



Centre  
de Recherche  
en Automatique  
de Nancy  
UMR 7039

Soutenance de Thèse  
7 Septembre 2012

# Analyse de stabilité et de performances d'une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret

ArHyCo



Carlos Alberto CAVICHIOLI GONZAGA  
Directeur : Jamal DAAFOUZ  
Codirecteur : Marc JUNGERS

BMS

IAEM

INS2I  
INSIS



UMR  
7039



UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE



# Plan de la présentation

## Concept de problème de Lur'e

- Une fonction de Lyapunov du type Lur'e adaptée au temps discret
- Analyse de stabilité globale
- Analyse de stabilité locale

## Systèmes Lur'e à commutations

### Cadre de commutation arbitraire

- Stabilité globale - système Lur'e non-saturé
- Stabilité locale - système Lur'e saturé

### Cadre de commutation commande

- Stabilisation globale
- Stabilisation locale

## Conclusions et perspectives

## Concept de problème de Lur'e

Une fonction de Lyapunov du type Lur'e adaptée au temps discret

Analyse de stabilité globale

Analyse de stabilité locale

Systèmes Lur'e à commutations

Conclusions et perspectives

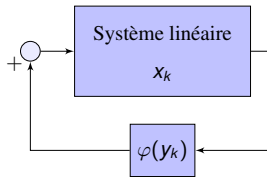
## Le problème de Lur'e classique

Système Lur'e en temps discret :

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k), \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ).



Hypothèse :

- Matrice  $A$  est supposée stable ;
- La non-linéarité  $\varphi(y)$  vérifie la **condition de secteur borné** :

$$SC(\varphi(\cdot), y, \Lambda) = \varphi'(y) \Lambda [\varphi(y) - \Omega y] \leq 0, \quad (3)$$

avec  $0_p < \Omega \in \mathbb{R}^{p \times p}$  diagonale et donnée.

Objectif :

Étudier la stabilité asymptotique du système (1)-(2) sous l'hypothèse de la condition de secteur.

Problème originalement étudié en temps continu<sup>1</sup>.

## Particularités des approches classiques

Les fonctions de Lyapunov les plus utilisées :

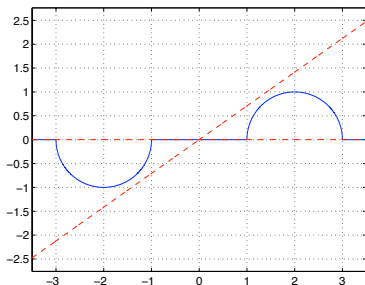
- Quadratique en l'état (critère du Cercle/Tsytkin) :  $x'Px$  ;
  - traite le cas lorsque la non-linéarité varie dans le temps  $\varphi(t, x)$ .
- Fonction de Lur'e (critère de Popov) :

$$v(x) = \alpha x^2 + 2\eta \int_0^{C'x} \varphi(s) ds, \quad \alpha > 0, \eta \geq 0;$$

- $\varphi(\cdot)$  doit être **invariante dans le temps** ;
- **seulement (3)** est utilisée en temps continu pour conclure  $\dot{v} < 0$ .

Lur'e en temps discret :

- **hypothèse additionnelle sur  $\varphi(\cdot)$**  ;
- majorer  $\int_{y_k}^{y_{k+1}} \varphi(s) ds$  ;
- *Pearson, 64 ; Szegö, 63* :  
$$\frac{d\varphi(y)}{dy} \leq K_{\max}, \quad K_{\max} \text{ connu.}$$



## Concept de problème de Lur'e

Une fonction de Lyapunov du type Lur'e adaptée au temps discret

Analyse de stabilité globale

Analyse de stabilité locale

Systèmes Lur'e à commutations

Conclusions et perspectives

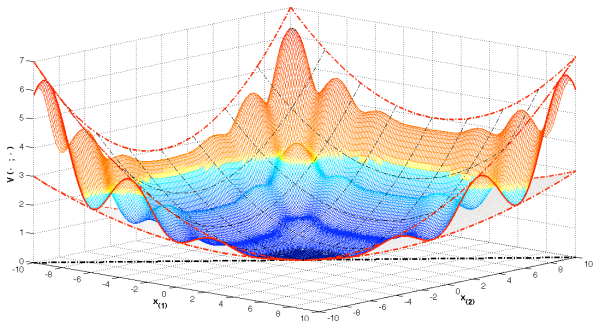
## Une fonction de Lyapunov du type Lur'e en temps discret

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x; \varphi(Cx)) & \longmapsto x'Px + 2\varphi(Cx)' \Delta \Omega Cx, \end{cases} \quad (4)$$

- avec  $0_n < P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $0_p \leq \Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  diagonale inconnues.
- Fonctions quadratiques encadrantes :

$$\underline{V}(x) \leq V(x; \varphi(Cx)) \leq \overline{V}(x), \quad (5)$$

où  $\underline{V}(x) = x'Px$  et  $\overline{V}(x) = x'(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C)x$ .



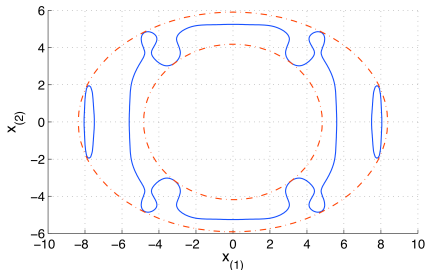
## Propriétés basiques

Fonction candidate à fonction de Lyapunov :

- $V(x; \varphi(Cx)) > 0$  ( $\forall x \neq 0$ ) car  $P > 0_n$  et la condition de secteur (3) de  $\varphi(\cdot)$  ;
- $V(x; \varphi(Cx)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , car  $P > 0_n$  ;
- Relation (5) implique que la fonction (4) est radialement non-bornée ;
- La différence de Lyapunov :  $\delta_k V = V(x_{k+1}; \varphi(y_{k+1})) - V(x_k; \varphi(y_k))$ .

La ligne de niveau de la fonction (4) :

$$L_V(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x; \varphi(Cx)) \leq \gamma\}. \quad (6)$$



- Considérons les fonctions de l'exemple et  $\gamma = 0.7$  ;
- L'ensemble  $L_V(0.7)$  peut être **non-convexe et non-connexe**.
- De la relation (5), nous avons :  $\mathcal{E}(P + 2C'\Omega'\Delta\Omega C, 0.7) \subseteq L_V(0.7) \subseteq \mathcal{E}(P, 0.7)$  ;



## Concept de problème de Lur'e

Une fonction de Lyapunov du type Lur'e adaptée au temps discret

Analyse de stabilité globale

Analyse de stabilité locale

Systèmes Lur'e à commutations

Conclusions et perspectives

## Le problème de Lur'e en temps discret

### Théorème 1 : Analyse de stabilité globale

S'il existe des matrices solutions de la LMI suivante

$$\begin{bmatrix} P - G' - G & G'A & G'F & 0_{n \times p} \\ * & -P & C'\Omega [T - \Delta] & A'C'\Omega [W + \Delta] \\ * & * & -2T & F'C'\Omega [W + \Delta] \\ * & * & * & -2W \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}, \quad (7)$$

on a

$$\delta_k V - 2SC(\varphi(\cdot), y_{k+1}, W) - 2SC(\varphi(\cdot), y_k, T) < 0, \quad \forall x_k \neq 0,$$

alors la fonction  $V(x; \varphi(Cx))$  est une fonction de Lyapunov et l'origine du système (1)-(2) est globalement asymptotiquement stable.

Pas d'hypothèse sur la variation de  $\varphi(\cdot)$ .

## Illustration

### Exemple 1 : analyse de stabilité globale

- Système Lur'e en temps discret avec  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$  :

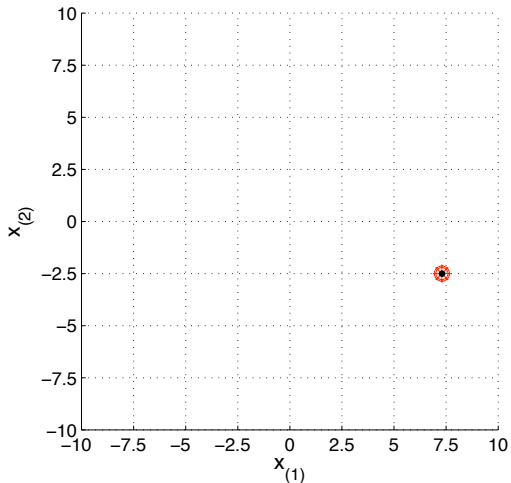
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & -0.4 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}; C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

- La non-linéarité est  $\varphi(y) = 0.5\Omega y(1 + \cos(10y))$  (dérivée n'est pas bornée sur tout le domaine  $y \in \mathbb{R}$ );
- Notre fonction de Lyapunov (4) existe pour ce système et les paramètres sont donnés par :

$$P = \begin{bmatrix} 0.9825 & -0.0846 \\ -0.0846 & 0.9476 \end{bmatrix}; \Delta = 0.7503.$$

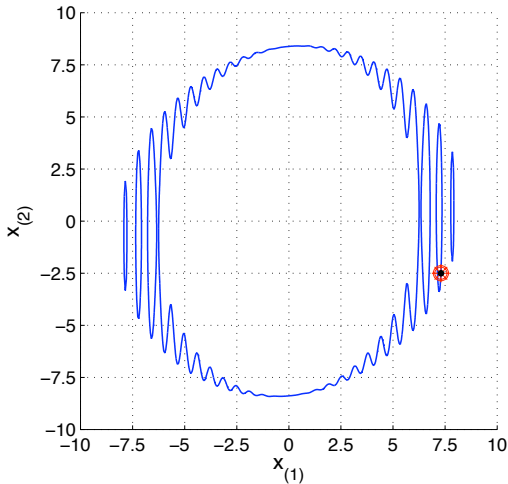
# Stabilité asymptotique

Une condition initiale  $x_0$       $k = 0$



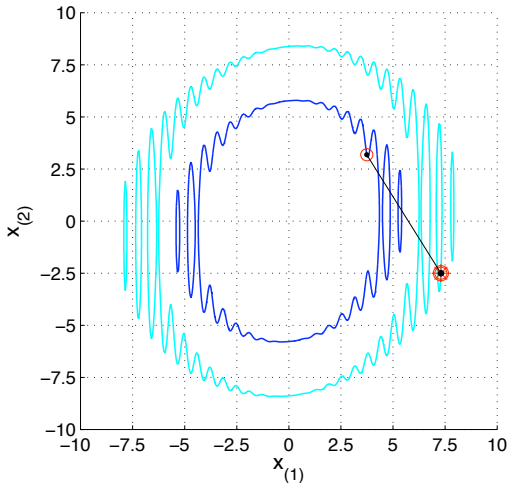
## Stabilité asymptotique

Contractivité de la ligne de niveau  $L_V(\gamma = V(x_0, \varphi(y_0)))$ ;  $k = 0$



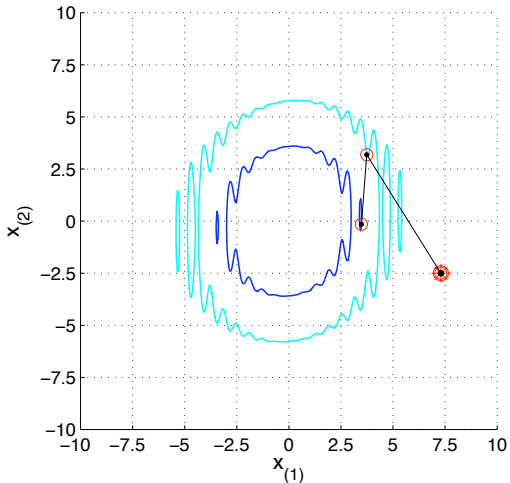
## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 1$



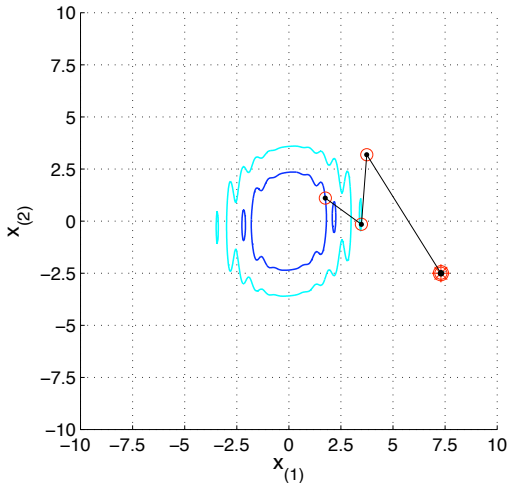
## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 2$



## Stabilité asymptotique

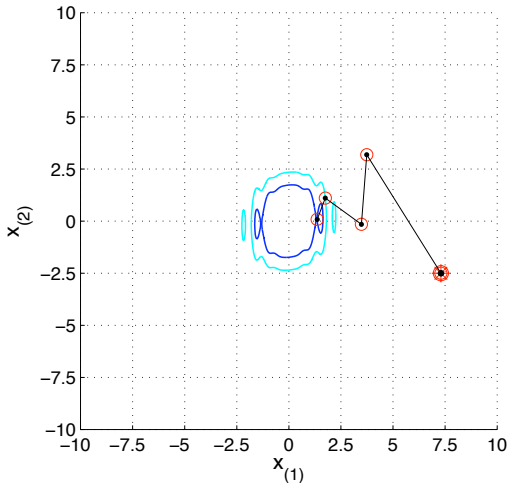
$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 3$





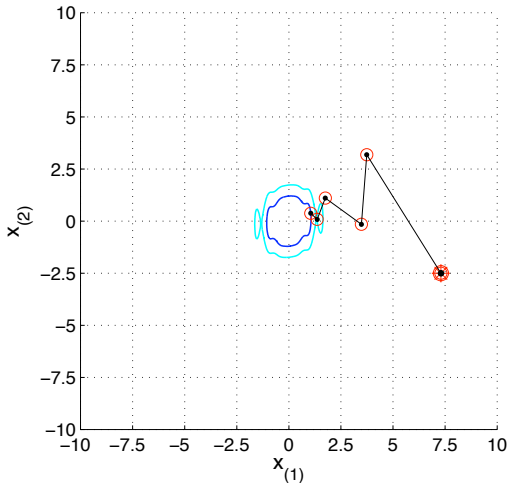
## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 4$



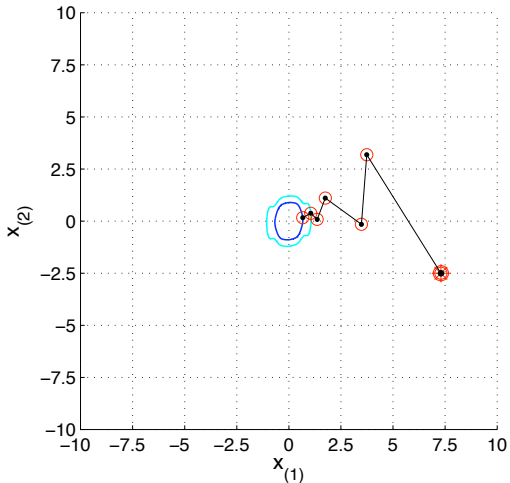
## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 5$



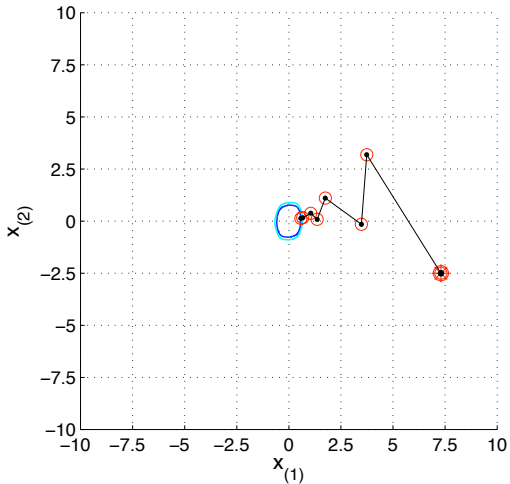
## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 6$



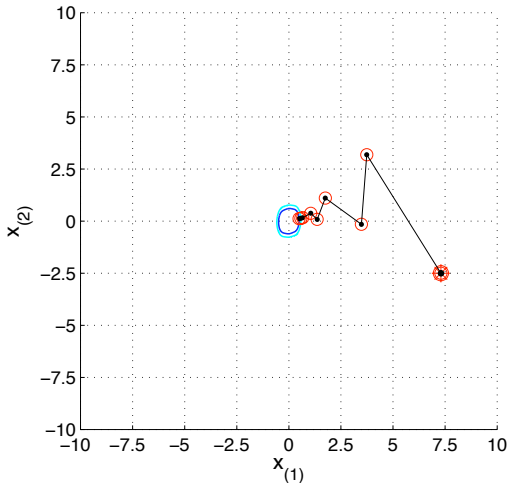
## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 7$



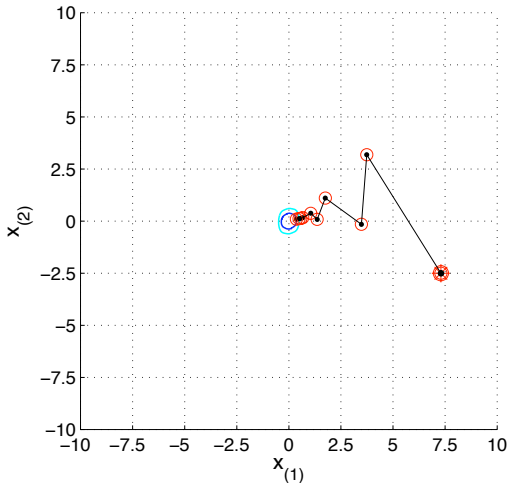
## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 8$



## Stabilité asymptotique

$L_V(\gamma = V(x_{k-1}, \varphi(y_{k-1})))$  et  $L_V(\gamma = V(x_k, \varphi(y_k)))$ ;  $k = 9$



## Concept de problème de Lur'e

Une fonction de Lyapunov du type Lur'e adaptée au temps discret

Analyse de stabilité globale

Analyse de stabilité locale

Systèmes Lur'e à commutations

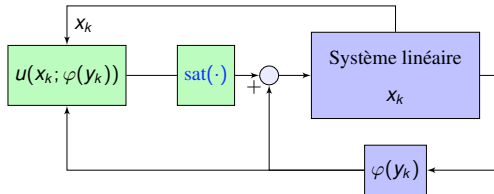
Conclusions et perspectives

## Système Lur'e avec la saturation de commande

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k) + B\text{sat}(u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (8)$$

$$y_k = Cx_k \quad (9)$$

Pour la classe de lois de commande non-linéaire :  $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(y_k)$ .



Saturation d'entrée :

- Seulement la **stabilité locale** peut être assurée généralement ;
- Le bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  peut être **non-convexe et non-connexe**.

Objectifs :

- Analyse de stabilité et synthèse de commande ;
- Considérer l'**ensemble**  $L_V(1)$  afin d'estimer le bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  ;

Assurer la stabilité asymptotique locale du système (8)-(9) ;



## Outils :

- La zone-morte  $\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k)$ , associée à la saturation, vérifie une condition de secteur généralisée locale :

$$SC_{u_k} = \Psi'(u_k)U[\Psi(u_k) - J_1 x_k - J_2 \varphi(y_k)] \leq 0, \quad (10)$$

pour des matrices diagonales  $0_m < U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

- dans l'ensemble

$$\mathcal{S}(\hat{K} - \hat{J}, \rho) = \{\theta \in \mathbb{R}^{n+p}; -\rho \leq (\hat{K} - \hat{J})\theta \leq \rho\}, \quad (11)$$

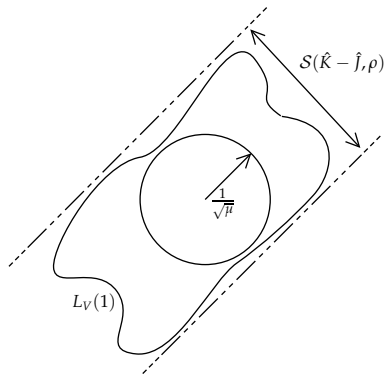
avec  $\hat{K} = [K \ \Gamma]$  et  $\hat{J} = [J_1 \ J_2]$ , on a  $SC_{u_k} \leq 0$  vérifiée.

### Modèle en boucle fermée :

$$x_{k+1} = A_{cl}x_k + F_{cl}\varphi(y_k) - B\Psi(u_k), \quad (12)$$

où  $A_{cl} = A + BK$  et  $F_{cl} = F + B\Gamma$ .

## Idée principale



Des inclusions décrites sous forme d'inégalités matricielles :

- IM1) Une boule de rayon  $1/\sqrt{\mu}$  incluse dans l'ensemble  $L_V(1)$  ;
- IM2)  $L_V(1) \subset S(\hat{K} - \hat{J}, \rho)$  tel que l'on ait  $SC_{u_k} \leq 0$  ;
- IM3) Un majorant pour  $\delta_k V$  :  $\delta_k V - 2SC_{u_k} - 2SC(\varphi(\cdot), y_{k+1}, W) - 2SC(\varphi(\cdot), y_k, T) < 0$ .

Conclusion : dans  $L_V(1)$ ,  $\delta_k V < 0, \forall x_k \neq 0$ .

## Inégalités assurant les inclusions :

- La faisabilité de la LMI

$$\begin{bmatrix} \mu I_n - P & -C'\Omega [R + \Delta] \\ \star & 2R \end{bmatrix} > 0_{n+p}, \quad (13)$$

implique l'inclusion  $\mathcal{E}(I_n, \frac{1}{\mu}) \subset L_V(1)$ .

- La LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} P & C'\Omega [\Delta - Q] & (K - J_1)'_{(\ell)} \\ \star & 2Q & (\Gamma - J_2)'_{(\ell)} \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0_{n+p+1}, \quad (14)$$

implique l'inclusion  $L_V(1) \subset \mathcal{S}((\hat{K} - \hat{J}), \rho)$ , avec  $\hat{K} = [K \ \Gamma]$  and  $\hat{J} = [J_1 \ J_2]$ .

## Inégalité définissant le majorant pour $\delta_k V$

Si l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} P - G' - G & G' A_{cl} & G' F_{cl} & -G' B & 0_{n \times p} \\ * & -P & \Pi_1 & J_1' U' & A'_{cl} \Pi_2 \\ * & * & -2T & J_2' U' & F'_{cl} \Pi_2 \\ * & * & * & -2U & -B' \Pi_2 \\ * & * & * & * & -2W \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

est vérifiée, avec  $\Pi_1 = C' \Omega [T - \Delta]$ ;  $\Pi_2 = C' \Omega [W + \Delta]$ , alors elle implique

$$\delta_k V - 2SC_{u_k} - 2SC(\varphi(\cdot), y_{k+1}, W) - 2SC(\varphi(\cdot), y_k, T) < 0. \quad (16)$$

Les inégalités (14)-(15) impliquent stabilité asymptotique dans  $L_V(1)$ .

## Problème d'optimisation pour déterminer le plus grand $L_V(1)$

### Théorème 2 : Analyse de stabilité locale

S'il existe des matrices  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , des matrices  $0_n < P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; des matrices diagonales  $0_p \leq \Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $0_p < R, Q, T, W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , et un scalaire  $\mu$  solutions du problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min_{G, P, J_1, J_2, Q, R, T, W, \Delta, \mu} \mu$$

sous les contraintes (13), (14) et (15)

alors une estimation de  $\mathcal{B}_0$  est donnée par l'ensemble  $L_V(1)$ .

## Illustration

### Exemple 2 : Analyse de stabilité locale

- Système Lur'e avec la saturation :  $n = 2$  ;  $p = m = 1$  ;  $\rho = 1.5$  ;  $\Omega = 0.9$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.4 \\ 0.6 & 0.95 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.9 \end{bmatrix} .$$

- La méthode fondée sur la fonction quadratique fournit les gains :

$$K = \begin{bmatrix} -0.3324 & -1.0006 \end{bmatrix}$$

- En appliquant le [théorème 2](#), notre fonction de Lyapunov existe :

$$P = \begin{bmatrix} 0.0418 & 0.0173 \\ 0.0173 & 0.2305 \end{bmatrix} ; \Delta = 0.0381 .$$

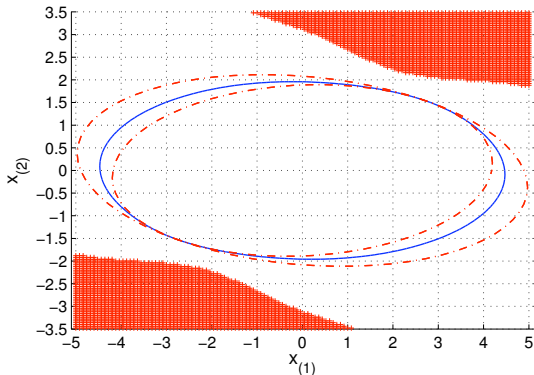
Sans avoir accès à  $\varphi(y_k)$ , notre méthode fournit une estimation donnée par :

$$\mathcal{E}(P + 2C'\Omega\Delta\Omega C)$$

## Illustration

Estimation  $L_V(1)$  pour différentes non-linéarités :

$$\varphi(y) = 0.5\Omega y(1 + \exp(-0.5y^2)).$$

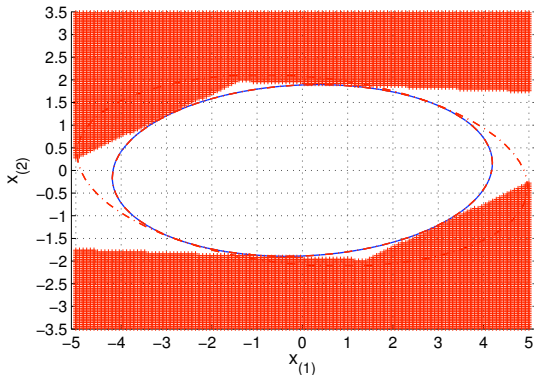


Conditions initiales  $x_0$  menant à des trajectoires instables  
Bassin d'attraction  $B_0$  change aussi.

## Illustration

Estimation  $L_V(1)$  pour différentes non-linéarités :

$$\varphi(y) = \Omega y.$$



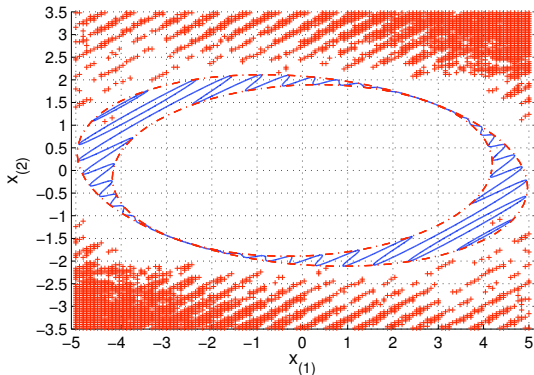
Conditions initiales  $x_0$  menant à des trajectoires instables  
Bassin d'attraction  $B_0$  change aussi.



## Illustration

Estimation  $L_V(1)$  pour différentes non-linéarités :

$$\varphi(y) = 0.5\Omega y(1 + \cos(20y)).$$



Conditions initiales  $x_0$  menant à des trajectoires instables  
Bassin d'attraction  $\mathcal{B}_0$  change aussi.

Concept de problème de Lur'e

## Systèmes Lur'e à commutations

Cadre de commutation arbitraire

Stabilité globale - système Lur'e non-saturé

Stabilité locale - système Lur'e saturé

Cadre de commutation commande

Stabilisation globale

Stabilisation locale

Conclusions et perspectives

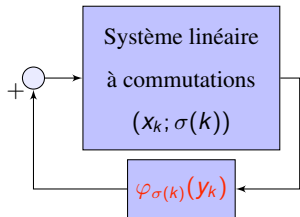
# Systèmes Lur'e à commutations en temps discret

Systèmes Lur'e à commutations :

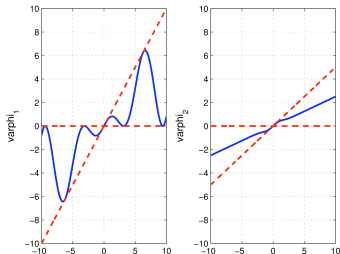
$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) \quad (17)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (18)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma(\cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\}$ .



Motivation :



- Chaque mode est associé à une non-linéarité  $\varphi_i(y)$  ;
- La non-linéarité active est définie par la loi de commutation ;
- Les conditions de secteur sont dépendantes du mode,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$  :

$$SC(\varphi_i(\cdot), y, \Lambda_i) = \varphi_i'(y)\Lambda_i[\varphi_i(y) - \Omega_i y] \leq 0 \quad (19)$$

# Une fonction de Lyapunov du type Lur'e commutée en temps discret

Définitions :

$$V : \begin{cases} \mathcal{I}_N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (i; x; \varphi_i(C_i x)) & \longmapsto x' P_i x + 2\varphi_i(C_i x)' \Delta_i \Omega_i C_i x. \end{cases} \quad (20)$$

- $P_i = P_i' > 0_n$  and  $\Delta_i \geq 0_p$  (diagonales),  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ;
- Pas d'hypothèse supplémentaire sur les non-linéarités  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ;
- Des fonctions quadratiques commutées encadrantes

$$x' P_i x = \underline{V}_i(x) \leq V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq \bar{V}_i(x) = x' (P_i + 2C_i' \Omega_i' \Delta_i \Omega_i C_i) x, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (21)$$

Concept de problème de Lur'e

## Systemes Lur'e à commutations

### Cadre de commutation arbitraire

Stabilité globale - système Lur'e non-saturé

Stabilité locale - système Lur'e saturé

### Cadre de commutation commande

Stabilisation globale

Stabilisation locale

Conclusions et perspectives

# Stabilité globale dans le cas des commutations arbitrares

## Système Lur'e non-saturé

Outils	Non commuté	Commuté
Fonction de Lyapunov	$V(x; \varphi(Cx))$	$V(i; x; \varphi_i(C_i x))$
$L_V(\gamma)$	$\{x \in \mathbb{R}^n; V(x; \varphi(Cx)) \leq \gamma\}$	$\bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq \gamma\}$
nb LMIs	1	$N^2$
Bornes $L_V$	Ellipses	Intersections Ellipses

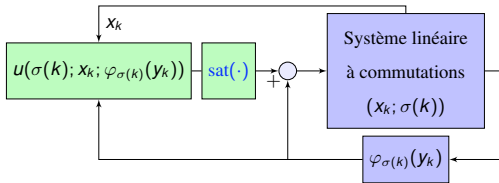
## Système Lur'e à commutations arbitraires et la saturation

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) + B_{\sigma(k)}\text{sat}(u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (22)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k \quad (23)$$

Pour la classe de lois de commande non-linéaire commutée :

$$u_k = K_{\sigma(k)}x_k + \Gamma_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k), \quad \forall \sigma \in \mathcal{I}_N. \quad (24)$$



But :

- Analyse de stabilité (pour  $K_i$  et  $\Gamma_i$  donnés) ou bien synthèse de commande ;

Estimer le  $\mathcal{B}_0$  du système (22)-(23), assurant la stabilité locale pour toute loi de commutation.

# Stabilité locale dans le cas des commutations arbitraires

## Système Lur'e avec la saturation

Outils	Non commuté	Commuté
Fonction de Lyapunov	$V(x; \varphi(Cx))$	$V(i; x; \varphi_i(C_i x))$
$L_V(1)$	$\{x \in \mathbb{R}^n; V(x; \varphi(Cx)) \leq 1\}$	$\bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq 1\}$
nb LMIs	$2+m$	$N^2 + N.(1 + m)$
Bornes $L_V$	Ellipses	Intersections Ellipses
Correcteur	$K$ et $\Gamma$	$K_i$ et $\Gamma_i (\forall i \in \mathcal{I}_N)$



## Illustration

### Exemple 4 : synthèse de commande commutée

- Système Lur'e à commutations arbitraires avec deux modes  $N = n = 2$  ;  
 $\rho = m = 1$  ;  $\rho = 1.5$ ,  $C_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \end{bmatrix}$  ;  $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \end{bmatrix}$  ;  $\Omega_1 = 0.7$  ;  
 $\Omega_2 = 1.3$ .
- $\varphi_1(y) = 0.5\Omega_1 y(1 + \sin(30y))$  ;  $\varphi_2(y) = 0.5\Omega_2 y(1 + \cos(\frac{100y}{3}))$

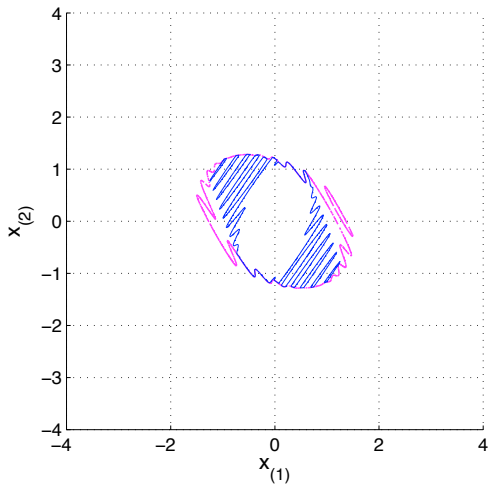
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} ; B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} ; F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix} ;$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} ; B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix} ; F_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

La méthode proposée fournit les gains commutés suivants :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.72 & -1.01 \end{bmatrix} ; \Gamma_1 = -1.2636 ;$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.27 & -0.74 \end{bmatrix} ; \Gamma_2 = -1.4744 .$$

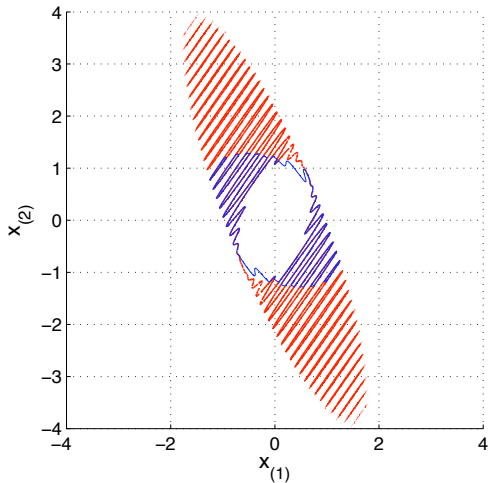
## Illustration

$$\{x \in \mathbb{R}^n; V(1; x; \varphi_1(C_1 x)) \leq 1\}.$$



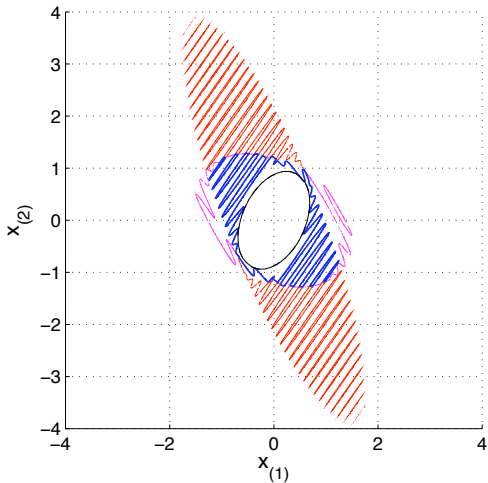
## Illustration

$$\{x \in \mathbb{R}^n; V(2; x; \varphi_2(C_2x)) \leq 1\}.$$



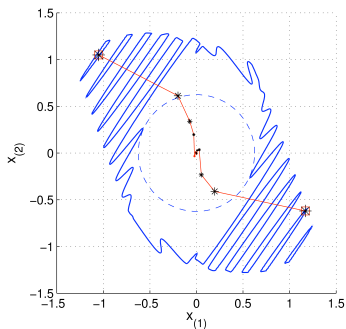
## Illustration

$L_V(1)$  et estimation donnée par la fonction quadratique commutée.



## Illustration

Deux trajectoires sous deux réalisations différentes de commutation arbitraire.



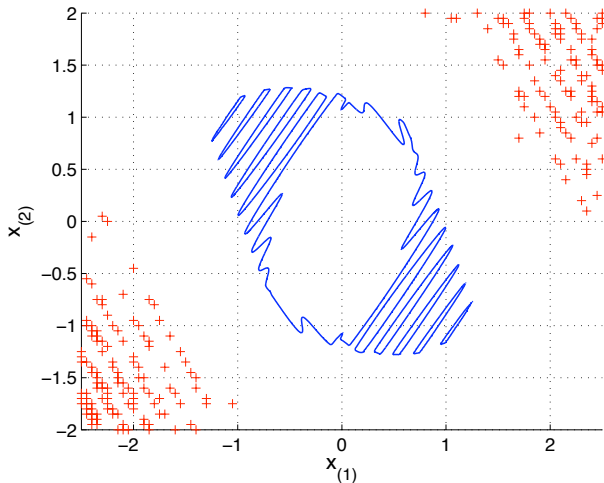
Question sur l'écart entre une estimation donnée par  $L_V(1)$  et le  $\mathcal{B}_0$ .

4 réalisations de différentes de loi de commutation sont considérées.

- $\sigma_a(2k) = 1 ; \sigma_a(2k + 1) = 2 \forall k \in \mathbb{N}$ ;
- $\sigma_b(k) = 1 ; \forall k \in \mathbb{N}$ ;
- $\sigma_c(2k) = 2 ; \sigma_c(2k + 1) = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ ;
- $\sigma_d(k) = 2 ; \forall k \in \mathbb{N}$ .

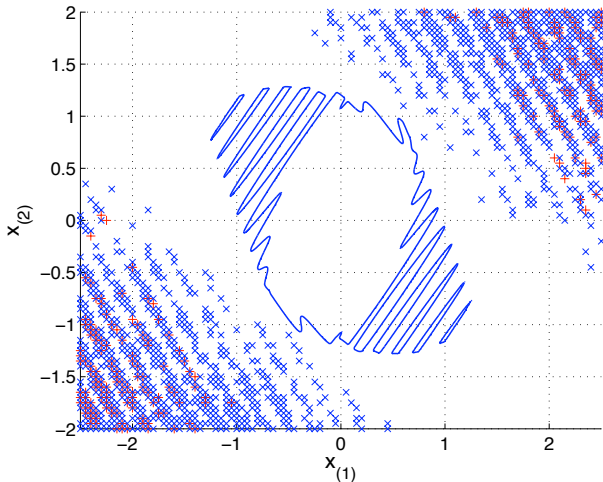
## Illustration

$x_0 \notin L_V(1)$  menant à des trajectoires instables pour la loi de commutation :  $\sigma_a(k)$ .



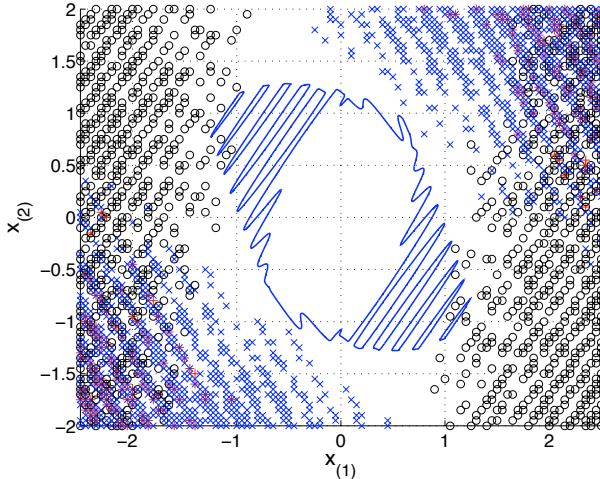
## Illustration

$x_0 \notin L_V(1)$  menant à des trajectoires instables pour les lois de commutation :  $\sigma_a(k), \sigma_b(k)$ .



## Illustration

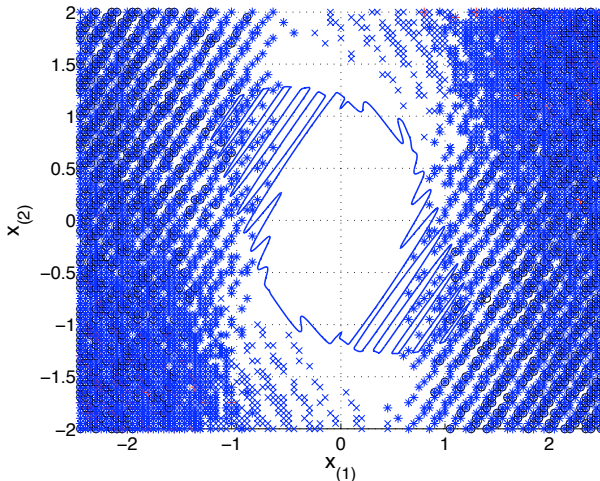
$x_0 \notin L_V(1)$  menant à des trajectoires instables pour les lois de commutation :  $\sigma_a(k), \sigma_b(k), \sigma_c(k)$ .





## Illustration

$x_0 \notin L_V(1)$  menant à des trajectoires instables pour les lois de commutation :  $\sigma_a(k), \sigma_b(k), \sigma_c(k), \sigma_d(k)$ .



Concept de problème de Lur'e

## Systemes Lur'e à commutations

Cadre de commutation arbitraire

Stabilité globale - système Lur'e non-saturé

Stabilité locale - système Lur'e saturé

Cadre de commutation commande

Stabilisation globale

Stabilisation locale

Conclusions et perspectives

## Formulation du problème

- Systèmes Lur'e à commutations :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) \quad (25)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k. \quad (26)$$

- Système Lur'e à commutations avec la saturation de commande :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k) + B_{\sigma(k)}\text{sat}(u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (27)$$

$$y_k = C_{\sigma(k)}x_k \quad (28)$$

- Objectif :

- synthétiser une loi de commutation dépendante de l'état

$$\sigma(k) = g(x_k), \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{I}_N, \quad (29)$$

qui stabilise globalement (localement) et asymptotiquement l'origine.

Idées principales :

Nouvelle fonction de Lyapunov du type Lur'e

Stratégie du type *min-switching*

## Stabilisation globale

Outil principal :

- Considérons la **fonction**, héritant les propriétés de  $V$  :

$$V_{\min}(x_k) = \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i, x_k, \varphi_i(C_i x_k)). \quad (30)$$

Méthode **min-switching** est formulée dans le cas **linéaire**<sup>2</sup> en utilisant :

- des **matrices de Metzler** en temps discret :

$$\mathcal{M}_d = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \pi_{ij} \geq 0, \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} = 1, \forall i \in \mathcal{I}_N \right\}.$$

- inégalités de **Lyapunov-Metzler** fondées sur des fonctions **quadratiques commutées** :  $\min_{i \in \mathcal{I}_N} x_k' P_i x_k$ .

**Matrices du système et vecteur d'état étendu :**

$$A_i = [ A_i \quad F_i \quad 0_{n \times Np} ] \in \mathbb{R}^{n \times (n+(N+1)p)};$$

$$E_i = [ 0_{p \times (n+ip)} \quad I_p \quad 0_{p \times (N-i)p} ] \in \mathbb{R}^{p \times (n+(N+1)p)};$$

$$z'_k = \left( x'_k \quad \varphi'_i(C_i x_k) \quad \varphi'_1(C_1 x_{k+1}) \quad \dots \quad \varphi'_N(C_N x_{k+1}) \right)' \in \mathbb{R}^{(n+(N+1)p)}.$$

## Théorème : Stratégie du type *min-switching*

**Théorème 3 :** Approche *min-switching* fondée sur  $V(i, x_k, \varphi_i(C_i x_k))$

S'il existe une matrice  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ ; matrices  $0_n < P_i = P'_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices diagonales  $0_p < T_i, W_i, 0_p \leq \Delta_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), telles que les inégalités de Lyapunov-Metzler sont satisfaites,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}'_i(P)_{p,i} \mathbb{A}_i + \text{He}(\mathbb{A}'_i(C' \Omega \Delta \mathbb{E})_{p,i}) - \sum_{q \in \mathcal{I}_N} \left( 2\mathbb{E}'_q W_q \mathbb{E}_q - \text{He}(\mathbb{E}'_q W_q \Omega_q C_q \mathbb{A}_i) \right) \\ & - \begin{bmatrix} P_i & * & * \\ (\Delta_i - T_i) \Omega_i C_i & 2T_i & * \\ 0_{Np \times n} & 0_{Np \times p} & 0_{Np} \end{bmatrix} < 0_{n+(N+1)p}, \quad (31) \end{aligned}$$

où  $(P)_{p,i} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} P_\ell$ , alors la stratégie du type *min-switching*

$$\sigma(k) = g(x_k) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i, x_k, \varphi_i(C_i x_k)) \quad (32)$$

stabilise globalement et asymptotiquement le système (25)-(26).

Pareillement au cas linéaire :

Inégalité sous forme LMI pour matrice  $\Pi$  fixée

Recherche en ligne possible.

## Partition de l'espace d'état

Partition de l'espace d'état associée à la stratégie *min-switching* :

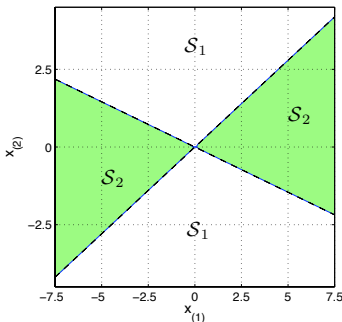
- Soit les ensembles  $\mathcal{S}_i \subset \mathbb{R}^n$  définissant l'activation des modes  $i \in \mathcal{I}_N$  :

$$\mathcal{S}_i = \{x \in \mathbb{R}^n, V_{min}(x) = V(i, x, \varphi_i(C_i x))\}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (33)$$

- Quelques commentaires relatifs à ces ensembles  $\mathcal{S}_i$  :
  - $0 \in \mathcal{S}_i, \forall i \in \mathcal{I}_N$  ;
  - $\cup_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{S}_i = \mathbb{R}^n$ , car le minimum est atteint au moins par un mode ;
  - Les ensembles  $\mathcal{S}_i$  ne sont pas nécessairement disjoints.

Particularité des partitions  $\mathcal{S}_i$  associées à des fonctions de Lyapunov :

- Quadratique commutée :
  - toujours des régions coniques ;
  - délimitées par des droites.
- Lur'e commutée :
  - partitions pas restreintes à des cônes ;
  - régions limitées par des courbes
  - allure dépend de  $\varphi_i(\cdot)$ .



## Illustration

### Exemple 5 : stabilisation globale

- Système Lur'e à commutations avec  $N = n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $\Omega_1 = 0.6$ ;  $\Omega_2 = 0.4$  :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & -0.72 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}; C'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix};$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.48 & 0.8 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}; C'_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Les non-linéarités sont :  $\varphi_1(y) = 0.5\Omega_1 y(1 + \cos(2y))$   
et  $\varphi_2(y) = 0.5\Omega_2 y(1 - \sin(2.5y))$ .
- En appliquant le [théorème 3](#), les valeurs numériques sont obtenues :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.1490 & -0.0832 \\ -0.0832 & 1.9764 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 0.3508 & -0.4489 \\ -0.4489 & 3.1440 \end{bmatrix};$$

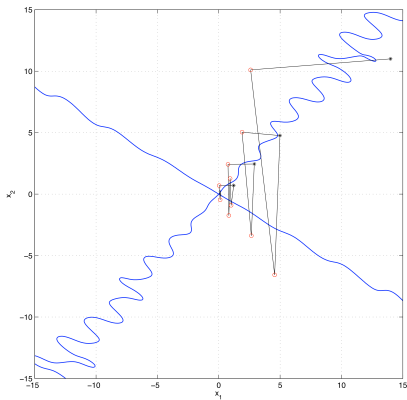
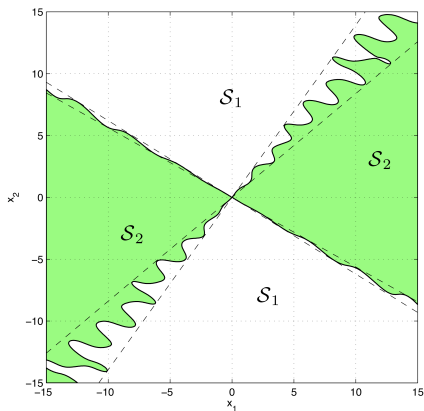
$$\Delta_1 = 0.2585; \Delta_2 = 1.0509; \text{ avec la matrice de Metzler } \Pi = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

## Illustration

Partition de l'espace d'état et une trajectoire pour  $x_0 = (14; 11)'$

L'ensemble  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  encadré par les cônes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

Trajectoire  $x_k$  et les modes choisis à chaque instant  $k$ .



Car  $\Delta_i \neq 0_p$ , l'intersection des partitions exhibe des courbes.



## Stabilisation locale

### Outils :

- La ligne de niveau de notre fonction  $V_{min}(x)$  est définie par :

$$\begin{aligned}L_{V_{min}}(\gamma) &= \{x \in \mathbb{R}^n; V_{min}(x) \leq \gamma\} \\ &= \bigcup_{j \in \mathcal{I}_N} \{x \in \mathbb{R}^n; V(j; x; \varphi_j(\mathcal{C}_j x)) \leq \gamma\}.\end{aligned}$$

et l'ensemble  $L_{V_{min}}(1)$  sera considéré comme une estimation de  $\mathcal{B}_0$ .

- Considérer la condition de secteur  $SC_{u_k}$  pour la zone-morte associé au  $i$ -ème mode actif :

$$SC_{u_k} = \Psi'(u_k) U_i [\Psi(u_k) - J_{1,i} x_k - J_{2,i} \varphi_i(y_k)] \leq 0, \quad (34)$$

- qui n'est vérifiée que localement dans l'ensemble :

$$\mathcal{I}_i(\hat{K}_i - \hat{J}_i, \rho) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{n+p}; -\rho \leq (\hat{K}_i - \hat{J}_i)\theta \leq \rho \right\}, \quad (35)$$

seulement pour le  $i$ -ème mode actif.

# Particularités des deux cadres selon hypothèses sur $\sigma$

## Système Lur'e à commutations saturé

Outils	$\sigma$ – arbitraire	$\sigma$ – commande
Fonction de Lyapunov	$V(i; x; \varphi_i(C_i x))$	$V_{\min}(x_k) = \min_{i \in \mathcal{I}_N} V(i; x; \varphi_i(C_i x))$
$\delta_k V$	Lyapunov	Lyapunov-Metzler
Estimation $\mathcal{B}_0^3$	$\bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} L_{V_i}(1)$	$\bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} L_{V_i}(1) = L_{V_{\min}}(1)$
SC en $k$ en $k + 1$	mode actif mode actif	mode actif $\forall j \in \mathcal{I}_N$
Stabilité des modes	oui	non
Critère d'optimisation	$\mu$ t.q. $\mathcal{E}(\mu I_n) \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}_N} L_{V_i}(1)$	$\sum_{i \in \mathcal{I}_N} \mu_i$ t.q. $\bigcup_{i \in \mathcal{I}_N} \mathcal{E}(\mu_i I_n) \subset L_{V_{\min}}(1)$

3.  $L_{V_i}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(i; x; \varphi_i(C_i x)) \leq 1\}$

## Illustration

### Exemple 6 : stabilisation locale

- Système Lur'e à commutations entre deux modes avec saturation  $N = n = 2$ ,  $\rho = 1$ ,  $\rho = 5$ ;  $\Omega_1 = 0.7$ ;  $\Omega_2 = 0.5$  :

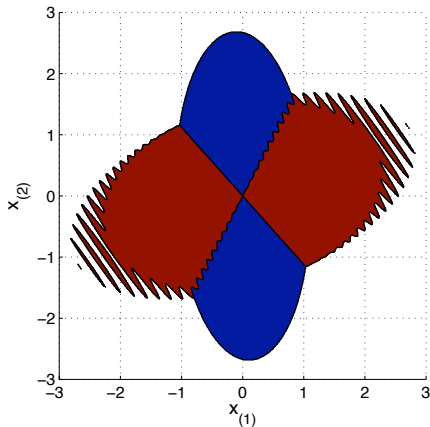
$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.4 & 0.4 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} C'_1 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1.1 & 0.6 \\ 0.3 & 1.5 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix} C'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Les non-linéarités  $\varphi_i(y)$  sont définies par,  $\forall y \in \mathbb{R}$  :  
 $\varphi_1(y) = 0.5\Omega_1 y (1 - \sin(25y))$ ;  $\varphi_2(y) = 0.5\Omega_2 y (1 + \cos(20y))$ .
- Les gains de la commande et la matrice de Metzler fixée sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0.7168 & -1.0136 \end{bmatrix}; \Gamma_1 = -1.2923; \Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -1.2581 & -0.7326 \end{bmatrix}; \Gamma_2 = -1.4650; \end{aligned}$$

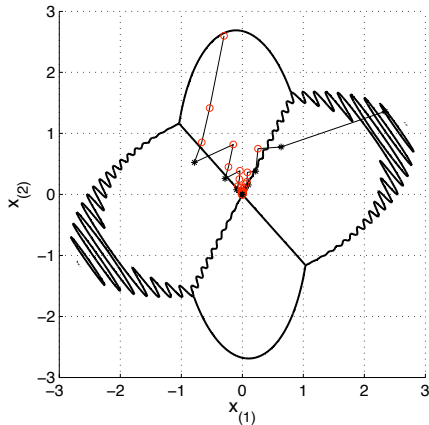
## Illustration

Partition de l'espace d'état dans l'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$   
mode 1 est la région bleue et le mode 2 est la région rouge.



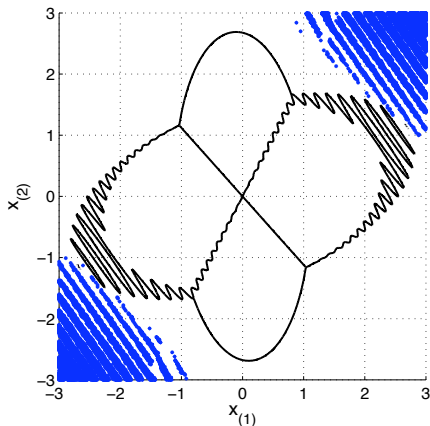
## Illustration

2 trajectoires, dont une est associée à  $x_0$  située dans  $L_{V_{\min}}(1)$  non-connexe.  
Cercle rouge (étoile noire resp.) représente le mode 1 actif (mode 2 resp.).



## Illustration

Analyse des  $x_0$  associées à des trajectoires instables.



L'ensemble  $L_{V_{\min}}(1)$  est adapté à la forme de  $B_0$ , pour notre stratégie du type *min-switching*.

Concept de problème de Lur'e

Systèmes Lur'e à commutations

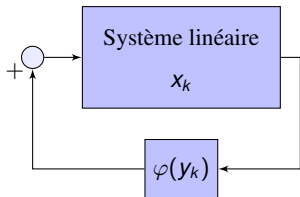
Conclusions et perspectives

## Conclusions

Système Lur'e en temps discret :

$$x_{k+1} = Ax_k + F\varphi(y_k),$$

$$y_k = Cx_k,$$



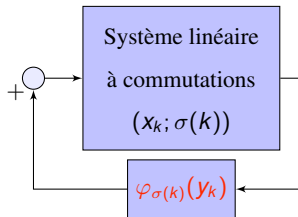
- Une nouvelle fonction de Lyapunov du type Lur'e adaptée au temps discret a été proposée :
  - permettant de résoudre le problème de Lur'e en temps discret **seulement sous l'hypothèse de la condition de secteur** ;
  - relaxant les **hypothèses classiques** sur la variation de la non-linéarité ;
  - donnant des **lignes de niveau non-connexes et non-convexes** ;
  - fournissant une estimation **adaptée au  $\mathcal{B}_0$**  de systèmes Lur'e avec commande saturée.



## Conclusions

Système Lur'e à commutations en temps discret :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_{\sigma(k)}x_k + F_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y_k), \\y_k &= C_{\sigma(k)}x_k,\end{aligned}$$



- La version étendue de notre fonction Lur'e au cadre de **fonctions de Lyapunov commutées** nous a permis de :
  - Incorporer le cas des **non-linéarités dépendantes du mode** ;
  - Traiter deux problèmes de base des systèmes à commutations :
    - analyse de stabilité globale/locale lorsque la **loi de commutation est arbitraire** ;
    - stratégie de commutation du type **min-switching** menant à des partitions de l'espace d'état **non restreintes à des régions coniques** ;
    - ligne de niveau **non-connexe et non-convexe** adaptée au  $\mathcal{B}_0$  de systèmes Lur'e à commutations avec la saturation, dans **les deux cadres**.

## Perspectives :

### Système Lur'e classique

- étude des **fonctions de Lyapunov-Lur'e** pour des non-linéarités vérifiant une **condition de secteur locale** ;
- considérer d'autres aspects de **performance** (ex. : **gain  $\mathcal{L}_2$  induit** pour un bruit additif) ;
- correcteur du type **retour dynamique de sortie**.

### Système Lur'e à commutations

- Commutation arbitraire :
  - correcteur du type **retour dynamique de sortie** ;
  - critères de performance – **gain  $\mathcal{L}_2$  induit** ;
  - supposer des contraintes sur les lois de commutations. Ex. : **temps de maintien**.
- Commutation commande :
  - **commande conjointe** (correcteur + loi de commutation) ;
  - correcteur du type **retour dynamique de sortie** ;
  - critère de performance – **gain  $\mathcal{L}_2$  induit**.

Merci de votre attention.

## Références associées aux travaux de la thèse

### Articles de revue :

- M. Jungers, C. A. C. Gonzaga and J. Daafouz. Min-switching local stabilization for discrete-time switching systems with non-linear modes. *submitted*.
- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers and J. Daafouz. Stability analysis of discrete-time Lur'e systems. *Automatica*, 48(9) : pp. 2277-2283, 2012.
- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers and J. Daafouz. Stability analysis and stabilization of discrete-time switched non-linear systems. *International Journal of Control*, Vol. 85, Issue 7, pp. 822-829, 2012.

### Conférences internationales :

- M. Jungers, C. A. C. Gonzaga and J. Daafouz. Min-switching stabilization for discrete-time switching systems with non-linear modes. In *4th IFAC-ADHS*, pp. 234-239. Eindhoven, the Netherlands, 6-8th June 2012.
- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz and E. B. Castelan. A new class of Lyapunov functions for nonstandard switching systems : the stability analysis problem. In *50th IEEE CDC-ECC'11*, pp. 411-416. Orlando, USA, December 2011.
- C. A. C. Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz and E. B. Castelan. Stabilization of Discrete-time Nonlinear Systems subject to Input Saturations : a New Lyapunov Function Class. In *IFAC World Congress*, pp. 3403-3408. Milan, Italy, 2011, August 28 - September 2, 2011.