



**HAL**  
open science

# Dégénérescence quantique d'un système de bosons chargés identiques de spin zéro dans un piège de Paul

Fernand Tshizanga Mpinga

► **To cite this version:**

Fernand Tshizanga Mpinga. Dégénérescence quantique d'un système de bosons chargés identiques de spin zéro dans un piège de Paul. Physique des plasmas [physics.plasm-ph]. Université Pédagogique Nationale, 2011. Français. NNT: . tel-00760356

**HAL Id: tel-00760356**

**<https://theses.hal.science/tel-00760356>**

Submitted on 6 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

République Démocratique du Congo  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et Universitaire  
Université Pédagogique Nationale  
Faculté des sciences  
Kinshasa

---

Dégénérescence quantique d'un système de bosons chargés  
identiques de spin zéro dans un piège de Paul

Thèse présentée par

**Fernand Tshizanga Mpinga**

Pour l'obtention du titre de  
Docteur en Sciences  
Option : Physique  
Orientation : Physique Théorique

Directeur de thèse : Philippe Badibanga Mudibu, Professeur Emérite  
Co-directeur de thèse : Benjamin Ntampaka Biruga, Professeur Ordinaire

2011

## Remerciements

*Au terme de mes recherches de thèse je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à sa réalisation. Je remercie en premier lieu le Professeur Philippe Badibanga Mudibu de l'Université de Kinshasa, qui a dirigé cette thèse en dépit de ses innombrables occupations. Je me souviens de ces nombreuses rencontres que nous avons eues dans son bureau chaque jeudi de Juin et de Juillet 2010, qui m'ont permis d'exposer et discuter les résultats de mes recherches ; ses conseils ont permis de bien définir le contenu et la forme de ce travail.*

*Mes remerciements s'adressent également au Professeur Benjamin Ntampaka de l'Université Pédagogique Nationale de Kinshasa, qui a contribué à la réalisation de cette thèse en qualité de co-directeur. Ses conseils en matière de la documentation ont permis que je puisse disposer des bonnes sources pour cette thèse.*

*La documentation reçue de la part de Professeur Philippe Nozières de Grenoble au début de ma formation doctorale a été d'une très grande importance pour cette thèse. Je tiens une fois de plus à le remercier pour sa générosité.*

*Les professeurs Butsana et Phuku de l'Université de Kinshasa m'ont encouragé à travailler à cette thèse, je les remercie de tout mon cœur.*

*Je suis très reconnaissant à mon fils Nathan Mbuyamba Tshizanga pour la documentation électronique et de la maintenance du matériel informatique des années durant.*

*Que le Chef de Travaux Kasongo Muanza trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour la documentation gracieusement mise à ma disposition et pour ses encouragements.*

*A mes frères et sœurs en Christ pour leurs prières en ma faveur et leur soutien moral j'adresse mes remerciements.*

*Que les professeurs Phuku, Musongele, Pongi, Maguiraga, Kabeya, Kabasele et Badibanga trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour leurs observations formulées lors de la soutenance privée et qui ont permis d'améliorer la présentation de ce travail.*

*A celui qui a créé l'homme à son image et lui a confié la mission d'assujettir la terre je rends hommage.*

*Fernand Tshizanga Mpinga*

## **Le jury**

Cette thèse a été soutenue le 09 Juillet 2011 devant le jury composé de

1 Président, Professeur Ordinaire Phuku Puati, Vice-doyen de la faculté des sciences, Université de Kinshasa ;

2 Secrétaire, Professeur Associé Musongele Lubo, Département de Physique, Université de Kinshasa ;

3 Directeur de thèse, Professeur Emérite Badibanga Mudibu, Département de Physique, Université de Kinshasa ;

4 Membre, Professeur Pongi Nzita, Département de Chimie, Université Pédagogique Nationale ;

5 Membre, Professeur associé Kabasele Yenga-Yenga, Département de Physique, Université Pédagogique Nationale.

## Liste des symboles

$\Gamma_e$  : le rapport de l'énergie de Coulomb à l'énergie thermique

$\Gamma(3/4)$  : la fonction gamma

$\vec{p}$  : le moment linéaire ou impulsion

$\vec{r}$  : le vecteur position

$\Omega$  : le volume

L : la longueur

N : le nombre de particules

T : la température

$T_C$  : la température critique

$\varepsilon_j$  : l'énergie du niveau j

$\varepsilon_{min}$  : l'énergie minimale

$N_j$  : le nombre de particules dans le niveau j

$N_0$  : le nombre de particules dans le niveau fondamental

$\mu$  : le potentiel chimique

$k_B$  : la constante de Boltzmann

$\beta$  : l'inverse de l'énergie thermique  $\frac{1}{k_B T}$

$\hat{h}$  : l'opérateur Hamiltonien à un corps

$N'$  : le nombre de particules dans les niveaux excités de  $\hat{h}$

$N'_{max}$  : le nombre de saturation

$\nu$  : la fréquence

$\omega$  : la pulsation

x, y, z ; les coordonnées ou les degrés de liberté

$(n_x, n_y, n_z)$  : les nombres quantiques caractérisant l'état de vibration de l'oscillateur selon les trois axes

n : nombre quantique principal

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  : les pulsations de l'oscillateur selon les trois axes

$\hbar$  : la constante de Planck réduite

$g_n$  : la dégénérescence d'un niveau d'énergie d'un oscillateur harmonique

$\Xi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  : l'état fondamental de N bosons sans interaction

$V_{ext}$  : énergie potentielle externe

$\varphi_0(\vec{r}_i)$  : le plus bas état à simple particule

$\omega_{RF}$  : la pulsation radiofréquence

$\omega_{h0}$  : la pulsation de l'oscillateur

$r_{\perp}$  : la coordonnée radiale

$\lambda$  : le rapport entre deux pulsations

$E_0$  : l'énergie de l'état fondamental

$\rho$  : la densité de particules ou le nombre de particule par unité de volume

$e_0(\rho)$  : l'énergie par particule dans l'état fondamental

$I_0$  : la constante de la loi de Foldy

$l_{cor}$  : la longueur de corrélation

$\varphi(x)$  : le champ scalaire réel

$\Pi(x)$  : le conjugué canonique du champ  $\varphi(x)$

$\hat{\varphi}(x)$  : l'opérateur champ

$\hat{\Pi}(x)$  : l'opérateur champ conjugué canonique

$\vec{k}$  : l'impulsion d'une particule dans le système naturel ( $\hbar = 1$ )

$\hat{a}^{\dagger}, \hat{b}^{\dagger}$  : les opérateurs bosons et anti-boson de création

$\hat{c}^{\dagger}$  : l'opérateur fermion de création

$\hat{a}, \hat{b}$  : les opérateurs bosons et anti-boson d'annihilation

$\hat{c}$  : l'opérateur fermion d'annihilation

$\hat{\psi}(\vec{r})$  : l'opérateur champ d'annihilation d'une particule d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$

$\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r})$  : l'opérateur champ de création d'une particule d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$

$\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  : delta de Dirac

$\Psi_0$  : état fondamental d'une mer de Fermi

$\Psi_{vide}$  : l'état vide

$\eta$  : la densité de particules

$\eta_{max}$  : la densité maximale de particules

$N_0^{(+)}$  : le nombre des bosons condensés

$N_0^{(-)}$  : le nombre des anti-bosons condensés

$N_{\vec{p}}^{(+)}$  : le nombre des bosons excités  
 $N_{\vec{p}}^{(-)}$  : le nombre des anti-bosons excités  
 $\zeta$  : le rapport entre l'énergie d'un phonon et l'énergie thermique  
 $nK$  : nano Kelvin  
 $V_{RF}$  : la tension radiofréquence  
 $U_0$  : l'amplitude de la tension sinusoïdale  
 $U_c$  : la tension continue  
 $V_{ec}$  : la tension positive des endcaps  
 $\Phi_{mod}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  : le potentiel quadrupolaire modulé au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$   
 $\Phi_{stat}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  : le potentiel quadrupolaire statique au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$   
 $\Phi_{total}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  : le potentiel quadrupolaire total au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$   
 $\psi_{eff}$  : le potentiel efficace  
 $\bar{D}_z, \bar{D}_x$  : la profondeur du puits de potentiel  
 $t$  ; le temps  
 $v$  : la vitesse de l'ion  
 $U$  : tension totale  
 $Ze$  : la charge d'une particule  
 $R$  : le rayon  
 $r_0$  : le rayon du piège dans la section XOY  
 $m$  : la masse de la particule  
 $a, q$  : les paramètres de Mathieu  
 $\hat{\rho}(\vec{r}', \vec{r})$  : l'opérateur matrice densité à une particule  
 $\rho(\vec{r}', \vec{r})$  : la matrice densité à une particule  
 $\rho^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}')$  : la matrice densité à une particule des bosons  
 $\rho^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}')$  : la matrice densité à une particule des anti-bosons  
 $Y_+(\vec{r}')$  : la fonction d'onde du condensat des bosons  
 $Y_-(\vec{r}')$  : la fonction d'onde du condensat des anti-bosons  
 $V_0$  : l'interaction directe  
 $V_q$  : l'interaction des échanges  
 $\varepsilon_i^0$  : l'énergie d'une particule sans interaction dans l'état fondamental

## Résumé

Les bosons chargés identiques confinés dans une grande boîte dont les parois portent une charge de signe contraire mais de même densité assurant la neutralité du système, constituent un plasma neutre à une composante. On obtient un plasma neutre à deux composantes lorsque les bosons identiques de charge positive et ceux de charge négative de même densité sont contenus dans la même boîte.

Le plasma non-neutre des bosons s'obtient en confinant l'assemblée des bosons identiques chargés dans un piège des particules chargées de Penning ou de Paul. Nous avons fait l'étude théorique de la dégénérescence quantique du plasma non-neutre des bosons de spin zéro confinés dans un piège de Paul à haute densité et à très basse température.

Cette étude a porté d'abord sur un système sans transition de phase dans le piège, et ensuite sur le régime gazeux (de Mathieu) et sur le régime intermédiaire (liquide).

Nous avons utilisé la théorie microscopique en considérant le champ scalaire complexe ou champ des mésons chargés pour construire les opérateurs bosons chargés de spin zéro, définir l'espace des états quantiques du système, construire les opérateurs champs de création et d'annihilation des bosons d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$ . Ces derniers nous ont permis de construire l'opérateur Hamiltonien de la seconde quantification du plasma et la matrice densité à une particule.

La matrice densité du plasma non neutre de bosons de spin zéro et la prescription de Bogoliubov révèlent l'occupation macroscopique d'un état quantique dans le piège harmonique radiofréquence de Paul.

Nous avons déterminé pour ce plasma l'énergie de l'état fondamental, le spectre des excitations élémentaires, l'équation de Hartree-Fock etc. Nos résultats sont comparés dans un tableau aux résultats de l'application de la théorie microscopique aux assemblées des bosons neutres confinés dans un piège magnétique et au gaz électronique.

## Abstract

The One- and Two- components Bose charged gas are obtained in a large box. They constitute the neutral bosonic plasma. One obtains the non neutral bosonic plasma by confining identical charged particles of integer spin in Penning or Paul traps. By laser cooling one obtains ultra-cold plasma in the Paul trap.

We studied the quantum degeneracy of non neutral plasma of spin zero identical particles, at high density and low temperatures in harmonic Paul trap. We used the microscopic theory. The charged meson field was considered to construct the bosons operators, the space of quantum states, the fields operators of creation or annihilation of bosons of  $\vec{p}$  impulsion at the point  $\vec{r}$ . From these fields operators, we constructed the Hamiltonian operator of second quantization of the plasma and we determined the density matrix, the equation of motion, the Hartree-Fock equation, the elementary excitation specter, the ground state energy ...The density matrix leads to the macroscopic occupation of one quantum state of particle (BEC) in the trap.

## Table des matières

1 Introduction .....	1
1.1 Contexte général.....	1
1.2 Motivations.....	3
1.3 Travail présenté.....	4
2 Généralités .....	5
2.1 Gaz des bosons neutres sans interaction dans un piège harmonique.....	5
2.1.1 Nombre de saturation.....	6
2.1.2 Température critique.....	9
2.2 Plasma neutre de bosons ou gaz de Bose chargé dans une boîte.....	10
2.2.1 Plasma neutre à une composante.....	10
2.2.2 Plasma neutre à deux composantes.....	10
2.3 Méthode d'étude à utiliser.....	11
2.3.1 Cadre conceptuel.....	11
2.3.2 Théorie microscopique.....	11
3 Formation et refroidissement du plasma non neutre des bosons identiques de spin zéro .....	15
3.1 Plasma non neutre des bosons.....	15
3.2 Assemblées des bosons chargés de spin zéro.....	15
3.1.1 Noyaux atomiques de spin zéro.....	15
3.1.2 Ions de spin zéro.....	16
3.3 Principe de piège de Paul linéaire.....	17
3.4 Refroidissement du plasma non neutre .....	24
3.5 Régimes du système dans le piège .....	24
3.6 Densité maximale du plasma non neutre des bosons dans le piège .....	26
3.7 Piège de Paul linéaire de dimension centimétrique .....	27
3.8 Conclusion partielle .....	28
4 Construction des opérateurs champs d'annihilation et de création des bosons d'impulsion $\vec{p}$ .....	30
4.1 Identification du champ des bosons chargés de spin zéro .....	30

4.2 Opérateurs bosons .....	31
4.3 Espace des états quantiques du système .....	31
4.4 Opérateurs champs d'annihilation et de création des bosons d'impulsion $\vec{p}$ au point $\vec{r}$ .....	33
4.5 Test des opérateurs champs .....	34
4.6 Conclusion partielle .....	35
5 Paramètres de la dégénérescence quantique et propriétés d'un plasma non neutre de bosons de spin zéro dégénéré dans le piège de Paul .....	36
5.1 Système sans transition des phases .....	36
5.1.1 Recherche des paramètres de la dégénérescence .....	36
5.1.1.1 Ordre à longue portée .....	36
5.1.1.2 Diagonalisation de la matrice densité à une particule .....	39
5.1.1.3 Approximation de Bogoliubov et paramètre d'ordre .....	40
5.1.2 Propriétés du plasma dégénéré .....	41
5.1.2.1 Evolution temporelle de l'opérateur champ de Heisenberg .....	41
5.1.2.2 Equation de Hartree-Fock des bosons chargés de spin zéro .....	45
5.1.2.3 Excitations élémentaires dans le piège .....	46
5.1.2.4 Energie de l'état fondamental du système .....	47
5.2 Régimes dans le piège de Paul .....	48
5.2.1 Régime de Mathieu .....	48
5.2.2 Régime liquide .....	50
5.3 Comparaison des résultats .....	53
<b>Conclusion</b> .....	<b>61</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>63</b>
<b>Annexe</b> .....	<b>69</b>
<b>Appendice Didactique</b> .....	<b>74</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte général

Les études théoriques sur la dégénérescence quantique des systèmes de particules identiques portant la charge électrique ont été menées par plusieurs chercheurs, nous citerons les travaux sur le gaz d'électrons de Wigner et Seitz, de P. Nozières et D. Pines, de C. Kittel, de Pippard, de Mott, de Landau et Silin, etc. [66] Les études de gaz électronique visent surtout à résoudre le problème de gaz d'électrons dans les métaux [48, 66], et elles portent soit sur le modèle de plasma neutre à une composante ou soit sur celui à deux composantes. Dans le modèle de plasma neutre à une composante, le gaz d'électrons est contenu dans une boîte dont les parois portent une charge de signe positive de même densité assurant la neutralité du plasma. Dans le modèle à deux composantes les porteurs de charge positive de même densité sont répartis au sein du gaz électronique dans la boîte [54, 66].

Les études de plasma neutre de bosons chargés identiques à une composante et à deux composantes dans des boîtes ont été faites par Foldy, Graf, Solovej, Dayson dont quelques résultats sont présentés dans l'ouvrage [54].

Depuis des décennies des études théoriques et expérimentales sur des particules chargées (leptons, noyaux atomiques, ions) piégées dans des champs magnétique et électrique sont menées. Elles visent entre autre l'informatique quantique ; les ions piégés constituent un candidat intéressant pour l'implémentation d'une mémoire quantique [69]. Dans le piège des particules chargées de Paul ou de Penning, le plasma confiné dans les champs magnétique et électrique est non neutre [18].

Dans les années 80 l'objectif général des travaux théoriques et expérimentaux effectués sur les particules chargées était de ralentir, refroidir, piéger une particule chargée, de manière à pouvoir l'observer dans des conditions aussi pures que possible, et pendant des temps aussi longs que

possible afin d'éliminer toutes les perturbations liées aux collisions, à l'effet Doppler, à l'élargissement dû au temps de transit...[18]. Deux grands domaines d'application étaient à distinguer suivant que les particules chargées étaient des leptons (électrons, positrons, muons) ou des ions. Dans le premier cas, la mesure précise du moment magnétique de spin de la particule permettait d'évaluer les corrections radiatives à ce moment magnétique et de tester ainsi des théories comme l'électrodynamique quantique et des symétries fondamentales comme la symétrie particule-antiparticule. Dans le second cas, l'étude à haute résolution des diverses transitions d'un ion piégé avait des applications importantes dans divers domaines comme la spectroscopie de masse, la spectroscopie optique et microonde, les standards de fréquence [18, 69].

En 2008 Daniel Comparat écrit dans son mémoire d'Habilitation à diriger des recherches [26] : « L'observation d'un plasma corrélé est depuis toujours la quête des chercheurs étudiant les plasmas ultra-froids. On pourrait même envisager des états de dégénérescence quantique en approchant les températures de Fermi. Afin d'atteindre ces buts, les recherches actuelles s'orientent vers le contrôle de la recombinaison à trois corps et de l'effet de chauffage induit par le désordre initial qui ont empêché jusqu'à présent l'observation du régime corrélé dans les plasmas ultra froids. Des prédictions théoriques [Pohl et al. 2004c] du groupe de Dresde montrent par exemple qu'en ionisant un gaz d'atomes parfaitement ordonnés, comme issu d'une transition de Mott [Greiner et al. 2002], il est possible d'atteindre un régime ionique corrélé. Le même groupe a aussi prédit [Pohl et al. 2004a] qu'un refroidissement laser des ions du plasma permet d'effectuer une mélasse optique ralentissant l'expansion du plasma et permettrait d'atteindre un régime ionique corrélé. Le piégeage des plasmas ultra-froids est en effet un enjeu important. Il est utile de noter qu'en ne piégeant qu'un type de particule (ion ou électron) l'autre est quasiment automatiquement piégé par la charge d'espace. Le groupe de G. Raithel vient par exemple très récemment de réaliser le piégeage d'un plasma mais dans un piège de type Penning où les effets de champ magnétique sont très importants [Choi et al. 2008]. Pour ma part, il me semble que la possibilité d'utiliser un laser externe pour agir sur les ions en les refroidissant par exemple, est extrêmement attractive et, comme mentionné précédemment, nous réfléchissons à l'opportunité de débiter une expérience avec des ions Ytterbium qui pourrait permettre de refroidir un gaz de Rydberg ou même un plasma. Il reste néanmoins à éviter la recombinaison à trois corps. L'utilisation d'un plasma moléculaire pourrait être intéressante. Une autre idée pourrait être d'ioniser les atomes de Rydberg formés lors de cette recombinaison, soit en utilisant un rayonnement micro-onde [Fletcher et al. 2007], soit un laser à CO<sub>2</sub> [Gabbanini, 2006]. La difficulté est évidemment de bien contrôler le processus pour ne pas simultanément trop chauffer les électrons du plasma. »

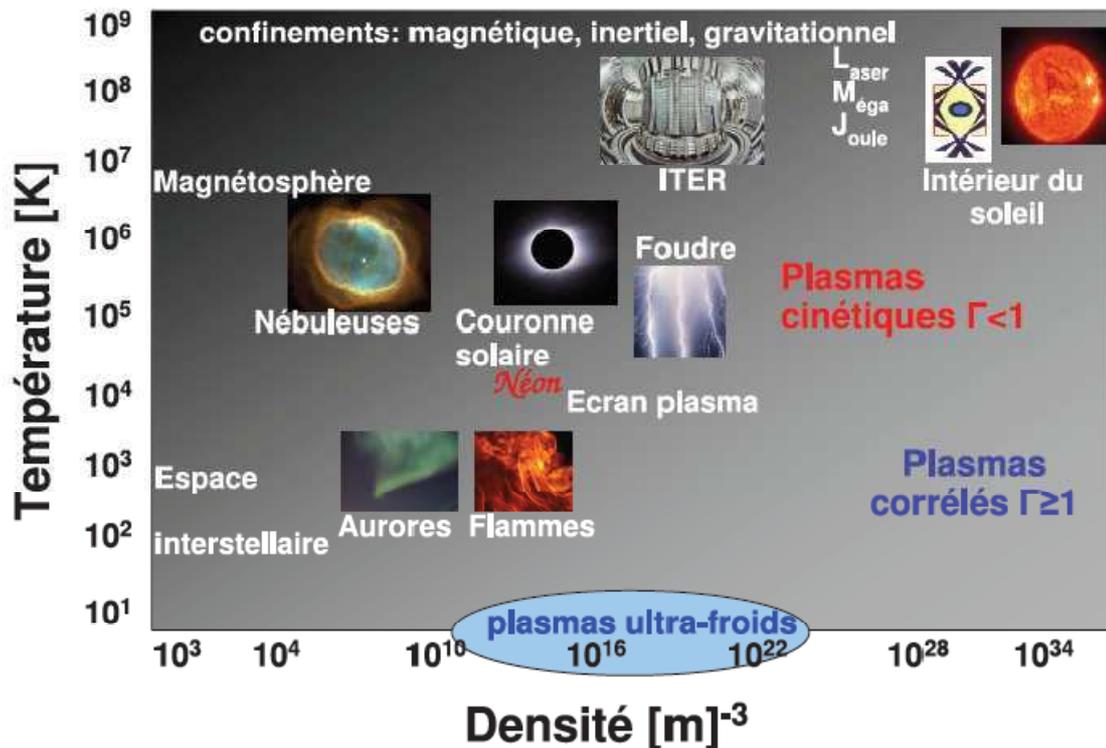


Fig. 1.1 – Classification de plasmas naturels ou de laboratoire repérés par leur température en Kelvins et par leur densité exprimée en particules chargées par mètre cube. Dans la zone foncée le plasma est dit cinétique ( $\Gamma_e < 1$ ), tandis que dans la zone claire le plasma est dit fortement corrélé ( $\Gamma_e > 1$ ) où  $\Gamma_e$  est le rapport de l'énergie de Coulomb à l'énergie thermique.

Source : Mémoire d'Habilitation à diriger des Recherches de Daniel Comparat, 2008

En 2009 Sébastien Removille a développé pour sa thèse de doctorat un ensemble expérimental capable de confiner, refroidir et observer plusieurs millions d'ions. Un piège de Paul linéaire de dimensions centimétriques a été dessiné et fabriqué au laboratoire pour confiner les ions et faciliter le régime de très basse température. En utilisant la technique de refroidissement laser, il a atteint ce régime dans lequel les ions adoptent une structure spatiale périodique, le cristal de Wigner [69].

## 1.2 Motivations

Les particules piégées et refroidies dans les laboratoires sont soit des fermions soit des bosons. A basse température ou à haute densité les propriétés quantiques des particules se manifestent[24]. Les particules obéissent à des statistiques différentes selon qu'elles sont des fermions ou des bosons [71]. Les gaz de Bose chargés dans une boîte (plasma neutre des bosons) ont fait l'objet des études[53, 54], cependant le gaz de Bose chargé de spin zéro confiné dans un piège de Paul (plasma non neutre des bosons de spin zéro) n'a pas fait l'objet d'une étude de la dégénérescence quantique à basse température ou à haute densité.

Notre étude porte sur la dégénérescence quantique d'un système de particules chargées identiques de spin zéro (nuclides ou ions) confinées dans un piège de Paul à basse température et à haute densité. Nous visons dans cette étude la recherche des paramètres de la dégénérescence et la détermination des propriétés du plasma non neutre de bosons de spin zéro dégénéré dans le piège harmonique.

### 1.3 Travail présenté

Ce travail comporte en plus de ce chapitre premier consacré à l'introduction, cinq autres chapitres dont la conclusion générale. Le chapitre 2 traite des généralités, nous y présentons quelques théories contemporaines qui seront utilisées dans cette étude, il s'agit du nombre de saturation, de la température critique du système de bosons neutres dans un piège harmonique et de la théorie microscopique de la dégénérescence quantique d'un système de particules identiques confinées à basse température. Nous donnons dans ce même chapitre quelques résultats des études contemporaines sur le gaz de Bose chargé confiné dans une boîte. Le chapitre 3 est consacré à la formation du plasma non neutre des bosons identiques de spin zéro, nous y présentons les systèmes de particules chargées de spin zéro (noyaux atomiques et ions), le principe du piège de Paul, le refroidissement des particules chargées, les différents régimes dans le piège, la densité des particules dans le piège et le piège de Paul linéaire centimétrique. Dans le chapitre 4 nous construisons les opérateurs champs d'annihilation et de création des bosons d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  du plasma non neutre dans un piège de Paul. Ces opérateurs champs constituent le point capital de la théorie microscopique de la dégénérescence quantique d'un système de particules donné. Le chapitre 5 est destiné à l'application de la théorie microscopique de la dégénérescence au plasma non neutre des bosons identiques de spin zéro dans un piège de Paul. Les paramètres de la dégénérescence quantique du système sont déterminés à savoir l'ordre à longue portée, la diagonalisation de la matrice densité à une particule et le paramètre d'ordre ; nous y cherchons les propriétés du plasma dégénéré : la dynamique du plasma, le spectre des excitations élémentaires et l'énergie de l'état fondamental. Nous terminons ce chapitre par une comparaison de nos résultats avec ceux connus du système de bosons neutres confinés dans un piège harmonique magnétique ainsi que ceux du gaz électronique. Le chapitre 6 est la conclusion générale.

## Chapitre 2

### Généralités

#### 2.1 Gaz des bosons neutres sans interaction dans un piège harmonique

La théorie de gaz idéal de Bose est un exemple de l'étude théorique sur la dégénérescence quantique d'un système de bosons identiques neutres et indiscernables. Elle débuta avec les travaux de Planck sur l'interprétation de la distribution spectrale du rayonnement en équilibre thermodynamique avec les parois d'une enceinte dans laquelle il est enfermé. Nath Bose, en 1924, donna une démonstration de la formule de Planck. Il traitait le rayonnement lumineux comme un gaz de particules identiques, les quanta. En cherchant la distribution la plus probable en énergie des particules Bose retrouva la loi de Planck [24]. Albert Einstein généralisa l'approche de Bose à l'étude d'un gaz de particules matérielles identiques et dans deux articles parus en 1924, il établit l'expression de la distribution en énergie d'un gaz idéal monoatomique, connue sous le nom de distribution de Bose [24].

Les travaux théoriques d'Einstein contenus dans son second article conduisirent à un effet curieux. Si, à volume  $\Omega$  et à nombre total  $N$  d'atomes fixés, on diminue la température  $T$  du gaz, on trouve qu'en dessous d'une certaine température critique  $T_c$ , les atomes doivent s'accumuler dans l'état fondamental de la boîte contenant les atomes. Cet état acquiert ainsi une population macroscopique, qui peut devenir de l'ordre de  $N$  quand on continue à diminuer la température. C'est le phénomène appelé *condensation de Bose-Einstein* [1, 22, 67]. On obtient le même phénomène si, à volume et température fixés, on ajoute les atomes au système [24].

La condensation de Bose-Einstein a été observée en 1995 dans des expériences remarquables des vapeurs de rubidium et sodium dans lesquelles les atomes bosoniques étaient confinés dans des pièges magnétiques et refroidis à quelques microkelvins [31, 78].

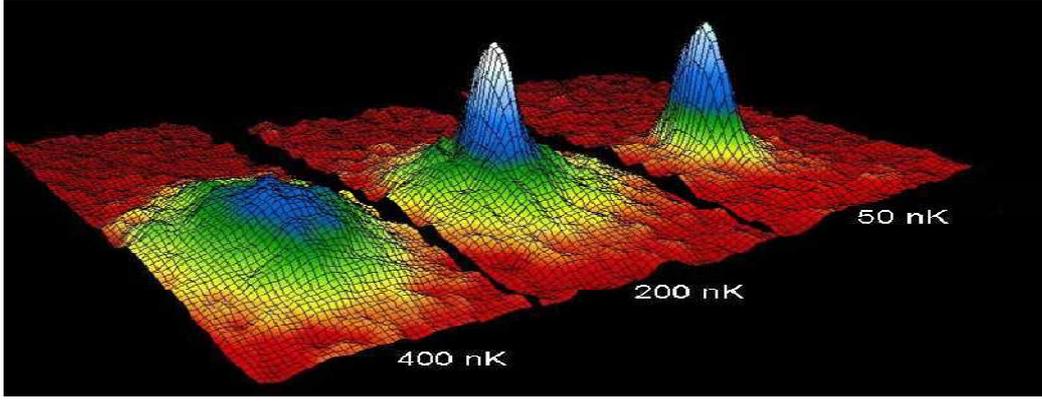


Fig. 2.1 La condensation de Bose-Einstein (JILA, 1995) .Ces images, qui font partie des résultats expérimentaux d'Eric Cornell et de Carl Wieman, représentent la distribution des vitesses des atomes de rubidium juste avant l'apparition du condensat de Bose-Einstein, juste après sa formation, et enfin après l'évaporation ultime qui permet d'obtenir un condensat très pur. À chaque fausse couleur est associé un nombre d'atomes évoluant à une certaine vitesse : les zones de couleur rouge représentent les atomes les moins nombreux mais les plus rapides ; tandis que les zones de couleurs blanche et bleue claire correspondent aux atomes les plus nombreux et les plus lents.

Source : Stringari, collège de France 2004/2005

### 2.1.1 Nombre de saturation dans un piège harmonique

Considérons la distribution de Bose pour un gaz de bosons [22, 67]

$$N_j(\mathcal{E}_j) = \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{E}_j - \mu)} - 1} \quad (2.1)$$

et faisons tendre le potentiel chimique  $\mu$  vers l'énergie minimale  $\mathcal{E}_{min}$ , à température fixée, le nombre de particules  $N_0$  dans le niveau fondamental de  $\hat{h}$  tend vers l'infini

$$\mu \rightarrow \mathcal{E}_{min} \quad ; \quad N_0 \cong \frac{k_B T}{\mathcal{E}_{min} - \mu} \quad (2.2)$$

Pour le gaz piégé par un potentiel harmonique ou confiné dans une enceinte de taille finie le spectre de l'opérateur Hamiltonien à un corps  $\hat{h}$  est discret [22]. Le nombre de particules  $N'$  dans les niveaux excités de  $\hat{h}$  est borné supérieurement [22, 24, 68]

$$N' = \sum'_j \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{E}_j - \mu)} - 1} < N'_{max} = \sum'_j \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_{min})} - 1} \quad (2.3)$$

où  $\sum'$  représente la somme sur tous les états propres  $j$  de  $\hat{h}$  sauf l'état fondamental. On appelle *nombre de saturation* dans le piège la valeur de  $N'_{max}$  [22]. L'existence de ce nombre, qui représente une borne supérieure au nombre de particules que l'on peut disposer dans les états autres que le niveau fondamental, peut être considéré comme une signature de la condensation de Bose-Einstein : si,

à une température fixée, on place dans le piège un nombre de particules  $N$  supérieur à  $N'_{max}$ , on est certain qu'au moins  $N - N'_{max}$  particules iront se loger sur le niveau fondamental [22, 24, 68].

Le nombre de particules dans l'état fondamental ou dans le condensat de Bose-Einstein (BEC) étant  $N_0$ , le mécanisme de BEC s'écrit [79].

$$N_0 = N - N'_{max} = N - \sum_j' \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \varepsilon_{min})/k_B T} - 1} \quad (2.4)$$

Nous voyons que le nombre de particules dans les états excités ou en dehors de BEC dépend uniquement de la température du système.

Pour un piège harmonique isotrope de fréquence  $\nu = \omega/2\pi$ , les niveaux d'énergie de  $\hat{h}$  sont caractérisés par trois nombres quantiques  $(n_x, n_y, n_z)$  caractérisant l'état de vibration de l'oscillateur selon les trois axes. L'énergie correspondante est

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2) \quad \varepsilon_{min} = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad (2.5)$$

Chaque niveau d'énergie de l'oscillateur harmonique a une dégénérescence donnée par [22]

$$g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad n = n_x + n_y + n_z \quad (2.6)$$

Le nombre de saturation peut s'écrire en fonction de la dégénérescence

$$N'_{max} = \sum_{(n_x, n_y, n_z) \neq (0,0,0)} \frac{1}{e^{(n_x+n_y+n_z)\zeta} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{e^{n\zeta} - 1}, \quad \zeta = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (2.7)$$

Dans la limite où le quantum de vibration  $\hbar\omega$  est très petit devant l'énergie thermique  $k_B T$ , soit  $\zeta \ll 1$ , on peut calculer de manière approchée cette somme discrète en la remplaçant par une intégrale. On trouve [22, 24, 31, 46]

$$N'_{max} \cong 1.202 \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 \quad (2.8)$$

En pratique une fréquence typique de piège harmonique est de l'ordre de 100 Hz, soit  $\frac{\hbar\nu}{k_B} \sim 5 \text{ nK}$ . Pour un gaz refroidi à 200 nK, le nombre maximal d'atomes en dehors de l'état fondamental est alors de 80 000 [22].

Dans le cas d'un piège anisotropique, l'énergie potentielle harmonique est [31]

$$V_{ext} = \frac{1}{2} m [\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2] \quad (2.9)$$

L'énergie correspondant au niveau d'énergie est donnée par

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z \quad (2.10)$$

où  $\{n_x, n_y, n_z\}$  sont des entiers positifs. L'état fondamental  $\Xi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  de N bosons sans interaction confinés par le potentiel (2.9) est obtenu en mettant toutes les particules dans le plus bas état à simple particule ( $n_x = n_y = n_z = 0$ ), [46]

$$\Xi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \prod_i \varphi_0(\vec{r}_i) \quad (2.11)$$

où  $\varphi_0(\vec{r})$  est donné par

$$\varphi_0(\vec{r}) = \left(\frac{m\omega_{h0}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right] \quad (2.12)$$

On a introduit la moyenne géométrique des fréquences de l'oscillateur [31]

$$\omega_{h0} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \quad (2.13)$$

La forme du champ de confinement fixe la symétrie du nuage des bosons dans le piège. On peut utiliser le piège sphérique ou à symétrie axiale. Dans le piège à symétrie axiale on définit une coordonnée axiale  $z$  et une coordonnée radiale  $r_\perp = (x^2 + y^2)^{1/2}$  et les fréquences correspondantes  $\omega_z$  et  $\omega_\perp = \omega_x = \omega_y$ . Le rapport entre les fréquences axiale et radiale  $\lambda = \omega_z/\omega_\perp$  fixe l'asymétrie du piège. Pour  $\lambda < 1$  le piège a la forme d'un cigare tandis que pour  $\lambda > 1$  la forme du piège est un disque. La condensation de Bose-Einstein commence lorsque  $\mu = \varepsilon(0,0,0)$  et le nombre de saturation est donné par [31, 79]

$$N'_{max} = \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta\hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)] - 1} \quad (2.14)$$

Par un calcul approché, on remplace la somme de (2.14) par une intégrale

[24, 31, 46]

$$N'_{max} = \int_0^\infty \frac{dn_x dn_y dn_z}{\exp[\beta\hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)] - 1} \quad (2.15)$$

Cette intégrale peut être calculée facilement si on fait le changement de variables ( $\beta\hbar\omega_x n_x = \tilde{n}_x$ , etc). On obtient [31]

$$N'_{max} \cong 1.202 \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_{h0}}\right)^3. \quad (2.16)$$

### 2.1.2 Température critique dans un piège harmonique

La température critique  $T_c$  pour laquelle le nombre de saturation  $N'_{max}$  est égal au nombre de particules dans le piège  $N$  se déduit de (2.8) ou de (2.16). Elle est donnée pour le piège isotropique par [31, 46]

$$T_c = 0.94 \frac{\hbar\omega}{k_B} N^{\frac{1}{3}} \quad \text{avec} \quad T_c > \frac{\hbar\omega}{k_B} \quad (2.17)$$

Pour le piège anisotropique, on trouve

$$T_c = 0.94 \frac{\hbar\omega_{h0}}{k_B} N^{\frac{1}{3}} \quad \text{avec} \quad T_c > \frac{\hbar\omega_{h0}}{k_B} \quad (2.18)$$

A haute température, le nombre de saturation (proportionnel à  $T^3$ ) est bien supérieur à  $N$ . Le gaz n'est que très faiblement dégénéré et on peut lui appliquer la statistique de Boltzmann. Pour  $T = T_c$ , la proportion de bosons dans l'état fondamental est encore faible devant 1, mais la population des niveaux excités est quasiment saturée. Si la température s'abaisse en dessous de  $T_c$ , on assiste à une redistribution des particules depuis les niveaux excités vers le niveau fondamental. La population des niveaux excités décroît selon la loi de saturation (2.8) [46]

$$N'(T) = 1.202 \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 = N \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (2.19)$$

La population du niveau fondamental vaut donc [24, 31, 46]

$$N_0(T) = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \right] \quad (2.20)$$

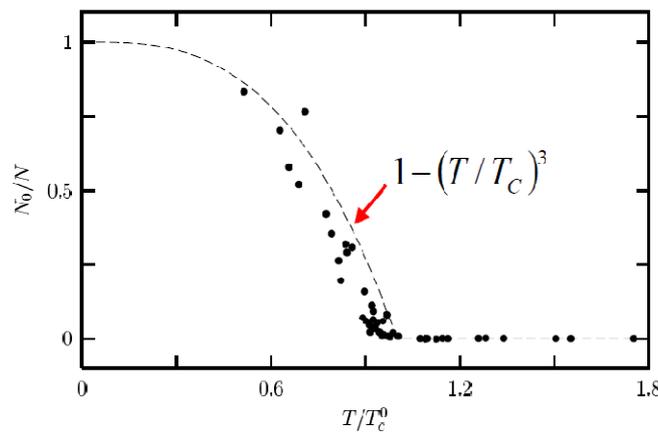


Fig.2.2 Fraction de bosons condensés  $N_0/N$  en fonction de la température réduite  $T/T_c$ . Les cercles sont les résultats expérimentaux (Jila 1996), tandis que la ligne tiretée est l'équation (2.20)

**Source:** Dalfovo F. and al. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 71, No. 3, April 1999, pp 463-512

## 2.2 Plasma neutre de bosons ou gaz de Bose chargé dans une boîte

### 2.2.1 Plasma neutre à une composante

Un plasma neutre de bosons à une composante est un système composé de  $N$  bosons identiques de charge positive confinés dans une grande boîte de volume  $L^3$  et de densité  $\rho = \frac{N}{L^3}$  ; les parois de la boîte portent une charge négative de même densité assurant ainsi la neutralité du plasma. Les études sur ce gaz sont faites en considérant la haute densité du gaz afin que l'interaction Coulombienne soit faible. Chaque particule interagit avec les autres et non avec lui-même. Nous retenons de ces études les résultats suivants [54] :

- l'énergie par particule dans la limite thermodynamique définie

$$e_0(\rho) = \lim_{L \rightarrow \infty} E_0(\rho L^3, L) / (\rho L^3) \quad (2.21)$$

existe,  $E_0(N, L)$  étant l'énergie de l'état fondamental de  $N$  bosons ;

- la loi de Foldy :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{-1/4} e_0(\rho) = -\frac{2 \Gamma(3/4)}{5 \Gamma(5/4)} \left( \frac{2}{\mu \pi} \right)^{1/4} \quad (2.22)$$

- à cause de la longue portée de l'interaction Coulombienne, il n'existe pas de longueur de diffusion  $a$  dans le gaz de Bose chargé ;
- la longueur de corrélation  $l_{cor} \sim \rho^{-1/4}$  ;
- l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont de même ordre lorsque la longueur de corrélation  $l_{cor} \sim \rho^{-1/4}$  ;
- dans la limite de haute densité  $l_{cor}$  est grande comparée à la distance interparticule.

### 2.2.2 Le plasma neutre à deux composantes

Le plasma neutre à deux composantes est composé de  $N$  particules de charge positive et  $N$  particules de charge négative confinées dans le même volume  $L^3$ . Nous retenons les résultats suivants des études théoriques du plasma neutre bosonique à deux composantes :

- Il n'existe pas de limite thermodynamique pour ce plasma ;
- la loi de Dyson pour le gaz à deux composantes avec  $N$  grand:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_0^{(2)}(N)}{N^{7/5}} = \inf \left\{ \mu \int_{R^3} |\nabla \Phi|^2 - I_0 \int_{R^3} \Phi^{5/2} \mid 0 \leq \Phi, \int_{R^3} \Phi^2 = 1 \right\} \quad (2.23)$$

$I_0$  est la constante de la loi de Foldy

$$I_0 = \frac{2\Gamma(3/4)}{5\Gamma(5/4)} \left( \frac{2}{\mu\pi} \right)^{1/4} \quad (2.24)$$

La théorie de Foldy et la théorie de Bogoliubov prédisent l'existence de la condensation de Bose-Einstein dans des petites boîtes [54].

## 2.3 Méthode d'étude à utiliser

### 2.3.1 Cadre conceptuel

Cette étude sera menée dans le cadre de la théorie quantique relativiste des champs, et nous userons la méthode de la seconde quantification dans la mesure où le plasma bosonique non neutre est un système de plusieurs particules identiques et indiscernables de faible couplage à haute densité [34]. Ainsi notre étude sur la dégénérescence quantique du système de bosons identiques chargés consiste à appliquer la théorie microscopique pour déterminer les paramètres de la dégénérescence quantique et les propriétés du système dégénéré dans un piège de Paul.

### 2.3.2 Théorie microscopique

La théorie microscopique permet d'étudier les propriétés des assemblées des particules identiques confinées dans une boîte ou dans un piège magnétique à basses température ou haute densité [66].

Dans le cas de bosons il existe une satisfaisante théorie microscopique de système de bosons avec interaction seulement dans deux cas suivants [66]:

1. Faibles interactions répulsives entre les bosons ;
2. Gaz dilué avec interaction répulsive arbitraire entre les particules.

Les points de la théorie microscopique sont

#### 2.3.2.1 Champ de particule

En théorie quantique relativiste des champs les particules sont décrites au moyen des champs. Ces champs sont des solutions de l'équation de Klein-Gordon dérivant d'une densité Lagrangienne libre, laquelle densité est un invariant de Lorentz admettant une densité Hamiltonienne positive [63, 83]. Par exemple les électrons sont décrits au moyen de champ de Dirac, les bosons neutres de spin zéro au moyen de champ scalaire réel, les photons au moyen de champ vectoriel réel, les bosons chargés de spin 1 au moyen de champ vectoriel complexe, etc. [45]

#### 2.3.2.2 Opérateurs particules de création ou d'annihilation

On construit les opérateurs particules de création ou d'annihilation à partir de l'expression du champ de particule. Par exemple du champ scalaire réel [57]

$$\varphi(x)^1 = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} [a^-(\vec{k})e^{-ikx} + a^+(\vec{k})e^{ikx}] \quad (2.25)$$

on forme l'opérateur champ en posant  $\hbar = 1$

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} [\hat{a}^-(\vec{k})e^{-ikx} + \hat{a}^+(\vec{k})e^{ikx}] \quad (2.26)$$

Les opérateurs bosons sont obtenus à partir des coefficients [10]

$$\hat{a}^\pm = \frac{\mp i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\varphi}(x) = \frac{\mp i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} [\hat{\Pi}(x) \pm ik_0 \hat{\varphi}(x)] e^{\mp ikx} \quad (2.27)$$

où  $\Pi(x)$  est le conjugué canonique du champ  $\varphi(x)$ . Les opérateurs bosons sont notés dans la suite par  $\hat{a}^+ = \hat{a}^\dagger$ , opérateur boson de création et par  $\hat{a}^- = \hat{a}$ , opérateur boson d'annihilation. Les opérateurs bosons satisfont aux temps égaux les relations de commutation suivantes :

$$\begin{cases} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

### 2.3.2.3 Espace des états quantiques

Il convient de définir l'espace des états quantiques de ces opérateurs particules, par exemple pour les électrons [48] l'état fondamental d'un océan de Fermi non perturbé est

$$\Psi_0 = \left( \prod_{|\vec{k}| \rightarrow k_F} c_k^\dagger \right) \Psi_{vide} = c_1^\dagger c_2^\dagger \dots c_k^\dagger \dots c_{k_F}^\dagger \Psi_{vide} \quad (2.29)$$

avec l'état

$$\Psi_{vide} = |000 \dots 0 \dots\rangle = |vide\rangle \quad (2.30)$$

Pour les bosons neutres de spin zéro la base de Fock des opérateurs est définie [42]

$$|l\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

où  $|0\rangle$  est le vide de Fock avec les conditions  $\langle 0|0\rangle = 1$  et  $\langle j|l\rangle = \delta_{jl}$ .

---

<sup>1</sup>  $x \equiv x_\mu(x_1, x_2, x_3, ix_0)$ ;  $k \equiv k_\mu(k_1, k_2, k_3, ik_0)$ ;  $kx = k_\mu x_\mu = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_0 x_0 = \vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 x_0$ ;

$k_0 = \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ ;  $d^3k = dk_1 dk_2 dk_3$ ;  $d^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = d^3x dt$

### 2.3.2.4 Opérateur champ d'annihilation des particules d'impulsion $\vec{p}$ au point $\vec{r}$

Dans le cas des électrons, par exemple, l'opérateur champ d'annihilation est défini [48]

$$\hat{\psi}(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} \langle r|p \rangle = \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (2.32)$$

où  $\hat{c}_{\vec{p}}$  est l'opérateur fermion chargé d'annihilation. On a dans le cas des bosons neutres de spin zéro [58, 66]

$$\hat{\psi}(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \langle r|p \rangle = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (2.33)$$

tandis que l'opérateur champ de création des bosons est défini ;

$$\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \langle p|r \rangle = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (2.34)$$

Les opérateurs champs satisfont aux temps égaux les relations d'anti commutation pour les fermions [48] et les relations de commutation pour les bosons [66]

$$\begin{cases} \{\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}')\} = \delta(\vec{r} - \vec{r}'); & \{\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}')\} = \{\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}), \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}')\} = 0 \\ [\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}'); & [\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}')] = [\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}), \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}')] = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Les opérateurs champs de création et d'annihilation des particules d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  constituent l'élément capital de la théorie microscopique car ils permettent de définir les autres points de cette théorie à savoir

a) pour la recherche des paramètres de la dégénérescence quantique :

- le paramètre d'ordre par la prescription de Bogoliubov pour un système des particules dans l'état fondamental avec interaction ;
- l'ordre à longue portée caractéristique de l'existence d'un condensat de Bose-Einstein ou à la déplétion de celui-ci par le calcul de la limite de la matrice densité à une particule lorsque la distance  $(\vec{r} - \vec{r}')$  tend vers l'infini ;
- La diagonalisation de la matrice densité à une particule ;

b) pour la détermination des propriétés du système dégénéré

- l'Hamiltonien de la seconde quantification du système de particules avec interaction de courte ou de longue portée ;

- l'évolution temporelle de l'opérateur champ de Heisenberg permettant d'établir pour l'état fondamental l'équation de Gross-Pitaevskii dans le cas de gaz de bosons neutres d'interaction de courte portée ou l'équation de Hartree-Fock pour un système de particules avec interaction de longue portée ;
- le calcul de l'énergie de l'état fondamental ;
- le spectre des excitations élémentaires etc.

## Chapitre 3

### Formation et refroidissement du plasma non neutre des bosons identiques de spin zéro

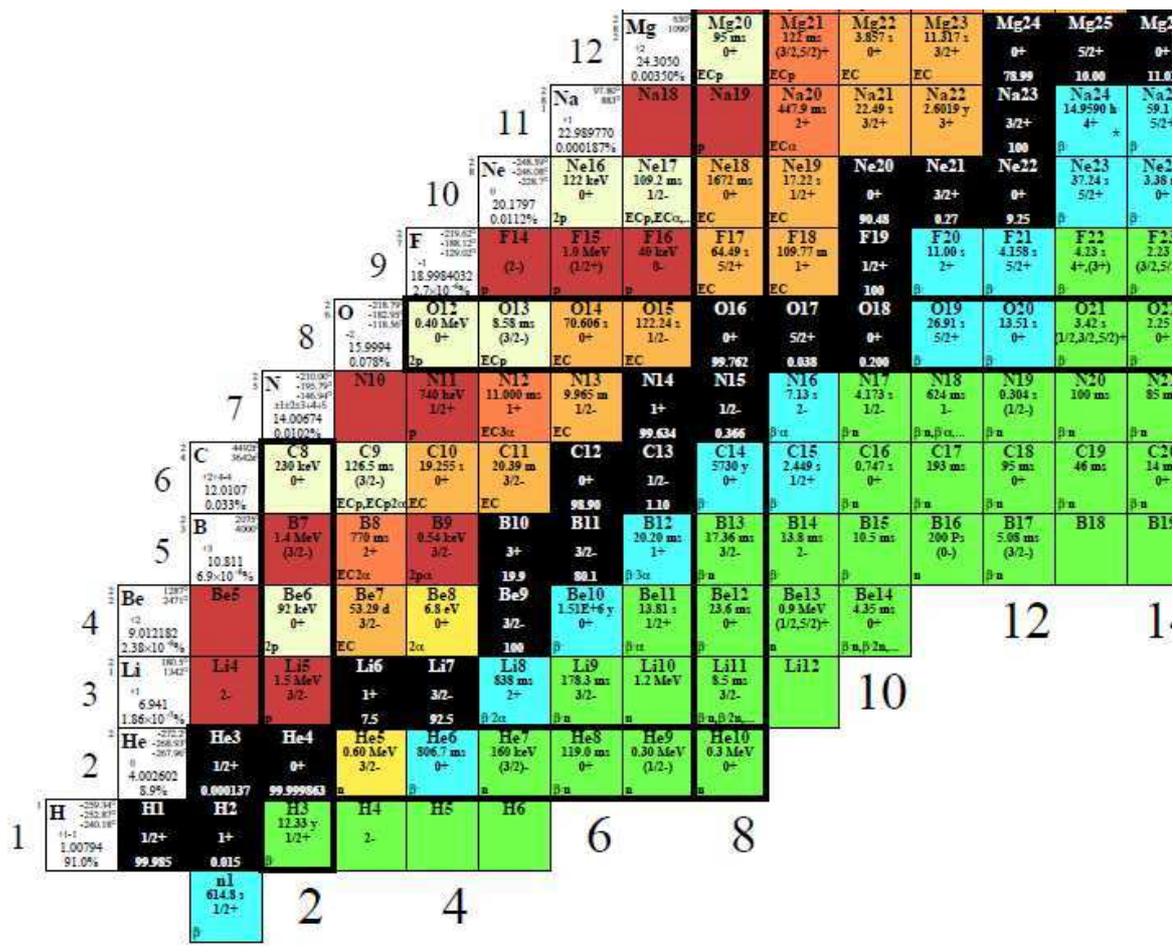
#### 3.1 Plasma non neutre des bosons

Le plasma non neutre des bosons chargés s'obtient en confinant l'assemblée des bosons identiques dans un piège des particules chargées de Penning ou de Paul. D'après [18], on entend par plasma non neutre le plasma ne contenant que des électrons ou que des ions. Cependant, des ions ou les noyaux atomiques identiques confinés dans les pièges de particules chargées de Penning ou de Paul constituent un plasma non neutre. Lorsque les bosons chargés de spin zéro identiques sont confinés dans un piège harmonique radiofréquence de Paul à basse température et à haute densité, nous obtenons un plasma non neutre des bosons qui fait l'objet de notre étude théorique.

#### 3.2 Assemblées des bosons chargés de spin zéro

##### 3.2.1 Noyaux atomiques de spin zéro

L'examen de la table des isotopes 1998 révèle l'existence des nucléides de spin nul aussi bien parmi les isotopes abondants naturels que parmi les autres isotopes: He 4, He 6, C12, O16, O18 Ne 20, Ne 22, Mg24, Mg26, Si28 ... Les faisceaux des particules alpha sont manipulés dans les laboratoires. Les particules alpha ou les noyaux bosoniques de spin zéro confinés dans un piège de particules chargées peuvent constituer des assemblées des bosons chargés de spin zéro ou le plasma bosonique non neutre.



Decay Q-value Range

- Yellow:  $Q(??)$
- Cyan:  $Q(\beta^-) > 0$
- Green:  $Q(\beta^-) - S_N > 0$
- Purple:  $Q(\beta^-) > 0 + Q(EC) > 0$
- Orange: Stable to Beta Decay
- Light Orange:  $Q(EC) > 0$
- Dark Orange:  $Q(EC) - S_p > 0$
- Red:  $Q(p) > 0$
- Black: Naturally Abundant

Extrait de la « table of isotopes(1998) »

### 3.2.2 Ions de spin zéro

La démarche de l'équipe IPIQ de LMPQ (Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques/CNRS) consiste à tirer parti des propriétés d'ensembles d'ions piégés et refroidis par le laser pour inventer de nouveaux dispositifs de manipulation de l'information quantique, démontrer de nouvelles fonctions quantiques ou en améliorer les performances. D. Zajfmann (Institut Weizmann) et son équipe ont proposé un système d'électrodes qui réalise pour un faisceau d'ions, des conditions identiques à un résonateur de Fabry-Pérot pour la lumière. Un faisceau peut rester confiné entre deux miroirs

électrostatiques sphériques si leurs distances focales sont correctement choisies. Jusqu'à présent ce piège a été utilisé pour étudier des ions faiblement chargés (Xe) ou des macromolécules à l'Institut Weizmann ou au LCAM à Orsay. L'équipe a installé sur la ligne de faisceau de la source SIMPA en novembre 2006 un piège du même type pour étudier des ions très chargés. Elle a piégé des ions d'oxygène et d'argon jusqu'à l'argon 13+. Selon le réglage des tensions, les ions dans les pièges peuvent être uniformément répartis, ou rester groupés en un paquet. L'équipe a pu piéger des ions de toute nature depuis l'oxygène 4+ jusqu'au Xénon 22+, observer le signal des différents isotopes du krypton et du xénon [69].

Les ions manipulés dans ces expériences sont soit des fermions soit des bosons. Il peut s'agir des ions identiques confinés dans un piège de Paul. Lorsque ces ions identiques, indiscernables sont de spin zéro, nous obtenons un système de particules qui fait l'objet de notre étude théorique lorsque la température du milieu est basse. .

### 3.3 Principe de piège de Paul linéaire

Nous suivons dans cette section l'approche de l'ouvrage [69]. Dans les années 1950, l'équipe de Wolfgang Paul révolutionne la spectrométrie de masse avec un filtre de masse quadrupolaire puis sur le même principe développe un piège à particules chargées, le piège de Paul. L'élément clef est l'utilisation d'un champ électrique radiofréquence pour définir une force de rappel pour la particule. D'autres types de pièges ont été ensuite mis au point comme le piège de Penning, fondé sur l'utilisation simultanée d'un champ électrostatique et d'un champ magnétostatique, et les anneaux de stockage qui définissent une trajectoire où les ions circulent et ne confinent que deux degrés de liberté.

Ces pièges ont été largement utilisés pour la spectrométrie de masse, l'étude de particules élémentaires (électron, proton, antiproton), l'étude d'ions uniques en physique atomique, les ions multichargés, la métrologie et plus récemment l'information quantique [18, 69].

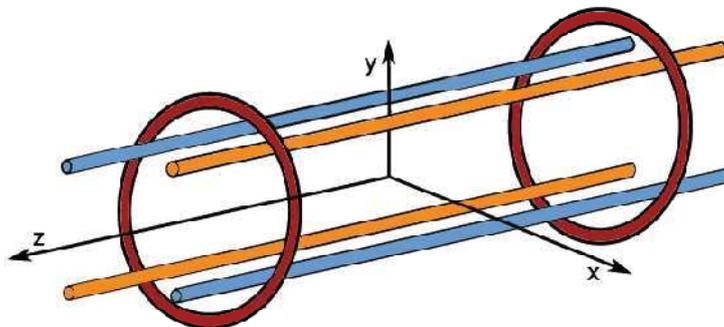


Fig. 3.1 Schéma d'un piège de Paul linéaire  
Source : thèse de Sébastien Removille, 2009.

La figure 3.1 schématise un piège de Paul linéaire. Il est composé de six électrodes reliées électriquement deux à deux pour former trois paires. Deux paires d'électrodes cylindriques assurent le confinement du mouvement transverse (plan x, y) et une paire d'électrodes ici en anneaux assurent le confinement du mouvement longitudinal (axe z, on la désignera paire d'électrodes endcaps ou simplement endcaps).

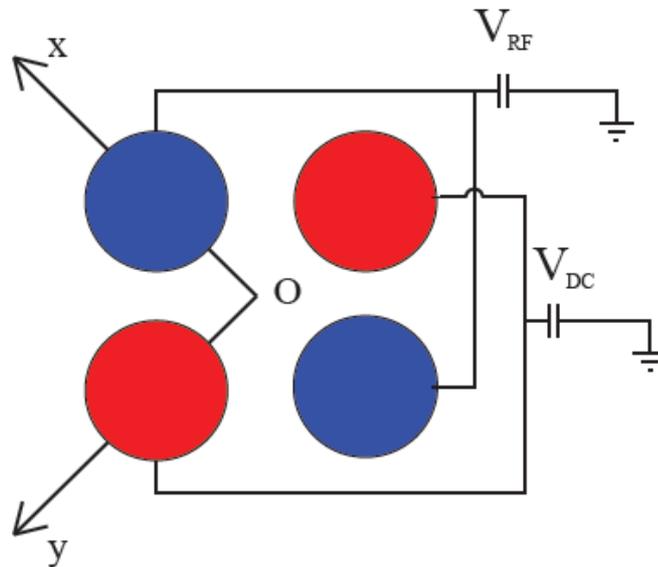


Fig. 3.2 Alimentation des électrodes cylindriques

Source : thèse de Sébastien Removille, 2009.

Les barres cylindriques sont disposées parallèlement et appariées en diagonale, on les désignera par la paire d'électrodes RF et la paire d'électrodes DC. Si on alimente ce dispositif par des tensions continues, le potentiel électrique généré au centre ne permet pas de confiner une particule chargée : d'après l'équation de Maxwell-Gauss (ici  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ), les lignes de champ électrique qui entrent dans la région centrale doivent nécessairement en ressortir, définissant autant de trajectoires de particules qui traversent le dispositif. Les figures 3.2 et 3.3 montrent un exemple de cette situation : le potentiel électrique est représenté pour le plan transverse et l'on voit clairement une structure en selle de cheval piégeant dans une direction et anti-piégeante dans l'autre. L'idée de fonctionnement des pièges de Paul consiste à inverser les dimensions de piégeage et de fuite alternativement dans le temps (axe de rotation)[59] , par l'utilisation de tensions oscillantes consistant schématiquement à faire tourner ce potentiel en selle suffisamment rapidement pour être toujours en avance sur le mouvement de l'ion [69].

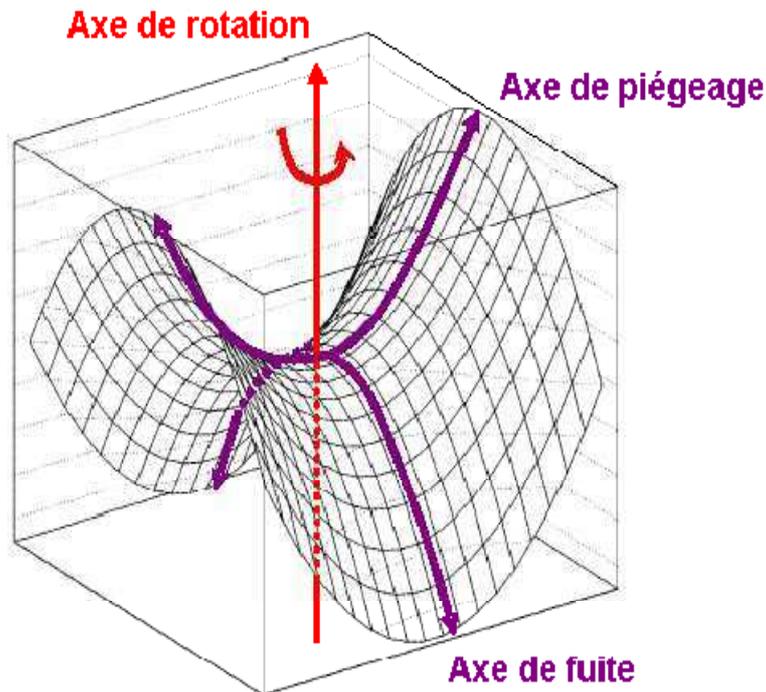


Fig. 3.3 Potentiel électrique généré  
 Source : thèse d'Enrique Minaya Ramirez, 2009.

Dans la pratique pour borner le mouvement d'un cation dans les trois directions de l'espace, on peut [69]

- alimenter les endcaps par une tension positive que l'on note  $V_{ec}$  et confiner ainsi le mouvement longitudinal ;
- alimenter une première paire d'électrodes cylindriques par une tension sinusoïdale dont on note  $V_{RF}$  et  $\omega_{RF}$  l'amplitude et la fréquence (on désignera par la suite ce couple comme les électrodes RF)
- piloter le dernier couple par une tension continue notée  $V_{DC}$  faible devant l'amplitude de la tension sinusoïdale (on désignera par la suite ce couple comme les électrodes DC)

On peut approcher les conditions sur la tension sinusoïdale par un raisonnement qualitatif. Il s'agit de comparer le temps  $t_1$  mis par un ion de masse  $m$  pour sortir du piège de rayon typique  $R$  au temps caractéristique  $t_2 = (\omega_{RF})^{-1}$  de variation de la tension sinusoïdale. La trajectoire sera bornée si  $t_1 > t_2$ . Ceci s'écrit encore

$$\frac{v}{R\omega_{RF}} < 1 \quad (3.1)$$

avec  $v$  la vitesse de l'ion. On peut estimer  $v$  en supposant que l'énergie cinétique de l'ion (de charge  $+Ze$ ) est reliée à la profondeur du potentiel par

$$ZeV_{RF} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.2)$$

La condition de confinement s'écrit alors

$$\frac{ZeV_{RF}}{mR^2\omega_{RF}^2} < 1 \quad (3.3)$$

Elle fait intervenir la géométrie du piège, les caractéristiques de la tension sinusoïdale et celles de l'ion, à savoir sa charge et sa masse. Ce dernier paramètre donne la sélectivité en masse de l'appareil et c'est ce qui est mis à profit dans les spectromètres de masse quadrupolaire.

La forme des électrodes la mieux adaptée pour le confinement des ions, d'après l'équation de Laplace, est la forme hyperbolique [59]. En effet, la représentation du potentiel quadrupolaire correspond à un paraboloides hyperbolique. Ainsi dans le cas idéal les électrodes du piège à deux dimensions doivent être à surface hyperbolique comme le montre la figure 3.4

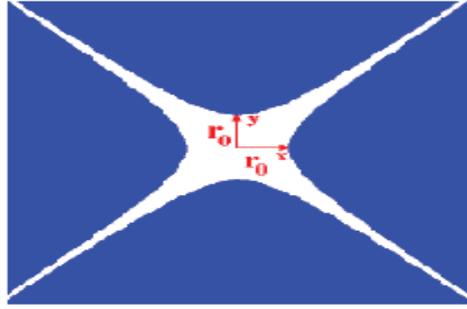


Fig. 3.4 Coupe schématique à deux dimensions d'un piège de Paul théorique

Source : thèse d'Enrique Minaya Ramirez, 2009

En alimentant la paire d'électrodes RF par une tension sinusoïdale  $V_{RF} = \mathcal{U}_0 \cos \omega_{RF} t$  le potentiel quadrupolaire modulé au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  du piège de Paul est (voir annexe)

$$\Phi_{mod}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{\mathcal{U}_0 \cos \omega_{RF} t}{r_0^2 + 2z_0^2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{z}^2) \quad (3.4)$$

En alimentant la paire d'électrodes DC par une tension continue  $U_0$  faible devant l'amplitude  $\mathcal{U}_0$ , le potentiel quadrupolaire statique au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est

$$\Phi_{stat}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{U_0}{r_0^2 + 2z_0^2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{z}^2) \quad (3.5)$$

Le potentiel quadrupolaire total au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est donc

$$\Phi_{total}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{U}{r_0^2 + 2z_0^2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{z}^2) \quad (3.6)$$

avec

$$U = U_0 + U_0 \cos \omega_{RF} t$$

Les équations de mouvement d'une particule de charge  $e$  et de masse  $m$  dans le piège sont [18, 59]

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \Phi_{total}}{\partial x} = \frac{-2e}{m(r_0^2 + 2z_0^2)} [U_0 + U_0 \cos \omega_{RF} t] x \quad (3.7)$$

$$\ddot{y} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \Phi_{total}}{\partial y} = \frac{-2e}{m(r_0^2 + 2z_0^2)} [U_0 + U_0 \cos \omega_{RF} t] y \quad (3.8)$$

$$\ddot{z} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \Phi_{total}}{\partial z} = \frac{4e}{m(r_0^2 + 2z_0^2)} [U_0 + U_0 \cos \omega_{RF} t] z \quad (3.9)$$

Faisant le changement des variables [18]

$$\omega_{RF} t = 2\tau \quad x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad (3.10)$$

$$a_3 = a_z = -\frac{16eU_0}{m\omega_{RF}^2(r_0^2 + 2z_0^2)} \quad (3.11)$$

$$q_3 = q_z = \frac{8eU_0}{m\omega_{RF}^2(r_0^2 + 2z_0^2)} \quad (3.12)$$

$$a_1 = a_2 = a_r = -\frac{a_z}{2} \quad (3.13)$$

$$q_1 = q_2 = q_r = -\frac{q_z}{2} \quad (3.14)$$

On obtient les équations de Mathieu

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} + (a_i - 2q_i \cos 2\tau) x_i = 0 \quad (3.15)$$

Les solutions de ces équations sont stables (c'est à dire que les trajectoires sont bornées) selon les valeurs des paramètres  $a$  et  $q$ . La Figure 3.5 donne la première zone de stabilité des équations de Mathieu [59]

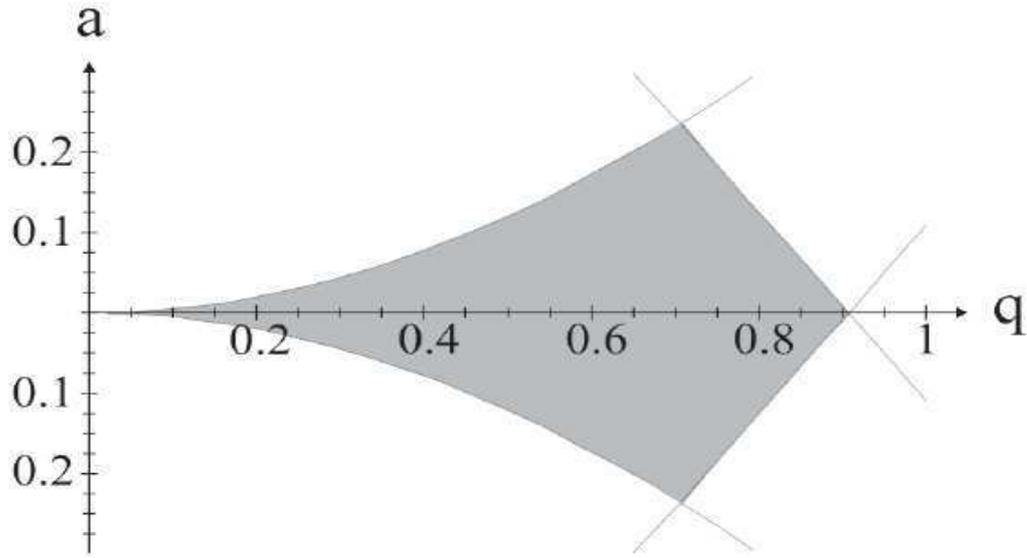


Fig. 3.5 – Diagramme de stabilité théorique des équations de Mathieu dans le cas 2D. La zone grisée correspond à la première zone de stabilité dans cette configuration. Les zones de stabilité sont typiquement caractérisées par  $|a| < 0,3$  et  $|q| < 0,9$ .

Source : Source : thèse d'Enrique Minaya Ramirez, 2009

Considérons le cas de la limite adiabatique où la vibration à  $\omega_{RF}$  est très grande devant le mouvement séculaire, le paramètre de Mathieu  $a = 0$  dans ce cas. Le potentiel total dans le piège de Paul au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  se réduit au potentiel modulé

$$\Phi_{mod}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{U_0 \cos \omega_{RF} t}{r_0^2 + 2z_0^2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{z}^2)$$

produisant un potentiel effectif ressenti par les particules chargées dans le piège

$$\psi_{eff} = \frac{eU_0^2 \cos^2 \omega_{RF} t}{m\omega_{RF}^2 (r_0^2 + 2z_0^2)} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{z}^2) \quad (3.16)$$

ou encore

$$\psi_{eff} = \frac{eV_{RF}^2}{m\omega_{RF}^2 R^2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{z}^2) \quad (3.17)$$

avec  $R^2 = r_0^2 + (\sqrt{2}z_0)^2$  et  $V_{RF} = U_0 \cos \omega_{RF} t$

Ce potentiel efficace représente la moyenne dans le temps de la force engendrée par le potentiel de confinement [69]. La trajectoire des particules sera celle d'une oscillation harmonique dans un puits de potentiel parabolique de profondeur [18]

$$\bar{D}_z = \bar{D}_x = \frac{4eV_{RF}^2 z_0^2}{m\omega_{RF}^2 (r_0^2 + 2z_0^2)} \quad \text{si } r_0 = 2z_0 \quad (3.18)$$

Bien que cette approximation soit valable lorsque le micro-mouvement est négligé, elle s'applique néanmoins dans des conditions plus larges. Ainsi ce modèle reste valable dans l'approche adiabatique qui est définie selon les paramètres de contrôle  $a \approx 0$  et  $q \leq 0,4$ . Dans cette zone les particules confinées n'échangent pas d'énergie avec le système extérieur, elles sont isolées[59].

La figure 3.6 représente une simulation d'un piège de Paul à électrodes cylindriques (en haut à gauche) d'une longueur de 200 mm avec  $r_0 = 5$  mm. L'ion de masse 28 u est injecté dans le piège à 1,5 mm du centre des électrodes selon x avec une énergie longitudinale  $E_z = 20$  eV. On peut voir trois vues en coupe qui montrent la trajectoire de l'ion confiné avec une fréquence de 1,4 MHz. Les paramètres de contrôle utilisés sont :

- En haut à droite :  $a = 0$  et  $q = 0,3$  ( $84,2933V_{pp}$ )
- En bas à droite :  $a = 0$  et  $q = 0,7$  ( $196,684V_{pp}$ )
- En bas à gauche :  $a = 0,1$  ( $14,0489$  V) et  $q = 0,7$  ( $196,684V_{pp}$ )

On constate bien que les trajectoires sont composées d'un micro mouvement d'une plus grande fréquence que le macro mouvement [59].

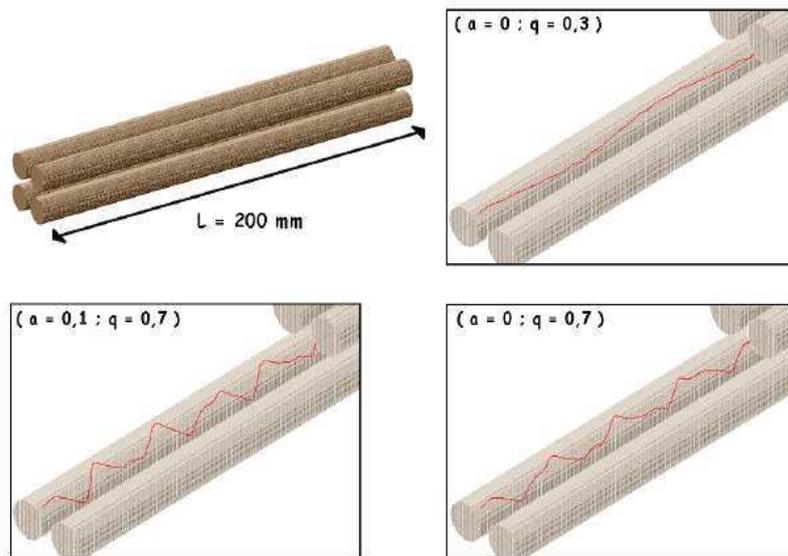


Fig. 3.6 Simulation de la trajectoire d'un ion ( $m \leq 28$ ,  $E_z = 20$ eV) dans un piège de Paul ( $f=1,4$  MHz).

Source : thèse de Minaya Ramirez, 2009.

### 3.4 Refroidissement du plasma non neutre

Pour atteindre un régime de basse température, c'est à dire le régime cristallin, Sébastien Removille a utilisé le refroidissement Doppler[69]. Le refroidissement Doppler a été historiquement proposé par T. W. Hänsch et A. L. Schawlow en 1975 et indépendamment par H. Dehmelt et D. J. Wineland. Il s'agit d'éclairer un ensemble d'atomes par un laser pratiquement résonant avec une transition atomique. Lorsque le désaccord est négatif, l'effet Doppler porte à résonance les atomes dont la vitesse est opposée au sens de propagation du laser. Ces atomes absorbent alors préférentiellement des photons dont la quantité de mouvement est opposée à leur vecteur vitesse, et sont ralentis. Lorsqu'on éclaire l'ensemble atomique dans trois directions perpendiculaires par trois couples de faisceaux contrapropageants ainsi désaccordés, on définit à l'intersection des faisceaux une force de friction qui freine les atomes, on parle de mélasse optique.

Dans le piège de Paul les ions étant confinés par le piège électrostatique, il n'est pas utile de créer une mélasse optique. L'effet d'un seul faisceau réduit la vitesse des ions dans un sens d'une direction de l'espace, mais ces ions étant confinés c'est leur énergie cinétique totale qui est réduite. De plus, grâce aux interactions coulombiennes la diminution d'énergie cinétique d'une proportion d'ions est partagée par l'ensemble des ions piégés : c'est le refroidissement sympathique. Donc, le refroidissement Doppler permet de réduire in fine la température de l'ensemble des ions piégés quelle que soit leur vitesse initiale, et n'est pas seulement limité aux ions dont la vitesse est inférieure à la vitesse de capture.

Les effets attendus, comme l'augmentation du temps de vie des ions dans le piège ou encore la fluorescence des ions, ont été observés et caractérisés. Depuis les résultats apportant les premières preuves de l'effet des lasers de refroidissement, jusqu'à la résolution spatiale individuelle des ions, trois régimes de température ont été explorés : le régime de Mathieu à haute température (de 100 à 6000 K), le régime liquide ou intermédiaire dans lequel l'énergie potentielle d'interaction n'est plus négligeable devant l'énergie cinétique (température inférieure à 100 K) et enfin le régime cristallin à faible température dans lequel le chauffage RF est inférieur à la puissance de refroidissement (température inférieure à 1 K).

### 3.5 Régimes du système dans le piège

On peut distinguer différents états de l'ensemble d'ions selon la valeur du facteur  $\Gamma = \frac{E_i}{E_c}$ , appelé paramètre de couplage, qui compare les énergies cinétique et d'interaction. Dans le cas où  $\Gamma \ll 1$ , le

mouvement des ions est peu perturbé par les interactions. Le système est similaire à un ensemble d'ions sans interaction. On parle alors du régime de Mathieu ou de régime gazeux.

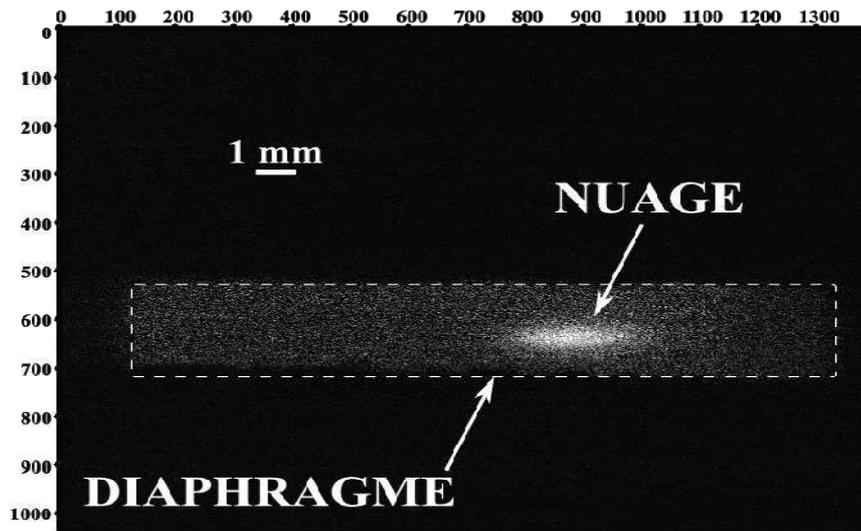


Fig. 3.7 Cliché d'un nuage contenant un millier d'ions  
Source ; thèse de Sébastien Removille, 2009.

Dans le cas où  $\Gamma \gg 1$ , les ions posséderont très peu d'énergie cinétique, trop peu pour pouvoir se déplacer librement et échanger de place avec un voisin. Si dans chaque direction un ion possède un voisin qu'il ne peut pas croiser, alors l'ensemble se fige dans une structure spatiale régulière, chaque ion occupant un site qu'il ne peut pas quitter. On parle de cristal de Coulomb et de régime cristallin.

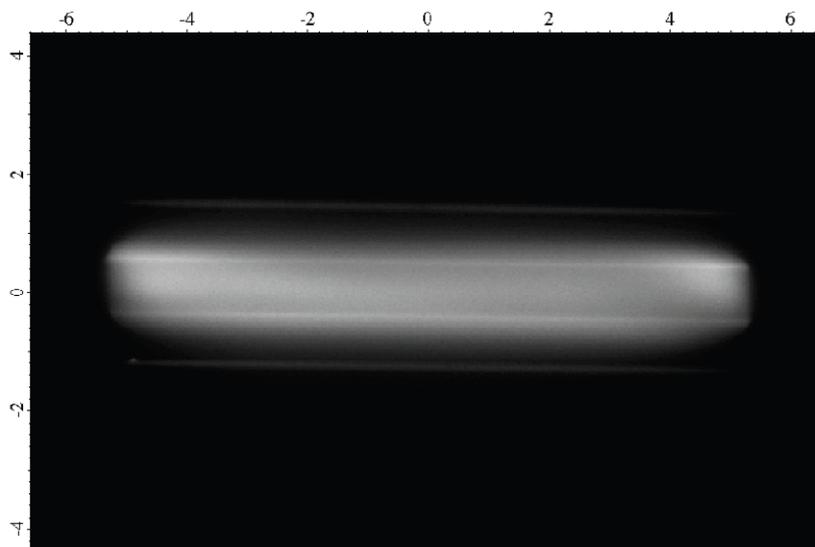


Fig. 3.8 Cliché d'un cristal, temps de pose : 2 s. Les axes sont gradués en millimètres et correspondant au plan du piège.  
Paramètres de piégeage :  $V_{RF} = 500$  V,  $\omega_{RF} = 2\pi \times 6.1$  MHz on attend une densité de  $\cong 10^{14}$  ions/m<sup>3</sup>.  
Source : thèse de Sébastien Removille, 2009.

Entre ces deux régimes limite, on trouve un régime intermédiaire ou liquide où les ions interagissent mais sont libres d'évoluer dans le volume de piégeage.

En thermodynamique, les transitions de phase d'un système sont caractérisées par une discontinuité du potentiel thermodynamique ou de l'une de ses dérivées. On peut s'interroger dans le cas des ions piégés sur l'existence de telles transitions entre les régimes que l'on vient de décrire. Les simulations numériques (J. P. Schiffer, 2002) montrent que pour un système infini on obtient effectivement une discontinuité de l'énergie interne, mais que pour des systèmes finis cette discontinuité est lissée et ce d'autant plus que le système contient peu de constituants. On peut repérer une frontière dans une grande majorité de cas que l'on caractérise par la valeur de  $\Gamma$  correspondante. La frontière entre les régimes liquide et cristallin s'obtient pour un système infini à  $\Gamma_{lc} = \Gamma_0 = 173$ , et dans le cas des systèmes finis la valeur de  $\Gamma_{lc}$  dépend de la taille du système. Plus précisément la dépendance porte sur la fraction  $F$  d'ions qui se trouvent à la surface de l'ensemble — rappelons que cette fraction est d'autant plus grande que le système est petit— La dépendance calculée est [69]

$$\Gamma_{lc} = \frac{\Gamma_0}{1 - 0,98F} \quad (3.19)$$

Typiquement ce modèle prévoit  $\Gamma_{lc} = 500$  pour 100 ions et  $\Gamma_{lc} = 300$  pour 1000 ions.

En raison de la population finie du système, il n'y a donc pas de transition de phase au sens que nous avons donné, et si l'on peut tout de même distinguer une frontière celle-ci dépend de la population d'ions [69].

### 3.6 Densité maximale du plasma non neutre de bosons dans le piège de Paul

L'accumulation des particules chargées dans le piège génère un potentiel électrique déconfinant. Ce phénomène de charge d'espace donne une limite supérieure à la densité d'ions que l'on peut espérer piéger. En plus du potentiel effectif qui sert à piéger les particules chargées

$$\psi_{eff}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{eV_{RF}^2}{m\omega_{RF}^2(r_0^2 + 2z_0^2)} [\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{z}^2] \quad (3.20)$$

les bosons chargés « voient » le potentiel électrostatique coulombien qu'ils créent eux-mêmes. Si  $\eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est la densité des bosons dans le piège en  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  et si nous négligeons les corrections liées au mouvement de vibration rapide, le potentiel coulombien que les bosons chargés créent est donné par l'équation de Poisson [18, 69]

$$\Delta\psi_{cc} + \frac{1}{\varepsilon_0} e\eta = 0 \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{Z}{\Omega} \quad (3.21)$$

Si la densité  $\eta$  est telle que  $\psi_{cc}$  devient plus grand que  $\psi_{eff}$ , la répulsion entre les bosons chargés l'emporte sur l'attraction du piège. La densité maximale  $\eta_{max}$  est telle que

$$\psi_{cc} + \psi_{eff} = cte, \quad (3.22)$$

de manière que le champ total  $\vec{E}$  soit nul. D'où [18]

$$\eta_{max} = -\frac{\varepsilon_0}{e} \Delta\psi_{cc} = +\frac{\varepsilon_0}{e} \Delta\psi_{eff} = \frac{12\varepsilon_0 V_{RF}^2}{m\omega_{RF}^2 (r_0^2 + 2z_0^2)^2}$$

soit

$$\eta_{max} = \frac{12\varepsilon_0 V_{RF}^2}{m\omega_{RF}^2 R^4} \quad (3.23)$$

La densité maximale est une fonction de la tension  $V_{RF}$ , de la fréquence  $\omega_{RF}$ , de la masse  $m$  de la particule et de la géométrie du piège.

### 3.7 Piège de Paul linéaire de dimensions centimétriques

On observe une tendance dans la communauté des piègeurs d'ions à utiliser des pièges de plus en plus petits alimentés par des tensions oscillantes à très haute fréquence. Dans les pièges assemblés à grand nombre d'ions les zones de piégeage atteignent typiquement quelques centimètres de long pour un rayon interne  $R$  de plusieurs millimètres [69].

La dimension de pièges assemblés à faible nombre d'ions est millimétrique, le rayon interne du piège  $R$  se trouve typiquement entre 100  $\mu\text{m}$  et 1mm et les endcaps sont séparés de plusieurs millimètres. Les applications de ces pièges relèvent de l'optique quantique, de la spectroscopie et la chimie des molécules froides. Pour les expériences d'optique quantique on cherche une interaction très importante entre les faisceaux laser et l'ensemble d'ions et par conséquent des nuages d'ions froids et denses. Dans le cas de l'étude des molécules, il s'agit de piéger et refroidir plusieurs espèces simultanément et de pouvoir faire la mesure des populations et leur spectroscopie. La spectroscopie est d'autant plus fine et précise que la température est basse et la densité est grande, et un recensement non destructif des espèces peut être effectué dans le régime cristallin. On travaille avec de grands nuages à des basses températures et on analyse dans un premier temps quelle géométrie du dispositif peut remplir cette condition. On envisage ensuite comment on peut obtenir une grande densité dans l'échantillon [69].

Concernant l'augmentation de la densité dans le piège, on a vu que la densité est bornée supérieurement par  $\eta_{max}$ , on aura donc intérêt à rendre ce paramètre aussi grand que possible. Si on

souhaite une densité maximale très forte on devra travailler d'après la relation (3.23) à plus haute amplitude  $V_{RF}$  ou plus faible dimension du piège R.

Pendant son travail de thèse [69], Sébastien Removille a développé un ensemble expérimental capable de confiner, refroidir et observer plusieurs millions d'ions. Une méthode originale de chargement du piège fondée sur l'absorption simultanée de deux photons a été développée, lui permettant de limiter l'énergie initiale d'un ion et la pollution de l'environnement d'un tel nuage. Un piège de Paul linéaire de dimensions centimétriques a été dessiné et fabriqué au laboratoire pour confiner les ions et faciliter le régime de très faible température

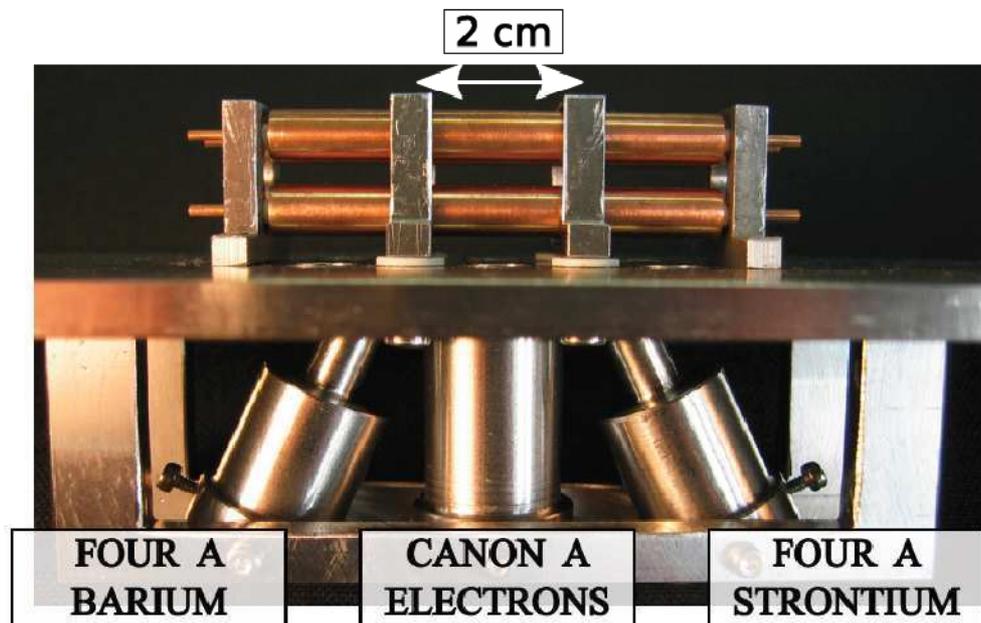


Fig.3.9 – Cliché du piège de Paul linéaire et du système de production des ions  
Source : thèse de Sébastien Removille, 2009.

. En utilisant une technique de refroidissement laser, Sébastien Removille a atteint ce régime dans lequel les ions adoptent une structure spatiale périodique, le cristal de Wigner. Cette structure a été observée dans des chaînes contenant quelques ions et dans des nuages dont la population dépasse le million. Les paramètres pertinents qui gouvernent la densité et la stabilité de ces cristaux ont été identifiés.

### 3.7 Conclusion partielle

Il y a eu des études théoriques sur le gaz de Bose chargé d'une ou de deux composantes dans une grande boîte et elles ont concerné le plasma neutre de bosons de spin entier.

Les noyaux atomiques de spin zéro et les ions de spin zéro sont produits ou peuvent être produits dans les laboratoires. Confinés dans un piège des particules chargées harmonique radiofréquence de Paul les bosons identiques chargés constituent un système qui fait l'objet de nos recherches, c'est-à-dire un plasma non neutre de bosons identiques de spin zéro.

Les pièges des particules chargées de Penning et de Paul permettent de confiner un plasma non neutre de bosons de spin zéro dont la densité maximale dans le piège peut être modifiée pour atteindre des hautes densités, condition nécessaire pour que l'interaction Coulombienne binaire entre les bosons soit faible permettant ainsi l'application de la théorie microscopique au système lorsque les températures sont basses dans le piège.

Dans le piège radiofréquence de Paul le plasma non neutre est soumis à un potentiel de piégeage quadrupolaire harmonique modulé dans trois dimensions. En abaissant la température dans le piège le plasma non neutre de bosons connaît des transitions de phase conduisant aux trois régimes gazeux ( $T \geq 100K$ ), liquide ( $1K \leq T \leq 100K$ ) et cristallin ( $T \leq 1K$ ). Les transitions de phase dépendent également de la population des particules chargées dans le plasma.

Le refroidissement du plasma des ions par le laser permet d'atteindre des très basses températures inférieures à 1K.

L'étude théorique des propriétés du plasma non neutre dans le piège harmonique radiofréquence de Paul à basse température implique l'usage de la théorie microscopique mentionnée au chapitre 2, c'est l'objet des chapitres 4 et 5.

## Chapitre 4

### Construction des opérateurs champs d'annihilation et de création des bosons d'impulsion $\vec{p}$ au point $\vec{r}$

#### 4.1 Identification du champ des bosons chargés de spin zéro

Les opérateurs champs d'annihilation et de création des particules d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  constituent le point de départ de la théorie microscopique utilisée dans l'étude de la dégénérescence quantique d'un système de particules identiques fermions ou bosons. Nous allons dans ce chapitre construire à partir du champ des mésons chargés les opérateurs champs du système de bosons chargés de spin zéro qui vont être utilisés dans le chapitre 5. En effet, la description des particules chargées de spin zéro requiert des champs scalaires complexes [45, 83].

Rappelons que le champ scalaire complexe  $\phi(x)$  de masse  $m$  est une combinaison linéaire des deux champs scalaires réels de mêmes masses. La densité Lagrangienne du champ complexe libre est obtenue à partir de celle du champ réel, et elle possède une symétrie : elle est invariante sous les rotations de la phase du champ complexe  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\vartheta} \phi(x)$ ,  $\vartheta$  étant un nombre réel. Comme il s'agit d'une symétrie globale continue, le théorème de Noether implique l'existence d'un courant conservé et d'une charge électrique indépendante du temps. La conservation de la charge déterminera l'espace des états quantiques à construire et imposera la notion d'antiparticule qui sera naturellement distinguée de la particule par la valeur opposée de sa charge de Noether. Considérant les deux champs scalaires réels  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$  [35, 45].

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [a_1(\vec{k})e^{ikx} + a_1^*(\vec{k})e^{-ikx}] \quad (4.1)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [a_2(\vec{k})e^{ikx} + a_2^*(\vec{k})e^{-ikx}] \quad (4.2)$$

nous construisons le champ scalaire complexe  $\phi(x)$  et son conjugué complexe  $\phi^*(x)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [a(\vec{k})e^{ikx} + b^*(\vec{k})e^{-ikx}] \quad (4.3)$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [b(\vec{k})e^{ikx} + a^*(\vec{k})e^{-ikx}] \quad (4.4)$$

## 4.2 Opérateurs bosons

On appelle opérateurs bosons les opérateurs  $\hat{a}(\vec{k})$  et  $\hat{b}^\dagger(\vec{k})$  et leurs adjoints  $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$  et  $\hat{b}(\vec{k})$  construits à partir des coefficients des solutions (4.3) et (4.4) des équations de Klein-Gordon. Par les transformées inverses de Fourier des ces solutions nous avons [10, 57, 83]

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x)$$

$$b(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi^*(x)$$

Ce qui conduit à

$$\begin{cases} a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} \left[ \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - ik_0 \phi(x) \right] e^{ikx} \\ b(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} \left[ \frac{\partial \phi^*(x)}{\partial t} - ik_0 \phi^*(x) \right] e^{ikx} \end{cases} \quad (4.5)$$

Les coefficients  $a(\vec{k})$  et  $b(\vec{k})$  ainsi que leurs conjugués complexes sont transformés en des opérateurs bosons lesquels satisfont aux temps égaux les relations de commutations suivantes[85].

$$\begin{cases} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') = [\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')] \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = [\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \dots = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

## 4.3 Espace des états quantiques du système

L'espace des états quantiques du système des bosons est construit en agissant sur l'état du vide de Fock avec les opérateurs bosons sous les conditions suivantes

$$\hat{a}(\vec{k})|0\rangle = 0 = \hat{b}(\vec{k})|0\rangle, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (4.7)$$

La base de Fock de l'espace des états quantiques du système est donnée par

$$|N_1, N_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1! N_2!}} (\hat{a}^\dagger)^{N_1} (\hat{b}^\dagger)^{N_2} |0\rangle \quad N_1, N_2 = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4.8)$$

avec

$$\langle N_1, N_2 | M_1, M_2 \rangle = \delta_{N_1 M_1} \delta_{N_2 M_2} \quad (4.9)$$

Pour donner l'interprétation en termes des particules des opérateurs bosons de création et d'annihilation, il est utile de calculer la charge Q qui, par le théorème de Noether, est indépendante du temps [57]. L'opérateur charge électrique totale est définie [35]

$$\hat{Q} = \int d^3x \hat{j}_0 = ei \int d^3x : \hat{\phi}^\dagger(x) (\partial_0 \hat{\phi}(x)) - (\partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x)) \hat{\phi}(x) : \quad (4.10)$$

Introduisons les opérateurs champs tirés de (4.3) et (4.4) dans (4.10), nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [\hat{a} e^{ikx} + \hat{b}^\dagger e^{-ikx}] \\ \partial_0 \hat{\phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [-ik_0 \hat{a} e^{ikx} + ik_0 \hat{b}^\dagger e^{-ikx}] \\ \hat{\phi}^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [\hat{b} e^{ikx} + \hat{a}^\dagger e^{-ikx}] \\ \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [-ik_0 \hat{b} e^{ikx} + ik_0 \hat{a}^\dagger e^{-ikx}] \\ \hat{Q} &= ei \int d^3x : \frac{1}{\Omega} \int \frac{dk}{2k_0} [(\hat{b} e^{ikx} + \hat{a}^\dagger e^{-ikx})(-ik_0 \hat{a} e^{ikx} + ik_0 \hat{b}^\dagger e^{-ikx}) \\ &\quad - (-ik_0 \hat{b} e^{ikx} + ik_0 \hat{a}^\dagger e^{-ikx})(\hat{a} e^{ikx} + \hat{b}^\dagger e^{-ikx})] : \\ \hat{Q} &= e \sum_{\vec{k}} [\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}^\dagger(\vec{k}) \hat{b}(\vec{k})] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Introduisons les opérateurs nombre des particules en notant l'impulsion  $\vec{p}$  en indice à la place de  $\vec{k}$  dans les parenthèses

$$\begin{cases} \hat{N}_{\vec{p}}^{(+)} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \\ \hat{N}_{\vec{p}}^{(-)} = \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \end{cases} \quad (4.12)$$

Considérons les fonctions d'onde  $|\dots N_{\vec{p}}^{(+)} \dots N_{\vec{p}}^{(-)} \dots\rangle$  décrivant les états stationnaires, la fonction d'onde  $|N_{\vec{p}}^{(+)}\rangle$  correspond à l'état dans lequel  $N_{\vec{p}}^{(+)}$  particules ont une impulsion  $\vec{p}$  et une charge  $Q = e N_{\vec{p}}^{(+)}$ ; la fonction d'onde  $|N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle$  correspond à l'état dans lequel  $N_{\vec{p}}^{(-)}$  particules ont une impulsion  $\vec{p}$  et une charge  $Q = -e N_{\vec{p}}^{(-)}$  [34]. Ainsi, la base de Fock devient

$$|N^{(+)}, N^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N^{(+)}! N^{(-)}!}} (\hat{a}^\dagger)^{N^{(+)}} (\hat{b}^\dagger)^{N^{(-)}} |0\rangle \quad (4.13)$$

où

$$N^{(+)}, N^{(-)} = 0, 1, 2, 3 \dots$$

avec

$$\langle N^{(+)}, N^{(-)} | M^{(+)}, M^{(-)} \rangle = \delta_{N^{(+)} M^{(+)}} \delta_{N^{(-)} M^{(-)}} \quad (4.14)$$

On a

$$\begin{cases} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(+)} + 1} |N_{\vec{p}}^{(+)} + 1, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle \\ \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger |N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(-)} + 1} |N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} + 1\rangle \end{cases} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{cases} \hat{a}_{\vec{p}} |N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(+)}} |N_{\vec{p}}^{(+)} - 1, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle \\ \hat{b}_{\vec{p}} |N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(-)}} |N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} - 1\rangle \end{cases} \quad (4.16)$$

#### 4.4 Opérateurs champs d'annihilation et de création des bosons d'impulsion $\vec{p}$ au point $\vec{r}$

La construction de l'opérateur champ d'annihilation des bosons chargés d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  se fait simplement à partir des opérateurs bosons d'annihilation  $\hat{a}_{\vec{p}}$  et  $\hat{b}_{\vec{p}}$ . Nous utilisons ces opérateurs et le développement de  $|\vec{r}\rangle$  sur la base  $\{| \vec{p} \rangle\}$  [59, 66]

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}] \langle r | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}] e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}] \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) \quad (4.17)$$

De même nous construisons l'opérateur champ de création de bosons chargés d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger] \langle p | r \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger] e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger] \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \quad (4.18)$$

Les opérateurs champs ainsi construits satisfont les relations de commutation, aux temps égaux, suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = \left[ \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}] \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}), \sum_{\vec{p}'} [\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger] \varphi_{\vec{p}'}^*(\vec{r}') \right] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ [\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}')] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

## 4.5 Test des opérateurs $\hat{\psi}(\vec{r})$ et $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$

### 4.5.1 Opérateur densité moyenne en un point $\vec{r}_0$

L'opérateur densité moyenne en un point est défini[1]

$$\hat{\rho}(\vec{r}_0) \equiv \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}_0) \hat{\psi}(\vec{r}_0) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) \quad (4.20)$$

### 4.5.2 Densité moyenne en un point $\vec{r}_0$

La densité moyenne en ce point est déterminée par

$$\rho(\vec{r}_0) = \langle N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} | \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) | N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} \rangle$$

donc

$$\rho(\vec{r}_0) = \frac{N^{(+)}}{\Omega} + \frac{N^{(-)}}{\Omega} \quad (4.21)$$

### 4.5.3 Opérateur nombre de particules

L'opérateur nombre de particules est défini[1, 63]

$$\hat{N} = \int d^3x \hat{\rho}(\vec{r}) = \frac{1}{\Omega} \int d^3x \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger) (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}})$$

D'où le nombre total de particules

$$\begin{aligned} N &= \left\langle N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} \left| \frac{1}{\Omega} \int d^3x \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger) (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}) \right| N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} \right\rangle \\ &= N^{(+)} + N^{(-)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

#### 4.5.4 Opérateur charge électrique totale

L'opérateur charge électrique totale est donné par[45]

$$\hat{Q} = \int d^3x \hat{j}_0 = \int d^3x e \hat{\rho} = \int d^3x e \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \quad (4.23)$$

#### 4.5.5 Charge totale du système

La charge totale du système est obtenue l

$$Q = \langle \hat{Q} \rangle = \int d^3x e \langle N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} | \hat{\rho} | N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} \rangle; \quad Q = e \sum_{\vec{p}} (N_{\vec{p}}^{(+)} + N_{\vec{p}}^{(-)}) \quad (4.24)$$

avec

$$e \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(+)} > 0 \quad \text{et} \quad e \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(-)} < 0$$

#### 4.5.6 Charge de l'état du vide de Fock

La charge de l'état du vide de Fock est nulle, en effet

$$\begin{aligned} \hat{Q} |0\rangle &= \int d^3x e \hat{\rho} |0\rangle = \int d^3x e \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) |0\rangle \\ &= e \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) |0\rangle \quad (4.25) \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{Q} |0\rangle = 0$$

### 4.6 Conclusion partielle

Les opérateurs bosons construits sur le champ scalaire complexe décrivent les particules et leurs antiparticules de spin zéro et satisfont aux temps égaux les relations de commutations. L'espace de Fock construit tient compte de la conservation de la charge électrique. Quant aux opérateurs  $\hat{\psi}(\vec{r})$  et  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$  construits dans ce chapitre, ils ont répondu positivement au test consistant à définir les grandeurs physiques connues. Donc nous ferons usage de ces opérateurs champs dans le chapitre suivant.

## Chapitre 5

### Paramètres de la dégénérescence quantique et propriétés d'un plasma non neutre de bosons de spin zéro dégénéré dans le piège de Paul

#### 5.1 Système sans transition de phase

Nous avons vu au chapitre 2 des généralités qu'il existe une théorie microscopique satisfaisante de système de bosons avec interaction uniquement dans le cas des interactions répulsives faibles entre les bosons, et dans un gaz dilué de bosons avec interactions répulsives arbitraires entre deux particules [66]. Dans le cas de bosons avec charge électrique, de spin zéro, la théorie microscopique est satisfaisante lorsque nous avons une haute densité de bosons dans le système [48, 66]. Par le refroidissement laser du nuage des ions la température du système dans le piège peut être abaissée en dessous de 1 K, et on peut atteindre le régime cristallin [69] en passant par le régime intermédiaire ou liquide. Nous avons construit au chapitre 4 les opérateurs champs de création et d'annihilation des bosons chargés de spin zéro d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  à partir du champ scalaire complexe ou champ des mésons chargés. Dans ce chapitre 5 nous allons envisager d'abord la dégénérescence quantique du système de bosons chargés sans transition de phase et ensuite la dégénérescence quantique dans les différents régimes.

##### 5.1.1 Recherche des paramètres de la dégénérescence

###### 5.1.1.1 Ordre à longue portée

La matrice densité à une particule d'un système de bosons dans l'état  $|\varphi(N)\rangle$  est définie comme la quantité [33, 66]

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \varphi(N) | \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle \quad (5.1)$$

où  $\hat{\psi}^\dagger(r)$  et  $\hat{\psi}(r')$  sont des opérateurs champs de création et d'annihilation de bosons d'impulsion  $\vec{p}$  aux points  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$ . Elle sert à caractériser les corrélations entre les particules localisées au point  $\vec{r}$  et

au point  $\vec{r}'$  [66] ; ou elle donne l'amplitude de détruire une particule au point  $\vec{r}'$  et de créer une autre au point  $\vec{r}$  [68]. Dans le cas des bosons avec charge électrique, les opérateurs champs de création et d'annihilation ont été construits au chapitre 4. L'opérateur de création

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger) \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) + \sum_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \quad (5.2)$$

sera noté

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) = \hat{\psi}_+^\dagger(\vec{r}) + \hat{\psi}_-^\dagger(\vec{r}) . \quad (5.3)$$

De même l'opérateur d'annihilation

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) + \sum_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) \quad (5.4)$$

prend la forme

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \hat{\psi}_+(\vec{r}) + \hat{\psi}_-(\vec{r}) . \quad (5.5)$$

La matrice densité à une particule du système de bosons chargés de spin zéro est obtenue en portant (5.3) et (5.5) dans (5.1)

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \varphi(N) | (\hat{\psi}_+^\dagger(\vec{r}) + \hat{\psi}_-^\dagger(\vec{r})) (\hat{\psi}_+(\vec{r}') + \hat{\psi}_-(\vec{r}')) | \varphi(N) \rangle$$

ou

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, \vec{r}') &= \langle \varphi(N) | \hat{\psi}_+^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_+(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle + \langle \varphi(N) | \hat{\psi}_+^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_-(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle \\ &\quad + \langle \varphi(N) | \hat{\psi}_-^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_+(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle + \langle \varphi(N) | \hat{\psi}_-^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_-(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle \end{aligned}$$

Les termes 2 et 3 de membre de droite sont nuls en vertu de la condition d'orthogonalité de l'espace de Fock des états quantiques (4.14)

$$\langle N^{(+)}, N^{(-)} | M^{(+)}, M^{(-)} \rangle = \delta_{N^{(+)} M^{(+)}} \delta_{N^{(-)} M^{(-)}}$$

D'où

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \varphi(N) | \hat{\psi}_+^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_+(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle + \langle \varphi(N) | \hat{\psi}_-^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_-(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle \quad (5.6)$$

En introduisant dans (5.6) les expansions (5.2) et (5.4) nous obtenons

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\vec{p}} \langle \varphi(N) | \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} | \varphi(N) \rangle \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') + \sum_{\vec{p}} \langle \varphi(N) | \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} | \varphi(N) \rangle \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \quad (5.7)$$

Cette quantité prend la forme

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') + \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(-)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \quad (5.8)$$

Si le système se trouve dans l'état fondamental, (5.8) devient

$$\begin{aligned} \rho_0(\vec{r}, \vec{r}') &= N_0^{(+)} \varphi_0^*(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}') + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') + N_0^{(-)} \varphi_0^*(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}') \\ &+ \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(-)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les termes 1 et 3 de droite de (5.9) sont à associer à l'existence de condensation de Bose-Einstein (BEC) des bosons de charge positive et des anti-bosons de charge négative ; les autres termes du membre de droite sont à associer aux bosons et anti-bosons excités dans l'état fondamental suite aux interactions entre les particules ; et présentent les fluctuations thermique et quantique négligeables lorsque les nombres de particules condensées  $N_0^{(+)} \gg 1$  ou  $N_0^{(-)} \gg 1$ .

Dans le cas d'un système homogène de bosons dans le volume de piégeage, les ondes sont planes [66]

$$\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}'}, \quad \Omega \text{ étant le volume} \quad (5.10)$$

et

$$\varphi_0(\vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \quad (5.11)$$

(5.9) prend la forme à très basse température pour les particules de charge positive

$$\rho_0^+(\vec{r}, \vec{r}') = \left[ \sqrt{N_0^{(+)}} \varphi_0^*(\vec{r}) \right] \left[ \sqrt{N_0^{(+)}} \varphi_0(\vec{r}') \right] + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \quad (5.12)$$

ou

$$\rho_0^+(\vec{r}, \vec{r}') = Y_+^*(\vec{r}) Y_+(\vec{r}') + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \quad (5.13)$$

Nous considérons  $Y_+(\vec{r}') = \sqrt{N_0^{(+)}} \varphi_0(\vec{r}')$  comme étant l'onde de condensat dans l'état fondamental au point  $\vec{r}'$ . La théorie étant symétrique par rapport à la charge des particules nous avons pour les particules de charge négative

$$\rho_0^-(\vec{r}, \vec{r}') = Y_-^*(\vec{r}) Y_-(\vec{r}') + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(-)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \quad (5.14)$$

D'autre part la relation (5.9) peut s'écrire, en tenant compte de (5.10) et (5.11), sous la forme

$$\rho_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\Omega} \left[ N_0^{(+)} + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} \right] + \frac{1}{\Omega} \left[ N_0^{(-)} + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(-)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} \right] \quad (5.15)$$

(5.15) indique que la matrice densité du système de bosons dépend uniquement de  $(\vec{r}' - \vec{r})$ . Le calcul de la limite de (5.15) lorsque  $|\vec{r}' - \vec{r}|$  tend vers zéro donne pour les particules de charge positive

$$\lim_{|\vec{r}' - \vec{r}| \rightarrow 0} \rho_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\Omega} \left[ N_0^{(+)} + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)} \right] \quad (5.16)$$

Nous interprétons  $\sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)}$  comme la déplétion du condensat [67],  $N_0^{(+)}$  est le nombre des bosons d'impulsion nulle dans le condensat. De même pour les particules de charge négative nous avons

$$\lim_{|\vec{r}' - \vec{r}| \rightarrow 0} \rho_0^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\Omega} \left[ N_0^{(-)} + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(-)} \right] \quad (5.17)$$

La limite de la matrice densité du système de particules de charge positive lorsque  $|\vec{r}' - \vec{r}|$  tend vers l'infini vaut

$$\lim_{|\vec{r}' - \vec{r}| \rightarrow \infty} \rho_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0^{(+)}}{\Omega} \quad (5.18)$$

Car la limite du deuxième terme est nulle lorsque  $|\vec{r}' - \vec{r}|$  tend vers l'infini du fait des interférences destructives des termes de la somme  $\sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$ . De même le calcul donne pour les antiparticules

$$\lim_{|\vec{r}' - \vec{r}| \rightarrow \infty} \rho_0^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0^{(-)}}{\Omega} \quad (5.19)$$

Les relations (5.18) et (5.19) indiquent l'existence de l'ordre à longue portée ou l'occupation macroscopique d'un état quantique à une particule, en l'occurrence ici l'état fondamental d'impulsion nulle, appelée condensat de Bose-Einstein.

### 5.1.1.2 Diagonalisation de la matrice densité à une particule

Notons que dans le cas du piège de Paul, le système de bosons est de dimension finie, la limite vers l'infini ci-dessus (5.19) n'a plus de sens. La fonction d'onde du condensat est déterminée à travers la diagonalisation de la matrice densité à une particule [31, 68]

$$\begin{aligned}
\int d\vec{r}' \rho(\vec{r}', \vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') &= \int d\vec{r}' \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p}} (N_{\vec{p}}^{(+)} + N_{\vec{p}}^{(-)}) e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \\
&= \int d\vec{r}' \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')} (N_{\vec{p}}^{(+)} + N_{\vec{p}}^{(-)}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \\
&= \int d\vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') (N_{\vec{p}}^{(+)} + N_{\vec{p}}^{(-)}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') = N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) + N_{\vec{p}}^{(-)} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) \quad (5.20)
\end{aligned}$$

et correspond à la fonction propre  $\varphi_{\vec{p}}$ , ayant la valeur propre  $N_{\vec{p}}^{(\pm)}$  très grande. Cette procédure a été utilisée, par exemple, pour explorer la condensation de Bose-Einstein dans une goutte liquide d'hélium par Lewart, Pandharipande et Peiper(1988).

Il est possible que l'état quantique à une particule macroscopiquement occupé par les bosons à basse température soit un état  $|k\rangle$  autre que l'état fondamental [56]. Dans ce cas la relation (5.13) prend la forme générale

$$\rho^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}') = Y_+^*(\vec{r}) Y_+(\vec{r}') + \sum_{\vec{p}}' N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') \quad (5.21)$$

$Y_+(\vec{r})$  est l'onde de condensat dans cet état.

### 5.1.1.3 Approximation de Bogoliubov et paramètre d'ordre

Minus des opérateurs champs de création et d'annihilation des bosons chargés de spin zéro, nous pouvons envisager la présentation de la prescription de Bogoliubov pour le plasma non neutre en étude. Nous supposons que dans le piège le plasma non neutre est un milieu homogène et que les fonctions d'onde y sont planes. L'opérateur champ d'annihilation de Heisenberg des bosons d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) + \sum_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) \quad (5.22)$$

peut être décomposé, à l'état fondamental, de la manière suivante pour les bosons de charge positive

$$\hat{\psi}_+(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = \hat{a}_o \varphi_o(\vec{r}, t) + \sum_{\vec{p} \neq 0} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) \quad (5.23)$$

Considérons  $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle M, N^{(+)} | \hat{\psi}_+(\vec{r}, t) | M, N^{(+)} + 1 \rangle$  pour deux états qui ne diffèrent uniquement que par le nombre des bosons dans le condensat, nous avons[56]

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \langle M, N^{(+)} | \hat{\psi}_+(\vec{r}, t) | M, N^{(+)} + 1 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle M, N^{(+)} | \hat{a}_o \varphi_o(\vec{r}, t) | M, N^{(+)} + 1 \rangle \\
&+ \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle M, N^{(+)} \left| \sum_{\vec{p} \neq 0} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) \right| M, N^{(+)} + 1 \right\rangle \\
&= \sqrt{N_0^{(+)} + 1} \varphi_o(\vec{r}, t) \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Pour  $N_0^{(+)} \gg 1$  l'approximation de Bogoliubov  $\hat{a}_o = a_o = \sqrt{N_0^{(+)}}$  peut être considérée ; le premier terme de droite de (5.23) devient ainsi le paramètre d'ordre du condensat de Bose-Einstein dans le piège de Paul

$$\langle \hat{\psi}_+(\vec{r}, t) \rangle = \sqrt{N_0^+} \varphi_o(\vec{r}, t) = Y_+(\vec{r}, t) \tag{5.25}$$

et le deuxième terme représente les fluctuations thermique et quantique

$$\delta \hat{\psi}_+(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p} \neq 0} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) \tag{5.26}$$

Dans le cas de faible couplage, une haute densité dans le piège, les fluctuations dans l'état fondamental sont dues à l'interaction Coulombienne entre les particules chargées. La généralisation de l'approximation de Bogoliubov conduit pour les bosons

$$\hat{\psi}_+(\vec{r}, t) = \sqrt{N_0^{(+)}} \varphi_o(\vec{r}, t) + \sum_{\vec{p} \neq 0} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = Y_+(\vec{r}, t) + \delta \hat{\psi}_+(\vec{r}, t) \tag{5.27}$$

Pour les anti-bosons nous avons

$$\hat{\psi}_-(\vec{r}, t) = \sqrt{N_0^{(-)}} \varphi_o(\vec{r}, t) + \sum_{\vec{p} \neq 0} \hat{b}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = Y_-(\vec{r}, t) + \delta \hat{\psi}_-(\vec{r}, t) \tag{5.28}$$

## 5.1.2 Propriétés du plasma dégénéré

### 5.1.2.1 Evolution temporelle de l'opérateur champ de Heisenberg

Pour comprendre les propriétés des bosons chargés de spin zéro identiques confinés dans le piège de Paul, nous recourons à la méthode d'équation de mouvement [48, 66]. Il existe plusieurs méthodes, telles que les diagrammes de Feynman et les fonctions de Green, utilisées dans l'approximation microscopique. Nous suivons dans cette section la démarche de l'ouvrage [48] consacrée au système d'électrons, qui sont des fermions chargés négativement.

Le système de bosons identiques chargés et de spin zéro est décrit par l'opérateur champ d'annihilation (5.4)

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) + \sum_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r})$$

Les opérateurs bosons  $\hat{a}_{\vec{p}}$  et  $\hat{b}_{\vec{p}}$  doivent remplir les conditions signalées par Pines [66] afin que la méthode d'équation de mouvement soit utilisée :

- (1) l'état fondamental est connu, c'est le vide de Fock  $\psi_0 = |0\rangle$  ;
- (2) les opérateurs bosons de création et d'annihilation pour les excitations élémentaires du système,  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}$  satisfont les équations oscillatoires de mouvement

$$\begin{cases} [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, & [\hat{H}, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger] = \omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \\ [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}, & [\hat{H}, \hat{b}_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \end{cases} \quad (5.29)$$

- (3) Appliqués sur  $\psi_0$ ,  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$  créent une excitation d'énergie  $\omega_{\vec{p}}$ . De même

$$\hat{a}_{\vec{p}} \psi_0 = 0, \quad \hat{b}_{\vec{p}} \psi_0 = 0 \quad (5.30)$$

L'opérateur Hamiltonien  $\hat{H}$  du système de bosons en interaction est défini en seconde quantification [31, 46, 60]

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right] \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{V}(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}) \quad (5.31)$$

Les opérateurs champs  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$  et  $\hat{\psi}(\vec{r})$  satisfont, aux temps égaux, les relations de commutation (4.19)

$$\begin{cases} [\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = \left[ \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}), \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger) \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}') \right] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ [\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}')] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0 \end{cases}$$

L'évolution temporelle de l'opérateur champ est définie par l'équation de mouvement

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}'', t)}{\partial t} = [\hat{\psi}(\vec{r}'', t), \hat{H}] \quad (5.32)$$

où  $\hat{\psi}(\vec{r}'', t)$ ,  $\hat{\psi}(\vec{r}', t)$  et  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  dans (5.32) sont des opérateurs champs de Heisenberg que nous noterons  $\hat{\psi}(r'')$ ,  $\hat{\psi}(r')$  et  $\hat{\psi}(r)$ . L'équation (5.32) peut s'écrire sous la forme

$$i \frac{\partial \hat{\psi}(r'')}{\partial t} = -[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] \quad , \quad \hbar \equiv 1 \quad (5.33)$$

Calculons le commutateur de (5.33) en fonction des relations (4.19) et (5.31)

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] &= \int d\vec{r} \left[ \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r), \hat{\psi}(r'') \right] \\ &+ \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' [\hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r), \hat{\psi}(r'')] \quad (5.34) \end{aligned}$$

Le premier terme de droite vaut

$$\begin{aligned} \int d\vec{r} \left[ \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r), \hat{\psi}(r'') \right] &= \int d\vec{r} [\hat{\psi}^\dagger(r), \hat{\psi}(r'')] \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r) \\ &+ \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) [\hat{\psi}(r''), \hat{\psi}(r)] \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int d\vec{r} \left[ \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r), \hat{\psi}(r'') \right] &= - \int d\vec{r} \delta(r-r'') \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r) \\ &= - \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r'') \quad (5.35) \end{aligned}$$

Le calcul du deuxième terme de droite de (5.34) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' [\hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r), \hat{\psi}(r'')] &= \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' [\hat{\psi}^\dagger(r), \hat{\psi}(r'')] \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r) \\ &+ \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(r) [\hat{\psi}(r''), \hat{\psi}^\dagger(r')] \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r) \\ &= \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' (-) \delta(r-r'') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r) \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(r) \delta(r''-r') \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r) \\ &= -\frac{1}{2} \int d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(r') \left( \int d\vec{r} \delta(r-r'') \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r) \right) \hat{\psi}(r') \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \int d\vec{r}' \delta(r''-r') \hat{V}(r-r') \hat{\psi}(r') \right) \hat{\psi}(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}(r'') \hat{\psi}(r') \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{V}(r - r'') \hat{\psi}(r'') \hat{\psi}(r) \\
&= -\frac{1}{2} \int d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}(r'') \hat{\psi}(r') \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{V}(r'' - r) \hat{\psi}(r'') \hat{\psi}(r) \\
&= - \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r'') \quad (5.36)
\end{aligned}$$

En portant (5.36) et (5.35) dans (5.34) nous obtenons

$$[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] = - \left[ \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r'') + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r'') \right] \quad (5.37)$$

Le deuxième terme de droite dans le cas des bosons de charge positive a la forme suivante

$$\int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r'') = \sum_{\vec{k}\vec{l}\vec{m}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{l}} \hat{a}_{\vec{m}} \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \varphi_{\vec{k}}^*(r') \varphi_{\vec{l}}(r') \varphi_{\vec{m}}(r'') \quad (5.38)$$

Le membre de droite de (5.38) contient les produits de trois opérateurs bosons. Dans l'approximation du premier ordre dite de Hartree-Fock, nous ne considérons que les termes comprenant l'opérateur nombre  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$ . Aussi conservons-nous les termes  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{m}}$  et  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{l}} \hat{a}_{\vec{k}} = -\hat{a}_{\vec{l}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$ ; la relation (5.38) devient donc [48]

$$\begin{aligned}
\int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r'') &\cong \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \hat{\psi}(r'') \\
&\quad + \int d\vec{r}' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r'') \rangle \quad (5.39)
\end{aligned}$$

où nous avons sommé les séries qui figurent dans les expressions de  $\hat{\psi}(r'')$  et  $\hat{\psi}(r')$ ; les termes entre crochets indiquent des valeurs probables dans l'état fondamental, c'est-à-dire que seuls les termes en  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$  sont retenus à l'intérieur des crochets et  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$  est calculé pour l'état fondamental. Le premier terme de droite de (5.39) représente l'action Coulombienne directe, le second les échanges [48]. En portant (5.39) dans (5.37) le commutateur devient

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] &\cong - \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \right) \hat{\psi}(r'') \\
&\quad - \int d\vec{r}' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r'') \rangle \quad (5.40)
\end{aligned}$$

En portant (5.40) dans (5.33) nous obtenons l'équation d'évolution temporelle de l'opérateur champ de Heisenberg

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial \hat{\psi}(r'')}{\partial t} &= -[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] \\
&\cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \right) \hat{\psi}(r'') \\
&\quad + \int d\vec{r}' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r'') \rangle
\end{aligned} \tag{5.41}$$

### 5.1.2.2 Equation de Hartree-Fock des bosons chargés de spin zéro dans le piège de Paul

L'opérateur champ de Heisenberg pour les bosons chargés a la forme suivante tirée de l'opérateur champ de Schrödinger

$$\hat{\psi}(r'') = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') + \sum_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') = \hat{\psi}_+(r'') + \hat{\psi}_-(r'')$$

Considérons l'équation (5.41) dans le cas des bosons de charge positive, nous avons

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial \hat{\psi}_+(r'')}{\partial t} &\cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}_+^\dagger(r') \hat{\psi}_+(r') \rangle \right) \hat{\psi}_+(r'') \\
&\quad + \int d\vec{r}' \hat{\psi}_+(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}_+^\dagger(r') \hat{\psi}_+(r'') \rangle
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Introduisons l'expansion de  $\hat{\psi}_+(r) = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r)$  dans (5.42), nous obtenons

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') \right] &\cong \\
&\sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \left[ \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \sum_{\vec{i}} \hat{a}_{\vec{i}}^\dagger \hat{a}_{\vec{i}} \rangle \varphi_{\vec{i}}^*(r') \varphi_{\vec{i}}(r') \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \right. \\
&\quad \left. + \int d\vec{r}' \varphi_{\vec{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \sum_{\vec{j}} \hat{a}_{\vec{j}}^\dagger \hat{a}_{\vec{j}} \rangle \varphi_{\vec{j}}^*(r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \right]
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Soit  $\varepsilon_{\vec{p}}$  la valeur propre de l'opérateur énergie de membre de gauche, la relation (5.43) prend la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_p \varphi_{\vec{p}}(r'') \cong & \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{i}} N_{\vec{i}}^{(+)} \varphi_{\vec{i}}^*(r') \varphi_{\vec{i}}(r') \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \\ & + \int d\vec{r}' \varphi_{\vec{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{j}} N_{\vec{j}}^{(+)} \varphi_{\vec{j}}^*(r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \end{aligned} \quad (5.44)$$

Cette équation (5.44) est l'équation de Hartree-Fock des bosons de charge positive de spin zéro dans le piège de Paul. Pour les bosons de charge négative nous avons l'équation

$$\begin{aligned} \varepsilon_p \varphi_{\vec{p}}(r'') \cong & \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{i}} N_{\vec{i}}^{(-)} \varphi_{\vec{i}}^*(r') \varphi_{\vec{i}}(r') \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \\ & + \int d\vec{r}' \varphi_{\vec{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{j}} N_{\vec{j}}^{(-)} \varphi_{\vec{j}}^*(r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dans ces équations les actions des échanges s'ajoutent aux actions directes contrairement au cas des électrons [48] où les actions des échanges sont de signe contraire à celui des actions directes.

### 5.1.2.3 Excitations élémentaires dans le piège

Considérons l'équation de Hartree-Fock du système de bosons chargés positivement (5.44). Si les fonctions  $\varphi_{\vec{p}}(r'')$  telles que  $\hat{\psi}(r'') = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'')$ , sont solutions de l'équation de Hartree-Fock le produit scalaire de (5.44) par  $\varphi_{\vec{p}}^*(r'')$  donne

$$\begin{aligned} \int d\vec{r} \varphi_{\vec{p}}^*(r'') \varepsilon_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') \cong & \int d\vec{r} \varphi_{\vec{p}}^*(r'') \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{i}} N_{\vec{i}}^{(+)} \varphi_{\vec{i}}^*(r') \varphi_{\vec{i}}(r') \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \\ & + \int d\vec{r} \varphi_{\vec{p}}^*(r'') \left( \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{j}} N_{\vec{j}}^{(+)} \varphi_{\vec{j}}^*(r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \right) \varphi_{\vec{p}}(r') \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nous tirons le spectre de l'énergie de quasi-particule de Hartree-Fock

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\vec{p}} = & \frac{p^2}{2m} + V_{pi\grave{e}ge} + \sum_{\vec{i}} N_{\vec{i}}^{(+)} \int d\vec{r}' \varphi_{\vec{i}}^*(r') V(r'' - r') \varphi_{\vec{i}}(r') \\ & + \sum_{\vec{j}} N_{\vec{j}}^{(+)} \int d\vec{r}' \varphi_{\vec{j}}^*(r') V(r'' - r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p^2}{2m} + V_{\text{piège}} + V_0 \sum_{\vec{i}} N_{\vec{i}}^{(+)} + V_q \sum_{\vec{j}} N_{\vec{j}}^{(+)} \\
&= \frac{p^2}{2m} + V_{\text{piège}} + \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(+)} [V_0 + V_q]
\end{aligned} \tag{5.47}$$

#### 5.1.2.4 Energie de l'état fondamental du système dans le piège

Si nous négligeons le micromouvement dans le piège de Paul, l'énergie totale du système est conservée car il n'y a pas d'échange d'énergie entre le plasma dans le piège et l'extérieur. Dans ce cas l'énergie totale conservée est donnée par

$$E = \langle \varphi | \hat{H} | \varphi \rangle$$

où

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right] \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{V}(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r})$$

La valeur moyenne de  $\hat{H}$  sur l'état  $|\varphi\rangle$  s'exprime en fonction de l'opérateur densité à un corps  $\hat{\rho}$ . Considérons en effet les opérateurs à un et deux corps, en notant  $N_i$  l'occupation d'un état  $i$ , les valeurs moyennes sur  $|\varphi\rangle$  de ces opérateurs sont

$$\langle \varphi | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \varphi \rangle = \langle i | \hat{\rho} | j \rangle = \rho_{ji} = N_i \delta_{ij} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_k | \varphi \rangle &= \rho_{ki} \rho_{lj} + \rho_{li} \rho_{kj} \\
&= N_i \delta_{ik} N_j \delta_{lj} + N_i \delta_{il} N_j \delta_{jk} \\
&= N_i N_j (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{jk})
\end{aligned} \tag{5.49}$$

La valeur moyenne  $\langle \varphi | \hat{H} | \varphi \rangle$  s'exprime donc en fonction des densités à un corps [36]

$$\begin{aligned}
\langle \varphi | \hat{H} | \varphi \rangle &= \sum_{ij} \left\langle i \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right| j \right\rangle \rho_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{i}\vec{i}'\vec{j}\vec{j}'} \langle \vec{i}\vec{i}' | \hat{V} | \vec{j}\vec{j}' \rangle \rho_{ji} \rho_{j'i'} \\
&= \sum_{ij} N_i \delta_{ij} \left\langle i \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right| j \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\vec{i}\vec{i}'\vec{j}\vec{j}'} N_i N_{i'} \delta_{ij} \delta_{i'j'} \langle \vec{i}\vec{i}' | \hat{V} | \vec{j}\vec{j}' \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\vec{i}\vec{i}'\vec{j}\vec{j}'} N_i N_{i'} \delta_{ij} \delta_{i'j'} \langle \vec{i}\vec{i}' | \hat{V} | \vec{j}'\vec{j} \rangle \\
&= \sum_i N_i \left\langle i \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right| i \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{ii'jj'} N_i N_{i'} \delta_{ij} \delta_{i'j'} (\langle jj' | \hat{V} | jj' \rangle + \langle ij' | \hat{V} | j'i \rangle) \\
& = \sum_i N_i \left\langle i \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right| i \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{ii'} N_i N_{i'} \langle ii' | \hat{V} | ii' \rangle \\
& + \frac{1}{2} \sum_{ii'} N_i N_{i'} \langle ii' | \hat{V} | i'i \rangle \\
& = \sum_i N_i \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{ii'} N_i N_{i'} [\langle ii' | \hat{V} | ii' \rangle + \langle ii' | \hat{V} | i'i \rangle] \\
& = \sum_i N_i \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{ii'} N_i N_{i'} [V_0 + V_q] \tag{5.50}
\end{aligned}$$

L'énergie de l'état fondamental du système de bosons de charge positive dans le piège de Paul est donnée par

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_i N_i^{(+)} \varepsilon_i^0 + \frac{[N_0^{(+)}]^2}{2} [V_0 + V_q] + \frac{1}{2} \sum_{i,i' \neq 0} N_i^{(+)} N_{i'}^{(+)} [V_0 + V_q] \tag{5.51}$$

De même nous trouvons pour les antiparticules

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_i N_i^{(-)} \varepsilon_i^0 + \frac{[N_0^{(-)}]^2}{2} [V_0 + V_q] + \frac{1}{2} \sum_{i,i' \neq 0} N_i^{(-)} N_{i'}^{(-)} [V_0 + V_q] \tag{5.52}$$

## 5.2 Régimes dans le piège de Paul

Nous avons vu au chapitre 3 que les régimes possibles dans le piège de Paul sont le régime de Mathieu ou gazeux, le régime intermédiaire ou liquide et le régime cristallin. Dans cette section nous allons nous intéresser aux propriétés des bosons chargés dans les états gazeux et liquide. Nous considérons le cas de haute densité des particules dans le piège pour lequel l'interaction de Coulomb est faible ; condition que nous pouvons réaliser à partir de l'équation de la densité maximale dans le piège de Paul (3.23)

$$\eta_{max} = \frac{12 \varepsilon_0 V_{RF}^2}{m \omega_{RF}^2 R^2}$$

soit en augmentant la tension  $V_{RF}$  ou soit en réduisant la fréquence  $\omega_{RF}$  pour des bosons de masse donnée et un piège de volume fixé.

## 5.2.1 Régime de Mathieu ou gazeux

### 5.2.1.1 Fonction de distribution

Dans le piège de Paul à la température  $T \geq 100 K$  les bosons chargés identiques de spin zéro constituent un plasma non-neutre gazeux. La densité du plasma étant grande les interactions coulombiennes entre les bosons sont faibles et peuvent être négligées. Dans ces conditions le plasma quantique obéit à la statistique de Bose-Einstein [66] dont la fonction de distribution est donnée par (2.1)

$$N_j(\varepsilon_j) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} - 1}$$

L'interaction Coulombienne binaire entre bosons étant faible nous appliquons à ce plasma les théories de nombre de saturation et de température critique. Ainsi le nombre de saturation dans le plasma non-neutre dans le piège harmonique de Paul est donné par (2.16)

$$N'_{max} = 1,202 \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{oh}} \right)^3$$

La pulsation  $\omega_{oh}$  est celle du mouvement séculaire

$$\omega_{h0} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} = \left( \frac{\bar{\omega}_z^3}{4} \right)^{1/3} = 4^{-1/3} \bar{\omega}_z \quad (5.53)$$

avec

$$\bar{\omega}_z = 2\bar{\omega}_x = 2\bar{\omega}_y$$

or

$$\bar{\omega}_z = \frac{\sqrt{2} e V_{RF}}{m \pi v_{RF} R^2}$$

d'où

$$N'_{max} = 1,202 \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{oh}} \right)^3 = 4,808 \left( \frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}_z} \right)^3 = 4,808 \left( \frac{k_B T m \pi v_{RF} R^2}{\hbar \sqrt{2} e V_{RF}} \right)^3 \quad (5.54)$$

Si, à une température fixée, on place dans le piège un nombre de particules  $N$  supérieur à  $N'_{max}$ , on est certain qu'au moins  $N - N'_{max}$  particules iront se loger sur le niveau fondamental [22,68].

La température critique dans le piège est donnée par

$$T_C = 0,94 \frac{\hbar \omega_{oh}}{k_B} N^{\frac{1}{3}} = 0,94 \frac{\hbar \bar{\omega}_z}{k_B} N^{\frac{1}{3}} = 0,94 \sqrt{2} \frac{\hbar e V_{RF}}{k_B m \pi v_{RF} R^2} \left( \frac{N}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.55)$$

### 5.2.1.2 Equation de Hartree-Fock du régime de Mathieu

Considérons l'équation de Hartree-Fock (5.44) de bosons de charge positive dans le piège

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') \cong & \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{i}} N_{\vec{i}}^{(+)} \varphi_{\vec{i}}^*(r') \varphi_{\vec{i}}(r') \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \\ & + \int d\vec{r}' \varphi_{\vec{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{j}} N_{\vec{j}}^{(+)} \varphi_{\vec{j}}^*(r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \end{aligned}$$

Dans le cas de haute densité du plasma non neutre l'interaction Coulombienne est faible comparée à l'énergie cinétique des bosons. Si nous négligeons l'interaction Coulombienne l'équation de Hartree-Fock prend donc la forme suivante [48]

$$\varepsilon_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') \cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \quad (5.56)$$

Nous retrouvons ici l'équation d'une particule sans interaction confinée dans le piège harmonique. L'Hamiltonien à un corps permet de trouver l'Hamiltonien total du système de bosons chargés « sans interactions » : Le système peut être traité comme celui de bosons neutres sans interaction. A partir de (5.52) nous pouvons calculer le spectre d'énergie des bosons confinés dans le potentiel harmonique

$$\int d\vec{r}'' \varphi_{\vec{p}}^*(r'') \varepsilon_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') = \int d\vec{r}'' \varphi_{\vec{p}}^*(r'') \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right) \varphi_{\vec{p}}(r'')$$

D'où

$$\varepsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{piège}} \quad (5.57)$$

## 5.2.2 Régime liquide

Il existe dans la nature seulement deux liquides quantiques qui sont littéralement liquides, les liquides des isotopes d'hélium  $He^3$  et  $He^4$  aux basses températures  $\sim 1 - 2K$ . Les autres substances solidifient bien avant que les effets quantiques ne deviennent importants dans le liquide [67]. Le liquide de l'hélium 4 est un liquide de Bose neutre de spin zéro. Les ions identiques dans le piège de Paul peuvent être refroidis et se trouver dans le régime intermédiaire ou liquide; lorsque ces ions ou noyaux atomiques identiques piégés sont des bosons, le liquide ainsi formé est un liquide de Bose chargé.

### 5.2.2.1 Liquide de Bose neutre dégénéré

Lorsque on refroidit l'isotope  $He^4$  celui-ci connaît le point  $\lambda$ , point de transition de phase caractérisé par l'apparition, en- dessous de la température de transition, de la superfluidité dans le liquide ; au point de vue microscopique, dans le liquide  $He^4$  superfluide, une fraction finie des particules (atomes) ont exactement l'impulsion nulle ; ces particules forment le condensat de Bose-Einstein, ou simplement le condensat, dans l'espace des moments [56]. Dans un gaz idéal de Bose à  $T=0$ , toutes ses particules sont dans le condensat, dans un gaz avec faible interaction, presque toutes les particules sont dans le condensat. Dans le cas général de liquide de Bose avec forte interaction entre les particules, la fraction de particules qui sont dans le condensat à  $T=0$  n'est pas égale à l'unité [67].

Dans un système superfluide, la matrice densité dans l'état fondamental est donnée par [66]

$$\rho_0^{(\vec{r},\vec{r}')} = \frac{N_0}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} \quad (5.58)$$

Le premier terme de membre de droite,  $\frac{N_0}{\Omega}$ , est d'une portée infinie dans  $(\vec{r}' - \vec{r})$ , il est une conséquence de l'occupation macroscopique d'un état quantique d'une simple particule, le condensat. Le second terme,  $\frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$ , a une portée finie, il décrit les corrélations locales entre les particules excitées du système [66]. La présence d'un terme à portée infinie peut être considérée comme caractéristique d'un système superfluide de bosons. Dans un système normal, il n'existe pas ce terme, la matrice densité  $\rho_0^{(\vec{r},\vec{r}'')}$  s'annule lorsque  $(\vec{r}' - \vec{r}) \rightarrow \infty$ . Nous pouvons étendre ces arguments au cas d'un état  $|\varphi(N)\rangle$  autre que l'état fondamental. Nous supposons que cet état inclut un condensat, contenant un nombre macroscopique des particules ; la matrice densité dans cet état s'écrit [56, 66]

$$\rho^{(\vec{r},\vec{r}')} = \gamma^*(\vec{r})\gamma(\vec{r}') + \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} \quad (5.59)$$

où  $\gamma(\vec{r}')$  est le paramètre d'ordre défini

$$\gamma(\vec{r}') = \langle \hat{\psi}(\vec{r}') \rangle = \langle \varphi(N-1) | \hat{\psi}(\vec{r}') | \varphi(N) \rangle \quad (5.60)$$

et

$$\gamma^*(\vec{r}) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \rangle = \langle \varphi(N) | \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) | \varphi(N-1) \rangle \quad (5.61)$$

### 5.2.2.2 Liquide de Bose chargé de spin zéro dans le piège de Paul

Dans le piège de Paul le régime intermédiaire ou liquide est établi dans la tranche des températures de 100 à 1 K. L'équation de Hartree-Fock de bosons de charge positive dans ce régime est donnée par (5.44)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') \cong & \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} + \int d^3 r' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{l}} N_{\vec{l}}^{(+)} \varphi_{\vec{l}}^*(r') \varphi_{\vec{l}}(r') \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \\ & + \int d^3 r' \varphi_{\vec{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \sum_{\vec{j}} N_{\vec{j}}^{(+)} \varphi_{\vec{j}}^*(r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \end{aligned}$$

Si l'état quantique dans lequel se trouve le système contient le condensat, cette équation devient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(r'') \cong & \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} + \frac{1}{\Omega} \int d^3 r' \hat{V}(r'' - r') \left[ N_0^{(+)} + \sum_{\vec{l}}' N_{\vec{l}}^{(+)} \right] \right) \varphi_{\vec{p}}(r'') \\ & + \int d^3 r' \varphi_{\vec{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \left[ N_0^{(+)} \varphi_0^*(r') \varphi_0(r'') + \sum_{\vec{j}}' N_{\vec{j}}^{(+)} \varphi_{\vec{j}}^*(r') \varphi_{\vec{j}}(r'') \right] \end{aligned} \quad (5.62)$$

Nous notons dans le terme des interactions directes l'existence des  $N_0^{(+)}$  bosons dans le condensat et  $\sum_{\vec{l}}' N_{\vec{l}}^{(+)}$  bosons de déplétion du condensat, tandis que le terme des interactions des échanges contient  $\sum_{\vec{j}}' N_{\vec{j}}^{(+)}$  bosons excités à côté des  $N_0^{(+)}$  bosons condensés. Le spectre de l'énergie des excitations élémentaires dans ce régime est celui donné par (5.47)

$$\varepsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{piège}} + \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(+)} [V_0 + V_q]. \quad (5.63)$$

Ici, aussi la théorie est symétrique à la charge ; on obtient les mêmes équations (5.62) et (5.63) pour les anti-bosons.

### 5.3 Comparaison des résultats de l'application de la théorie microscopique aux systèmes de particules identiques confinées

1 Système	Assemblée d'atomes identiques de spin zéro dans un piège magnétique (Gross, Pitaevskii, Dalfvo, ...)	Gaz électronique à haute densité confiné (Nozières, Pines, Kittel, ...)	Assemblée de particules identiques chargées de spin zéro à haute densité dans un piège de Paul (Tshizanga)
2 champ de particules	Champ scalaire réel ou champ de méson neutre  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} [a^-(\vec{k})e^{-ikx} + a^+(\vec{k})e^{ikx}]$	Champ de Dirac  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{p_0=E_p} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^2 \{c_r(\mathbf{p})u^{(r)}(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r^*(\mathbf{p})u^{(r)*}(\mathbf{p})e^{-ipx}\}$  $\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{p_0=E_p} \left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^2 \{c_r^*(\mathbf{p})u^{(r)*}(\mathbf{p})e^{-ipx} + d_r(\mathbf{p})u^{(r)}(\mathbf{p})e^{ipx}\}$	Champ scalaire complexe ou champ de mésons chargés  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [a(\vec{k})e^{ikx} + b^*(\vec{k})e^{-ikx}]$  $\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [b(\vec{k})e^{ikx} + a^*(\vec{k})e^{-ikx}]$
3 Opérateurs particules	$\hat{a}^\pm = \frac{\mp i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}(x)$  $= \frac{\mp i}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} [\hat{\Pi}(x) \pm ik_0 \hat{\phi}(x)] e^{\mp ikx}$	$\hat{c}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$  $\hat{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$	$\hat{a}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} \left[ \frac{\partial \hat{\phi}(x)}{\partial t} - ik_0 \hat{\phi}(x) \right] e^{ikx}$  $\hat{b}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} \left[ \frac{\partial \hat{\phi}^\dagger(x)}{\partial t} - ik_0 \hat{\phi}^\dagger(x) \right] e^{ikx}$

4 Relations de commutation/anti-commutation	$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$ $[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = 0$	$\{\hat{c}(\vec{k}), \hat{c}^\dagger(\vec{k}')\} = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$ $\{\hat{c}(\vec{k}), \hat{c}(\vec{k}')\} = \{\hat{c}^\dagger(\vec{k}), \hat{c}^\dagger(\vec{k}')\} = 0$	$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') = [\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')]$ $[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = [\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}')] = \dots = 0$
5 Espace des états quantiques du système	$ N\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^N}{\sqrt{N!}}  0\rangle \quad N = 1, 2, \dots$ $\langle 0 0\rangle = 1$ $\langle N M\rangle = \delta_{NM}$ $\hat{a}_p^\dagger  \dots, N_p, \dots\rangle = \sqrt{N_p + 1}  \dots, N_p + 1, \dots\rangle$ $\hat{a}_p  \dots, N_p, \dots\rangle = \sqrt{N_p}  \dots, N_p - 1, \dots\rangle$	$\hat{c}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}\sigma}  0\rangle = N_{\vec{p}\sigma}^0  0\rangle$ $N_{\vec{p}\sigma}^0 = \begin{cases} 1, & p < p_F \\ 0, & p > p_F \end{cases}$ $\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger  \dots, N_p, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{j < p} N_j} [1 - N_p]  \dots, N_p + 1, \dots\rangle$ $\hat{c}_{\vec{p}}  \dots, N_p, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{j < p} N_j} N_p  \dots, N - 1, \dots\rangle$	$\hat{a}_{\vec{p}}  0\rangle = 0 = \hat{b}_{\vec{p}}  0\rangle, \quad \langle 0 0\rangle = 1$ $ N^{(+)}, N^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N^{(+)}! N^{(-)}!}} (\hat{a}^\dagger)^{N^{(+)}} (\hat{b}^\dagger)^{N^{(-)}}  0\rangle$ $N^{(+)}, N^{(-)} = 0, 1, 2, 3 \dots$ $\langle N^{(+)}, N^{(-)}   M^{(+)}, M^{(-)} \rangle = \delta_{N^{(+)} M^{(+)}} \delta_{N^{(-)} M^{(-)}}$ $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger  N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(+)} + 1}  N_{\vec{p}}^{(+)} + 1, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle$ $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger  N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(-)} + 1}  N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} + 1\rangle$ $\hat{a}_{\vec{p}}  N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(+)}}  N_{\vec{p}}^{(+)} - 1, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle$ $\hat{b}_{\vec{p}}  N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)}\rangle = \sqrt{N_{\vec{p}}^{(-)}}  N_{\vec{p}}^{(+)}, N_{\vec{p}}^{(-)} - 1\rangle$
6 Opérateurs de création/annihilation	$\hat{\psi}(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \langle r p\rangle = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r})$ $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \langle p r\rangle = \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r})$	$\hat{\psi}(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} \langle r p\rangle = \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r})$ $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \langle p r\rangle = \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r})$	$\hat{\Psi}(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}] \langle r p\rangle = \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}] \varphi_{\vec{p}}(\vec{r})$ $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \equiv \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger] \langle p r\rangle = \sum_{\vec{p}} [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger] \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r})$

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">7 Relations de commutation/ anti-commutation</p>	$[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ $[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}')] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0$	$\{\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')\} = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ $\{\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}')\} = \{\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')\} = 0$	$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ $[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}')] = [\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0$
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">8 Ordre à longue portée et diagonalisation de la matrice densité</p>	$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \varphi(N)   \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}')   \varphi(N) \rangle$ $\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}')$ $\rho_0(\vec{r}, \vec{r}') = N_0 \varphi_0^*(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}') + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}')$ $\lim_{ \vec{r}' - \vec{r}  \rightarrow 0} \rho_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\Omega} \left( N_0 + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}} \right)$ $\lim_{ \vec{r}' - \vec{r}  \rightarrow \infty} \rho_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0}{\Omega}$ $\int d\vec{r}' \rho(\vec{r}', \vec{r}) \phi_{\vec{p}}(\vec{r}') = N_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}}(\vec{r})$		$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \varphi(N)   \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}')   \varphi(N) \rangle$ $\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') + \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(-)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}')$ $\rho_0(\vec{r}, \vec{r}') = N_0^{(+)} \varphi_0^*(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}') + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(+)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}') + N_0^{(-)} \varphi_0^*(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}') + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(-)} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}')$ $\lim_{ \vec{r}' - \vec{r}  \rightarrow 0} \rho_0^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\Omega} \left[ N_0^{(\pm)} + \sum_{\vec{p} \neq 0} N_{\vec{p}}^{(\pm)} \right]$ $\lim_{ \vec{r}' - \vec{r}  \rightarrow \infty} \rho_0^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0^{(\pm)}}{\Omega}$ $\int d\vec{r}' \rho(\vec{r}', \vec{r}) \phi_{\vec{p}}(\vec{r}') = N_{\vec{p}}^{(+)} \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) + N_{\vec{p}}^{(-)} \phi_{\vec{p}}(\vec{r})$

<p>9 Prescription de Bogoliubov</p>	$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sqrt{N_0} \varphi_0(\vec{r}, t) + \sum_{\vec{p} \neq 0} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = \gamma(\vec{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t)$		$\hat{\psi}_{\pm}(\vec{r}, t) = \sqrt{N_0^{(\pm)}} \varphi_0(\vec{r}, t) + \sum_{\vec{p} \neq 0} \hat{a}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = \gamma_{\pm}(\vec{r}, t) + \delta\hat{\psi}_{\pm}(\vec{r}, t)$
<p>10 Opérateur Hamiltonien</p>	$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right] \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} \hat{U}_0 \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r})$	$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right] \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{V}(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r})$	$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right] \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{V}(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r})$
<p>11 Equation de mouvement</p>	$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{U}_{ext} + \hat{U}_0 \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t)$	$\frac{\partial \hat{\psi}(r'')}{\partial t} = -[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] \cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \right) \hat{\psi}(r'') - \int dr' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle$	$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H}]$ $i \frac{\partial \hat{\psi}(r'')}{\partial t} = -[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] \cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} + \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \right) \hat{\psi}(r'') + \int d\vec{r}' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle$

<p style="text-align: center;"><b>12 Dynamique du système à l'état fondamental</b></p>	$i\hbar \frac{\partial \phi_0(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext} + U_0 \eta_0(\vec{r}, t) \right] \phi_0(\vec{r}, t)$ <p style="text-align: center;">(Equation de Gross-Pitaevskii)</p>	$\varepsilon_p \varphi_p(r'') \cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \frac{1}{\Omega} \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_l N_l \right) \varphi_p(r'')$ $- \int d\vec{r}' \varphi_p(r') \hat{V}(r'' - r') \sum_j N_j \varphi_j^*(r') \varphi_j(r'').$ <p style="text-align: center;">(Equation de Hartree-Fock)</p>	$\varepsilon_{\bar{p}} \varphi_{\bar{p}}(r'') \cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \frac{1}{\Omega} \int d\vec{r}' \hat{V}(r'' - r') \left[ N_0^{(\pm)} + \sum_{l \neq 0} N_l^{(\pm)} \right] \right) \varphi_{\bar{p}}(r'')$ $+ \int d\vec{r}' \varphi_{\bar{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \left[ N_0^{(\pm)} \varphi_0^*(r') \varphi_0(r'') + \sum_{j \neq 0} N_j^{(\pm)} \varphi_j^*(r') \varphi_j(r'') \right]$ <p style="text-align: center;">(Equation de Hartree-Fock)</p>
<p style="text-align: center;"><b>13 Energie de l'état fondamental</b></p>	$E_0 = \sum_p \varepsilon_p^0 N_p + \frac{U_0}{\Omega} \left( N^2 - \frac{N_0^2}{2} \right)$	$E_0 = \langle 0   \hat{H}   0 \rangle = \sum_{p\sigma} N_{p\sigma}^0 \varepsilon_p^0$ $+ \frac{1}{2} \sum_{pp'\sigma\sigma'} V_0 \langle 0   \hat{c}_{p\sigma}^\dagger \hat{c}_{p'\sigma'}^\dagger \hat{c}_{p'\sigma'} \hat{c}_{p\sigma}   0 \rangle$ $+ \frac{1}{2} \sum_{pq\sigma, q \neq 0} V_q \langle 0   \hat{c}_{p+q\sigma}^\dagger \hat{c}_{p\sigma}^\dagger \hat{c}_{p+q\sigma'} \hat{c}_{p\sigma'}   0 \rangle$ $= \sum_{p\sigma} N_{p\sigma}^0 \varepsilon_p^0$ $+ \frac{1}{2} \sum_{pp'\sigma\sigma'} V_0 N_{p\sigma}^0 (N_{p'\sigma'}^0 - \delta_{p'p} \delta_{\sigma'\sigma})$ $- \frac{1}{2} \sum_{pq\sigma} V_q N_{p+q\sigma}^0 N_{p\sigma}^0$	$E_0 = \langle 0   \hat{H}   0 \rangle$ $= \sum_i N_i^{(\pm)} \varepsilon_i^0 + \frac{N_0^{(\pm)2}}{2} [V_0 + V_q]$ $+ \frac{1}{2} \sum_{i, i' \neq 0} N_i^{(\pm)} N_{i'}^{(\pm)} [V_0 + V_q]$

14 Spectre des excitations Élémentaires	$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + \frac{N}{\Omega} U_0 + \frac{N - N_{\mathbf{p}}}{\Omega} U_0$	$\varepsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{HFA} = \frac{\partial E_0^{HFA}}{\partial N_{\mathbf{p}\sigma}} = \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + \sum_{\mathbf{p}'\sigma'} N_{\mathbf{p}'\sigma'}^0 V_0 - \sum_{\mathbf{p}'\sigma'} N_{\mathbf{p}'\sigma'}^0 V_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} \delta_{\sigma\sigma'}$	$\varepsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{piège}} + \sum_{\vec{p}} N_{\vec{p}}^{(\pm)} [V_0 + V_q]$
15 Nombre de saturation	$N'_{max} = 1,202 \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{oh}} \right)^3$		$N'_{max} = 4,808 \left( \frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}_z} \right)^3 = 4,808 \left( \frac{k_B T m \pi v_{RF} R^2}{\hbar \sqrt{2} e V_{RF}} \right)^3$
16 Température critique	$T_C = 0,94 \frac{\hbar \omega_{oh}}{k_B} N^{\frac{1}{3}}$		$T_C = 0,94 \frac{\hbar \bar{\omega}_z}{k_B} N^{\frac{1}{3}} = 0,94 \sqrt{2} \frac{\hbar e V_{RF}}{k_B m \pi v_{RF} R^2} \left( \frac{N}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$
17 densité maximale dans le piège			$\eta_{max} = \frac{12 \varepsilon_0 V_{RF}^2}{m \omega_{RF}^2 R^4}$

## Commentaires

A très basses températures ou à forte densité les propriétés quantiques des particules apparaissent. Le spin et la charge électrique jouent un rôle déterminant dans la dégénérescence quantique des systèmes de particules identiques et dans les propriétés des systèmes dégénérés. Le spin entier d'une particule est responsable de l'occupation macroscopique d'un état quantique d'une simple particule par les bosons identiques, la condensation de Bose-Einstein (BEC) ; tandis que le spin demi-entier est responsable de l'exclusion de Pauli entre les fermions et conduit à la mer de Fermi.

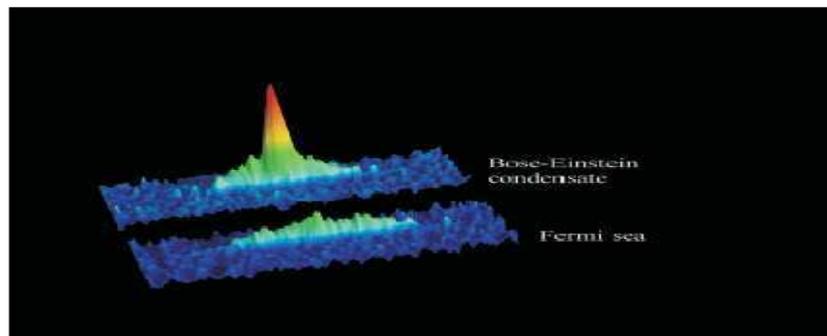


Fig. 5.1 Mélange de gaz quantiques ultra-froids confinés dans un piège magnétique : un condensat de Bose-Einstein d'atomes de lithium 7 (spin entier) immergé dans une mer de Fermi d'atomes de lithium 6 (spin demi-entier). La température la plus basse produite pour ce mélange est de l'ordre de  $0.2 T_F$ .

Source : Séminaire Poincaré 1 (2003) 39 – 62 de Dalibard et Solomon

Les tableaux ci-dessus contiennent 4 colonnes et 17 lignes. La première colonne indique les étapes de la théorie microscopique. Les 3 autres colonnes correspondent aux trois types d'assemblées des particules identiques confinées.

Les 7 premières lignes donnent les résultats de chaque étape dans la construction de l'opérateur champ d'annihilation de particule d'impulsion  $\mathbf{p}$  au point  $\mathbf{r}$  et de son conjugué hermitique. Le spin et la charge de la particule déterminent le type de champ quantique pour chaque assemblée. Ce champ doit être la solution de l'équation de Klein-Gordon découlant d'une densité Lagrangienne libre, laquelle densité est un invariant de Lorentz conduisant à une densité Hamiltonienne définie positive[63]. La différence de spin et de la charge est donc la cause de la différence entre les colonnes 2,3 et 4.

La ligne 8 et la ligne 9 donnent les paramètres de la dégénérescence quantique de chaque assemblée, il s'agit de l'ordre à longue portée, la diagonalisation de la matrice densité et du paramètre d'ordre. Ces paramètres existent pour les assemblées des particules de spin zéro et non pour les électrons qui sont des fermions de spin  $\pm \frac{1}{2}$ . Ici la théorie reste symétrique par rapport à la charge électrique dans la colonne 4.

Les lignes 10 à 14 donnent les résultats des propriétés de chaque système dégénéré à l'état fondamental, il s'agit de l'opérateur Hamiltonien du système avec interaction de courte portée pour l'assemblée des atomes bosoniques neutres (colonne 2), et avec interaction de longue portée de Coulomb pour les deux autres assemblées. Il s'agit aussi de l'équation de mouvement, de l'équation de la dynamique du système (équation de Gross-Pitaevskii pour les atomes et les équations de Hartree-Fock pour les assemblées avec charge électrique), du spectre des excitations élémentaires et de l'énergie de l'état fondamental. Ici aussi le spin et la charge sont la cause des différences entre les colonnes (par exemple les termes des échanges n'ont pas le même signe dans les colonnes 3 et 4).

Les trois dernières lignes concernent les assemblées sans interactions le cas du régime de Mathieu à forte densité. A température et volume fixés on peut obtenir un nombre de saturation inférieur au nombre de particules dans le piège et obtenir la condensation de Bose-Einstein. Ici il convient de noter le rôle que jouent la masse de la particule et la tension modulée dans le cas des bosons chargés dans le piège de Paul (colonne 4) pour modifier la densité des particules.

## Conclusion

Les noyaux atomiques ou les ions bosoniques de spin zéro identiques confinés dans un piège des particules chargées de Penning ou de Paul constituent un système de bosons chargés ou un plasma bosonique non neutre.

L'étude de la dégénérescence quantique d'un plasma bosonique non neutre de spin zéro dans le piège radiofréquence harmonique de Paul a été faite dans ce travail en nous servant de la théorie microscopique dans le cas de forte densité des bosons dans le piège, condition pour laquelle l'interaction Coulombienne entre les particules du système est faible.

L'usage de la théorie microscopique, dans le cadre de la théorie quantique relativiste des champs, a exigé l'identification du champ de bosons chargés de spin zéro qui est le champ scalaire complexe ou champ des mésons chargés, la construction à partir de ce champ des opérateurs bosons  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{b}^\dagger$ , la définition de l'espace des états quantiques, la construction des opérateurs d'annihilation ou de création des bosons d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$ .

Les opérateurs champs ainsi construits ont servi à définir l'opérateur Hamiltonien de la seconde quantification du système de bosons chargés avec interaction, qui du fait que l'interaction Coulombienne est de longue portée, diffère de l'opérateur Hamiltonien du gaz des bosons neutres dont l'interaction entre les particules est de courte portée. Cette différence entre les opérateurs Hamiltoniens de ces deux systèmes entraîne celle des équations de mouvement et des équations de la dynamique de ces systèmes ainsi que celle des énergies de l'état fondamental et des spectres des excitations élémentaires.

La matrice densité à une particule et l'approximation de Bogoliubov dans le cas de plasma non neutre de bosons de spin zéro ont conduit à la dégénérescence quantique du plasma des bosons et des anti-bosons par l'existence de l'ordre à longue portée, la valeur propre macroscopique d'un état et du paramètre d'ordre du plasma dégénéré.

D'après les études expérimentales faites sur les ions piégés, trois régimes sont possibles lorsque la température dans le piège varie : le régime de Mathieu ou gazeux s'établit lorsque la température est

supérieure ou égale à 100 K, entre 100 et 1 K les ions sont dans le régime intermédiaire ou liquide, le régime cristallin apparaît pour les températures inférieures ou égales à 1 K. Cependant les transitions de phase dépendent aussi de la population de particules dans le piège. Nous avons considéré le plasma bosonique non neutre à forte densité dans le piège dans le régime de Mathieu et dans le régime intermédiaire. Dans le premier cas, régime gazeux, l'interaction Coulombienne est faible et elle peut être négligée. Le plasma bosonique non neutre dans ce cas est assimilable à un gaz de Bose sans interaction, et nous lui appliquons la théorie de nombre de saturation et de la température critique dans le piège harmonique radiofréquence. L'existence du nombre de saturation dans ce régime implique la dégénérescence du système, dès que le nombre des bosons dans le piège est supérieur au nombre de saturation à une température fixe donnée, on assiste à une occupation macroscopique d'un niveau d'état quantique du système fondamental ou autre.

Dans le régime intermédiaire le plasma bosonique non neutre est un liquide de Bose chargé. La dégénérescence quantique dans le liquide est signalée par l'existence d'un terme de portée finie dans la matrice densité.

A la section 5.3 nous avons comparé nos résultats sur le plasma non neutre de bosons identiques dans le piège de Paul et ceux des autres chercheurs sur l'assemblée des atomes neutres de spin zéro dans le piège magnétique et sur le gaz électronique. Il ressort de notre travail que l'assemblée des ions ou des noyaux atomiques identiques doit présenter des propriétés différentes dans le piège des particules chargées à très basses températures et à haute densités selon que les ions ou les noyaux sont des fermions ou des bosons.

L'existence du condensat de Bose-Einstein dans le plasma non neutre des bosons de spin zéro implique l'existence des propriétés particulières de fluidité, de conduction électrique et thermique ... de ce plasma non neutre des bosons à très basses températures. Le fait qu'un grand nombre des bosons puisse se trouver dans un même état quantique à très basse température peut avoir des implications dans l'implémentation d'une mémoire quantique lorsqu'on sait que dans ce domaine on cherche à tirer parti des propriétés d'ensembles d'ions piégés et refroidis par le laser pour inventer de nouveaux dispositifs de manipulation de l'information quantique, démontrer de nouvelles fonctions quantiques ou en améliorer les performances.

## Bibliographie

- [1] Akhiezer A. and S. Pételinski, (1977), *Les méthodes de la physique statistique*, Mir, Moscou.
- [2] Aspect A., J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, and C. Cohen-Tannoudji, *Cooling Atoms with Stimulated Emission*, Physical Review Letters, Volume 57, Number 14 (1986).
- [3] Avez B., M. Bender, K. Bennaceur, P. Chomaz, T. Duguet et C. Simenel. *Champ moyen dépendant du temps et corrélations d'appariement*. juin 2006, Inédit.
- [4] Balibar S., *Superfluidité et condensation de Bose - Einstein : de l'hélium liquide aux vapeurs alcaline*, Institut Henri Poincaré, 29 mars 2003.
- [5] Balibar S., *Looking Back at Superfluid Helium*, Séminaire Poincaré 1 (2003) 11-20
- [6] Balibar S., *La superfluidité*, Texte de la 223e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée le 10 août 2000
- [7] Bayindir M. and B. Tanatar, *Bose-Einstein condensation in a two-dimensional, trapped, interacting gas*, Physical Review A, Volume 58, Number 4, pp 3134-3137 (1998).
- [8] Baym G., *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, University of Illinois, Urbana January 2004.
- [9] BEAU M., *Scaling approach to existence of long cycles in Casimir boxes*, 2008, [http:// hal.archives-ouvertes.fr](http://hal.archives-ouvertes.fr).
- [10] Bell J.S., (1977), *Théorie Quantique des Champs Expérimentale*. CERN 77-18, Paris.
- [11] Bodiou G., *Relations entre la seconde quantification, la mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration, et les problèmes du second ordre en calcul des probabilités*. Le journal de physique et le radium, tome 15, Janvier 1954, p 39.
- [12] Caradoc B. M. - Davies, R.J. Ballagh and K. Burnett. *Coherent Dynamics of Vortex Formation in Trapped Bose-Einstein Condensates*, Physical Review Letters, Volume 83, Number 5, (1999), 4 pages.
- [13] Caradoc-Davies B. M, R.J. Ballagh and P. B. Blakie, *Three-Dimensional vortex dynamics in Bose-Einstein condensates*, Physical Review A, Volume 62, 011602.
- [14] Caradoc B. M. -Davies. *Vortex Dynamics in Bose-Einstein Condensates*, Thèse de doctorat, University of Otago, 200 pages (2000).
- [15] Chahine C. et P. Devaux. (1979), *Thermodynamique Statistique*, Dunod, Paris.

- [16] Chevallier M., *Bosons à basse température : des intégrales de chemin aux gaz quasi-bidimensionnels*. Thèse de doctorat, 2009.
- [17] Chevallier M., M. Holzmann and W. Krauth. *Semiclassical theory of the quasi-two-dimensional Bose gas*, EPL, 82 (2008)30001 [www.epljournal.org](http://www.epljournal.org)
- [18] Collège de France; (1985). *Piégeage et Refroidissement des Particules chargées*. Cours 1985-86.
- [19] Collège de France (2006). *Condensation de Bose-Einstein et physique des collisions d'atomes froids*. Cours 2006-2007.
- [20] Collège de France (2006). *Condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique* Cours 2006
- [21] CNRS; <http://www.cnrs.fr/>
- [22] Cohen-Tannoudji C. *La Condensation de Bose-Einstein* : Introduction. Séminaire Poincaré 1, pp 1-10. (2003)
- [23] Cohen-Tannoudji C., *Atomes ultra froids*. Palais de la Découverte ; Paris ; Décembre 2008.
- [24] Cohen-Tannoudji C., Jean Dalibard, Franck Laloe. *La condensation de Bose-Einstein dans les gaz* ; Laboratoire Kastler Brossel ; inédit
- [25] Comay E. and Raymond and Beverly Sackler, *Further Difficulties with the Klein-Gordon Equation*, Apeiron, Vol. 12, No. 1, January 2005.
- [26] Comparat D., *Expériences avec des atomes de Rydberg et des molécules ultra-froids*. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, 2008.
- [27] Comparat D., A. Fioretti, G. Stern, E. Dimova, B. Laburthe Tolra, and P. Pillet. *Optimized production of large Bose-Einstein condensate*, Physical Review A, 73, 043410 (2006)
- [28] Comparat D., E. Dimova O. Morizot, G. Stern, C.L. Garrido Alzar, A. Fioretti, V. Lorent, H. Perrin, and P. Pillet . *Continuous transfer and laser guiding between two cold atom traps*, Eur. Phys. J. D 42, 299–308 (2007).
- [29] Comparat D., N. Vanhaecke, Duncan A. Tate, and Pierre Pillet, *Ionization of Rydberg atoms embedded in an ultracold plasma*. Physical Review A 71, 013416 (2005)
- [30] Comparat D., T. Vogt, N. Zahzam, M. Mudrich and P. Pillet, *Star cluster dynamics in a laboratory: electrons in ultracold plasma*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 361, 1227–1242 (2005) doi:10.1111/j.1365-2966.2005.09245.x Accepted 2005 May 30, Received
- [31] Dalfovo F., S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari(1999), *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Reviews of Modern Physics, Vol. 71, No. 3, April 1999, pp 463-512
- [32] Dalibard J. et C. Salomon. *Expériences avec des Atomes Froids*. Séminaire Poincaré 1 (2003) 39 – 62.

- [33] Dalibard J., *Les condensats de Bose-Einstein*. Texte de la 579e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée le 22 juin 2005.
- [34] Davydov A. S.,(1965), *Quantum mechanics*. Pergamon Press, oxford.
- [35] Derendinger J-P.,(2001),. *Théorie quantique des champs*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- [36] Ducoin C., *Rôle de l'isospin dans la transition de phase liquide-gaz de la matière nucléaire*. Thèse de doctorat, 2006.
- [37] Durfee S. D. and W. Ketterle, *Experimental studies of Bose-Einstein condensation*. Optical Society of America, 1998
- [38] Filho V.S., T.Frederico, A. Gammal and L.Tomo, *Stability of the trapped nonconservative Gross-Pitaevskii equation with attractive two-body interaction*, Physical Review E 66 036225 (2002).
- [39] Fortov V.E. and I.T. Lakubov,(2000),*The Physics of Non-Ideal Plasma*, World Scientific, Singapore.
- [40] Friot S., *Introduction à la théorie quantique des champs phénoménologique*. INRIA, mars 2006.
- [41] Ginzburg V.,(1975), *Physique Théorique et Astronomie* .Mir, Moscou.
- [42] Govaerts J., *Mécanique Quantique et Relativité Restreinte: sur la Route vers la Théorie Quantique des Champs Relativistes et le Modèle Standard des Interactions Fondamentales*, Louvain, 2005.
- [43] Govaerts J.,*On the road towards the quantum geometer's universe: an introduction to four-dimensional supersymmetric quantum field theory* .Louvain-la-Neuve, Belgium, 2008. Ar Xiv:hep-th/0408021V1 3 Aug 2004.
- [44] Govaerts J., *A Pedestrian Introduction to Quantum Physics and Relativistic Field Theory*, AIMS Lectures, (2007), 46pages
- [45] Govaerts J., *L'interaction électrofaible: une fenêtre sur la physique au-delà du Modèle Standard*, Paru dans les Actes de l'Ecole Internationale Joliot-Curie de Physique Nucléaire", Maubuisson (France), 11-16 Septembre 1995, éd. Y. Abgrall, pp. 333-416 (1995).
- [46] Griesmaier A.R., *Dipole-dipole interaction in a degenerate quantum gas Bose-Einstein condensation of chromium atoms*. Thèse de doctorat, 2007.
- [47] Gustafson S., Kenji Nakanishi and Tai-Peng Tsal, *Scattering for the Gross-Pitaevskii equation*, Mat. Res. Lett. 13, No. 2 , pp 273–285 (2006).
- [48] Kittel C.(1967) , *Théorie Quantique du Solide*. Dunod, Paris.
- [49] Laforgue A., *Potentiel d'erreur et seconde quantification : application à la corrélation*. Can. J. Chem. 63, 1788 (1985).
- [50] Landau L.D. and E. M. Lifshitz,(1958), *Quantum Mechanics*, Pergamon Press LTD, London.

- [51] Lepers M., *Dynamique d'atomes dans des potentiels optiques : du chaos quantique au chaos quasi-classique*. Thèse de doctorat. 2009.
- [52] Lepers M., Véronique Zehnlé, and Jean Claude Garreau. *Tracking Quasi-classical chaos in Ultracold Boson Gases*, Physical Review Letters, PRL 101, 144103, 3 October 2008.
- [53] Lieb E.H., Robert Seiringer, Jan Philip Solovej and Jakob Yngvason. (2005), *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, Birkhäuser Verlag; Basel-Boston-Berlin.
- [54] Lieb E.H., Robert Seiringer, Jan Philip Solovej and Jakob Yngvason. *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, Bulletin (new series) of the American mathematical society, Volume 44, Number 3, July 2007, Pages 493–496S 0273-0979(07)01147-0 Article electronically published on April 10, 2007
- [55] Lienhart F., *Imaging system of a Bose-Einstein Condensation experiment*, UC Berkeley, 2003.
- [56] Lifshitz E. M. and L.P. Pitaevskii, (1980) *Statistical Physics, part 2*. Pergamon Press, Oxford.
- [57] Mandl F., *Introduction to Quantum Field Theory*. Interscience Publishers INC., New York, 1964
- [58] Mila F. (2004) *Mécanique quantique avancée II*. Cours de huitième semestre/Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne.
- [59] Minaya Ramirez E., *Un nouveau piège à ions circulaire pour la spectrométrie de masse et la structure nucléaire*. Thèse de doctorat ; Université Paris-Sud 11(2009).
- [60] Moritz H., *One-dimensional Atomic Gases*. Thèse de doctorat. 2006.
- [61] Mullin W.J., M. Holzmann, and F. Laloë, *Validity of the Hohenberg theorem for a Generalized Bose-Einstein Condensation in two Dimensions*. Inédit
- [62] Musicki D., *Formalisme homogène dans la théorie des champs*. Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 7(21) 1967, p. 25-34
- [63] Nishijima K. (1969), *Fields and particles*. W.A. Benjamin, Amsterdam.
- [64] Nozières P., *Is the Roton in Superfluid  $^4\text{He}$  the Ghost of a Bragg Spot?* Springe Science + Business Media, Inc. 0022- 2291/04/1000- 0045/0, (2004), pp45-67.
- [65] Nozières P., *Some Commets on Bose- Einstein Condensation*, Conférence, Institut Laue Langevin, Grenoble. (1999).
- [66] Nozières P. and D. Pines.(1999), *The theory of quantum liquids*. Perseus books, Cambridge.
- [67] Nozières P., *Condensation de Bose-Einstein et cohérence quantique : de la superfluidité à la localisation, des liquides de Fermi aux supraconducteurs*. Séminaire Poincaré 1 (2003) 63-73
- [68] Pethick C.J. and H. Smith,(2002) *Bose –Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge university press, *New York*,414 pages(<http://www.cambridge.org>).

- [69] Removille S., *Vers une mémoire quantique dans des ions piégés*. Thèse de doctorat, Université Paris. Diderot (paris 7) 2009.
- [70] Roux R., *Echelles de spins dopées sous champ magnétique*. Thèse de doctorat 2007.
- [71] Shin Y., *Experiments with Bose-Einstein Condensates in a Double-Well Potential*. Thèse de doctorat, 2006.
- [72] Shin Y., M. Saba, A. Schirotzek, T.A. Pasquini, A.E. Leanhardt, D.E. Pritchard, and W. Ketterle. *Distillation of Bose-Einstein Condensates in a Double-Well Potential*. Physical Review Letters, Volume 92, Number 15, 16 April 2004.
- [73] Shin Y., G.-B. JO, M. Saba, T.A. Pasquini, W. Ketterle and D.E. Pritchard. Optical Weak Link between Two Spatially Separated Bose-Einstein Condensates. Phys Rev Lett.95.170402.
- [74] Shin Y., M. Saba, T.A. Pasquini, W. Ketterle, D.E. Pritchard and C. Sanner. *Light Scattering to Determine the Relative Phase of Two Bose-Einstein Condensates*. Science Vol. 307 25 March 2005
- [75] Shin Y., M. Saba, T.A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard and A.E. Leanhardt. *Atom Interferometry with Bose-Einstein Condensates in a Double-Well Potential*. Physical Review Letters, volume 92, number 5, 6 February 2004.
- [76] Shin Y., C. Sanner, G. - B. JO, M. Saba, T.A. Pasquini, W. Ketterle and D.E. Pritchard. *Interference of Bose-Einstein Condensates split with an atom chip*. Physical Review A 72.021604(R) (2005).
- [77] Shin Y., D. Kielpinski, W. Ketterle and D.E. Pritchard. Coreless Vortex Formation in a Spinor Bose-Einstein Condensate. Physical Review Letters, Volume 90, Number 14, 11 April 2003.
- [78].Shlyapnikov G.V., *Condensed Matter Approaches to Quantum Gases*. Séminaire Poincaré 1 (2003) 21-37
- [79] Stringari S., *Condensation de Bose-Einstein et superfluidité*. Leçons ; Chaire Européenne du Collège de France (2004/2005).
- [80] Tanzini A. *Effets non-perturbatifs en théorie des champs et dualité avec la théorie des cordes*. Mémoire d'habilitation, 2003.
- [81] Vassiliev A.(1985) *Introduction à la Physique Statistique*. Mir, Moscou.
- [82] Visconti A.(1961) *Théorie Quantique des Champs*. Gauthier-Villars & Cie, Paris..
- [83] Weinberg S.,(1995) *The quantum theory of fields*. Cambridge university press, volume I and II. New York.
- [84] Wüster S., Hope J.J., and Savage M., *Collapsing Bose-Einstein condensates beyond the Gross-Pitaevskii approximation*. Physical Review A 71. 033604 (2005).
- [85] Yngvason J., *Bose-Einstein Condensation*. Franco-Nordic Congress January 7, 2005.

[86] Yamashita M., Koashi M., Mukai T., Mitsumaga M., and Imoto N., *Dynamics of evaporative cooling in magnetically trapped atomic hydrogen*. Physical Review A, Volume 62. 033602. (2000).

# Annexe : Piège de Paul

## 1 Piégeage de particules chargées

### 1.1 Potentiel quadrupolaire

Il est plus facile de piéger une particule chargée qu'un atome neutre car nous pouvons agir sur la charge. Un potentiel électrostatique ne peut à lui seul réaliser le piégeage car  $\Phi$  n'a pas de minimum ( $\Delta\Phi = 0$ ). Les solutions les plus utilisées sont : – utilisation conjointe d'un potentiel électrostatique et un champ magnétique uniforme (Piège de Penning) ; – modulation RF de  $\Phi$  donnant naissance à un potentiel effectif qui, lui, a un minimum (piège de radiofréquence de Paul). La solution générale de l'équation  $\Delta\Phi = 0$  est donnée par

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l^m r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (A.1)$$

$l = 0$  donne une constante sans intérêt physique ;  $l = 1$  conduit à un champ  $\vec{E}$  uniforme non intéressant pour piéger ;  $l = 2$  donne un potentiel quadrupolaire, cas où le potentiel a la symétrie de révolution autour de OZ

$$\Phi(x, y, z) = A(r^2 - 2z^2) = A(x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (A.2)$$

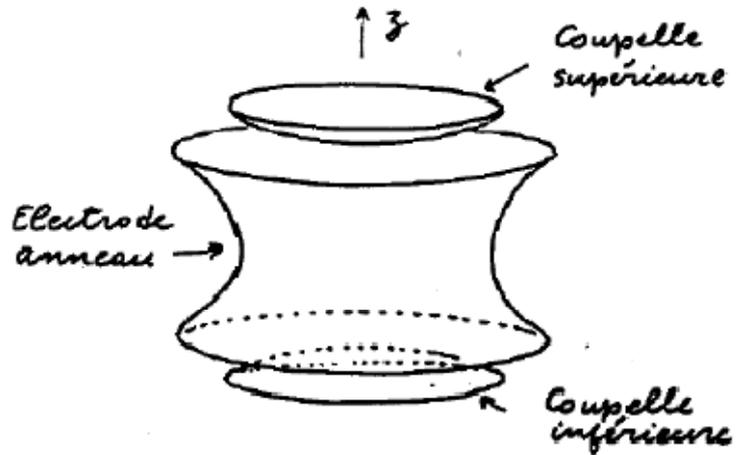
Si  $\Phi$  piège une particule chargée le long de OZ en  $z = 0$ , il la repousse loin de 0 dans le plan XOY. L'intérêt de se limiter à  $l = 2$  vient du fait que dans le piège de Paul le potentiel effectif est proportionnel à  $\vec{E}^2$ , et donc elle est fonction quadratique de  $x, y, z$  conduisant à un mouvement harmonique.

### 1.2 Surfaces équipotentielles

$$\Phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 - 2z^2) = cte \quad (A.3)$$

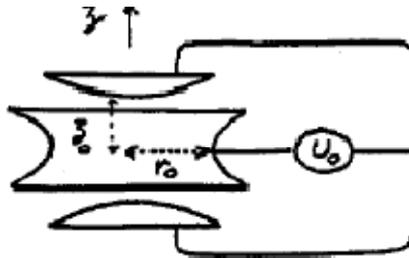
Ce sont des hyperboles de révolution autour de OZ.

### 1.3 Matérialisation par des électrodes



Une électrode en forme d'anneau et deux électrodes en forme de couple

#### 1.4 Paramètres importants de $\Phi$



Le lien entre  $U_0$  et  $A$  est donné par

$$U_0 = \Phi(r_0, 0, 0) - \Phi(0, 0, z_0) = A(r_0^2 + 2z_0^2) \quad (\text{A.4})$$

La fréquence de vibration le long de OZ est donnée par

$$e\Phi(0, 0, z) = -2eAz^2 = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (\text{A.5})$$

(on suppose que  $eA < 0$ )

$$\omega_z^2 = \frac{-4eA}{m} = \frac{-4eU_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)} \quad (\text{A.5})$$

L'énergie potentielle  $V = e\Phi$  est définie

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_z^2 \left[ z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \quad (\text{A.6})$$

## 2 Piège de Paul

### 2.1 Le potentiel quadrupolaire modulé

Le potentiel quadrupolaire modulé à la fréquence  $\omega_{RF}$  est donné par

$$\Phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 - 2z^2)\cos\omega_{RF}t \quad (\text{A. 7})$$

Nous considérons le cas de la limite adiabatique où la vibration à  $\omega_{RF}$  est très rapide devant le mouvement séculaire (voir plus loin). Dans ce cas le champ au point  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est donné par

$$\vec{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = -\vec{\nabla}\Phi = \vec{\varepsilon}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\cos\omega_{RF}t \quad (\text{A. 8})$$

avec

$$\varepsilon_x = -2A\bar{x}; \varepsilon_y = -2A\bar{y} \text{ et } \varepsilon_z = 4A\bar{z}$$

Le potentiel effectif est donc

$$\psi_{eff}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{e\vec{\varepsilon}^2(\bar{x}_i)}{4m\omega_{RF}^2} = \frac{eA^2}{m\omega_{RF}^2}[\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{z}^2] \quad (\text{A. 9})$$

Il s'agit d'un potentiel harmonique dans les 3 directions, minimum en  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$  et indépendant du signe de e. Les fréquences du mouvement lent sont obtenues à partir de

$$e\psi_{eff}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{m}{2}[\bar{\omega}_x^2\bar{x}^2 + \bar{\omega}_y^2\bar{y}^2 + \bar{\omega}_z^2\bar{z}^2] \quad (\text{A. 10})$$

Soit

$$\bar{\omega}_z = 2\bar{\omega}_x = 2\bar{\omega}_y = \frac{2\sqrt{2}eA}{m\omega_{RF}} \quad (\text{A. 11})$$

Pour la vibration lente à  $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$  on a le traitement valable si  $\omega_{RF} \gg \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$

Le mouvement de la particule est défini par

$$x_i = \bar{x}_i + \xi_i = \bar{x}_i - \frac{e\varepsilon_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{m\omega_{RF}^2}\cos\omega_{RF}t \quad (\text{A. 12})$$

Par exemple, pour  $i = 3$  l'équation du mouvement est donné par

$$z = \bar{z} - \frac{4Ae}{m\omega_{RF}^2}\bar{z}\cos\omega_{RF}t \quad (\text{A. 13})$$

La particule a donc deux mouvements lent et rapide. Le mouvement lent d'expression

$$\bar{z} = \bar{z}_m\cos\bar{\omega}_z t \quad (\text{A. 14})$$

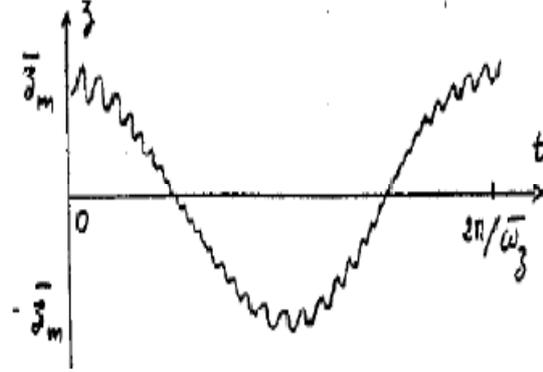
où  $\bar{z}_m$  est l'amplitude de la vibration lente à  $\bar{\omega}_z = 2\sqrt{2}eA/m\omega_{RF}$ , et donc

$$\frac{4Ae}{m\omega_{RF}^2} = \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_z}{\omega_{RF}} \ll 1$$

finalement on a

$$z = \bar{z}_m \cos \bar{\omega}_z t \left[ 1 - \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_z}{\omega_{RF}} \cos \omega_{RF} t \right] \quad (A.15)$$

L'allure du mouvement de la particule est



On voit que l'amplitude de la vibration rapide est proportionnelle à la distance au centre, et très petite devant  $\bar{z}_m$  (réduction par  $\sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_z}{\omega_{RF}} \ll 1$ ). La vitesse associée au mouvement lent est

$$\dot{z} = -\bar{z}_m \bar{\omega}_z \sin \bar{\omega}_z t \quad (A.16)$$

Tandis que la vitesse associée au mouvement rapide est

$$\dot{\xi} \cong -\bar{z}_m \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_z}{\omega_{RF}} \omega_{RF} \sin \omega_{RF} t = -\bar{z}_m \sqrt{2} \bar{\omega}_z \sin \omega_{RF} t \quad (A.17)$$

La profondeur du puits effectif (en volts) le long de OZ est déterminée par

$$\bar{D}_z = \psi_{eff}(0,0,z_0) - \psi_{eff}(0,0,0) = \frac{4eA^2 z_0^2}{m\omega_{RF}^2} \quad (A.18)$$

et que

$$\frac{1}{2} m \bar{\omega}_z^2 z_0^2 = e \bar{D}_z \quad (A.19)$$

La profondeur le long de OX et OY

$$\bar{D}_x = \bar{D}_y \quad (A.20)$$

et que

$$\frac{1}{2} m \bar{\omega}_x^2 r_0^2 = e \bar{D}_x \quad (A.21)$$

Comme

$$\bar{\omega}_z = 2\bar{\omega}_x, \quad \bar{D}_x = \bar{D}_z \quad \text{si} \quad r_0 = 2z_0.$$

Le lien entre la différence de potentiel appliquée entre les électrodes est

$$\Phi = A(x^2 + y^2 - 2z^2)\cos\omega_{RF}t$$

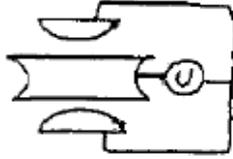
$$\mathcal{U}_0\cos\omega_{RF}t = \Phi(r_0, 0, 0, t) - \Phi(0, 0, z_0, t) = A(r_0^2 + 2z_0^2)\cos\omega_{RF}t$$

d'où la valeur de A

$$A = \frac{\mathcal{U}_0}{r_0^2 + 2z_0^2} \quad (\text{A. 22})$$

la valeur de la profondeur du puits le long de OZ vaut

$$\bar{D}_z = \frac{4eA^2z_0^2}{m\omega_{RF}^2}\mathcal{U}_0\cos\omega_{RF}t \quad (\text{A. 25})$$



$$\Phi_{\text{mod}} = \frac{\mathcal{U}_0\cos\omega_{RF}t}{r_0^2 + 2z_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (\text{A. 26})$$

Le potentiel effectif provenant de  $\mathcal{U}_0\cos\omega_{RF}t$  est défini

$$\psi_{\text{eff}} = \frac{e\mathcal{U}_0^2\cos^2\omega_{RF}t}{m\omega_{RF}^2(r_0^2 + 2z_0^2)^2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{z}^2) \quad (\text{A. 27})$$

Le potentiel statique est défini

$$\Phi_{\text{stat}} = \frac{U_0}{r_0^2 + 2z_0^2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{z}^2) \quad (\text{A. 28})$$

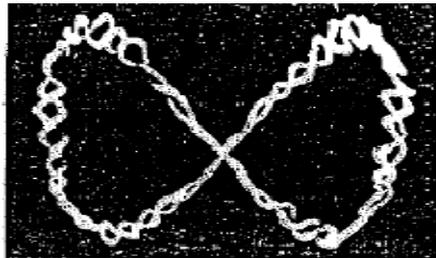
Le potentiel total  $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{stat}} + \Phi_{\text{mod}}$  est

$$\Phi_{\text{tot}} = \frac{U_0 + \mathcal{U}_0\cos\omega_{RF}t}{r_0^2 + 2z_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

La visualisation expérimentale des petites sphères en aluminium ( $d = 20\mu\text{m}$ ), piégées dans un piège de Paul et illuminées par un arc et observées directement a été faite pour les paramètres suivants :

$$U_0 = 0; \mathcal{U}_0 = 500V; \frac{\omega_{RF}}{2\pi} = 200\text{Hz}; \frac{e}{m} = 0,0053 \text{ Coulomb/Kg}$$

Comme  $\bar{\omega}_z = 2\bar{\omega}_{x,y}$ , on observe une courbe de Lissajous 2 : 1 pour le mouvement lent



# Appendice Didactique

## 1 Sujet

*Equation de Hartree-Fock du plasma non neutre des bosons de spin zéro par la méthode de l'équation du mouvement*

## 2 Public cible

*Etudiants de licence et de master en Physique*

## 3 Sommaire

### 3.1 Rappel des concepts de base :

*-bosons de spin zéro -plasma non neutre -piège des particules chargées  
-opérateur champ de création/annihilation des bosons de moment linéaire  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  -opérateur Hamiltonien de la seconde quantification*

### 3.2 Nouvelles matières

*- construction des opérateurs champs d'annihilation et de création des bosons chargés de spin zéro d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  et les relations de commutation aux temps égaux ; - définition de l'opérateur Hamiltonien du plasma non neutre ;  
- évolution temporelle de l'opérateur champ de Heisenberg d'annihilation des bosons chargés de spin zéro de moment linéaire  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  - équation de Hartree-Fock*

### 3.3 Travaux dirigés

## 4 Objectifs de la leçon

*A l'issue de la leçon les auditeurs doivent être capables de*

*- définir un plasma non neutre des bosons ; - de construire les opérateurs champs de création et d'annihilation des bosons chargés d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$  ; - d'établir l'équation d'évolution temporaire des opérateurs champs de Heisenberg ainsi que l'équation de Hartree-Fock d'un système de bosons chargés ou non chargés ; - de résoudre des exercices sur le sujet.*

## 5 Choix des stratégies et moyens didactiques à mettre en œuvre

- Le sujet de la leçon relève de la physique théorique impliquant notamment la physique statistique et la théorie quantique relativiste des champs, la communication pédagogique sera verbale (exposé) et écrite (démonstration sur le tableau noir),*
- Un support (syllabus),-Les références bibliographiques, -Les travaux dirigés(TD).*

## 6 Présentation de la séquence

### 6.1 Motivation

Les systèmes de particules identiques indiscernables telles le gaz électronique dans les métaux ont fait l'objet des études tant théorique qu'expérimentale visant surtout à comprendre les propriétés de ces systèmes. L'équation de Hartree-Fock du gaz électronique, un plasma des fermions, a été établie par la méthode d'« équation de mouvement » par Charles Kittel dans son ouvrage[48]. Nous allons dans cette leçon établir par la même méthode l'équation de Hartree-Fock pour un plasma non neutre de bosons chargés.

### 6.2 Développement

#### 6.2.1 Rappel des concepts de base

- bosons de spin zéro- plasma non neutre- piège des particules chargées
- opérateur champ de création/annihilation des bosons d'impulsion  $\vec{p}$  au point  $\vec{r}$
- opérateur Hamiltonien de la seconde quantification

#### 6.2.3 Nouvelles matières

##### 6.2.3.1 Construction des opérateurs champs d'annihilation et de création des bosons chargés de spin zéro d'impulsion $\vec{p}$ au point $\vec{r}$ et les relations de commutation aux temps égaux

###### 6.2.3.1.1 Champ des mésons chargés ou champ scalaire complexe et sa quantification

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [ae^{ikx} + b^*e^{-ikx}] \quad (B.1)$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} [be^{ikx} + a^*e^{-ikx}] \quad (B.2)$$

La quantification canonique du champ scalaire complexe consiste à considérer le champ  $\phi(x)$  et son conjugué canonique  $\Pi(x)$  comme des opérateurs hermitiques (la propriété d'hermiticité implique la réalité des valeurs moyennes) satisfaisant les relations de commutations aux temps égaux[35; 10].

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\phi}(\mathbf{r}', t), \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \left[ \hat{\phi}(\mathbf{r}', t), \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = \left[ \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)}{\partial t}, \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \right] \\ \quad \quad \quad = [\hat{\phi}(\mathbf{r}', t), \hat{\phi}(\mathbf{r}, t)] = \left[ \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)}{\partial t}, \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = 0 \\ \left[ \hat{\phi}(\mathbf{r}', t), \frac{\partial \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = \left[ \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', t), \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{array} \right. \quad (B.3)$$

###### 6.2.3.1.2 Opérateurs bosons et les relations de commutation

On appelle opérateurs bosons les opérateurs  $\hat{a}(\mathbf{k})$  et  $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k})$  et leurs adjoints  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  et  $\hat{b}(\mathbf{k})$  construits à partir des coefficients des solutions (B.1) et (B.2) des équations de Klein-Gordon. Par les transformées inverses de Fourier des ces solutions nous avons[10]

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x)$$

$$b(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi^*(x)$$

Ce qui conduit à

$$\begin{cases} a(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} \left[ \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - ik_0 \phi(x) \right] e^{ikx} \\ b(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2k_0}} \left[ \frac{\partial \phi^*(x)}{\partial t} - ik_0 \phi^*(x) \right] e^{ikx} \end{cases} \quad (B.4)$$

Les coefficients  $a(k)$  et  $b(k)$  ainsi que leurs conjugués complexes sont transformés en des opérateurs bosons lesquels satisfont aux temps égaux les relations de commutations suivantes

$$\begin{cases} [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = [\hat{b}(\mathbf{k}), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}')] \\ [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}(\mathbf{k}')] = [\hat{b}(\mathbf{k}), \hat{b}(\mathbf{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = \dots = 0 \end{cases} \quad (B.5)$$

### 6.2.3.1.3 Espace des états quantiques des opérateurs bosons

L'espace des états du système des bosons est construit en agissant sur l'état du vide de Fock avec les opérateurs bosons sous conditions suivantes

$$\hat{a}(\mathbf{k})|0\rangle = 0 = \hat{b}(\mathbf{k})|0\rangle, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (B.6)$$

La base de Fock de l'espace des états quantiques du système est donnée par

$$|N_1, N_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1! N_2!}} (\hat{a}^\dagger)^{N_1} (\hat{b}^\dagger)^{N_2} |0\rangle \quad N_1, N_2 = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (B.7)$$

avec

$$\langle N_1, N_2 | M_1, M_2 \rangle = \delta_{N_1 M_1} \delta_{N_2 M_2} \quad (B.8)$$

### 6.2.3.1.4 Opérateurs champs de création ou annihilation des bosons et anti-bosons

La construction de l'opérateur champ d'annihilation se fait simplement à partir de  $\hat{a}_k$  et  $\hat{b}_k$ . On utilise le développement de  $|\mathbf{r}\rangle$  sur la base  $\{|p\rangle$ [59; 66]

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}) \langle \mathbf{r} | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}) e^{ik \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}) \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (B.9)$$

La construction de l'opérateur champ de création s'obtient par

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) \langle p|\mathbf{r}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) \varphi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (B.10)$$

Ces opérateurs satisfont les relations de commutation, aux temps égaux, suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')]_- = \left[ \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}) \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) \varphi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \\ [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')]_- = [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')]_- = 0 \end{array} \right. \quad (B.11)$$

### 6.2.3.2 Définition de l'opérateur Hamiltonien du plasma non neutre

L'opérateur Hamiltonien  $\hat{H}$  du système de bosons en interaction est défini en seconde quantification [60] :

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (B.12)$$

### 6.2.3.3 Evolution temporelle de l'opérateur champ de Heisenberg d'annihilation des bosons chargés de spin zéro d'impulsion $\vec{p}$ au point $\vec{r}$

L'évolution temporelle de l'opérateur champ est définie par l'équation de mouvement

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{r})}{\partial t} = [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{H}] \quad (B.13)$$

où  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$  est l'opérateur champ de Heisenberg. L'équation (B.13) peut s'écrire sous la forme

$$i \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{r})}{\partial t} = -[\hat{H}, \hat{\psi}(\mathbf{r})] \quad , \quad \hbar \equiv 1 \quad (B.14)$$

Calculons le commutateur de (B.14) en fonction des relations (B.12) et (B.11)

$$\begin{aligned}[\hat{H}, \hat{\psi}(\mathbf{r}'')] &= \int d\mathbf{r} \left[ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}'') \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}'')] \end{aligned}\quad (B.15)$$

Le premier terme de droite vaut :

$$\int d\mathbf{r} \left[ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}'') \right] = \int d\mathbf{r} [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}'')] \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{piège} \right) \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

$$+ \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right) [\hat{\psi}(r''), \hat{\psi}(r)]$$

D'où

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \left[ \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right) \hat{\psi}(r), \hat{\psi}(r'') \right] &= - \int d\mathbf{r} \delta(r - r'') \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right) \hat{\psi}(r) \\ &= - \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} \right) \hat{\psi}(r'') \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Le calcul du deuxième terme de droite de (B.15) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' [\hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r - r') \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r'), \hat{\psi}(r'')] & \\ &= \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' [\hat{\psi}^\dagger(r), \hat{\psi}(r'')] \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r - r') \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r') \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(r) [\hat{\psi}(r''), \hat{\psi}^\dagger(r)] \hat{V}(r - r') \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r') \\ &= \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' (-) \delta(r - r'') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r - r') \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r') \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(r) \delta(r'' - r') \hat{V}(r - r') \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r') \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(r') \left( \int d^3r \delta(r - r'') \hat{V}(r - r') \hat{\psi}(r) \right) \hat{\psi}(r') \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \left( \int d^3r' \delta(r'' - r') \hat{V}(r - r') \hat{\psi}(r') \right) \hat{\psi}(r) \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}(r'') \hat{\psi}(r') \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{V}(r - r'') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r) \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}(r'') \hat{\psi}(r') \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{V}(r'' - r) \hat{\psi}(r'') \hat{\psi}(r) \\ &= - \int d\mathbf{r} \hat{V}(r'' - r) \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r'') \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

En portant (B.17) et (B.16) dans (B.13) nous obtenons :

$$[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] = - \left[ \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} \right) \hat{\psi}(r'') + \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r'') \right] \quad (B.18)$$

Le deuxième terme de droite dans le cas de bosons de charge positive a la forme suivante

$$\int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r'') = \sum_{klm} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_m \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \varphi_k^*(r') \varphi_l(r') \varphi_m(r'') \quad (B.19)$$

Le membre de droite de (B.19) contient les produits de trois opérateurs bosons. Dans l'approximation du premier ordre dite de Hartree-Fock, nous ne considérons que les termes comprenant l'opérateur nombre  $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ . Aussi conservons-nous les termes  $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_m$  et  $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_k = -\hat{a}_l \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ ; la relation (B.19) devient donc[48]

$$\int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r'') \cong \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \hat{\psi}(r'') + \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r'') \rangle \quad (B.20)$$

où nous avons sommé les séries qui figurent dans les expressions de  $\hat{\psi}(r'')$  et  $\hat{\psi}(r')$ ; les termes entre crochets indiquent des valeurs probables dans l'état fondamental, c'est-à-dire que seuls les termes en  $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  sont retenus à l'intérieur des crochets et  $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  est calculé pour l'état fondamental. Le premier terme de droite de (B.20) représente l'action Coulombienne directe, le second les échanges[48]. En portant (B.20) dans (B.18) le commutateur devient :

$$[\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] \cong - \left[ \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \right) \hat{\psi}(r'') + \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r'') \rangle \right] \quad (B.21)$$

En portant (B.21) dans (B.14) nous obtenons l'équation d'évolution temporelle de l'opérateur champ de Heisenberg

$$i \frac{\partial \hat{\psi}(r'')}{\partial t} = - [\hat{H}, \hat{\psi}(r'')] \cong - \left[ \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{pi\grave{e}ge} + \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle \right) \hat{\psi}(r'') + \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r'') \rangle \right] \quad (B.22)$$

### 6.2.3.4 Equation de Hartree-Foch

L'opérateur champ de Heisenberg pour les bosons chargés a la forme

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \equiv \hat{\psi}(r'') = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}(r'') + \sum_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}(r'') = \hat{\psi}_+(r'') + \hat{\psi}_-(r'') \quad (\text{B.23})$$

Considérons l'équation (B.22) dans le cas des bosons de charge positive, nous avons

$$i \frac{\partial \hat{\psi}_+(r'')}{\partial t} \cong \left[ \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} + \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}_+^\dagger(r') \hat{\psi}_+(r') \rangle \right) \hat{\psi}_+(r'') \right. \\ \left. + \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}_+(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \hat{\psi}_+^\dagger(r') \hat{\psi}_+(r'') \rangle \right] \quad (\text{B.24})$$

Introduisons l'expansion de  $\hat{\psi}_+(r) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}(r)$  dans (B.24), nous obtenons

$$i \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}(r'') \right] \\ \cong \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \left[ \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} + \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \langle \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle \frac{1}{\Omega} \right) \varphi_{\mathbf{p}}(r'') \right. \\ \left. + \int d\mathbf{r}' \varphi_{\mathbf{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \langle \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle \varphi_j^*(r') \varphi_j(r'') \right] \quad (\text{B.25})$$

Soit  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$  la valeur propre de l'opérateur énergie de membre de gauche, la relation (B.25) prend la forme

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}(r'') \cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} + \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\mathbf{l}} N_{\mathbf{l}}^{(+)} \right) \varphi_{\mathbf{p}}(r'') \\ + \int d\mathbf{r}' \varphi_{\mathbf{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \sum_{\mathbf{j}} N_{\mathbf{j}}^{(+)} \varphi_{\mathbf{j}}^*(r') \varphi_{\mathbf{j}}(r'') \quad (\text{B.26.})$$

Cette équation (B.26) est l'équation de Hartree-Fock de bosons de charge positive de spin zéro dans le piège de Paul. Pour les bosons de charge négative nous avons l'équation

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}(r'') \cong \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{piège}} + \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r}' \hat{V}(r'' - r') \sum_{\mathbf{l}} N_{\mathbf{l}}^{(-)} \right) \varphi_{\mathbf{p}}(r'') \\ + \int d\mathbf{r}' \varphi_{\mathbf{p}}(r') \hat{V}(r'' - r') \sum_{\mathbf{j}} N_{\mathbf{j}}^{(-)} \varphi_{\mathbf{j}}^*(r') \varphi_{\mathbf{j}}(r'') \quad (\text{B.27})$$

Dans ces équations les actions d'échange s'ajoutent aux actions directes contrairement au cas des fermions où les actions d'échange sont de signe contraire à celui des actions directes.

### 6.3 Travaux dirigés

*Etablir l'équation de Hartree-Fock*

a) *d'un système d'atomes neutres de spin zéro ;*

b) *d'un plasma non neutre des électrons.*

### 7 Bibliographie

[1] Akhiezer A. and S. Péletminski,(1977), *Les méthodes de la physique statistique*, Mir, Moscou

[10] Bell J.S., (1977),*Théorie Quantique des Champs Expérimentale*. CERN 77-18, Paris.

[11] Bodiou G., *Relations entre la seconde quantification, la mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration, et les problèmes du second ordre en calcul des probabilités*. Le journal de physique et le radium, tome 15, Janvier 1954, p 39.

[14] Caradoc B. M. -Davies. *Vortex Dynamics in Bose-Einstein Condensates*, Thèse de doctorat, University of Otago, 200 pages (2000)

[34] A. S. Davydov A.S., (1965) ,*Quantum mechanics*, Pergamon Press, oxford.

[35] .Derendinger J-P.,(2001), *Théorie quantique des champs*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

[48] Kittel C.(1967) , *Théorie Quantique du Solide*. Dunod, Paris.

[59] Minaya Ramirez E., *Un nouveau piège à ions circulaire pour la spectrométrie de masse et la structure nucléaire*. Thèse de doctorat ; Université Paris-Sud 11(2009).

[60] . Moritz H.. *One-dimensional Atomic Gases*. Thèse de doctorat. 2006.

[66] Nozières P. and D. Pines.(1999), *The theory of quantum liquids*. Perseus books, Cambridge.