également être utilisées grâce à une stratégie de régions de confiance ou Trust-Region POD (TRPOD) (Fahl, 2000), soit en ajoutant au cours du temps des modes POD supplémentaires, soit en reconstruisant complètement la base (Graham et al., 1998).

3 Modélisation d'ordre réduit d'écoulements

3.1 Introduction

Cette section est consacrée à la modélisation POD-Galerkin des équations de Navier-Stokes qui permet de définir un modèle réduit (ou ROM) en tant que système d'équations différentielles ordinaires de petite dimension (Bourguet, 2008). La méthode conduisant d'un système d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations polynomiales différentielles ordinaires par projection de Galerkin est d'abord décrite d'un point de vue général. Elle consiste en une projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles sur une base de dimension réduite issue d'une décomposition aux valeurs propres tronquée. L'application de cette technique aux équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse d'incompressibilité est ensuite détaillée. Enfin des stratégies de stabilisation sont proposées afin de pallier l'instabilité structurale des systèmes dynamiques issus de l'approche POD-Galerkin.

3.2 Construction du modèle réduit POD-Galerkin

Dans cette section, le principe de construction du modèle réduit par projection de Galerkin est tout d'abord rappelé. Son application au cas d'équations aux dérivées partielles est ensuite décrite.

Dans le cas général, le système physique à approximer est un opérateur différentiel F tel que si la variable aléatoire $H(\Omega \times [0, T])^d$ est solution de ce système alors :

$$F(u) = 0 \quad (3.1)$$

L'approximation \tilde{u} de u sur un sous-espace de dimension finie n est alors :

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \quad (3.2)$$

où les modes ϕ_i forment une base orthonormée de $H(\Omega \times [0, T])^d$ et les coefficients a_i sont les coefficients à déterminer. Dans le cas général, \tilde{u} n'est pas solution du problème :

$$F(u) \neq 0 \quad (3.3)$$

La projection de Galerkin s'exprime comme :

$$(F(\tilde{u}), \psi_i) = 0 \quad (3.4)$$

où les fonction ψ_i sont les fonctions de pondérations et (\cdot, \cdot) est le produit scalaire sur $H(\Omega \times [0, T])^d$. La projection de Galerkin consiste à considérer comme fonction de pondérations les fonctions de bases du sous-espace de projection utilisées pour approximer u . Le problème physique de dimension infinie est alors approximé par le problème à n dimensions suivant :

$$(F(\sum_{i=1}^n a_i \phi_i), \phi_j) = 0 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Le résidu $F(\tilde{u})$ est alors orthogonal à l'espace de projection $\text{Vec}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ de dimension n . Le problème de la modélisation de dimension réduite des équations de Navier-Stokes revient à approcher le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u) & \text{sur } \Omega \\ C(u) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

où $u \in H$ et F, G sont des opérateurs différentiels et u_0 la condition initiale. La variable aléatoire u est approximée par une décomposition aux valeurs propres tronquées à N_{POD} dimensions et la projection de Galerkin du système sur cette base POD est alors :

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\text{POD}} \frac{d}{dt} a_j \phi_j, \phi_i \right) = \left(F \left(\sum_{j=1}^{N_{\text{pod}}} a_j \phi_j \right), \phi_i \right) \\ \left(\sum_{j=1}^{\text{POD}} a_j(0) \phi_j, \phi_i \right) = (u_0, \phi_i) \end{cases}$$

Comme les modes POD ϕ_i sont orthonormés, le système est équivalent au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_i = \left(F \left(\sum_{j=1}^{N_{\text{POD}}} a_j \phi_j \right), \phi_i \right) \\ a_i(0) = (u_0, \phi_i) \end{cases}$$

Ce système d'EDO (*Equations Différentielles Ordinaires*) constitue le modèle réduit POD-Galerkin. Les conditions aux limites imposées explicitement dans le modèle initial sont vérifiées implicitement par la base POD. Le second membre du système est ensuite exprimé comme un polynôme quadratique à coefficients constants.

3.3 Projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles

Le système physique à approximer est ici constitué des équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u \end{cases}$$

où u désigne le vecteur vitesse, p la pression, ρ la masse volumique, ν la viscosité cinématique du fluide et μ sa viscosité dynamique. Les conditions aux limites sont supposées stationnaires mais non homogènes en espace. Le vecteur d'état approximé par la POD est le vecteur vitesse u . La POD tronquée du vecteur d'état u doit satisfaire les conditions aux limites. La décomposition de Reynolds de u est adoptée :

$$u = \bar{u} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i \approx \bar{u} + \sum_{i=1}^{\text{POD}} a_i \phi_i \quad (3.6)$$

où \bar{u} est le champ moyen. De plus on a :

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{et} \quad \phi_i = \frac{1}{\lambda_i T} \int_0^T (u_j - \bar{u}_j) a_i dt \quad (3.7)$$

Donc si u vérifie l'équation de continuité alors les modes POD la vérifient également. La projection de Galerkin de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi_i\right) + ((u \cdot \nabla)u, \phi_i) = -\left(\frac{1}{\rho} \nabla p, \phi_i\right) + (\nu \Delta u, \phi) \quad (3.8)$$

Dans le cas d'écoulements incompressibles, le produit scalaire spatial sur L^2 est le suivant :

$$(a, b) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} a_i b_i dx \quad (3.9)$$

En intégrant par parties via les formules de Green, l'équation devient :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi_i\right) + ((u \cdot \nabla)u, \phi_i) = \frac{1}{\rho} (p, \nabla \cdot \phi_i) - \frac{1}{\rho} [p \phi_i] - \nu (\nabla u, (\nabla \phi)^t) + \nu [(\nabla u) \phi_i] \quad (3.10)$$

avec $[a] = \int_{\Gamma} a \cdot n dx$ où n est la normale extérieure à la frontière. Chaque mode POD vérifie l'équation de continuité donc le terme $(p, \nabla \cdot \phi_i)$ s'annule. En introduisant la décomposition aux valeurs propres tronquée, le modèle réduit POD-Galerkin est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_i = D_i + \sum_{j=1}^{N_{POD}} L_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{N_{POD}} \sum_{k=1}^{N_{POD}} C_{ijk} a_j a_k \\ a_i(0) = (u_0 - \bar{u}, \phi_i) \end{cases}$$

avec D_i, L_{ij}, C_{ijk} définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} D_i = -((\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}, \phi_i) - \nu (\nabla \bar{u}, (\nabla \phi_i)^t) + \nu [(\nabla \bar{u}) \phi_i] \\ L_{ij} = -((\bar{u} \cdot \nabla) \phi_j, \phi_i) - ((\phi_j \cdot \nabla) \bar{u}, \phi_i) - \nu (\nabla \phi_j, (\nabla \phi_i)^t) + \nu [(\nabla(\phi_j) \phi_i)] \\ C_{ijk} = -((\phi_j \cdot \nabla) \phi_k, \phi_i) \end{cases}$$

3.4 Traitement du terme de pression

Dans le cas de conditions aux limites homogènes sur la vitesse ou encore si des conditions aux limites périodiques sont prescrites, le terme de pression peut s'annuler sur les frontières mais, dans le cas général, ce terme n'est pas nul. Dans le cas général, la contribution de la pression sur la frontière est généralement négligée avant la projection de Galerkin (Bergmann and Cordier, 2008). La prise en compte du terme de pression est cependant important pour la stabilité et la précision du modèle réduit (Noack et al., 2005a). De plus, l'utilisation du modèle réduit POD-Galerkin ne permet pas de faire de prédiction de la pression en tant que variable du système physique, ce qui constitue une limitation importante de cette approche dans l'utilisation du ROM pour le contrôle. Des approches existent afin de prendre en compte le terme de pression qui sont fondées sur une approximation directe du terme $(\nabla p, \Phi_i)$ en utilisant les coefficients temporels a_i issus de la POD du vecteur d'état (Galletti et al., 2004) et (Noack et al., 2005a)

3.5 Identification des coefficients d'un modèle d'ordre réduit par identification polynomiale

Une dernière manière de construire le modèle d'ordre réduit consiste à identifier les coefficients plutôt que de les calculer analytiquement à partir des expressions issues de la projection des opérateurs du système dynamique sur les modes POD. Une fois l'expression du modèle d'ordre réduit définie, les coefficients D_i , L_{ij} et C_{ijk} sont déterminés comme les solutions d'un problème inverse. L'hypothèse d'un modèle d'ordre réduit permet de calculer les coefficients comme les solutions d'un problème moindres carrés linéaire. La méthode a déjà été employée par exemple par Perret et al. (2006) pour obtenir un modèle d'ordre réduit au maximum de degré 2 à partir de données expérimentales.

Afin d'identifier les paramètres D_i , L_{ij} et C_{ijk} , on résout le système $AX = B$ où les matrices A , B et X sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_i(t_1) & \cdots & a_i(t_1)a_j(t_1) & \cdots & a_i(t_1)a_j(t_1)a_k(t_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & a_i(t_p) & \cdots & a_i(t_p)a_j(t_p) & \cdots & a_i(t_p)a_j(t_p)a_k(t_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & a_i(t_{N_s}) & \cdots & a_i(t_{N_s})a_j(t_{N_s}) & \cdots & a_i(t_{N_s})a_j(t_{N_s})a_k(t_{N_s}) \end{pmatrix}$$

$$X = (D_i \quad \cdots \quad L_{ij} \quad \cdots \quad C_{ijk})^t \text{ et } B = (\dot{a}_i(t_1), \quad \cdots \quad \dot{a}_i(t_p) \quad \cdots \quad \dot{a}_i(t_{N_s}))^t$$

Le nombre de paramètres $N_{total} = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$ à déterminer est le suivant, $\forall i \in [1, N]$:

- $N_0=1$ pour les coefficients constants D_i
- $N_1=N$ pour les coefficients constants L_{ij}
- $N_2=N(N+1)/2$ pour les coefficients constants C_{ijk}

La résolution de ce système est un problème de minimisation d'erreur quadratique et la détermination des coefficients D_i , L_{ij} et C_{ijk} peut se faire en résolvant le système $AX = B$ par SVD. Les coefficients $a(t)$ peuvent être déterminés à l'aide de méthodes d'intégration avec un pas de temps constant. Cependant, si l'intervalle entre deux clichés est trop important, alors les dérivées temporelles des amplitudes modales risquent d'être mal évaluées. Par conséquent, le second membre du problème est peu précis et ceci est d'autant plus grave que la matrice A est en général mal conditionnée, ce qui rend la résolution du problème extrêmement sensible aux perturbations du second membre.

Le type de méthodes le plus couramment utilisé pour contrôler le modèle réduit au cours du temps est basé sur une calibration a posteriori des coefficients du modèle réduit. De nombreuses méthodes de calibration à l'aide de méthodes variationnelles ont été entreprises dans la littérature. Elles consistent à ajouter aux membres linéaires et quadratiques du modèle réduit des termes qui vont assurer une représentativité optimale des coefficients temporels de référence. Ces termes de calibration sont déterminés a posteriori à l'aide d'un problème de minimisation sous contrainte tout en respectant la formulation du système d'EDO issu de la projection de Galerkin. Parmi les travaux entrepris à cet effet, on peut citer Galletti et al. (2005) qui utilisent une méthode d'optimisation par

modèle direct et adjoint pour déterminer ces coefficients sous la contrainte non linéaire d'optimisation du modèle réduit. Couplet et al. (2005) proposent une technique de calibration basée sur la minimisation d'une fonctionnelle linéaire conduisant à des résultats similaires mais avec des coûts numériques inférieurs. Cordier et al. (2009) ont proposé une amélioration de cette méthode en utilisant une méthode de calibration basée sur la régularisation de Tikhonov. Bergmann and Cordier (2008) utilisent des méthodes à régions de confiance (appelée TRPOD) pour contrôler le modèle réduit autour d'un cylindre en régime laminaire.

La procédure de calibration utilisée dans le cadre de ce travail est basée sur des techniques issues de l'assimilation de données. Ces techniques permettent de reconstituer l'état d'un système dynamique en combinant l'information contenue dans les équations d'évolution spatio-temporelle du système dynamique considéré et l'information physique contenue dans les observations de ce système au cours du temps. Ces méthodes sont couramment utilisées dans des domaines tels que l'océanographie et la météorologie où il est nécessaire d'introduire des données d'observations dans la modélisation afin de prendre en compte la spécificité spatio-temporelle du phénomène physique étudié et pouvoir ainsi faire l'analyse historique de ce phénomène ou encore de la prévision.

4 Inférence bayésienne dans les modèles de Markov cachés

Cette partie est consacrée aux méthodes stochastiques d'inférence bayésienne de système dynamique. Ces méthodes sont construites à partir d'un modèle statistique appelé *modèle à espace d'état* composé d'un processus de Markov caché (ou HMM pour *Hidden Markov Model*) qui décrit l'évolution du système dynamique considéré au cours du temps ainsi que d'un processus qui décrit l'ensemble des observations partielles et bruitées de ce système.

On s'intéresse tout d'abord au problème du filtrage non linéaire optimal qui consiste à estimer les valeurs d'un état caché scalaire ou vectoriel, noté x_k , du système dynamique à l'instant k . La solution théorique au problème du filtrage non linéaire existe et est fournie par le filtre bayésien optimal. Dans le cas de systèmes linéaires et gaussiens, le filtre de Kalman permet d'obtenir une expression analytique de la solution. Cependant, pour des systèmes non linéaires et/ou non gaussiens, la solution est en général impossible à déterminer analytiquement. Afin de traiter le problème de la non linéarité d'un système dynamique, des filtres sous-optimaux sont utilisés parmi lesquels on peut citer le filtre de Kalman étendu (EKF pour *Extended Kalman Filter*) ainsi que les filtres particuliers (SIR pour *Sample Interval Processing*) et d'ensemble (EnKF pour *Ensemble Kalman Filter*) basés sur des méthodes séquentielles de Monte-Carlo.

Le second problème abordé est celui de l'estimation des paramètres du système dynamique dans le cas d'observations manquantes. L'algorithme utilisé à cet effet est l'algorithme EM (*Expectation Maximisation*) qui permet de déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance d'un modèle statistique à variable cachée. L'estimation des paramètres du modèle se fera à partir des coefficients temporels issus de la POD directement sous-échantillonnée des données expérimentales. On considérera les cas d'un sous-échantillonnage régulier en temps et d'un sous-échantillonnage par paquet.

La définition du modèle à espace d'état et le problème du filtrage bayésien optimal pour l'inférence bayésienne dans le modèle de Markov caché sont introduits dans la section

1. La résolution du problème du filtrage bayésien optimal est présentée dans la section 2 où sont également décrits le filtre de Kalman linéaire ainsi que ses extensions les plus courantes dans le cas de système non linéaire. Les méthodes séquentielles de Monte Carlo font l'objet de la section 3 où leur principe est tout d'abord rappelé. Le principe du filtrage particulière est ensuite brièvement décrit. On trouvera une très bonne introduction à ces méthodes dans les cours suivants (Le Gland, 2009) et (Campillo, 2006). Le filtre de Kalman d'ensemble et sa version déterministe appelée « Square Root », sont ensuite plus précisément exposés. L'estimation des paramètres dans un modèle à espace d'état à l'aide de l'algorithme EM fait l'objet de la section 4. Le principe de maximum de vraisemblance y est introduit ainsi que la description des étapes E et M de l'algorithme EM. Le cas d'estimation de paramètres sur des données manquantes est ensuite exposé. Enfin, est donné un bref rappel des principales propriétés de l'algorithme EM.

4.1 Modèle à espace d'état

Un modèle à espace d'état $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 0}, (\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1})$ est un couple de processus formé par un processus d'état $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 0})$ et un processus d'observation $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1})$. La variable aléatoire $\mathbf{X}_{0:k} = \{\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_k\}$ représente l'état du système dynamique considéré jusqu'à l'instant k et $\mathbf{Y}_{1:k} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k\}$ désigne l'ensemble des observations du processus observé jusqu'à l'instant k . En pratique, seul le processus $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1})$ est observé et on ne dispose pas d'observation directe de la variable aléatoire $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 1})$: on parle alors de "variable cachée".

Dans le cas discret, le processus $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 0})$ est une chaîne de Markov à espace d'état fini de loi initiale $p(\mathbf{X}_0)$ et de loi de transition $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})$. On suppose ici que $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 0})$ est à valeur dans un ensemble $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ et que l'on ne dispose pas d'observations à l'instant $k = 0$. On suppose que $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1})$ est à valeurs dans un ensemble \mathcal{Y} . On suppose de plus que le processus $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 0})$ satisfait à la propriété de Markov suivante :

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) \quad (4.1)$$

Les observations $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$ vérifient l'hypothèse du *canal sans mémoire*, à savoir que pour tout instant $k = 0, \dots, n$:

- Conditionnellement aux états $(\mathbf{X}_k)_{k \geq 0}$ les observations $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendantes :

$$p(\mathbf{Y}_{1:n} | \mathbf{X}_{0:n}) = \prod_{k=0}^n p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_{0:k}) \quad (4.2)$$

- La distribution de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire \mathbf{Y}_k sachant $\mathbf{X}_{0:n}$ ne dépend que de \mathbf{X}_k . Le processus d'observation $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$ est donc décrit par la vraisemblance $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k)$:

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_{0:n}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k) \quad (4.3)$$

Dans le cas discret, sous les hypothèses du canal sans mémoire et de la propriété de Markov, la dynamique du processus observé est donc supposée décrite par un modèle à espace d'état dont les changements d'états sont induits par un processus de Markov caché de loi initiale $p(\mathbf{X}_0)$, défini par une densité de probabilité de transition $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})$ et observé par une valeur y_k du processus $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$ selon la densité de probabilité d'émission

$p(\mathbf{Y}_k|\mathbf{X}_k)$. On notera cependant que, contrairement au processus $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 1})$, le processus $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 0})$ n'est en général pas une chaîne de Markov. Les dépendances entre les variables aléatoires sont généralement décrites par le graphe de dépendance conditionnelle acyclique et orienté suivant :

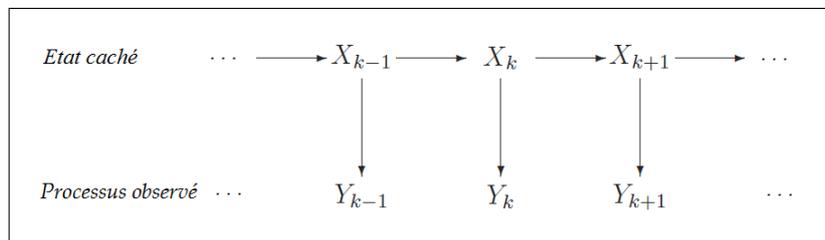


FIGURE 2.2 – Dépendances entre les variables aléatoires du modèle à espace d'état discret.

Les nœuds de ce graphe représentent les variables aléatoires \mathbf{X}_k et \mathbf{Y}_k et les flèches entre les nœuds la structure de la distribution de probabilité jointe entre \mathbf{X}_k et \mathbf{Y}_k . L'interprétation de ce graphe est la suivante : le passé d'une variable aléatoire peut être factorisé comme le produit des distributions conditionnelles de chaque variable aléatoire sachant ses parents.

On admettra également que toutes les probabilités conditionnelles considérées admettent une densité par rapport à la mesure produit $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^n$ et que cette densité dépend à l'instant k d'un paramètre inconnu noté $\theta(k)$. On notera les densités de probabilités selon l'exemple suivant : $p(x_k|x_0, \dots, x_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-1})$ la densité de $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_0 = x_0, \dots, \mathbf{X}_{k-1} = x_{k-1}, \mathbf{Y}_1 = y_1, \dots, \mathbf{Y}_{k-1} = y_{k-1})$. Les densités de probabilités d'émission et de transition du modèle à espace d'état discret sont notées de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_k|x_{k-1}, \theta \sim p_\theta(x_k|x_{k-1}) & (4.4) \\ y_k|x_k, \theta \sim p_\theta(y_k|x_k) & (4.5) \end{cases}$$

et les équations d'état et d'observation associées à l'espace d'état discret sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k = f_{k-1}(\mathbf{X}_k, \mathbf{W}_{k-1}) & (4.6) \\ \mathbf{Y}_k = h_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k & (4.7) \end{cases}$$

$(\mathbf{W}_k)_{k \geq 0}$ et $(\mathbf{V}_k)_{k \geq 1}$ sont des bruits blancs indépendants entre eux. L'ensemble des paramètres du modèle est noté $\Theta = \{f_k, h_k\}$

4.2 Inférence bayésienne

On s'intéresse à l'inférence bayésienne dans le modèle à espace d'état défini précédemment lorsque celui-ci dépend de variables latentes non observables. L'inférence bayésienne dans les modèles à espaces d'état concerne deux types d'estimation :

- L'estimation de la distribution marginale du processus caché $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{1:k})$ sachant une réalisation $\{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k\}$ du processus d'observation $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1})$.
- L'estimation des paramètres $\Theta = \{f_k, h_k\}$ du modèle sachant une réalisation $\{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k\}$ du processus d'observation $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1})$.

Dans le cadre bayésien, l'inférence sur le vecteur caché x_k est réalisée à partir de la connaissance :

- d'une réalisation du vecteur d'observation $y_{1:k}$
- de la densité à priori initiale $p_\theta(x_0)$
- de la densité de probabilité d'émission $p_\theta(y_k|x_k)$
- de la densité de probabilité de transition $p_\theta(x_k|x_{k-1})$

Selon la nature de l'application pour estimer un état x_k sachant une série d'observations $\{y_1, \dots, y_n\}$ on peut distinguer trois cas :

- Si $k > n$ alors il s'agit d'un problème de prédiction : il consiste à déterminer la loi d'un état futur connaissant l'ensemble des observations passées et présentes : $p_\theta(x_k|y_{1:n})$, $k = 1, \dots, n$
- Si $k = n$ alors il s'agit d'un problème de filtrage : il consiste à rechercher la distribution de l'état de l'instant courant connaissant l'ensemble des observations passées et présentes $p_\theta(x_k|y_{1:n})$, $k = 1, \dots, n$
- Si $k < n$ alors il s'agit d'un problème de lissage, il intervient lorsque la résolution du problème d'estimation est différée par rapport à l'acquisition des observations. Le principe est le même que le filtrage mais il utilise en plus les mesures futures : $p_\theta(x_k|y_{1:n})$, $k = 1, \dots, n$

4.3 Filtrage bayésien optimal

L'approche bayésienne va permettre de déterminer la loi conditionnelle de l'état x_k sachant une réalisation du processus d'observation $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1})$. Cette loi conditionnelle est notée :

$$\mu_k^a(dx_k) = \mathbb{P}[\mathbf{X}_k \in dx_k | \mathbf{Y}_{1:k}] \quad (4.8)$$

La loi $\mu_k^f(dx_k)$ de la variable aléatoire de l'état x_k sachant une réalisation du processus d'observation $((\mathbf{Y}_k)_{1:n-1})$ est quant à elle définie par :

$$\mu_k^f(dx_k) = \mathbb{P}[\mathbf{X}_k \in dx_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}] \quad (4.9)$$

On suppose que $\mu_k^a(dx_k)$ et $\mu_k^f(dx_k)$ admettent les densités de probabilités respectives $p_\theta(x_k|y_{1:k-1})$ et $p_\theta(x_k|y_{1:k})$. On suppose de plus que les seules informations dont on dispose au cours du temps sur le système sont contenues dans la série d'observations $y_{1:k}$. L'estimateur bayésien x_k^a de x_k sachant $y_{1:k}$ est donné par l'espérance conditionnelle :

$$x_k^a = \mathbb{E}[x_k | y_{1:k}] = \int_{\mathbb{R}^n} x_k \mu_k^a(dx_k) = \int_{\mathbb{R}^n} x_k p_\theta(x_k | y_{1:k}) dx_k \quad (4.10)$$

La résolution du problème de filtrage consiste à estimer $p_\theta(x_k|y_{1:k})$ la distribution a posteriori de l'état à l'instant k conditionnellement à l'ensemble des observations passées et présentes. Cette distribution est appelée distribution de filtrage. Le filtrage bayésien optimal permet de calculer de façon exacte la distribution de filtrage $p_\theta(x_k|y_{1:k})$. Cette solution est calculée récursivement en deux étapes : une étape de prédiction et une étape de correction. On suppose ici que la distribution conditionnelle $p_\theta(x_{k-1}|y_{1:k-1})$ est disponible à l'instant $k - 1$.

4.3.1 Étape de prédiction

L'étape de prédiction permet de connaître la distribution a priori $p_\theta(x_k|y_{1:k-1})$. Ainsi, si on connaît la probabilité de transition $p_\theta(x_k|x_{k-1})$ et la probabilité d'émission $p_\theta(y_k|x_{k-1})$ alors par l'équation de Chapman-Kolmogorov on obtient la densité a priori ou probabilité de prédiction $p_\theta(x_k|y_{1:k-1})$:

$$p_\theta(x_k|y_{1:k-1}) = \int p_\theta(x_k|x_{k-1}, y_{1:k-1}) p_\theta(x_{k-1}|y_1, \dots, y_{k-1}) dx_{k-1} \quad (4.11)$$

$$p_\theta(x_k|y_{1:k-1}) = \int p_\theta(x_k|x_{k-1}) p_\theta(x_{k-1}|y_1, \dots, y_{k-1}) dx_{k-1} \quad (4.12)$$

4.3.2 Étape de correction

L'étape de correction permet de tenir compte de la nouvelle observation et permet le calcul de $p_\theta(y_k|x_k)$ la distribution conditionnelle à l'étape k à partir de la distribution de filtrage prédite. L'observation y_k est prise en compte pour corriger la densité a priori grâce à la formule de Bayes :

$$p_\theta(x_k|y_{1:k}) = \frac{p_\theta(y_k|x_k, y_{1:k-1}) p_\theta(x_k|y_{1:k-1})}{p_\theta(y_k|y_{1:k-1})} \quad (4.13)$$

$$p_\theta(x_k|y_{1:k}) = \frac{p_\theta(y_k|x_k) p_\theta(x_k|y_{1:k-1})}{p_\theta(y_k|y_{1:k-1})} \quad (4.14)$$

Le dénominateur est une constante de renormalisation qui peut s'écrire sous la forme :

$$p_\theta(y_k|y_{1:k-1}) = \int p_\theta(y_k|x_k) p_\theta(x_k|y_{1:k-1}) dx_k \quad (4.15)$$

La relation de l'étape de prédiction dépend de la probabilité de filtrage qui vérifie l'équation de récurrence suivante, appelée *filtre bayésien optimal* :

$$p_\theta(x_k|y_1, \dots, y_k) \propto p_\theta(y_k|x_k) p_\theta(x_k|y_1, \dots, y_{k-1}) \quad (4.16)$$

où \propto signifie "proportionnel à". Une itération du filtre optimal est de la forme suivante :

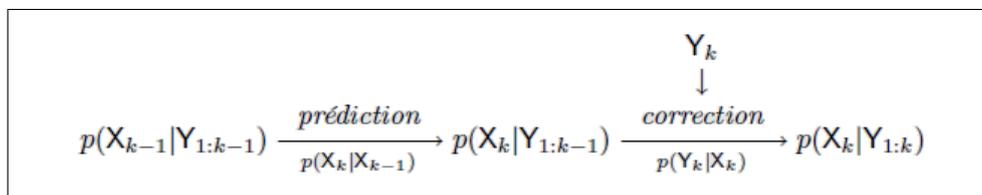


FIGURE 2.3 – Itération du filtre optimal

Ce schéma de récurrence est initialisé avec $p_\theta(x_0)$, la densité de probabilité de l'état initial x_0 qui est supposée connue. L'application récursive des étapes de prédiction et de correction donne la solution théorique du filtrage non linéaire optimal. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[x_k|y_{1:k}]$ est l'estimateur de variance minimale pour tous les estimateurs de x_k sachant $y_{1:k}$. Il est possible de les expliciter analytiquement dans le cas d'espace d'état fini et dans les cas du modèle linéaire dont les erreurs sont gaussiennes où les

probabilités de filtrage s'obtiennent alors à l'aide du filtre de Kalman linéaire (Le Gland, 2009). Cependant, dans le cas général de systèmes non linéaires et/ou non gaussiens, les équations du filtre bayésien optimal ne peuvent être résolues analytiquement. Le filtre bayésien optimal est alors approximé à l'aide de méthodes de type Monte-Carlo. Parmi les filtres basés sur les méthodes de type Monte-Carlo, les plus couramment utilisés sont le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulaire (Evensen, 2003), (Evensen, 2006), (Le Gland, 2009).

5 Résolution du filtrage optimal

5.1 Filtre de Kalman

Le but du filtrage bayésien est d'estimer la densité de probabilité $p_\theta(x_k|y_{1:k})$ à partir de la connaissance des équations d'état et de mesure du système dynamique considéré :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k = f_k(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1}) & (5.1) \\ \mathbf{Y}_k = h_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k & (5.2) \end{cases}$$

Si la fonction f_k est linéaire en x_k et en v_k et la fonction h_k linéaire en x_k et les bruits w_k et v_k gaussiens, alors le modèle est dit linéaire gaussien et la solution analytique du problème du filtrage bayésien est donnée par le filtre de Kalman. On considère ainsi un système dynamique dont l'évolution est représentée par un processus $f(x_k)$ où f est un modèle linéaire de matrice F gouvernant le processus x_k . Les observations y_k sont liées à l'état du modèle x_k par la relation suivante, appelée équation de correction :

$$Y_k = H_k X_k + v_k$$

où H est un opérateur d'observation linéaire et v_k est l'erreur sur l'observation y_k . Le système dynamique s'écrit quant à lui :

$$X_k = F_k X_{k-1} + w_k$$

où w_k est l'erreur commise sur le calcul d'évolution des variables d'état. Les bruits sont considérés comme gaussiens et de matrice de covariance $Q_k = Cov(w_k)$ et $R_k = Cov(v_k)$. Le filtrage en temps discret consiste à estimer l'état x_k de ce système à l'instant k en se basant sur la suite des observations partielles et bruitées $y_{0:k} = \{y_0, \dots, y_k\}$ à l'instant k de ce système. Le problème du filtrage se ramène alors à la résolution d'un système linéaire stochastique récursif. Afin de bénéficier des temps $1, 2, \dots, k-1$ directement dans l'estimation à l'instant k , on calcule récursivement un estimateur appelé filtre de Kalman. Le filtre de Kalman est donc un estimateur récursif d'un système dynamique composé des équations (1.1) et (1.2) :

$$(S) \begin{cases} X_k = F_k X_{k-1} + w_k & (5.3) \\ Y_k = H_k X_k + v_k & (5.4) \end{cases}$$

où les hypothèses suivantes sont faites :

- L'état initial x_0 est gaussien : $X_0 \sim \mathcal{N}(x_0, Q_0)$

- La fonction $f_k(X_{k-1})$ est une fonction linéaire de X_{k-1} et la fonction $h_k(X_k)$ est une fonction linéaire de X_k
- Les bruits d'état w_k et de mesure v_k sont des bruits blancs gaussiens : $W_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$, $V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$

Le système (S) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) = \mathcal{N}(F_k X_{k-1}, Q_k) \quad (5.5)$$

$$p_\theta(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}(H_k X_k, R_k) \quad (5.6)$$

Le modèle à espace d'état est ici linéaire et gaussien, les distributions sont donc gaussiennes. Par définition, les matrices de covariance P_k^f et P_k^a sont données par :

$$P_k^f = \mathbb{E}[(x_k - m_k^f)(x_k - m_k^f)^t | y_{1:k-1}] \quad \text{et} \quad P_k^a = \mathbb{E}[(x_k - m_k^a)(x_k - m_k^a)^t | y_{1:k-1}] \quad (5.7)$$

Elles sont cependant indépendantes des observations $y_{1:k}$. Elles s'écrivent donc de la manière suivante :

$$P_k^f = \mathbb{E}[(x_k - m_k^f)(x_k - m_k^f)^t] \quad \text{et} \quad P_k^a = \mathbb{E}[(x_k - m_k^a)(x_k - m_k^a)^t] \quad (5.8)$$

La distribution de filtrage $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$ est entièrement décrite par son espérance $m_k^f = \mathbb{E}[x_k | y_{1:k}]$ et sa covariance $P_k^f = \mathbb{E}[(x_k - m_k^f)(x_k - m_k^f)^t]$. Ainsi, pour tout $k = 1, \dots, N$ si $p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1})$ est une densité gaussienne de moyenne m_{k-1}^a et de covariance P_{k-1}^a alors :

- $p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1})$ est une densité gaussienne de moyenne et de covariance :

$$m_k^f = F_k m_{k-1}^a \quad (5.9)$$

$$P_k^f = F_k P_{k-1}^a F_k^t + Q_k \quad (5.10)$$

- $p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$ est une densité gaussienne de moyenne et de covariance :

$$m_k^a = m_k^f + K_k (y_k - H_k m_k^f) \quad (5.11)$$

$$P_k^a = (I - K_k H_k) P_k^f \quad (5.12)$$

où $K_k = P_k^f H_k^t (H_k P_k^f H_k^t + R_k)^{-1}$ est le gain de Kalman. On trouvera une démonstration de cette propriété dans Le Gland (2009). Le système (S) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) = \mathcal{N}(m_k^f, P_k^f) \quad (5.13)$$

$$p_\theta(\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}(m_k^a, P_k^a) \quad (5.14)$$

La distribution de filtrage $p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$ est déterminée à l'aide des étapes de prédiction et de correction. L'étape de prédiction permet de déterminer $p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1})$ à partir de $p_\theta(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1})$. La prédiction est ensuite corrigée par la nouvelle observation y_k . L'ensemble de ces équations forme le filtre de Kalman. Elle décrivent l'évolution de la moyenne et de la covariance de la distribution gaussienne. Dans le cadre gaussien, il suffit d'évaluer la moyenne et la covariance pour caractériser complètement les distributions $p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1})$ et $p_\theta(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$. De plus, dans le cas linéaire gaussien l'estimateur bayésien

est équivalent à l'estimateur BLUE (Daget, 2007). Le filtre de Kalman permet de résoudre le problème de filtrage de façon exacte et rapide lorsque les dynamiques de l'état et de l'observation sont linéaires et gaussiennes. Il approxime la densité conditionnelle de l'état sachant l'observation par une densité gaussienne, déterminée par sa moyenne et sa matrice de covariance.

Cependant, dans la pratique l'opérateur dynamique F et l'opérateur des observations H ne sont pas linéaires. La non linéarité du modèle peut entraîner la multi-modalité de la loi conditionnelle de l'état et rendre ainsi le filtre inadapté. De plus, lorsque le système est fortement non linéaire, le filtre peut diverger et le problème du filtrage non linéaire n'admet pas de solution en dimension finie. Il devient alors nécessaire d'adapter les filtres de Kalman.

Algorithme 1 Algorithme du filtre de Kalman linéaire

Conditions initiales du filtre

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$$

$$p_0 = Q_0$$

A tout instant $k \geq 1$

Étape de prédiction

$$x_k^f = F_k(x_{k-1}^a)$$

$$P_k^f = F_k P_{k-1}^a F_k^t + Q_k$$

Étape de correction

$$x_k^a = x_k^f + K_k[y_k - H_k x_k^f]$$

$$P_k^a = [I - K_k H_k] P_k^f$$

$$K_k = P_k^f H_k^t [H_k P_k^f H_k^t + R_k]^{-1}$$

5.2 Extensions du filtre de Kalman

Parmi les alternatives existantes, on peut citer le filtre de Kalman étendu (filtre EKF) ainsi que les filtres particuliers basés sur les méthodes de Monte-Carlo. Ces méthodes sont mieux adaptées au problème de filtrage non linéaire car elles sont peu sensibles à la dimension de l'espace d'état. On considère toujours le modèle à espace d'état de la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k = f_k(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_k & (5.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_k = h_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k & (5.16) \end{cases}$$

où f_k est ici une fonction non linéaire en x_k , h_k une fonction linéaire en x_k . $(\mathbf{W}_k)_{k \geq 0}$ et $(\mathbf{V}_k)_{k \geq 1}$ sont des bruits blancs indépendants entre eux.

5.2.1 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu est décrit dans Evensen (1992) pour les systèmes faiblement non linéaires avec des bruits gaussiens. Les fonctions f_k et h_k sont non linéaires et dérivables. W_k et V_k sont des bruits blancs gaussiens et de covariances respectives Q_k et R_k . Le principe du filtre de Kalman étendu est de linéariser la fonction f_k autour d'un estimateur de x_{k-1} et la fonction h_k autour d'un estimateur de x_k afin d'obtenir un système linéaire gaussien et ainsi de pouvoir appliquer le filtre de Kalman linéaire.

Les opérateurs F et H sont alors obtenus par le linéaire tangent F et le linéaire tangent H :

$$F_{k,k+1} = \frac{\partial F_{k,k+1}}{\partial x}(x_k^a) \quad (5.17)$$

$$H_{k+1} = \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x_{k+1}^f) \quad (5.18)$$

Le vecteur d'état analysé x_k^a est ensuite propagé dans le modèle non linéaire et les matrices de covariance de l'erreur de prédiction P_k^f et P_k^a le seront par les différents modèles linéaires tangents. On obtient alors le système suivant :

- **Etape de prédiction**

$$x_{k+1}^f = F_{k+1}(x_k^a) \quad (5.19)$$

$$P_{k+1}^f = F_{k+1}P_k^a F_{k+1}^t + Q_{k+1} \quad (5.20)$$

- **Etape de correction**

$$K_{k+1} = P_{k+1}^f H_{k+1}^t (H_{k+1} P_{k+1}^f H_{k+1}^t + R_{k+1})^{-1} \quad (5.21)$$

$$x_{k+1}^a = x_{k+1}^f + K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}(x_{k+1}^f)) \quad (5.22)$$

$$P_{k+1}^a = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^f \quad (5.23)$$

Pour un système non linéaire, les densités a priori et a posteriori ne sont plus gaussiennes, les solutions obtenues par le filtre de Kalman étendu ne sont plus optimales. De plus, la moyenne et la covariance ne permettent pas dans ce cas de caractériser complètement la distribution du filtrage. Le filtre donne des résultats divergents dus à la linéarisation des fonctions du système. Un autre inconvénient au filtre de Kalman étendu est l'évaluation du gain de Kalman qui implique un coût de calcul important.

L'algorithme du filtre de Kalman complète le système d'équations lié à la détermination de l'état analysé et à sa propagation dans le temps avec deux équations de calcul et de propagation de la matrice de covariance d'erreur d'analyse. Dans le cas où les dimensions du vecteur d'état sont grandes, la mise en œuvre numérique du filtre de Kalman s'avère délicate. En effet, les matrices de covariance P_k^f et P_k^a sont des matrices de grande dimension. Les évaluer et les stocker implique un temps de calcul et un coût mémoire importants. Le coût numérique du filtre de Kalman est donc la somme du coût du traitement du vecteur d'état et des covariances d'erreur. Pour les systèmes de grande taille tels qu'ils sont utilisés pour modéliser l'océan ou l'atmosphère, le coût de calcul principal provient du traitement des covariances d'erreur d'analyse. La première étape coûteuse est l'inversion de la matrice $H_K P_k^f H_k^t + R_k$. De plus le calcul du gain K_k nécessite d'effectuer des produits et inversion de matrices de grandes dimensions. Cela entraîne la divergence du gain de Kalman au cours du temps. Au-delà du coup de calcul exorbitant de ces opérations, il est impossible de stocker entre chaque étape d'analyse de telles matrices malgré les capacités déjà importantes disponibles.

5.2.2 Filtre de Kalman de rang réduit : SEEK et SEIK

Pour ces raisons, l'algorithme du filtre de Kalman ne peut être appliqué qu'à des systèmes de taille réduite. L'idée est alors d'approcher l'espace complet des covariances d'erreurs par un sous-espace de dimension réduite. Dans les méthodes de type filtre de Kalman, les matrices de covariances d'erreurs sont a priori de rang complet. La propagation des matrices de covariances d'erreurs par les équations d'états devient prohibitive pour des dimensions importantes. Les erreurs commises vont alors être exprimées dans un espace de dimension réduite. Les algorithmes SEEK (*Singular Evolutive Extended Kalman Filter*) et SEIK (*Singular Evolutive Interpolated Filter*) font partie de cette classe de méthodes. Leur particularité est de pouvoir faire évoluer le sous-espace de correction (et ainsi la matrice de covariance d'erreur d'analyse) avec le système dynamique.

5.3 Méthodes séquentielles de Monte-Carlo

Dans le cas général, la densité de filtrage $p_\theta(x_k|y_1, \dots, y_k)$ n'est pas calculable explicitement. Une approche proposée par de nombreux auteurs consiste à approximer cette densité en utilisant des méthodes stochastiques de type Monte-Carlo. Ces méthodes sont basées sur la simulation de variables aléatoires pour calculer approximativement des intégrales de grande dimension. Elles tirent leur justification de la loi des grands nombres qui permet d'approximer une mesure de probabilité μ par une mesure empirique μ^N . L'évolution de la matrice de covariance des erreurs de filtrage va être estimée à l'aide de l'échantillonnage dans la distribution du filtrage d'un nuage d'états centrés autour de l'état courant sachant une séquence d'observation. Deux approches peuvent être alors envisagées : la première consiste à utiliser un échantillonneur de Gibbs et les MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*), la seconde conduit quant à elle aux algorithmes séquentiels de Monte-Carlo. Dans le cadre de ce travail nous n'utiliserons que la seconde approche. Avant d'aborder les algorithmes séquentiels de Monte Carlo, le principe général des méthodes de type Monte Carlo est rappelé brièvement.

5.3.1 Principe de Monte-Carlo

Soit X une variable aléatoire dans \mathbb{R}^d distribuée selon la loi de densité de probabilité $p_X(x)$ et $(X_i)_{i=1, \dots, N}$ des variables aléatoires indépendantes sur \mathbb{R}^d et de même loi que X . Pour toute fonction ϕ bornée de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, l'espérance de $\phi(X)$ vaut :

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int \phi(x)p(x)dx \quad (5.24)$$

La plupart du temps cette intégrale ne peut être calculée directement. Une approximation numérique de cette intégrale est cependant envisageable en utilisant des méthodes stochastiques dites de Monte-Carlo. La densité $p(x)$ peut être approximée par une loi discrète $p^N(x)$ à l'aide d'un échantillon de N variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) de loi de densité $p(x)$:

$$p(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_X^{(i)}(x) \quad (5.25)$$

La moyenne $\mathbb{E}[\phi(X)]$ peut alors être approximée par des sommes :

$$\mathbb{E}[\phi(X)] \approx \mathbb{E}^N[\phi(X)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi^i(X) \quad (5.26)$$

Et la loi des grands nombres assure que, presque sûrement, la moyenne empirique tend vers l'espérance :

$$\mathbb{E}^N[\phi(X)] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\phi(X)] \quad (5.27)$$

De plus, le théorème central limite nous donne la vitesse de convergence :

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\mathbb{E}^N[\phi(X)] - \mathbb{E}[\phi(X)]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0,1) \quad (5.28)$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi normale centrée réduite et $\sigma^2 = \text{Var}(\phi(x))$. Ceci montre que l'erreur moyenne d'une quadrature Monte Carlo est de l'ordre de $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}$. Ainsi l'erreur de l'approximation Monte Carlo est peu dépendante de la dimension de l'état. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle ne dépend pas de la régularité de la fonction à intégrer, pourvu que φ soit de carré intégrable.

Le principe de méthodes séquentielles de type Monte-Carlo est d'approximer la moyenne conditionnelle $\mathbb{E}[x_k | y_1, \dots, y_k]$ par une espérance empirique calculée à partir d'un nuage de N échantillons x_1^N, \dots, x_k^N . Les particules du nuage de points échantillonné dans la distribution de filtrage vont ensuite être soumises au même mécanisme d'évolution que celui du filtre de Kalman, à savoir une étape de prédiction où les particules sont propagées dans les équations d'état et explorent l'espace d'état de façon indépendante, et une étape de correction où lorsqu'une information est disponible, le poids associé à chaque particule est corrigé afin de minimiser la distance entre la distribution empirique des particules et l'observation. Les approximations de Monte-Carlo du filtre optimal peuvent être réparties en deux type de filtres :

- Les filtres particuliers qui sont basés sur un principe d'échantillonnage d'importance.
- Le filtre de Kalman d'ensemble basé sur l'approximation de l'état courant à l'aide de la moyenne empirique et de la matrice de covariance empirique d'un nuage de particules.

5.3.2 Filtre particulaire

Le filtrage particulaire est une approximation de Monte-Carlo du problème du filtrage linéaire en temps discret. Le principe du filtre particulaire est d'approximer la distribution μ_k^a par la distribution empirique μ_k^N d'un ensemble de particules x_k^1, \dots, x_k^N muni des poids d'importance $\omega_k^1, \dots, \omega_k^N$ correspondants :

$$\mu_k^a \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta_{x_k^i} \quad (5.29)$$

Les poids ω_k^i sont choisis en utilisant le principe d'échantillonnage d'importance. Si les $x_{0:k}^i$ sont simulés selon une densité d'importance $q(x_{0:k}|y_{1:k})$ alors :

$$\omega_k^i = \frac{p(x_{0:k}|y_{1:k})}{q(x_{0:k}|y_{1:k})} \quad (5.30)$$

La densité d'importance $q(x_{0:k}|y_{1:k})$ est une densité paramétrée par les observation et est choisie telle que :

$$q(x_{0:k}|y_{1:k}) = q(x_k|x_{0:k-1}, y_k)q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}) \quad (5.31)$$

alors les poids d'importance ω_k^i peuvent être calculés de façon récursive dans le temps :

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{q(x_k^i|x_{k-1}^i, y_k)} \quad (5.32)$$

On obtient ainsi l'algorithme SIS (*Sequential Importance Sampling*) où les particules sont soumises à un mécanisme d'évolution en deux étapes.

Les filtres particulaires ne requièrent pas la linéarité de l'équation d'état ni de l'opérateur d'observation. Les bruits ne sont pas nécessairement gaussiens (Daget, 2007). De plus en utilisant un nombre de particules suffisamment grand, on peut considérer qu'on obtient une bonne estimation de la distribution de l'état sachant une série d'observations. C'est cependant l'inconvénient majeur du filtre particulaire. En effet, il faut simuler un grand nombre de particules pour éviter le problème de dégénérescence des poids, et aussi s'assurer de la convergence de l'estimateur dans le cas général (Doucet et al., 1999), (Doucet et al., 2001).

5.3.3 Filtre de Kalman d'ensemble

Le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF) a initialement été proposé par Evensen (1994) comme une approximation du filtre de Kalman pour le modèle linéaire gaussien. Il a par la suite été étendu pour le modèle non linéaire gaussien et son utilisation a montré des performances remarquables par rapport aux autres méthodes (Evensen, 2006). Le filtre de Kalman d'ensemble est maintenant largement utilisé dans la communauté de l'océanographie grâce à sa formulation simple et son implémentation facile. Son utilisation ne nécessite ni dérivation des opérateurs tangents linéaires et des équations adjointes, ni intégration rétrograde du modèle d'évolution. En effet, au lieu de propager une matrice de covariance, les erreurs sont statistiquement représentées par un nuage de points propagés par les équations d'états, sans aucune linéarisation. Le filtre de Kalman d'ensemble est un filtre de Kalman gaussien et n'est pas un filtre particulaire car il ne gère les erreurs statistiques que jusqu'à l'ordre 2. L'étape d'analyse est ensuite celle d'un filtre de Kalman standard.

Le principe du filtre EnKF est d'évaluer la matrice de covariance empirique P_k^N d'un ensemble d'éléments au lieu d'évaluer la covariance exacte par produit matriciel. La covariance P_k^f est alors remplacée par la covariance empirique P_k^N et le gain de Kalman par le gain empirique K_k^N . L'algorithme du filtre de Kalman d'ensemble peut être décrit de la manière suivante. À partir d'un ensemble de conditions initiales, des particules qui suivent une loi normale, appelées ici ensembles, sont propagées à travers l'équation

d'état du système. À partir de la prédiction de ces ensembles, la matrice de covariance empirique P_k^N est calculée. Ceci permet ensuite de déterminer le gain du filtre de Kalman d'ensemble. Les ensembles corrigés sont ensuite propagés dans le modèle à l'étape $k + 1$. L'algorithme du filtre de Kalman d'ensemble est décrit ci-dessous :

À l'instant initial $t=0$, N éléments sont simulés selon la distribution initiale :

$$x_0^{a,N}, \dots, x_0^{a,N} \sim \mu_0(dx_0) \quad (5.33)$$

À l'instant $k \geq 1$ et $\forall i = 1, \dots, N$, les étapes de prédiction et de correction sont réalisées :

◦ Etape de prédiction

Les N éléments bruités sont propagés selon l'équation du modèle et explorent ainsi l'espace d'état du modèle :

$$X_k^{f,i} = f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i \quad \text{avec} \quad W_k^i \sim \mathcal{N}(0, Q_k) \quad (5.34)$$

La moyenne et la matrice de covariance empirique de ces éléments propagés sont ensuite calculées :

$$m_k^N \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k^{f,i} \quad (5.35)$$

$$P_k^N \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [(x_k^{f,i} - m_k^N)(x_k^{f,i} - m_k^N)^t] \quad (5.36)$$

◦ Etape de correction

Lorsqu'une information y_k est disponible, l'équation de correction du filtre de Kalman est appliquée indépendamment sur chaque élément. Le gain de Kalman empirique K_k^N est alors calculé :

$$x_k^{a,i} = x_k^{f,i} + K_k [y_k - (H_k x_k^{f,i} + v_k^i)] \quad (5.37)$$

$$K_k^N = K_k(P_k^N) = P_k^N H_k^t (H_k P_k^N H_k^t + R_k^N)^{-1} \quad (5.38)$$

R_k^N est la matrice de covariance empirique des bruits de mesure et est définie par :

$$R_k^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (v_k^i)(v_k^i)^t \quad (5.39)$$

L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X_k | Y_{1:k}]$ est alors estimée par la moyenne empirique $m_k^{a,N}$ des éléments d'ensemble :

$$m_k^a \approx m_k^{a,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{a,i} \quad (5.40)$$

et la distribution $\mu_k^a(dx)$ est approximée par la mesure empirique $\mu_k^{a,N}(dx)$ des éléments :

$$\mu_k^a(dx) \approx \mu_k^{a,N}(dx) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_k^{a,i}}(dx) \quad (5.41)$$

Le filtre de Kalman d'ensemble a été développé au départ pour assimiler des observations afin de produire les conditions initiales de modèles océaniques. Cet algorithme d'assimilation a rapidement été repris par la communauté des modélisateurs atmosphériques. De nombreuses applications expérimentales ont été effectuées, tout d'abord avec des modèles simplifiés (Evensen, 1997; Miller et al., 1999), puis avec des modèles atmosphériques plus complexes. De nombreuses comparaisons ont été effectuées avec les algorithmes variationnels tels que le 3D-VAR et le 4D-VAR (Kalnay et al., 2007; Houtekamer et al., 2005), qui sont très souvent utilisés dans les modèles 3D atmosphériques. Il a été montré en général que le filtre de Kalman d'ensemble est supérieur au 3D-VAR, tandis que ses performances sont comparables au 4D-VAR. Ces résultats dépendent bien sûr de la taille de l'ensemble utilisé pour le filtre de Kalman d'ensemble ainsi que celle de la fenêtre d'assimilation du 4D-VAR.

Le filtre EnKF ne requiert pas la linéarité des équations d'états, mais la linéarité de l'opérateur d'observation H_k . Cependant, d'après Evensen, il est pourtant possible d'utiliser l'EnKF pour un système dont l'opérateur d'observation est non linéaire, sans utiliser la linéarisation. De plus, il est essentiel de perturber les observations pour chacun des membres de l'ensemble avec l'estimation de la matrice de covariance d'erreur d'observation R . En effet, comme un échantillon statistique a tendance à s'appauvrir par coalescence des points, l'ajout de bruit dans les observations peut être interprété comme l'adjonction d'une partie stochastique permettant d'enrichir l'échantillon. Ce phénomène est connu sous le nom de propagation du chaos (McKean, 1969).

Contrairement au filtre de Kalman étendu, le filtre de Kalman d'ensemble ne requiert aucune linéarisation du système dynamique auquel il est appliqué. Le filtre de Kalman d'ensemble est basé sur l'hypothèse que les perturbations et les erreurs d'ébauche et d'observations sont gaussiennes et additives, c'est-à-dire déterminées par leur moyenne et leur variance. Le transport de ces perturbations au cours de l'intégration par le système dynamique est censé être aussi linéaire, ce qui implique qu'elles restent gaussiennes au cours de l'étape de prédiction. Ainsi, pour les systèmes fortement non linéaires, le filtre de Kalman d'ensemble n'est pas forcément optimal.

Le comportement asymptotique des filtres particuliers a souvent été étudié contrairement au filtre EnKF. Cependant, des résultats sur le comportement asymptotique du filtre EnKF quand le nombre d'ensembles N tend vers l'infini ont été récemment obtenus (Le Gland et al., 2009). Il a été ainsi prouvé que dans le cas des modèles non linéaires, la limite du filtre EnKF diffère du filtre bayésien (qui est le filtre optimal). La limite existe si la fonction non linéaire f_k est localement lipschitzienne, sa dérivée est localement bornée, et qu'elle ne croît pas trop vite quand N tend vers l'infini, une croissance polynomiale de la fonction f_k est requise. Cette limite n'a cependant pas encore été caractérisée. Pour converger vers le filtre optimal, une approche est de considérer la propagation des éléments d'ensemble comme une distribution d'importance et de pondérer en conséquence les éléments d'ensemble. La détermination de ces poids reste cependant un problème ouvert (Tran, 2009), (Le Gland et al., 2009).

5.3.4 Filtre de Kalman d'ensemble Square Root

Le filtre de Kalman d'ensemble nécessite de perturber les observations, ce qui entraîne des erreurs supplémentaires d'échantillonnage dans l'estimation de la matrice de covariance d'erreur et dans l'étape de prédiction du filtre. C'est pourquoi Tippett et al. (2003) ont introduit une version déterministe du filtre de Kalman d'ensemble appelée filtre de

Algorithme 2 Algorithme du filtre EnKF

InitialisationPour $i = 1, \dots, N$ Générer $x_0^{a,i} \sim \mathcal{N}(0, P_0)$ **A tout instant** $k \geq 1$ **Étape de prédiction** : pour $i = 1, \dots, N$

$$w_k^i \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$$

$$x_k^{f,i} = f_k(x_{k-1}^{a,i}) + w_k^i$$

$$m_k^N \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k^{f,i}$$

$$P_k^N \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [(x_k^{f,i} - m_k^N)(x_k^{f,i} - m_k^N)^T]$$

Étape de correction : pour $i = 1, \dots, N$ Générer $x_0^{a,i} \sim \mathcal{N}(0, R_k)$

$$R_k^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (v_k^i)(v_k^i)^t$$

$$K_k(P_k^N) = P_k^N H_k^t (H_k P_k^N H_k^t + R_k^N)^{-1}$$

$$x_k^{a,i} = x_k^{f,i} + K_k [y_k - (H_k x_k^{f,i} + v_k^i)]$$

Kalman d'ensemble Square Root (SREnKF pour *Ensemble Square Root Filter*) qui permet de s'affranchir de l'ajout de bruit aux observations. Les filtres de Kalman de type Square Root ont été utilisés depuis en météorologie par Bishop et al. (2001) Whitaker and Hamil (2002) Anderson (2001) en se basant sur les travaux initiaux de Andrews (1968). La solution générale a été développée par Andrews (1968) et utilisée par la suite sous diverses formes par Bishop et al. (2001) Whitaker and Hamil (2002) Anderson (2001) et Tippett et al. (2003).

Le filtre de Kalman d'ensemble Square Root utilise les équations du filtre de Kalman usuel pour l'estimation des matrices de covariance d'erreur d'analyse et de prédiction. Les équations d'évolution des matrices de covariance de prédiction P_k^f et d'erreur de correction P_k^a du filtre de Kalman sont les suivantes :

$$P_k^f = F_k P_{k-1}^a F_k^t + Q_k \quad (5.42)$$

$$P_k^a = (I - K_k H_k) P_k^f \quad (5.43)$$

Les matrices P_k^f et P_k^a sont symétriques et définies positives : elles peuvent donc être écrites sous la forme $P_k^f = (X_k^f)(X_k^f)^t$ et $P_k^a = (X_k^a)(X_k^a)^t$ où les matrices X_k^f et X_k^a sont respectivement les matrices racines carrées des matrices P_k^f et P_k^a . Le filtre de Kalman Square Root remplace les équations d'évolution des matrices P_k^f et P_k^a par les matrices racines carrées X_k^f et X_k^a afin de s'affranchir du calcul de l'inversion des matrices P_k^f et P_k^a . Partant de la réécriture de la matrice P_k^a on obtient :

$$\begin{aligned}
P_k^a &= P_k^f - P_k^f H_k^f (H_k P_k^f H_k^t + R_k)^{-1} H_k P_k^f \\
P_k^a &= X_k^f [I - (H_k X_k^f)^t (H_k X_k^f (H_k X_k^f)^t + R_k)^{-1} H_k X_k^f] (X_k^f)^t \\
P_k^a &= X_k^f [I - V_k^t (V_k V_k^t + R_k)^{-1} V_k] (X_k^f)^t
\end{aligned}$$

avec $V_k = H_k X_k^f$ et $D_k = V_k V_k^t + R_k$. Lorsque les erreurs d'observations sont décorréélées, ie la matrice R est diagonale, les observations peuvent être assimilées séquentiellement l'une après l'autre. Dans ce cas V_k est un vecteur colonne et D_k est un scalaire. Une matrice racine carrée de $I - V_k D_k^{-1} V_k$ peut alors être calculée en résolvant l'équation suivante pour le scalaire β_k :

$$I - V_k D_k^{-1} V_k = (I - \beta_k V_k V_k^t)(I - \beta_k V_k V_k^t)^t \quad (5.44)$$

ce qui donne la solution suivante $\beta_k = (D_k + \sqrt{R_k D_k})^{-1}$. La mise à jour des ensembles se fait alors de la manière suivante :

$$X_k^a = X_k^f (I - \beta_k P_k^f) \quad (5.45)$$

6 Estimation des paramètres dans un modèle à espace d'état

On s'intéresse ici à l'inférence bayésienne dans le modèle à espace d'état linéaire et à erreurs gaussiennes :

$$\begin{cases} X_k = F_k X_{k-1} + w_k & (6.1) \\ Y_k = H_k X_k + v_k & (6.2) \end{cases}$$

lorsque le modèle dépend de variables latentes non observables. Ce modèle à espace d'état est décrit par ses probabilités d'émission et de transition :

$$\begin{cases} x_k | x_{k-1}, \theta \sim p_\theta(x_k | x_{k-1}) & (6.3) \\ y_k | x_k, \theta \sim p_\theta(y_k | x_k) & (6.4) \end{cases}$$

où θ représente ici l'ensemble des paramètres inconnus du modèle à espace d'état. Dans les modèles statistiques, il est courant d'avoir des situations où des informations sont incomplètes soit par le manque direct d'informations sur des quantités mesurées ou mesurables, ou soit par une impossibilité d'observer des variables du modèle. Pour un modèle à espace d'état, le problème d'estimation de paramètres inconnus peut être considéré comme un problème d'estimation dans un contexte de données manquantes et permettre ainsi l'utilisation de l'algorithme EM (*Expectation Maximisation*). Le paramètre θ peut également être estimé à l'aide des estimateurs des Moindres Carrés conditionnels mais cette méthode n'a pas été retenue ici.

L'algorithme EM est une classe d'algorithme qui permet de trouver la maximum de vraisemblance des paramètres de modèles probabilistes lorsque le modèle dépend de variables latentes non observables. Initialement conçu par Dempster, Laird et Rubin en 1977 (Dempster et al., 1977) pour l'estimation de paramètres de modèle à partir de données incomplètes, il est devenu l'un des algorithmes les plus utilisés pour estimer

les paramètres d'une chaîne de Markov cachée. Son champ d'application s'est depuis largement étendu. Il est aujourd'hui utilisé dans divers domaines tels la classification de données, en apprentissage machine ou en vision artificielle. L'algorithme EM permet d'associer au problème de données incomplètes un problème de données complètes pour lequel l'estimation du maximum de vraisemblance est plus facile. Il consiste alors à calculer itérativement les paramètres pour lesquels une fonction de densité de probabilité donnée est maximale. Ce procédé se réalise en deux étapes respectives : l'étape E (*Expectation*) et l'étape M (*Maximisation*). Les paramètres obtenus sont appelés estimateurs du maximum de vraisemblance (Bilmes, 1999)

Cette partie est consacrée à la présentation de l'algorithme EM. À la section 1 le cadre général de l'algorithme est tout d'abord présenté ainsi que le principe de vraisemblance et la maximisation de la log-vraisemblance. L'algorithme EM est ensuite décrit à la section 2 où les deux phases de l'algorithme EM, phases d'Expectation et de Maximisation sont détaillées. Le lisseur de Kalman qui intervient dans le calcul de la vraisemblance y est également décrit. La section 3 présente l'utilisation de l'algorithme EM dans le cas de données manquantes. Enfin un bref rappel de ses principales propriétés est donné à la section 5.

6.1 Principe du maximum de vraisemblance

On considère un couple de processus $(Y_n, Z_n)_{n \geq 0}$ où $(Y_n)_{n \geq 0}$ est le processus des données observées notées $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ et $(Z_n)_{n \geq 0}$ le processus des données manquantes notées $\{z_0, z_1, \dots, z_l\}$. On suppose que chaque processus $(Y_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs dans $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ vecteur de données complètes, et que chaque processus $(Z_n)_{n \geq 0}$ est inclus dans un espace vectoriel de dimension finie inclus dans \mathbb{R}^n .

Le principe du maximum de vraisemblance consiste à estimer le paramètre θ en déterminant la valeur des paramètres qui maximise $p(y, \theta)$ la fonction de vraisemblance incomplète du modèle basée uniquement sur les observations disponibles $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$. Le vecteur $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ n'est cependant qu'une observation partielle du phénomène considéré et ses valeurs manquantes sont contenues dans le vecteur $\{z_0, z_1, \dots, z_l\}$. La fonction de vraisemblance incomplète $p(y, \theta)$ est alors une quantité aléatoire dont la maximisation est difficile à réaliser directement. C'est pourquoi on introduit le processus $X_n = (Y_n, Z_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\chi = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ et formé de la concaténation du processus des données incomplètes et du processus des données manquantes $(Y_n, Z_n)_{n \geq 0}$. On appellera ainsi $X_n = (Y_n, Z_n)_{n \geq 0}$ le processus des données complètes.

Soit f_c la fonction de densité de probabilité du processus X_n correspondant au vecteur des données complètes et g la fonction de densité de probabilité du processus des observations $(Y_n)_{n \geq 0}$. Au lieu d'observer le vecteur des données complètes dans χ , on observe le vecteur des données incomplètes $y = y(x)$ dans Y . On obtient ainsi :

$$g(y|\theta) = \int_{\chi(y)} f_c(x|\theta) dx \quad (6.5)$$

où $\chi(y) = \{x \in \chi; y = y(x)\} \subset \chi$ est le sous-espace observable de χ défini par l'équation $y = y(x)$.

En utilisant la formule de Bayes et les propriétés d'indépendance conditionnelle du modèle, on obtient une fonction de vraisemblance complète de la forme suivante :

$$L_c(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n; \theta) = p(y_{1:n}, x_{1:n}; \theta) = p(x_1) \prod_{k=2}^n p(x_k | x_{k-1}; \theta) \prod_{k=1}^n p(y_k | x_k; \theta) \quad (6.6)$$

Or le processus (X_n) n'est pas directement observable : c'est pourquoi la log-vraisemblance complète $L_c = \log L(x, y | \theta)$ de f_c n'est pas calculable explicitement en pratique. Elle est alors remplacée par sa meilleure estimation disponible, à savoir son espérance conditionnellement aux observations $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ et la valeur du paramètre θ de l'itération en cours. L'algorithme EM permet d'estimer cette vraisemblance à l'aide d'une fonction auxiliaire Q qui, dans le cas général de l'algorithme EM pour des modèles à variables latentes, s'écrit sous la forme :

$$Q(\theta, \hat{\theta}_k) = \mathbb{E}[\log(L_c(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n; \theta)) | y_1, \dots, y_n; \theta_k] \quad (6.7)$$

6.1.1 Le lisseur de Kalman linéaire

La fonction $Q(\theta, \hat{\theta}_k)$ de l'algorithme EM s'écrit alors :

$$Q(\theta, \hat{\theta}_k) = \mathbb{E}[p_\theta(x_1) | y_{1:n}] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\log p_\theta(x_{k+1} | x_k) | y_{1:n}] + \mathbb{E}[\log p_\theta(y_k | x_k) | y_{1:n}] \quad (6.8)$$

On remarque que la fonction auxiliaire Q dépend des densités a posteriori de lissage $p(x_k, x_{k+1} | y_{1:n})$ et $p(x_k | y_{1:n})$. La densité $p(x_k | y_{1:n})$ peut se décomposer sous la forme suivante (Briers and Doucet, 2004) :

$$\begin{aligned} p(x_k | y_{1:n}) &= \int_{\Omega} p(x_k, x_{k+1} | y_{1:n}) dx_{k+1} \\ p(x_k | y_{1:n}) &= \int_{\Omega} p(x_{k+1} | y_{1:n}) p(x_k | x_{k+1}, y_{1:k}) dx_{k+1} \\ p(x_k | y_{1:n}) &= p(x_k | y_{1:k}) \int_{\Omega} \frac{p(x_{k+1} | y_{1:n}) p(x_{k+1} | x_k)}{p(x_{k+1} | y_{1:k})} dx_{k+1} \end{aligned} \quad (6.9)$$

La densité de lissage $p(x_k | y_{1:n})$ peut alors se calculer à l'aide d'un algorithme forward-backward comme le lisseur de Kalman. Le principe est alors de filtrer dans l'ordre chronologique (ou "forward") et dans le sens anti-chronologique (ou "backward"). La première phase forward utilise les équations du filtre de Kalman en stockant les moyennes et les matrices de covariance des densités de filtrage $p(x_k | y_{1:k})$ et de prédiction $p(x_{k+1} | y_{1:k})$ pour $k = 1, \dots, n$. La deuxième phase backward pour $k = n-1, n-2, \dots, 1$ permet de calculer les densités lissées de façon récurrente. Le lisseur de Kalman est une correction du filtre de Kalman utilisant uniquement les données provenant du filtre forward. Pour obtenir les états lissés, seuls les états estimés par le filtre forward et le gain de Kalman lissé ont besoin d'être stockés. L'état lissé ne dépend pas des covariances lissées.

La mise à jour "backward", se fait pour $k = n-1, n, \dots, 1$ à partir des densités suivantes :

$$p(x_k | y_{1:k}) = \mathcal{N}(x_k; x_{k|k}^f, P_{k|k}) \quad (6.10)$$

$$p(x_{k+1} | y_{1:k}) = \mathcal{N}(x_{k+1}; x_{k+1|k+1}^f, P_{k+1|k}) \quad (6.11)$$

$$p(x_{k+1} | y_{1:n}) = \mathcal{N}(x_{k+1}; x_{k+1|n}^f, P_{k+1|n}) \quad (6.12)$$

selon les équations suivantes :

$$p(x_k|y_{1:n}) = \mathcal{N}(x_{k|n}^f, P_{k|n}) \quad (6.13)$$

avec :

$$x_{k|n}^f = x_{k|k}^f + K_k(x_{k+1|n}^f - x_{k+1|k}^f) \quad (6.14)$$

$$P_{k|n} = P_{k|k} + K_k(P_{k+1|n} - P_{k+1|k})K_k^t \quad (6.15)$$

$$K_k = P_{k|k}F_{k|k}^t(P_{k+1|k}^f)^{-1} \quad (6.16)$$

Algorithme 3 Algorithme du lisseur de Kalman linéaire

Conditions initiales du filtre

$$x_k^{(s)} = x_k^{(a)} \text{ et } P_k^{(s)} = P_k^{(a)}$$

Etape de lissage : Pour k allant de n-1 à 1 :

$$K_k^{(s)} = P_k^{(a)}F_k^t(P_{k+1}^{(f)})^{-1}$$

$$x_k^{(s)} = x_k^{(a)} + K_k^{(s)}(x_{k+1}^{(s)} - x_{k+1}^{(f)})$$

$$P_k^{(s)} = P_k^{(a)} + K_k^{(s)}(P_{k+1}^{(s)} - P_{k+1}^{(f)})(K_k^{(s)})^t$$

$$P_{k-1,k}^{(s)} = (I - K_k H_k)F_k P_{k-1}^{(a)} + (P_k^{(s)} - P_k^{(a)})(P_k^{(a)})^{-1}(I - K_k H_k)F_k P_{k-1}^{(a)}$$

6.2 Algorithme EM : Étapes d'Expectation et de Maximisation

La fonction auxiliaire Q possède la propriété suivante :

$$\forall(\theta, \theta) \in \Theta \times \Theta, \quad \text{si } Q(\theta^{(k+1)}|\theta^{(k)}) \geq Q(\theta^k|\theta^{(k)}), \quad \text{alors } L(\theta^{(k+1)}|y) \geq L(\theta^{(k)}|y) \quad (6.17)$$

où L est la log-vraisemblance des observations. Cette propriété est démontrée dans l'article de Dempster et al. (1977) et implique que tout accroissement de la fonction Q entraîne un accroissement de la log-vraisemblance L . Dans de nombreux cas, la maximisation de la fonction Q est plus simple que la maximisation directe de la log-vraisemblance L . On peut donc itérer successivement la fonction Q pour espérer obtenir un maximum de la log-vraisemblance. Se basant sur cette propriété de la fonction Q Dempster et al. (1977) ont proposé l'algorithme itératif EM dont le but est de maximiser la log-vraisemblance en procédant à chaque itération k à la maximisation de l'espérance de la log-vraisemblance complète, connaissant les observations et l'estimation courante issue de l'étape $k - 1$ des paramètres θ . Une fois la reconstitution des données manquantes effectuée, il est plus facile de procéder à la recherche du maximum de vraisemblance. Celui-ci se décompose à l'itération k en une succession de deux étapes : l'étape E (Expectation) et l'étape M (Maximisation) décrites ci-dessous.

6.2.1 Etape E

L'étape E consiste à étudier la relation entre la vraisemblance des données complètes et la vraisemblance des données incomplètes. L'algorithme va ainsi déterminer $Q(\theta|\hat{\theta}^{(t)})$ l'espérance de la log-vraisemblance des données complètes par rapport à la distribution conditionnelle des données manquantes sachant les données observées et les valeurs courantes du paramètre θ :

$$Q(\theta^{(k+1)}|\theta^{(k)}) = \mathbb{E}[\log(L_c(\theta^{(k)}|x))] \quad (6.18)$$

6.2.2 Etape M

L'étape M permet de maximiser la fonction obtenue à l'étape E pour estimer les valeurs courantes des paramètres. Ainsi, la prochaine valeur du paramètre Θ , $\Theta^{(t+1)}$ est choisie telle que :

$$Q(\theta^{(k+1)}|\hat{\theta}^{(k)}) \geq Q(\theta|\hat{\theta}^{(k)}), \forall \theta \in \Theta \quad (6.19)$$

Les étapes E et M sont itérées jusqu'à ce que le nombre maximum d'itérations autorisé soit atteint, soit lorsque l'accroissement entre deux itérations de la log-vraisemblance incomplète est négligeable, c'est-à-dire pour un ε_1 fixé :

$$|L(\theta^{(k+1)}) - L(\theta^{(k)})| < \varepsilon_1 \quad (6.20)$$

En pratique, le critère d'arrêt suivant est vérifié pour un ε_2 :

$$\left| \frac{Q(\theta^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}) - Q(\theta^{(k)}, \theta^{(k)})}{Q(\theta^{(k)}, \theta^{(k)})} \right| < \varepsilon_2 \quad (6.21)$$

et on pose $\theta^{(k)}$ comme valeur approchée de $\hat{\theta}^{(k)}$.

Algorithme 4 Algorithme EM

Initialisation : $k \leftarrow 0$ et $\hat{\Theta}^{(0)} = \theta^{(0)}$

Tant que $\|Q(\Theta|\hat{\Theta}^{(k)}) - Q(\Theta|\hat{\Theta}^{(k-1)})\| < \varepsilon$

Etape E : Calcul de l'espérance conditionnelle de la vraisemblance complète

$$Q(\Theta|\hat{\Theta}^{(k)}) = E[L_c(\Theta)|X, \hat{\Theta}^{(k)}]$$

Etape M : Maximisation de $Q(\Theta|\hat{\Theta}^{(k)})$

$$\hat{\Theta}^{(k+1)} = \text{Argmax } Q(\Theta|\hat{\Theta}^{(k)})$$

$k \leftarrow k + 1$

6.2.3 Cas de données manquantes

Pour un modèle à espace d'état linéaire et gaussien la fonction de log-vraisemblance $\log L_Y(\Theta) = \log L(X, Y, \Theta)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \log L(X, Y, \Theta) = & -\frac{1}{2} \{ \log |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)^t \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \\ & + N \log |Q| + \sum_{k=1}^n (x_k - Fx_{k-1})^t Q^{-1} (x_k - Fx_{k-1}) \\ & + N \log |R| + \sum_{k=1}^n (y_k - H_k x_k)^t R^{-1} (y_k - H_k x_k) \} \end{aligned} \quad (6.22)$$

L'algorithme EM consiste à maximiser la fonction de log-vraisemblance à l'aide de la fonction auxiliaire Q définie précédemment et permet ainsi d'estimer les paramètres pour lesquels les dérivées partielles de la fonction $Q(\theta|\hat{\theta})$ par rapport à F, H, Q et R s'annulent. La différentielle de la fonction définie par

$$(\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times p} \times \mathbb{R}^{n \times n}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(F, H, Q, R) \longmapsto Q(\theta, \hat{\theta})$$

s'annule aux points $(\hat{F}_{k+1}, \hat{H}_{k+1}, \hat{Q}_{k+1}, \hat{R}_{k+1})$ avec les estimateurs notés $\hat{F}_{k+1}, \hat{H}_{k+1}, \hat{Q}_{k+1}, \hat{R}_{k+1}$ et définis par :

$$\hat{F}_{k+1} = \sum_{k=2}^N \mathbb{E}(x_k(x_{k-1})^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) \left(\sum_{k=2}^N \mathbb{E}(x_{k-1}(x_{k-1})^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) \right)^{-1} \quad (6.23)$$

$$\hat{H}_{k+1} = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(y_k(x_k)^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) \left(\sum_{k=2}^N \mathbb{E}(x_k(x_k)^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) \right)^{-1} \quad (6.24)$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=2}^N \mathbb{E}(x_k(x_{k-1})^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) - \hat{M}_{k+1} \sum_{k=2}^N \mathbb{E}(x_{k-1}(x_{k-1})^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) \right)^{-1} \quad (6.25)$$

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^N \mathbb{E}(y_k(y_k)^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) - \hat{H}_{k+1} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(y_k(x_k)^t | y_{1:k}; \hat{\theta}_k) \right) \quad (6.26)$$

Dans le cas d'absence de contraintes sur les matrices F , H , Q , R , les paramètres estimés $\hat{F}, \hat{H}, \hat{Q}, \hat{R}$ de Θ sont les suivants (Digalakis et al., 1993; Gyau-Boakye and Schultz, 1994) :

$$\hat{F} = A_4 A_3^{-1}, \hat{H} = A_6 A_1^{-1}, \hat{Q} = A_2 - A_4 A_3^{-1} A_4^t, \hat{R} = A_5 - A_6 A_1^{-1} A_6^t, \mu_0 = x_0, \sigma_0 = P_0$$

où les matrices A_1, A_2, \dots, A_6 sont définies de la manière suivante :

$$A_1 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x_k x_k^t \quad A_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k x_k^t \quad A_3 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{k-1} x_{k-1}^t$$

$$A_4 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k x_{k-1}^t \quad A_5 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N y_k y_k^t \quad A_6 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N y_k x_k^t$$

S'il y a des observations manquantes, alors le processus Y_k et l'opérateur H_k des équations de mise à jour dans l'étape de prédiction du filtre de Kalman doivent être modifiées en conséquence. La procédure est la suivante, d'après Gyau-Boakye and Schultz (1994) :

- (i) Les observations manquantes sont remplacées par des zéros dans le vecteur y_k .
- (ii) Les lignes (ou colonnes) correspondantes de H sont également remplacées par des zéros.
- (iii) Les espérances conditionnelles sont remplacées par :

$$E[y_k | Y, \Theta^{(r)}] = \begin{cases} y_t & \text{si observée} \\ H_k^{(m)} E[x_k | Y, \Theta^{(r)}] & \text{si manquante} \end{cases}$$

$$E[y_k y_k^t | Y, \Theta^{(r)}] = \begin{cases} y_k y_k^t & \text{si observée} \\ R^{(m)} + H_k^{(m)} E[x_k x_k^t | Y, \Theta^{(r)}] (H_k^{(m)})^t & \text{si manquante} \end{cases}$$

$$E[y_k x_k^t | Y, \Theta^{(r)}] = \begin{cases} y_k E[x_k | Y, \Theta^{(r)}] & \text{si observée} \\ H_k^{(m)} E[x_k x_k^t | Y, \Theta^{(r)}] & \text{si manquante} \end{cases}$$

6.3 Propriétés de l'algorithme EM

L'algorithme EM a les propriétés intéressantes suivantes : sous hypothèse d'existence, l'estimateur du maximum de vraisemblance est consistant, sans biais et asymptotiquement gaussien. L'algorithme EM est peu coûteux en mémoire car il n'a pas besoin d'emmagasiner la matrice d'information ni son inverse et est stable numériquement. La vraisemblance croît à chaque itération (excepté à un point fixe de l'algorithme) et la croissance monotone de la vraisemblance à chaque itération permet de contrôler la convergence de l'algorithme EM. Sous certaines hypothèses, l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement convergent pour l'estimation du paramètre θ et la convergence se fait presque toujours à un maximum local. Il peut arriver toutefois que ça ne soit pas le cas : le choix de Θ^0 est mal adapté, ou alors il y a présence d'une pathologie locale dans la fonction de log-vraisemblance. Enfin, il peut être utilisé pour fournir des valeurs estimées des données manquantes (Wang, 2001), (Wu, 1983), (Xu and Jordan, 1996).

L'algorithme EM possède cependant les inconvénients suivants : il n'a pas de procédure incluse qui pourrait produire la matrice de variance-covariance des paramètres estimés. Il peut converger très lentement même lorsqu'il y a beaucoup d'informations manquantes. La convergence de l'algorithme *EM* repose sur le fait que la valeur maximisant localement la log-vraisemblance constitue un point fixe de la fonctionnelle de mise à jour des paramètres à chaque itération. Il n'est donc pas certain que l'algorithme EM convergera à un maximum global ou local lorsqu'il y a plusieurs maxima. L'algorithme peut ainsi converger localement (i.e se retrouver bloqué) dans un point selle. De plus, la valeur de l'estimateur à la convergence peut dépendre fortement de la position initiale. Enfin, pour certains problèmes, l'étape E peut être analytiquement impossible à trouver.

7 Conclusion

Dans cette partie ont été abordées des méthodes bayésiennes pour l'estimation d'état de systèmes linéaires et non linéaires. Les modèles à espaces d'état permettent d'estimer l'état d'un système dynamique en combinant plusieurs sources d'observations pondérées par un terme d'erreur. L'objectif est d'estimer une variable cachée. Dans le cas de système linéaire gaussien, le principal critère d'optimalité est le filtre de Kalman équivalent dans ce cas à l'estimateur BLUE. Cette approche constitue une méthode analytique optimale car le filtre de Kalman linéaire donne dans ce cas la solution exacte au problème de filtrage bayésien optimal. Le calcul des matrices de covariance est cependant le principal inconvénient. Pour les systèmes non linéaires, la solution exacte n'existe pas dans le cas général. Ainsi diverses techniques sous-optimales ont été développées, qui peuvent être répertoriées en deux catégories : les méthodes analytiques (EKF, UKF) et les méthodes basées sur des simulation de type Monte-Carlo (filtrage particulière et filtrage d'ensemble). Dans la formulation première du filtre de Kalman d'ensemble, il est nécessaire de bruitez les observations. Une version améliorée de l'EnKF permet de passer outre cette étape et d'utiliser directement les observations non bruitées dans l'estimation.

L'estimation de paramètres dans le modèle à espace d'état linéaire et gaussien a également été abordée. En utilisant les estimations lissées par le lisseur de Kalman de l'espérance et de la variance des états successifs, l'algorithme EM basé sur la maximisation de la vraisemblance du modèle permet d'estimer les paramètres de ce modèle. Dans le cas où les observations sont incomplètes, les quantités calculées par le lisseur de Kalman sont modifiées en conséquence.

Chapitre 3

Dispositif expérimental, techniques de mesure, analyse de l'écoulement

Sommaire

1	Introduction	62
2	Montage expérimental	64
2.1	Système d'alimentation du fluide	64
2.2	Veine hydrodynamique	65
2.3	Profil utilisé	66
3	Instrumentation de la manipulation	68
3.1	Vélocimétrie par image de particules PIV	68
3.1.1	Principe	68
3.2	Mise en œuvre de la PIV	69
3.2.1	Ensemencement	69
3.2.2	Source Laser	69
3.2.3	Systèmes d'enregistrement des images	69
3.2.4	Traitement des images de particules	70
3.2.5	Post-traitement	71
3.3	Estimation de la précision	71
3.3.1	Effet de peak-locking	71
3.3.2	Répartition des vitesses de l'écoulement	72
3.3.3	Convergence des moyennes statistiques	73
4	Anémométrie film chaud	75
5	Résultats expérimentaux	76

1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une présentation de l'écoulement étudié et des différents régimes de l'écoulement ainsi que du dispositif expérimental et des techniques de mesure utilisées lors de cette thèse : la vélocimétrie par image de particule et la mesure par anémométrie film chaud, réalisées ici sur une configuration bidimensionnelle de l'écoulement autour d'un profil NACA0012 pour des angles d'incidence de 10° , 15° , 20° , 30° et à des nombres de Reynolds $Re=1000$ et $Re=2000$. Pour ces différentes configurations étudiées, les champs de vitesse de l'écoulement sont obtenus par Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) résolue en temps sur un temps d'acquisition permettant d'obtenir des séries temporelles de 2048 et 10244 champs. L'établissement de grandes bases de données constituées par les champs de vitesse PIV résolus en temps permet ainsi, outre la construction du modèle réduit par POD, de tester des méthodes de calibration du modèle réduit sur un large temps d'assimilation ainsi que la réduction du nombre de snapshots contenues dans ces bases. Des mesures par anémométrie film chaud synchronisées avec la PIV sont réalisées dans le sillage du profil NACA0012 et utilisées ensuite pour reconstruire l'écoulement $u(x,y,t)$ sur l'ensemble du domaine d'acquisition en utilisant un signal de nature physique différente.

Cet écoulement de référence a largement été étudié en laboratoire dans le cadre de conventions avec la DGA et la DRET et également dans l'application au vol battu. Des comparaisons expérimentales et numériques ont été menées sur l'écoulement naissant autour de ce profil. Des visualisations par PIV et PTV (*Particle Tracking Velocimetry*) sur un profil NACA0012 pour des nombres de Reynolds compris entre 600 et 2400 ont été réalisées par (Huang et al., 2001). Il existe peu d'études numériques instationnaires d'écoulements autour de profils d'aile à des nombres de Reynolds comparables. On peut citer les travaux de Wang (1995), qui étudie d'abord des profils NACA0012 à bas nombre de Reynolds, légèrement inclinés. Ses calculs sont effectués à un nombre de Reynolds de 1000, à l'aide d'un code DNS pour un écoulement incompressible en deux dimensions. Sur le plan numérique, on peut également citer les travaux de Nair and Sengupta (1997) pour la simulation numérique directe du sillage tourbillonnaire de cylindres de forme elliptique pour des nombres de Reynolds de 3000 et 10000 et des angles d'incidences de 10° , 12° et 30° . Ces simulations ont permis d'approfondir l'étude de Huang et al. (2001) et également de fournir la répartition de pression engendrée à la surface du profil par les différents tourbillons. Une étude numérique sur les performances d'un profil à des nombres de Reynolds compris entre 1000 et 6000 a été réalisée par Kunz (2001) mais sans toutefois aborder le cas des grandes incidences avec lâchers tourbillonnaires. Une étude sur les profils en oscillation dans la phase de démarrage a été réalisée par Ohmi et al. (1990). Sur la figure 3.1 est montré un exemple de visualisation par traceurs électrochimiques pour un profil NACA0012 avec angle d'incidence de 45° et pour un nombre de Reynolds de 1000, qui permet de mettre en évidence la dynamique tourbillonnaire générée dès les premiers instants (Pineau et al., 1994). De telles études ont également été menées sur des profils oscillants de type NACA0012 et NACA0015 pour les premiers instants de démarrage (Ohmi et al., 1990). Enfin, récemment les recherches entreprises sur la compréhension de la formation tourbillonnaire et de leurs structures dans le cadre d'un mouvement de vol battu expérimentalement et numériquement ont montré la sensibilité de tels écoulements à l'angle d'incidence du profil et aux phases d'accélération et de décélération, figure 3.2 (Jardin et al., 2009).

L'objectif étant ici de travailler sur des écoulements possédant en fonction d'un faible nombre de paramètres des dynamiques tourbillonnaires différentes, cet écoulement a été choisi comme état de référence. Les nombres de Reynolds basés sur la corde qui sont ici mis en jeu sont faibles, ce qui permet de faire l'hypothèse que les mécanismes physiques mis en jeu restent bidimensionnels. La turbulence étant absente à de tels nombres de Reynolds, l'écoulement n'est constitué que de tourbillons. Les différents type de lâchers tourbillonnaires d'un profil NACA0012 en fonction de l'angle d'incidence et du nombre de Reynolds ont été ainsi déterminés par Huang et al. (2001) (Figures 3.3 et 3.4). Plusieurs régimes de tourbillons en fonction de l'incidence peuvent être distingués. Pour chacun de ces régimes, l'identification de la structure du lâcher tourbillonnaire au voisinage du profil est faite en se basant sur la classification proposée par Huang et al. (2001) : type A « attached low », type B « trailing edge vortex », type C « separation vortex », type D « leading edge vortex », type E « bluff body effect ».

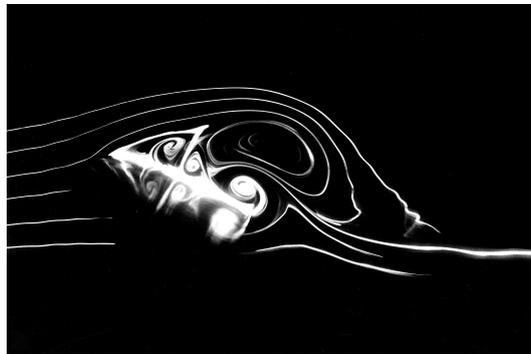


FIGURE 3.1 – Visualisation par traceurs chimiques de l'écoulement naissant autour d'un Naca 0012 pour un nombre de Reynolds de 1000 (d'après (Pineau et al., 1994))

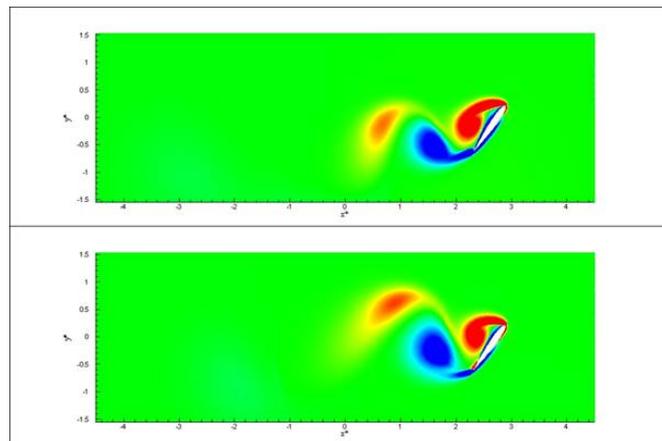


FIGURE 3.2 – Comparaison DNS/PIV 2D2C dans la phase de décélération du mouvement d'uptroke de l'écoulement autour d'un profil Naca 0012. (Jardin et al., 2009)

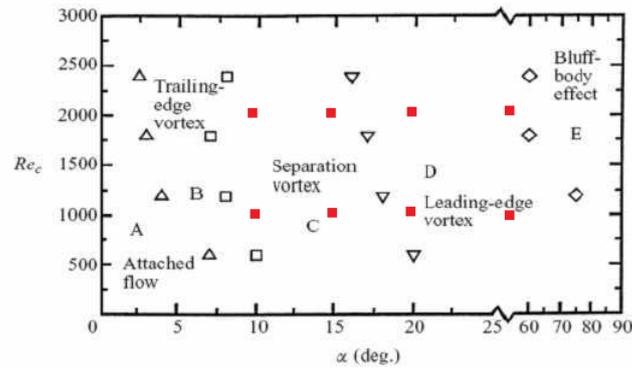


FIGURE 3.3 – Classification des différents types de lâcher tourbillonnaire en fonction de l'incidence et du nombre de Reynolds.

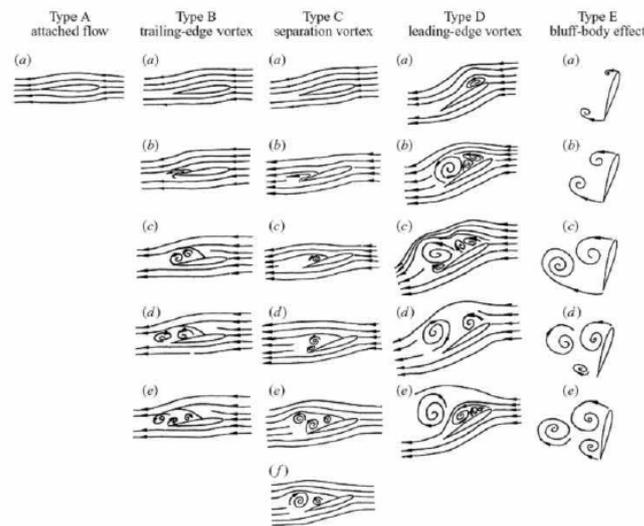


FIGURE 3.4 – Description de chaque type de lâcher tourbillonnaire

2 Montage expérimental

2.1 Système d'alimentation du fluide

L'alimentation du fluide dans la veine hydrodynamique est réalisée par une cuve principale de $1m^3$ (située à droite sur la figure 3.5). Afin de pouvoir réaliser les différentes mesures et visualisations, le circuit fonctionne en boucle fermée. Le niveau d'eau dans la cuve est maintenu identique afin d'avoir une pression constante dans la veine hydrodynamique. Le fluide est acheminé dans la veine hydrodynamique grâce à un système de trois pompes PCM Moineau, à rotor excentré, à vis sans fin, pilotées au moyen de motoréducteurs Leroy Somer et de variateurs de vitesse. Ces pompes ont un débit constant proportionnel à leurs vitesses de rotation. La gamme de débit de ces pompes est donnée au tableau 3.3. Des rotamètres placés entre les pompes et la veine hydrodynamique indiquent le débit alimentant le jet et l'écoulement principal.



FIGURE 3.5 – Photo d'ensemble du dispositif expérimental.

Pompe	Gamme de débit
1	28-160 L/h
2	150-13000 L/h
3	1200-10000 L/h

FIGURE 3.6 – Gamme de variation de débit des trois pompes PCM Moineau.

2.2 Veine hydrodynamique

Les mesures expérimentales ont été réalisées dans une veine hydrodynamique en alu-tuglass avec des plaques de 10 mm d'épaisseur. Elle est constituée de quatre parties distinctes :

- **Partie 1 : zone d'entrée** Le fluide est introduit dans la veine par les pompes via un réseau de tuyau en PVC. Le jet d'eau passe ensuite dans un diffuseur rond de 20mm percé de 6 orifices qui oblige une répartition radiale homogène du fluide dans le tube d'entrée de diamètre 70mm. Un croisillon placé dans ce tube permet une première élimination des structures tourbillonnaires axiales. Le fluide arrive ensuite dans un divergent dont l'angle au sommet est de 22.5° qui impose le passage du liquide d'une section circulaire de diamètre 70mm à la dimension de la zone de visualisation carrée de 160mm de côté.
- **Partie 2 : zone de stabilisation et d'homogénéisation** Dans cette zone le fluide passe au travers de 3 grilles métalliques à mailles très fines afin de casser les structures tourbillonnaires. Le fluide traverse ensuite un réseau de pailles très resserrées de longueur 100mm chacune. Ces pailles servent à uniformiser et stabiliser l'écoulement.
- **Partie 3 : zone de visualisation** Le fluide arrive ensuite dans la zone de visualisation. C'est dans cette portion de la veine que l'écoulement en aval de l'obstacle est visualisé. Sa section est de 160mm de côté et sa longueur de 800mm. L'obstacle

est placé à 200mm du réseau de pailles.

- **Partie 4 : zone de sortie** Cette partie est constituée par un convergent et un tube de sortie de dimensions identiques au divergent d'entrée. Elle raccorde la veine hydrodynamique au réseau principal et assure l'évacuation du liquide.



FIGURE 3.7 – Veine hydrodynamique - Zone de visualisation.

2.3 Profil utilisé

On utilise un profil NACA0012 en résine transparente. Ses dimensions sont de 60mm pour la longueur de la corde et de 160mm pour l'envergure. Le profil s'insère dans la veine carrée de largeur 160mm. Le profil n'est fixé qu'à une extrémité via une plaque plane encastrée dans la paroi, l'autre étant libre. Le rapport à l'allongement est de 2.3 et ne permettra pas complètement de s'affranchir des effets des parois. On considère les angles d'incidence suivants : 0° , 10° , 15° , 20° et 30° .

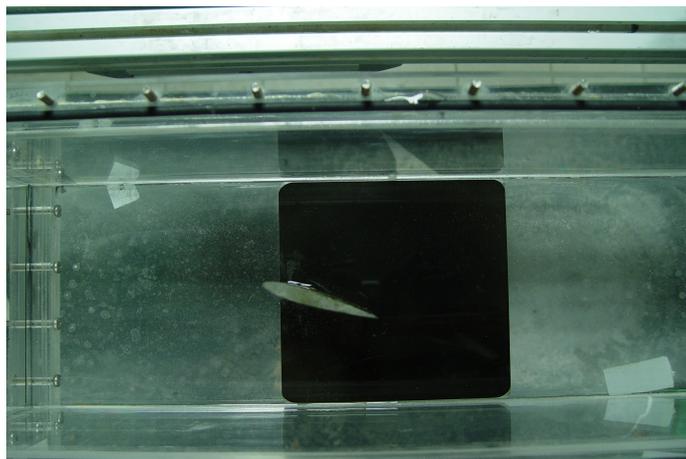


FIGURE 3.8 – Profil NACA0012 incliné à 20° .

La dynamique d'un écoulement de sillage est caractérisée par son nombre de Reynolds R_e et son nombre de Strouhal S_t définis respectivement comme suit :

$$R_e = \frac{U_0 c}{\nu} \quad \text{et} \quad S_t = \frac{f_t c}{U_0}$$

où U_0 est la vitesse à l'infini en amont du profil NACA0012, c la longueur de corde du profil NACA0012 et ν , la viscosité cinématique du fluide. Dans la suite, les coordonnées des vitesses seront exprimées conventionnellement adimensionnées avec la longueur c de la corde du profil NACA0012. On considère deux nombres de Reynolds : $R_e = 1000$ pour lequel $U_0 = 16.667 \text{ mms}^{-1}$ et $R_e = 2000$ pour lequel $U_0 = 33.333 \text{ mms}^{-1}$. Le nombre de Reynolds R_e est un nombre adimensionnel qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Quant au nombre de Strouhal S_t il définit la fréquence adimensionnée du lâcher tourbillonnaire.

Le spectre temporel de la vitesse en un point de l'écoulement présente un pic important à la fréquence du lâcher tourbillonnaire. Deux exemples de densité spectrale de puissance pour les cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et $R_e = 2000$ au point de coordonnées ($X/c = 0, Y/c = 1$) sont donnés à la figure 3.9. Sur les deux spectres on observe un pic correspondant au lâcher tourbillonnaire à une fréquence $f_t = 0.0832 \text{ Hz}$ pour le cas $R_e = 1000$ et $f_t = 0.1536 \text{ Hz}$ pour le cas $R_e = 2000$. Ces deux fréquences correspondent respectivement à un nombre de Strouhal $S_t = 0.265$ et $S_t = 0.276$. Les nombres de Strouhal S_t et le nombre de détachements tourbillonnaires correspondant selon les configurations étudiées sont donnés au tableau 3.1.

$\alpha(^{\circ})$	10	10	15	15	20	20	30	30
R_e	1000	2000	1000	2000	1000	2000	1000	2000
S_t	0.334	0.288	0.345	0.149	0.265	0.276	0.161	0.207
$f_t(\text{Hz})$	0.0928	0.16	0.0960	0.0832	0.0736	0.1536	0.0448	0.1152

TABLE 3.1 – Nombre de Strouhal en fonction des configurations testées.

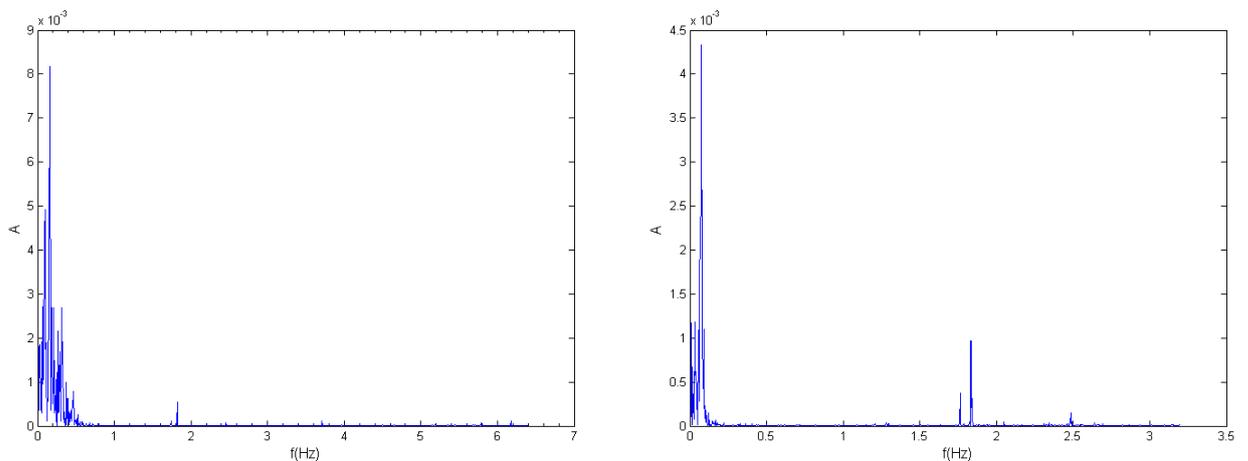


FIGURE 3.9 – Densité spectrale de puissance pour les cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et $R_e = 2000$ et $X/c = 0, Y/c = 1$

α	10	10	15	15	20	20	30	30
R_e	1000	2000	1000	2000	1000	2000	1000	2000
N_{vortex}	15	13	15	7	12	12	7	9

TABLE 3.2 – Nombre N_{vortex} de lâchers tourbillonnaires en fonction des configurations testées.

3 Instrumentation de la manipulation

3.1 Vélocimétrie par image de particules PIV

3.1.1 Principe

La Vélocimétrie par Imagerie de Particules (PIV) est une technique non-intrusive de diagnostic d'imagerie qui permet la détermination des deux composantes de la vitesse instantanée dans une section bidimensionnelle d'un écoulement fluide. Cette technique est qualifiée de PIV2D-2C et repose sur la mesure planaire des deux composantes de vitesse colinéaires au plan de mesure. Cette approche est largement utilisée en mécanique des fluides expérimentale. Le principe de la PIV2D-2C est brièvement rappelé, pour une description détaillée de cette méthode on pourra se référer à Raffel et al. (1998), Stanislas et al. (2004), Scröder and Willert (2008) ou Adrian (2005).

Le principe général de cette méthode consiste à ensemençer l'écoulement à l'aide de particules, appelées traceurs, solides ou fluides et d'éclairer ensuite par une source LASER un plan de l'écoulement en deux instants successifs. Deux impulsions LASER espacées d'un intervalle de temps Δt sont générées pour obtenir deux éclairagements de l'écoulement. À chaque impulsion LASER correspond une acquisition d'images de particules par une caméra digitale synchronisée au système LASER. Les images obtenues sont nécessaires pour déterminer la vitesse des particules grâce à une corrélation entre les deux images. Ce principe de corrélation des images de particules, nommé inter-corrélation, est présenté sur la figure 3.10.

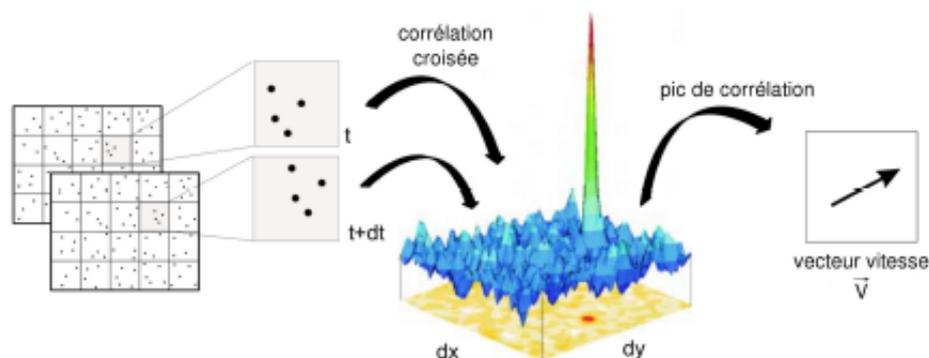


FIGURE 3.10 – Schéma explicatif du calcul des champs de vitesse par la méthode de PIV.

Le but est de déterminer un motif de la première image qui soit le plus statistiquement identique avec un motif de la seconde image. Pour cela, chacune des deux images est divisée en un nombre de sous-fenêtres sur lesquelles est déterminé par inter-corrélation des niveaux de gris le déplacement des particules entre deux instants. Le résultat de cette

corrélation est un pic distinct des autres pics de l'espace d'une fenêtre et qui représente le déplacement le plus probable des particules dans cette fenêtre d'analyse. Le résultat de cette corrélation est un pic plus ou moins distinct des autres pics sur l'espace d'une fenêtre. Il représente le déplacement privilégié des particules dans cette fenêtre d'analyse. Les vecteurs vitesses sont évalués à partir de la position des principaux pics de corrélation sur chaque fenêtre d'analyse de l'image. Sachant le temps entre deux enregistrements Δt et le déplacement des particules $\Delta \vec{d}$, la vitesse \vec{V} est déduite selon l'équation suivante :

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{d}}{\Delta t} \quad (3.1)$$

La qualité de la mesure dépend de la distinction du pic de corrélation évaluée par le rapport signal sur bruit calculé ici comme le rapport entre le pic principal et le pic secondaire. L'amélioration de la précision du pic de corrélation dans le plan peut être réalisée avec une approximation de l'enveloppe le constituant par une fonction d'interpolation sub-pixel. Elle permet d'obtenir une localisation en fraction des pixels.

3.2 Mise en œuvre de la PIV

3.2.1 Ensemencement

L'ensemencement de la cuve est effectué avec des billes de verre creuses de diamètre $d_p = 15\mu\text{m}$ et de masse volumique $\rho = 1.06\text{g/cm}^3$. La concentration est fixée de sorte que le nombre de particules par fenêtre d'interrogation soit environ égal à 10. Le volume d'une fenêtre d'interrogation est $V_f = S_f * e = 33.177\text{cm}^3$ avec S_f la surface de la fenêtre et e l'épaisseur de la nappe LASER. Le nombre N_p de particules introduites dans la cuve est $N_p = 0.946 * 10^9 * 10/33.177 \approx 4.5 * 10^9$. Soit $C \approx 9.0847 * 10^8\text{p/m}^3$. La masse m_p d'une particule est $m_p = \rho\pi d^3/6$ ce qui correspond à une masse totale de d'environ 5g pour l'ensemencement du volume considéré. Afin de prendre en compte les effets de sédimentation ainsi que la non-homogénéité des particules on introduit dans la cuve 6g de particules.

3.2.2 Source Laser

L'éclairage du plan de mesure d'épaisseur 1mm est réalisé avec un LASER type Nd-YAG de la marque Quantel pulsé qui possède une énergie de $2*120\text{mJ}$ et deux cavités indépendantes. L'intervalle de temps Δt entre les deux flashes laser est adapté en fonction de la vitesse de l'écoulement considéré.

3.2.3 Systèmes d'enregistrement des images

Une caméra Pulnix Dual tap Accupixel équipée d'un capteur 2048×2048 pixels, et de dynamique de codage 12bits (utilisée ici en 8 bits) enregistre les images de particules dans le plan médian du profil à intervalle de temps régulier. Ce dernier est fixé à $\Delta t = 78\text{ms}$ pour $\text{Re}=1000$ et $\Delta t = 39\text{ms}$ pour $\text{Re}=2000$ ce qui correspond respectivement à des fréquences d'acquisition f_{piv} de la PIV de $f_{piv} = 6.4\text{Hz}$ et $f_{piv} = 12.8\text{Hz}$. La vitesse maximale mesurable est définie comme fraction de la fenêtre d'interrogation de la PIV :

$$\|V\|_{max} \leq \alpha M \frac{L_{int}}{\Delta t} \quad (3.2)$$

où $\alpha=0.25$ et M est le coefficient de grandissement transformant les pixels en mm. Le déplacement maximal des particules est fixé à 8 pixels soit un quart de fenêtre pour un fenêtrage 32×32 pixels. On se base sur une vitesse caractéristique U_0 égale à la vitesse maximale de l'écoulement. Pour $R_e=1000$ et pour un coefficient de calibration $M=0.162$, on observe un déplacement des particules de $\Delta x = 1.3\text{mm}$ soit 8 pixels, c'est-à-dire le quart de fenêtre pour un fenêtrage de 32×32 pixels. L'acquisition est réalisée avec le logiciel HIRIS (R&D Vision) et un générateur de délai E&G (RD Vision).

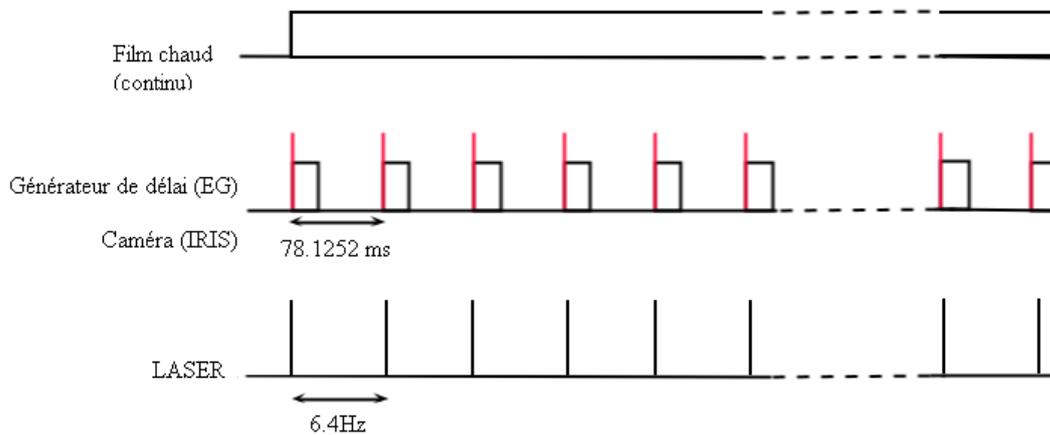


FIGURE 3.11 – Chronogramme : procédure d'acquisition du système PIV2D-2C (Cas $R_e=1000$)

3.2.4 Traitement des images de particules

Une soustraction de la moyenne des niveaux de gris sur une série d'images est tout d'abord réalisée, ce qui permet de supprimer les éventuelles réflexions parasites sur l'image. Un masque est ensuite appliqué autour du profil NACA0012 sur les images afin de déterminer la région où la corrélation ne doit pas être effectuée. Les images sont ensuite analysées séparément 2 à 2 pour obtenir les champs bidimensionnels de vitesse de l'écoulement. La corrélation croisée entre les images de particules est réalisée à l'aide du logiciel Davis 7.2 (LaVision). Une FFT (*Fast Fourier Transform*) standard est réalisée pour les premières passes ainsi que pour les passes finales. Les données acquises sont résolues en temps, on procède donc à une corrélation séquentielle. Ainsi, pour des images obtenues aux instants $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots, t + k\Delta t$ on calcule les champs de vitesses aux instants $t + \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{3\Delta t}{2}, t + \frac{5\Delta t}{2}, \dots, t + \frac{(k+1)\Delta t}{2}$. Le traitement du champ bidimensionnel est un traitement par multipasses avec des tailles adaptatives de fenêtre qui utilise des algorithmes itératifs avec décalage et déformation locale des fenêtres d'analyse. La méthode adaptative multipasses adoptée consiste tout d'abord à effectuer un premier calcul de corrélations croisées sur des fenêtres d'interrogation de taille relativement grande. Les sous-fenêtres sont décalées du déplacement calculé à la première itération jusqu'à la résolution souhaitée. Ces fenêtres sont ensuite scindées en 4 sous-fenêtres égales sur lesquelles le calcul de corrélation est réitéré. Afin de ne pas perdre d'informations d'une fenêtre d'interrogation à l'autre, un recouvrement de 75% entre deux fenêtres adjacentes est imposé lors de la première passe et de 50% lors de la seconde passe. Cela permet d'utiliser les informations non contenues dans une fenêtre d'interrogation dans une fenêtre différente

chevauchant en partie la première. L'accumulation des passes permet de stabiliser et de faire converger la solution. Cela limite les pertes de particules d'une fenêtre à l'autre, la résolution spatiale et la précision des résultats sont alors améliorées. Une fonction de pondération donne également de l'importance aux particules au centre de la fenêtre de corrélation en utilisant une fonction gaussienne. Cette fonctionnalité s'avère cependant coûteuse en temps de calcul. Dans ce travail, on a recours à un calcul en deux itérations dont les paramètres sont listés dans le tableau 3.12. La fréquence d'acquisition f_{piv} de la PIV varie en fonction du nombre de Reynolds. Ainsi, pour les écoulements à $Re = 1000$ on a $f_{piv} = 6.4H_z$ et pour les écoulements à $Re = 2000$ on a $f_{piv} = 12.8H_z$. L'ensemble des acquisitions réalisées est résumé dans le tableau 3.3.

Fenêtrage	Nombre de passes	Recouvrement	Fonction de pondération
64×64	1	75%	□
32×32	2	50%	○

FIGURE 3.12 – Paramètres du traitement des champs PIV.

α	0	0	10	10	15	15	20	20	30	30
Re	1000	2000	1000	2000	1000	2000	1000	2000	1000	2000
<i>Images</i>	2048	10244	2048	10244	2048	10244	2048	10244	2048	10244

TABLE 3.3 – Ensemble des acquisitions réalisées.

3.2.5 Post-traitement

Le critère de validation utilisé ici pour détecter et supprimer les vecteurs aberrants est la "validation par pics" dont le principe consiste à écarter les vecteurs dont le rapport premier pic/second pic de corrélation (rapport signal/bruit) est inférieur à une valeur seuil notée Q , fixée ici à 1.5. Les vecteurs dont la norme présente un écart à la médiane compris entre 1.5 et 2.5 fois la valeur rms sont supprimés et remplacés par les valeurs estimées à partir des pics de corrélation secondaires.

3.3 Estimation de la précision

3.3.1 Effet de peak-locking

L'erreur de biais dans les mesures se définit comme l'écart entre le déplacement réel et la moyenne des déplacements mesurés. Cette erreur provient de l'utilisation d'un maillage discret de pixels pour représenter les particules et également détecter la position la plus probable du pic de corrélation. Cela induit d'une part une différence entre la position d'une particule et son image, l'erreur de biais augmente ainsi avec le rapport taille de pixel/diamètre de particule, et d'autre part une convergence des déplacements calculés vers des valeurs en nombre entier de pixels. Ces phénomènes sont qualifiés de « peak-locking » et dépendent de la méthode de corrélation utilisée. Le logiciel Davis 7.2 (La-Vision) traite ce problème par une approximation gaussienne trois points des pics de corrélation. L'effet de peak-locking se matérialise lors d'une position de pic proche de $k + 0,5$ pixels, avec $k \in \mathbb{R}$. La précision de la localisation du pic de corrélation est réduite

en raison de l'échantillonnage au pixel de la fonction de corrélation et de la dissymétrie des positions des trois points servant à la détermination des fonctions d'approximation (point du pic de corrélation et les deux points l'entourant).

Afin de quantifier ce phénomène, quatre histogrammes des valeurs de déplacement des composantes u et v de l'écoulement en fraction de pixel sont représentés sur les figures 3.13 et 3.14 pour $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$ et $R_e=2000$ respectivement. On peut remarquer que les déplacements en demi-pixel sont présents dans les champs de vitesse et que la répartition des valeurs ne favorise aucune tendance pour les déplacements entiers ou demi-entiers.

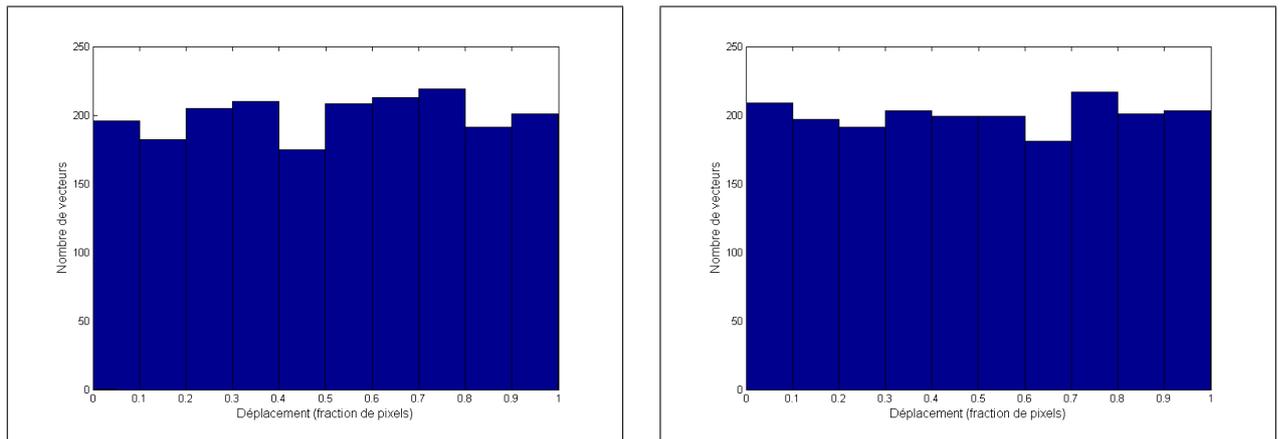


FIGURE 3.13 – Histogrammes des déplacements en fraction de pixels (*effet de peak-locking*) - $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$

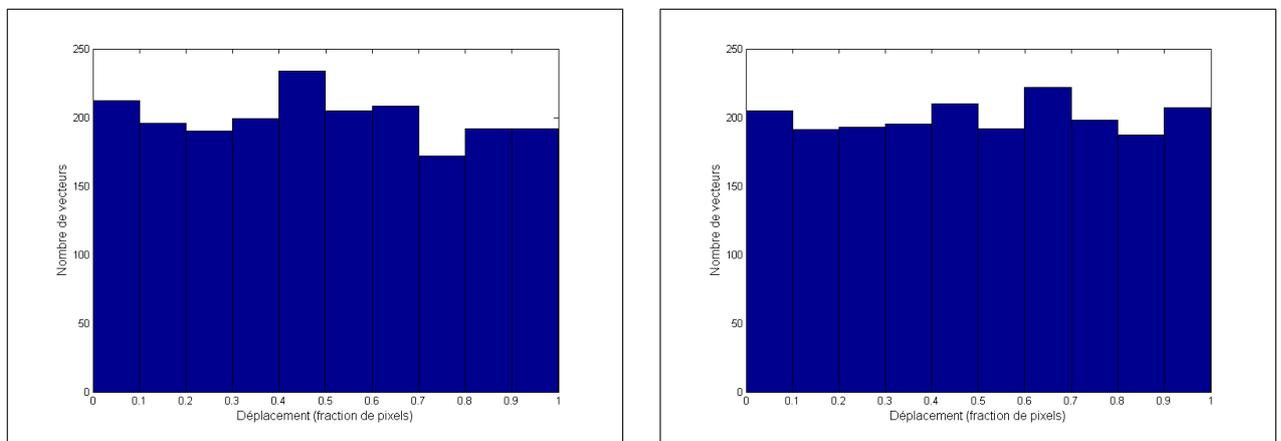


FIGURE 3.14 – Histogrammes des déplacements en fraction de pixels (*effet de peak-locking*) - $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=2000$

3.3.2 Répartition des vitesses de l'écoulement

Des histogrammes de vitesse ont été réalisés au point de coordonnées $(X/c = 1, Y/c = 0)$ de l'écoulement afin de détecter la présence d'histogrammes situés en queue de loi normale. La contribution de ces histogrammes entraîne une légère modification de la moyenne mais elle devient toutefois importante sur les moments d'ordre supérieur. Les résultats ont mis en évidence que, dans la plupart des cas, l'histogramme présentait une

allure gaussienne. Deux exemples d'histogrammes de vitesse sont donnés figure 3.15 dans les cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e=1000$ et $R_e=2000$.

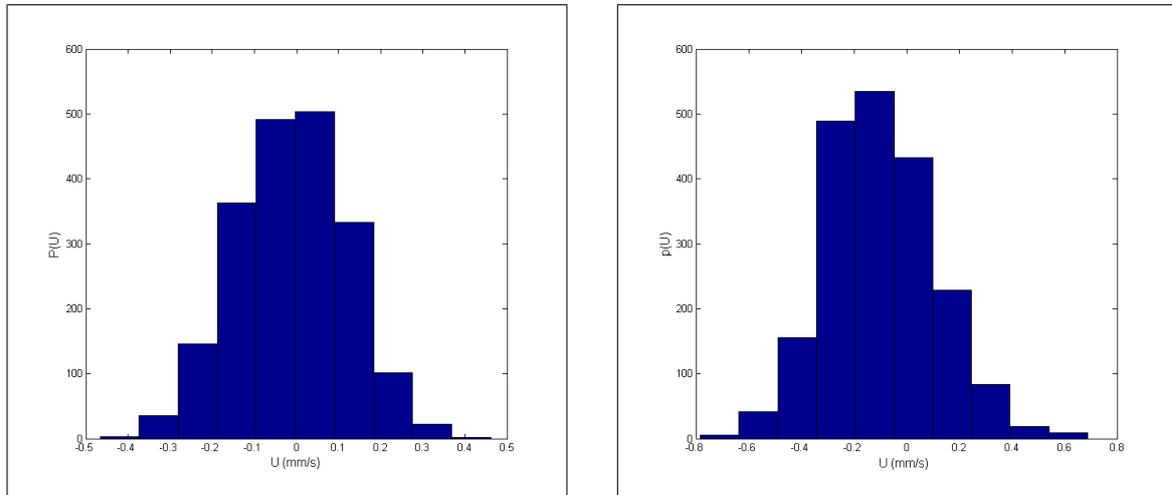


FIGURE 3.15 – Histogramme local brut des vitesses (composante V de l'écoulement) - Cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e=1000$ et $R_e=2000$

3.3.3 Convergence des moyennes statistiques

On évalue la convergence des grandeurs calculées afin qu'elles soient représentatives de l'écoulement étudié. Le choix du nombre de réalisations nécessaires afin d'estimer les grandeurs statistiques est associé au taux d'incertitude et au pourcentage d'erreur avec lesquels on souhaite faire nos mesures. Il est fonction de l'erreur minimale que l'on veut obtenir sur les moments d'ordre 1 et 2, ceux-ci diminuant lorsque l'on augmente le nombre de réalisations. Le nombre N d'échantillons nécessaires pour faire l'estimation peut ainsi être déterminé en choisissant le taux d'incertitude et l'erreur d'estimation acceptée. A partir d'un ensemble de N réalisations indépendantes d'une grandeur X , les moments sont estimés en utilisant l'opérateur de moyenne arithmétique. La moyenne mathématique et l'écart-type d'une grandeur X sont ainsi définis par :

$$m_X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k) \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{X})^2} \quad (3.3)$$

Pour connaître avec quelle erreur aléatoire ces estimateurs approchent la valeur réelle des moments, nous avons utilisé une estimation de l'incertitude par intervalle de confiance 95%. Cet intervalle de confiance est défini à partir de la variance de l'estimateur qui tend vers une distribution normale quand $N \rightarrow \infty$ et est donné par $\pm 1.96 \sqrt{\sigma^2/N}$. Le biais de l'estimateur de la variance utilisé est négligeable pour des grandes valeurs de N .

Les figures 3.16 à 3.19 présentent un exemple de l'évolution des moyennes \bar{U} , \bar{V} et des variances $\hat{\sigma}_U, \hat{\sigma}_V$ des composantes U et V de l'écoulement en fonction du nombre d'instantanés $N=2000$ et $N=10000$ pour un angle $\alpha = 20^\circ$ et un nombre de Reynold R_e de 1000. Pour le cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $N=2000$ les incertitudes maximales sur les

vitesses moyennes sont de l'ordre de 0.96% pour U et 1.28% pour V . Les incertitudes maximum sur les variances sont estimées à 0.62% pour \bar{U}^2 et 1.38% pour \bar{V}^2 . Pour le cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ $N=10000$ les incertitudes maximales sur les vitesses moyennes sont de l'ordre de 0.33% pour U et 0.43% pour V . Les incertitudes maximales sur les variances sont estimées à 0.20% pour $\hat{\sigma}_U$ et 0.32% pour $\hat{\sigma}_V$. La convergence est bien observée dans l'intervalle des erreurs de mesures estimées. Le nombre de réalisations défini est ici suffisant.

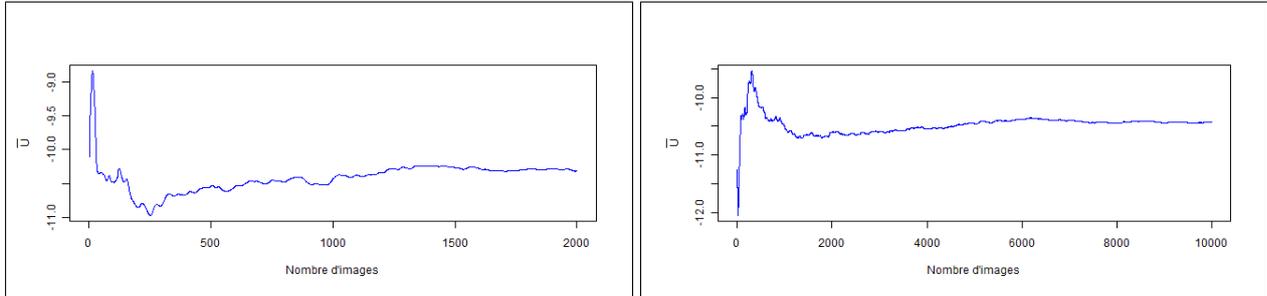


FIGURE 3.16 – Convergence de \bar{U} pour $N=2000$ et $N=10000$

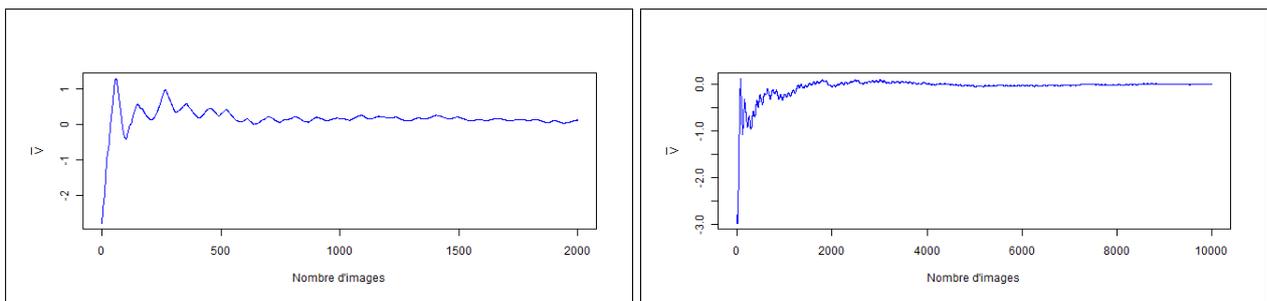


FIGURE 3.17 – Convergence de \bar{V} pour $N=2000$ et $N=10000$

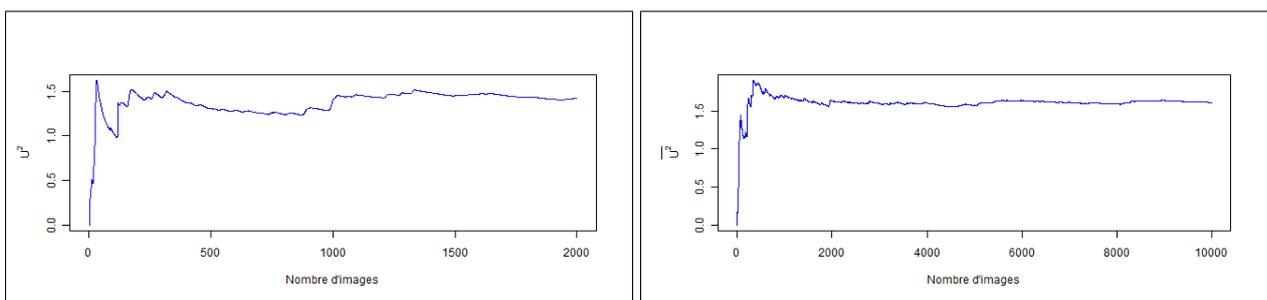


FIGURE 3.18 – Convergence de $\hat{\sigma}_U$ pour $N=2000$ et $N=10000$

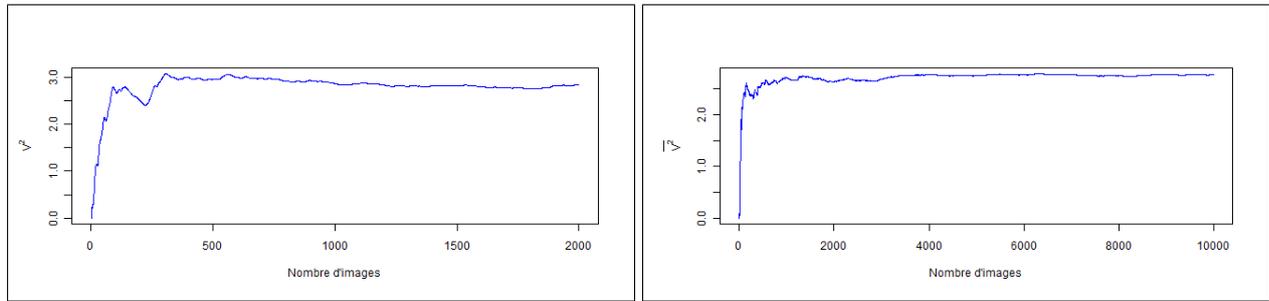


FIGURE 3.19 – Convergence de $\hat{\sigma}_V$ pour $N=10000$

Les déplacements mesurés correspondent au déplacement le plus probable des particules dans la fenêtre d'analyse durant le temps inter-image ce qui peut conduire à sous-estimer les valeurs rms des fluctuations de vitesse. De plus, la taille des mailles d'analyse relativement aux plus petites échelles de l'écoulement peut avoir pour effet d'augmenter l'erreur sur le calcul des vecteurs si le gradient de vitesse est trop important à l'intérieur de la fenêtre d'analyse.

4 Anémométrie film chaud

L'instrument utilisé pour l'ensemble des acquisitions film chaud est un anémomètre à température constante. Le principe de l'anémométrie à température constante est de maintenir la température de la sonde, et donc sa résistance, constante au cours du temps. Une variation de l'écoulement provoque une modification de la résistance du film et donc engendre une variation de tension en entrée de l'ampli opérationnel. Le courant de retour issu de l'amplificateur opérationnel modifie la tension du pont de Wheatstone. Dans le cas où la température du fluide ne varie pas, cette tension résultante sera vue comme une mesure indirecte de la vitesse de l'écoulement. La température du film chaud dépend : du flux de chaleur par conduction dans le substrat et dans le support sur lequel il est collé, du flux de convection, de la production par effet Joule dans le film, du stockage de capacité calorifique dans le film. Le recours à cet instrument de mesure s'est imposé par sa faible interférence avec l'écoulement à étudier, sa haute résolution temporelle, son très faible temps de réponse, ainsi que sa facilité de mise en œuvre.

Des mesures de tension liées à l'écoulement par anémométrie film chaud ont été réalisées dans ce travail à l'aide d'une sonde TSI 1269W de diamètre 5mm et de longueur 6.5cm reliée à un anémomètre à température constante DISA55M01. Le signal d'acquisition issu de la sonde est synchronisé avec l'acquisition PIV de l'écoulement. Cette sonde est placée à 7 cordes du bord de fuite du profil NACA0012. On dispose ainsi d'un signal de tension à la zone de développement de l'écoulement en aval du profil NACA0012. La fréquence d'échantillonnage des données d'écoulement à $Re=1000$ est de $f_{piv} = 6.4Hz$ à $Re=2000$ est de $f_{piv} = 12.84Hz$ et la fréquence d'acquisition des mesures par sonde film chaud est $f_s=2.5kHz$. On dispose ainsi entre chaque mesure PIV de l'écoulement $u(x,y,t)$ d'un nombre élevé d'échantillons du signal de tension.

5 Résultats expérimentaux

Les figures 3.20 à 3.27 présentent les champs de vorticité obtenus pour des angles d'incidences de $\alpha = 10^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 20^\circ$ et $\alpha = 30^\circ$ pour des nombre de Reynolds $Re=1000$ et $Re=2000$.

Configuration $\alpha = 10^\circ$ et $\alpha = 15^\circ$

Une allée tourbillonnaire de von Kármán se forme à environ une corde en aval du profil pour $\alpha = 10^\circ$ et $Re=1000$ et $Re=2000$ (Figures 3.21 et 3.23). L'allée de von Kármán correspond alors au lâcher tourbillonnaire de type « trailing edge vortex ». Pour $\alpha = 10^\circ$ et $Re=2000$, elle correspond au lâcher tourbillonnaire de type « separation vortex ». Pour $\alpha = 15^\circ$ et $Re=1000$ et $Re=2000$, le lâcher tourbillonnaire se fait plus en amont à environ au tiers de l'extrados. On note également que la structure du lâcher commence à se complexifier avec la formation sur la surface du profil d'une nappe de vorticité s'agrégeant avec le tourbillon présent au niveau du tiers de l'extrados. L'allée de von Kármán classique correspond alors au lâcher tourbillonnaire de type « separation vortex ».

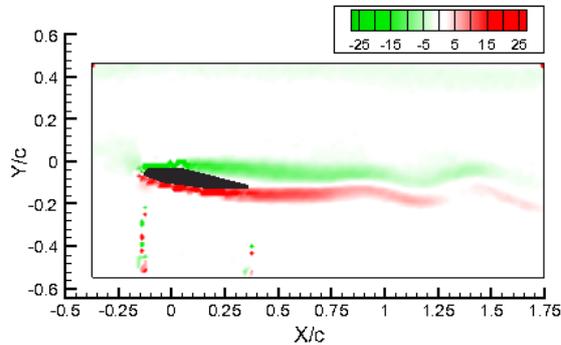


FIGURE 3.20 – $\alpha = 10^\circ$ et $Re=1000$

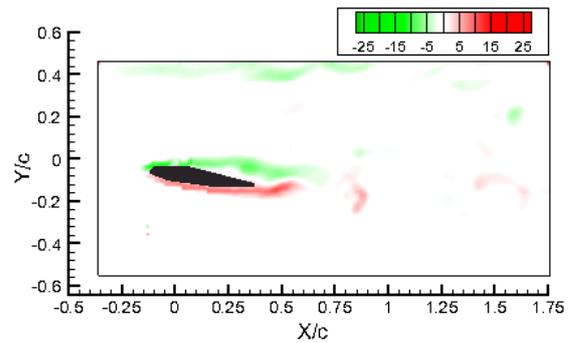


FIGURE 3.21 – $\alpha = 10^\circ$ et $Re=2000$

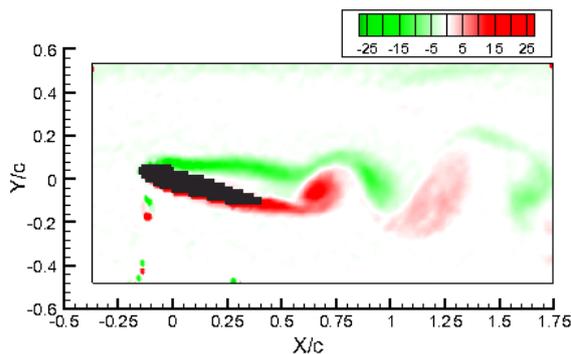


FIGURE 3.22 – $\alpha = 15^\circ$ et $Re=1000$

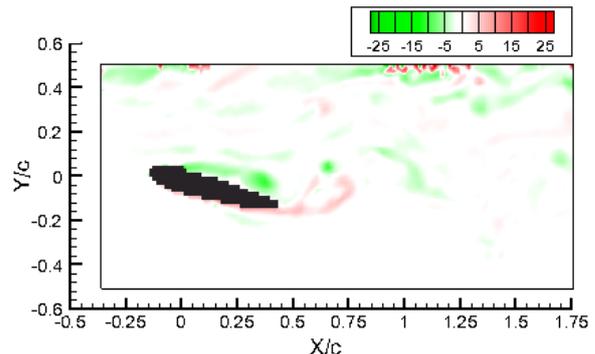
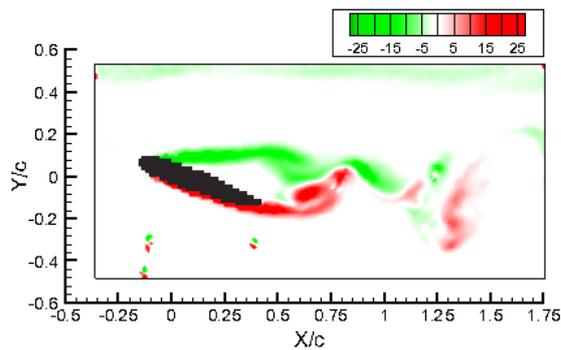
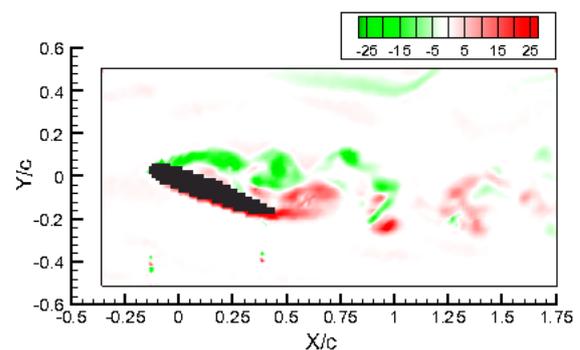


FIGURE 3.23 – $\alpha = 15^\circ$ et $Re=2000$

Configuration $\alpha = 20^\circ$

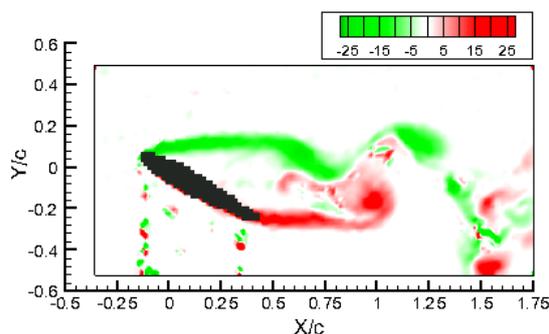
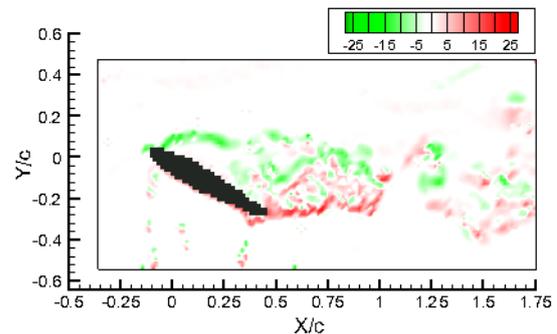
Pour $Re=1000$ et $Re=2000$ une allée de von Kármán se forme directement derrière le profil (Figures 3.24 et 3.25). On observe une brisure de la symétrie du sillage puis une transition vers un régime de dipôles déviés vers le haut. Cette transition s'effectue par

fragmentation du tourbillon de bord d'attaque en un complexe de plusieurs tourbillons. Il apparaît une déviation vers le bas de l'allée de von Kármán. Les tourbillons ne s'écartent pas et se replacent progressivement le long de l'axe longitudinal de l'allée de von Kármán. Le tourbillon se forme au bord de fuite du profil et s'échappe ensuite dans l'écoulement. Des tourbillons se forment alternativement au bord d'attaque et au bord de fuite du profil. Le tourbillon du bord d'attaque ou LEV grossit le long du profil et s'échappe alternativement avec le tourbillon du bord de fuite. L'allée de von Kármán classique correspond alors au lâcher tourbillonnaire de type « leading edge vortex ». Le sillage de l'écoulement reste similaire à celui d'une allée de von Kármán dans les cas où $\alpha = 10^\circ, \alpha = 15^\circ, \alpha = 20^\circ$ pour $R_e=1000$ et $R_e=2000$.

FIGURE 3.24 – $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$ FIGURE 3.25 – $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=2000$

Configuration $\alpha = 30^\circ$

La topologie du sillage est profondément modifiée (Figures 3.26 et 3.27). En effet l'allée de Von Kármán disparaît et à la place se forme une structure tourbillonnaire composée de plusieurs tourbillons. Les tourbillons de bord d'attaque et de bord de fuite forment un dipôle dévié vers le haut par sa propre vitesse induite tandis que la structure est complétée par l'émission de petits tourbillons secondaires déviés vers le bas. Le lâcher tourbillonnaire est ici de type « leading edge vortex ».

FIGURE 3.26 – $\alpha = 30^\circ$ et $R_e=1000$ FIGURE 3.27 – $\alpha = 30^\circ$ et $R_e=2000$

À $R_e=2000$ les tourbillons principaux sont réduits et correspondent davantage à des couches de fluide cisailés. On note également sur les champs une perturbation de la couche limite supérieure liée au bouchage des pailles par des bulles d'air au cours du temps.

Des reconstructions à différents instants de l'écoulement et des champs de vecteurs associés pour les cas $\alpha = 15^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ sont donnés figure 3.28 à figure 3.31. Ces instants vont être utilisés comme instants de référence pour illustrer l'écoulement dans les chapitres suivants.

Reconstruction de l'écoulement $U(x,y,t)$

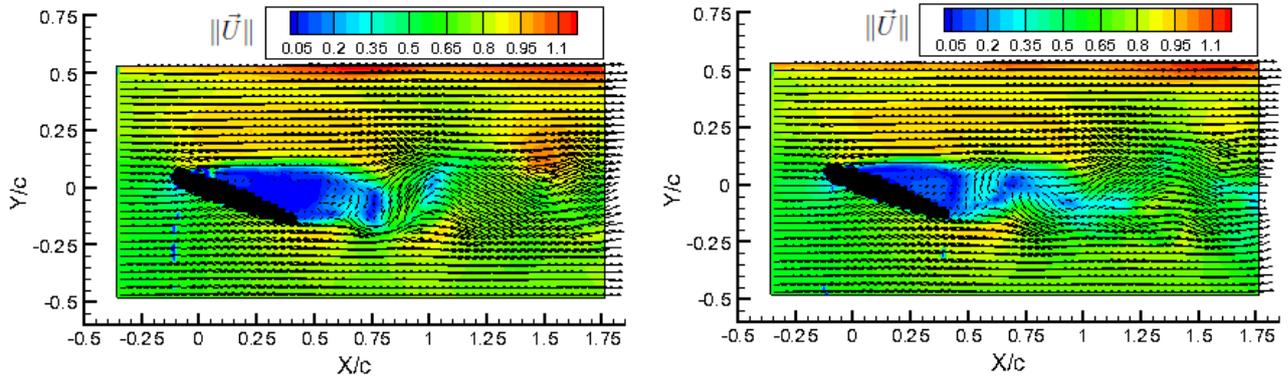


FIGURE 3.28 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement PIV à $T=500$ et $T=1000$ - Cas $\alpha = 20^\circ$
 $Re=1000$

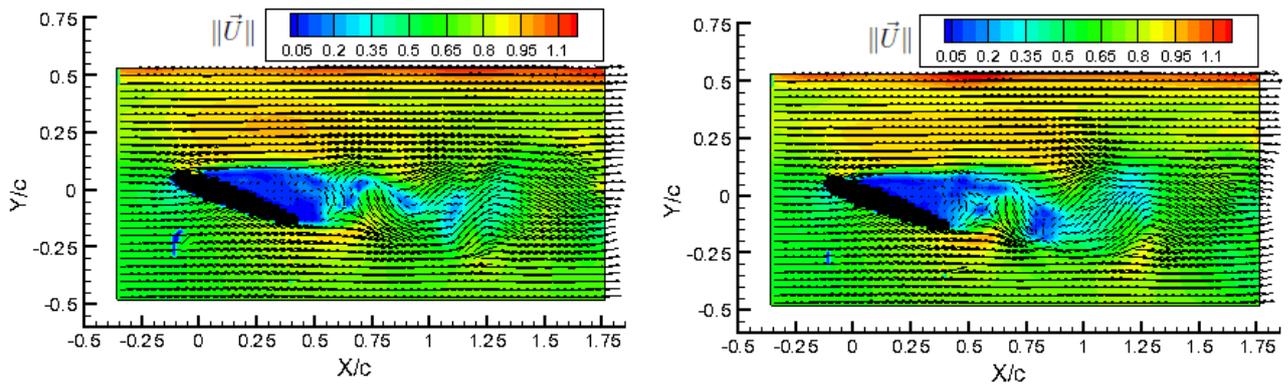


FIGURE 3.29 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement PIV à $T=1500$ et $T=2000$ - Cas $\alpha = 20^\circ$
 $Re=1000$

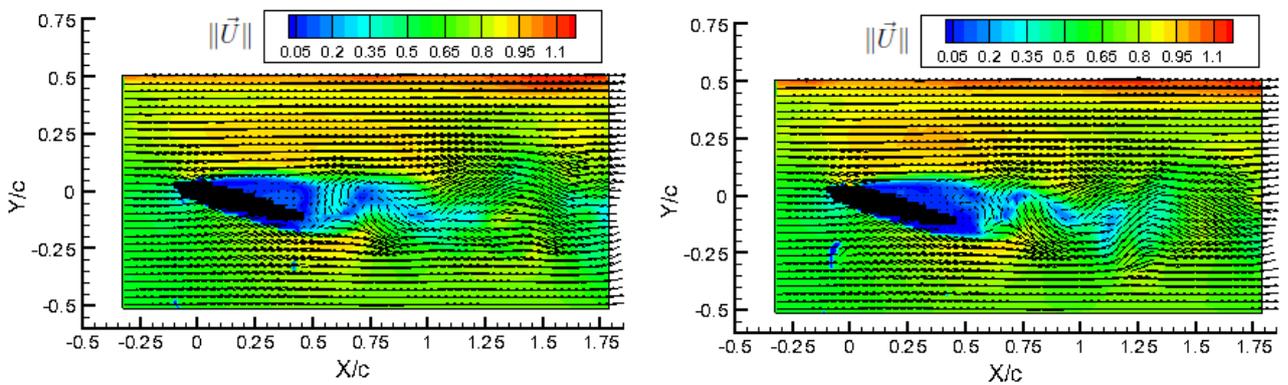


FIGURE 3.30 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement PIV à $T=1000$ et $T=1500$ - Cas $\alpha = 15^\circ$
 $Re=1000$

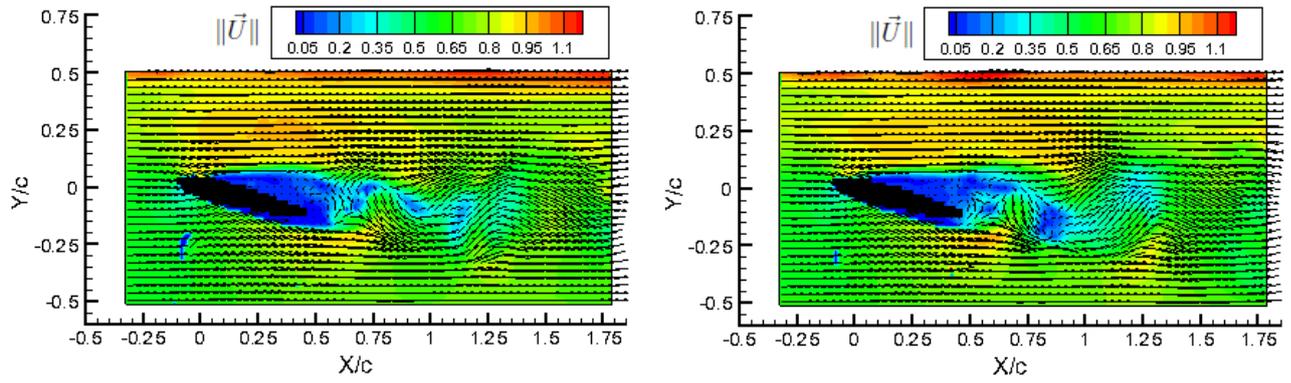


FIGURE 3.31 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement PIV à $T=1500$ et $T=2000$ - Cas $\alpha = 15^\circ$
 $Re=1000$

Chapitre 4

Application de l'inférence bayésienne sur le modèle réduit POD-Galerkin

Sommaire

1	Introduction	82
2	POD appliquée à l'écoulement autour du profil NACA0012	84
2.1	Construction de la base POD	84
2.2	Détermination des coefficients de projection temporels POD	85
2.3	Troncature de la base POD	85
3	Modèle réduit POD-Galerkin	91
3.1	Détermination des coefficients de prédiction temporels	91
3.2	Procédure d'intégration du modèle réduit	92
3.3	Observations	95
4	Amélioration du modèle réduit POD-Galerkin par assimilation séquentielle de données	96
4.1	Erreurs en moyenne quadratique des estimateurs	97
4.2	Initialisation des filtres de Kalman	97
4.3	Modèle réduit linéaire et filtres KF, EnKF et SR-EnKF	100
4.4	Reconstruction de l'écoulement $u(x,y,t)$ avec le filtre EnKF	109
4.5	Observations	111
4.6	Conclusion	112
5	Application de l'algorithme EM dans le cas d'observations manquantes	113
5.1	Introduction	113
5.2	POD sous-échantillonnée	113
5.3	Modèle à espace d'état utilisé	114
5.4	Estimation de paramètres par algorithme EM	116
5.5	Application au modèle réduit POD-Galerkin	118
5.5.1	Erreur de reconstruction de l'algorithme EM	120
5.5.2	RMSE de l'algorithme EM	121
5.6	Observations	132
5.7	Conclusion	133

1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'appliquer des méthodes issues de l'inférence bayésienne au modèle réduit POD-Galerkin afin de reconstruire un écoulement incompressible aux nombres de Reynolds 1000 et 2000 autour d'un profil NACA0012 aux différents angles d'incidence suivants : $30^\circ, 20^\circ, 15^\circ, 10^\circ$.

Dans un premier temps, un modèle d'ordre réduit de l'écoulement est défini à partir des champs de vitesses $u(x,y,t)$ obtenus expérimentalement par PIV 2D-2C. Chacune de ces réalisations spatio-temporelles de l'écoulement $u(x,y,t)$ peut se décomposer sur la base complète de fonctions orthonormales définie par les fonctions POD sous la forme suivante :

$$u(x,y,t) \approx u_m + \sum_{i=1}^{N_{POD}} a_i(t) \Phi_i(x,y) \quad (1.1)$$

avec u_m le champ moyen et $a_i = (u, \Phi_i) = \int_{\Omega} u(x,y,t) \cdot \Phi_i(x,y) dx$ pour $i = 1, 2, \dots, \infty$ et N_{POD} le nombre de modes POD retenus.

La dynamique non linéaire des écoulements est ici modélisée à l'aide d'un modèle réduit basé sur des fonctions POD. Ainsi, en utilisant la convergence optimale énergétique des fonctions de base POD, la projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD va permettre de construire un système dynamique d'ordre réduit pour les coefficients temporels de la POD. Cette projection de Galerkin permet alors d'obtenir, à partir d'un ensemble de réalisations de l'écoulement $u(x,y,t)$, un modèle d'ordre réduit des équations de Navier-Stokes, capable de représenter la dynamique de la configuration de départ. Il n'existe cependant aucune garantie que le modèle réduit ainsi construit soit efficace pour modéliser une dynamique d'écoulement. En effet, la projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes incompressibles sur un sous-espace de dimension réduite obtenue par POD ne permet pas systématiquement d'obtenir un modèle réduit précis. Ce problème peut toutefois être résolu en calibrant le modèle réduit, c'est-à-dire en ajustant les termes du système réduit pour que la solution du modèle soit la plus proche de la solution de référence.

On se propose ici d'appliquer des méthodes issues de l'assimilation séquentielle de données pour calibrer le modèle réduit POD-Galerkin. L'approche choisie ici est une approche stochastique basée sur la règle de Bayes où l'estimateur du vecteur d'état x_k du modèle réduit à l'instant k est issu de la théorie de l'estimation probabiliste. Le but est d'obtenir une représentation de l'incertitude sur la valeur d'un état caché x_k à partir de la connaissance des observations y_k obtenues séquentiellement. Dans un cadre bayésien, cette incertitude, conditionnellement à la connaissance des observations collectées, est quantifiée par la densité de probabilité $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ appelée densité de probabilité *a posteriori*, avec $x_{0:k}$ l'ensemble des états cachés de l'instant 0 à k et $y_{1:k}$ l'ensemble des observations collectées de l'instant 1 à k . Le mécanisme d'inférence permettant de calculer cette densité est basé sur la règle de Bayes :

$$p(x_{0:k}|y_{1:k}) \propto p(y_{1:k}|x_{0:k})p(x_{0:k}) \quad (1.2)$$

On suppose que sont définis un modèle d'évolution X_k de l'état, reliant deux états successifs x_{k-1} et x_k représenté par la densité $p(x_k|x_{k-1})$ et un modèle de mesure Y_k , reliant une

mesure y_k à l'état caché x_k , représenté par la densité $p(y_k|x_k)$. Ainsi, les états cachés et les observations sont reliés par un modèle stochastique qui permet de prendre en compte les caractéristiques essentielles du phénomène observé :

$$\begin{cases} X_k = f_k(X_{k-1}, W_{k-1}) \\ Y_k = h_k(X_k) + V_k \end{cases} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

où W_k et V_k sont des bruits blancs gaussiens. Les dépendances statistiques entre les états cachés et les observations sont représentées sur la figure 4.1.

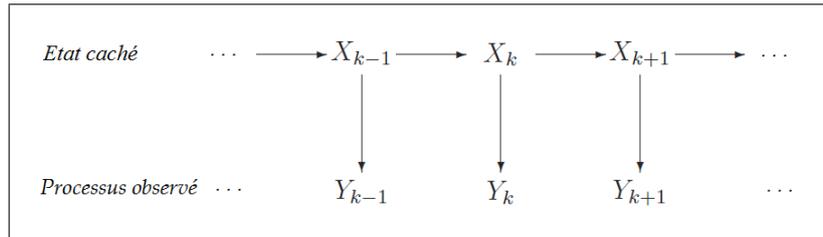


FIGURE 4.1 – Dépendances entre les variables aléatoires du modèle à espace d'état discret.

À partir du modèle stochastique ainsi défini, la densité a posteriori peut être écrite sous la forme :

$$p(x_{0:k}|y_{1:k}) \propto p(x_0) \prod_{k=1}^t p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1}) \quad (1.5)$$

Dans le cas où les modèles d'évolution et de mesure sont linéaires à bruits gaussiens, la densité a posteriori est gaussienne, de moyenne et matrice de covariance calculées récursivement à l'aide des équations de Kalman. Dans le cas de modèles non linéaires, des approximations peuvent être obtenues à partir de simulations de nombres aléatoires, telles que le filtrage particulaire ou les *MCMC* (Markov Chain Monte Carlo).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. La projection de Galerkin est tout d'abord rappelée et appliquée à l'écoulement autour du profil NACA0012, en considérant une projection sur la base des fonctions propres POD. Le modèle réduit POD-Galerkin de dynamique non contrôlée est alors construit. Afin de réduire l'ordre du modèle réduit, les coefficients temporels issus de la POD dont l'indice est supérieur à un certain seuil sont négligés. Le modèle réduit POD-Galerkin est ensuite appliqué aux fonctions propres de la POD pour les différentes conditions d'écoulement. Des techniques d'inférence bayésienne sont alors appliquées au modèle réduit afin d'améliorer sa représentativité pour différentes dynamiques d'écoulement. La première de ces techniques est le filtre de Kalman linéaire. Les filtres de Kalman d'ensemble et Kalman d'ensemble "Square-Root", basés sur des méthodes de type Monte-Carlo, sont ensuite utilisés. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'inférence bayésienne du modèle réduit POD-Galerkin dans le cas d'observations manquantes. Ces données manquantes sont issues d'un sous-échantillonnage de la POD sur l'ensemble complet des champs mesurés. L'algorithme EM est ensuite appliqué afin de reconstruire les coefficients de prédiction temporels.

2 POD appliquée à l'écoulement autour du profil NACA0012

Cette section est consacrée à la modélisation de dimension réduite de l'écoulement autour des différentes configurations étudiées du profil NACA0012. La mise en oeuvre pratique de la méthodologie POD-Galerkin pour les écoulements incompressibles est rappelée et appliquée au profil NACA0012 aux angles d'incidence de 30° , 20° , 15° , 10° et pour des nombres de Reynolds respectifs de 1000 et 2000. La détermination de la base POD constitue la première étape dans la construction du modèle réduit POD-Galerkin de cet écoulement incompressible. La méthode des snapshots décrite au chapitre 3 est appliquée sur une base de données constituée de N_t réalisations successives réalisées par PIV RT 2D-2C de l'écoulement. Une fois les coefficients de projection temporels et les modes spatiaux déterminés, une base POD est extraite en sélectionnant les modes les plus énergétiques. Le modèle réduit correspondant est ensuite déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur ces modes. Les coefficients du modèle réduit sont ensuite identifiés par SVD. Une évaluation de la précision ainsi que les limitations du modèle réduit linéaire et quadratique sans calibration pour la reconstruction des coefficients de prédictions temporels ainsi que l'écoulement sont données.

2.1 Construction de la base POD

La décomposition POD décrite au chapitre 3 est utilisée afin de déterminer les fonctions de base POD. Le calcul des fonctions temporelles et spatiales POD est fait en plusieurs étapes :

1. Calcul du champ moyen $u_m(x,y,t)$ de l'écoulement sur l'ensemble des snapshots $\{u(x,y,t_k)\}_{k=1,\dots,N_t}$

$$u_m(x,y,t) = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} u(x,y,t_k)$$

2. Calcul de la matrice de corrélations temporelles C de composantes c_{ij} :

$$c_{ij} = \int_{\Omega} \tilde{u}(x,y,t_i) \tilde{u}(x,y,t_j) dx \quad \text{avec} \quad \tilde{u}(x,y,t) = u(x,y,t) - u_m(x,y,t)$$

3. Calcul des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t}$ de la matrice C et des coefficients temporels $a_1(t), \dots, a_{N_t}(t)$ fonctions propres de C

4. Calcul des fonctions POD spatiales Φ_k :

$$\Phi_k(x,y) = \sum_{i=1}^{N_t} a_k(t_i) \tilde{u}(x,y,t_i)$$

5. Normalisation des fonctions de base :

$$\Phi_i = \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}$$

2.2 Détermination des coefficients de projection temporels POD

L'approche snapshot POD conduit au calcul d'une matrice de corrélations temporelles groupant les contributions des différentes variables. Dans un premier temps $N_t = 2048$ snapshots successifs sont considérés échantillonnés à une fréquence $f_e = 6.4H_z$ et $f_e = 12.8H_z$. La matrice de corrélation C est ainsi formée à partir d'un jeu de $N_t=2048$ snapshots de l'écoulement obtenus à des intervalles de temps réguliers $\Delta t = 0.07125s$ pour $Re=1000$ et $\Delta t = 0.3906s$ pour $Re=2000$. Les coefficients temporels associés aux coefficients spatiaux POD correspondent aux fonctions propres de la matrice des corrélations temporelles et représentent les dynamiques des modes spatiaux POD en assurant leur modulation temporelle. Ils sont obtenus par projection des snapshots sur les modes POD spatiaux :

$$(\tilde{u}(x,y,t_i), \Phi_j(x,y,t)) = \left(\sum_{i=1}^{N_{pod}} a_i(t) \Phi_j(x,y,t) \right) \quad (2.1)$$

La base POD $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ est orthonormale, les coefficients de projection temporels ont la propriété suivante :

$$a_j(t) = (\tilde{u}(x,y,t), \Phi_j(x,y)) \quad (2.2)$$

La POD est effectuée sur le champ de vitesse fluctuant. Le décalage entre les coefficients obtenus sur le champ instantané et le champ fluctuant permet d'assimiler le premier coefficient temporel POD obtenu sur le champ de vitesse instantané au champ moyen. Ainsi, le coefficient de projection temporel le plus énergétique correspond au champ moyen de l'écoulement.

2.3 Troncature de la base POD

La troncature de la base POD se fonde sur un critère de représentation de la base de données originale. Comme précédemment, le calcul de l'erreur de représentation porte uniquement sur les fluctuations temporelles, le champ moyen étant retranché de la base de données. Le spectre de la matrice des corrélations temporelles permet d'évaluer la contribution de chaque coefficient $a_i(t)$ issu de la POD pour capturer l'information statistique contenue dans la base de donnée initiale. L'évolution du contenu énergétique des N_{POD} premiers modes POD est déterminée en utilisant le Contenu Informationnel Relatif RIC défini par :

$$RIC(N_{POD}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{POD}} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i} \quad (2.3)$$

L'erreur de reconstruction de chaque snapshot s'exprime en fonction de la matrice de corrélation temporelle :

$$\sum_{n=1}^{N_t} \left\| \tilde{u}^n - \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k^n \phi_k \right\|^2 = \sum_{n=N_{POD}+1}^{N_t} \lambda_n \quad (2.4)$$

Le caractère quasi-stationnaire de l'énergie instantanée totale de la base de données et de l'erreur d'approximation dans le cas considéré, permet d'approximer l'erreur relative de reconstruction comme suit :

$$\frac{\sum_{n=1}^{N_t} \|\tilde{u}^n - \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k^n \phi_k\|^2}{\sum_{n=1}^{N_t} \|\tilde{u}^n\|^2} = \frac{\sum_{n=N_t+1}^{N_{POD}} \lambda_n}{\sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n} \quad (2.5)$$

Les coefficients de projection temporels sont issus de la décomposition orthogonale pour la composante fluctuante de vitesse $\tilde{u}(x,y,t)$ estimée par $\tilde{u}(x,y,t) = u(x,y,t_k) - u_m(x,y,t_k)$. Le RIC des N_{POD} premiers coefficients de projection temporels de la POD réalisée sur les séries de 2048 champs d'écoulement des différentes configurations étudiées est donné au tableau 4.1. L'erreur obtenue de reconstruction correspondante est également donnée et présente la valeur effective de $1 - \text{RIC}$ définie en 2.4. Pour les configurations $\alpha=20^\circ$ $\text{Re}=1000$ et $\alpha=15^\circ$ $\text{Re}=1000$, l'évolution du contenu énergétique des M premiers modes POD en utilisant comme mode de représentation le contenu informationnel relatif RIC est représentée respectivement sur les figures 4.3 et 4.8.

Pour les configurations étudiées, le RIC converge lentement vers 100%. En effet, pour la plupart des cas, un nombre élevé de coefficients temporels est nécessaire pour reconstruire l'écoulement avec un contenu énergétique satisfaisant. Par exemple, pour reconstruire 90% de l'écoulement, 599 coefficients de projection temporels sont nécessaires dans le cas $\alpha = 30^\circ$ et $R_e=2000$, et 207 dans le cas $\alpha = 15^\circ$ et $R_e=2000$. Pour un RIC compris entre 80% et 90%, l'erreur relative de reconstruction est comprise entre 10% et 20%.

	$\text{RIC}(N_{POD})$	50%	60%	70%	80%	90%
$\alpha = 30^\circ$ $\text{Re}=2000$	N_{POD}	30	57	114	255	599
	Err	0.498	0.399	0.300	0.199	0.099
$\alpha = 30^\circ$ $\text{Re}=1000$	N_{POD}	7	12	25	58	181
	Err	0.478	0.399	0.298	0.198	0.099
$\alpha = 20^\circ$ $\text{Re}=2000$	M	14	23	39	69	149
	Err	0.495	0.397	0.297	0.199	0.099
$\alpha = 20^\circ$ $\text{Re}=1000$	M	2	4	10	21	59
	Err	0.450	0.391	0.287	0.198	0.099
$\alpha = 15^\circ$ $\text{Re}=2000$	M	22	35	57	99	207
	Err	0.492	0.396	0.297	0.198	0.100
$\alpha = 15^\circ$ $\text{Re}=1000$	M				2	28
	Err				0.196	0.098
$\alpha = 10^\circ$ $\text{Re}=2000$	M	15	23	37	63	126
	Err	0.494	0.396	0.295	0.197	0.099
$\alpha = 10^\circ$ $\text{Re}=1000$	M	12	25	45	76	139
	Err	0.496	0.398	0.297	0.198	0.099

TABLE 4.1 – Critère RIC et erreur relative de reconstruction POD en fonction du nombre de coefficients M pour chaque configuration.

L'énergie cinétique contenue dans le champ moyen pour chaque configuration est donnée dans le tableau 4.2. Le pourcentage d'énergie cinétique contenue dans le champ moyen

est supérieur dans chacun des cas pour $Re=1000$ qu'à $Re=2000$. Il est compris entre 89% et 91% pour les cas à $Re=2000$ et entre 58% et 83% pour les cas à $Re=1000$. Dans les cas à $Re=1000$, il est supérieur à 16% et atteint 41.44% dans le cas $\alpha = 15^\circ$. Dans les cas à $Re=2000$, le pourcentage d'énergie cinétique contenue dans le champ moyen est inférieur ou pratiquement égal à 10%.

	$\alpha = 30^\circ Re=1000$	$\alpha = 20^\circ Re=1000$	$\alpha = 15^\circ Re=1000$	$\alpha = 10^\circ Re=1000$
$E_{\bar{u}}$ (%)	16.79	28.41	41.44	17.41
	$\alpha = 30^\circ Re=2000$	$\alpha = 20^\circ Re=2000$	$\alpha = 15^\circ Re=2000$	$\alpha = 10^\circ Re=2000$
$E_{\bar{u}}$ (%)	8.79	9.94	5.83	10.120

FIGURE 4.2 – Énergie cinétique contenue dans le champ moyen pour chaque configuration.

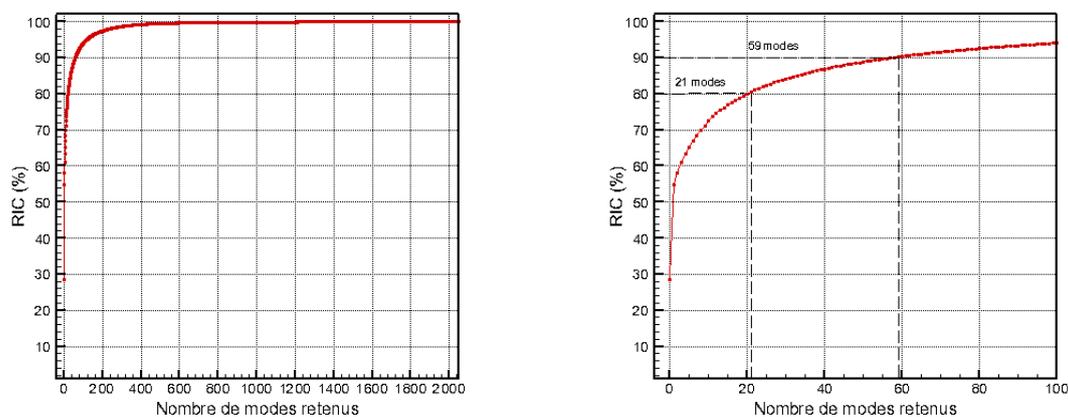


FIGURE 4.3 – Énergie cinétique moyenne normalisée capturée - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $Re=1000$

L'évolution temporelle des coefficients de projection temporels $a_1(t), a_2(t), a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ normalisés est représentée respectivement sur les figures 4.5 et 4.9 pour le cas $\alpha = 20^\circ$ $Re=1000$ pour le cas Angle= 15° $Re=1000$. Les relations de phase entre les coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont représentées sur la figure 4.12. La reconstruction du champ $\frac{\|\vec{U}\|}{U_0}$ aux instants $T=500, 1000, 1500$ et 2000 pour un RIC de 90% est représentée sur les figures 4.6, 4.7 et 4.10, 4.11

Dans les deux cas, $\alpha = 15^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ à $Re=1000$ une forte périodicité est observée sur les deux premiers coefficients de projection temporels. Ces modes appariés correspondent aux tourbillons principaux de l'allée tourbillonnaire de von Karmann et leur advection vers l'aval du profil NACA0012. Cependant, pour le cas $\alpha = 15^\circ$ et $Re=2000$, les coefficients a_1 et a_2 ont une amplitude similaire sans forte modulation au cours du temps contrairement au cas $\alpha = 20^\circ$ où les coefficients a_1 et a_2 ont des dynamiques temporelles différentes significativement modulées au cours du temps. Cette différence de modulation des amplitudes des coefficients a_1 et a_2 au cours du temps se retrouvent dans leurs portraits de phase, mettant ainsi en évidence la différence de dynamique de l'écoulement entre ces deux cas, traduite par une structure différente du lâcher tourbillonnaire au voisinage du profil NACA0012.

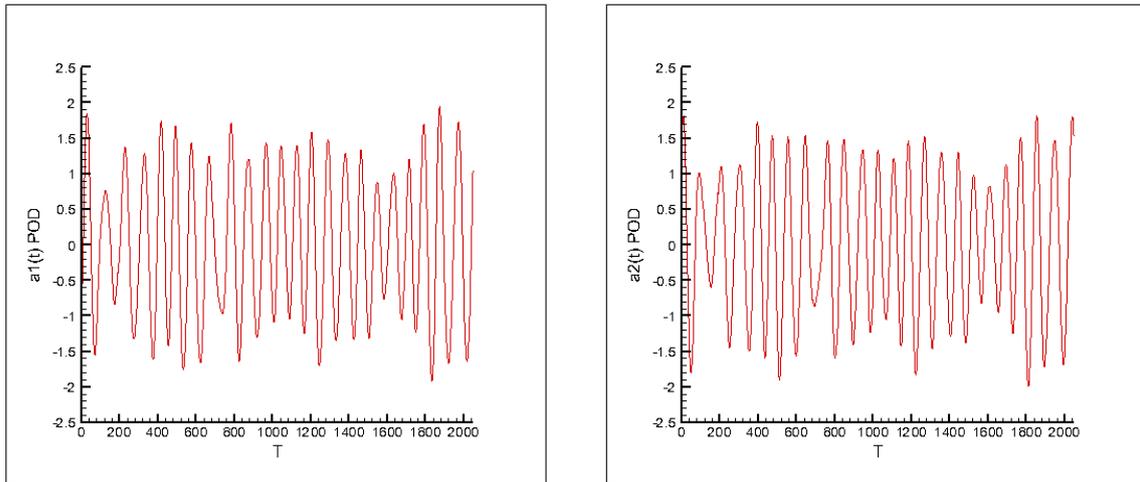


FIGURE 4.4 – Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$ POD - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$

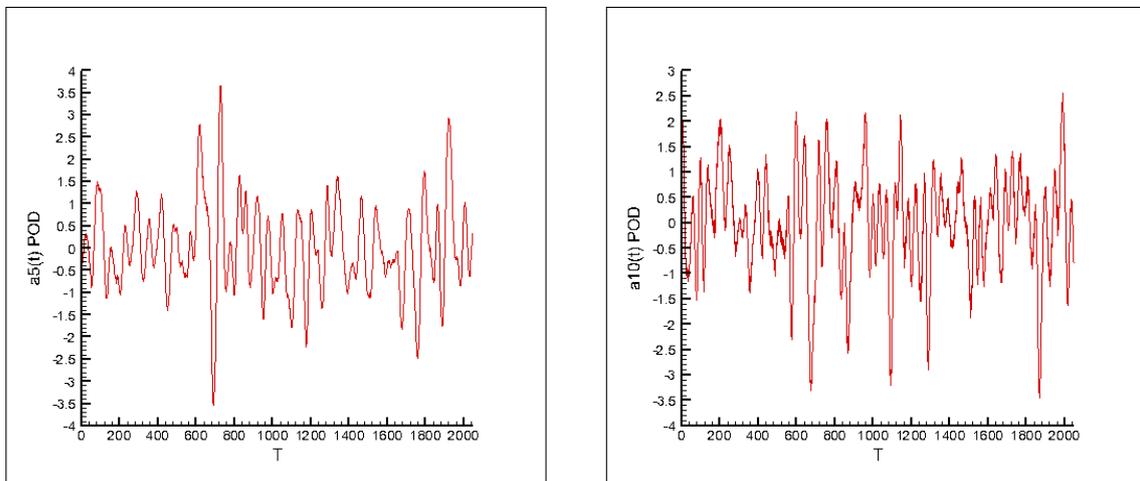


FIGURE 4.5 – Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ POD - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$

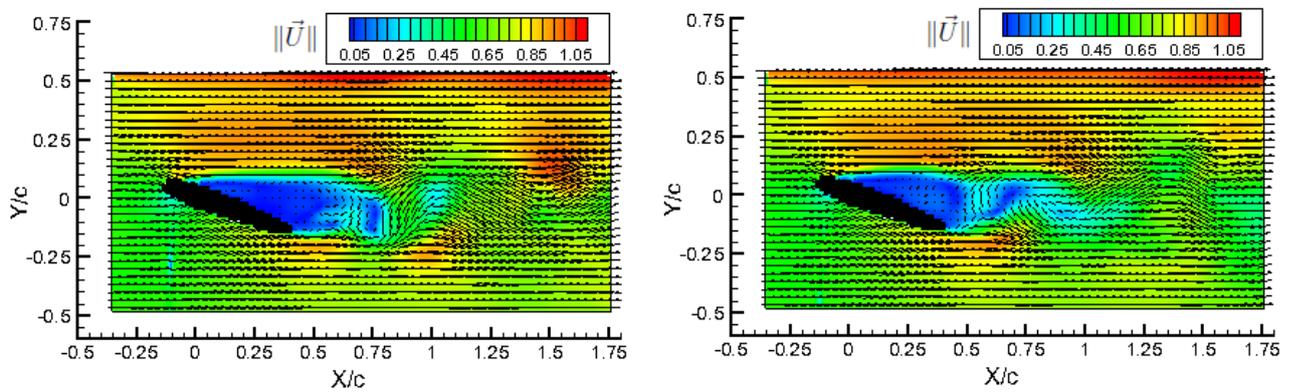


FIGURE 4.6 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - T=500 et T=1000 - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$

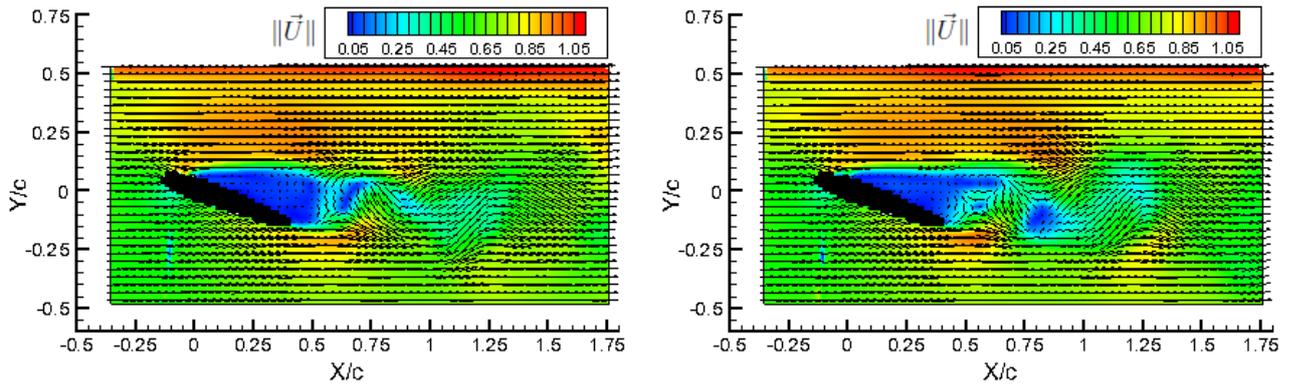


FIGURE 4.7 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - T=1500 et T=2000 - Cas $\alpha = 20^\circ$ $Re=1000$

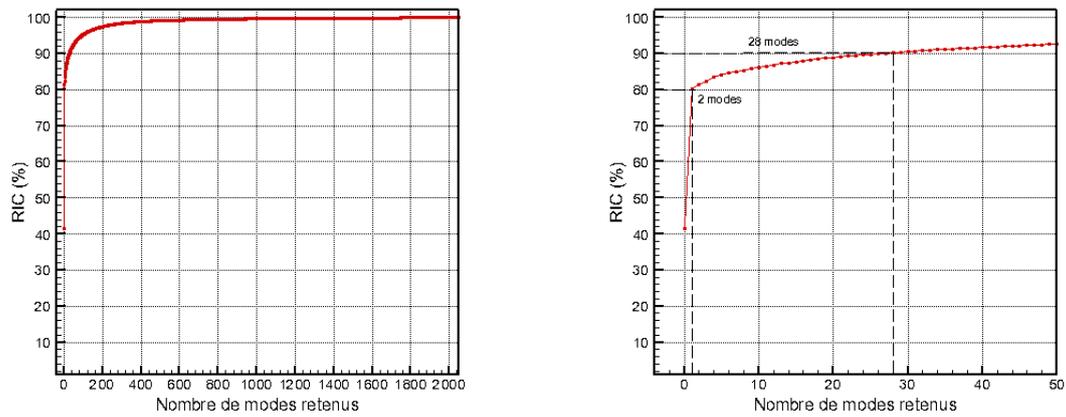
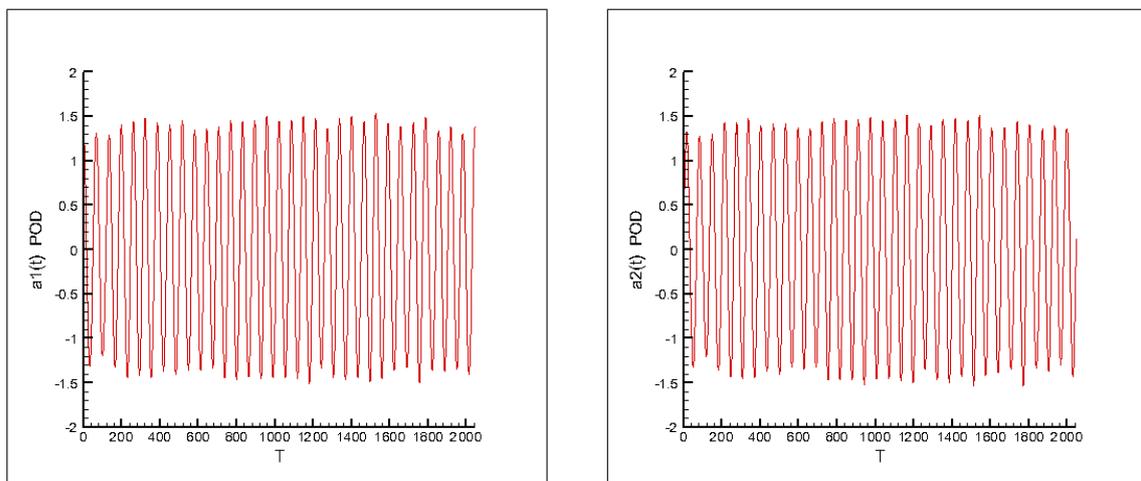


FIGURE 4.8 – Énergie cinétique moyenne normalisée capturée - Cas $\alpha = 15^\circ$ $Re=1000$



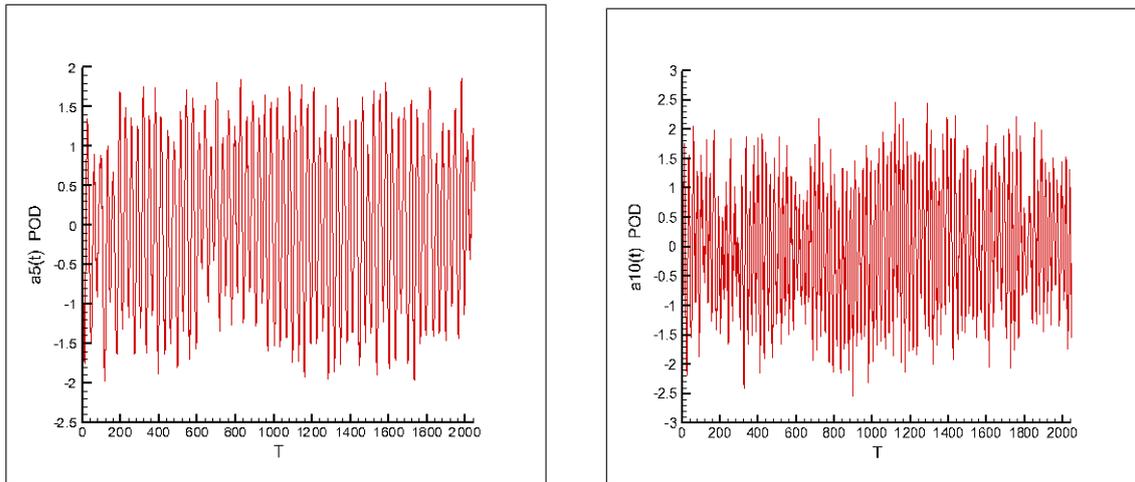


FIGURE 4.9 – Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ POD - Cas $\alpha = 15^\circ$ $Re=1000$

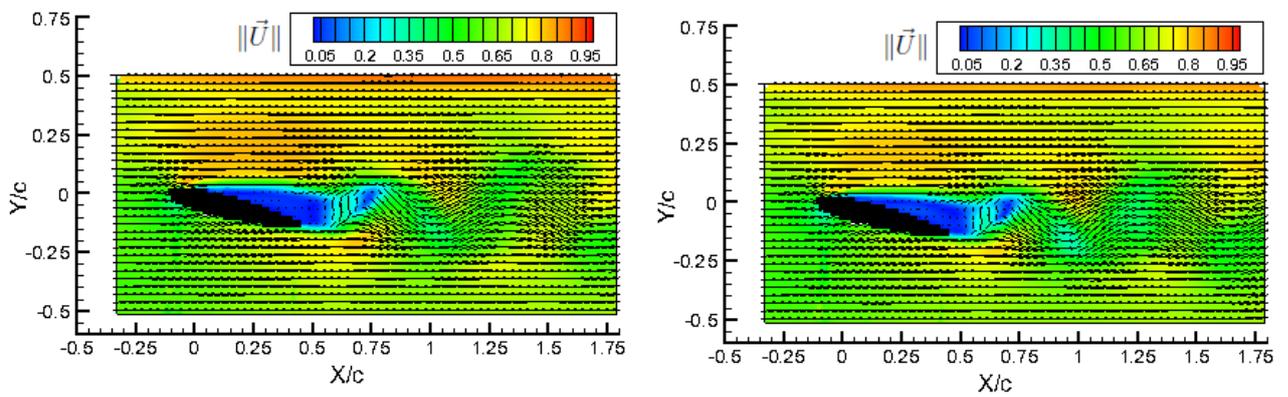


FIGURE 4.10 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - $T=500$ et $T=1000$ - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$

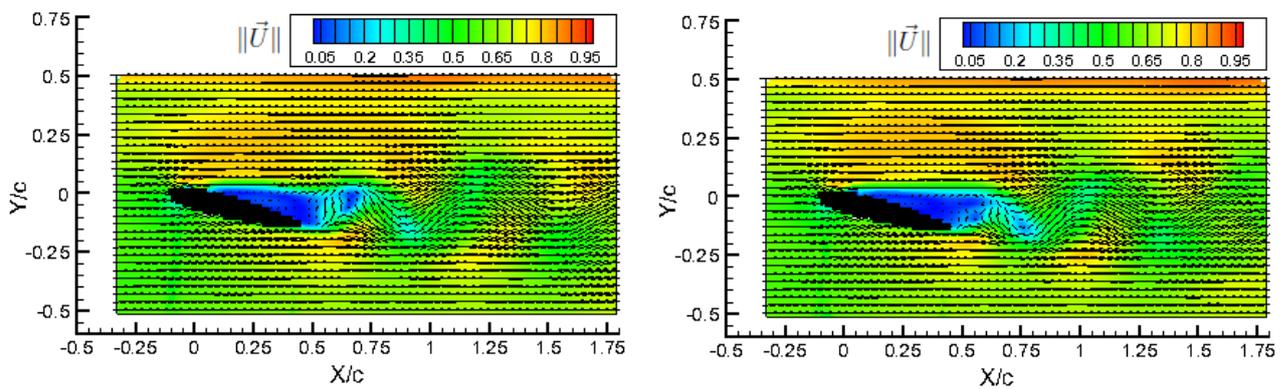


FIGURE 4.11 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD avec un RIC à 90% - $T=1500$ et $T=2000$ - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$

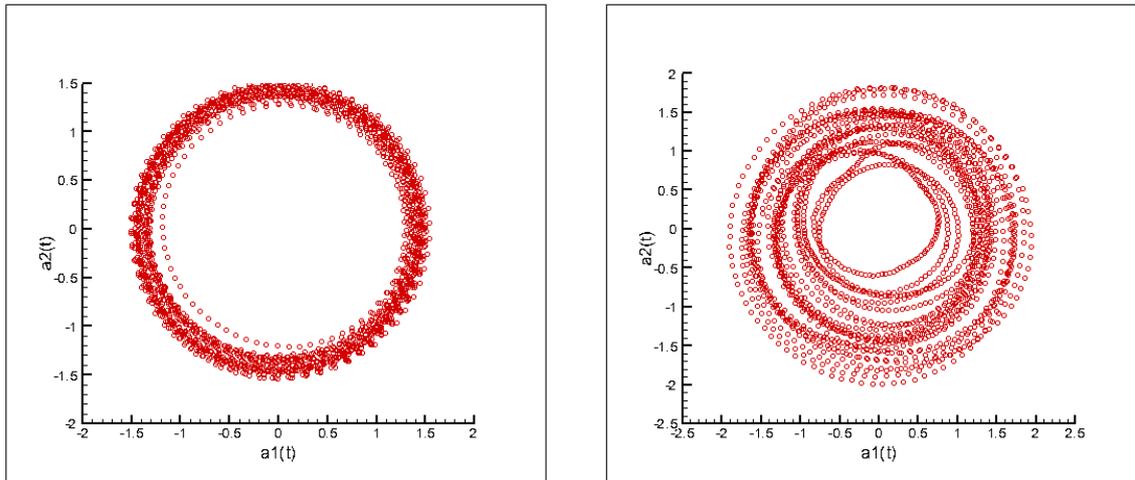


FIGURE 4.12 – Portrait de phase des coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ POD - Cas $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$

3 Modèle réduit POD-Galerkin

Le modèle d'ordre réduit POD-Galerkin est à présent employé afin de reproduire les coefficients de projection temporels ainsi que le champ d'écoulement autour du profil NACA0012. Les équations du modèle réduit POD-Galerkin sont intégrées en temps et les amplitudes modales $a_i(t)$ obtenues sont comparées aux amplitudes de référence issues de la projection sur les modes POD des clichés connus à chaque instant t . Les différents comportements du modèle réduit POD Galerkin linéaire et quadratique sont répertoriés en fonction des configurations testées.

3.1 Détermination des coefficients de prédiction temporels

Les coefficients D_i, L_{ij}, C_{ijk} du modèle réduit peuvent être évalués à partir des coefficients temporels POD retenus ainsi que du champ moyen. Le modèle réduit POD-Galerkin à l'ordre 2 est le suivant :

$$(S) \begin{cases} \frac{d}{dt} a_i(t) = D_i + \sum_{j=1}^{N_{POD}} L_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{POD}} \sum_{k=1}^{N_{POD}} C_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ a_i(0) = (u_0 - \bar{u}, \phi_i) \end{cases}$$

La résolution du système fournit la dynamique temporelle des coefficients $a_i(t)$. Dans la méthodologie POD-Galerkin les étapes de construction et d'intégration du modèle réduit peuvent être séparées. L'intégration du système d'équations différentielles ordinaires est rapide, mais l'identification des coefficients de ce système est réalisée par la méthode des moindres carrés via la SVD, ce qui peut s'avérer coûteux numériquement. En effet, le nombre d'inconnues du système à résoudre croît de manière linéaire ou quadratique selon l'ordre du modèle réduit. Or dans chaque configuration testée, le contenu énergétique a une convergence lente vers le maxima 100%. Un grand nombre de coefficients temporels est ainsi nécessaire à la reconstruction de l'écoulement. C'est pourquoi, pour les différents cas, nous avons choisi de conserver seulement un nombre de modes sélectionnés sur un critère énergétique de 80% ou 90% pour le modèle POD-Galerkin limité au terme linéaire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_i(t) = D_i + \sum_{j=1}^{N_{POD}} L_{ij} a_j(t) \\ a_i(0) = (u_0 - \bar{u}, \phi_i) \end{cases}$$

Pour le modèle réduit quadratique, les 10 premiers coefficients de projection temporels seront utilisés, ce qui correspond dans chaque cas à un contenu énergétique inférieur ou égal à 70%.

3.2 Procédure d'intégration du modèle réduit

Les coefficients des modèles réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique sont estimés par une identification polynomiale (Perret et al., 2006) et leur résolution numérique se fait à l'aide de la méthode Runge-Kutta à l'ordre 4 avec un pas de temps $\Delta t = 0.001 * \Delta t^{(piv)}$. Les différents comportements du modèle réduit POD-Galerkin selon son degré et les configurations testées sont représentées au tableau 4.13. Les évolutions temporelles des coefficients de prédiction temporels $a_1(t), a_2(t), a_5(t), a_{10}(t)$ pour le modèle réduit linéaire sont représentées de la figure 4.14 à la figure 4.15 pour $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$ et de la figure 4.16 à la figure 4.15 pour le modèle réduit quadratique pour $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$.

α°	30	30	30	30
R_e	2000	1000	2000	1000
Modèle réduit	Linéaire	Linéaire	Quadratique	Quadratique
Évolution	amortissement	amortissement	amortissement	stationnaire
α	20	20	20	20
R_e	2000	1000	2000	1000
Modèle réduit	Linéaire	Linéaire	Quadratique	Quadratique
Évolution	divergence	divergence	divergence	divergence
α	15	15	15	15
R_e	2000	1000	2000	1000
Modèle réduit	Linéaire	Linéaire	Quadratique	Quadratique
Évolution	amortissement	amortissement	amortissement	stationnaire
α	10	10	10	10
R_e	2000	1000	2000	1000
Modèle réduit	Linéaire	Linéaire	Quadratique	Quadratique
Évolution	divergence	amortissement	divergence	stationnaire

FIGURE 4.13 – Évolution du modèle linéaire et quadratique en fonction des différentes configurations.

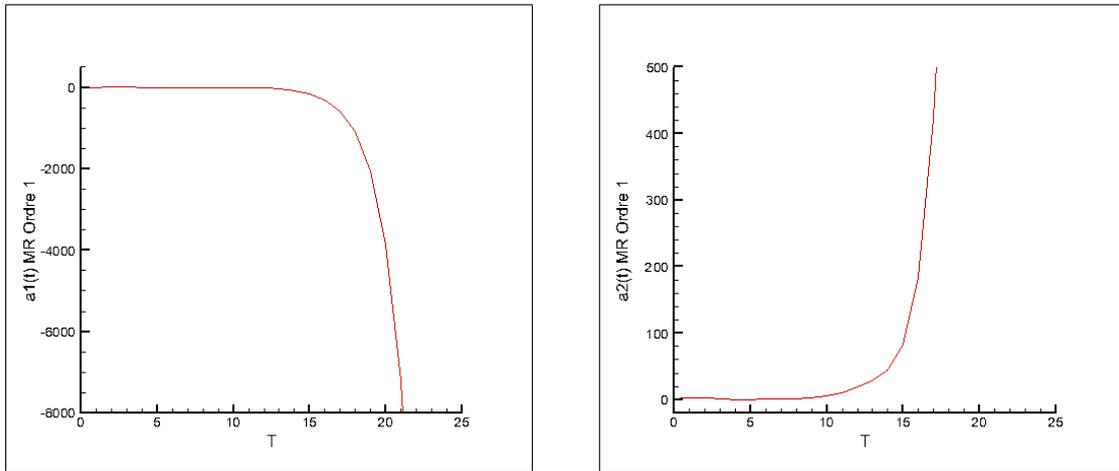


FIGURE 4.14 – Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$

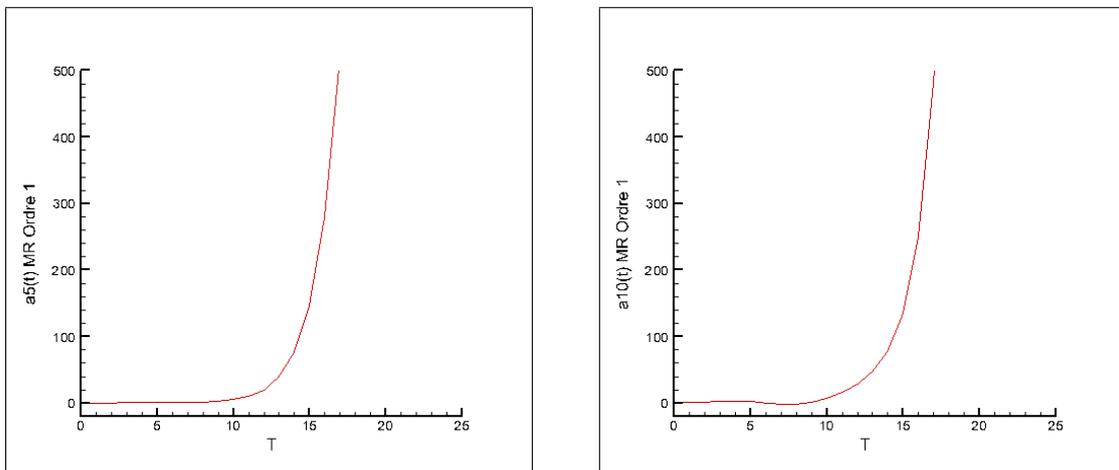


FIGURE 4.15 – Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ - Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$

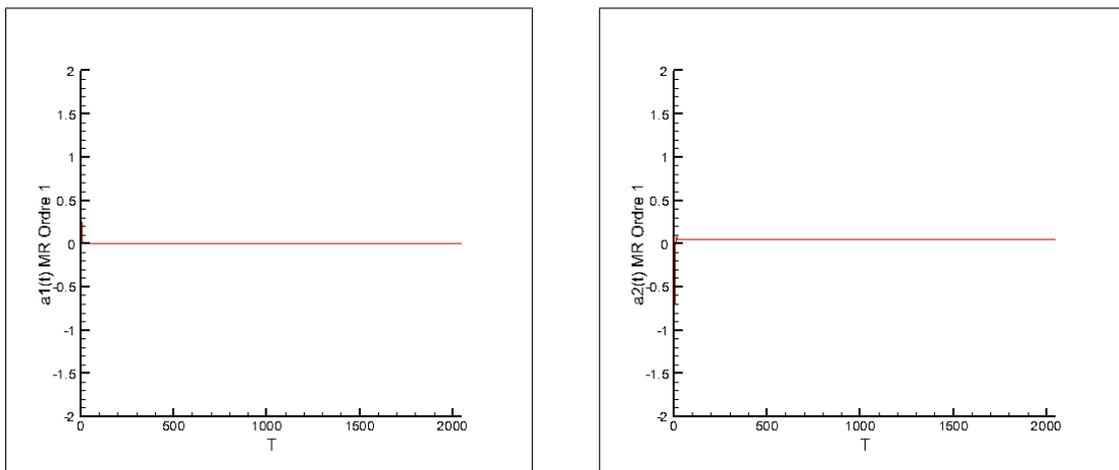


FIGURE 4.16 – Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $R_e=1000$

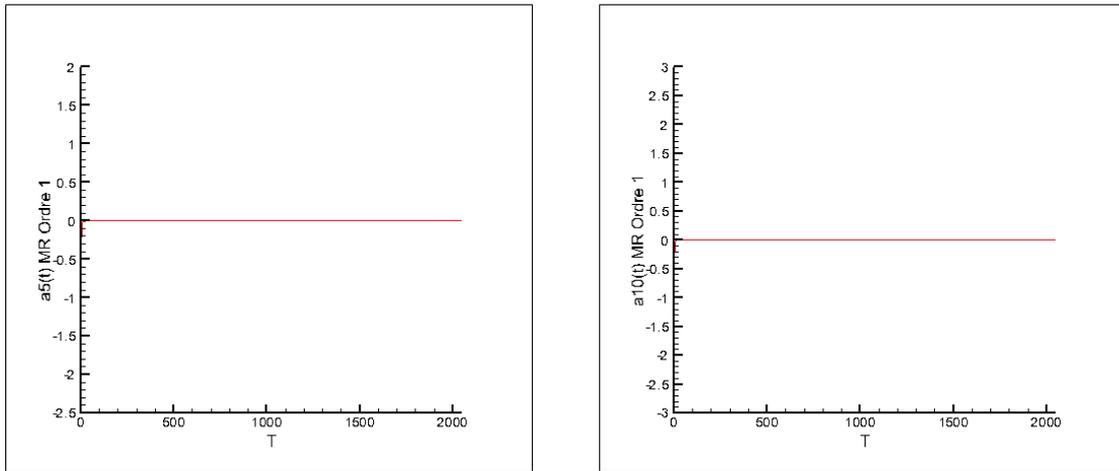


FIGURE 4.17 – Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $R_e=1000$

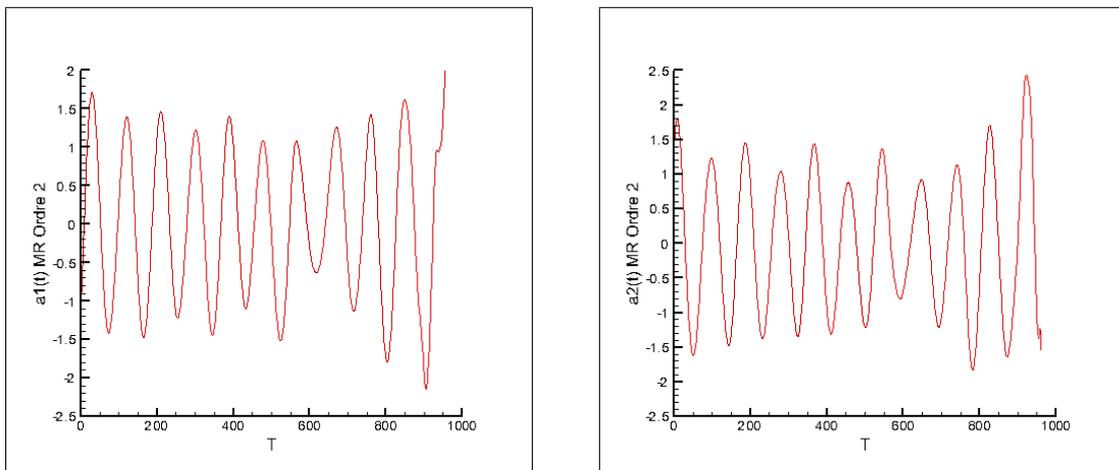


FIGURE 4.18 – Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$

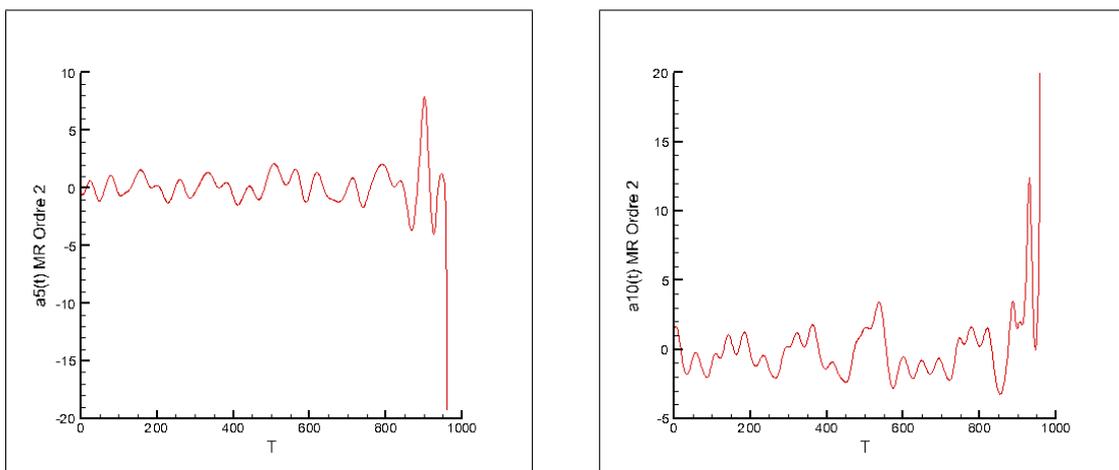


FIGURE 4.19 – Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$

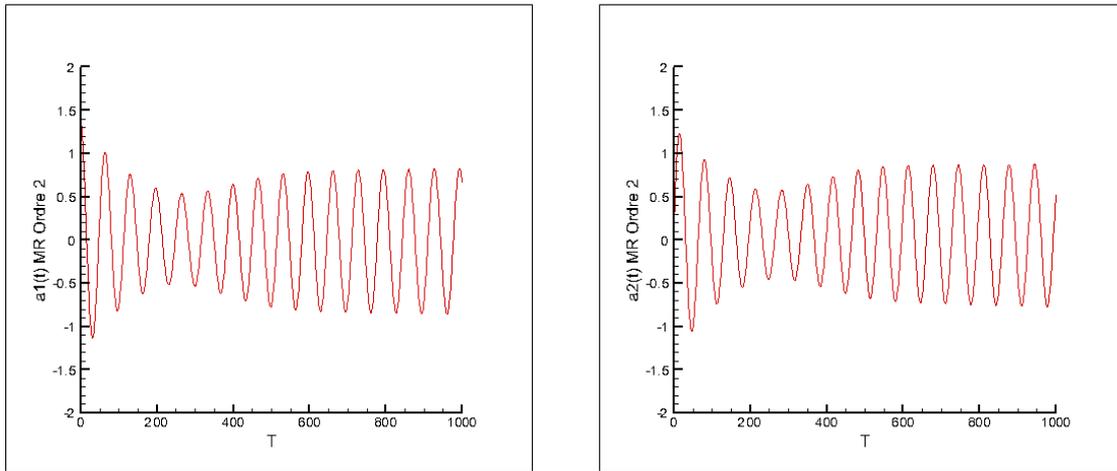


FIGURE 4.20 – Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$

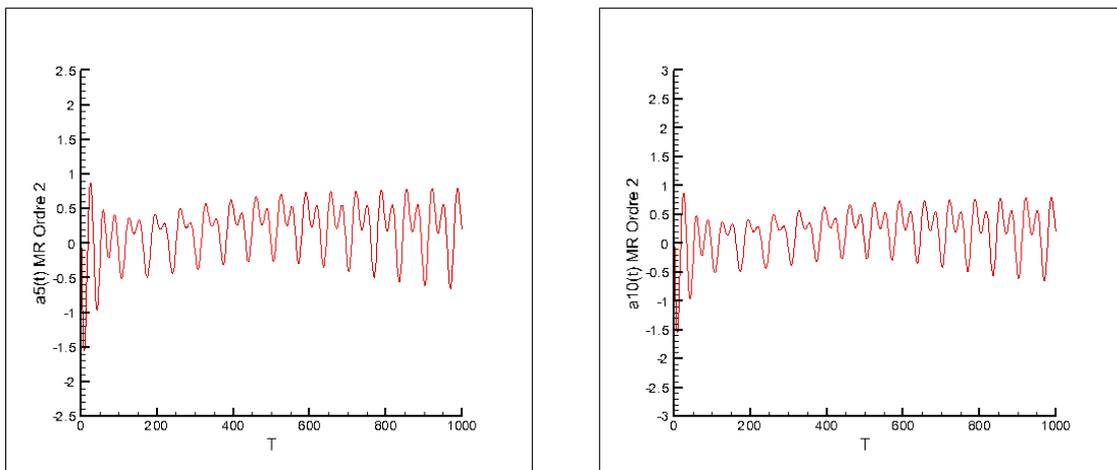


FIGURE 4.21 – Coefficients $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ Modèle réduit quadratique - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$

3.3 Observations

Le modèle d'ordre réduit souffre d'un manque de stabilité. Dans toutes les configurations testées, des erreurs importantes en amplitude et en phase apparaissent rapidement dès les premiers pas de temps et se traduisent, selon les configurations, par une divergence, un amortissement ou un déphasage du modèle réduit. L'utilisation du modèle réduit linéaire conduit soit à un amortissement, soit à une divergence de l'amplitude. Une perte de phase des coefficients de prédiction temporels est également constatée. Le modèle réduit quadratique peut diverger ou rester stationnaire. En cas de divergence, la dérive en amplitude intervient rapidement. Lorsque l'évolution du modèle réduit reste stationnaire, les relations de phase ainsi que l'amplitude des coefficients de projection temporels retenus ne sont pas respectées. Dans chaque configuration testée, le modèle réduit POD-Galerkin, linéaire ou quadratique est donc inapplicable pour la reconstruction directe de l'écoulement.

La seule intégration temporelle du modèle ne permet donc pas de reproduire correc-

tement la dynamique de l'écoulement. Cependant, le modèle réduit POD-Galerkin avec termes quadratiques peut représenter correctement les écoulements incompressibles mais il s'avère nécessaire de le munir de termes de contrôle. L'imprécision du modèle réduit ainsi mise en évidence a été largement étudiée dans la littérature (Noack et al., 2005b). Les fonctions de base POD retenues pour construire le modèle réduit de dynamique de l'écoulement sont représentatives des caractères énergétiques dominants de l'écoulement $u(x,y,t)$ générés par les grosses et moyennes structures. Considérer un RIC de 90% revient à négliger un nombre important de modes qui correspondent aux petites échelles de l'écoulement en raison de leur faible apport énergétique. Une interprétation possible consiste à considérer que la dissipation visqueuse s'effectue principalement dans les petites structures de l'écoulement. Par conséquent, le système POD ne dissipe pas assez d'énergie et les modes prédits peuvent s'amplifier au cours du temps.

Cela a conduit de nombreux auteurs à introduire des termes de régularisation afin de stabiliser le modèle, via des méthodes d'optimisation sous contraintes. On se propose, dans la section suivante, d'appliquer des méthodes d'inférence bayésiennes linéaires et non linéaires issues de l'assimilation séquentielle de données afin de stabiliser l'évolution temporelle du modèle réduit linéaire et quadratique sans introduction de termes correctifs.

4 Amélioration du modèle réduit POD-Galerkin par assimilation séquentielle de données

Cette section est consacrée à la mise en oeuvre sur le modèle réduit POD-Galerkin des méthodes d'inférence bayésienne présentées au chapitre 2 afin d'améliorer l'estimation des coefficients des modèles réduits linéaire et quadratique. Ces méthodes se basent sur la connaissance de modèles stochastiques qui sont ici définis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, w_{k-1}) & (4.1) \\ y_k = h_k(x_k) + v_k & (4.2) \end{cases}$$

où X_k est le vecteur d'état caché, Y_k le vecteur des observations et $(w_k)_{k \geq 0}$ et $(v_k)_{k \geq 1}$ sont des bruits blancs indépendants entre eux. La fonction f_k est ici une fonction non linéaire d'évolution de l'état et h_k une fonction d'observation linéaire en x_k . L'objectif principal des méthodes d'inférence est de permettre au modèle d'estimer l'état caché x_k connaissant soit les observations $y_{1:k}$ dans le cas du filtrage, soit les observations $y_{1:T}$ dans le cas du lissage. Les filtres de Kalman linéaire, noté ici KF, le filtre de Kalman d'ensemble, noté EnKF et le filtre d'ensemble "Square-Root", noté SR-EnKF sont appliqués à la reconstruction des coefficients de prédiction temporels ainsi qu'à la reconstruction des champs de vitesses. Le lissage sera quant à lui utilisé dans la procédure de maximisation de la vraisemblance dans l'algorithme EM afin de reconstruire des données manquantes.

Notations adoptées

Les notations suivantes sont adoptées : x_k est le vecteur d'état exact de dimension n à estimer, son estimé à l'aide de la fonction f_k est noté x_k^f . La fonction f_k est le modèle réduit POD-Galerkin. La matrice de covariance fournie par l'estimateur est notée P_k dans le cas des filtres de Kalman linéaires et P_k^N dans le cas des filtres de Kalman d'ensemble. Lors de l'application des filtres de Kalman sur le modèle réduit POD-Galerkin on fait l'hypothèse que le modèle d'évolution n'est pas biaisé. Le vecteur x_k^f contient les

coefficients de prédiction temporels et le vecteur x_k^a les coefficients de prédiction temporels estimés et corrigés par le filtre de Kalman utilisé. Le vecteur Y_k contient les observations, c'est-à-dire les coefficients de projection temporels issus de la POD sur l'ensemble des snapshots de l'écoulement $u(x,y,t)$.

4.1 Erreurs en moyenne quadratique des estimateurs

L'erreur en moyenne quadratique (ou RMSE pour *Root Mean Square Error*) d'un estimateur $\hat{X}_k(y)$ d'un état aléatoire X_k supposé déterministe est définie par :

$$\mathbb{E}|\hat{X}_k - X_k|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{X}_k(y) - x)^t (\hat{X}_k(y) - x) p_k^y(dy|x) p_k^x(dx)$$

où $p_k^y(dy|x)$ est la distribution à l'instant k de l'observation y sachant la valeur du vrai état x_k et $p_k^x(dx)$ la distribution du vrai état X_k . Cette erreur est estimée par :

$$\mathbb{E}|\hat{X}_k - X_k|^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_k(y^i) - x_k^i)^t (\hat{x}_k(y^i) - x_k^i)$$

La RMSE est un paramètre utilisé pour des analyses probabilistes car pour des estimateurs de paramètres scalaires non biaisés, il s'agit de l'approximation la plus naturelle de l'écart-type de l'erreur d'estimation. De plus, afin de quantifier la qualité de reconstruction entre les coefficients de projection temporels $a_i(t)$, et les coefficients de prédiction temporels $a_i^{(f)}(t)$ issus du modèle réduit contrôlé calibré à l'aide d'un filtre de Kalman linéaire ou non linéaire, la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne entre $a_i(t)$ et $a_i^{(f)}(t)$ est utilisée :

$$E_i = \frac{1}{N_t} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_t} (a_i(t_k) - a_i^{(f)}(t_k))^2}$$

4.2 Initialisation des filtres de Kalman

Le réglage du filtre est une étape délicate et importante. En effet, la stabilité et la rapidité de convergence du filtre seront dépendantes de ce réglage et de son initialisation. L'évaluation du bruit de processus est souvent difficile. Ces grandeurs sont à prendre en compte quel que soit le filtre considéré. Ces réglages sont en général soit réalisés de manière empirique, soit basés sur des valeurs *a priori* optimales. Différentes méthodes de détermination des covariances existent : algorithme du simplex (Powell, 2002), moindres carrés (Akesson et al., 2007), recuit simulé (Buyamin and Finch, 2007), algorithmes génétiques (Avenida-Valencia et al., 1967). Nous avons vu que le filtre de Kalman est optimal au sens du minimum de variance a posteriori pour estimer les systèmes linéaires. Ce filtre s'appuie sur un modèle markovien d'évolution qui ne tient compte que de l'état précédent. Le réglage d'un filtre de Kalman, linéaire ou non linéaire, consiste à ajuster les paramètres propres aux filtres considérés, à savoir :

1. L'état initial x_0 et de sa covariance d'erreur d'estimation P_0
2. Les covariances Q et R des bruits d'état et de mesure.

Le filtre EnKF utilise une simulation de Monte Carlo pour prédire les moyennes et les covariances des états en propageant un nombre N de particules dans les espaces d'état et de mesure. Il ne présente qu'un seul paramètre à ajuster qui est le nombre N d'ensembles. En théorie, l'approximation faite en utilisant la simulation de Monte Carlo est vérifiée par la loi forte des grands nombres et le théorème de la limite centrale qui montre que l'erreur commise est proportionnelle à $1/\sqrt{N}$ et tend donc vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. La qualité de l'estimation de la matrice des variances-covariances d'erreur de l'ébauche, et donc celle du filtre de Kalman d'ensemble, dépendent de la faculté de l'ensemble d'ébauche à couvrir toutes les possibilités. La taille de l'ensemble joue donc un rôle important dans le fonctionnement du filtre de Kalman d'ensemble. Ainsi, plus N est grand, meilleure est la qualité de l'estimation. La variance expérimentale doit être une fonction décroissante de N dont la courbe représentative doit ressembler à celle de la fonction $N \mapsto 1/\sqrt{N}$. Cette tendance se vérifie assez bien en pratique. Comme il est impossible d'adopter la valeur optimale de N qui est infiniment grande, il faut se limiter à un certain niveau. Cependant, augmenter la taille de l'ensemble nécessite également plus de temps de calcul pour réaliser les simulations d'écoulement supplémentaires. Il s'agit donc de trouver un bon compromis entre la précision obtenue sur la matrice de covariance et le temps de calcul. Une valeur trop élevée de N conduit à un coût de calcul important et requiert davantage de mémoire. Si N est trop faible, alors les covariances sont mal évaluées, ce qui entraîne une perte de la positivité des matrices de covariance d'erreur d'estimation. Il faut donc choisir un niveau de variance pour lequel la qualité d'estimation est jugée suffisante et donc un nombre de particules minimum à prendre pour avoir une qualité d'estimation acceptable. En général, pour $N < 20$ le filtre EnKF est considéré comme sous-optimal. Le choix de la taille de l'ensemble dépend de l'application considérée, mais un ensemble de taille 100 apparaît généralement comme acceptable dans la littérature Evensen (2006).

Les bruits blancs gaussiens w_k et v_k des équations d'états et de mesure des filtres de Kalman utilisés sont tout d'abord initialisés :

- Filtre KF : $Q=0.001I$ et $R=0.001I$, où I est la matrice identité de taille $N_t \times N_t$
- Filtre EnKF : $w \sim \mathcal{N}(0,0.01)$ et $v \sim \mathcal{N}(0,0.01)$
- Filtre SREnKF : $w \sim \mathcal{N}(0,0.01)$

Afin d'initialiser le filtre EnKF, on fait varier la taille de l'ensemble à $N=100$, $N=250$ et $N=500$. Le réglage de $N=100$ est couramment retenu, compte tenu du fait qu'il présente de plus une certaine marge par rapport au nombre $N=20$ de particules qui garantissent la positivité de covariance. Cependant, il est nécessaire ici de l'adapter. En effet, considérer un critère RIC de 90 % pour la sélection des coefficients de projection temporels implique de négliger un grand nombre de coefficients qui peuvent être assimilés à du bruit. Ainsi, le nombre d'ensemble N utilisé pour les filtres EnKF va varier selon le nombre de coefficients choisis. C'est pourquoi on choisit un nombre d'ensemble N tel que si :

- $N_t < 100$, alors $N=100$
- $100 < N_t < 200$, alors $N=250$
- $200 < N_t$, alors $N=500$

Exemples de divergence du filtre EnKF

Afin de mettre en évidence l'importance de la valeur du nombre d'ensemble N utilisé dans le filtre EnKF, deux exemples de divergence du filtre EnKF sont ici proposés. La configuration choisie correspond à un angle d'incidence $\alpha = 30^\circ$, et au nombre de Reynolds de 1000. Le RIC choisi est de 80% ce qui correspond à $N_t=255$ coefficients de projection temporels. Le filtre EnKF est utilisé sur le modèle réduit linéaire avec un nombre d'ensemble $N=100$, puis avec $N=250$. Les niveaux de bruits dans les deux cas sont identiques et correspondent aux niveaux fixés précédemment. Les évolutions temporelles des deux premiers coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont montrées sur la figure 4.22. Dans le cas où $N=100$, le filtre EnKF diverge clairement, en effet, l'amplitude des coefficients est amplifiée au cours du temps et la relation de phase entre les deux coefficients n'est plus respectée. Pour le cas où $N=250$, la convergence du filtre EnKF s'améliore mais l'amplitude des coefficients et leur relation de phase ne sont pas respectées.

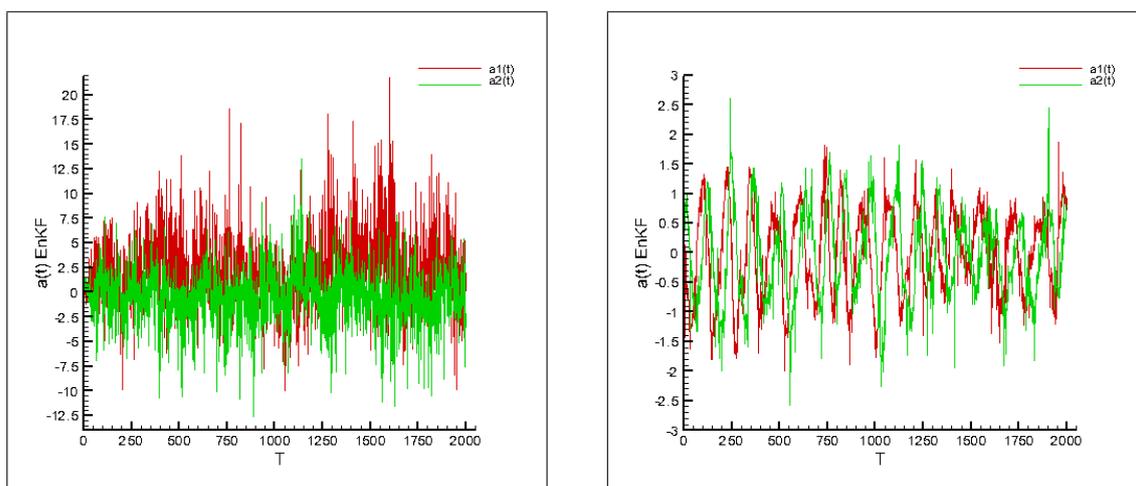


FIGURE 4.22 – Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ du filtre EnKF avec $N = 100$ et $N = 250$ - Modèle réduit linéaire

Une fois les filtres initialisés, on privilégie ici l'utilisation du modèle réduit linéaire car il permet de tenir compte d'un critère énergétique plus important pour un coût de calcul moindre qu'avec le modèle quadratique. Les filtres KF, EnKF et SR-EnKF sont ensuite appliqués aux différentes configurations de l'écoulement. Le nombre N_t de coefficients de projection temporels retenus dans chaque cas correspond à un RIC de 90% ou 80% si N_t est trop important. De plus, afin de considérer la dynamique non linéaire des coefficients de prédiction temporels, le filtre EnKF est également utilisé sur le modèle réduit POD-Galerkin quadratique. Les deux configurations choisies correspondent aux angles d'incidence $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 20^\circ$ et au nombre de Reynolds de 1000. Le nombre de coefficients de projection temporels retenus est de $N_t=10$, ce qui correspond respectivement à un RIC de 70% et 86%.

Pour le cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e=1000$, les reconstructions des coefficients de prédictions temporels $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$, $a_{10}(t)$ obtenus avec le filtre de Kalman linéaire sont représentés figure 4.23, avec le filtre EnKF figure 4.24 et avec le SR-EnKF figure 4.25. Pour l'ensemble des cas testés, les erreurs de reconstruction entre les coefficients de prédiction temporels et les coefficients de projection temporels sont représentées de la figure 4.28 à la figure 4.37 et les RMSE obtenues sur chaque les filtres KF, EnKF et SR-EnKF sont représentées de la figure 4.38 à la figure 4.44.

4.3 Modèle réduit linéaire et filtres KF, EnKF et SR-EnKF

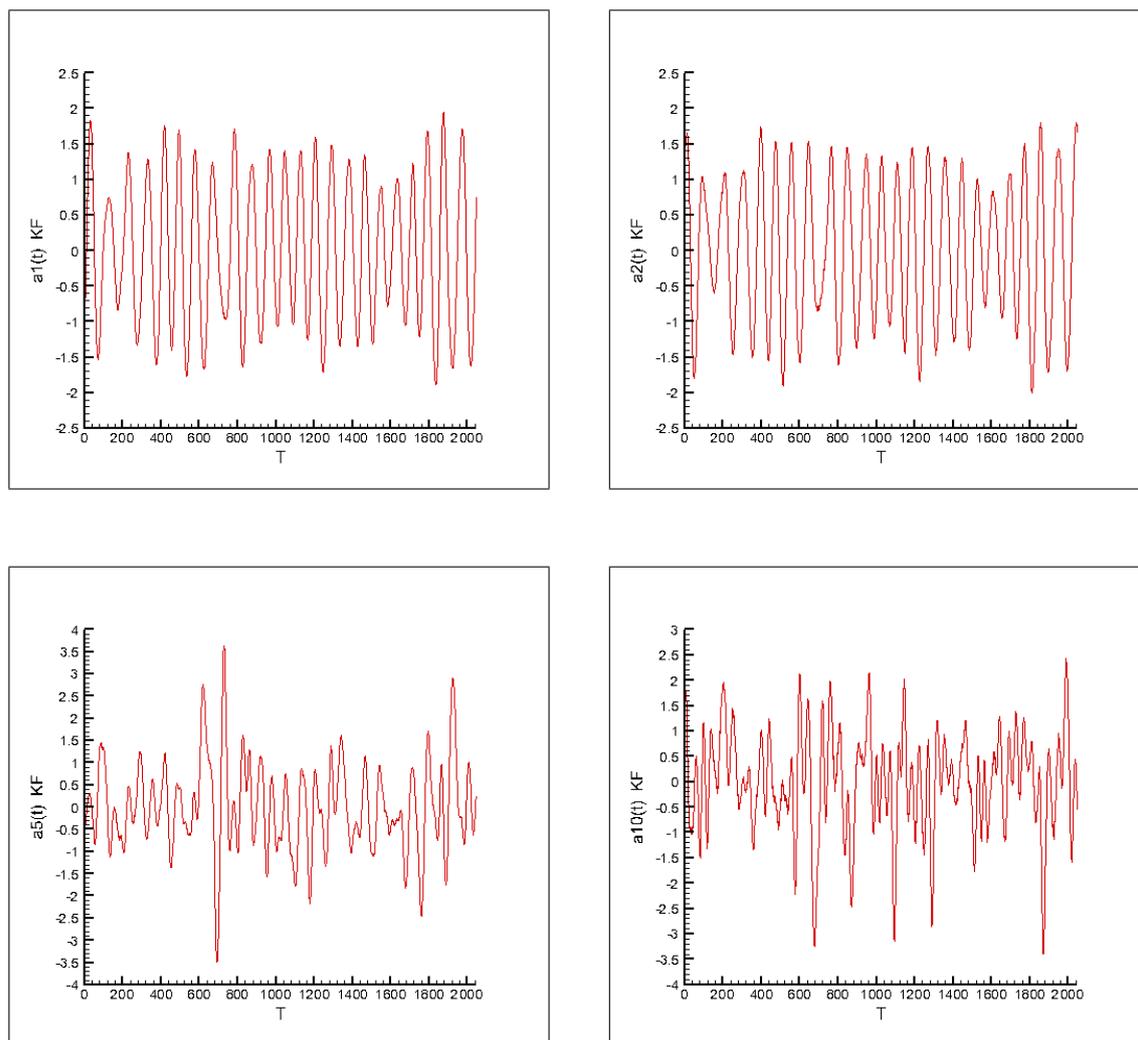
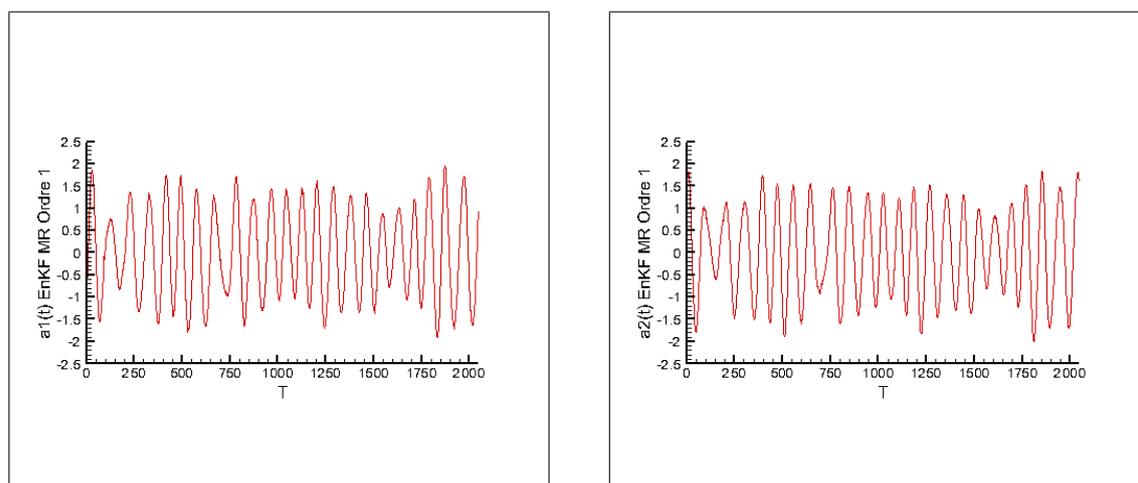


FIGURE 4.23 – Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ KF et Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$



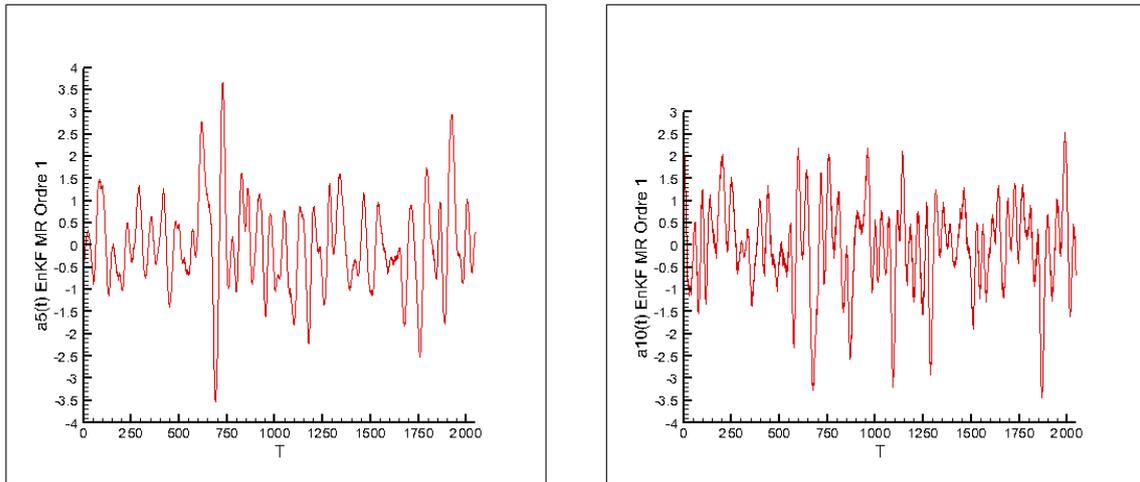


FIGURE 4.24 – Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ EnKF et Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$

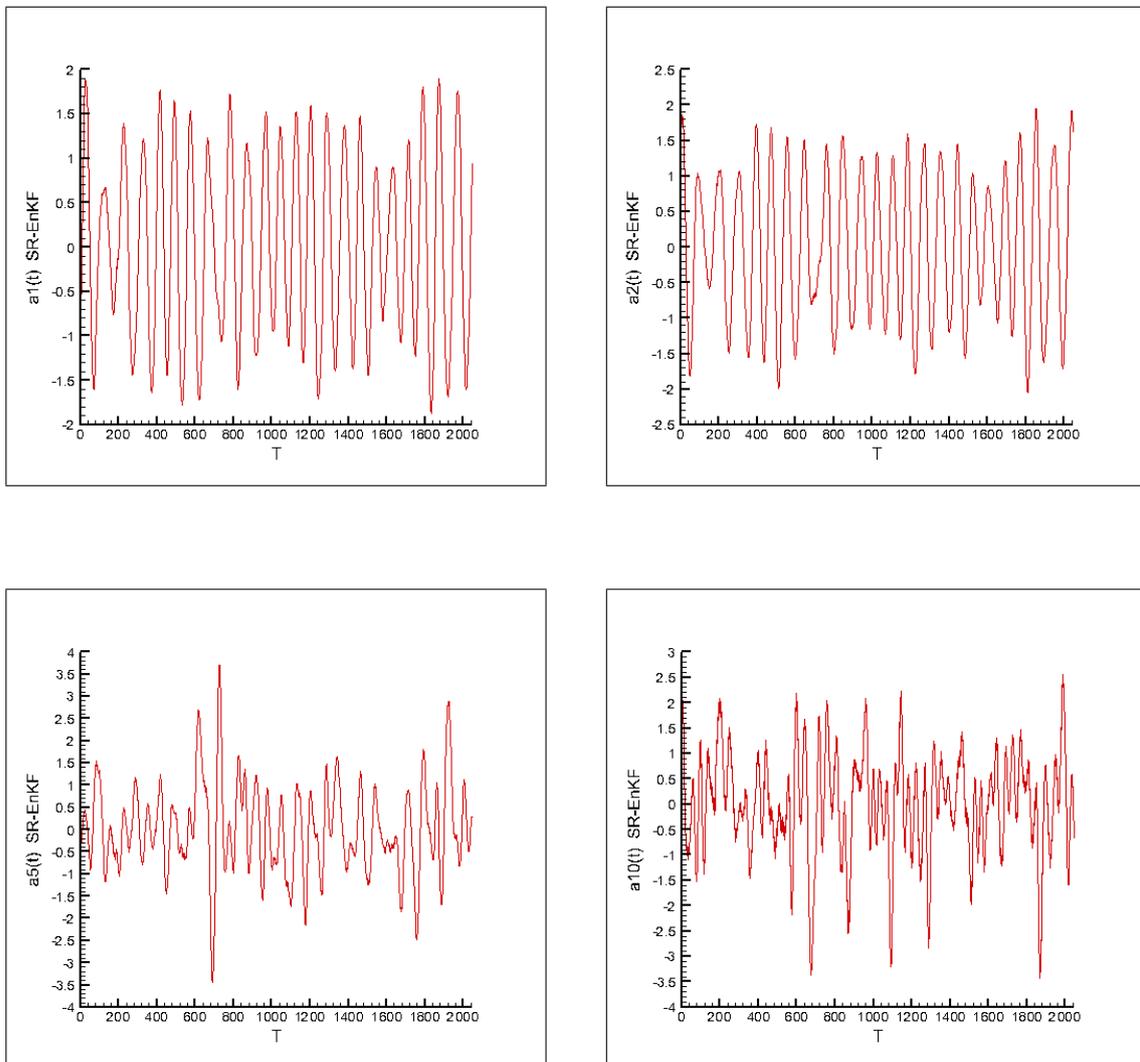


FIGURE 4.25 – Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ SR-EnKF et Modèle réduit linéaire - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$

Erreur de reconstruction des filtres KF, EnKF et SR-EnKF

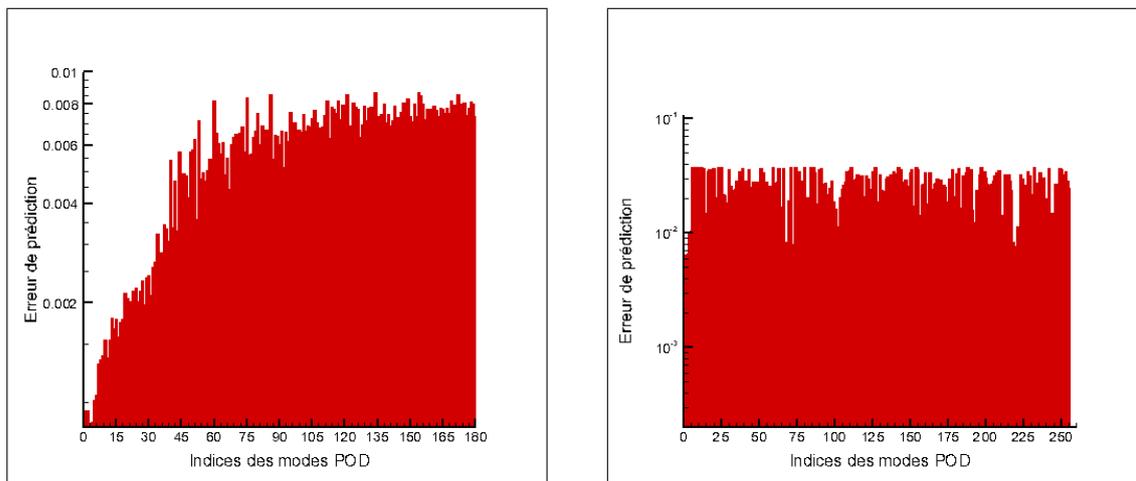


FIGURE 4.26 – Erreur E - KF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

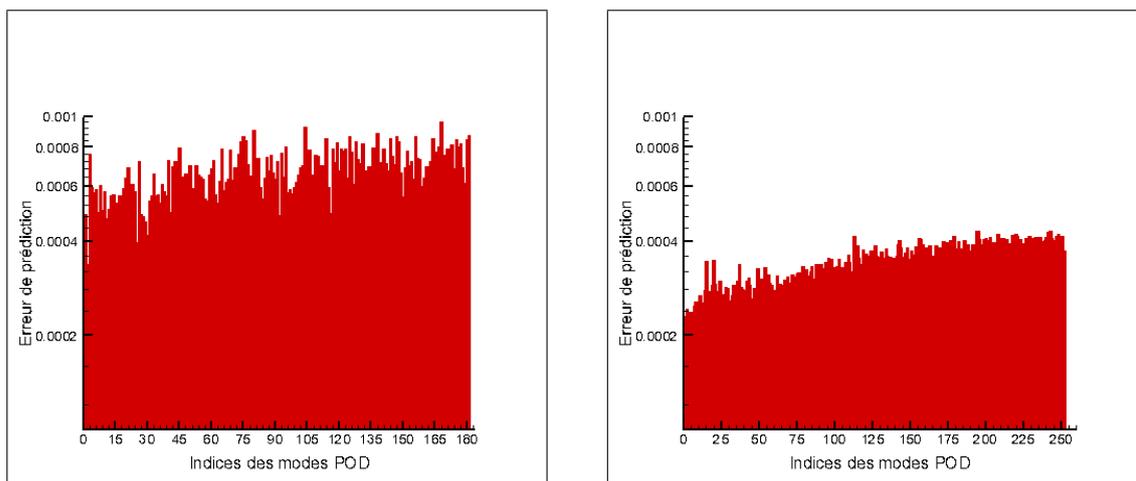


FIGURE 4.27 – Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

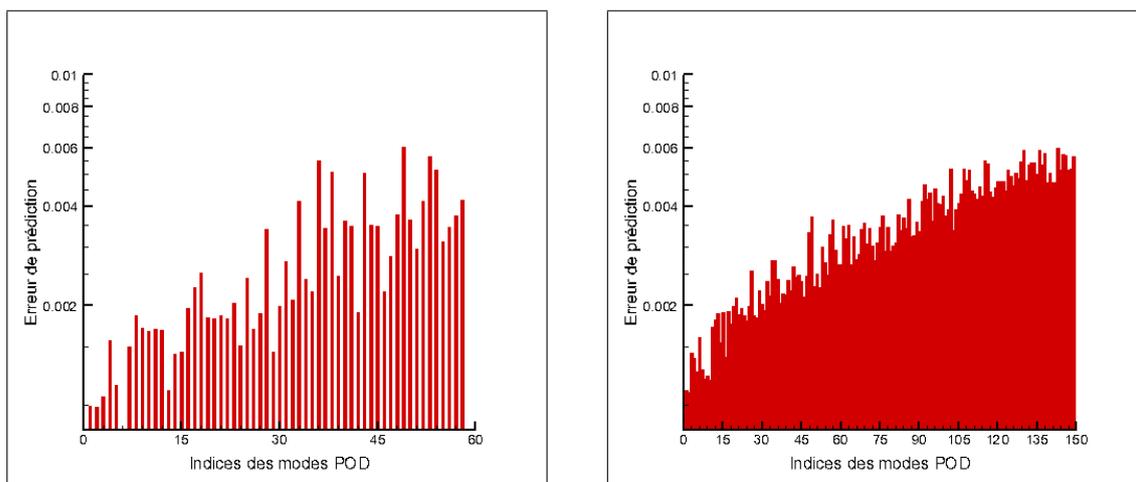


FIGURE 4.29 – Erreur E - KF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

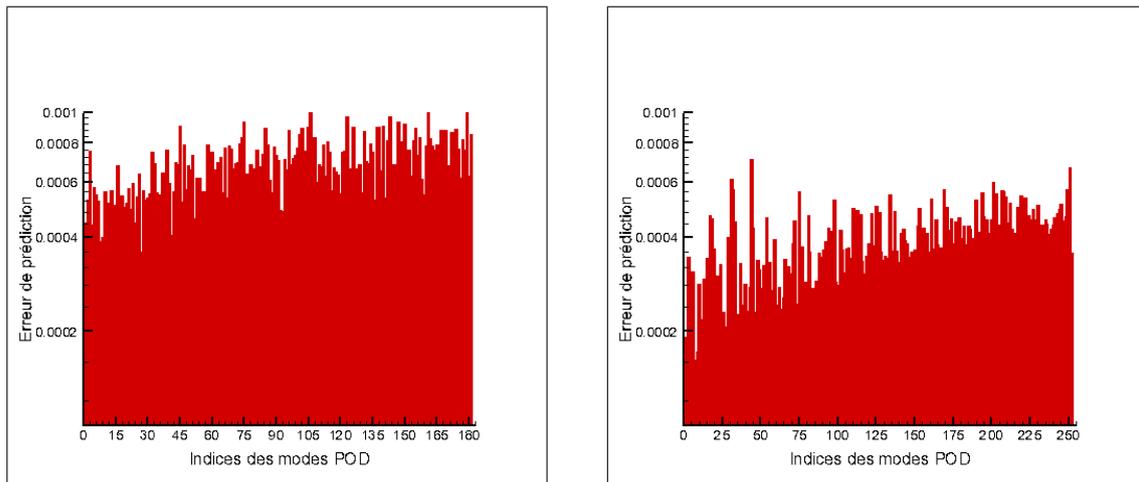


FIGURE 4.28 – Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

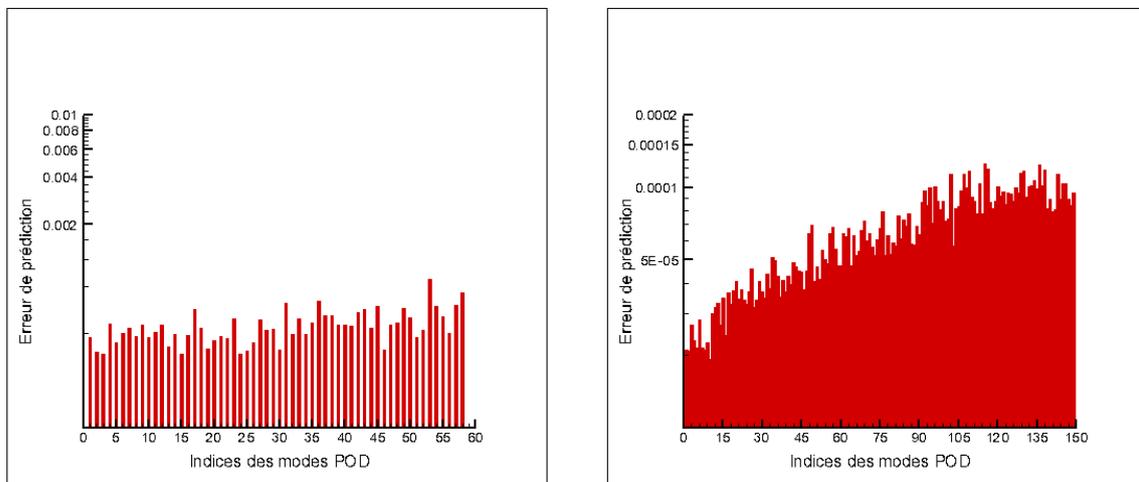


FIGURE 4.30 – Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

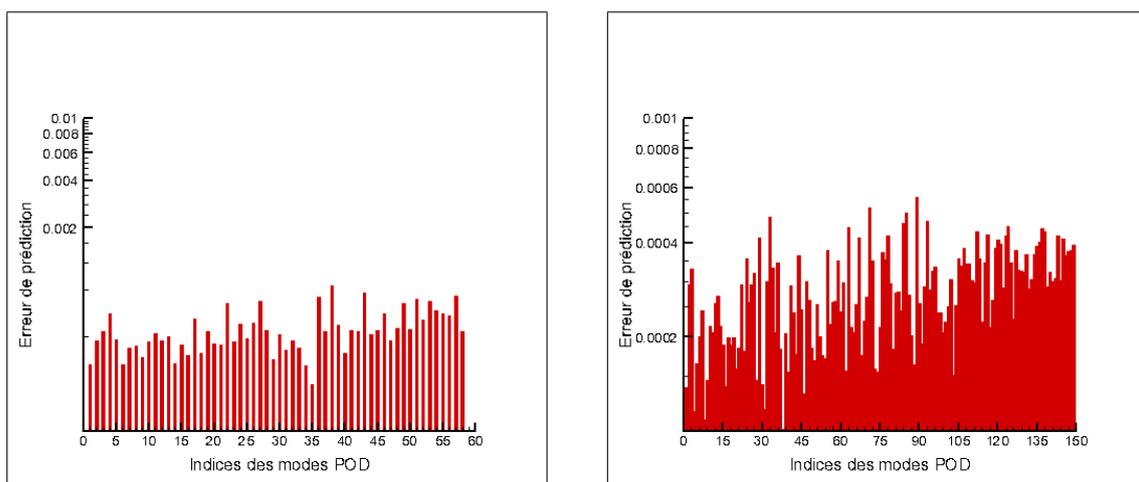


FIGURE 4.31 – Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

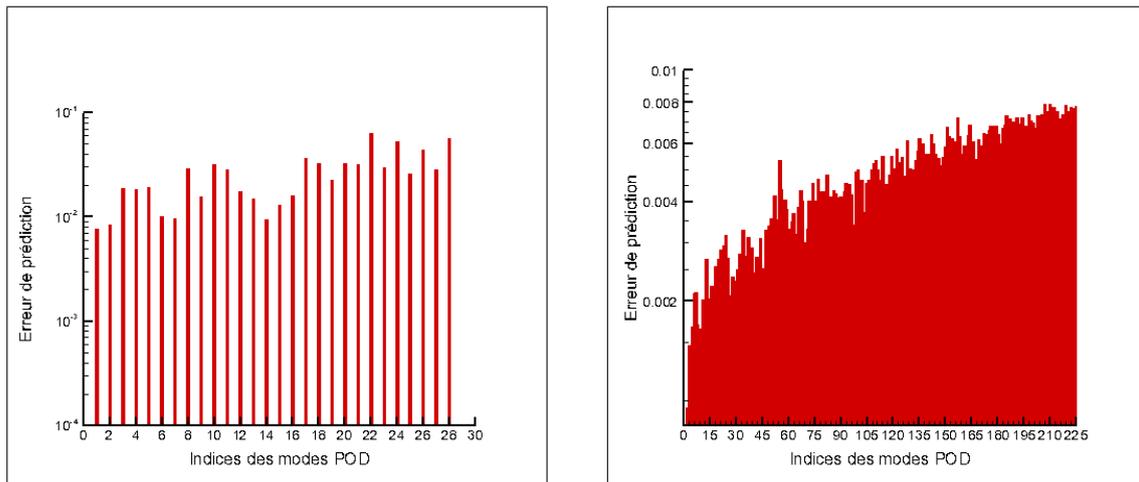


FIGURE 4.32 – Erreur E - KF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

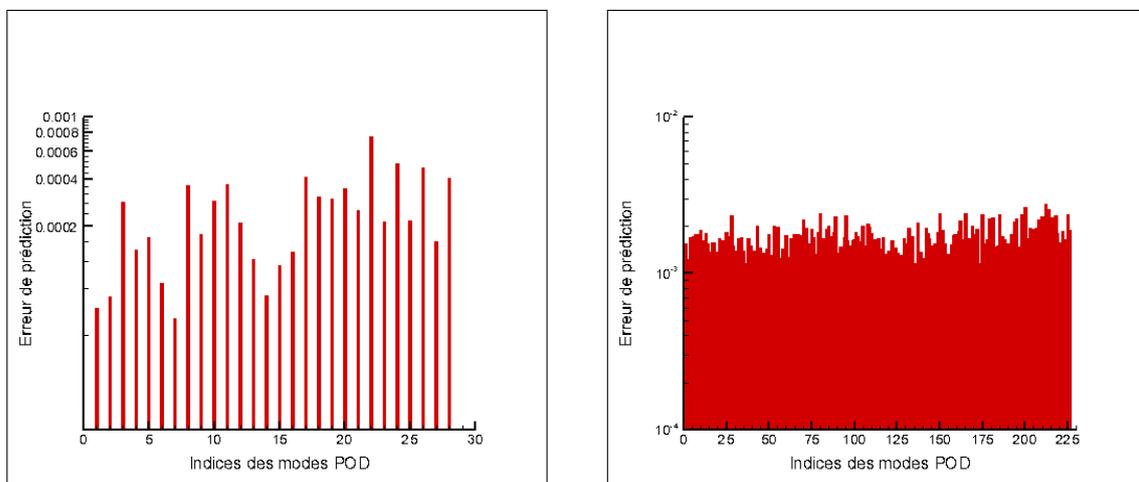


FIGURE 4.33 – Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

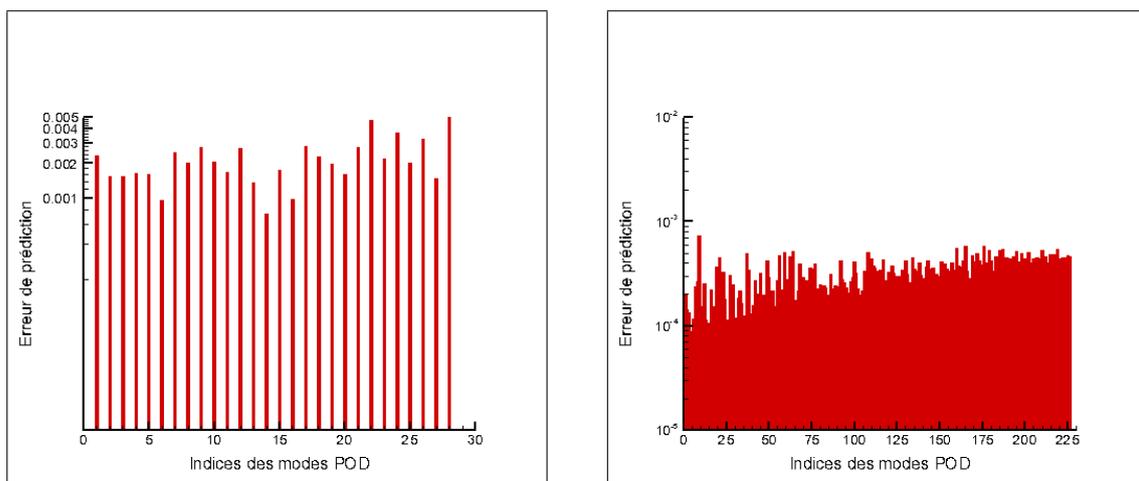


FIGURE 4.34 – Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

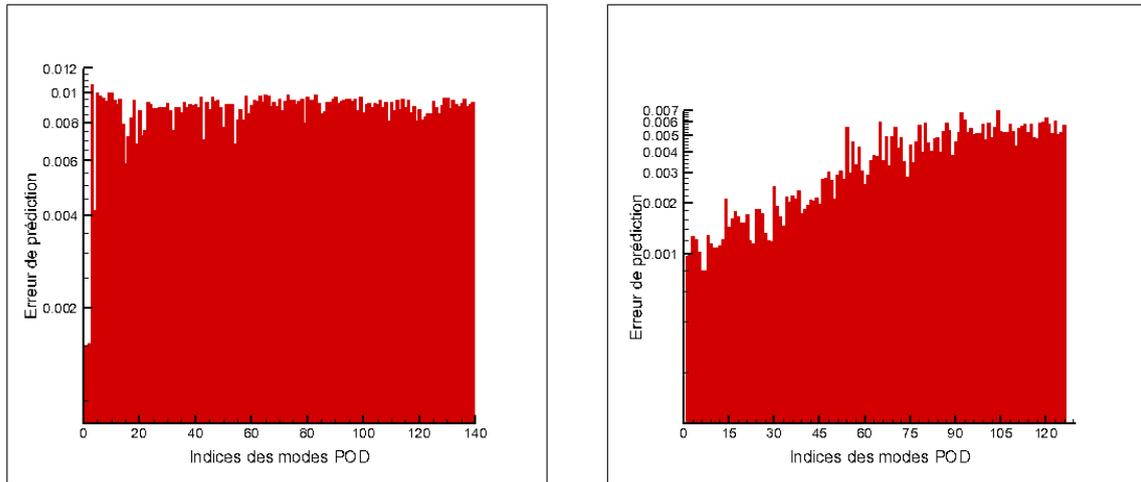


FIGURE 4.35 – Erreur E - KF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

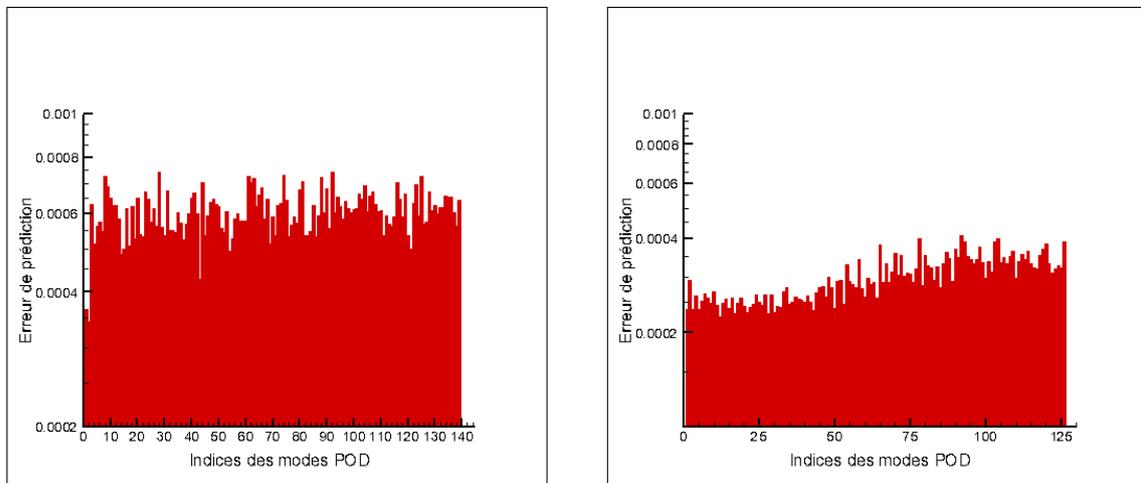


FIGURE 4.36 – Erreur E - EnKF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

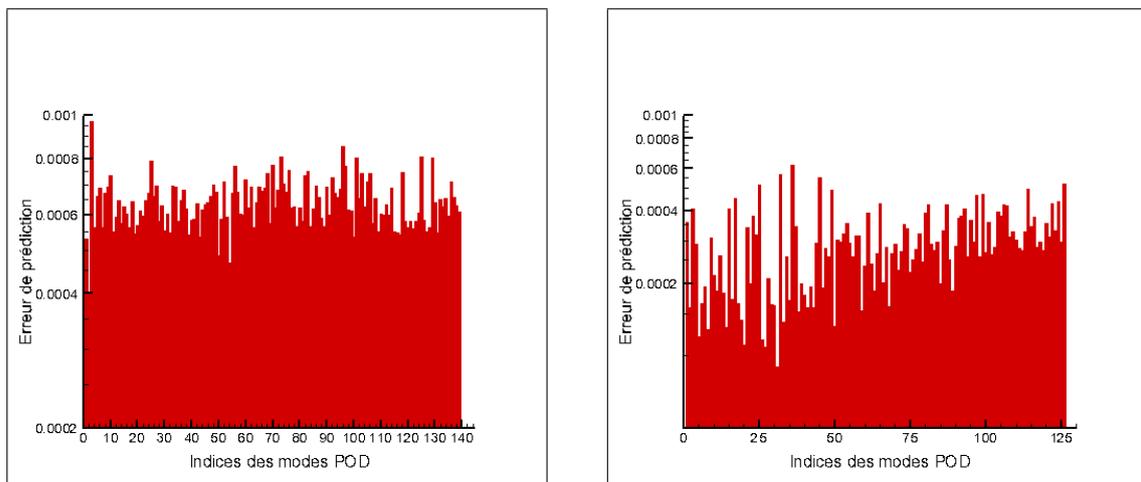


FIGURE 4.37 – Erreur E - SREnKF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

RMSE des estimateurs bayésiens KF, EnKF et SR-EnKF

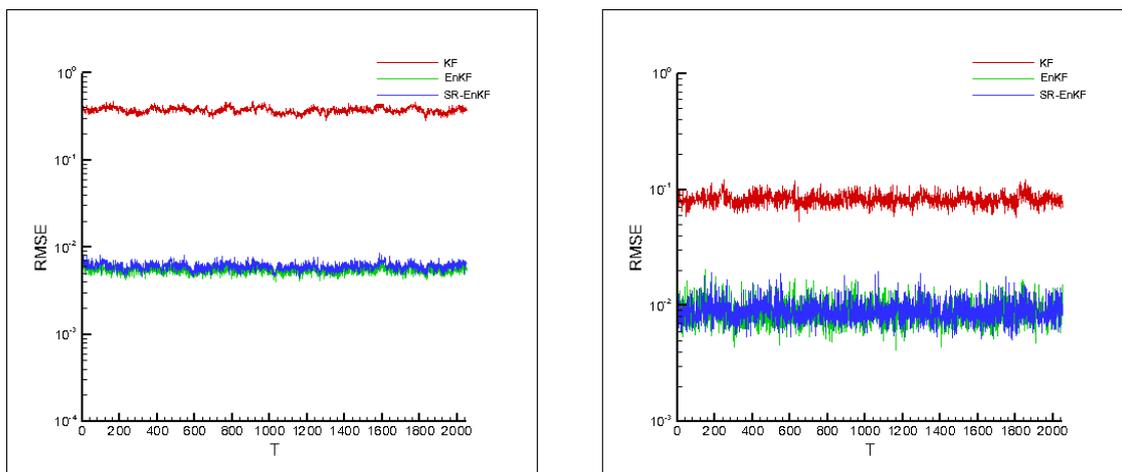


FIGURE 4.38 – RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 30^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

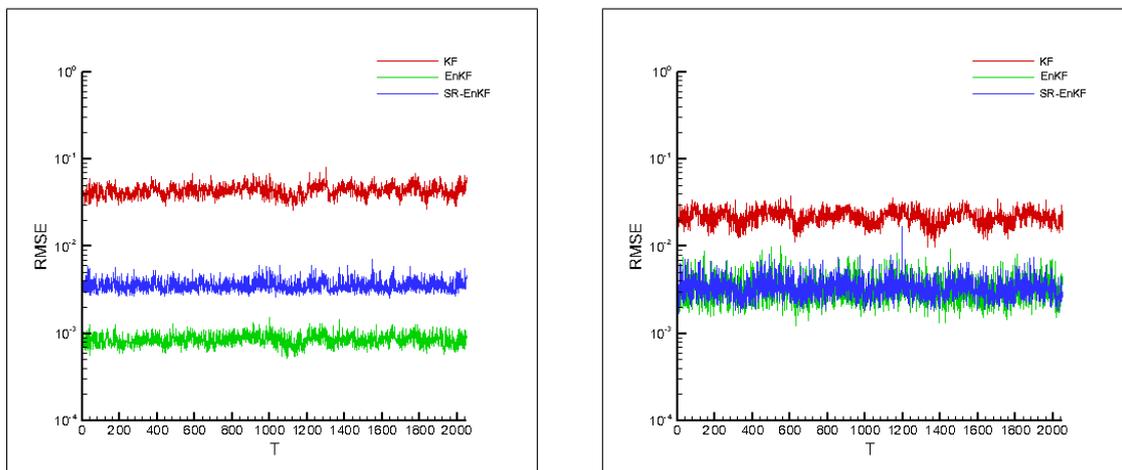


FIGURE 4.39 – RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

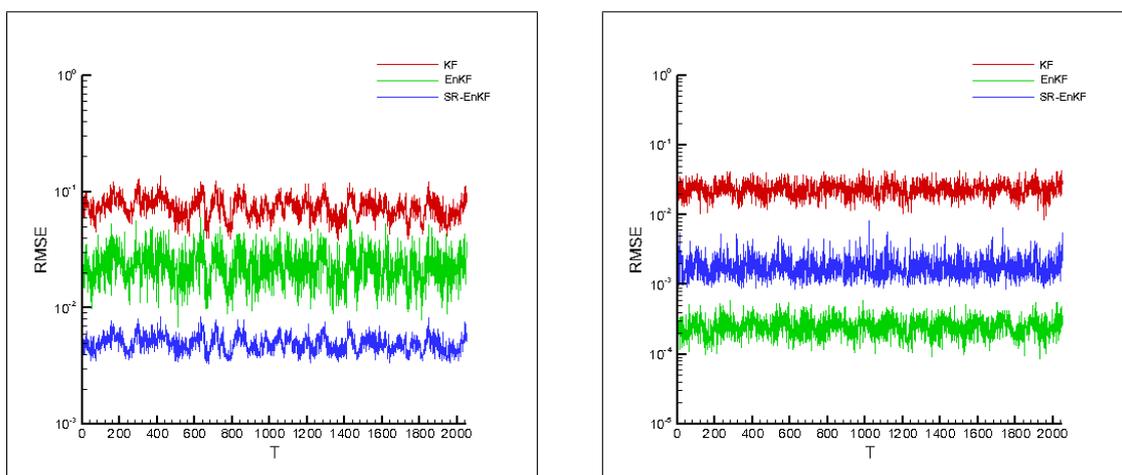


FIGURE 4.40 – RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

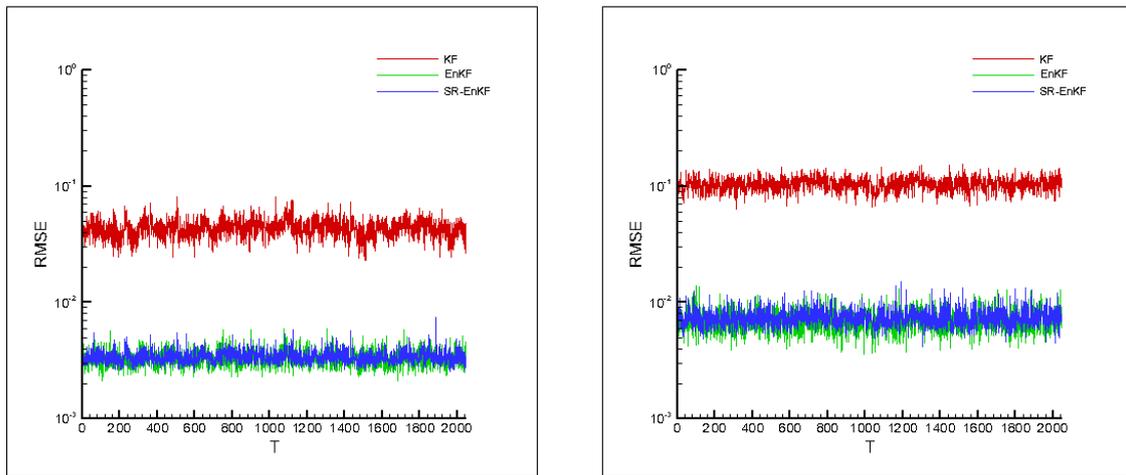


FIGURE 4.41 – RMSE KF, EnKF, SR-EnKF - Cas $\alpha = 10^\circ$, $R_e=1000$ et $R_e=2000$

Modèle réduit quadratique et filtre EnKF

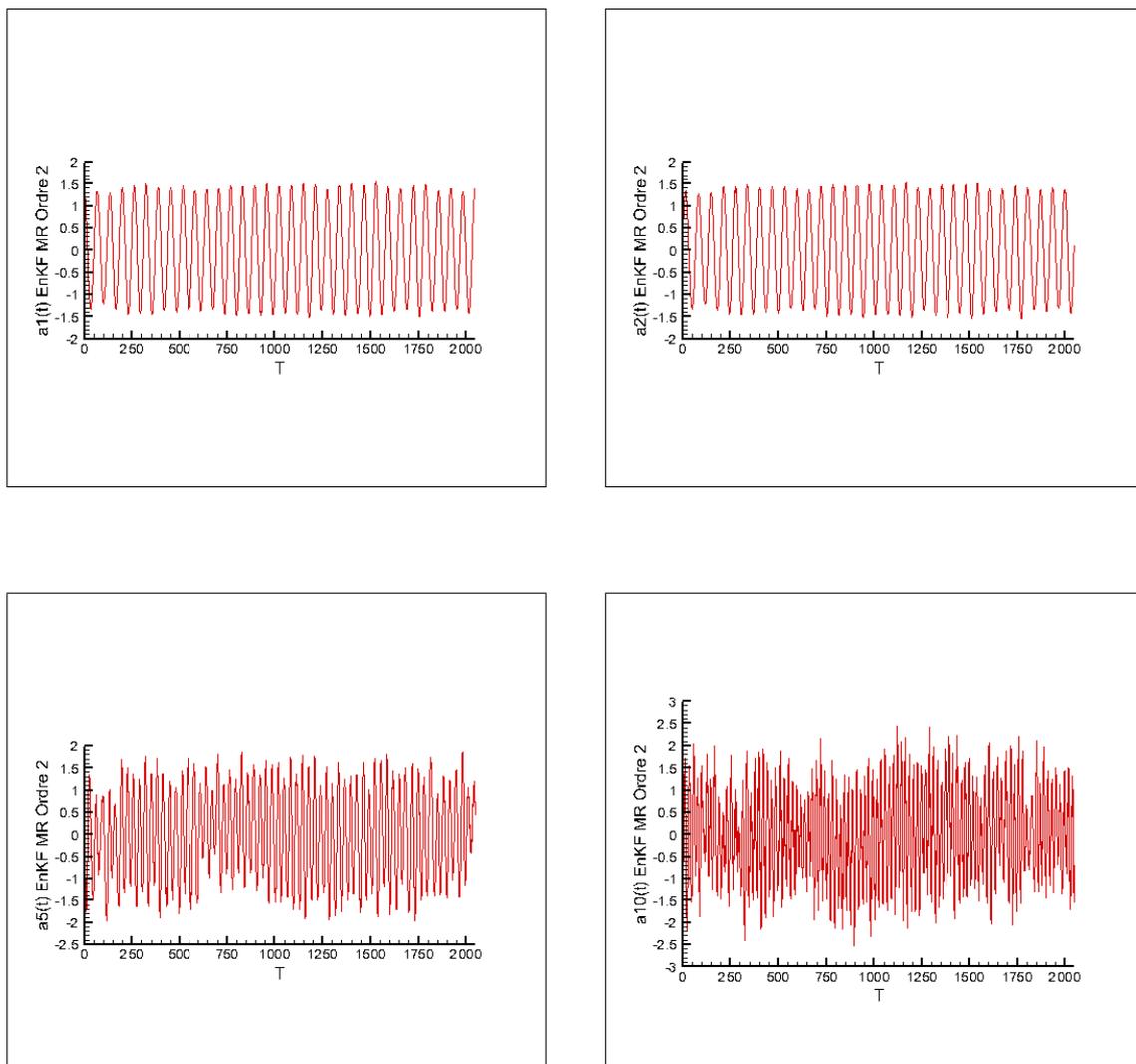


FIGURE 4.42 – Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ - EnKF - cas $\alpha = 15^\circ$, $R_e=1000$

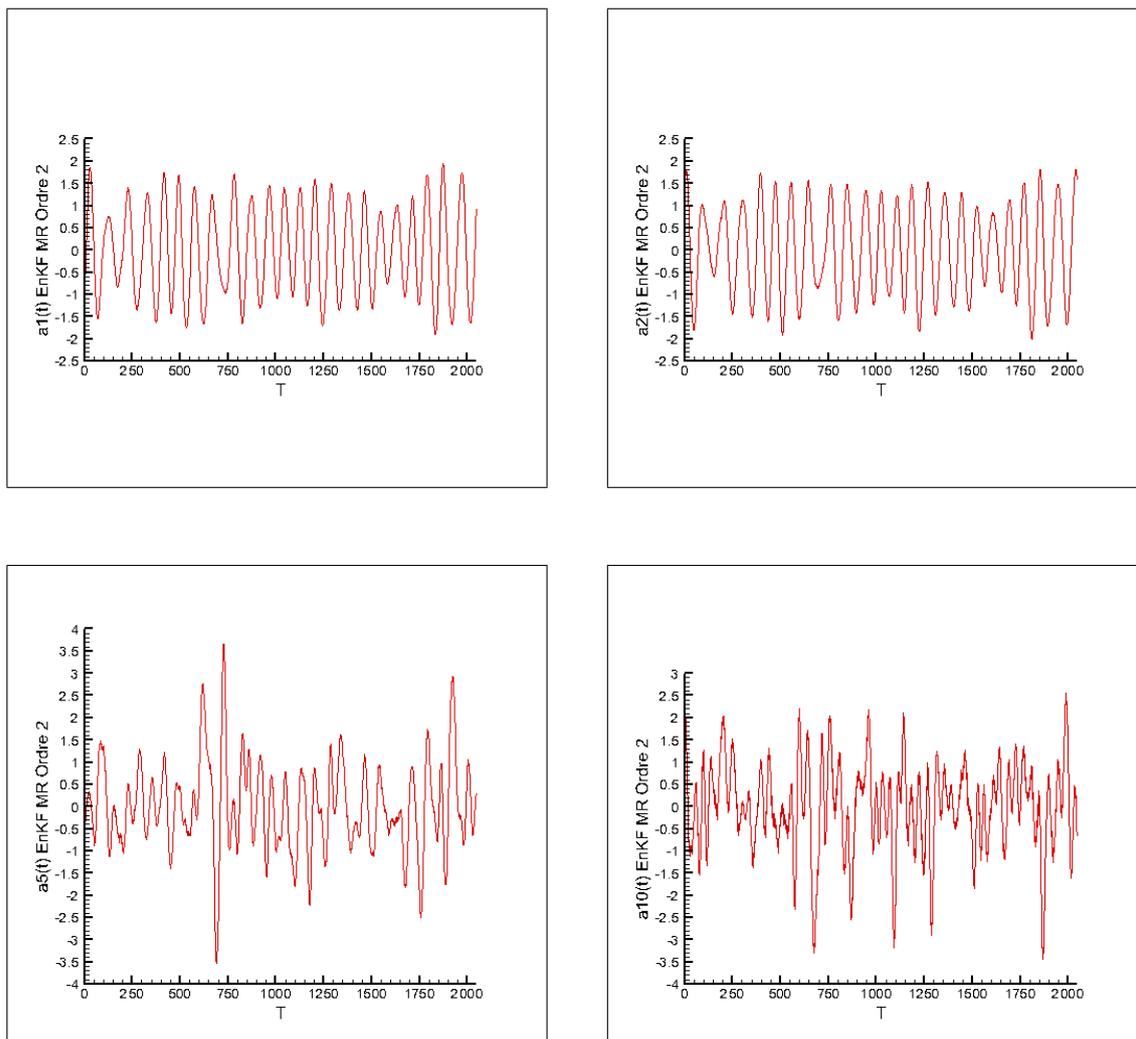


FIGURE 4.43 – Coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_5(t)$ et $a_{10}(t)$ - EnKF - Cas $\alpha = 20^\circ$, $R_e=1000$

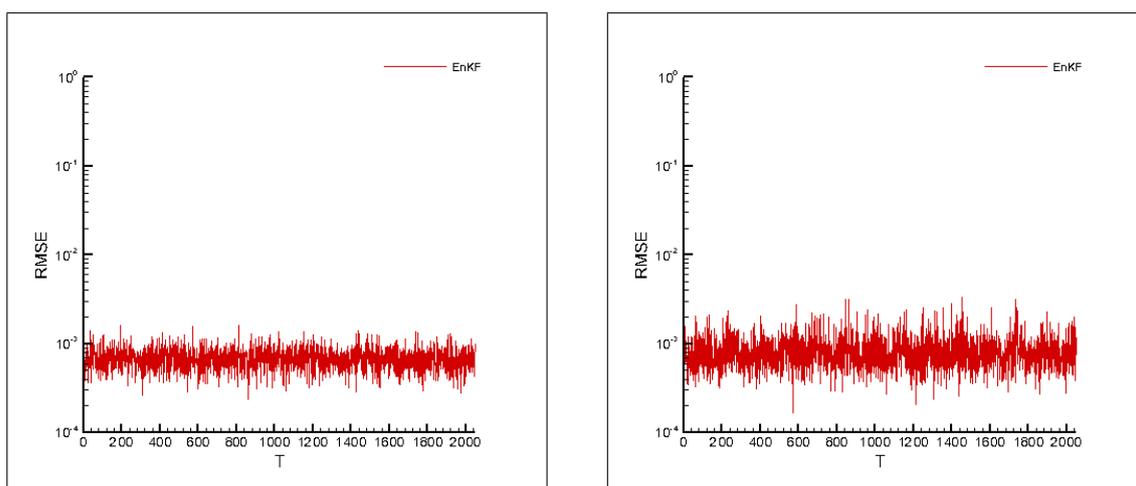


FIGURE 4.44 – RMSE EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$

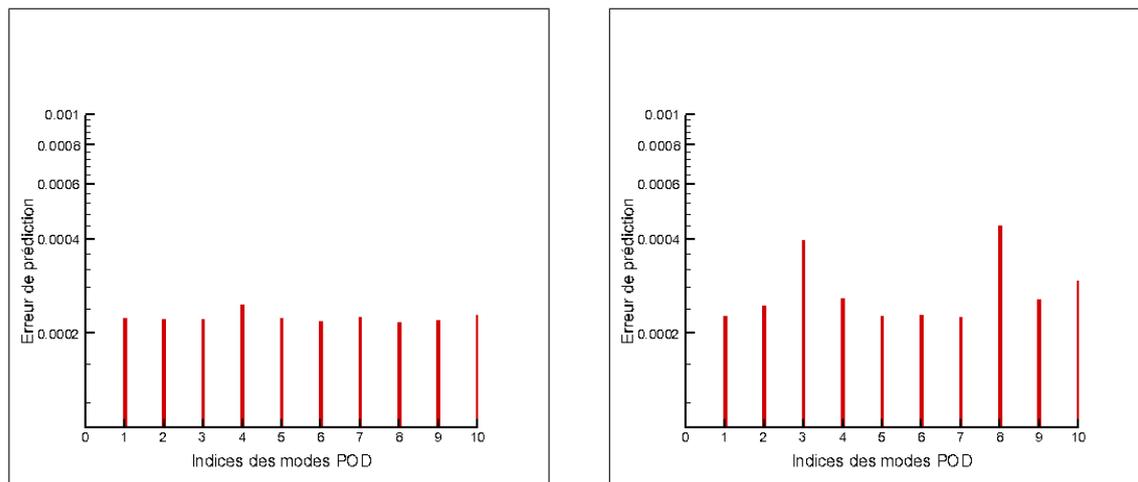


FIGURE 4.45 – RMSE EnKF - Cas $\alpha = 15^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$

4.4 Reconstruction de l'écoulement $u(x,y,t)$ avec le filtre EnKF

Des reconstructions à différents instants de l'écoulement et des champs de vecteurs associés pour les cas $\alpha = 15^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ sont donnés figure 4.46 à figure 4.49. Ces reconstructions sont obtenues en utilisant le filtre de Kalman d'ensemble sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire en utilisant un RIC de 90%, soit 28 modes temporels pour le cas $\alpha = 15^\circ$ et 59 modes temporels pour le cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$.

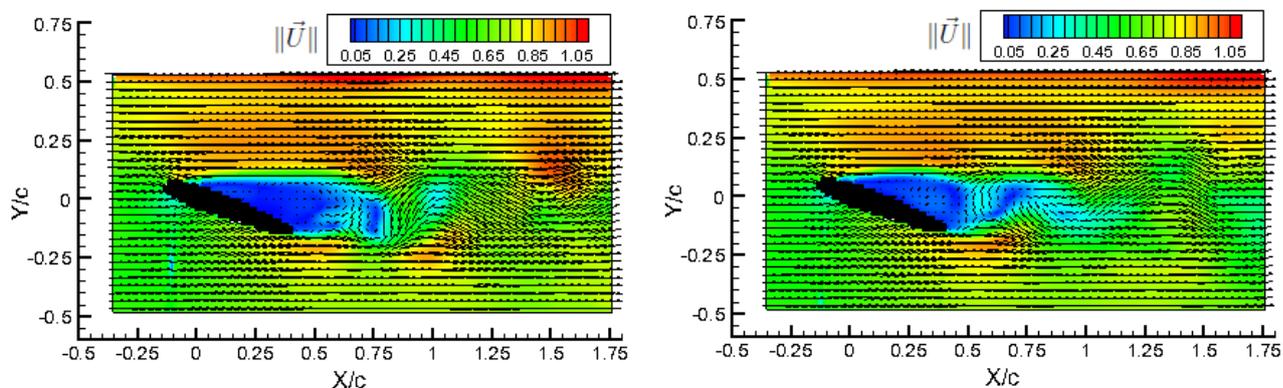


FIGURE 4.46 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=500 et T=1000 - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$

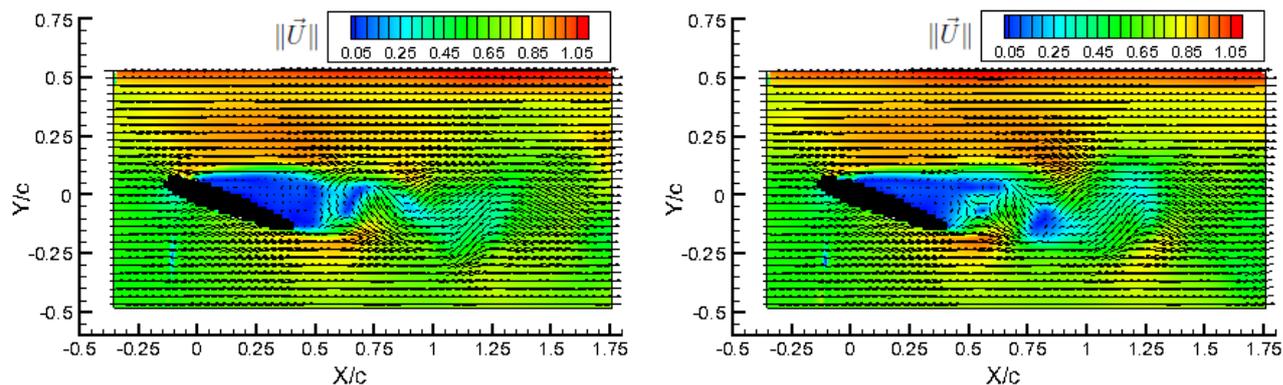


FIGURE 4.47 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=1500 et T=2000 - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=1000$

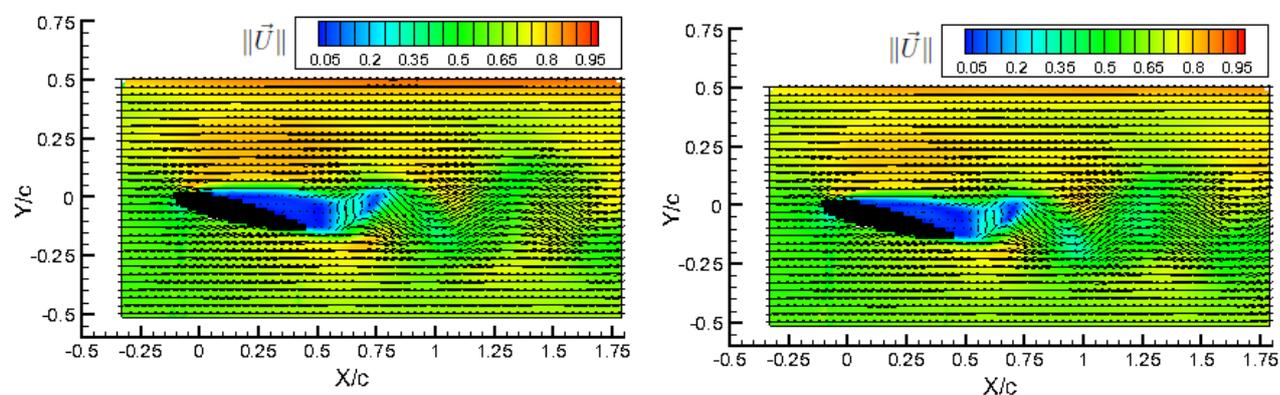


FIGURE 4.48 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=500 et T=1000 - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$

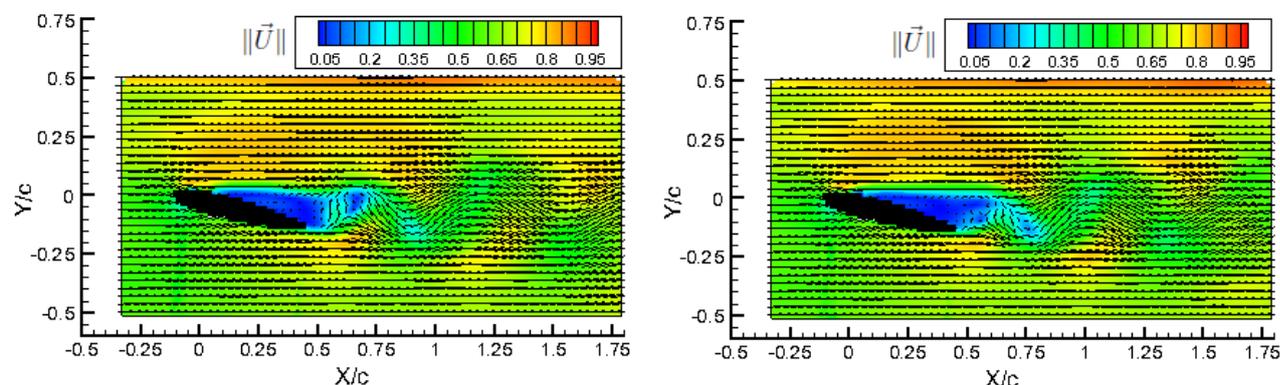


FIGURE 4.49 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de l'EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire avec un RIC à 90% - T=500 et T=1000 - Cas $\alpha = 15^\circ$ $R_e=1000$

4.5 Observations

Les différents critères de quantification de l'efficacité des filtres de Kalman utilisés sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique mettent en évidence des comportements différents des filtres selon les configurations étudiées. L'application du filtre de Kalman linéaire sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire implique une croissance de l'erreur de reconstruction des coefficients de prédiction temporels en fonction du nombre de coefficients de projection temporels dans tous les cas, excepté pour le cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e=2000$. En effet, dans ce cas, où 255 coefficients de projection temporels sont utilisés, l'erreur de reconstruction reste homogène mais toutefois élevée et de l'ordre de 0.1, ce qui traduit ici une divergence du filtre de Kalman linéaire. Selon les configurations étudiées, l'erreur de reconstruction du filtre de Kalman linéaire est multipliée par un facteur 3,4 ou 6 en fonction du nombre de coefficients de projection temporels utilisés. Par exemple, pour le cas $\alpha = 10^\circ$ $R_e=1000$, l'erreur de reconstruction sur les premiers coefficients est de 0.001 et de 0.006 sur les derniers coefficients. L'efficacité du filtre de Kalman linéaire dépend donc du nombre de coefficients utilisés sur le modèle réduit POD-Galerkin. Malgré l'accroissement de l'erreur en fonction du nombre de coefficients, celle-ci demeure faible dans la plupart des configurations testées, quand le nombre de coefficients n'est pas trop important, c'est-à-dire ici inférieur à 200. L'erreur maximale de reconstruction alors commise par le filtre de Kalman linéaire est de l'ordre de 8.10^{-3} au maximum.

Pour les filtres EnKF et SR-EnKF appliqués au modèle réduit POD-Galerkin linéaire, l'erreur de reconstruction reste homogène au cours du temps. Un accroissement de l'erreur de reconstruction en fonction du nombre de coefficients de projection temporels est constaté sur la figure 4.30 mais cet accroissement reste faible, de l'ordre de 1.5 entre les premiers et derniers coefficients estimés. L'erreur de reconstruction est faible dans toutes les configurations testées et de l'ordre de 10^{-4} . L'erreur de reconstruction commise par les filtres EnKF et SR-EnKF est systématiquement inférieure à celle commise par le filtre de Kalman linéaire. Par exemple, pour le cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e=2000$, l'erreur maximale de reconstruction du filtre EnKF est de 0.00015, celle du filtre SR-EnKF de 0.0006 et celle du filtre de Kalman linéaire croît de 0.005 à 0.006. La différence de qualité entre ces trois estimateurs bayésiens se retrouve également au niveau de leurs RMSE. Dans chaque cas, La RMSE des filtres EnKF et SR-EnKF reste de l'ordre de 10^{-4} et 10^{-3} alors que celle du filtre de Kalman linéaire est de l'ordre de 10^{-2} et 10^{-3} . La RMSE du filtre de Kalman linéaire est toujours supérieure à celles des filtres EnKF et SR-EnKF. L'utilisation du filtre EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin quadratique aboutit à une erreur de reconstruction de l'ordre de 10^{-4} entre les coefficients. La RMSE est également faible et de l'ordre de 10^{-3} . Contrairement au cas linéaire, la faible dimension du vecteur d'état ne permet toutefois pas de dégager une tendance sur l'évolution de l'erreur de reconstruction en fonction du nombre de coefficients utilisés.

Les filtres EnKF et SR-EnKF ne divergent pas au cours du temps et la qualité de reconstruction des coefficients de prédictions temporels permet d'estimer les coefficients de prédiction temporels sans perte de relation de phase ni d'amplitude. Il en est de même pour le filtre de Kalman linéaire quand celui-ci ne diverge pas. Ces estimateurs bayésiens permettent de calibrer le modèle réduit POD-Galerkin linéaire. L'application du filtre EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin quadratique permet également de calibrer le modèle réduit de manière efficace. Les principales structures et les champs de vecteurs de l'écoulement sont également reconstruits.

4.6 Conclusion

Des méthodes d'inférence bayésiennes issues de l'assimilation séquentielle de données ont été appliquées à un modèle réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique afin de reconstruire l'écoulement à partir de mesures expérimentales. Outre leur implémentation aisée, malgré un fond théorique important, ces méthodes permettent de corriger les résultats du modèle réduit en exploitant des observations. Différents angles d'incidences et nombres de Reynolds ont été testés afin d'utiliser ces méthodes sur différents régimes de l'écoulement et par conséquent différents comportements du modèle réduit POD-Galerkin.

Les méthodes d'inférence bayésienne utilisées ici sont des méthodes de filtrage stochastique et correspondent au filtre de Kalman linéaire, et aux filtres de Kalman d'ensemble et de Kalman d'ensemble "Square-Root". Le filtre de Kalman fournit séquentiellement le meilleur estimateur de l'état au sens des moindres carrés pour un système dynamique linéaire sachant une série d'observations disponibles. Le filtre de Kalman linéaire est ici nettement moins performant pour le même modèle que les filtres EnKF et SR-EnKF qui conduisent à des niveaux d'erreurs plus homogènes. Il est celui qui donne les niveaux d'erreur de reconstruction et de RMSE les plus élevés. Une différence apparaît donc entre les filtres de Kalman linéaire et les filtres de Kalman non linéaires basés sur des méthodes de Monte-Carlo. Cela conduit à un comportement différent de la croissance de l'erreur instantanée et globale de prédiction sur l'intervalle d'assimilation des observations. L'erreur de prédiction a tendance à augmenter avec l'indice du mode considéré avec le filtre de Kalman linéaire, contrairement au filtre ENKF et SR-EnKF qui conduit à des niveaux d'erreur plus homogènes. Les filtres EnKF et SR-EnKF sont donc plus performants que le filtre KF. Le filtre de Kalman linéaire n'apporte pas la même qualité de reconstruction mais il permet également de contrer l'instabilité du modèle réduit POD-Galerkin si le nombre de coefficients ne devient pas trop important. Les filtres non linéaires permettent d'améliorer significativement la capacité du modèle réduit à restituer la dynamique des coefficients de prédiction temporels, sous réserve de bien paramétrer les filtres. En effet, il convient de bien choisir le nombre N d'ensemble utilisé afin d'éviter la divergence du filtre au cours du temps.

Le modèle réduit POD-Galerkin calibré à l'aide de méthodes d'inférence bayésiennes permet une reconstruction efficace des coefficients de prédiction temporels POD relativement aux dynamiques de référence aussi bien dans le cas de l'utilisation du modèle réduit linéaire que quadratique. Contrairement aux cas non calibrés, aucun amortissement de l'amplitude, déphasage et dérive de l'amplitude, n'est observé. L'analyse des erreurs relatives globales de prédiction par coefficient et erreur instantanée en norme L^2 confirme une amélioration significative de la précision du modèle réduit. L'erreur faible de chaque cas conduit à une reconstruction fidèle des coefficients ainsi que des principales structures de l'écoulement et des champs de vecteurs associés. Cela valide l'application du filtrage stochastique comme méthode de calibration du modèle réduit POD-Galerkin.

Les méthodes d'inférence bayésiennes utilisées ici permettent de tenir compte du bruit contenu dans les mesures expérimentales. Une méthode empirique d'ajustement des niveaux de bruit des équations d'état et de mesure a été choisie ici. Différents niveaux de bruits et nombre d'ensemble ont été testés afin d'obtenir un comportement du modèle réduit, linéaire et quadratique, suffisamment précis. Cependant, il est possible de déterminer ces niveaux de bruit en utilisant une quantification de l'erreur commise par la PIV, la POD ainsi que de l'identification des coefficients du modèle réduit.

5 Application de l'algorithme EM dans le cas d'observations manquantes

5.1 Introduction

Dans l'optique d'une réduction du nombre de champs expérimentaux d'écoulement $u(x,y,t)$ à utiliser pour l'assimilation séquentielle de données sur le modèle réduit POD-Galerkin, une alternative consiste à utiliser des méthodes d'inférence bayésienne sur le modèle réduit POD-Galerkin à partir d'un nombre réduit d'observations obtenues en réalisant une POD sous-échantillonnée sur le jeu complet des snapshots disponibles. Dans le cadre de l'inférence bayésienne, l'estimation de l'état du système dynamique considéré au cours du temps est réalisée en se basant sur les observations, mesurées de manière directe ou indirecte, de l'ensemble ou d'une partie des variables d'états. Dans le cas où des observations sont manquantes, l'information utilisée séquentiellement pour l'estimation est incomplète et par conséquent moins fiable. L'estimation liée au modèle à espace d'état devient alors davantage prépondérante. La reconstruction des données manquantes s'avère donc nécessaire afin de compenser la réduction du nombre d'observations utilisées pour l'estimation. Le problème de reconstruction de séries temporelles avec des données manquantes est équivalent à l'estimation de paramètres dans les modèles à espaces d'état linéaires à erreurs gaussiennes. La méthode la plus utilisée pour estimer les paramètres d'un modèle à espace d'état à variables latentes est de déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance à l'aide de l'algorithme EM (*Expectation-Maximisation*).

Après avoir défini le modèle à espace d'état tenant compte des observations manquantes, l'expression de la vraisemblance est rappelée. L'algorithme EM, basé sur la maximisation de la vraisemblance en utilisant le filtre et le lisseur de Kalman, est détaillé en tenant compte des modifications matricielles à apporter à l'algorithme pour tenir compte des observations manquantes. L'algorithme EM est ensuite utilisé afin de reconstruire des coefficients de prédiction temporels à partir de coefficients de projection temporels issus d'une POD sous-échantillonnée sur l'ensemble des snapshots avec différents types de sous-échantillonnages. La configuration utilisée est limitée à celle du profil NACA0012 aux angles d'incidence $\alpha = 30^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ et au nombre de Reynolds $R_e = 1000$.

5.2 POD sous-échantillonnée

Afin de caractériser l'influence de la réduction du nombre d'observations, autrement dit du nombre de coefficients de projection temporels issus de la POD, sur la qualité de la reconstruction des coefficients de prédiction temporels du modèle réduit POD-Galerkin, l'ensemble complet des snapshots est tout d'abord sous-échantillonné, puis une POD est réalisée sur ce sous-ensemble de snapshots sous-échantillonnés. On considère ici deux types de sous-échantillonnages de snapshots, à savoir un sous-échantillonnage régulier, et un sous-échantillonnage par paquets. On note $\Delta_{t_k} = t_k - t_{k-1}$ la différence entre deux observations successives. Le sous-échantillonnage régulier consiste à sélectionner un snapshot tous les Δ_{t_k} pas de temps avec $\Delta_{t_1} = \Delta_{t_2} = \dots = \Delta_{t_N}$. Ainsi, par exemple, pour $\Delta_{t_1} = 1$ on dispose de l'ensemble initial des snapshots et pour $\Delta_{t_k} = 2$ on sélectionne un snapshot sur deux. Le sous-échantillonnage par paquets consiste à sélectionner les snapshots

avec un pas de temps régulier Δ_{t_k} selon un ensemble (l_1, l_2) contenant l_1 snapshots et l_2 snapshots manquants (Figure 4.50).

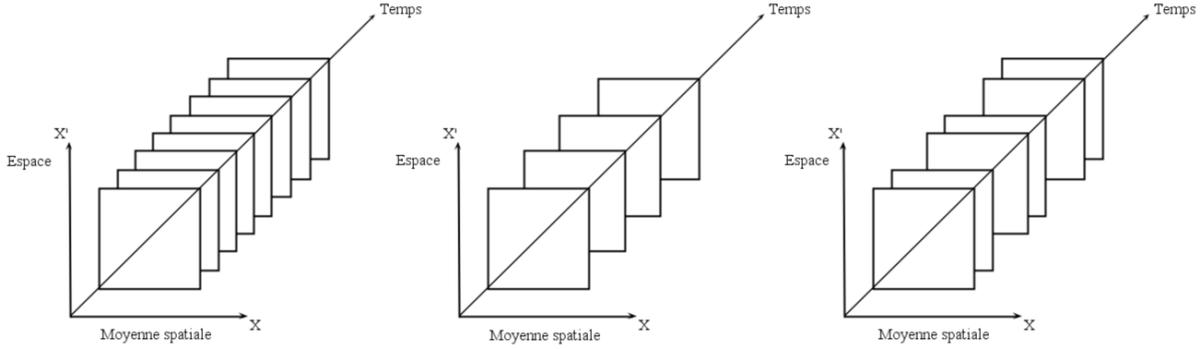


FIGURE 4.50 – Représentation schématique de la méthode des snapshots (a) Cas complet (b) Cas sous-échantillonné régulièrement avec $(l_1 = 1, l_2 = 1)$ (c) Cas sous-échantillonné par paquet $(l_1 = 2, l_2 = 1)$

On note respectivement $a_k^{(pod\ se)}$ et $\Phi(x, y)^{(pod\ se)}$ les coefficients de projection temporels et les modes de cette POD sous-échantillonnée. Les valeurs manquantes des $a_k^{(pod\ se)}$ sont déterminées à l'aide de l'algorithme EM et les coefficients de prédiction temporels reconstruits sont notés $a_k^{(EM)}$. Enfin, on note respectivement $\tilde{u}(x, y, t)$ les snapshots et \tilde{a}_k les coefficients temporels qui n'ont pas été utilisés pour la POD sous-échantillonnée. Les coefficients de projection \tilde{a}_k sont définis par :

$$\tilde{a}_i = (\tilde{u}, \Phi_i^{(pod\ se)}) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, N_{pod} \quad (5.1)$$

et ensuite comparés avec les coefficients $a_k^{(pod\ se)}$ afin de quantifier la qualité de la reconstruction des observations manquantes obtenue à l'aide de l'algorithme EM.

5.3 Modèle à espace d'état utilisé

On suppose que le processus latent est observé à plusieurs instants (t_1, t_2, \dots, t_N) et que le modèle à espace d'état utilisé pour la prédiction du processus latent non observé est linéaire gaussien et constitué des deux équations suivantes :

$$(S) \begin{cases} X_k = F_k X_{k-1} + w_k & (5.2) \\ Y_k = H_k X_k + v_k & (5.3) \end{cases}$$

où F est la matrice $n \times n$ de propagation des états qui décrit la dynamique du système. On considère que le vecteur d'état $Y_k = 0$ si l'une de ses composantes est nulle. Les observations manquantes sont remplacées par des zéros dans le vecteur Y_k et les lignes (ou colonnes) correspondantes de H_k sont également remplacées par des zéros. w_k et v_k sont des bruits blancs gaussiens décorrélés, de matrices de covariance respectives $Q \in M_n(\mathbb{R})$ et $R \in M_n(\mathbb{R})$. Le vecteur d'état initial x_0 est considéré comme distribué selon une loi normale de moyenne μ_0 et de covariance Σ_0 . Les paramètres du modèle (S) sont notés $\Theta_k = \{F_k, H_k, R_k, Q_k\}$. Les dépendances entre les variables aléatoires sont décrites par le graphe acyclique et orienté de dépendance conditionnelle suivant dans les cas d'un sous-échantillonnage régulier et par paquets (Figure 4.51).

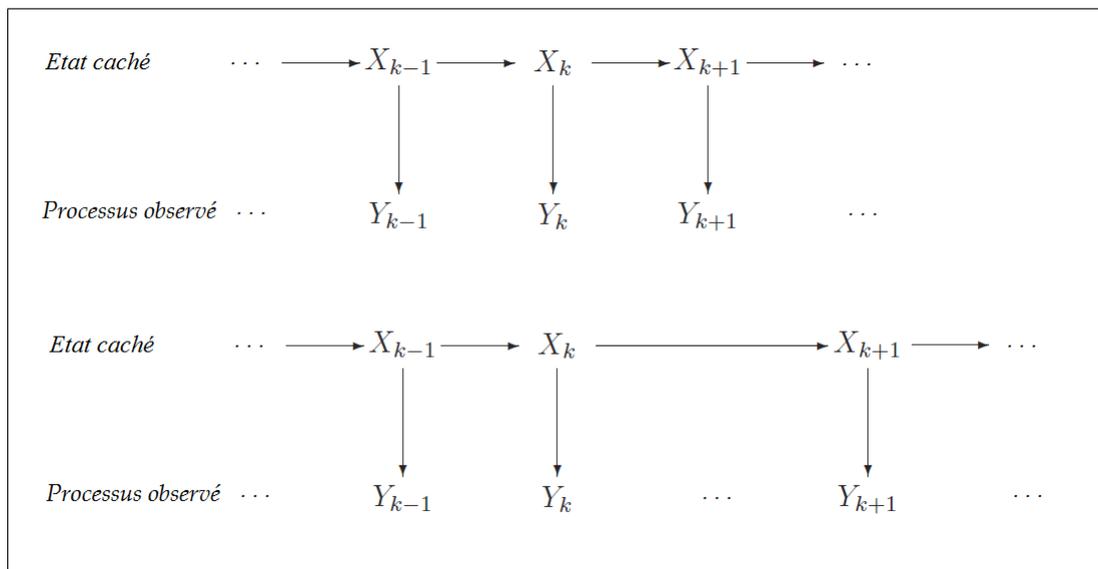


FIGURE 4.51 – Graphique acyclique d'un modèle à espace d'état avec un échantillonnage temporel régulier et graphique acyclique d'un modèle à espace d'état avec un échantillonnage temporel irrégulier.

Étant donné le modèle statistique défini par les équations 5.2 et 5.3, l'objectif est d'estimer les variables latentes Θ_k et le vecteur d'état X_k à chaque instant k , conditionnellement à l'ensemble des observations disponibles Y_k . Les paramètres Θ_k sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Comme définie au chapitre 3, la fonction de log-vraisemblance complète est basée sur les séquences des variables latentes observées et un *a priori* :

$$\log(p(x,y;\theta)) = \log(p(x_0)) + \sum_{k=1}^N \log(p(x_k|x_{k-1};\theta)) + \sum_{k=1}^N \log(p(y_k|x_{k-1};\theta)) \quad (5.4)$$

où les distributions conditionnelles $p(x,y;\theta)$ et $p(y_k|x_{k-1};\theta)$ suivent respectivement des lois normales données par :

$$p(x,y;\theta) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x_{k+1} - F_k x_{k-1})^t Q^{-1}(x_{k+1} - F_k x_{k-1})\right) (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det(Q))^{-\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

$$p(y_k|x_{k-1};\theta) = \exp\left(-\frac{1}{2}(y_k - H_k x_k)^t R^{-1}(y_k - H_k x_k)\right) (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\det(R))^{-\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

où n est la taille du vecteur d'état et p la taille du vecteur des observations. On suppose ici que $p(x_0)$ suit une distribution de moyenne μ_0 et de variance Σ_0 correspondant à une connaissance *a priori* du système. La log-vraisemblance du système s'écrit (à une constante près) :

$$\begin{aligned} \log L_Y(\Theta) = \log L(X,Y,\Theta) = & -\frac{1}{2} \{ \log |\Sigma_0| + (x_0 - \mu_0)^t \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \\ & + N \log |Q| + \sum_{k=1}^N (x_k - F_k x_{k-1})^t Q^{-1} (x_k - F_k x_{k-1}) \\ & + N \log |R| + \sum_{k=1}^N (y_k - H_k x_k)^t R^{-1} (y_k - H_k x_k) \} \end{aligned} \quad (5.7)$$

On cherche les paramètres θ_k qui maximisent la fonction de log-vraisemblance complète. On note θ_k les approximations successives des estimateurs de maximum de vraisemblance au cours des différents cycles k d'assimilation de l'algorithme EM. L'opérateur H_k est la matrice identité pour les cas où on dispose d'observations à l'instant k et la matrice nulle sinon. La variable y_k correspond aux coefficients de projection temporels obtenus par la POD sous échantillonnée, l'opérateur F_k correspond au modèle d'évolution des coefficients de prédiction temporels, c'est-à-dire au modèle réduit POD-Galerkin. La variable x_{k-1} contient les coefficients de prédiction temporels à l'instant k et la variable $F_k x_{k-1}$ contient les coefficients de prédiction temporels à l'instant k . Les matrices Q_k et R_k sont les matrices de covariance des bruits gaussiens w_k et v_k , supposés indépendants entres eux, aussi on a $Q_k = \sigma_w^2 I$ et $R_k = \sigma_v^2 I$ où σ_w et σ_v sont les écarts-types des bruits des équations d'états et de mesure.

5.4 Estimation de paramètres par algorithme EM

Les paramètres estimés $\hat{F}, \hat{H}, \hat{Q}, \hat{R}$ de Θ sont les suivants Digalakis et al. (1993), Gyau-Boakye and Schultz (1994) :

$$\hat{F} = A_4 A_3^{-1} \quad (5.8) \quad \hat{Q} = A_2 - A_4 A_3^{-1} A_4^t \quad (5.10) \quad \mu_0 = x_0 \quad (5.12)$$

$$\hat{H} = A_6 A_1^{-1} \quad (5.9) \quad \hat{R} = A_5 - A_6 A_1^{-1} A_6^t \quad (5.11) \quad \sigma_0 = P_0 \quad (5.13)$$

où les matrices A_1, A_2, \dots, A_6 sont définies de la manière suivante :

$$A_1 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x_k x_k^t \quad A_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k x_k^t \quad A_3 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{k-1} x_{k-1}^t$$

$$A_4 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k x_{k-1}^t \quad A_5 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N y_k y_k^t \quad A_6 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N y_k x_k^t$$

Dans le cas d'observations manquantes, les quantités 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 sont calculées à l'étape E de l'algorithme EM en utilisant les espérances conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{E}[x_k | Y, \Theta^{(r)}] = x_k^s \quad (5.14)$$

$$\mathbb{E}[x_k x_k^t | Y, \Theta^{(r)}] = P_k^{(s)} + x_k^{(s)} (x_k^{(s)})^t \quad (5.15)$$

$$\mathbb{E}[x_k x_{k-1}^t | Y, \Theta^{(r)}] = P_{k,k-1}^{(s)} + x_k^{(s)} (x_{k-1}^{(s)})^t \quad (5.16)$$

$$\mathbb{E}[y_k x_k^t | Y, \Theta^{(r)}] = H^{(m)} E[x_k x_k^t | Y, \Theta^{(r)}] \quad (5.17)$$

$$\mathbb{E}[y_k y_k^t | Y, \Theta^{(r)}] = R^{(m)} + H^{(m)} E[x_k x_k^t | Y, \Theta^{(r)}] (H^{(m)})^t \quad (5.18)$$

$$\mathbb{E}[y_k | Y, \Theta^{(r)}] = H^{(m)} E[x_k | Y, \Theta^{(r)}] \quad (5.19)$$

Ces espérances conditionnelles peuvent être calculées $\forall k = 1, 2, \dots, N$ à partir du lisseur de Kalman, connu aussi sous le nom de lisseur RTS (*Rauch-Tung-Striebel*) en utilisant les paramètres estimés à l'itération k . Le lisseur RTS est constitué d'une étape *forward* où le filtre de Kalman linéaire est appliqué et une étape *backward* où le lisseur de Kalman est appliqué. Les estimations lissées $x_k^{(s)}$ et $P_k^{(s)}$ sont utilisées pour estimer les équations

5.14 à 5.19 utilisées ensuite dans l'étape M de l'algorithme EM pour la maximisation la vraisemblance.

◦ **Filtre de Kalman - *Forward Pass***

Conditions initiales du filtre

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0 \text{ et } p_0 = Q_0 \quad (5.20)$$

A tout instant $k \geq 1$ Étape de prédiction

$$x_k^f = F_k(x_{k-1}) \quad (5.21)$$

$$P_k^f = F_k P_{k-1}^a F_k^t + H_k Q_k H_k^t \quad (5.22)$$

Étape de correction

$$x_k^a = x_k^f + K_k [y_k - H_k x_k^f] \quad (5.23)$$

$$P_k^a = [I - K_k H_k] P_k^f \quad (5.24)$$

$$K_k = P_k^f H_k^t [H_k P_k^f H_k^t + R_k]^{-1} \quad (5.25)$$

◦ **Lisseur de Kalman - *Backward Pass***

Conditions initiales du filtre

$$x_k^{(s)} = x_k^{(a)} \text{ et } P_k^{(s)} = P_k^{(a)} \quad (5.26)$$

Etape de lissage : Pour k allant de n-1 à 1 :

$$K_k^{(s)} = P_k^{(a)} F_k^t (P_{k+1}^{(f)})^{-1} \quad (5.27)$$

$$x_k^{(s)} = x_k^{(a)} + K_k^{(s)} (x_{k+1}^{(s)} - x_{k+1}^{(f)}) \quad (5.28)$$

$$P_k^{(s)} = P_k^{(a)} + K_k^{(s)} (P_{k+1}^{(s)} - P_{k+1}^{(f)}) (K_k^{(s)})^t \quad (5.29)$$

$$P_{k-1,k}^{(s)} = (I - K_k H_k) F_k P_{k-1}^{(a)} + (P_k^{(s)} - P_k^{(a)}) (P_k^{(a)})^{-1} (I - K_k H_k) F_k P_{k-1}^{(a)} \quad (5.30)$$

La fonction de log-vraisemblance peut-être également calculée en utilisant le filtre de Kalman :

$$\log L(\theta) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^N \log |\Sigma_k| + \sum_{k=1}^N e_k^t \Sigma_k^{-1} e_k \right\} \quad (5.31)$$

L'algorithme EM est un processus itératif qui utilise la distribution des données complètes pour calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance lorsque les données observées sont incomplètes. Cet algorithme se déroule en deux étapes. La première est l'étape E qui consiste à calculer l'espérance conditionnelle de la fonction de log-vraisemblance des données complètes sachant les données observées. La seconde étape est l'étape M, qui est la maximisation de la log-vraisemblance obtenue à l'étape E. On détermine ainsi l'estimateur qui maximise l'équation trouvée à l'étape E. Ces étapes E et M sont répétées itérativement jusqu'à convergence de la log-vraisemblance.

Etape E à l'itération $r+1$

1. Utilisation des paramètres $\Theta^{(r)}$ estimés à l'itération r et application des filtres et lisseurs de Kalman (équations 5.21 à 5.30) pour obtenir les valeurs lissées x_k^N et P_k^N . Obtention des statistiques 5.14 à 5.19
2. Calcul de la nouvelle log-vraisemblance, $\log L(\Theta^{(r+1)})$ (équation 5.31)
3. Calcul des matrices A_1 à A_6 en utilisant les quantités définies au (1).

Etape M à l'itération $r+1$

1. Re-estimation de l'ensemble des paramètres $\Theta^{(r+1)}$ en utilisant les équations 5.8 à 5.13 et les statistiques déterminées en (2) de l'étape E.

Critère d'arrêt de l'algorithme EM

Le critère d'arrêt de l'algorithme EM utilisé ici est basé sur la convergence de la log-vraisemblance $Q = \log L(\Theta)$:

$$\left| \frac{Q(\theta^{(r+1)}, \theta^{(r+1)}) - Q(\theta^{(r)}, \theta^{(r)})}{Q(\theta^{(r)}, \theta^{(r)})} \right| < \varepsilon \quad (5.32)$$

avec $10^{-6} < \varepsilon < 10^{-4}$. Si le critère d'arrêt est vérifié alors les itérations de l'algorithme EM sont stoppées et l'ensemble des paramètres $\Theta^{(r+1)}$ est retenu comme l'ensemble des estimés des paramètres du modèle sinon on pose $\Theta^{(r)} = \Theta^{(r+1)}$ et $\log L(\Theta^{(r)}) = \log L(\Theta^{(r+1)})$ et l'algorithme continue.

5.5 Application au modèle réduit POD-Galerkin

Les résultats des estimations des paramètres du modèle à espace d'état (S) par maximum de vraisemblance sont présentés dans cette section. Les cas traités correspondent au profil NACA0012 aux angles d'incidence $\alpha = 30^\circ$ et $\alpha = 20^\circ$ et au nombre de Reynolds $Re = 1000$. Le RIC retenu dans chaque cas est de 80% ce qui correspond à 58 modes pour le cas $\alpha = 30^\circ$ et 21 modes pour le cas $\alpha = 20^\circ$. Le modèle réduit POD-Galerkin utilisé ici est le modèle réduit linéaire en raison de la convergence de l'algorithme EM qui peut être lente. L'intervalle d'assimilation des données est de $T = [0, 2000]$. Les matrices de covariance des bruits des équations d'état et de mesure sont initialisées à $Q_k = 0.25I$ et $R_k = 0.25I$.

On réalise tout d'abord une POD sous-échantillonnée sur la base de snapshots initiale afin d'obtenir des coefficients de projection temporels et des modes spatiaux POD sous-échantillonnés. Les parties manquantes des coefficients de projection temporels sont ensuite remplacées par des 0. Les coefficients a_k sous-échantillonnés sont considérés comme des séries temporelles à données manquantes. L'assimilation des données se fait sur un sous-ensemble de snapshots contenu dans la base de données initiales. Le modèle à espace d'état utilisé ainsi que l'estimation des paramètres prennent en compte les observations manquantes. Le modèle espace d'état linéaire à erreurs gaussiennes (S), est résolu par filtrage et lissage de Kalman respectivement. On applique ensuite l'algorithme EM pour estimer les données manquantes et son efficacité est testée pour différents sous-échantillonnages définis par un taux de vide τ_{vide} :

$$\tau_{vide} = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \quad (5.33)$$

où l_1 est le nombre de données disponibles et l_2 le nombre de données manquantes. On considère les deux types de sous-échantillonnages régulier et par paquets définis à partir de τ_{vide} . Afin de quantifier l'efficacité de la reconstruction des coefficients de projections temporels à l'aide de l'algorithme EM, l'erreur de reconstruction entre les coefficients de projection temporels et ceux obtenus par algorithme EM est donnée. Une fois les $a_i^{EM}(t_k)$ définis, les $\tilde{a}_i(t_k)$ sont projetés sur les ϕ et comparés aux $a_i^{EM}(t_k)$. Les tests suivants ont été effectués pour déterminer l'influence de ce paramètre, en conservant les autres paramètres inchangés.

τ_{vide}	(l_1, l_2)	
50%	(2,2)	(10,10)
75%	(6,2)	(30,10)

TABLE 4.2 – Paramètre τ_{vide} utilisé

Afin de faciliter la lecture des figures, les différents cas testés sont listés comme suit :

- Cas 1 : $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$
- Cas 2 : $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$
- Cas 3 : $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$
- Cas 4 : $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$
- Cas 5 : $\alpha = 30^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$
- Cas 6 : $\alpha = 30^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$
- Cas 7 : $\alpha = 30^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$
- Cas 8 : $\alpha = 30^\circ$ à $R_e = 1000$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

L'erreur E de reconstruction pour le cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e = 1000$ est présentée respectivement sur la figure 4.52 pour le cas $\tau_{vide}=50\%$ et sur la figure 4.53 et pour le cas $\tau_{vide}=75\%$. Pour le cas $\alpha = 30^\circ$ et $R_e = 1000$ elle est présentée sur la figure 4.54 pour le cas $\tau_{vide}=50\%$ et sur la figure 4.55 pour le cas $\tau_{vide}=75\%$. La RMSE de l'algorithme EM est également donnée afin de quantifier sa qualité d'estimation selon le sous-échantillonnage. La RMSE selon le paramètre τ_{vide} est présentée sur la figure 4.76 pour le cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e = 1000$ et sur la figure 4.57 pour le cas $\alpha = 30^\circ$ et $R_e = 1000$. Les figures 4.59 à 4.74 représentent les coefficients $a_1(t), a_2(t), a_5(t), a_{10}(t)$ reconstruits en utilisant l'algorithme EM en fonction des sous-échantillonnages des données.

Une comparaison de l'efficacité de l'algorithme EM en fonction de l'ordre du modèle réduit POD-Galerkin est ensuite donnée. Le cas choisi est $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ et le sous-échantillonnage correspond au cas le moins favorable en terme de reconstruction des coefficients de prédiction temporels, à savoir le cas $n^\circ 8$. L'algorithme EM est appliqué dans ce cas avec 10 coefficients de projection temporels pour le modèle réduit linéaire et quadratique, ce qui correspond à un RIC de 70%.

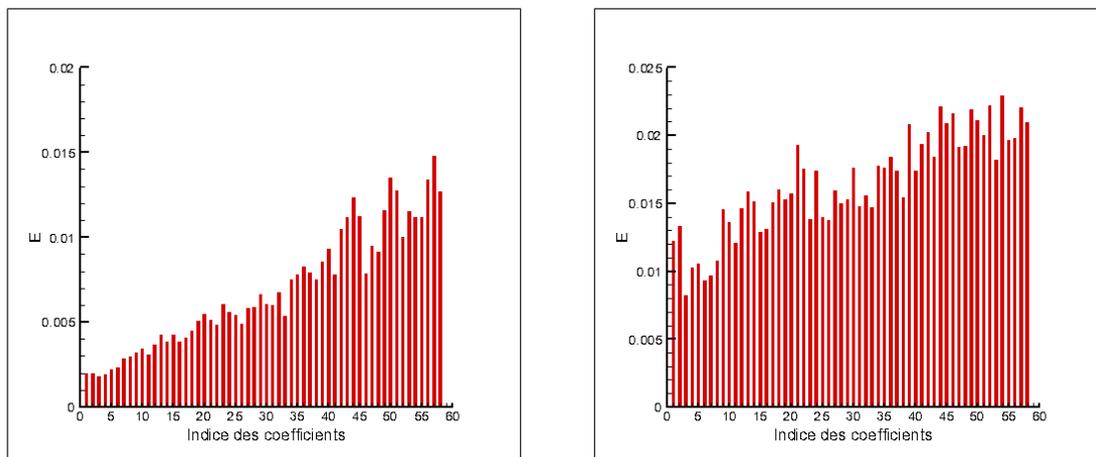


FIGURE 4.55 – Erreur E - $\alpha = 30^\circ$ à $R_e = 1000$ - $(l_1, l_2) = (2, 6)$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

5.5.2 RMSE de l'algorithme EM

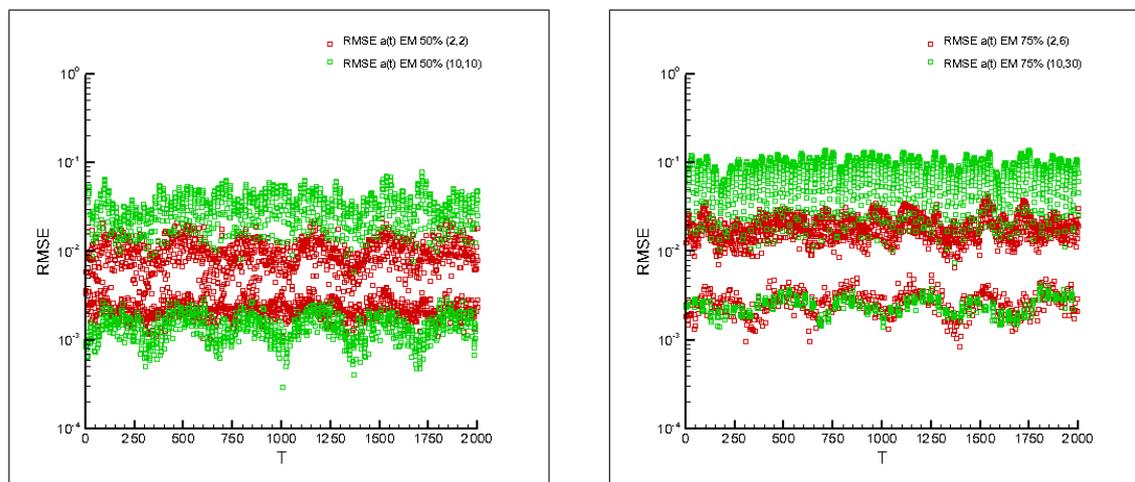


FIGURE 4.56 – RMSE - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide} = 50\%$ et 75%

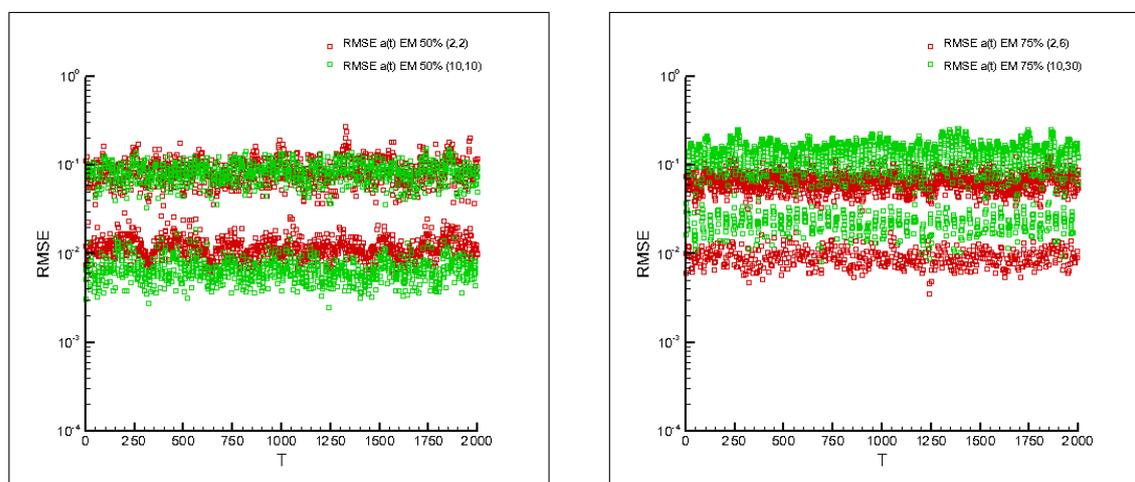


FIGURE 4.57 – RMSE - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide} = 50\%$ et 75%

Algorithme EM et modèle réduit POD-Galerkin linéaire

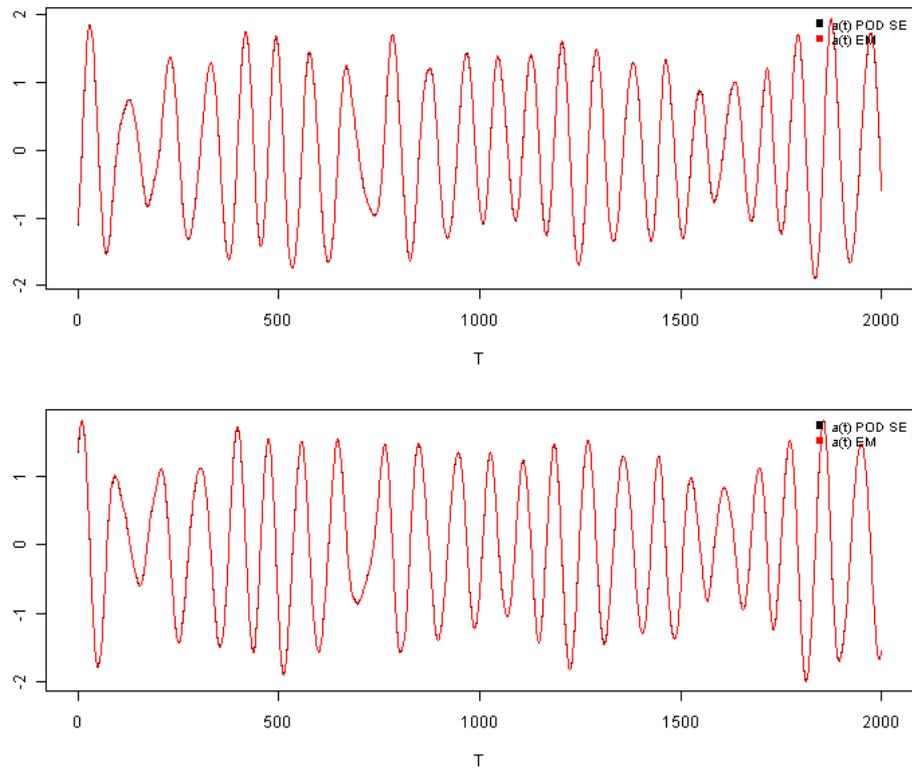


FIGURE 4.58 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide} = 50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$

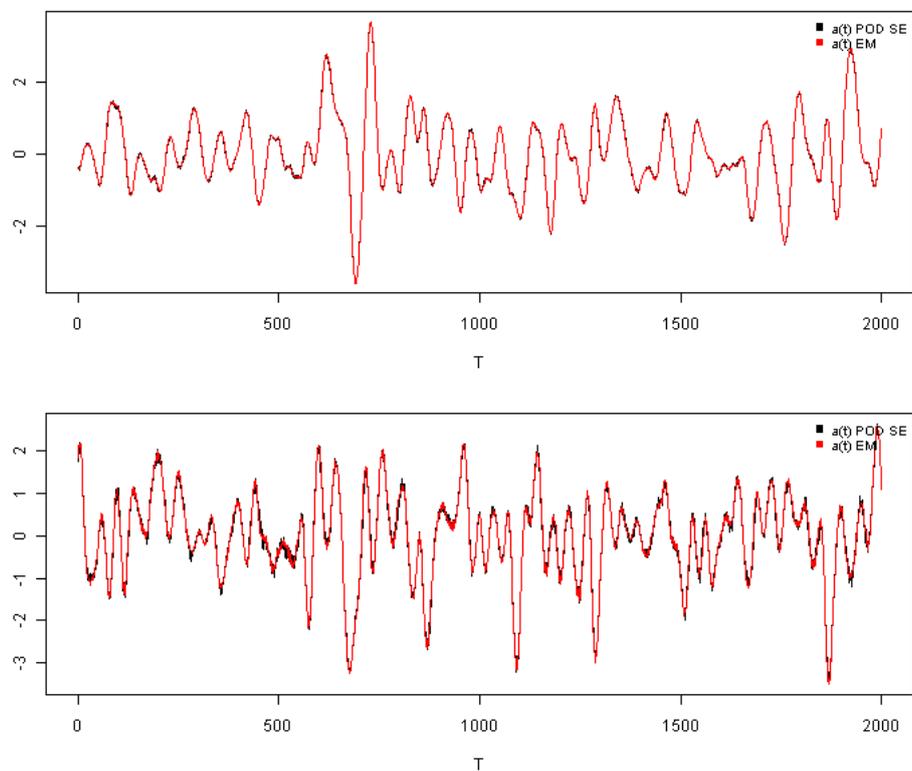


FIGURE 4.59 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ - avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$

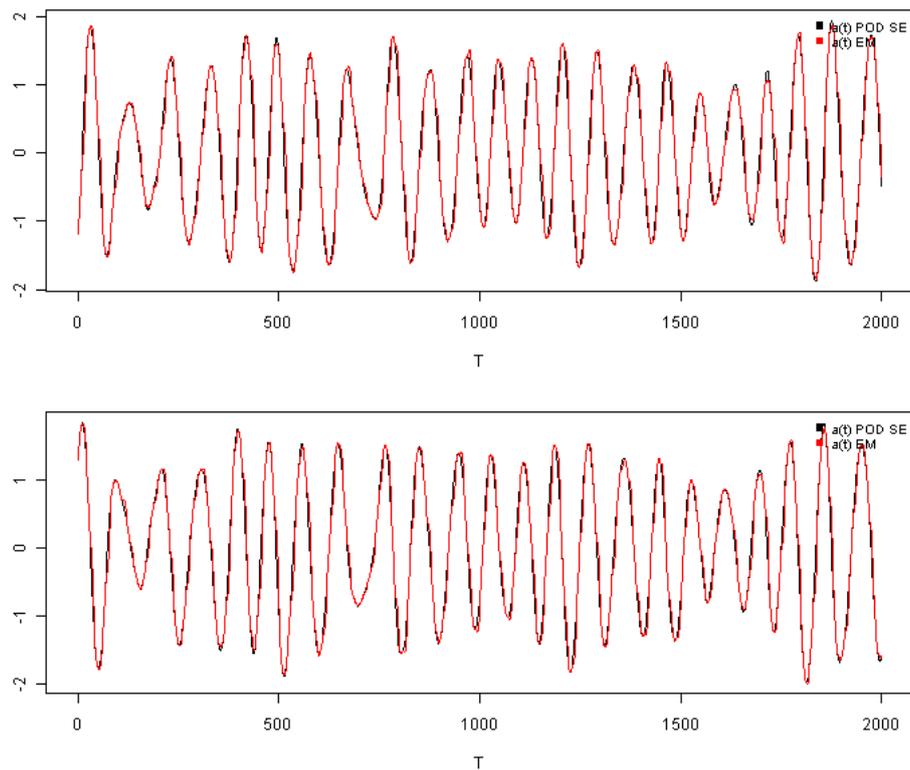


FIGURE 4.60 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$

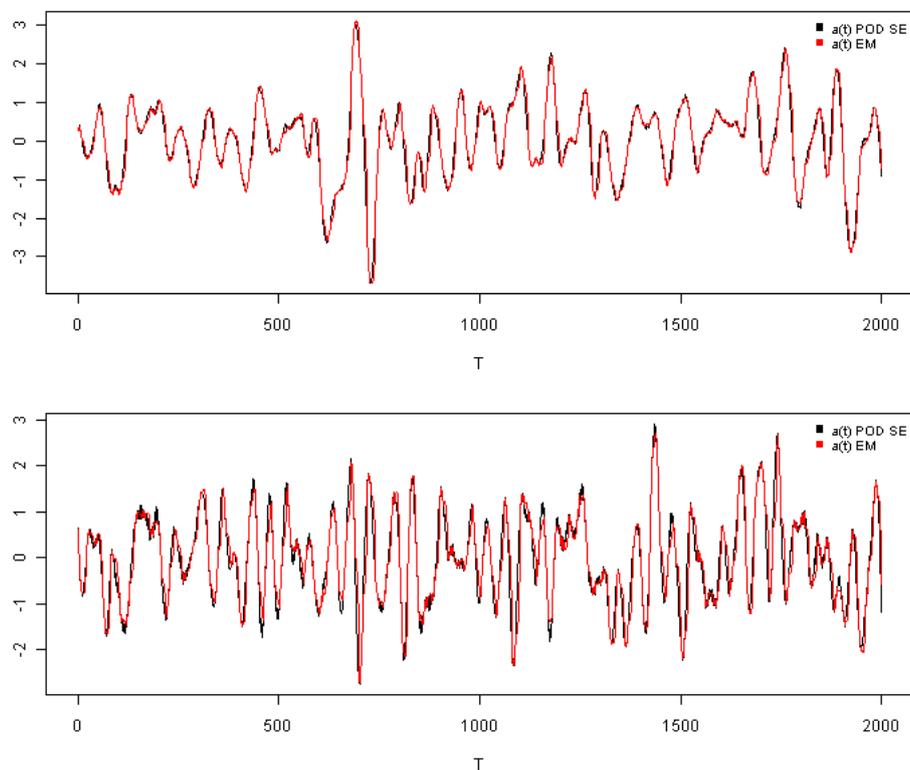


FIGURE 4.61 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$

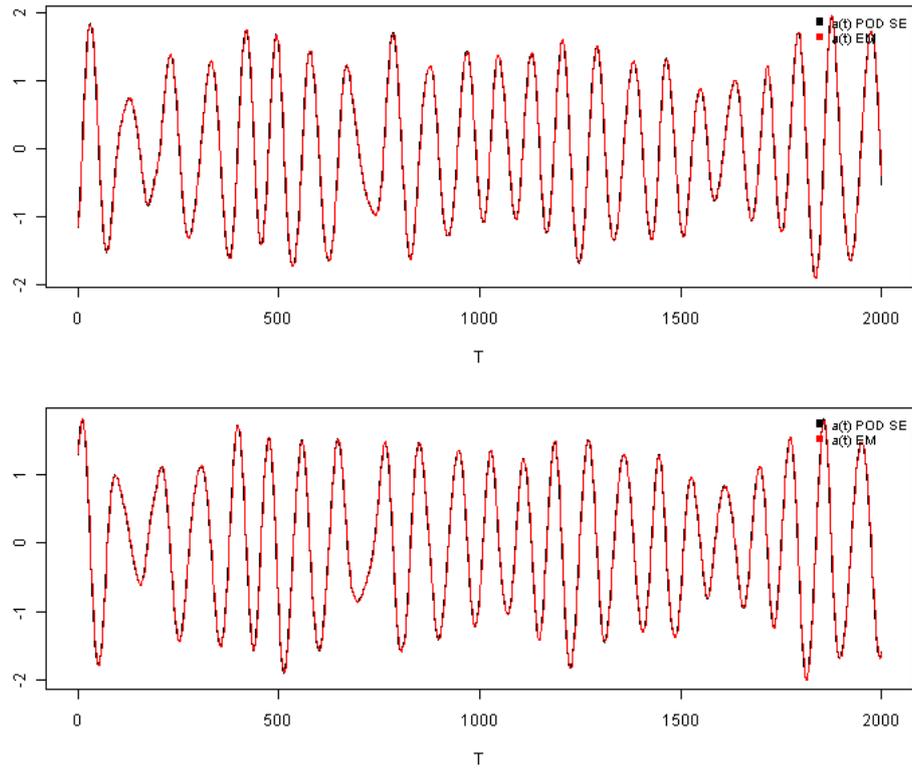


FIGURE 4.62 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$

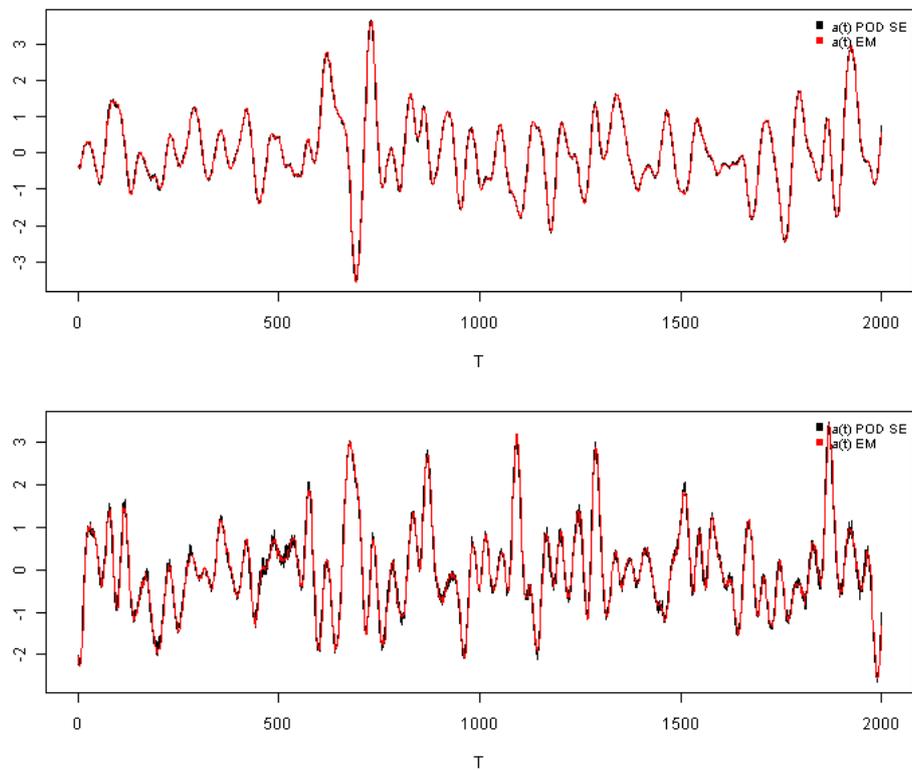


FIGURE 4.63 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$

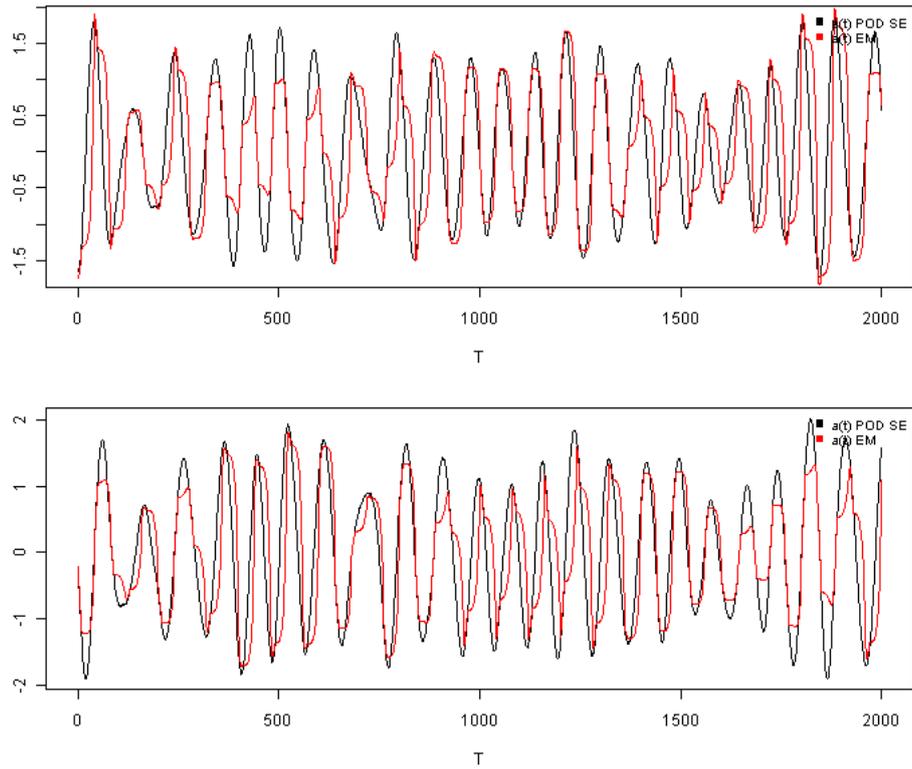


FIGURE 4.64 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

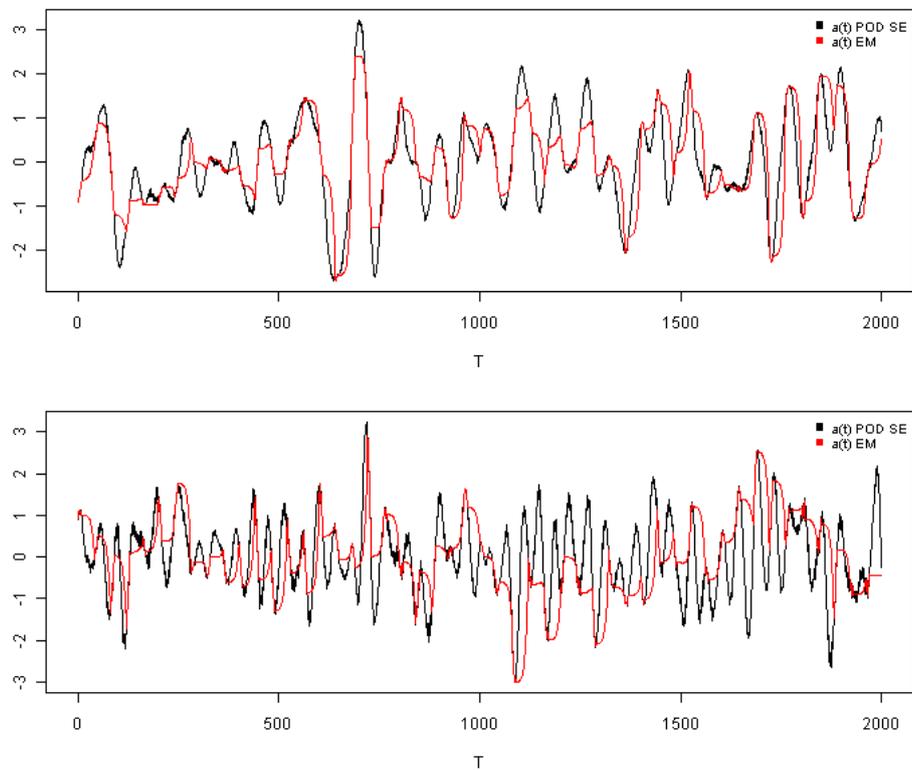


FIGURE 4.65 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

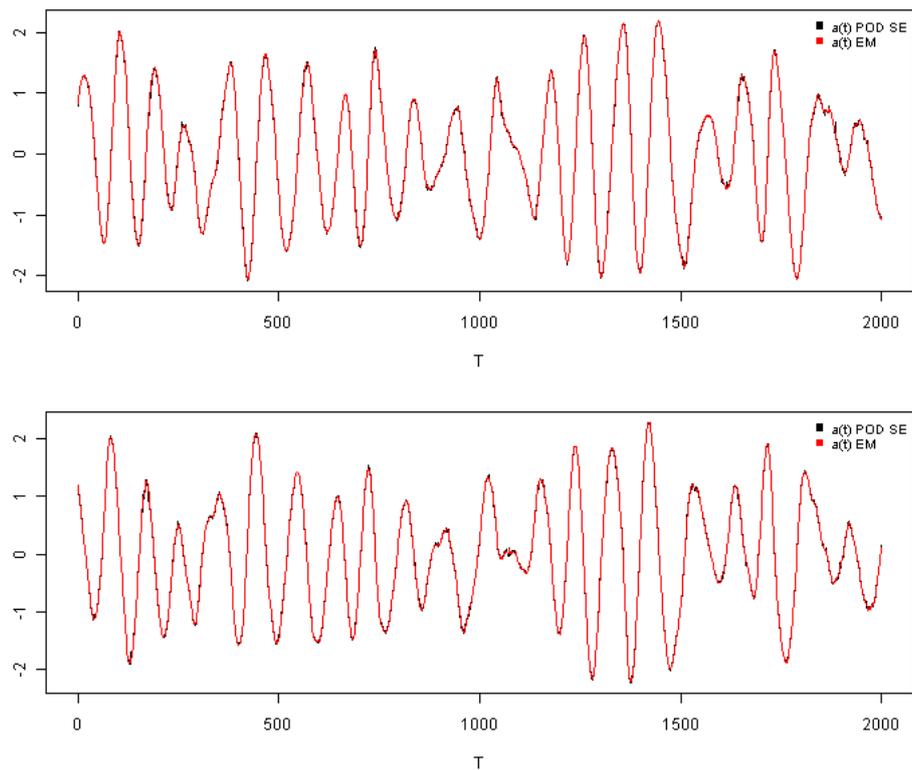


FIGURE 4.66 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$

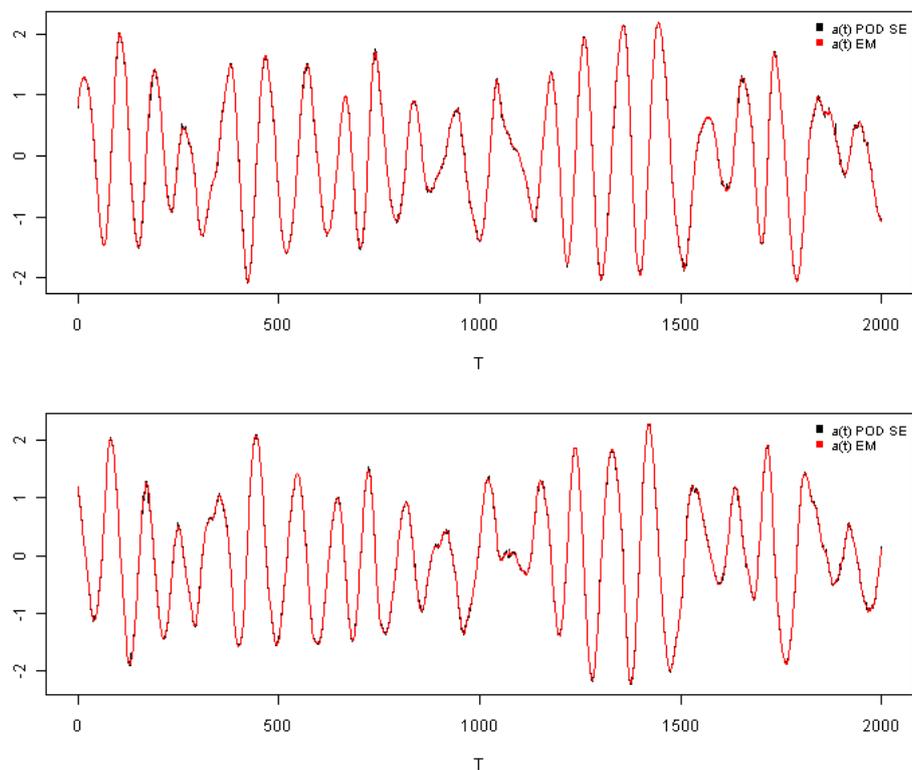


FIGURE 4.67 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ $(l_1, l_2) = (2, 2)$

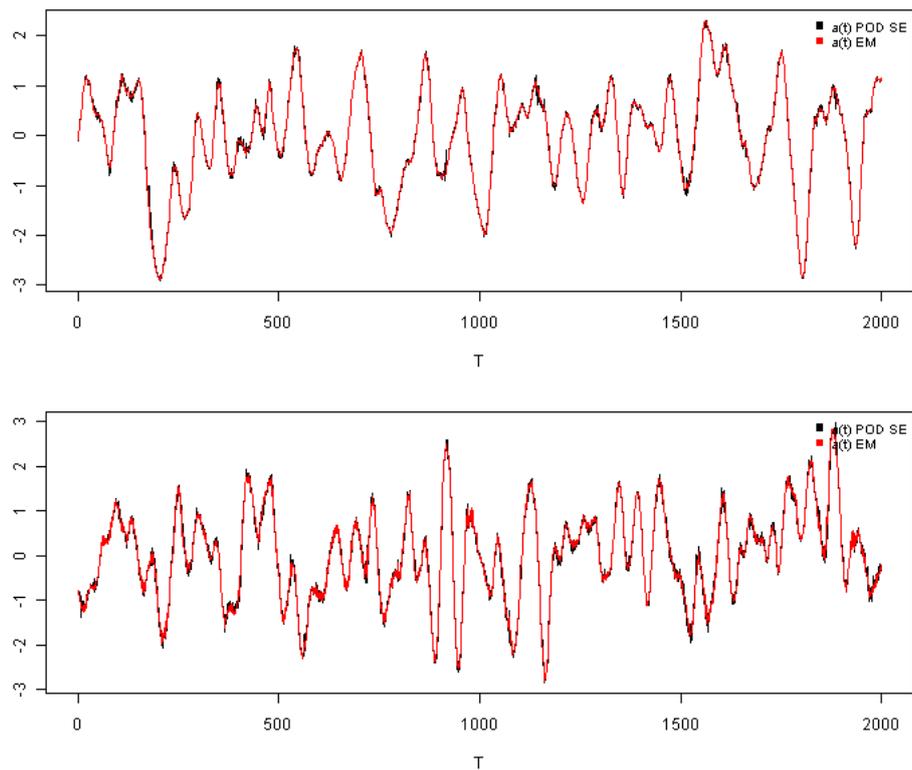


FIGURE 4.68 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 2)$

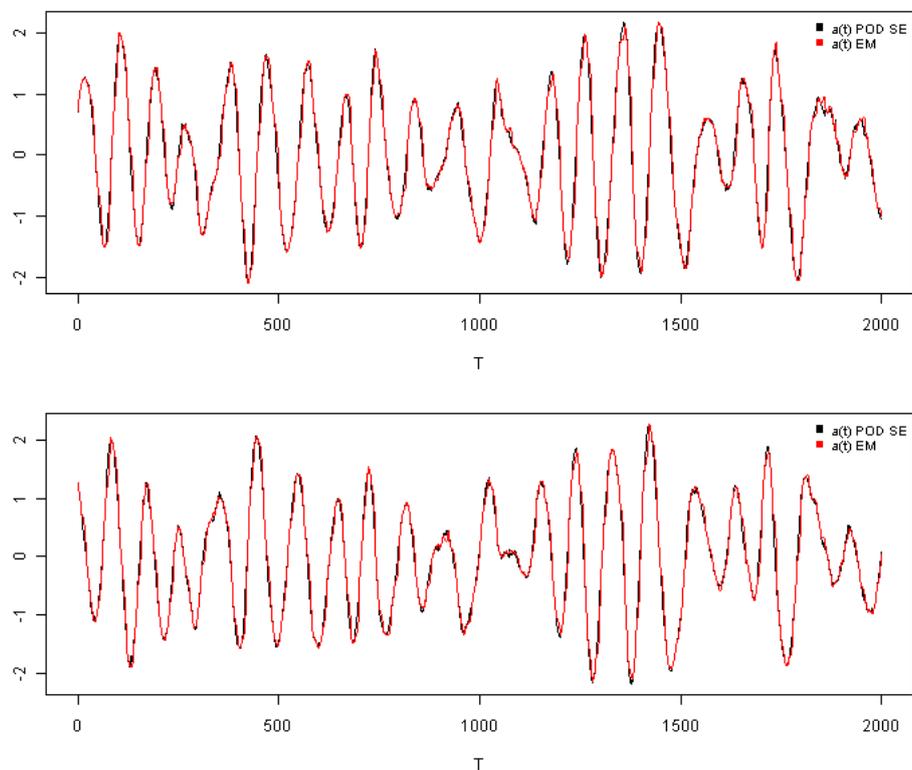


FIGURE 4.69 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=50\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$

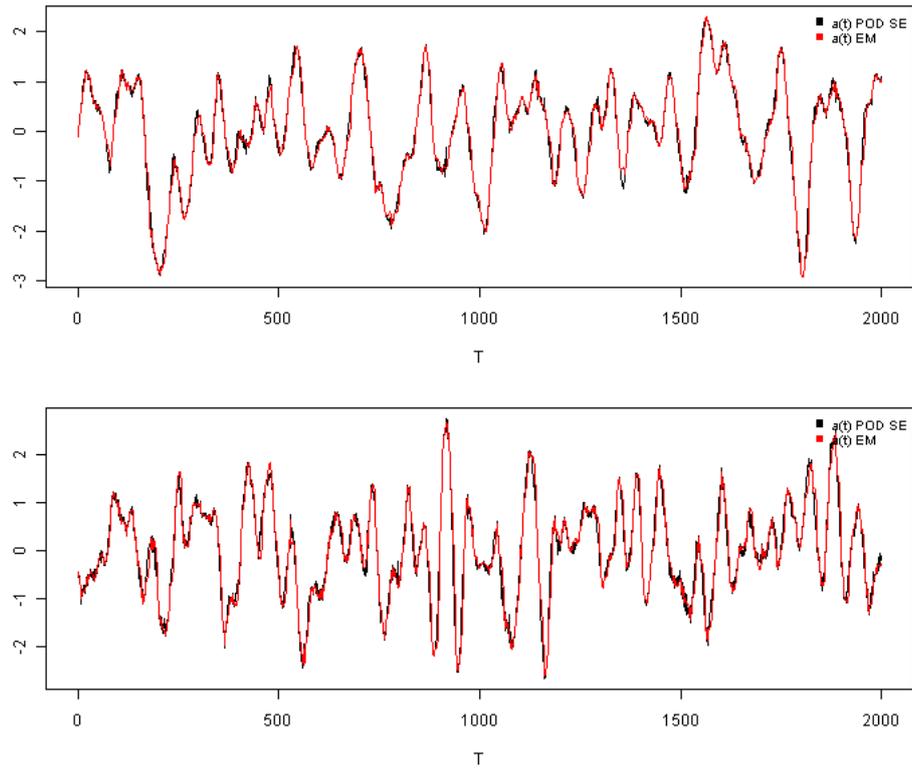


FIGURE 4.70 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$

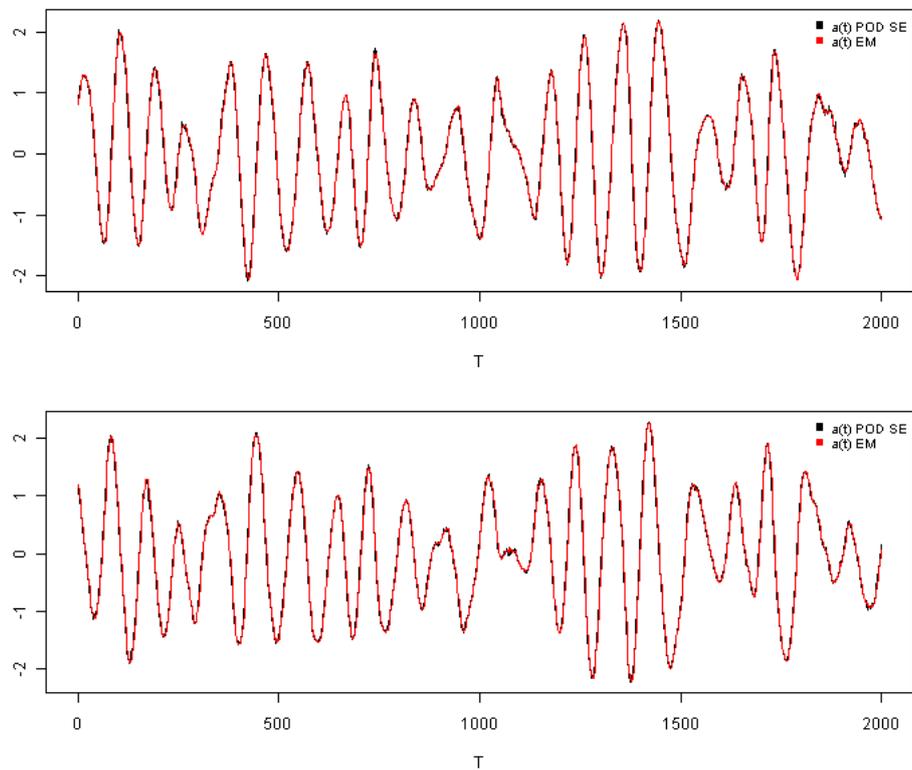


FIGURE 4.71 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$

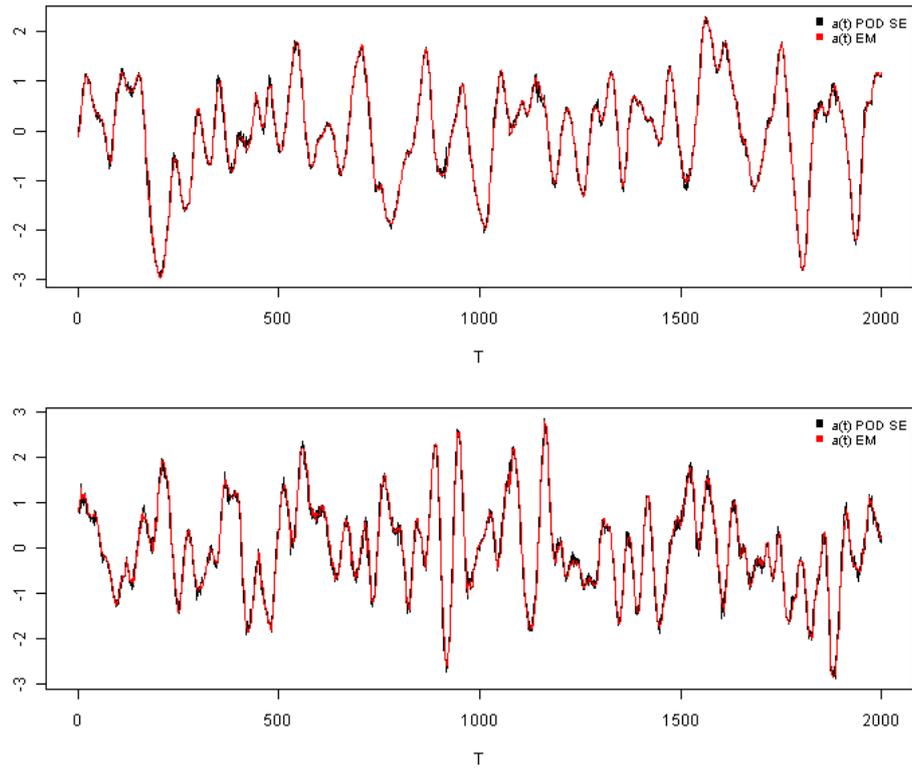


FIGURE 4.72 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ - $(l_1, l_2) = (2, 6)$

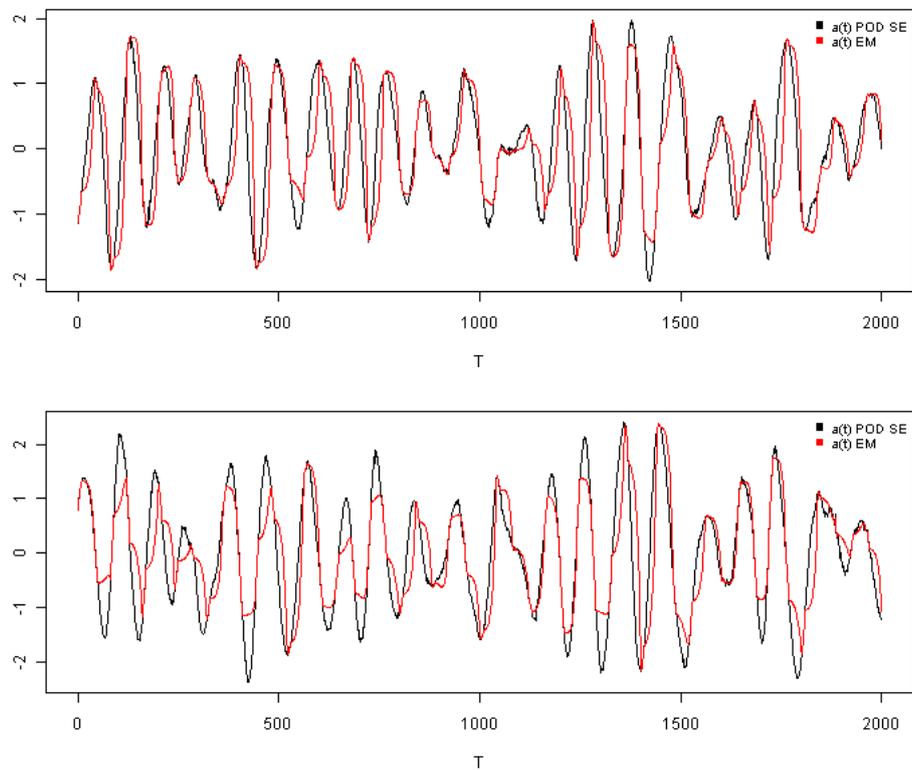


FIGURE 4.73 – $a_1(t), a_2(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

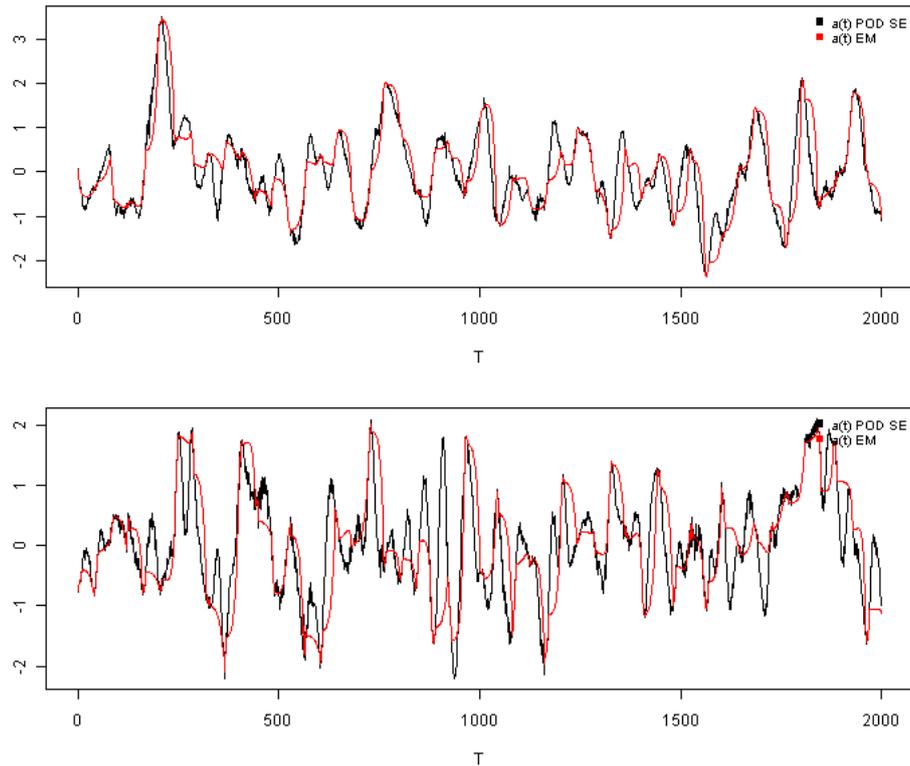


FIGURE 4.74 – $a_5(t), a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

Algorithme EM et modèle réduit POD-Galerkin quadratique

L'algorithme EM est ici appliqué au modèle réduit quadratique et linéaire afin de comparer son efficacité selon l'ordre du modèle réduit. L'erreur E de reconstruction est donnée sur la figure 4.75 avec, à gauche, l'erreur pour le cas linéaire et à droite pour le cas quadratique. La RMSE de l'algorithme EM est également donnée figure 4.76 afin de quantifier sa qualité d'estimation selon le sous-échantillonnage et l'ordre du modèle réduit. Les figures 4.77 à 4.80 représentent les coefficients $a_1(t), a_2(t), a_5(t), a_{10}(t)$ reconstruits en utilisant l'algorithme EM en fonction des sous-échantillonnages des données.

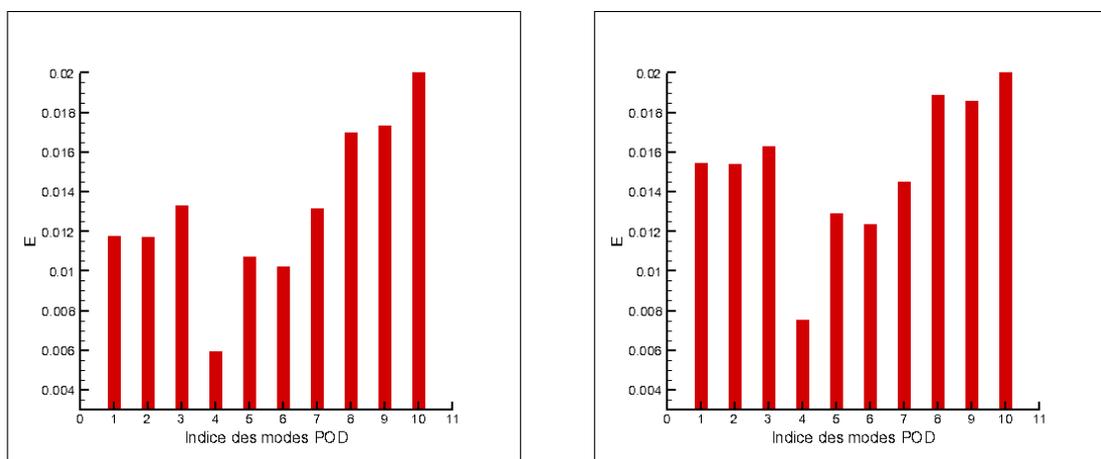


FIGURE 4.75 – Erreur E - Modèle réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique - Cas $\alpha = 20^\circ$ à $R_e = 1000$ - avec $(l_1, l_2) = (10, 10)$

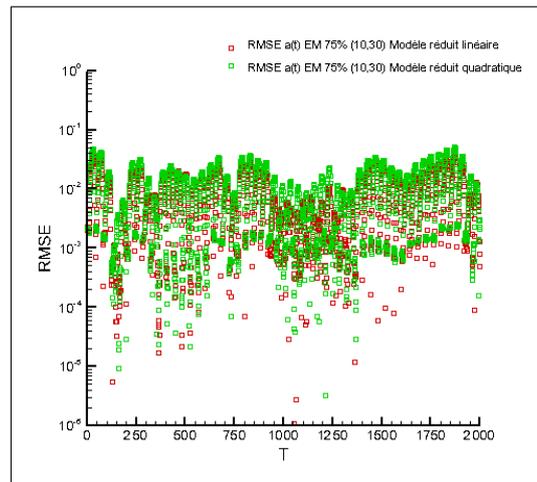


FIGURE 4.76 – RMSE - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ - avec $\tau_{vide} = 75\%$

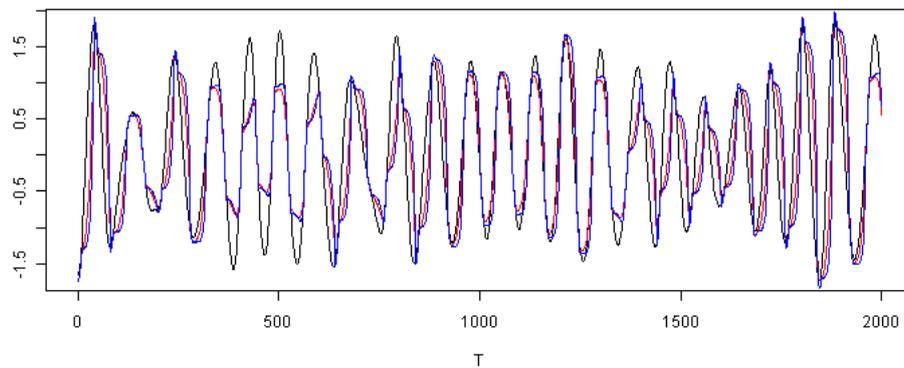


FIGURE 4.77 – $a_1(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

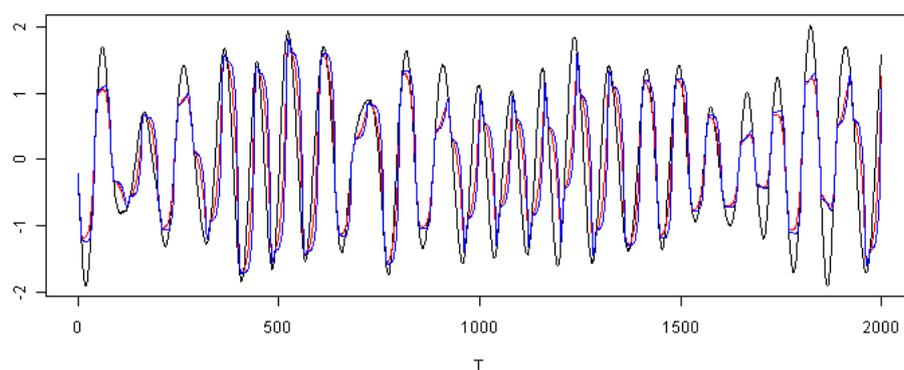


FIGURE 4.78 – $a_2(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

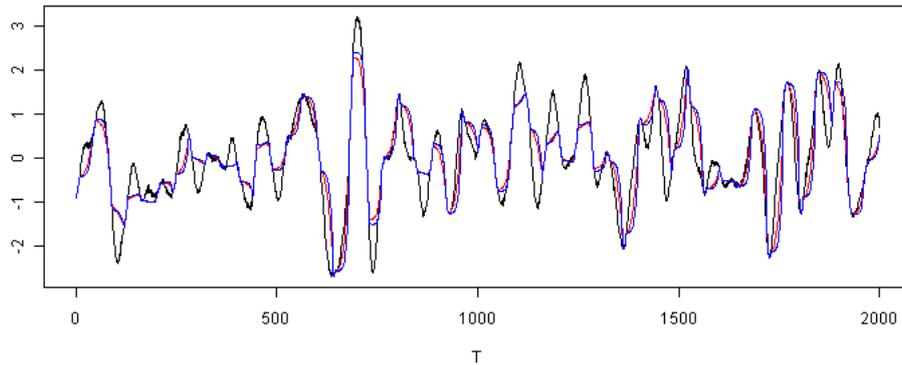


FIGURE 4.79 – $a_5(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

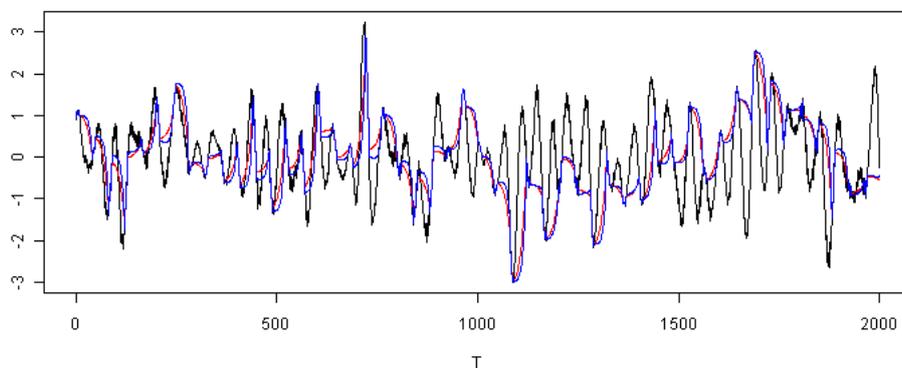


FIGURE 4.80 – $a_{10}(t)$ - Cas $\alpha = 20^\circ$ $R_e = 1000$ avec $\tau_{vide}=75\%$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$

5.6 Observations

La qualité de reconstruction des coefficients de prédiction temporels diffère selon les sous-échantillonnages des coefficients de projection temporels. Pour les cas 1,2 et 3, l'erreur de reconstruction est de l'ordre de 10^{-3} sur l'ensemble des coefficients. Pour les cas 4,5,6,7,8, l'erreur de reconstruction est de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-2} . Pour les cas 1,2,3,4, cette erreur ne présente pas de tendance particulière, contrairement aux cas 5,6,7,8,9 où elle croît systématiquement en fonction du nombre de coefficients. Dans ces cinq cas, l'erreur sur les premiers coefficients est de l'ordre de 10^{-3} et de l'ordre de 10^{-2} sur les derniers coefficients. Le sous-échantillonnage utilisé pour les cas 6 et 7 et les cas 3 et 4 conduit à des erreurs de reconstruction de niveaux équivalents. Les croissances de l'erreur de reconstruction pour les cas 6 et 7 sont également de même nature. Sur l'ensemble des cas, le sous-échantillonnage $(l_1, l_2) = (2, 2)$ est celui qui donne l'erreur de reconstruction globalement la plus faible, inférieure à 0.003 dans chaque cas. Le sous-échantillonnage $(l_1, l_2) = (10, 30)$ est celui que donne l'erreur de reconstruction la plus importante. Pour le cas $\alpha = 20^\circ$ et $R_e = 1000$, l'erreur de reconstruction est la plus importante pour le sous-échantillonnage par paquets $(l_1, l_2) = (10, 30)$ avec des valeurs comprises entre 0.004 et 0.023. Pour le cas $\alpha = 30^\circ$ $R_e = 1000$, l'erreur de reconstruction est la plus importante pour le sous-échantillonnage par paquets $(l_1, l_2) = (10, 30)$ avec des valeurs comprises entre 0.008 et 0.024. Pour les deux cas 1, 2, la RMSE de l'algorithme EM est la plus

faible des 8 cas testés. Dans les cas 3 et 4, cette RMSE augmente, celle du cas 3 est comprise entre 10^{-2} et 10^{-1} et celle du cas 6 est comprise entre 10^{-2} et 10^{-1} . Dans chaque cas, les sous-échantillonnages réguliers $(l_1, l_2) = (2, 2)$ et $(l_1, l_2) = (10, 10)$ fournissent une erreur de reconstruction inférieure aux sous-échantillonnages par paquets $(l_1, l_2) = (2, 6)$ et $(l_1, l_2) = (10, 30)$. La RMSE correspondant au cas 1 est comprise entre 10^{-3} et 10^{-1} et la RMSE correspondant au cas 2 est comprise entre 10^{-3} et 10^{-2} . Pour les cas 3, 4 elle conserve cet ordre de grandeur mais avec des valeurs sensiblement plus élevées. Ce comportement de la RMSE se retrouve également dans les cas 5, 6, 7 et 8 où la RMSE est davantage concentrée dans l'intervalle $[10^{-2}, 10^{-1}]$ pour les sous-échantillonnages par paquets que pour les sous-échantillonnages réguliers.

La comparaison de l'efficacité sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique sur dix coefficients de projection temporels indique une erreur de reconstruction légèrement inférieure dans le cas linéaire. Les RMSE sont du même ordre de grandeur. Cependant, le temps de calcul est nettement inférieur dans le cas de l'utilisation du modèle réduit linéaire que dans le cas quadratique. Il n'y a pas de différences significatives au niveau de la reconstruction des coefficients de prédictions temporels. Dans le cas de l'utilisation du modèle POD-Galerkin linéaire, aucune divergence ou amortissement de l'amplitude n'est constaté. La relation de phase n'est cependant plus respectée dans le cas du sous-échantillonnage par paquets $(l_1, l_2) = (10, 30)$.

5.7 Conclusion

L'algorithme EM a été appliqué au modèle réduit POD-Galerkin linéaire sur des coefficients de projection temporels issus d'une POD sous-échantillonnée à différents taux de vide τ_{vide} correspondant au pourcentage d'observations manquantes dans l'intervalle d'assimilation. Le comportement de l'algorithme EM varie selon le sous-échantillonnage choisi et impacte donc sur la qualité de la reconstruction des différents coefficients de prédiction temporels. Dans les cas $\alpha = 20^\circ R_e = 1000$ et $\alpha = 30^\circ R_e = 1000$, les intervalles $(l_1, l_2) = (2, 2)$, $(l_1, l_2) = (10, 10)$ et $(l_1, l_2) = (2, 6)$ permettent d'obtenir des RMSE faibles. Dans ces cas, l'estimateur du maximum de vraisemblance est fiable. Les coefficients de prédiction temporels sont reconstruits sans perte de phase et d'amplitude. Le modèle réduit est stabilisé et aucune divergence n'est constatée au cours de l'intervalle d'assimilation des observations. Cependant, dans le cas où $(l_1, l_2) = (10, 30)$, la RMSE augmente par rapport aux autres cas et l'erreur de prédiction instantanée également. Cela se caractérise sur l'évolution temporelle des coefficients par une perte de la phase et d'amplitude. Dans le cas $\alpha = 30^\circ R_e = 1000$, davantage de coefficients sont utilisés, ce qui permet de mettre en évidence une augmentation de l'erreur de prédiction entre les coefficients de projection et de prédiction temporels en fonction de l'indice des coefficients. Cette augmentation peut être liée à l'utilisation du filtre de Kalman linéaire dans la maximisation de la vraisemblance. Une alternative consisterait à utiliser une méthode de maximum de vraisemblance non linéaire avec le filtre EnKF. L'efficacité de l'algorithme EM pour la reconstruction de données manquantes dépend de la taille des intervalles l_1 et l_2 . Davantage de tests sont à faire sur la taille de ces intervalles pour caractériser au mieux l'efficacité de la reconstruction à l'aide de l'algorithme EM. L'utilisation du modèle réduit quadratique ne semble pas améliorer la précision de la reconstruction, cependant la comparaison n'a été réalisée que sur les 10 premiers coefficients de projection temporels. Il serait nécessaire de comparer les deux modèles avec un nombre de coefficients plus élevé.

Chapitre 5

Reconstruction du signal temporel de la POD à l'aide du filtre de Kalman en utilisant un signal externe

Sommaire

1	Introduction	135
2	Modèle d'évolution	136
3	Modèle de mesure	136
3.1	Construction du modèle de mesure	136
3.2	Test de significativité des données	138
4	Correction du filtre EnKF	140
4.1	Détermination du paramètre α dans le cas de l'inflation multiplicative	141
5	Application du filtre EnKF avec mesure indirecte au modèle réduit POD-Galerkin	141
5.1	Estimation de l'opérateur G par régression PLS multilinéaire	143
5.2	Validation du filtre EnKF	146
5.3	Estimation des coefficients de prédiction temporels	149
5.4	Observations	149
5.5	Reconstruction du champ de vitesse	152
5.6	Observations	152
6	Conclusion	156

1 Introduction

L'observation complète de l'état d'un système dynamique est en général impossible d'un point de vue physique. De plus, les mesures portent souvent sur des quantités physiques de natures différentes de celles de l'état du système dynamique considéré. C'est pourquoi en assimilation séquentielle de données, les différentes observations utilisées sont supposées être regroupées dans un vecteur d'observation appartenant à un espace d'observations qui est généralement distinct de l'espace des variables d'états. Le contrôle d'un système dynamique se fait ainsi le plus souvent à partir de données expérimentales indépendantes.

En mécanique des fluides, l'estimation stochastique linéaire (LSE) est généralement utilisée pour estimer le champ de vitesse (ou d'autres variables) en d'autres positions en fonction d'une variable considérée en un ou plusieurs points de l'écoulement. Cette estimation peut être également réalisée en utilisant l'extended POD (*EPOD* Borée, 2003) qui permet d'estimer le taux de corrélation entre un signal (pression pariétale, vitesse ..) et chaque mode POD de l'écoulement. L'estimation de la partie corrélée du signal est alors identique à une décomposition LSE (Taylor and Glauser, 2004). Des exemples d'utilisation de la LSE peuvent être trouvés dans les travaux de Glauser and George (1992), Hudy et al. (2007), Murray and Ukeiley (2003) et Taylor and Glauser (2004) qui ont combiné la LSE avec des mesures scalaires de pression afin d'obtenir une description complète des champs de vitesse pour différentes géométries telles que les jets axi-symétriques ou les cavités. Plusieurs extensions de la LSE ont été également étudiées et on pourra consulter à cet effet les travaux de Hudy et al. (2007) et de Tinney et al. (2006). Malgré l'usage extensif de la LSE en mécanique des fluides, cette méthode n'a pas été retenue dans le cadre de ce travail en raison de certaines limitations inhérentes à son utilisation. En effet, elle est similaire à la méthode des moindres carrés qui souffre des problèmes d'auto-corrélation et de mauvaise prise en compte du bruit des observations (phénomène « d'over fitting ») (Gapentine, 1997; Mason and Perreault, 1991; Lipovetsky and Conklin, 2001). Les données d'entrées doivent être statistiquement indépendantes car l'utilisation de données corrélées dans un modèle linéaire fait que celui-ci devient sensible aux petites perturbations sur les données d'entrées. De plus, l'utilisation d'observations bruitées rend la méthode des moindres carrés peu efficace (Cornillon and Matzner-Lober, 2011).

La regression PLS (*Partial Least Squares Regression*) est une méthode d'analyse des données initialement proposée par Wold en 1966, comme une alternative à la régression linéaire multiple en cas de forte multi-colinéarité des descripteurs ou lorsque le nombre de descripteurs est largement supérieur au nombre d'individus. Elle est principalement utilisée pour prédire un ensemble de variables dépendantes à partir d'un ensemble de variables explicatives ou descriptives.

Cette section s'inscrit dans le cadre de l'utilisation de filtre de Kalman d'ensemble pour reconstruire l'évolution temporelle et la dynamique non linéaire des coefficients temporels issus de la POD. Afin de pouvoir comparer les observations avec l'état du système, il est nécessaire de disposer d'un opérateur allant de l'espace des états dans l'espace des observations. On se propose ici de modifier le processus des observations afin de lier les coefficients de la POD à des mesures scalaires issues d'un signal externe de tension obtenu par anémométrie film chaud. L'opérateur des observations va être déterminé par régression PLS et ensuite associé au processus des équations d'état qui sont les équations du modèle réduit POD-Galerkin. Le filtre de Kalman d'ensemble est ensuite appliqué au

modèle à espace d'état ainsi défini afin de fournir une estimation des coefficients temporels de la POD à partir d'observations indirectes. L'ensemble de cette méthode est appliqué au seul cas de l'écoulement autour du profil NACA0012 à un angle d'incidence $\alpha = 20^\circ$ au nombre de Reynolds $R_e = 1000$.

2 Modèle d'évolution

On cherche à obtenir une estimation dynamique des coefficients de prédiction temporels sur tout le domaine temporel en utilisant des mesures ponctuelles d'un signal de tension obtenu par une sonde à film chaud. Pour cela, le modèle à espace d'état défini dans le chapitre 3 est utilisé :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k = f_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1}) & (2.1) \\ \mathbf{Y}_k = h_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k & (2.2) \end{cases}$$

où f_k est une fonction non linéaire en x_k et h_k une fonction linéaire en x_k . \mathbf{W}_k et \mathbf{V}_k sont des bruits blancs. On considère les trois processus suivants :

1. $\mathbf{X}_{1:k} = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k\}$: le processus que suivent les coefficients de prédiction temporels $a_i(t_k)$ du modèle réduit POD-Galerkin.
2. $\mathbf{Y}_{1:k} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k\}$: le processus des observations basées sur les coefficients de projection temporels $a_i(t_k)$ issus de la POD.
3. $\mathbf{S}_{1:k} = \{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k\}$: le processus des observations basées sur le signal de tension $s(t)$ fourni par la sonde film chaud.

À chaque instant t_k du processus d'assimilation, est associé au processus d'observation $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 0})$ un processus d'observation $((\mathbf{S}_k)_{k \geq 0})$ construit à partir d'échantillons du signal s pris dans un intervalle de temps I_k :

$$I_{(k)} = \{t_k + \tau_1, \dots, t_k + \tau_n\}$$

où τ_n sont des décalages temporels séparant l'instant t_k des échantillons de $\mathbf{S}_{1:k}$ choisis pour l'observation. Le but est ici d'estimer le processus $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 0})$ en se basant cette fois sur le processus des observations du signal film chaud $((\mathbf{S}_k)_{k \geq 0})$. À l'instar du processus $((\mathbf{Y}_k)_{k \geq 0})$ le processus $((\mathbf{S}_k)_{k \geq 0})$ n'est pas une chaîne de Markov. Les dépendances entre les variables aléatoires sont décrites par le graphe acyclique et orienté de dépendance conditionnelle décrit sur la figure 5.1

3 Modèle de mesure

3.1 Construction du modèle de mesure

Afin d'assimiler les observations séquentiellement et d'estimer dynamiquement les variances et covariances d'erreurs de prédiction au cours du temps, on utilise le filtre EnKF sur le modèle réduit POD-Galerkin. Le filtre de Kalman linéaire et le filtre de Kalman d'ensemble ne permettent pas cependant l'utilisation d'un opérateur des observations H_k non linéaire. En effet, dans le cas du filtre de Kalman linéaire, celui-ci propage les statistiques d'ordre deux uniquement. Pour le filtre de Kalman d'ensemble, l'hypothèse sur la gaussianité des distributions n'est plus vérifiée. C'est pourquoi, afin de pouvoir disposer

que l'erreur d'une observation donnée n'a aucun lien statistique avec les erreurs des autres observations. Les erreurs d'observations sont généralement supposées être gaussiennes. La matrice de covariance empirique R_k^N du filtre de Kalman d'ensemble est alors de la forme suivante :

$$R_k^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\varepsilon_k^i)(\varepsilon_k^i)^t \quad \text{avec} \quad \varepsilon_k^i = y_k^{POD} - y_k^{PLSR} \quad (3.6)$$

ε_k est l'écart entre les observations estimées par régressions et les observations, où y_k^{POD} sont les observations obtenues par la POD et y_k^{PLSR} les observations obtenues par régression PLS. Une approximation par le filtre EnKF des coefficients de prédiction temporels POD est alors donnée par :

$$x_k^{a,i} = x_k^{f,i} + K_k^N [y_k^{PLSR} - x_k^{f,i}] \quad (3.7)$$

où $x_k^{f,i}$ sont les coefficients de prédiction temporels POD obtenue par le filtre EnKF.

3.2 Test de significativité des données

Les observations venant d'un signal externe étant de nature différente des coefficients de projection temporels issus de la POD, on s'intéresse également à la validité des résultats obtenus à l'aide du filtre de Kalman d'ensemble. On utilise pour cela une validation des résultats basée sur la distribution du χ_K^2 à K degrés de liberté où K est la dimension du vecteur des observations.

Définition : Loi d'un vecteur dérivé d'un vecteur aléatoire normal

Soit un vecteur aléatoire réel V de dimension p et de loi normale $\mathcal{N}(\bar{V}, \Sigma)$ de moyenne \bar{V} et de matrice de covariance Σ . Alors la variable aléatoire définie par $Y = (V - \bar{V})^t \Sigma^{-1} (V - \bar{V})$ suit une loi du χ_p^2 à p degrés de liberté. Ainsi, sous les hypothèses faites sur le filtre de Kalman, la forme quadratique suivante :

$$(y_k - H_k x_k^f)^t P_k^f (y_k - H_k x_k^f) \sim \chi_K^2 \quad (3.8)$$

suit une loi du χ_K^2 à K degrés de liberté où K est la dimension du vecteur des observations y_k .

On note χ_{min} et χ_{max} les bornes inférieures et supérieures données par la loi du χ_K^2 . Elles délimitent l'intervalle de confiance au niveau de probabilité $1 - \alpha$. La probabilité α mesure le risque d'erreur de l'intervalle, soit la probabilité que l'intervalle ne contienne pas la vraie valeur de $(y_k - H_k x_k^f)^t P_k^f (y_k - H_k x_k^f)$. Pour déterminer χ_{min} et χ_{max} on répartit le risque d'erreur en deux parties égales $\frac{\alpha}{2}$ afin d'obtenir un intervalle symétrique. Dans ce travail, nous choisissons le niveau de confiance fixé à $1 - \alpha = 95\%$. Connaissant le nombre de degrés de liberté, les valeurs χ_{min} et χ_{max} peuvent être obtenues directement à partir de la table de la loi du χ^2 .

Si la statistique de l'erreur se trouve en dehors de la borne supérieure de l'intervalle, alors :

- Soit l'estimée est biaisée.
- Soit les erreurs réelles sont très grandes par rapport à celles estimées par le filtre.
- Soit la covariance de l'erreur fournie par le filtre est trop faible.

Si la statistique calculée se trouve en dessous de la borne inférieure de l'intervalle de confiance fixé, alors la covariance de l'erreur d'estimation fournie par le filtre est trop grande en comparaison de l'erreur réelle. Lorsque la statistique de l'erreur se trouve dans l'intervalle de confiance, alors on conclut que le filtre est bien réglé, et l'erreur estimée est consistante avec les erreurs réelles du système.

Exemple de test de significativité des résultats

Un exemple de test de significativité des résultats du filtre EnKF appliqué au modèle réduit POD-Galerkin linéaire pour un écoulement autour du profil NACA0012 à un angle d'incidence $\alpha = 20^\circ$ au nombre de Reynolds $R_e = 1000$ est donné. Le nombre de coefficients de projection temporels retenus ici est $N_t=10$. Les bruits du filtre EnKF sont les suivants : $w \sim \mathcal{N}(0,0.01)$ et $v \sim \mathcal{N}(0,0.01)$ et le nombre d'ensemble $N=20$. Les seuils à $\chi_{min} = 2.5\%$ et $\chi_{max} = 97.55\%$ pour la distribution du χ^2 à 10 degrés de liberté sont les valeurs 3.247 et 20.43. La forme quadratique doit alors être comprise entre ces valeurs pendant 95% du temps d'assimilation. La figure 5.2 représente l'évolution temporelle de cette forme quadratique sur l'intervalle d'assimilation $T=[0,2000]$. Les seuils χ_{min} et χ_{max} sont représentés par les lignes horizontales rouges. La figure 5.2 montre que la forme quadratique sort de la zone définie par la loi χ^2 à K degrés de liberté. On en déduit que le filtre EnKF diverge. De plus on constate que les valeurs de la forme quadratique sont élevées, ce qui suggère que la covariance de prédiction est trop faible, c'est-à-dire que le filtre EnKF sous-estime l'incertitude liée à la prédiction.

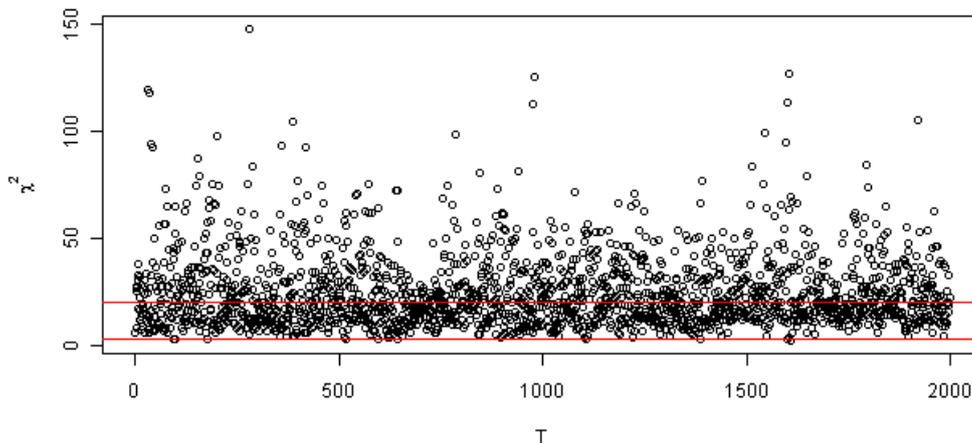


FIGURE 5.2 – Série temporelle de la forme quadratique 3.8

La matrice de covariance empirique P_k^N de l'erreur estimée par le filtre EnKF contient l'information de l'incertitude qu'a le filtre sur l'estimée. Cela se traduit par le fait que plus cette matrice est grande, plus le filtre est incertain sur l'estimée, et plus elle est petite, plus le filtre est informatif. Ainsi, l'inconsistance du filtre peut être évitée en faisant

croître artificiellement P_k^N mais choisir P_k^N trop grande revient à perdre de l'information sur l'estimée. La validité des estimations obtenues dépend fortement de la qualité du filtre EnKF. Afin d'améliorer les performances du filtre EnKF sur l'estimation des coefficients de prédiction temporels à partir du signal externe s , une technique basée sur la pondération de la covariance empirique du filtre EnKF est utilisée.

4 Correction du filtre EnKF

L'une des principales causes de la divergence du filtre apparaît quand les covariances de prédiction données dans le filtre sont sous-estimées, elles deviennent alors inconsistantes avec leur vraies valeurs, (Maybeck et al., 1990). La covariance de prédiction est trop faible c'est-à-dire que le filtre EnKF sous-estime l'incertitude liée à la prédiction. Or, l'EnKF approxime la covariance prédite sur un échantillon de taille finie, la divergence du filtre est donc inévitable. Une approche pour éviter la sous-estimation de la matrice de covariance prédite P_k^f est d'augmenter artificiellement la variance prédite a priori à appliquer au filtre de Kalman, (Anderson and Anderson, 1999). L'hypothèse faite dans ce cas est que l'augmentation de la variance de l'ensemble revient à compenser la taille insuffisante de l'ensemble. Cette augmentation artificielle de la variance prédite a priori se fait soit en multipliant directement la matrice P_k^f de la façon suivante :

$$P_k^f \longrightarrow \alpha P_k^f$$

avec $\alpha > 1$ soit en pondérant la matrice de covariance empirique P_k^N par l'ajout d'une matrice définie positive P_k^c :

$$P_k^f \longrightarrow \alpha P_k^f + (1 - \alpha) P_k^c$$

et où α est un paramètre compris entre 0 et 1 (Anderson and Anderson, 1999).

Une autre cause de la divergence du filtre EnKF est le problème de localisation qui désigne des covariances trop grandes et peu réalistes entre des points éloignés, (Hamill et al., 2001), (Houtekamer et al., 2005b). Ces covariances ne correspondent alors pas à de réelles corrélations entre les erreurs de prédiction entre ces deux points, et sont la conséquence de la présence de bruit dans l'ensemble de prédiction lorsque celui-ci est de petite taille. En effet, la taille finie de l'ensemble peut générer des artefacts dans la matrice de covariance, comme une corrélation forte entre deux points très éloignés. Pour remédier à ce problème, on peut soit augmenter la taille de l'ensemble, soit multiplier la matrice P_k^f élément par élément avec une fonction de corrélation à support compact (Hamill et al., 2001) et nulle au-delà d'une certaine distance entre deux points.

Lorsque les variables d'état n'ont pas une distribution gaussienne, une paramétrisation peut être utilisée pour les remplacer par d'autres variables qui suivent une loi gaussienne. Parmi ces méthodes, on peut citer la transformation lognormale appliquée par exemple dans les travaux de Bertino et al. (2003b) et Gu and Oliver (2006). Enfin, des approches itératives peuvent être utilisées lorsque la dépendance entre les variables d'état et les valeurs mesurées est fortement non linéaire, (Reynolds et al., 2006; Gu and Oliver, 2007).

4.1 Détermination du paramètre α dans le cas de l'inflation multiplicative

On choisit de modifier la covariance prédite de la manière suivante :

$$P_k^f \longrightarrow \alpha P_k^f$$

où α est appelé *le facteur d'inflation*. Le paramètre α peut être déterminé de manière à ce que le vecteur d'innovation soit consistant avec la propriété du χ^2 . Il n'y a pas de manière unique pour déterminer ce paramètre, les principales méthodes utilisées sont listées ci-dessous :

1. Déterminer α afin de maximiser la vraisemblance du vecteur d'innovation. Cela consiste à choisir α tel que :

$$(y_k - H_k x_k^f)^t P_k^f (y_k - H_k x_k^f) = K - 2 \quad (4.1)$$

où $K - 2$ est le mode de la distribution χ^2 à K degrés de liberté. Cette équation n'est pas résoluble directement dans le cas général et requiert donc l'utilisation d'une méthode itérative pour la résoudre, ce qui s'avère coûteux en calcul.

2. Déterminer α afin que la variance du vecteur d'innovation soit consistante avec la variance prédite, autrement dit :

$$(y_k - H_k x_k^f)^t (y_k - H_k x_k^f) = Tr[\alpha H_k P_k^f H_k^t] \quad (4.2)$$

Cette équation peut être résolue explicitement et on obtient :

$$\alpha = \frac{(y_k - H_k x_k^f)^t (y_k - H_k x_k^f - Tr[R_k])}{H_k P_k^f H_k^t} \quad (4.3)$$

3. Déterminer α de manière à ce que la variance du vecteur d'innovation soit aussi proche que possible de la variance prédite.
4. Déterminer α basé sur une méthode adaptative (Anderson, 2001).

La seconde méthode est celle qui a été retenue dans le cadre de ce travail.

5 Application du filtre EnKF avec mesure indirecte au modèle réduit POD-Galerkin

Cette section est consacrée à la reconstruction des coefficients temporels de prédiction du modèle réduit POD-Galerkin à l'aide d'un signal externe s obtenu par anémométrie film chaud. La configuration étudiée est celle de l'écoulement à un nombre de Reynolds $R_e=1000$ autour du profil NACA0012 avec un angle d'incidence de 20° pour $N_t = 10$.

Les équations du modèle à espace d'état sont le modèle réduit POD-Galerkin :

$$\frac{d}{dt}a_i(t) = D_i + \sum_{j=1}^{N_{POD}} L_{ij}a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{POD}} \sum_{k=1}^{N_{POD}} C_{ijk}a_j(t)a_k(t) \quad (5.1)$$

et un opérateur des observations G dont la détermination est définie dans la section (3.2). L'estimation est initialisée avec $a_i(t_0)$ et le modèle réduit POD-Galerkin filtré par EnKF et PLSR permet de reproduire la série temporelle. Le nombre d'ensemble utilisé pour le filtre EnKF est ici de $N=100$ fin de s'assurer une bonne convergence du filtre. L'intervalle d'assimilation des données est $[0, T]$ avec $T=2000$.

La procédure mise en oeuvre nécessite toutefois de nombreux tests d'initialisation des paramètres du bruit afin de valider le filtre EnKF. De plus, la procédure de validation croisée utilisée lors de la régression *PLS* nécessite également du temps de calcul. C'est pourquoi, un nombre réduit $N_t=10$ de coefficients de projection temporels de la POD est retenu ce qui correspond à un *RIC* (*Contenu Informationnel Relatif*) de 70%, suffisant pour reconstruire les principales structures spatio-temporelles de l'écoulement. Le filtre de Kalman EnKF est appliqué au modèle réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique. L'opérateur des observations est déterminé par PLSR. La validation du filtre ENKF par test du χ^2 n'est effectuée que sur le modèle réduit linéaire, en raison du nombre important de tests à effectuer pour déterminer les paramètres adéquats du filtre EnKF.

La fréquence d'échantillonnage des données d'écoulement à $R_e=1000$ est de $f_{piv} = 6.4H_z$ et la fréquence d'acquisition des mesures par sonde film chaud est $f_s=2.5kH_z$. Ainsi, entre chaque mesure *PIV*, on a approximativement 195.3 mesures film chaud, ce qui permet de retenir un nombre élevé d'échantillons du signal s pour l'estimation de coefficients $a_i(t)$ à chaque instant t_k . Ces échantillons sont alors pris dans des intervalles définis comme suit :

$$I_1 = [-N : N] * \frac{1}{f_s}, \quad I_2 = [0 : N] * \frac{1}{f_s} \quad \text{et} \quad I_3 = [-N : 0] * \frac{1}{f_s}$$

Le système d'acquisition du signal s (LeCroy Wavesufer) ne permettant pas d'utiliser une fréquence f_s multiple de f_{piv} , il existe une variabilité dans le positionnement de ces intervalles vis-à-vis de t_k . Les intervalles I_k construits à partir des intervalles I_1 , I_2 et I_3 au voisinage de t_k subissent donc cette variation.

On considère le modèle de régression défini à la section 3 utilisé pour la PLSR. Les variables réponses Y correspondent aux coefficients de projection temporels de la POD que l'on cherche à approximer à partir du signal s . Les variables explicatives X correspondent au signal s^2 et s^4 . La matrice X est une matrice de taille $T \times p$ où T correspond au nombre de pas de temps et p au nombre de variables explicatives. La matrice Y est une matrice de taille $T \times N_t$ où T correspond au nombre de pas de temps et N_t au nombre de coefficients de projection temporels retenu. Le nombre de colonnes de X est de $2 * t_{max} + 1$ où t_{max} est le décalage temporel le plus important en valeur absolue. Ainsi, la taille de l'intervalle I_1 est de $2*100+1=201$, celle de I_2 de $2*400+1=801$ et celle de I_3 de $2*600+1=1201$. La procédure de validation croisée sélectionne dans ces cas respectifs au plus 201, 801, 1201 variables explicatives. La régression PLS est effectuée sous Matlab qui opère une troncature par défaut qui correspond au maximum entre le nombre de lignes de X et le

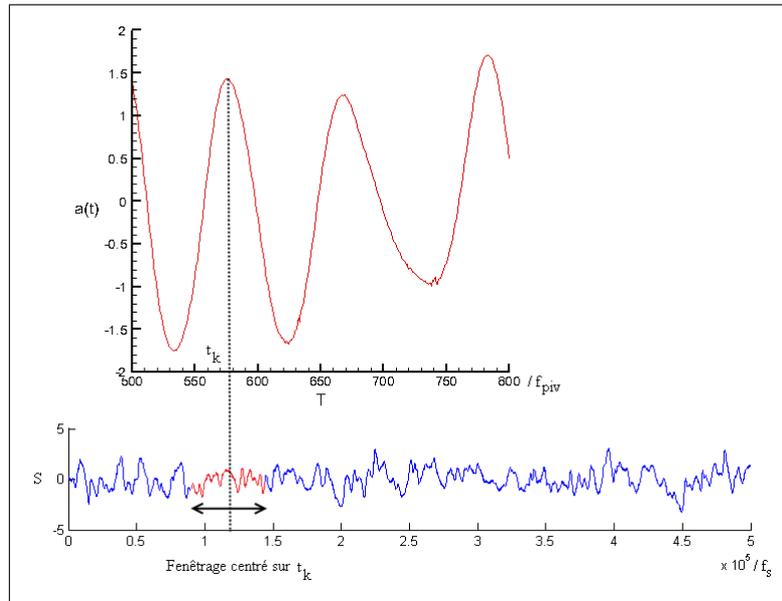


FIGURE 5.3 – Sélection du fenêtrage du type $[-N : N] * \frac{1}{f_s}$ pour le signal film chaud S

nombre de variables utilisées pour la validation croisée. Ainsi, dans le cas de l'utilisation de l'intervalle $[0 : 1500]$ la taille de cet intervalle est de $2*1500+1=3001 > 2000$, donc 2000 variables explicatives sont sélectionnées au plus dans la PLSR entre les coefficients $a_i(t)$ et $s(t)$. Le filtre EnKF est sensible au bruit contenu dans les observations. C'est pourquoi, en fonction d'un fenêtrage donné, le pourcentage de variance expliquée en Y le plus grand possible sera cherché par PLSR avec validation croisée. Les intervalles sélectionnés sont ceux fournissant un pourcentage maximum de variance explicative et une erreur de reconstruction entre les coefficients de projection temporels et ceux estimés par PLSR minimale.

5.1 Estimation de l'opérateur G par régression PLS multilinéaire

La régression PLS va être appliquée à ces intervalles afin de déterminer l'opérateur G . Pour chaque intervalle, on augmente le décalage temporel avec un pas de 100, jusqu'à ce que la régression PLS capte le maximum de variance explicative tout en assurant une bonne estimation des coefficients de projection temporels POD. Pour la régression PLS, on sélectionne ainsi le nombre de composantes principales par validation croisée avec un pourcentage de variance explicative supérieure à 99.9% en utilisant la validation croisée afin d'éviter les problèmes de sur-estimation du modèle. La qualité de la régression est évaluée en utilisant :

- La RMSE (*Root Mean Square Error*) entre les coefficients $a_n^{PLSR}(t_k)$ prédits par régression et les coefficients $a_n^{POD}(t_k)$ observés, c'est-à-dire les coefficients de projection temporels issus de la POD.

- Le coefficient R^2 multiple, $R = Cor^2(a_n^{POD}(t_k), a_n^{PLSR}(t_k)) \in [0,1]$. Plus R^2 est proche de 1 meilleure est la qualité de l'estimation de la régression.

Le pourcentage de variance expliquée (ou pourcentage de variance explicative) en y , où y correspond aux coefficients $a_i(t)$, ainsi que la RMSE, obtenus dans chaque cas sont présentés de la figure 5.4 à 5.9.

Les coefficients R^2 obtenus dans les différents cas sont indiqués au tableau 5.1.

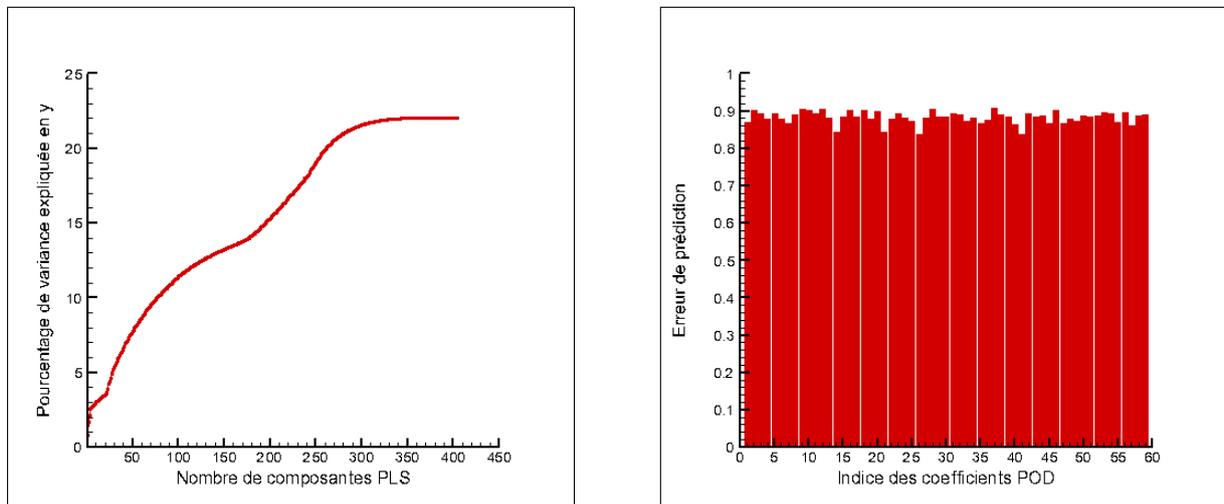


FIGURE 5.4 – Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle [-100 :100]

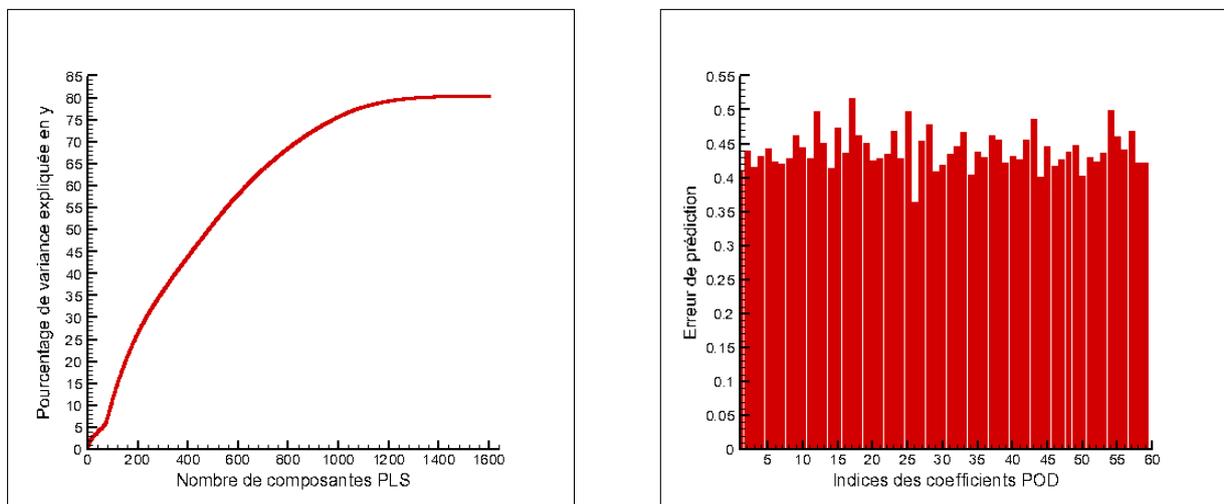


FIGURE 5.5 – Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle [-400,400]

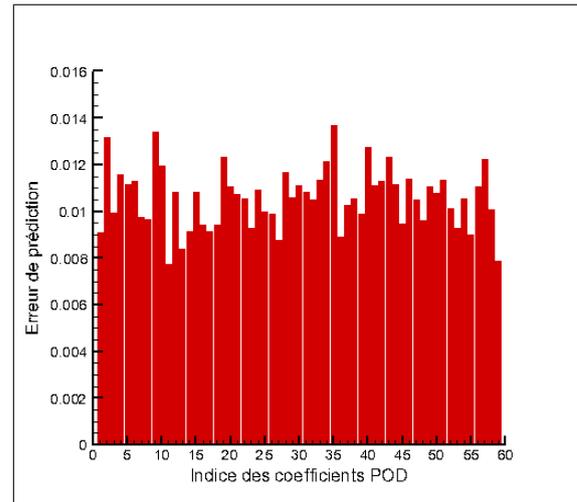
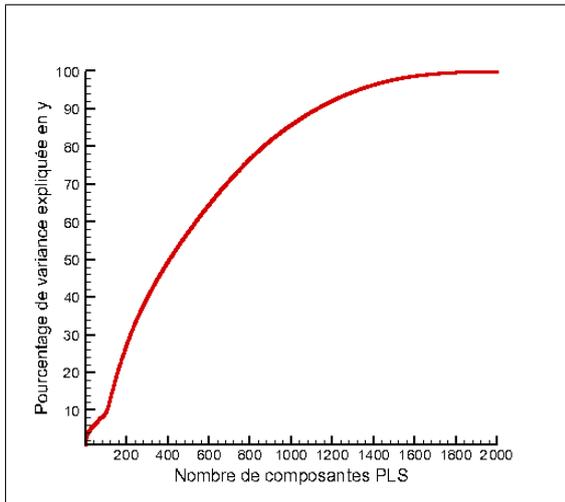


FIGURE 5.6 – Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-600,600]$

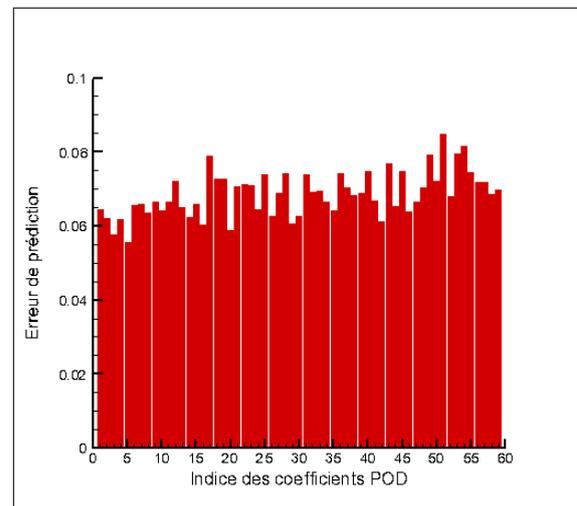
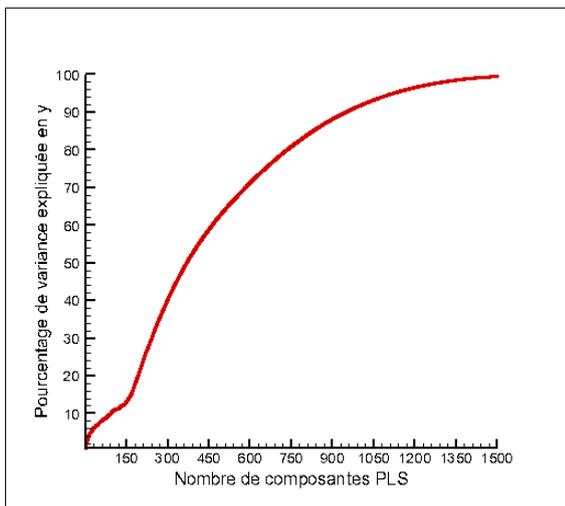


FIGURE 5.7 – Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-1000,1000]$

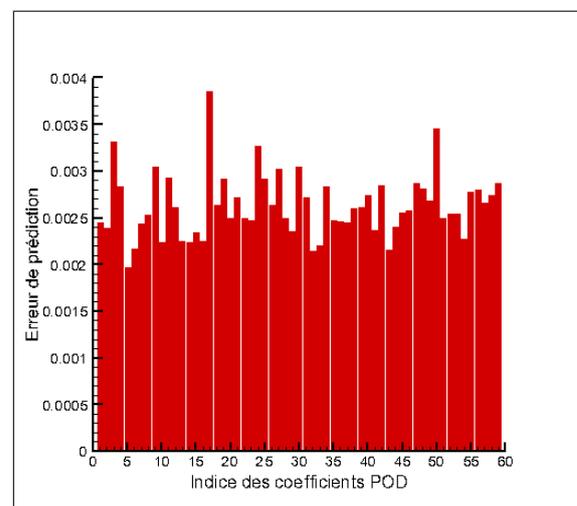
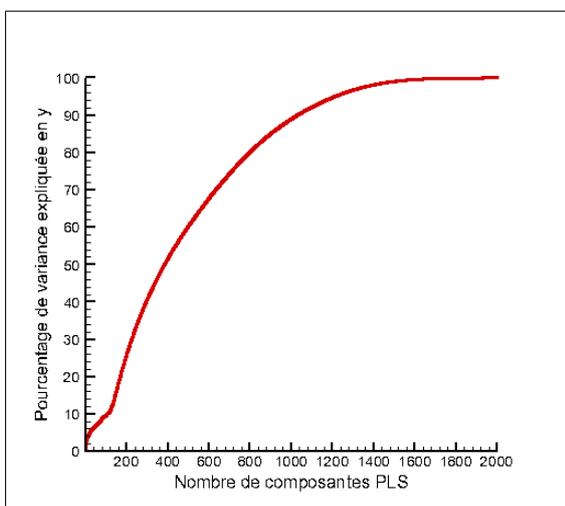
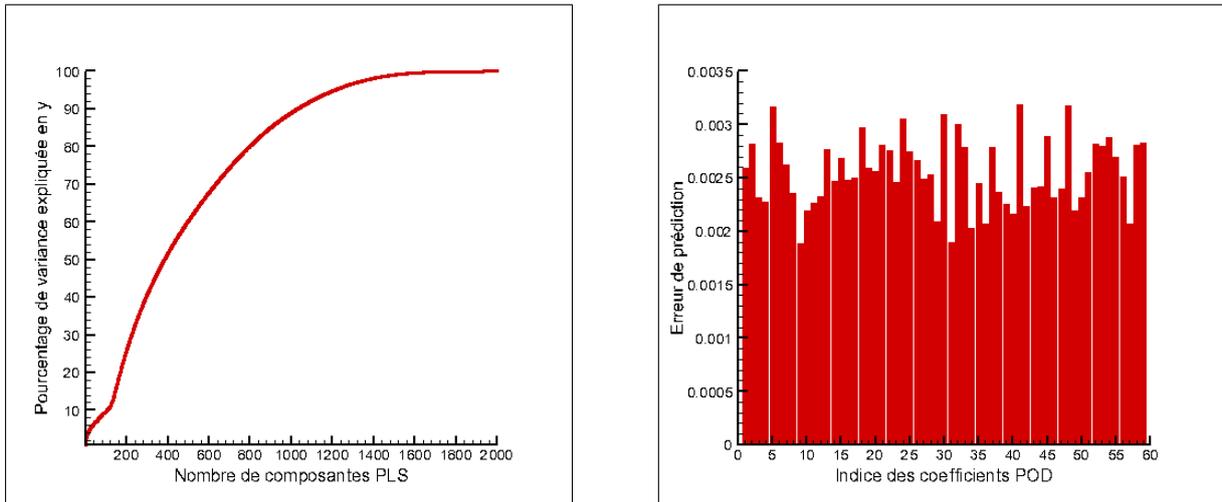


FIGURE 5.8 – Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[-1500,0]$

FIGURE 5.9 – Pourcentage de variance explicative et RMSE - Intervalle $[0,-1500]$

Cas	1	2	3	4	5
Intervalle	$[-100,100]$	$[-600,600]$	$[-1000,1000]$	$[0,1500]$	$[-1500,0]$
R^2	0.2206	0.9999	0.9953	1.0	1.0

TABLE 5.1 – Coefficient R^2 pour la régression PLS sur les différents intervalles

Le pourcentage de variance expliquée dans les cas 2,3,4 et 5 est de 100% pour 2000 variables explicatives. Pour l'intervalle $[-100,100]$, la PLSR ne capture pas le maximum de variance et R^2 est faible. Ce qui indique qu'il n'y a pas assez de variables explicatives, c'est-à-dire que le fenêtrage est trop petit. La régression PLS n'est également pas significative. Pour l'intervalle $[-600,600]$, la PLSR capture le maximum de variance pour 2000 composantes. Pour les intervalles $[-1000,1000]$, $[0,1500]$, $[-1500,0]$ la PLSR capture le maximum de variance pour 1500 composantes. La taille du fenêtrage est ici suffisante pour capturer le maximum de variance. Pour les intervalles $[-600,600]$ et $[-1000,1000]$, R^2 est très proche de 1. Le R^2 dans le cas de l'intervalle $[-1000,1000]$ est inférieur à celui de R^2 dans le cas de l'intervalle $[-600,600]$. De plus la RMSE dans le cas de l'intervalle $[-1000,1000]$ est globalement moins bonne que celle observée pour l'intervalle $[-600,600]$. Le coefficient de régression PLS sur les intervalles $[0,1500]$, $[-1500,0]$ est de 1. La RMSE entre les coefficients prédits et observés est également faible. Pour ces intervalles, la régression PLSR est significative et la taille du fenêtrage est suffisante. Les coefficients déterminés par régression PLS sur les intervalles $[-600,600]$, $[0,1500]$, $[-1500,0]$ sont utilisés ensuite dans le filtre EnKf.

5.2 Validation du filtre EnKF

Les tests de validation du filtre EnKF en utilisant la statistique du χ^2 à $dim(Y_k)$ degrés de liberté sur la forme quadratique $(y_k - H_k x_k^f)^t P_k^N (y_k - H_k x_k^f)$ avec un niveau de confiance fixé à 95% sont présentés. Les bruits gaussiens w_k , v_k et le nombre d'ensemble N utilisés dans le filtre EnKF sont paramétrés de la manière suivante :

- $w_k = \mathcal{N}(0,0.85)$, $N = 100$, pour l'intervalle $I_1 = [-600,600]$

- $w_k = \mathcal{N}(0,0.8)$, $N = 100$, pour l'intervalle $I_2 = [-1500,0]$
- $w_k = \mathcal{N}(0,0.9)$ $N = 100$, pour l'intervalle $I_3 = [0,1500]$
- $v_k^i = y_k^{POD} - y_k^{PLSR}$ pour les intervalles I_1 , I_2 et I_3

L'inflation multiplicative est appliquée dans les cas où la statistique du χ^2 n'est pas respectée. Une comparaison du filtre EnKF sans pondération de la matrice de covariance empirique et avec pondération est donnée dans chaque cas. Une fois que le filtre EnKF est bien réglé, il est utilisé pour reconstruire les coefficients de prédiction temporels. Les coefficients de prédiction temporels a_k obtenus sont ensuite comparés avec les coefficients a_k issus de la POD. On choisit ici de comparer les coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$ et $a_{10}(t)$ ainsi que la relation de phase entre les coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$. Afin de quantifier la qualité de la reconstruction fournie par le filtre EnKF, la RMSE entre les coefficients de projection et de prédiction est donnée. Enfin, une comparaison entre la POD et le EnKF de la reconstruction de l'écoulement $U(x,y,t)$ à différents instants est présentée.

Les tests du χ^2 du filtre EnKF sur les intervalles I_1, I_2 et I_3 sont présentés sur les figures 5.10 à 5.12. Les seuils à 2.5% et 97.55% pour la distribution du χ^2 à 10 degrés de liberté sont les valeurs 3.247 et 20.43. L'intervalle d'acceptation de l'hypothèse de consistance est $[3.247, 20.43]$. Les seuils à 95% sont indiqués par des lignes rouges.

On constate que dans les cas où la covariance empirique n'est pas pondérée, l'ensemble des points se situe en dessous de la borne inférieure de l'intervalle d'acceptation ce qui indique que la covariance empirique est sur-estimée. Le tableau 5.2 indique le nombre de points contenus dans cet intervalle pour chaque test avec ou sans pondération de la covariance.

Intervalle	I_1	I_2	I_3
χ^2 sans α	0	0	0
(χ^2) avec α	1913	1930	1944

TABLE 5.2 – Résultats du test du χ^2

Les valeurs de la fonction quadratique se trouvent à plus de 95% du temps d'assimilation dans l'intervalle. Nous pouvons admettre avec 95% de confiance, que l'ensemble des estimateurs comparés dans ce scénario sont bien consistants lorsque la covariance empirique du filtre EnKF est pondérée avec le coefficient α . Il existe alors peu de points où les erreurs estimées ne sont pas consistantes avec l'erreur réelle. Ceci montre que le filtre EnKF utilisé dans chaque cas est bien réglé.

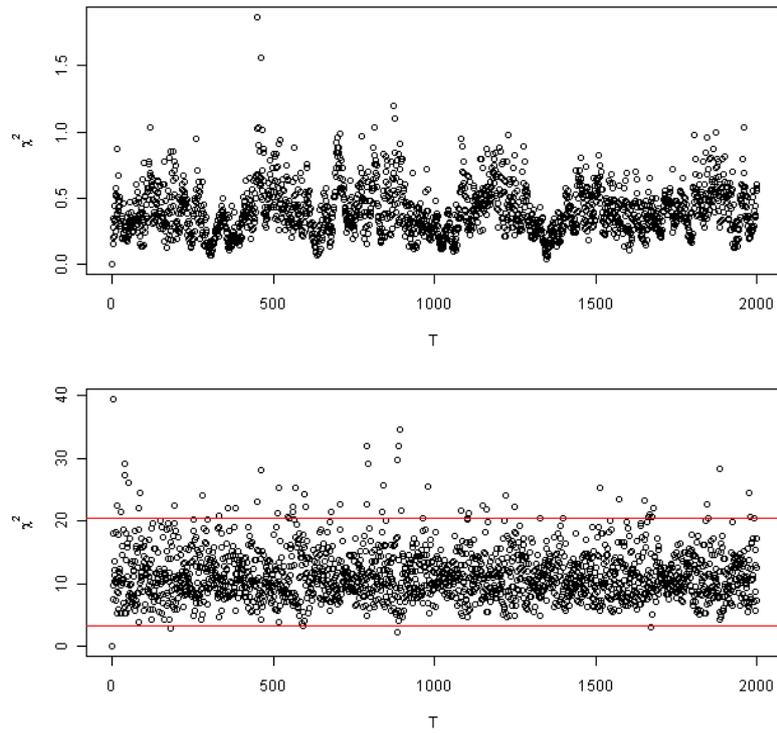


FIGURE 5.10 – Série temporelle de la forme quadratique (1.5) - Intervalle I_1 - Sans pondération de la covariance et avec pondération

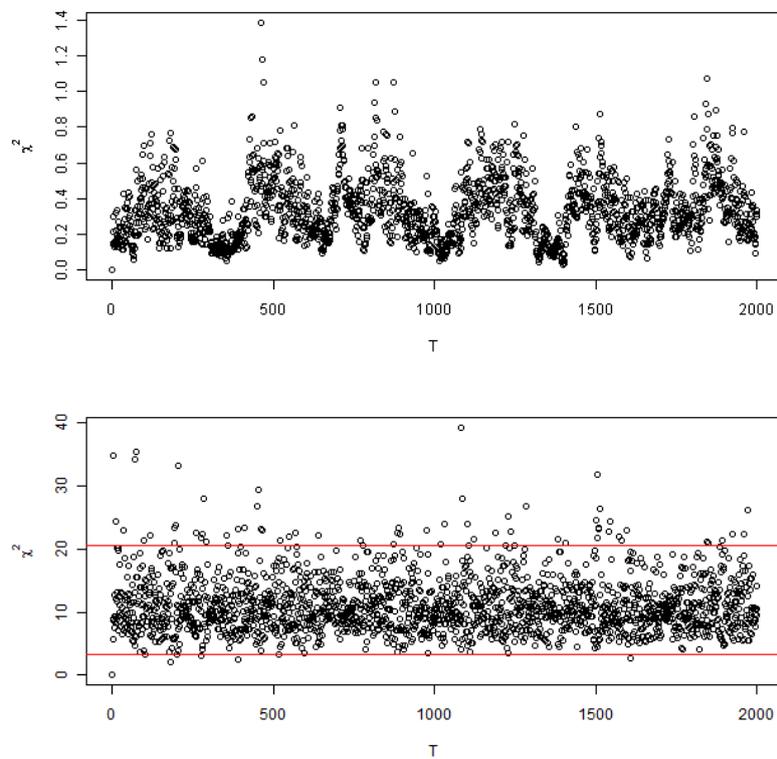


FIGURE 5.11 – Série temporelle de la forme quadratique (1.5) - Intervalle I_2 - Sans pondération de la covariance et avec pondération

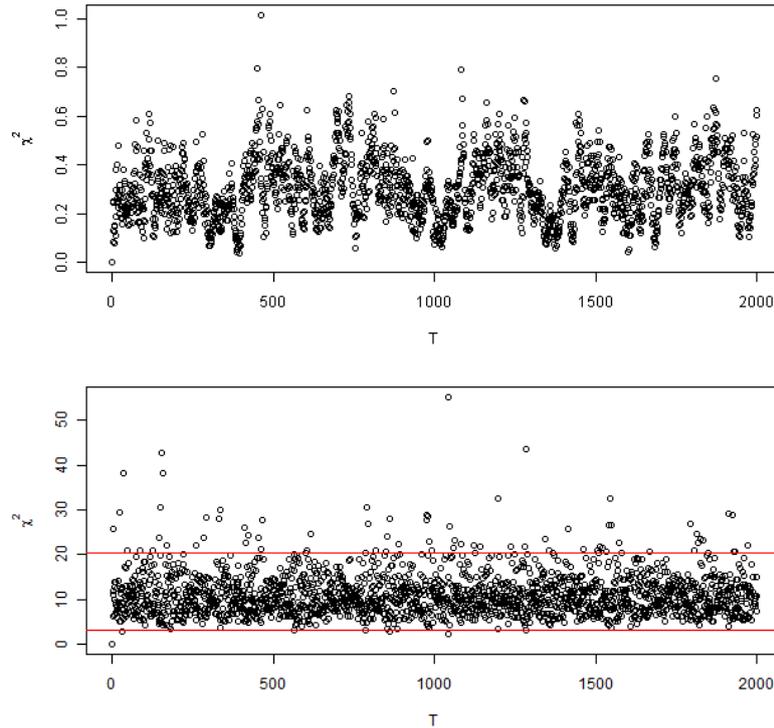


FIGURE 5.12 – Série temporelle de la forme quadratique (1.5) - Intervalle I_3 - Sans pondération de la covariance et avec pondération

5.3 Estimation des coefficients de prédiction temporels

Ainsi pour l'estimation des coefficients de prédiction temporels, le filtre EnKF conserve les paramètres fixés pour les bruits w_k et v_k et est appliquée la pondération de la matrice P_k^N pour diminuer l'inflation de la covariance au cours du temps d'assimilation des observations du signal externe s_k . Les coefficients de prédiction temporels $a_1(t), a_2(t), a_{10}(t)$ obtenus avec le filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire sont représentés sur les figures 5.16 à 5.15. Les reconstructions des coefficients $a_1(t), a_2(t), a_{10}(t)$ obtenus avec le filtre EnKF appliqué au modèle réduit quadratique représentés sur les figures 5.16 à 5.18. Les reconstructions de la relation de phase entre $a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont représentées sur les figures 5.15 et pour 5.15 pour le modèle réduit linéaire et quadratique. La RMSE entre les coefficients temporels de projection et de prédiction sont respectivement représentées sur les figures 5.19 et 5.20

5.4 Observations

Sur ce cas test, le filtre EnKF restitue fidèlement la dynamique temporelle des coefficients. L'erreur de reconstruction sur chaque coefficient est faible, aussi bien pour les premiers coefficients que pour les coefficients d'ordre plus élevé, dont la dynamique temporelle est plus complexe à approximer. L'amplitude des coefficients est respectée au cours du temps, le modèle réduit POD-Galerkin reste stable sur l'ensemble d'assimilation des données. La relation de phase des coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ est également reproduite. Il est cependant difficile de discerner une tendance sur l'erreur de reconstruction entre les coefficients de projection et de prédiction temporels en fonction de l'intervalle choisi.

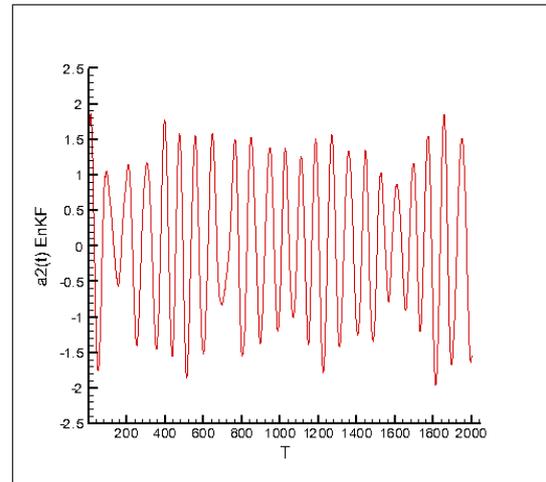
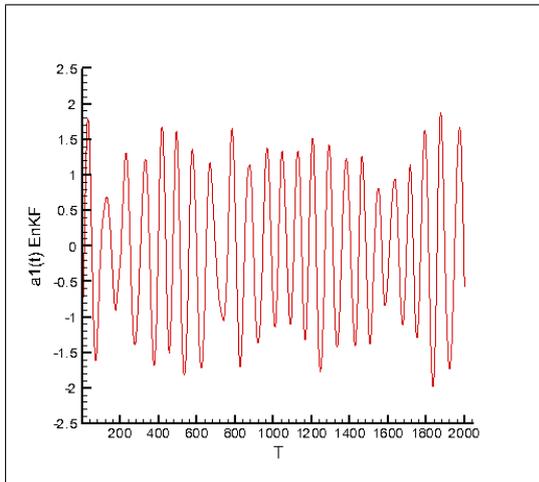


FIGURE 5.13 – Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF - Intervalle I_1 - Modèle réduit linéaire

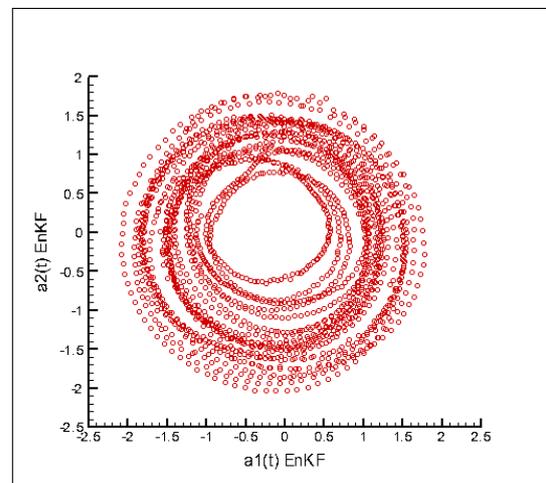
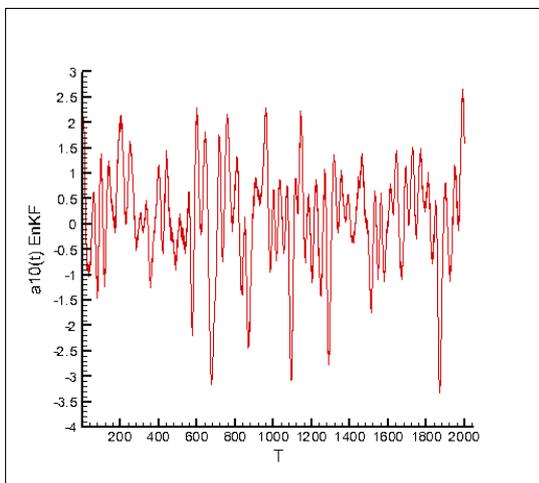


FIGURE 5.14 – Coefficients $a_{10}(t)$ EnKF
Modèle réduit linéaire

FIGURE 5.15 – Portrait de phase entre
 $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF - Intervalle I_1
Modèle réduit linéaire

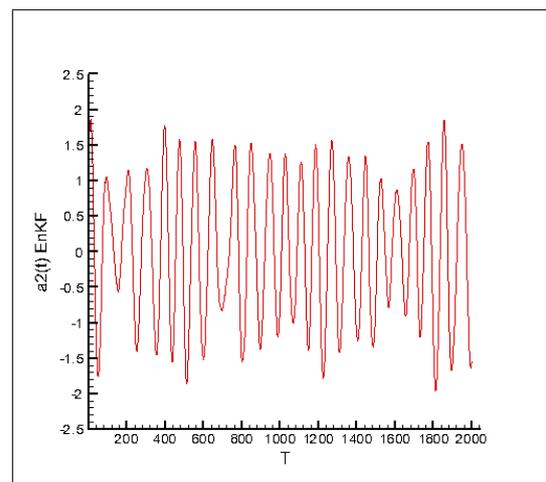
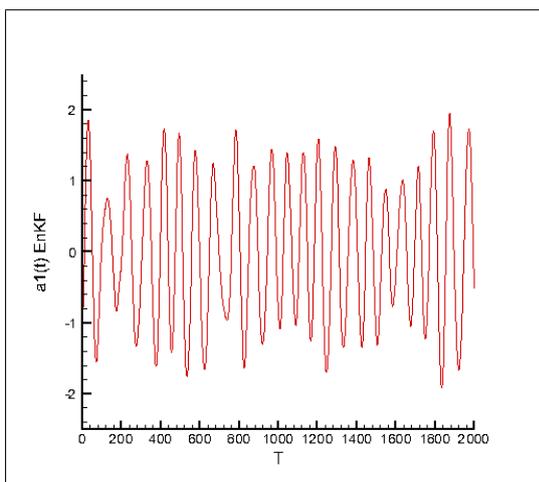


FIGURE 5.16 – Coefficients $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF Intervalle I_1 - Modèle réduit quadratique

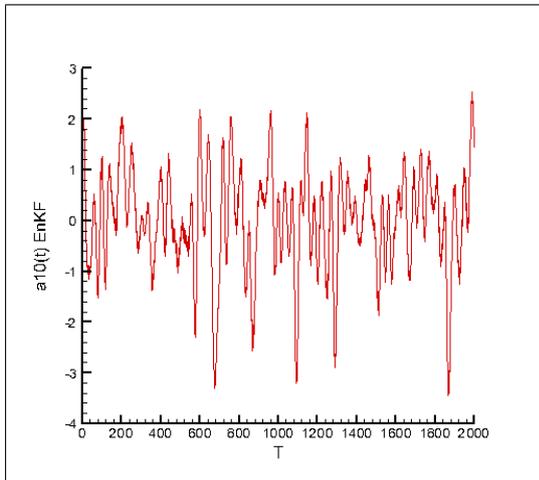


FIGURE 5.17 – Coefficients $a_{10}(t)$ EnKF
Intervalle I_1 - Modèle réduit quadratique

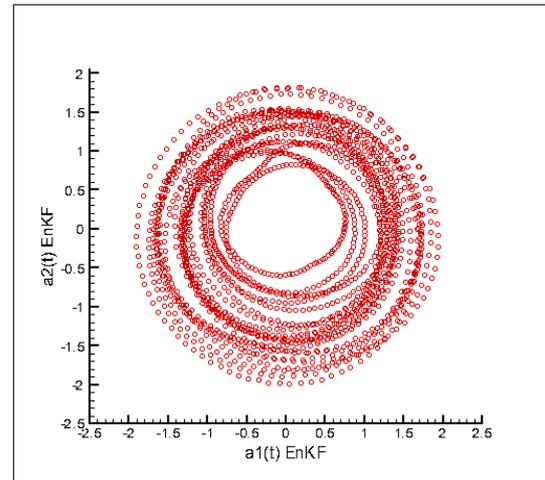


FIGURE 5.18 – Relation de phase entre
 $a_1(t)$ et $a_2(t)$ EnKF - Intervalle I_1
Modèle réduit quadratique

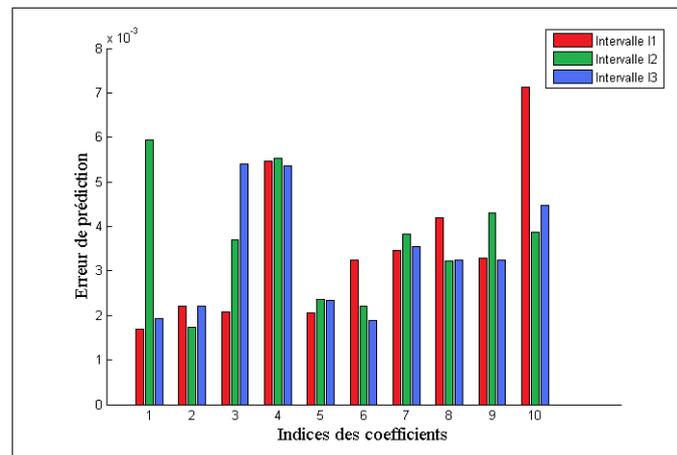


FIGURE 5.19 – RMSE sur chaque coefficient pour les intervalles I_1, I_2, I_3 - Modèle réduit linéaire

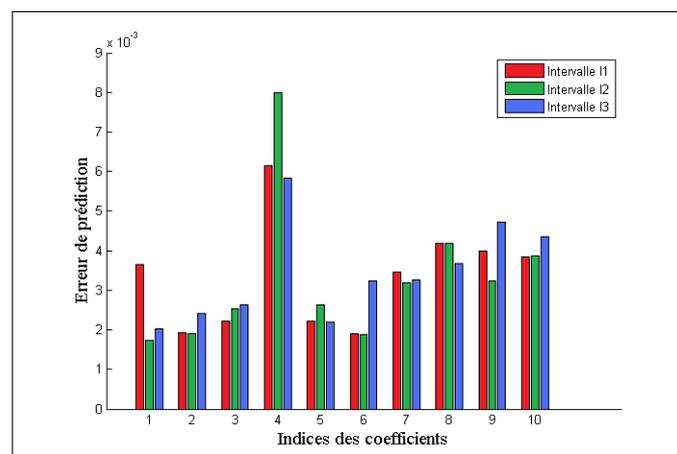


FIGURE 5.20 – RMSE sur chaque coefficient pour les intervalles I_1, I_2, I_3 - Modèle réduit quadratique

En effet, cette erreur est pratiquement identique pour les coefficients $a_2(t), a_7(t), a_8(t), a_9(t)$ pour les trois intervalles. Pour l'intervalle I_1 elle est la plus grande $a_1(t), a_3(t)$, pour l'intervalle I_2 elle est la plus importante pour a_6 et pour l'intervalle I_3 elle est maximale pour $a_4(t), a_{10}(t)$. Avec le modèle linéaire et le test du χ^2 on parvient à une reconstruction dont l'erreur est comprise entre 2.10^{-3} et 8.10^{-3} et est relativement homogène selon l'intervalle choisi. Il apparaît que malgré la correction basée sur la statistique du χ^2 , la reconstruction basée sur le modèle réduit quadratique conduit à une erreur comparable, sinon inférieure.

5.5 Reconstruction du champ de vitesse

On cherche maintenant à savoir si les coefficients de prédiction temporels, obtenus par résolution du système POD Galerkin avec l'EnKF et contrôle de la covariance, sont efficaces pour reconstruire les champs de vitesse $U(x,y,t)$ obtenus expérimentalement. Afin de quantifier la qualité de la reconstruction, l'erreur de reconstruction suivante est introduite :

$$\tilde{E}(t) = \int_{\Omega} (u(x,y,t) - \tilde{u}(x,y,t))^2 d\Omega$$

où $u(x,y,t)$ est le champ de référence obtenu expérimentalement. Le champ $\tilde{u}(x,y,t)$ est celui reconstruit soit en utilisant le signal $s_n(t_k)$ comme observations dans le filtre ENKF, soit en utilisant les coefficients de projection temporels issus de la POD. Les figures 5.24 à 5.29 représentent la reconstruction de $\|\vec{U}\|$ avec la POD et le filtre ENKF pour l'intervalle I_1 aux instants $T = 500$ et $T = 1500$. Les figures 5.21 à 5.23 représentent l'évolution temporelle de l'erreur \tilde{E} pour la POD et le filtre ENKF sur le modèle réduit linéaire et quadratique pour les différents intervalles I_1, I_2, I_3 sur l'ensemble du temps d'assimilation.

5.6 Observations

La précision obtenue sur la reconstruction des coefficients a_i par le filtre EnKF doit également permettre une bonne reconstruction de l'écoulement. Une comparaison entre la reconstruction de l'écoulement avec les coefficients issus de la POD et ceux issus du filtre EnKF avec observations externes montre que les principales structures de l'écoulement sont bien approximées dans le cas de l'utilisation de l'EnKF pour un nombre de coefficients donné (Figure 5.24 à Figure 5.29). Les champs de vecteurs vitesse de l'écoulement sont également bien reproduits. De plus, l'erreur de reconstruction de l'écoulement commise entre la POD et le filtre EnKF pour les différents intervalles reste faible au cours du temps d'assimilation des observations.

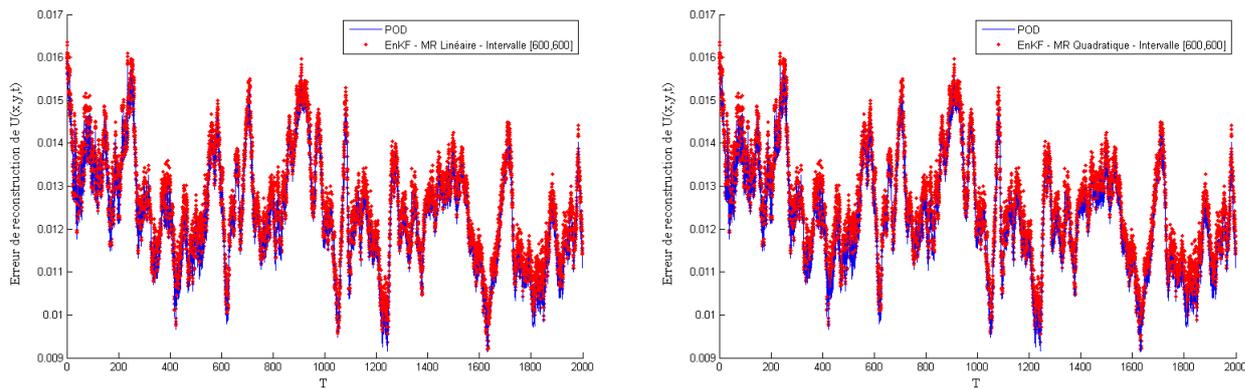


FIGURE 5.21 – Erreur de reconstruction E du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire et quadratique - Intervalle $[-600,600]$

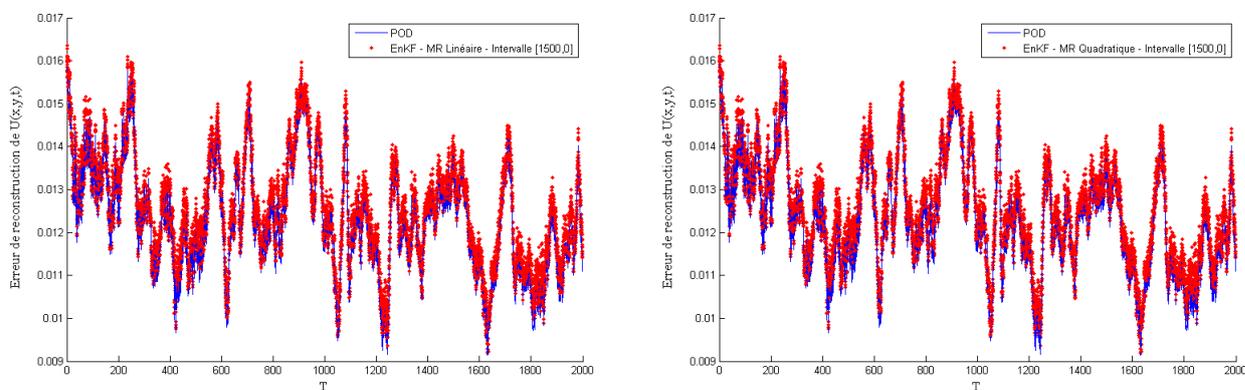


FIGURE 5.22 – Erreur de reconstruction E du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire et quadratique - Intervalle $[-1500,0]$

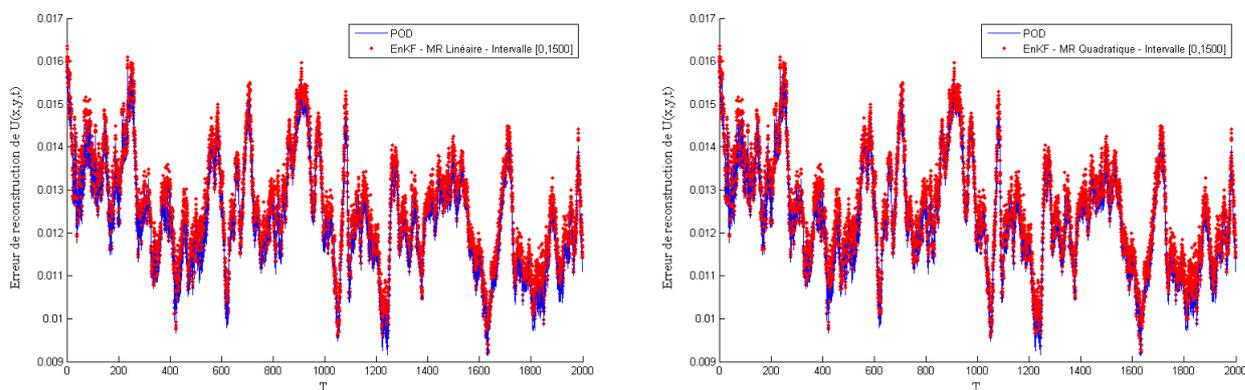


FIGURE 5.23 – Erreur de reconstruction E du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire et quadratique - Intervalle $[0,1500]$

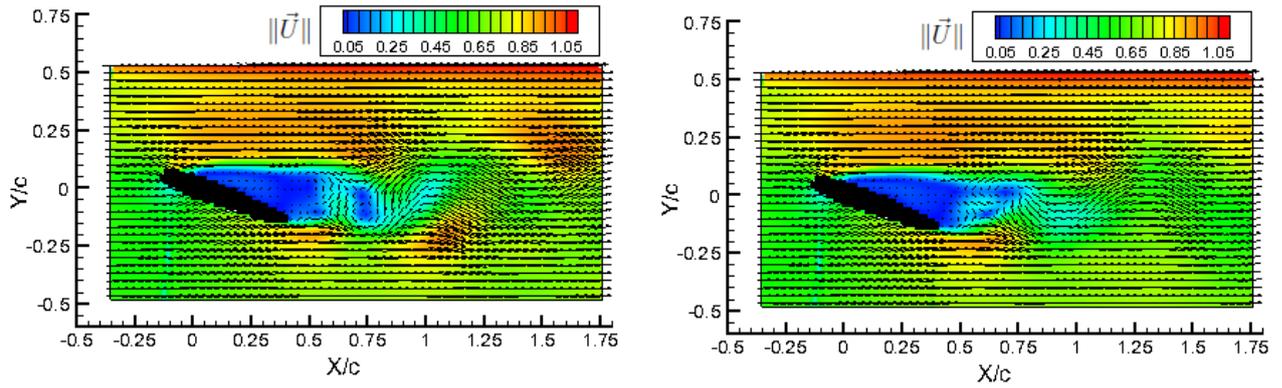


FIGURE 5.24 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD à $T=500$ et $T=1000$

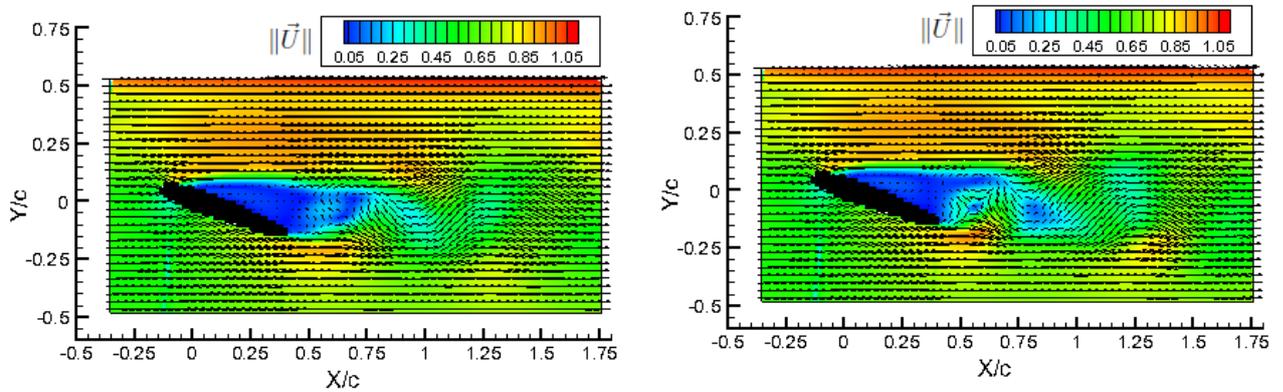


FIGURE 5.25 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir de la POD à $T=1500$ et $T=2000$

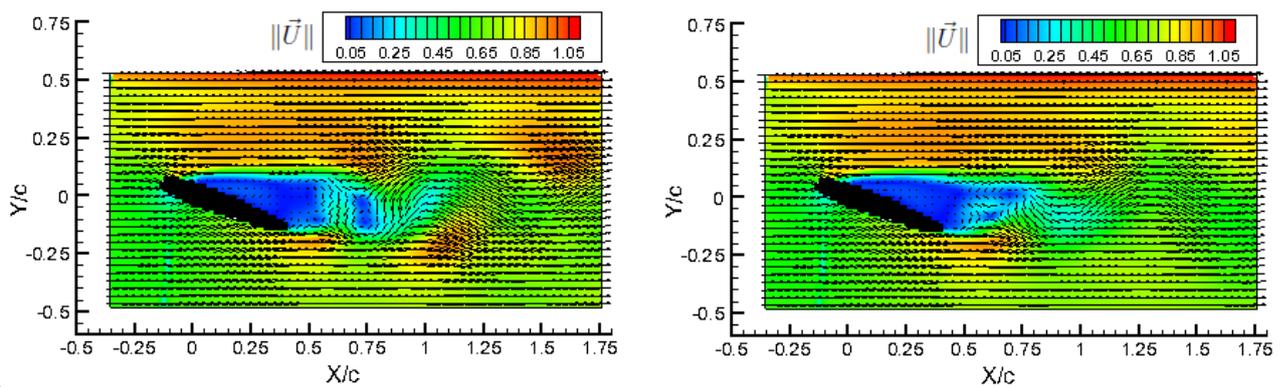


FIGURE 5.26 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire à $T=500$ et $T=1000$ - Intervalle I_1

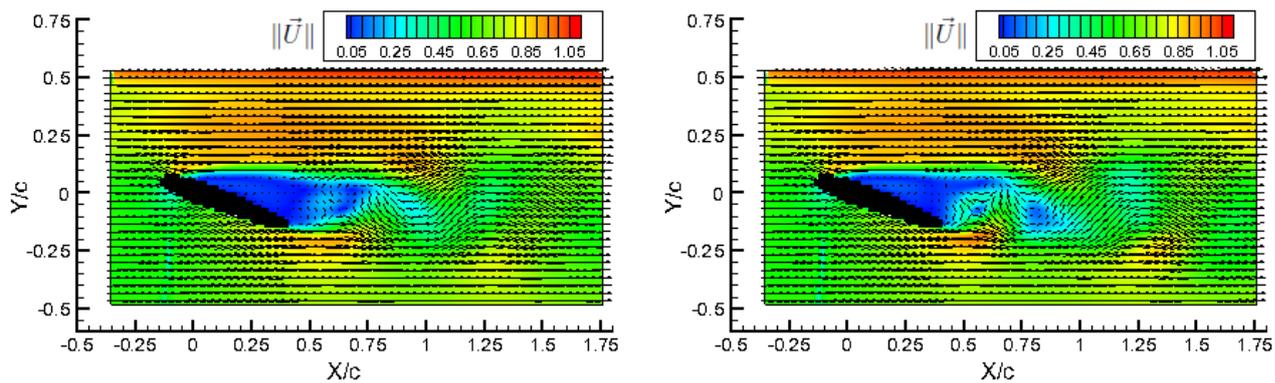


FIGURE 5.27 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit linéaire à $T=1500$ et $T=2000$ - Intervalle I_1

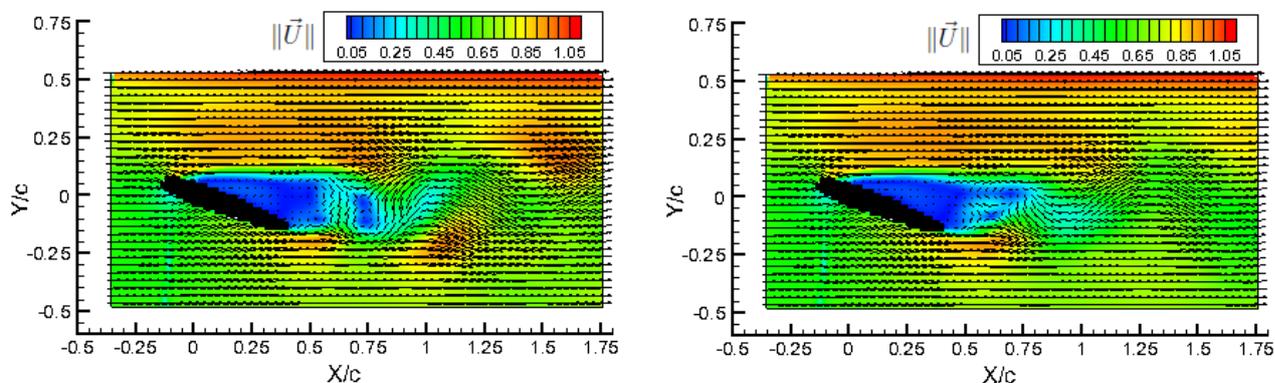


FIGURE 5.28 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit quadratique à $T=500$ et $T=1000$ - Intervalle I_1

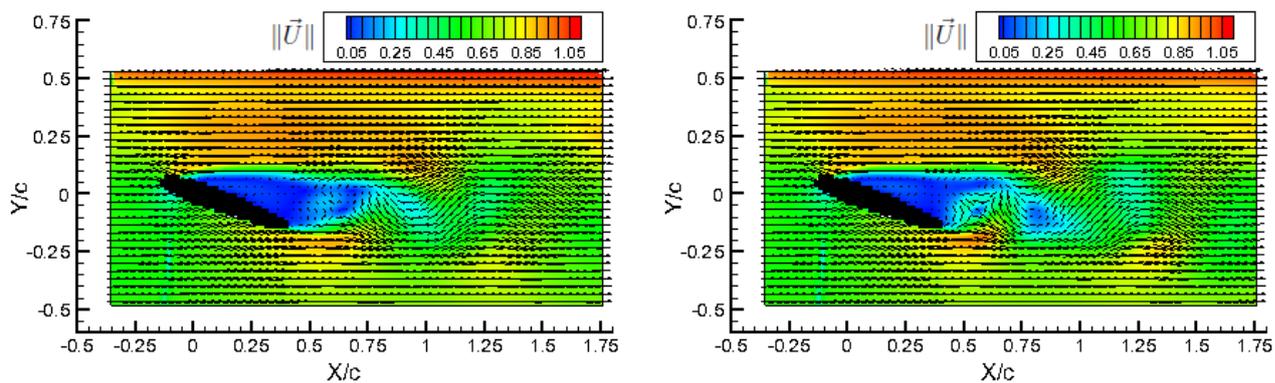


FIGURE 5.29 – Norme $\|\vec{U}\|$ de l'écoulement reconstruit à partir du filtre EnKF appliqué au modèle réduit quadratique à $T=1500$ et $T=2000$ - Intervalle I_1

6 Conclusion

Dans cette partie a été présentée la reconstruction des coefficients de prédiction temporels à l'aide du filtre de Kalman d'ensemble par l'utilisation d'observations indirectes obtenues par une sonde à film chaud. La méthode utilisée ici permet au modèle réduit basé sur la POD de restituer la dynamique d'un écoulement donné en utilisant des observations de nature différente des coefficients de projection temporels POD. La LSE n'a pas été utilisée ici en raison de la forte colinéarité entre les coefficients issus du film chaud. C'est pourquoi, l'opérateur de transition entre les coefficients de projection temporels issus de la POD et les coefficients issus du film chaud a été déterminé par PLSR de manière globale. Il a ensuite été utilisé à chaque itération k du filtre ENKF. L'utilisation de l'EnKF offre de meilleures performances que la version linéaire du filtre de Kalman, et permet de plus la définition d'une matrice de covariance empirique. Une correction de la covariance empirique de l'EnKF basée sur la covariance multiplicative a été appliquée au filtre à chaque cas afin que le filtre EnKF soit bien réglé. Cette correction apportée au filtre permet également de valider la méthode utilisée au niveau théorique.

Cependant, le bon fonctionnement de l'estimateur reste dépendant des réglages du filtre. Les niveaux de bruits et les corrections dépendent de la configuration d'étude. Ainsi, la variation d'un paramètre utilisé dans le filtre EnKF (nombre de coefficients POD, intervalle de sélection du signal s , nombre d'ensemble ..) ou une configuration d'écoulement différente (variation de l'angle d'incidence, du nombre de Reynolds, de la géométrie de l'obstacle) imposent aux niveaux de bruit du filtre de Kalman d'ensemble d'être réajustés. Afin de valider ces réglages, plusieurs simulations sont nécessaires, ce qui implique un temps d'évaluation long. Ceci est envisageable seulement dans le cas de vecteurs d'état de petite dimension. La procédure de validation croisée de la régression PLS, la validation par statistique du χ^2 impliquent des temps de validation long avant de pouvoir appliquer cette méthode sur un cas. La procédure de validation croisée est également coûteuse en temps de calcul. Pour ces raisons, les modèles réduits POD-Galerkin linéaire et quadratique ont été appliqués en utilisant peu de coefficients de prédiction temporels.

L'utilisation de la PLSR n'est pas exhaustif, on pourrait envisager l'utilisation d'autres méthodes de régression non linéaires telles que la *Ridge Regression* ou la *Kernel Based Regression*. Ces méthodes pourraient être également combinées directement dans la formulation de l'opérateur des observations d'un filtre de Kalman non linéaire. De plus, ces méthodes pourraient être étendues à l'utilisation de capteurs multiples situés à différents endroits dans le sillage ou sur le profil du NACA0012.

Conclusion générale et perspectives

Le travail réalisé au cours de cette thèse a concerné la calibration du modèle réduit POD-Galerkin par des méthodes d'inférence bayésiennes issues de l'assimilation séquentielle de données pour la reconstruction d'écoulements incompressibles complexes autour d'un profil NACA0012 à différents angles d'incidence et à différents nombres de Reynolds. Contrairement aux méthodes variationnelles utilisées pour le contrôle du modèle réduit POD-Galerkin, les approches d'inférences bayésiennes ne nécessitent pas la modification du modèle réduit POD-Galerkin par adjonction de termes et définition ensuite d'un problème d'optimisation sous contraintes. Elles sont basées sur l'utilisation d'un modèle à espace d'état qui lie le système dynamique utilisé à l'observation des variables d'états de ce système. Les données d'écoulement autour du profil NACA0012 ont été obtenues expérimentalement par PIV 2D-2C résolue en temps sur 2048 pas de temps. Les bases de snapshots utilisées ont été ainsi acquises sur une grande échelle temporelle, ce qui a permis de tester la robustesse des méthodes d'inférence bayésiennes sur un large temps d'assimilation des données ainsi que sur différents régimes d'écoulement.

Si les équations d'états du modèle à espace d'état sont les équations de Navier-Stokes, le coût de la modélisation numérique de la dynamique complète de l'écoulement (temps d'exécution et place mémoire) devient rapidement prohibitif. L'approche de modélisation d'ordre réduit considérée ici est basée sur la projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles, sur un sous-espace de faible dimension déterminé par décomposition orthogonale aux valeurs propres de l'écoulement. C'est pourquoi, afin de réduire ces coûts et de simplifier la dynamique complète des écoulements, des modèles réduits POD-Galerkin ont été utilisés comme équation d'état.

Ces modèles de dimensions réduites sont basés sur la POD qui permet à partir d'une série de snapshots d'extraire les évolutions spatio-temporelles prédominantes d'un écoulement ainsi qu'une réduction significative du nombre de degrés de liberté du modèle.

En effet, quelques dizaines de modes sont généralement suffisants pour capturer les phénomènes instationnaires fondamentaux gouvernant l'écoulement. Cependant, la POD converge lentement en raison de la dynamique complexe des écoulements. Ainsi, le nombre de coefficients de projections temporels nécessaire à une reconstruction de l'écoulement avec un critère RIC de 90% devient rapidement important. C'est pourquoi le modèle réduit POD-Galerkin linéaire est utilisé pour les cas où le RIC est de 80% et de 90%. Le nombre de modes varie entre 20 et 200 selon les cas. Le modèle réduit POD-Galerkin quadratique n'est utilisé que pour une dizaine de modes, ce qui correspond en général à un RIC de 70%. L'objectif était ensuite de réaliser l'inférence bayésienne sur ces modèles réduits en considérant trois cas de figures d'assimilation des observations. L'inférence bayésienne

sur les modèles réduits POD-Galerkin a été réalisée dans le cas où des observations sont disponibles à chaque pas de temps, dans des cas où des observations sont manquantes et dans des cas où les observations sont de nature physique différente de celle des variables d'états.

Pour commencer nous avons utilisé ces méthodes d'inférences bayésiennes avec des observations de même nature que les variables d'états et avec un vecteur d'observations disponible à chaque pas de temps. Les observations utilisées correspondent aux coefficients temporels de la POD de l'écoulement étudié. Le filtre de Kalman linéaire et les filtres EnKF et SR-EnKF, basés sur des méthodes de type Monte-Carlo, ont alors été appliqués sur le modèle réduit linéaire. Le filtre EnKF a ensuite été utilisé sur le modèle réduit POD-Galerkin quadratique. Ces méthodes stochastiques ont ainsi permis d'améliorer significativement la capacité du modèle réduit linéaire et quadratique à restituer la dynamique des coefficients POD ainsi que de représenter fidèlement les écoulements considérés. La difficulté principale de la méthode consiste à déterminer les paramètres intrinsèques des filtres, que sont les niveaux de bruit des équations d'états et de mesure et le nombre d'ensemble utilisé dans les filtres EnKF et SR-EnKF.

Dans une seconde partie, nous nous sommes intéressés à l'inférence bayésienne du modèle réduit POD-Galerkin dans le cas d'observations manquantes. L'objectif est de réduire les coûts de calcul en sélectionnant un nombre limité d'observations pour reconstruire l'état du système. À cet effet, une POD sous échantillonnée de l'écoulement est tout d'abord réalisée. L'algorithme EM est ensuite utilisé pour l'inférence sur le modèle réduit POD-Galerkin avec des observations manquantes. Cet algorithme est connu pour converger lentement, c'est pourquoi il a été appliqué au modèle POD-Galerkin linéaire sur un cas où le RIC est suffisamment élevé (80%) et correspondant à un nombre peu élevé de modes. Dans le cas quadratique, seule une dizaine de modes temporels a pu être utilisée. L'algorithme EM permet de reconstruire les coefficients de prédiction temporels de manière satisfaisante sous réserve de choisir un intervalle de sous-échantillonnage adéquat. En effet, les cas testés ont mis en évidence différents comportements de l'algorithme EM selon les sous-échantillonnages choisis, ce qui entraîne une variabilité des erreurs de reconstruction des modes temporels.

Au chapitre 5, nous avons mis au point une méthode permettant l'inférence du modèle réduit POD-Galerkin en utilisant le filtre EnKF avec des observations de nature physique différente des variables d'états utilisées au chapitre 4. Les données utilisées pour les observations proviennent d'un signal de tension issu d'une sonde d'anémométrie film chaud placée dans le sillage du NACA0012. L'application des méthodes d'assimilation séquentielle de données nécessite alors la définition d'un opérateur des observations H qui lie les observations aux équations d'état. Dans le cadre de l'estimation des coefficients en utilisant des observations de nature physique différente, il devient nécessaire d'utiliser un opérateur H non linéaire. Or le filtre de Kalman EnKF n'utilise que des opérateurs H linéaires. C'est pourquoi il a été défini un opérateur global entre le signal de tension et les coefficients de prédiction temporels à l'aide d'une méthode de régression linéaire. Pour prendre en compte la très forte corrélation entre les coefficients s_k , une régression PLS a été utilisée pour lier les coefficients de projection temporels et les signaux obtenus par film chaud, la LSE, équivalente à la méthode des moindres carrés, se montrant peu satisfaisante dans le cas de données fortement corrélées temporellement. L'utilisation de la PLSR permet d'estimer les coefficients de projection temporels en fonction de signaux corrélés. L'opérateur H ainsi défini est introduit dans le filtre EnKF. Les résultats obte-

nus montrent que les modèles réduits linéaire et quadratique sont efficacement calibrés, les relations de phases et les amplitudes sont également respectées. De plus, l'écoulement est reconstruit avec une erreur faible, comparable à l'erreur de reconstruction de la POD.

Les perspectives qu'offre ce travail sont variées, parmi lesquelles :

- La mise en œuvre des méthodes de filtrage lorsque l'espace d'état est de grande dimension devient problématique en raison de la manipulation de matrice de covariance de taille trop importante. Lorsque la taille des vecteurs d'états de la représentation réduite demeure importante, il est préférable d'utiliser des méthodes de réduction de la dimension du problème de filtrage associé. Une approche possible de réduction du problème résiderait dans l'analyse des directions stables et instables du système dynamique. Les filtre de Kalman de rangs réduits SEEK et SEIK sont basés sur cette approche et permettraient ainsi d'approximer la matrice de covariance du système dynamique par une matrice de rang réduit.
- L'étude de l'influence des niveaux de bruits contenu dans les équations d'état et de mesure pourrait être également approfondie par une spécification du bruit par la POD. Cela permettrait de plus de prendre en compte l'effet de la troncature des modes POD qui entraîne que les modes d'ordre élevé, associés de manière classique aux échelles dissipatives de l'écoulement, ne sont pas résolus.
- Concernant la capacité des filtres de Kalman à appréhender une relation fortement non linéaire entre l'état et la mesure du système, l'utilisation d'autres types de régression non linéaires telle que la PCR (*Partial Component Regression*) ou la Kernel Ridge Regression est envisageable. Il serait également intéressant de combiner ce type de régression non linéaire directement dans le formalisme du filtre de Kalman d'ensemble afin de déterminer le nombre d'ensemble nécessaire à l'approximation de l'état du système. De plus, l'étude faite au chapitre 5 pourrait être étendue au cas de l'utilisation de plusieurs capteurs de types différents.

Annexes

Sommaire

A	Équations du filtrage bayésien	160
B	Équations du filtre de Kalman	162
C	Convergence de l'algorithme EM	163
D	Régression dans le cas de données corrélées	164
D.1	Principe de la PLSR	164
D.2	Algorithmes utilisés pour la PLSR	165
D.3	Sélection du nombre de variables explicatives	166
D.4	Procédure pour la validation croisée	167
E	Définition : Consistance d'un estimateur d'état	168

A Équations du filtrage bayésien

On cherche à calculer de manière récursive la densité de probabilité $p(x_k|y_{1:k})$. On utilise pour cela les densités suivantes :

Le noyau de transition $p(x_k|x_{k-1})$ issu de l'équation de la dynamique de l'état à estimer :

$$p(x_k|x_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x_k - f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})) p(w_{k-1}) dw_{k-1} \quad (\text{A.1})$$

La vraisemblance $p(y_k|x_k)$ obtenue à partir de l'équation de mesure :

$$p(y_k|x_k) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y_k - h_k(x_k) - v_k) p(v_k) dv_k \quad (\text{A.2})$$

Le théorème de Bayes permet d'écrire $p(x_k|x_{k-1})$ sous la forme :

$$p(x_k|x_{k-1}) = \frac{p(y_{1:k}|x_k)p(x_k)}{p(y_{1:k})} \quad (\text{A.3})$$

Sachant que $y_{1:k} = \{y_{1:k-1}; y_k\}$ on a :

$$p(x_k|x_{k-1}) = \frac{p(y_k, y_{1:k-1}|x_k)p(x_k)}{p(y_k, y_{1:k-1})} \quad (\text{A.4})$$

Soit :

$$p(x_k|x_{k-1}) = \frac{p(y_k|y_{1:k-1}, x_k)p(y_{1:k-1}|x_k)p(x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})p(y_{1:k-1})} \quad (\text{A.5})$$

Le théorème de Bayes appliqué au développement de l'expression $p(y_{1:k-1}, x_k)$ et l'indépendance mutuelle des mesures permettent d'écrire :

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})p(y_{1:k-1})p(x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})p(y_{1:k-1})p(x_k)} \quad (\text{A.6})$$

Cette expression se simplifie comme suit :

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})} \quad (\text{A.7})$$

Afin de calculer le dénominateur $p(y_k|y_{1:k-1})$ de cette fraction, on considère maintenant la probabilité conjointe conditionnelle suivante : $p(y_k, x_k|y_{1:k-1})$. Le calcul de cette dernière s'effectue comme suit :

$$p(y_k, x_k|y_{1:k-1}) = p(y_k|x_k, y_{1:k-1})p(x_k|y_{1:k-1}) \quad (\text{A.8})$$

L'hypothèse d'indépendance mutuelle des mesures permet de simplifier cette expression comme suit :

$$p(y_k, x_k|y_{1:k-1}) = p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1}) \quad (\text{A.9})$$

En intégrant par rapport à x_k , il vient :

$$p(y_k|y_{0:k-1}) = \int_{\mathbb{R}} p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})dx_k \quad (\text{A.10})$$

Cette expression, insérée dans A.7 permet d'aboutir à :

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(x_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{\int_{\mathbb{R}} p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})} dx_k \quad (\text{A.11})$$

Deux cas sont alors à distinguer :

- Le vecteur aléatoire X est statique, c'est-à-dire que $x_j = x_k \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$. Dans ce cas, en remplaçant l'intégrale par une somme discrète, A.11 n'est autre que la formule de mise à jour des poids associés à des modes dans les approches multi-modèles.
- Le vecteur aléatoire X_k est dynamique, auquel cas il est nécessaire d'exprimer $p(x_k|y_{1:k-1})$ en fonction de $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$ et de $p(x_k|x_{k-1})$

Pour ce faire, on considère la densité conjointe des états aux instants k et $k-1$, conditionnellement à $y_{1:k-1}$:

$$p(x_k, x_{k-1}|y_{1:k-1}) = p(x_k|x_{k-1}, y_{1:k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \quad (\text{A.12})$$

L'état physique du processus est indépendant des relevés de mesures effectués, cette expression se simplifie comme suit :

$$p(x_k, x_{k-1}|y_{1:k-1}) = p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \quad (\text{A.13})$$

Intégrée par rapport à x_{k-1} cette expression donne au final :

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathbb{R}} p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})dx_{k-1} \quad (\text{A.14})$$

Les équations A.13 et A.14 constituent les équations du filtrage bayésien optimal.

B Équations du filtre de Kalman

On considère l'équation bayésienne de correction donnant de la formule d'estimation. Selon les hypothèses faites sur le filtre de Kalman, la densité de probabilité de prédiction et de fonction de vraisemblance sont des distributions normales multivariées, définies par :

- $p(x_k | y_{1:k-1}) = |2\pi \Sigma_{k|k-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(x_k - x_{k|k-1}^f)^t \Sigma_{k|k-1}^{-1} (x_k - x_{k|k-1}^f)]$
- $p(y_k | x_k) = |2\pi R_k|^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(y_k - H_k x_k)^t R_k^{-1} (y_k - H_k x_k)]$

La loi normale est conjuguée naturelle donc la densité *a posteriori* est également gaussienne, de moyenne $x_{k|k}^f$ et de covariance $\Sigma_{k|k}$ à déterminer.

$$p(x_k | y_{1:k}) = |2\pi \Sigma_{k|k}|^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(x_k - x_{k|k}^f)^t \Sigma_{k|k}^{-1} (x_k - x_{k|k}^f)] \quad (\text{B.1})$$

En appliquant la formule de correction et en prenant le logarithme :

$$(x_k - x_{k|k}^f)^t \Sigma_{k|k}^{-1} (x_k - x_{k|k}^f) = (x_k - x_{k|k-1}^f)^t \Sigma_{k|k-1}^{-1} (x_k - x_{k|k-1}^f) + (y_k - H_k x_k)^t R_k^{-1} (y_k - H_k x_k) + C(y_k) \quad (\text{B.2})$$

où C est une fonction de y_k indépendante de x_k . On obtient donc une forme quadratique en x_k . En différenciant une fois par rapport à x_k on obtient :

$$\Sigma_{k|k}^{-1} (x_k - x_{k|k}^f) = \Sigma_{k|k-1}^{-1} (x_k - x_{k|k-1}^f) - H_k^t R_k^{-1} (y_k - H_k x_k) \quad (\text{B.3})$$

En différenciant à nouveau on a :

$$\Sigma_{k|k}^{-1} = \Sigma_{k|k-1}^{-1} + H_k^t R_k^{-1} H_k \quad (\text{B.4})$$

En réinjectant cette expression dans l'équation précédente, on obtient donc :

$$\Sigma_{k|k}^{-1} x_{k|k}^f = \Sigma_{k|k-1}^{-1} x_{k|k-1}^f + H_k^t R_k^{-1} H_k y_k \quad (\text{B.5})$$

Les équations B.4 et B.5 sont les équations d'estimation du filtre de Kalman sous la forme dite du filtre d'information. Le vecteur d'information est

$$y_{k|k}^f = \Sigma_{k|k-1}^{-1} x_{k|k-1}^f = y_{k|k-1}^f + H_k^t R_k^{-1} H_k y_k \quad (\text{B.6})$$

et l'incertitude sur ce vecteur est mesurée par la matrice

$$Y_{k|k} = \Sigma_{k|k}^{-1} = Y_{k|k-1} + H^t R^{-1} H \quad (\text{B.7})$$

D'après l'équation B.4, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $\Sigma_{k|k}$ est donnée par :

$$\Sigma_{k|k} = [\Sigma_{k|k-1}^{-1} + H_k^t R^{-1} H_k]^{-1} \quad (\text{B.8})$$

On obtient, en utilisant la formule d'inversion matricielle classique :

$$\Sigma_{k|k} = \Sigma_{k|k-1} - \Sigma_{k|k-1} H^t (H_k \Sigma_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1} H_t \Sigma_{k|k-1} \quad (\text{B.9})$$

Ce qui donne $\Sigma_{k|k} = \Sigma_{k|k-1} K_k S_k K_k^t$ avec $S_k = H_k^t + R_k)^{-1} H_t$ et $K_k = \Sigma_{k|k-1} H_k^t S_k^{-1}$. L'estimée, d'après l'équation B.5 est obtenue par :

$$x_{k|k}^f = \Sigma_{k|k} \Sigma_{k|k-1}^{-1} x_{k|k-1}^f + \Sigma_{k|k} H_k^t R_k^{-1} y_k$$

$$x_{k|k}^f = \Sigma_{k|k} \Sigma_{k|k-1}^{-1} x_{k|k-1}^f + \Sigma_{k|k} H_k^t R_k^{-1} (y_k - H_k x_{k|k-1}^t) + \Sigma_{k|k} H_k^t R_k^{-1} H_k x_{k|k-1}^f$$

$$x_{k|k}^f = \Sigma_{k|k} (\Sigma_{k|k-1}^{-1} + H_k^t R_k^{-1} H_k) x_{k|k-1}^f + \Sigma_{k|k} H_k^t R_k^{-1} (y_k - H_k x_{k|k-1}^f)$$

Or $\Sigma_{k|k} = [\Sigma_{k|k-1}^{-1} + H_k^t R_k^{-1} H_k]^{-1}$ et $\Sigma_{k|k} H_k^t R_k^{-1} = K_k$ On obtient donc l'équation suivant :

$$x_{k|k}^f = x_{k|k-1}^f + K_k \nu_k$$

C Convergence de l'algorithme EM

La vraisemblance croît à chaque itération de l'algorithme EM, c'est-à-dire :

$$L(\hat{\theta}_{k+1}) > L(\hat{\theta}_k) \quad (\text{C.1})$$

Notons $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_T\}$ et $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_T\}$. On a alors :

$$Q(\theta; \hat{\theta}_k) = \mathbb{E}[\ln(p_\theta(y_1, \dots, y_T, x_1, \dots, x_T)) | y_1, \dots, y_T; \theta_k] \quad (\text{C.2})$$

$$Q(\theta; \hat{\theta}_k) = \int \log(p(\vec{x}, \vec{y}; \theta)) p(\vec{x} | \vec{y}; \hat{\theta}_k) d\vec{x} \quad (\text{C.3})$$

puis :

$$Q(\theta; \hat{\theta}_k) - Q(\hat{\theta}_k; \hat{\theta}_k) = \int \log\left(\frac{p(\vec{x}, \vec{y}; \theta)}{p(\vec{x}, \vec{y}; \hat{\theta}_k)}\right) p(\vec{x} | \vec{y}; \hat{\theta}_k) d\vec{x} \quad (\text{C.4})$$

avec l'inégalité de Jensen on obtient :

$$Q(\theta; \hat{\theta}_k) - Q(\hat{\theta}_k; \hat{\theta}_k) \leq \log\left(\int \frac{p(\vec{x}, \vec{y}; \theta)}{p(\vec{x}, \vec{y}; \hat{\theta}_k)} p(\vec{x} | \vec{y}; \hat{\theta}_k) d\vec{x}\right) \quad (\text{C.5})$$

$$Q(\theta; \hat{\theta}_k) - Q(\hat{\theta}_k; \hat{\theta}_k) \leq \log \int \frac{p(\vec{x}, \vec{y}; \theta)}{p(\vec{x}, \vec{y}; \hat{\theta}_k)} d\vec{x} \quad (\text{C.6})$$

$$Q(\theta; \hat{\theta}_k) - Q(\hat{\theta}_k; \hat{\theta}_k) \leq \log \frac{\int p(\vec{x}, \vec{y}; \theta) d\vec{x}}{p(\vec{y}; \hat{\theta}_k)} \quad (\text{C.7})$$

$$Q(\theta; \hat{\theta}_k) - Q(\hat{\theta}_k; \hat{\theta}_k) \leq \log(p(\vec{y}; \theta)) - \log(p(\vec{y}; \hat{\theta}_k)) \quad (\text{C.8})$$

On a donc $L(\theta) \geq L(\hat{\theta}_k)$ en particulier pour $\hat{\theta}_{k+1} = \arg \max(Q(\theta; \hat{\theta}_k))$

D Régression dans le cas de données corrélées

Le modèle de régression utilisé pour déterminer l'opérateur des observations entre les coefficients de projection temporels a_k issus de la POD et les données s_k de la sonde à film chaud est de la forme suivante :

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (\text{D.1})$$

avec X fixé et $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$. L'estimateur $\hat{\beta}$ de β est le suivant :

$$\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2 (X^t X)^{-1}) \quad (\text{D.2})$$

Dans le cas où les régresseurs X sont fortement corrélés, ce problème est, d'un point de vue algébrique, mal posé et associé à une matrice mal conditionnée. En effet, la matrice $X^t X$ est pratiquement singulière et par conséquent $(X^t X)^{-1}$ prend des valeurs très grandes, ce qui conduit l'estimateur $\hat{\beta}$ à être numériquement instable. La régression linéaire multiple n'est donc pas adaptée lorsque les régresseurs X sont très fortement corrélés. Afin de remédier à ce problème, des méthodes de régression non linéaires, appelées méthodes factorielles de régression, telles que la PCR (*Principal Component Regression*) et la PLSR (*Partial Least Square Regression*) peuvent être utilisées. Basées sur l'Analyse en Composante Principale, ces méthodes permettent la prédiction d'un ensemble de variables dépendantes à partir d'un ensemble très grand nombre de variables explicatives qui peuvent être très fortement corrélées entre elles.

D.1 Principe de la PLSR

La PLS est une technique récente de régularisation basée sur la réduction de la dimensionnalité, proposée comme une alternative à la régression linéaire multiple en cas de forte multi-colinéarité des descripteurs ou lorsque le nombre de descripteurs est largement supérieur au nombre d'individus (Wold, 1981, 1985). La PLS généralise et combine les caractéristiques de l'analyse sur composantes principales et de la régression multiple pour modéliser une relation linéaire entre un ensemble de variables réponses Y et un ensemble de variables explicatives X . Le principe de la PLS est brièvement rappelé dans cette section.

La PLS est une méthode de régression linéaire de c variables réponses sur p variables explicatives toutes mesurées sur les mêmes n individus. Les matrices des observations, notées respectivement Y et X , de dimension $n \times c$ et $n \times p$ sont supposées centrées et réduites. La régression PLS produit des facteurs de scores comme des combinaisons linéaires des variables prédictives originelles de façon à ce qu'il n'y ait pas de corrélations entre les facteurs scores utilisés par le modèle de régression prédictive. Dans un premier temps, la régression PLS crée des composantes non corrélées qui sont des combinaisons linéaires des X avec des poids proportionnels à la covariance entre les variables explicatives et les variables de réponse. Ainsi, pour établir le modèle, la régression PLS produit une matrice de poids W de dimension $p \times c$ pour X telle que $T = XW$. Les colonnes de W sont des vecteurs de poids pour les colonnes de X produisant la matrice correspondante de facteurs de scores T de dimension $n \times c$. Ces poids sont calculés de manière à maximiser la covariance entre la réponse et les facteurs scores correspondants. Un modèle de régression

linéaire OLS (*Ordinary Least Square*) est ensuite utilisé pour la régression de Y sur T afin de produire Q tel que :

$$Y = TQ + E \quad (\text{D.3})$$

où Q sont les nouveaux coefficients de dimension $q \leq p$. Une fois les coefficients Q calculés, le modèle de régression est équivalent à $Y = XB + E$ où $B = WQ$:

$$Y = X(WQ) + E \quad (\text{D.4})$$

Une matrice supplémentaire nécessaire pour une description complète de la procédure de régression PLS est la matrice P des facteurs qui donne le modèle $X = TP + F$ où F est la partie non expliquée du score de X .

D.2 Algorithmes utilisés pour la PLSR

Plusieurs types d'algorithmes de régression PLS existent actuellement : NIPALS, SIMPLS, kernel PLS. L'algorithme qui est à l'origine de la régression PLS est l'algorithme NIPALS (*Nonlinear Estimation by Iterative Partial Least Squares*) (Wold, 1966). De par sa facilité d'implémentation et sa stabilité, cet algorithme est le plus utilisé. Il a été présenté pour la première fois par Herman et Wold sous le nom de NILES (*Nonlinear estimation by Iterative Least Squares*) et a été alors utilisé pour l'analyse en composantes principales. La version de NIPALS qui est actuellement le standard utilisé en régression PLS a cependant été développée par Wold (1975). Cet algorithme se présente sous deux formes, à savoir, la PLSR1 pour le cas où on a une seule variable de sortie, et la PLSR2 qui permet de prendre en compte le cas de données multivariées. L'algorithme NIPALS pour la PLSR n'offre cependant pas de critère d'optimisation global, c'est pourquoi il est nécessaire d'optimiser chaque composante PLSR séparément. Une modification de l'algorithme NIPALS pour la PLSR, appelée SIMPLS, par Jong and Ter Braak (1994) permet de déterminer une solution à partir d'un critère global. L'algorithme SIMPLS est celui utilisé dans la PLSR2 dans le cadre de ce travail.

L'algorithme de résolution classique PLSR2 (PLSR multivariée)

L'algorithme pour le calcul de la régression PLSR2 est présenté ci-dessous. Les variables latentes qui sont des combinaisons linéaires des variables d'origine sont calculées successivement jusqu'au nombre souhaité :

1. Définir initialement u égal à une colonne de la matrice X
2. Calcul et normalisation des poids w de chaque colonne de X .
3. Projections des objets t de X sur l'espace du vecteur w .
4. Calcul des poids q de chaque colonne de Y .
5. Projections des objets u de Y sur l'espace du vecteur q .
6. On calcule le vecteur p de contributions factorielles de X .
7. On garde tous les vecteurs t, u, p, w, q . On met les matrices X et Y égales aux résidus $X_{k-1} - t_k p_k^t$ et $Y_{k-1} - t_k q_k^t$ respectivement. L'algorithme est recommencé à l'étape 1 pour une nouvelle variable latente.

Algorithme 5 PLS multivariée

On pose X est supposée être de rang a
 $X_0 = X$ et $Y_0 = Y$

pour $k = 1, 2, \dots, a$ **faire**

$u_k =$ première colonne de Y_{k-1}

Répéter jusqu'à convergence de w_k

$$w_k = \frac{X_{k-1}^t u_k}{u_k^t u_k}$$

Normer w_k à 1

$$t_k = \frac{X_{k-1}^t w_k}{w_k^t w_k}$$

$$q_k = \frac{Y_{k-1}^t t_k}{t_k^t t_k}$$

$$u_k = \frac{Y_{k-1}^t q_k}{q_k^t q_k}$$

$$p_k = \frac{X_{k-1}^t t_k}{t_k^t t_k}$$

$$X_k = X_{k-1} - t_k p_k^t$$

$$Y_k = Y_{k-1} - t_k q_k^t$$

fin pour

D.3 Sélection du nombre de variables explicatives

L'objectif de l'utilisation de la PLSR comme méthode de régression est la construction d'un modèle de prédiction qui minimise les écarts par rapport à la prédiction pour de nouvelles données X en utilisant uniquement le jeu de données X . Or, les X contiennent du bruit et cette variabilité intrinsèque des X n'a pas de rapport avec la variance intéressante pour la description des phénomènes étudiés. C'est pourquoi, elle ne doit pas être incluse dans le modèle, sous peine de sur-ajustement ou sous-ajustement du modèle. Le sur-ajustement du modèle correspond à une augmentation de l'exactitude de la précision, mais une diminution pour les prédictions et le sous-ajustement correspond à un modèle avec un nombre de variables latentes inférieur à ce qui est nécessaire pour inclure toute la variabilité nécessaire pour minimiser les erreurs de prédiction. La régression PLS dépend donc fortement du nombre de variables latentes à inclure dans le modèle, ce qui implique un équilibre entre l'extraction de la variabilité des matrices et une bonne capacité prédictive. Plusieurs méthodes existent pour choisir le nombre de variables d'un modèle de régression et pour évaluer l'incertitude des modèles (Hoskudsson, 1996), (Zhang and Garcia-Munoz, 2009), (Faber, 2002) telles que la validation croisée (Martens and Naes, 1989), (Vandeginste et al., 1998), le jackknifing (Martens, 2000), (Anderssen et al., 2006) la bootstrapping (Wehrens et al., 2000) et le test des permutations (Eriksson et al., 2001), (Dijksterhuis and Heiser, 1995), (Anderson, 2001), (Wold, 1966). La méthode la plus utilisée est la validation croisée («cross-validation»), qui estime l'exactitude des prédictions pour des modèles avec un nombre croissant de variables latentes.

D.4 Procédure pour la validation croisée

Le principe de cette technique est de diviser les matrices X et Y plusieurs fois en deux parties. La première partie est utilisée pour construire un modèle particulier à partir des données restantes, et la seconde pour déterminer les erreurs de prédiction égales à la différence entre les données originelles et les données prédites par le modèle. Après avoir appliqué cette procédure à tous les échantillons, une valeur moyenne pour la somme des carrés des erreurs résiduelles de prédiction est calculée, appelée *PRESS* (*Prediction Sum of Squares*) qui estime la capacité prédictive du modèle à k composantes. On calcule ce critère à chaque ajout de nouvelles composantes dans le modèle. Les différentes étapes de la procédure pour la validation croisée sont décrites ci-dessous (Figure 5.30) :

Étape 1 : Les matrices X et Y sont partitionnées horizontalement en deux parties, dites d'entraînement et de validation. Le jeu de données d'entraînement X_1 est utilisé pour construire des modèles *PLSR* avec un nombre de variables latentes compris entre 1 et k . Après avoir enlevé un individu indicé 1 (soit une ligne) aux matrices Y et X , la matrice des coefficients du modèle construit avec les individus restants B_1 avec k vecteurs colonne de coefficients de régression pour des modèles avec entre 1 et k variables latentes.

Étape 2 : Le jeu de données de validation X_{p1} est ensuite utilisé pour la prédiction avec chacun des modèles afin d'établir une valeur prédite pour la variable réponse $\hat{y}_{1k} = X_{p1}.b$ pour chaque échantillon et chaque modèle.

Étapes 3-4 : La différence au carré entre les valeurs observées et les valeurs prédites est calculée et conservée pour chacun des modèles dont le nombre de variables latentes est compris entre 1 et k .

Étapes 5-6 : La procédure est répétée avec une partition différente des échantillons et répétée pour toutes les partitions possibles, jusqu'à ce que tous les objets aient servis pour la prédiction.

Étapes 7 : À la fin, le *PRESS* est déterminé comme la somme des carrés des erreurs de prédiction pour chaque modèle.

$$PRESS = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|E_{ik}\|^2 \quad (D.5)$$

Le modèle donnant le *PRESS* minimum est retenu.

On choisit donc un nombre de variables tel que le *PRESS* soit le plus petit possible. Le *PRESS* ne diminue pas forcément lorsqu'on rajoute des variables au modèle. En effet, il commence en général par baisser puis remonte après avoir atteint une valeur minimale pour un certain nombre de variables. C'est ce nombre minimal qui correspond au nombre de composantes à garder. À cause du grand nombre de modèles construits au cours de la validation-croisée, les calculs peuvent prendre beaucoup de temps et nécessiter beaucoup de mémoire de l'ordinateur.

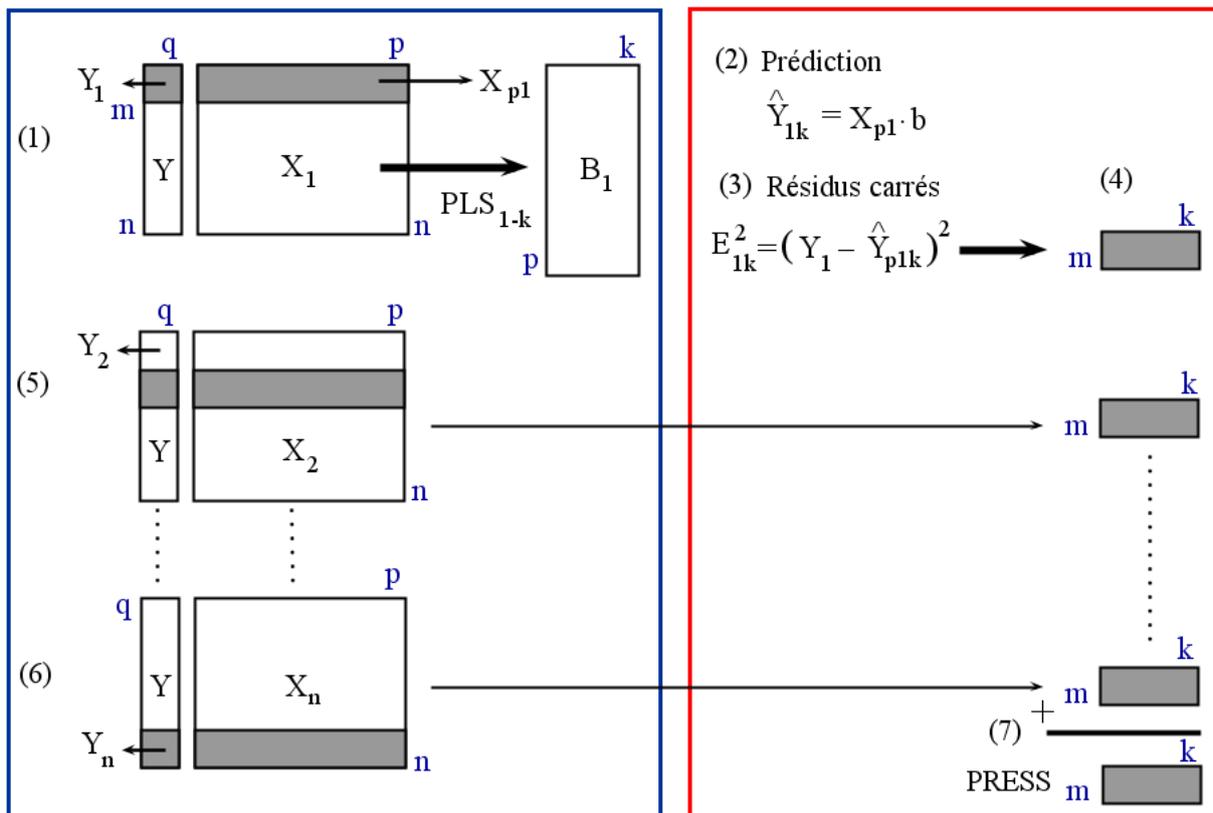


FIGURE 5.30 – Schéma général de la validation croisée. À gauche, en bleu, la partie de construction des modèles PLSR avec entre 1 et k variables latentes et l'obtention des coefficients b_k pour chacun. À droite, en rouge, la prédiction de l'échantillon non retenue pour la calibration et le calcul du $PRESS$.

E Définition : Consistance d'un estimateur d'état

Un estimateur d'état est dit consistant si ses erreurs satisfont les deux conditions aux équations suivantes :

$$\mathbb{E}[X - \bar{X}] = \bar{X} = 0$$

$$\mathbb{E}[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^t] = \bar{X}\bar{X}^t \leq P$$

Cela signifie que pour un nombre fini d'observations, l'erreur d'estimation doit être consistante avec les propriétés statistiques théoriques suivantes :

1. Être centrée en 0, les estimées ne sont pas biaisées.
2. Avoir une matrice de covariance plus grande que la MSE (Erreur Quadratique Moyenne) du système.

Bibliographie

- Adrian, R. (1977). On the role of conditional averages in turbulent theory. *In Turbulence in Liquids : Proceedings of the 4th Biennial Symposium on Turbulence in Liquids* (ed. G. Pattenon & J. Zakin), Princeton : Science Press :322–332.
- Adrian, R. (1979). Conditional eddies in isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 22 :2065–2070.
- Adrian, R. (2005). Twenty years of particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, vol. 39 (2) :159–169.
- Adrian, R. and Moin, P. (1998). Stochastic estimation of organized turbulent structure : homegeneous shear flow. *J. Fluid Mech*, 190 :531–559.
- Afanasiev, K. and Hinze, M. (2001). Adaptive control of a wake flow using proper orthogonal decomposition. in shape optimization and optimal design. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol. 216 :pp. 317–332.
- Akesson, B., Jorgensen, J., PouLSEn, N., and Jorgensen, S. (2007). A tool for kalman filter tuning. *17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering (ESCAPE17)*, Bucharest, Romania.
- Anderson, L. and Anderson, S. (1999). A monte carlo implementation of the nonlinear filtering problem to produce ensemble assimilations and forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, 127 :2741–2758.
- Anderson, M. (2001). Permutation tests for univariate or multivariate analysis of variance and regression. *Canadian journal of fisheries and aquatic sciences*, pages 626–639.
- Anderssen, E., Dyrstad, K., Westad, F., and Martens, H. (2006). Reducing over-optimism in variable selection by crossmodel validation. *Chemometrics and intelligent laboratory systems.*, pages 69–74.
- Andrews, A. (1968). A square root formulation of the kalman covariance equations. *AIAA J.*, 6 :1165–1166.
- Andrieu, C. and Godsill, S. (2000). A particle filter for model based audio separation. *In Int. Work. on ICA and Blind Signal Separation (ICA 2000)*; Helsinki, Finland.
- Arnaud, E., M. E. and Cernuschi-Frias, B. (2005). Conditional filters for image sequence based tracking-application to point tracking. *IEEE Trans. on Image Processing*, 14(1) :63–79.
- Arnoldi, W. (1951). The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math*, 9 :17–29.
- Aubry, N. (1991). On the hidden beauty of the proper orthogonal decompositon. *Theoret. Comput. Fluid Dyn*, 2 :339–352.

- Aubry, N., Holmes, P., Lumley, J., and Stone, E. (1988). The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 192 :125–143.
- Avendano-Valencia, L., Avendano, L., Ferrero, J., and Castellanos-Dominguez, G. (1967). Improvement of an extended kalman filter power line interference suppressor for ecg signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 690–698.
- Bagheri, S., Hoepffner, J., Schmid, P., and Henningson, D. (2009). Input-output analysis and control design applied to a linear model of spatially developing flows. *Appl. Mech*, Rev. 62 (2).
- Bar-Shalom, Y., Li, X., and Kirubarajan, T. (2002). Estimation with applications to tracking and navigation. *John Wiley & Sons, NY, USA*.
- Bennett, A. F., Chua, B. S., and Leslie, L. M. (1996). Generalized inversion of a global numerical weather prediction model. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 60 :165–178.
- Bergmann, M. (2004). *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy.
- Bergmann, M., Bruneau, C., and Iollo, A. (2009). Enablers for robust pod models. *J. Comput. Phys.*, 228 (2) :516–538.
- Bergmann, M. and Cordier, L. (2008). Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust region methods and pod reduced-order models. *J. Comp. Phys*, 227 :7813–7840.
- Bergmann, M., Cordier, L., and Brancher (2005). Optimal rotary control of the cylinder wake using pod reduced order model. *Phys. Fluids*, 3 :1–21.
- Bertino, L., Evensen, G., and Wackernagel, H. (2003a). Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, 71 :223–241.
- Bertino, L., Evensen, G., and Wackernagel, H. (2003b). Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, 71-2 :223–241.
- Bilmes, A. (1999). A gentle tutorial of the em algorithm and its application to parameter estimation for gaussian mixture and hidden markov models. *International Computer Science Institute*.
- Bishop, C., Etherton, B., and Majumdar, S. (2001). Adaptive sampling with the ensemble kalman filter. part i : Theoretical aspects. *Mon. Wea. Rev.*, 129 :420–436.
- Bonnet, J., Cole, D., Delville, J., Glauser, M., and Ukeiley, L. (1994). Stochastic estimation and proper orthogonal decomposition : complementary techniques for identifying structure. *Experiments in Fluids*, 17 :307–314.
- Borée, J. (2003). Extended proper orthogonal decomposition : a tool to analyse correlated events in turbulent flows. *Exp. in Fluids*, 35 :188–192.
- Bourguet, R. (2008). *Analyse physique et modélisation d'écoulements turbulents instationnaires compressibles autour de surfaces portantes par approches statistiques haute-fidélité et de dimension réduite dans le contexte de l'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.
- Bouttier, F. and Courtier, P. (1999). Data assimilation concepts and methods. *Meteorological Training Course Lecture Series (ECMWF)*, pages 1–59.

-
- Brasseur, P., Penduff, T., Verron, J., and Barnier, B. (2001). Assimilation of altimetric and sea-surface temperature data in a high-resolution south atlantic ocean model with a reduced-order kalman filter. *J. Mar. Systems*, 22(4) :269–294.
- Breteton, G. (1992). Stochastic estimation as a statistical tool for approximating turbulent conditional averages. *Physics of Fluids*, (A)4 :2046–2054.
- Bréhard, T. and Le Cadre, J. (2006). Closed-form posterior cramer-rao bound for bearing-only tracking. *IEEE Transactions Aerospace Elec. Systems*.
- Briers, M. and Doucet, A. (2004). Smoothing algorithms for state-space models. *Rapport technique, Signal Processing Laboratory, Department of Engineering, University of Cambridge*.
- Budgell, W. (1986). Nonlinear data assimilation for shallow water equations in branched channels. *J. Geophys. Res.*, 10 :633–644.
- Buffoni, M., Camarri, S., Iollo, A., and Salvetti, M. (2006). Low-dimensional modelling of a confined three dimensional wake flow. *J. Fluid Mech*, 569 :141–150.
- Buyamin, S. and Finch, J. (2007). Tuning extended kalman filter for induction motor drives using simulated annealing. *Modeling, Identification and Control Conference, Innsbruck*.
- Campillo, F. (2006). Filtrage particulaire et modèle de markov cachés. *Cours Master Recherche, Université du Sud-Toulon-Var*.
- Cane, M., Kalplan, A., Miller, A., Tang, R., Hackert, B., E.C, and Busalacchi, A. (1996). Mapping tropical pacific sea level : Data assimilation via a reduced state space kalman filter. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 101 :C10, 22,599–22,617.
- Casarin, R. (2004). Bayesian monte carlo filtering for stochastic volatility models. *Cahiers de CEREMADE*, N. 0415.
- Cazemier, W., Verstappen, R., and Veldman, A. (1998). Proper orthogonal decomposition and low-dimensional models for driven cavity flows. *Phys. Fluids*, 10(7) :1685–1699.
- Cordier, L., and Bergmann, M. (2008). Proper orthogonal decomposition : an overview. *In Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*.
- Cordier, L., Abou El Madj, B., and Favier, J. (2009). Calibration of pod reduced-order models by tikhonov regularization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, pages 269–296.
- Cornillon, P. and Matzner-Lober, E. (2011). *Régression avec R*. Springer.
- Couplet, M. (2005). *Modélisation POD-Galerkine réduite pour le contrôle des écoulements instationnaires*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Paris 13.
- Couplet, M., Badevant, C., and Sagaut, P. (2005). Calibrated reduced-order pod-galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, Vol. 207 :No. 1, p. 192–220.
- Daget, N. (2007). Revue des méthodes d’assimilation. Technical report, European Centre for Research and Advanced Training in Scientific Computation.
- Daley, R. (1991). *Atmospheric data analysis*. Cambridge University Press.
- Delville, J., Ukeiley, L., Cordier, L., Bonnet, J., and Glauser, M. (1999). Examination of large-scale structures in a turbulent plane mixing layer. part 1. proper orthogonal decomposition. *J. Fluid Mech*, 391 :91–122.

- Dempster, A., Laird, N., and Rubin, D. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *J. Royal Statistical Soc., Series B (Methodological)*, 39(1) :1–38.
- Digalakis, V., Rohlicek, J., and Ostendorf, M. (1993). Ml estimation of a stochastic linear system with the em algorithm and its application to speech recognition. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 1(4) :431–442.
- Dijksterhuis, G. and Heiser, W. (1995). The role of permutation tests in exploratory multivariate data analysis. *Food quality and preference*, 6 :263–270.
- Doucet, A., de Freitas, N., and Gordon, N. (2001). Sequential monte carlo methods in practice. *Statistics for Engineering and Information Science*, Springer Verlag, New York.
- Doucet, A., Godsill, S., and Andrieu, C. (1999.). On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statist. Comput*, 10(3) :197–208.
- Eriksson, L., Johansson, E., Kettaneh-Wold, N., and Wold, S. (2001). Multi- and megavariate data analysis. part i – basic principles and applications. *Umetrics AB, Umea, Sweden*, pages 1–527.
- Evensen, G. (1992). Using the extended kalman filter with a multilayer quasi-geostrophic ocean model. *Geophys. Res.*, 97(C11) :17905–17924.
- Evensen, G. (1994). Sequential data assimilation with nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical research*, 99(C5) :10,143–10,162.
- Evensen, G. (2006). Data assimilation. the ensemble kalman filter. *Springer, Berlin*.
- Evensen, G. (November 2003). Ensemble kalman filter : theoretical formulation and practical implementations. *Ocean Dynamics*, 53(4) :343–367.
- Faber, N. (2002). Uncertainty estimation for multivariate regression coefficients. *Chemo-metrics and intelligent laboratory systems.*, 64(169-179).
- Fahl, M. (2000). *Trust-region methods for flow control based on reduced order modelling*. PhD thesis, Trier University. <http://www.mathematik.uni-trier.de:8080/fahl/>.
- Foucher, F. and Mazellier, N. (2011). Separation between coherent and turbulent fluctuations : what can we learn from the empirical mode decomposition? *Experiments in Fluids*, 51 :Number 2, 527–541.
- Galletti, B., Bottaro, A., Bruneau, C., and Iollo, A. (2005). Accurate model reduction of transient flows. *R.R. INRIA 5676*, 141-148.
- Galletti, B., Bottaro, A., Bruneau, C., and Iollo, A. (2006). Accurate model reduction of transient and forced flows. *Europ. J. Mech. / B Fluids*, 26 :354–366.
- Galletti, B., Bruneau, C., Zannetti, L., and Iollo, A. (2004). Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *J. Fluid Mech*, 503 :161–170.
- Gapentine, A. (1997). Managing multicollinearity. *J. Mark. Res.*, 9 :11–21.
- Gauthier, P., Courtier, P., and Moll, P. (1993). Assimilation of simulated wind lidar data with a kalman filter. *Monthly weather review*, 121 :1803–1820.
- Gillies, E. (1998). Low-dimensional control of the circular cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, 371 :157–178.
- Glauser, M. and George, W. (1992). Application of multipoint measurements for flow characterization. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 5 (11) :617–632.

- Godsill, S. and Rayner, P. (1998). Digital audio restoration : a statistical model based approach. *Springer-Verlag*.
- Gordeyev, S. (2000). Pod, lse and wavelet decomposition : Literature review. *University of Notre Dame*.
- Graham, W., Peraire, J., and Tang, K. (1998). Optimal control of vortex shedding using low-order models. part i. *Int. J. Num. Meth. Eng*, 44 :945–972.
- Gu, Y. and Oliver, D. (2006). The ensemble kalman filter for continuous updating of reservoir simulation models. *Journal of Energy Resources Technology*, 128 :79–87.
- Gu, Y. and Oliver, D. (2007). An iterative ensemble kalman filter for multiphase fluid flow data assimilation. *SPE Journal*, pages 438–446.
- Gyau-Boakye, P. and Schultz, G. (1994). Filling gaps in runoff time series in west africa. *Hydro.Sci.J*, 39(6) :621–636.
- Hamill, M., Whitaker, J., and Snyder, C. (2001). Distance-dependant filtering of background error covariance estimates in an ensemble kalman filter. *Mon. Wea. Rev*, 129 :2776–2790.
- Hay, A., Borggaard, J., and Pelletier, D. (2009). Local improvements to reduced-order models using sensitivity analysis of the proper orthogonal decomposition. *J. Fluid Mech*, 629 :41–72.
- Henri, T. and Yvon, J. (2005). chapitre convergence estimates of pod-galerkin methods for parabolic problems. *System Modeling and Optimization, volume 166 de IFIP International Federation for Information Processing. Springer Boston*, pages 295–306.
- Hethcote, H. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Rev.*, 42(4) :599–653.
- Hinze, M. (2000). Optimal and instantaneous control of the instationary navier-stokes equation, accreditation to supervise research dissertation. *PhD thesis, Berlin University*. <http://www.math.tuberlin.de/hinze/.55>.
- Holmes, P., Lumley, J., and Berkooz, G. (1996). Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry. *Cambridge Monographs on Mechanics*.
- Hoskudsson, A. (1996). Dimension of linear models. *Chemometrics and intelligent laboratory systems.*, pages 37–55.
- Houtekamer, P.L, M. H. (2001). A sequential ensemble kalman filter for atmospheric data assimilation. *Monthly weather review*, 137 :123–129.
- Houtekamer, P., Mitchell, H., Pellerin, G., Buehner, M., Charron, M., L., S., and B., H. (2005a). Atmospheric data assimilation with an ensemble kalman filter : Results with real observations. *Monthly weather review*, 133 :604–620.
- Houtekamer, P., Mitchell, H., Pellerin, G., Buehner, M., Charron, M., Spacek, L., and B., H. (2005b). Atmospheric data assimilation with an ensemble kalman filter : results with real observations. *Mon. Wea. Rev.*, 133 :604–620.
- Huang, R., Wu, J., Jeng, J., and Chen, R. (2001). Surface flow and vortex shedding of an impulsively started wing. *Journal of Fluid Mechanics*, 441 :265–292.
- Hudy, L., Naguib, A., and Humphrey, W. (2007). Stochastic estimation of separated flow field using wall pressure array measurement. *Phys. Fluids*, 19.
- Iollo, A. (1997). Remarks on the approximation of the euler equations by a low order model. Technical report, Tech.Rep. 3329. INRIA.

- Ionied, E., Fang, K., Isseroff, R., and Oster, G. (2003). Stochastic models for cell motion and taxis. *Journal of Mathematical Biology*, 48 :23–37.
- Ito, K. and Ravindran, S. (1998). A reduced-order method for simulation and control of fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 143(2) :403–425.
- Jardin, T., David, L., and Farcy, A. (2009). Characterization of vortical structures and loads based on time-resolved piv for asymmetric hovering flapping flight. *Experiments in Fluids*, 46 :847–857.
- Jolliffe (1986). *Principal component analysis*. Springer-Verlag.
- Jong, S. and Ter Braak, C. (1994). Comments on the pls kernel algorithm. *J. Chemometrics.*, 8 :169–174.
- Kalb, V. and Deane, A. (2007). An intrinsic stabilization scheme for proper orthogonal decomposition based low-dimensional models. *Phys. Fluids*, 19 :54–106.
- Kalman, R. and Bucy, R. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, 83(3) :95–108.
- Kalnay, E. (2003). *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*.
- Karamanos, G. and Karniadakis, G. (2000). A spectral vanishing viscosity method for large eddy simulations. *J. Comput. Phys*, 163(1) :22–50.
- King, L. (1914). On the convection of heat from, small cylinders in a stream of fluid : Determination of the convection constants of small platinum wires with applications to hot-wire anemometry. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character.*, 214.
- Kunz, P.J. and K. I. (2001). Analysis and design of airfoils for use at ultra-low reynolds numbers. *Progress in Aeronautics and Astronautics : Fixed and flapping wing aerodynamics for micro air vehicles applications*, ed. AIAA, pages 35–60.
- Le Gland, F. (6 Septembre 2009). Introduction au filtrage en temps discret - filtre de kalman, filtrage particulaire, modèles de markov cachés. *Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées*.
- Le Gland, F., Monbet, V., and Tran, V. (2009). Large sample asymptotics for the ensemble kalman filter. *R.R 7014 - INRIA*.
- Li, V., Podvin, B., and Le Quéré, P. (2008). Application of compact neural network for drag reduction in a turbulent channel flow at low reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 20 :45–104.
- Lipovetsky, S. and Conklin, M. (2001). Multiobjective regression modifications for collinearity. *Comput. Oper. Res.*, 28 :1333–1345.
- Loève (1955). *Probability theory*. Van Nostrand.
- Luchtenberg, D., Gunther, B., Noack, B., King, R., and Tadmor, G. (2009). A generalized mean-field model of the natural and high frequency actuated flow around a high lift configuration. *J. Fluid Mech*, 623 :283–316.
- Lumley, J. (1967). The structures of inhomogeneous turbulent flow. *In : Atmospheric Turbulence and RadioWave Propagation, edited by A.M. Yaglom and V.I. Tatarski, Nauka, Moscow Edition*, pages 166–78.
- Ma, X. and Karniadakis, G. (2002). A low-dimensional model for simulating three dimensional cylinder flow. *J. Fluid Mech*, 458 :181–190.

- Martens, H. and Naes, T. (1989). Multivariate calibration. *John Wiley & Sons*.
- Martens, H. and Martens, M. (2000). Modified jack-knife estimation of parameter uncertainty in bilinear modelling by partial least squares regression (pls). *Food quality and preference*, 11 :5–16.
- Mason, C. and Perreault, W. (1991). Collinearity, power, and interpretation of multiple regression analysis. *J. Mark. Res.*, 28 :268–280.
- Maybeck, P., Cox, I., and Wilfong, G. (1990). Autonomous robot vehicles. chap. the kalman filter : An introduction to concept. pages 194–204.
- McKean, H. (1969). Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. *Lectures Series in Differential Equations, Vans Nostrand Reinhold, New York*, Volume 2, Volume 19 of Van Nostrand Mathematical Studies :177–194.
- Mezic, I. (2005). Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. *Nonlinear Dynamics*, 41 (1) :309–325.
- Moore, B. (1981). Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1) :373–432.
- Murray, J. (1993). *Mathematical biology*. Springer.
- Murray, N. and Ukeiley, L. (2003). Estimation of flow field from surface pressure measurements in open cavity. *AIAA J.*, 415 :969–972.
- Nair, M. and Sengupta, T. (1997). Unsteady flow past elliptic cylinders. *Journal of Fluids and Structures*, 11 :555–595.
- Nguyen van yen, R., Farge, M., and Schneider, K. (December 2009). Wavelet regularization of a fourier-galerkin method for solving the 2d incompressible euler equations. *Esaim : Proceedings*, Vol.29 :89–107.
- Noack, B., Afanasiev, K., Morzynski, M., Tadmor, G., and Thiele, F. (2003). A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech*, 497 :335–363.
- Noack, B., Papas, P., and Monkewitz, P. (2005a). The need for a pressure-term representation in empirical galerkin models of incompressible shear flows. *J. Fluid Mech*, 523 :339–365.
- Noack, B., Papas, P., and Monkewitz, P. (2005b). The need for a pressure-term representation in empirical galerkin models of incompressible shear flows. *J. Fluid Mech*, 523 :339–365.
- Noack, B., Schlegel, B., Ahlborn, B., Mutschke, G., Norzynski, M., Comte, P., and Tadmor, G. (2008). A finite-time thermodynamics formalism for unsteady flows. *J. Non-Equilib. Thermodyn*, 33 :103–148.
- Ohmi, K., Coutanceau, M., and Phuoc Loc T., a. D. A. (1990). Vortex formation around an oscillating and translating airfoil at large incidences. *Journal of Fluid Mechanics*, 211 :37–60.
- Perret, L., Collin, E., and Delville, J. (2006). Polynomial identification of pod based low-order dynamical system. *Journal of Turbulence*, Vol.7, No.17 :p. 1–15,.
- Pham, D., Verron, J., and Gouideau, L. (1998). Filtres de kalman singuliers évolutifs pour l’assimilation de données en océanographie. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 326 :255–260.

- Pineau, G., Meyer, P., Texier, A., and Coutanceau, M. (1994). Recherche et analyse de modèles de turbulence de sous maille adaptés aux écoulements instationnaires décollés. *Rapport final - Contrat D.R.E.T.*, 93/079.
- Powell, T. (2002). Automated tuning of an extended kalman filter using the downhill simplex algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25(5) :901–908.
- Pérez, P., Hue, C., and Gangnet, M. (2002). Color-based probabilistic tracking. In *In Proc. ECCV*, pages 661–675.
- Protas, B. (2008). Vortex dynamics models in flow control problems. *Nonlinearity*, 21 :203–250.
- Raffel, M., Willert, C., and Kompenhans, J. (1998). Particle image velocimetry - a practical guide. *Springer-Verlag*.
- Rathinam, M. and Petzold, L. (2003). A new look at proper orthogonal decomposition. *journal on numerical analysis*. 41(5) :1893 – 1925.
- Ravindran, S. (2000a). Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using pod. *J. Sci. Comput.*, 15(4) :457–478.
- Ravindran, S. (2000b). A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34 :425–448.
- Ravindran, S. (2006). Reduced-order controllers for control of flow past an airfoil. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50 :531–554.
- Rempfer, D. (2000). On low dimensional galerkin models for fluid flows. *Theor. Comput. Fluid. Dyn*, 14(2) :75–88.
- Reynolds, A., Zafari, M., and Li, G. (2006). Iterative forms of the ensemble kalman filter. *Proceeding of the 10th European Conference on the Mathematics of the Oil Recovery*, Amsterdam, 4-7 September, Paper A030.
- Riesz, F. and Nagy, B. (1955). *Functionnal Analysis*.
- Rowley, C., Mezic, I., Bagheri, S., Schlatter, P., and Henningson, D. (2009). Spectral analysis of nonlinear flows. *J. Fluid Mech*, 641 :115–127.
- Ruhe, A. (1984). Rational krylov sequence methods for eigenvalue computation. *Lin. Alg. Appl.*, 58 :391–405.
- Samimy, M., Debiasi, M., Caraballo, E., Serrani, A., Yuan, X., Little, J., and Myatt, J. (2007). Feedback control of subsonic cavity flows using reduced-order models. *J. Fluid. Mech*, 579 :315–346.
- Schmid, P. (2010). Dynamic mode decomposition. *J. Fluid Mech*, 656 :5–28.
- Scröder, A. and Willert, C. (2008). Particle image velocimetry : New developments and recent applications. *Springer-Verlag*.
- Sirisup, S. and Karniadakis, G. (2004). A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of pod model. *J. Computat. Phys*, 194 :92–116.
- Sirovitch, L. (1987). Turbulence and the dynamics of coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV, No.3 :p. 561–90.
- Stanislas, M., Westerweel, J., and Kompenhans, J. (2004). Particle image velocimetry : Recent improvements. *Springer-Verlag*.
- Taylor, J. and Glauser, M. (2004). Towards practical flow sensing and control via pod and lse based low-dimensional tools. *J. Fluid Eng.*, 126 :337.

-
- Tinney, C., Coiffet, F., Delville, J., Hall, A., Jordan, P., and Glauser, M. (2006). On spectral linear stochastic estimation. *Exp. Fluids*, 41 (5) :763–775.
- Tippett, M., Anderson, J., Bishop, C., Hamill, T., and Whitaker, J. (2003.). Ensemble square root filters. *Mon. Wea. Rev.*, 31 :1485–1490.
- Tran, V. (2009). *Assimilation de données : les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble*. PhD thesis, Université de Bretagne Sud.
- Ukeiley, L., Cordier, L., Manceau, R., Delville, J., Glauser, M., and Bonnet, J.-P. (2001). Examination of largescale structures in a turbulent mixing layer. part 2. dynamical systems model. *J. Fluid Mech*, 441 :67–108.
- Vandeginste, B., Massart, D., Buydens, L., De Jong, S., Lewi, P., and Smeyers-Verbeke, J. (1998). Handbook of chemometrics and qualimetrics – part b. *ELSEvier*.
- Vermaak, J., Andrieu, C., Doucet, A., and Godsill, S. (2002). Particle methode for bayesian modeling and enhancement of speech signals. In *IEEE Transactions on Speech and Audi Processing*, 10(3) :173-185.
- Wang, M. (1995). Aerodynamic sound of flow past an airfoil. *Stanford Center for Turbulent Research - Annual Research Briefs*, pages 257–271.
- Wang, Q. (2001). A bayesian joint probability approach for flood record augmentation. *Water Resour. Res*, 37(6).
- Wehrens, R., Putter, H., and Buydens, L. (2000). The bootstrap : a tutorial. *Chemometrics and intelligent laboratory systems.*, pages 35–52.
- Whitaker, J. and Hamil, T. (2002). Ensemble data assimilation without perturbed observations. *Mon. Wea. Rev.*, 130, :913–1924.
- Willcox, K. (2000). Reduced-order aerodynamic models for aeroelastic control of turbo-machines. In *PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology*.
- Wold, H. (1966). Estimation of principal components and related models by iterative least squares. *P.R. Krishnaiah (Ed.) Multivariate Analysis.*, pages 391–420.
- Wold, H. (1975). Path models with latent variables : The non-linear iterative partial least squares (nipals) approach. *H. M. Blalock et al. eds, Quantitative Sociology : International Perspectives on Mathematical and Statistical Model Building. New York : Academic Press.*
- Wold, H. (1981). The fix-point approach to interdependent systems.
- Wold, H. (1985). Partial least squares. in *Samuel Kotz and Norman L. Johnson, eds., Encyclopedia of statistical sciences*, 6 :581–591.
- Wu, C. (1983.). On the convergence properties of the em algorithm. *The Annals of Statistics*, 11(1) :95–103.
- Xu, L. and Jordan, M. (1996). On convergence properties of the em algorithm for gaussian mixtures. *Neural Computation*, 8 :129–151.
- Zhang, L. and Garcia-Munoz, S. (2009). A comparison of different methods to estimate prediction uncertainty using partial least squares (pls) : a practitioner’s perspective. *Chemometrics and intelligent laboratory systems.*, 97(2) :152–158.

Résumé

Cette thèse se place dans le cadre de la calibration de modèles réduits d'écoulement à partir de séquences expérimentales acquises par PIV (*Particle Image Velocimetry*) résolue en temps autour d'un profil NACA0012 à différents angles d'incidence et nombres de Reynolds. Le formalisme utilisé est celui du modèle réduit POD-Galerkin déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base des fonctions propres déterminées par la POD (*Proper Orthogonal Decomposition*). Un modèle à espace d'état régissant l'évolution des variables d'état du modèle réduit POD-Galerkin et mesurant de manière directe ou indirecte une partie ou l'ensemble de ces variables d'état est alors utilisé pour résoudre le problème de l'estimation de l'état au cours du temps du modèle réduit POD-Galerkin. L'inférence bayésienne sur le modèle réduit POD-Galerkin en fonction de différents jeux d'observations est proposée.

Une première partie est consacrée à l'application d'estimateurs bayésiens issus de l'assimilation séquentielle de données sur le modèle réduit POD-Galerkin linéaire et quadratique dans le cas où l'ensemble des observations est pris en compte. Les estimateurs bayésiens utilisés sont les filtres de Kalman linéaire et d'ensemble EnKF. Ces filtres de Kalman sont validés expérimentalement sur les champs de vitesse d'écoulements. Ils permettent en effet au modèle réduit de restituer la dynamique de l'écoulement considéré au cours du temps et de reconstruire un pourcentage significatif de l'écoulement.

La seconde partie traite de la reconstruction de champs de vitesse manquants après un sous-échantillonnage des données. Les coefficients manquants sont ensuite reconstruits à l'aide de l'algorithme EM (*Expectation Maximization*) qui procède par maximisation d'une vraisemblance calculée au moyen d'un filtrage et lissage de Kalman linéaire. Différents types de sous-échantillonnage des snapshots ont été ensuite testés.

Une dernière partie est consacrée au filtrage stochastique du modèle réduit POD-Galerkin à l'aide du filtre EnKF en fonction d'observations de natures physiques différentes. Le signal utilisé pour les observations est un signal de tension obtenu par anémométrie à film chaud en aval du profil NACA0012. En raison de la très forte colinéarité des signaux obtenus par film chaud, la régression PLS (*Partial Least Square*) a été mise en place pour définir un opérateur linéaire des observations dans le filtre de Kalman EnKF. Des résultats concernant l'utilisation et l'application de la PLSR avec le filtre EnKF sont présentés. Ces méthodes sont ensuite validées expérimentalement pour la reconstruction de champs de vitesse d'écoulements d'une des configurations étudiées.

Abstract

This thesis takes place in the framework of the calibration of low order models from experimental sequences acquired by time resolved PIV around at profil NACA0012 with various angles of attack and numbers of Reynolds. A reduced-order modelling approach issued from the Galerkin projection of the incompressible flow Navier-Stokes equations onto a low-dimensional basis extracted by Proper Orthogonal Decomposition (POD) is used. A state space model governing the evolution of the state variables of the reduced-order model POD-Galerkin and mapping directly or indirectly a part or the whole of these state variables is then used to solve the problem of the estimation of the state of the reduced-order model POD-Galerkin during time. The Bayesian inference on the reduced-order model POD-Galerkin depending on different sets of observations is proposed. The first part is devoted to the application of Bayesian estimators from the assimilation of sequential data on the linear and quadratic reduced-order models POD-Galerkin in the case where time resolved observations are available. The Bayesian estimators used are the linear Kalman filters and the ensemble Kalman filter (EnKF). These Kalman filters are experimentally validated on the flow fields. They allow the reduced-order model to describe the dynamics of the considered flow in time and reproduce a significant percentage of the flow. The second part deals with the reconstruction of missing velocity fields after under-sampling the experimental data. The missing coefficients are reconstructed using the EM algorithm which proceeds by maximization of a likelihood calculated with a Kalman filter and smoother. Different types of under-sampling of the snapshots were then tested. A last part is devoted to the stochastic filtering of the reduced-order model POD-Galerkin with the EnKF filter using observations of different physical nature. The signal used for the observations is a voltage signal obtained by hot film anemometry downstream of the NACA0012 profile. Due to the very high collinearity of the signals obtained by hot film, the PLSR has been used to define a linear operator of observations in the Kalman filter EnKF. Results concerning the use and application of the PLSR with the EnKF filter are presented. The application of these methods for the reconstruction of velocity fields is then validated on experimental data.

Keywords : PIV, dynamical system, POD, Kalman filter, sequential Monte-Carlo methods, likelihood maximization, non linear regression.

