UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
Ecole doctorale: Mathématiques de la région Paris-Sud

Spécialité: Mathématiques

par

Chun-Hui WANG

Représentations de Weil pour les groupes de similitudes et changement de base

Soutenue le 03, Juillet, 2012 devant la Commission d'examen:

M.	Guy Henniart	(Directeur de thèse)
Mme.	Colette Moeglin	(Rapporteuse)
M.	Brooks Roberts	(Rapporteur non présent)
Mme	Laure Blasco	(Examinatrice)
Mme	Corinne Blondel	(Examinatrice)
M.	Laurent Clozel	(Examinateur)
M.	Paul Gérardin	(Examinateur)

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

La présente thèse s'inscrit dans le cadre de travaux sur la représentation de Weil. Elle consiste en trois parties. Aux chapitres 2 et 3, on généralise la correspondance de Howe aux groupes de similitudes sur un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire. Aux chapitres 4 et 5, on répond dans beaucoup de cas à une question, soulevée par V. Drinfeld, sur la représentation de Weil de $GSp_8(F)$ de restreinte à un groupe $GL_2(A)$, où A est une algègre étale sur un corps local ou fini F. D'autre part, au chapitre 5, on montre que sur un corps fini, les représentations de Weil sont compatibles au changement de base au sens de Shintani-lift.

Mots-clefs : groupe de similitudes, représentation de Weil, correspondance de Howe, changement de base.

The representation of Weil for the similitudes groups and base change

Abstract

This present thesis is working on the Weil representation. It consists of three parts. In chapter 2 and chapter 3, we generalize the Howe correspondance for the similitudes groupes over the non archimedien field with odd residual characteristic. In chapter 4 and chapter 5, we answer one question, raised by V. Drinfeld, about the restriction of the Weil representation of the group $GSp_8(F)$ to $GL_2(A)$ where A is an étale algebra over a non archimedien field or a finite field F. On the other hand, in the chapter 5, we prove that in finite field case, the Weil representations are invariant under the operator of base change in the sens of Shintani-lifting.

Keywords : similitude group, Weil representation, Howe correspondence, base change .

Remerciements

Je voudrais avant tout remercier mon directeur de thèse Guy Henniart, qui m'a proposé ce sujet et qui a dirigé cette thèse. Je le remercie vivement pour ses aides pendant ces quatre dernières années, ainsi que ses idées, et ses nombreuse remarques sur cette thèse.

Je tiens à remercier Colette Moeglin pour avoir accetpé de rapporter ce travail, et pour ses cours et son beau livre sur ce sujet.

Je tiens à remercier Brooks Roberts pour avoir accetpé d'écrire un rapport sur cette thèse et ses articles sur ce sujet.

Je remercie également Laure Blasco, Corinne Blondel, Laurent Clozel, Paul Gérardin de faire partie de mon jury de thèse.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers le Programme ALGANT et l'université Paris Sud qui m'ont fourni les finances quand je fais mathématiques en Master et en Thèse.

Je remercie les membres du département mathématique à Orsay, plus particulièrement à Gérard Laumon pour son encouragement, à Jean-Marc Fontaine et David Harari pour leurs cours, à la secrétaire Valérie Lavigne et aux membres de bibliothèque pour leurs aides.

Je tiens ensuite à remercier les professeurs chinois : Xiaonan Ma(Paris 6, France), Yangbo Ye(Iowa, les États-Unis), Tian Ye(CAS, Chine), Linsheng Yin(Tsinghua, Chine), pour leurs encouragements et aides.

Je voudrais remercier aussi les doctorants ou ex-doctorants : Ramla Abdellatif, Brembilla Caroline, Yinshan Chang, Ke Chen, Li Chen, Miaofen Chen, Zongbin Chen, Marco De Ieso, Yiwen Ding, Ziyang Gao, Hatem Hajri, Yong Hu, Yongquan Hu, Xun Jiang, Zhi Jiang, Arno Knet, Tingyu Lee, Wen-Wei Li, Xiangyu Liang, Chengyun Lu, Shu Shen, Xu Shen, Shenghao Sun, Zhe Sun, Shun Tang, Jinglong Tong, Haoran Wang, Shanwen Wang, Hao Wu, Guodong Zhu.

Table des matières

Introduction

Généralités

Dans l'article célèbre [W], André Weil a introduit la théorie des représentations pour interpréter des travaux de Siegel sur les formes quadratiques. Il a décelé une certaine représentation, connue sous le nom de représentation de Weil, ou de Siegel-Weil, ou bien métaplectique. Cette représentation possède des propriétés extraordinaires et intervient dans de nombreux domaines des mathématiques. Mentionnons quelques particularités de cette représentation.

(1) Elle n'est pas définie sur un groupe symplectique, mais sur une extension centrale de ce groupe. Cela en complique beaucoup l'étude.

(2) C'est un objet local et global. Autrement dit, elle peut être définie sur un corps local incluant les cas non archimédien, réel, complexe et aussi sur l'anneau des adèles d'un corps global. Elle contient donc beaucoup d'information arithmétique intéressante.

(3) Une action de cette représentation est définie par la transformation de Fourier. Comme la transformation de Fourier joue un rôle important dans la mathématique moderne, cette représentation a des applications également dans d'autres domaines.

Parlons maintenant du sujet de cette thèse. Il s'agit de variantes de la correspondance de Howe pour un corps local. Rappelons brièvement ce qu'est cette correspondance. On part d'une paire duale réductive $(\widetilde{G_1}, \widetilde{G_2})$ dans le groupe métaplectique sur un corps local fixé ; en particulier, $\widetilde{G_1}$ commute à $\widetilde{G_2}$. On considère la restriction de la représentation de Weil à $\widetilde{G_1} \times \widetilde{G_2}$ et on en étudie les quotients irréductibles ; ceux-ci sont de la forme $\pi_1 \otimes \pi_2$, et la correspondance $\pi_1 \longleftrightarrow \pi_2$ définit en fait une bijection, appelée correspondance de Howe, entre les représentations irréductibles de $\widetilde{G_1}$ qui apparaissent ainsi, et celles de $\widetilde{G_2}$ qui apparaissent également ; (voir les articles de Howe [Howe2] dans le cas archimédien, de Waldspurger [Wa1] dans le cas non archimédien de caractéristique résiduelle impaire, et de A. Minguez [Mi] pour les paires de type II).

Cette thèse porte sur une généralisation de la correspondance de Howe aux groupes de similitudes sur un corps local non archimédien F de caractéristique résiduelle impaire. Cette généralisation est dévoloppée dans les chapitres 1 à 3. Au chapitre 4 , à titre d'application, on répond dans beaucoup de cas à une question, soulevée à l'origine par V.Drinfeld, sur la représentation métaplectique de $GSp_8(F)$ restreinte à un groupe $GL_2(K)$, où K/F est une algèbre cubique. Au chapitre 5, écrit en anglais, on résoud complètement la question analogue pour les corps finis de caractéristique impaire.

Présentation des résultats

Chapitre 1

Ce chapitre contient des généralités sur la correspondance de Howe sur un corps p-adique. En suivant les articles [Bar2], [Kud2], [P], [Rao], en particulier essentiellement le livre [MVW], nous rappelons : la classification des paires duales du groupe symplectique, la définition du groupe métaplectique, l'invariant de Leray, le 2-cocycle de Rao, les paires duales de Howe, le groupe métaplectique de similitudes construit par L.Barthel, les représentations de Weil et la correspondance de Howe. En particulier, nous donnons une démonstration du résultat de scindage suivant, qui peut être intéressant [cf. Théorème 1.22] :

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique impaire, et $(W, \langle , \rangle)$ un espace symplectique sur F. On note $\overline{Sp}(W)$ le groupe métaplectique dont le centre μ_8 est engendré par $e^{\frac{2\pi i}{8}} \in \mathbb{C}$. Soit (H_1, H_2) une paire duale irréductible de $Sp(W)$, soit $\overline{H_1}$ l'image réciproque dans $\overline{Sp}(W)$. Alors l'extension $\overline{H_1}$ de H_1 est scindée, sauf si W est de la forme $W_1 \otimes_{F'} W_2$ et $H_1 = Sp(W_1)$, où W_1 est un espace symplectique sur une extension F' de F et où W_2 est de dimension impaire.

Ce résultat est sans doute vrai aussi dans le cas archimédien.

Chapitres 2 et 3

Ces chapitres ont pour but d'examiner comme on peut généraliser la correspondance de Howe (qui est déjà provée pour un corps p-adique sauf sa caractéristique résiduelle vaut 2 [cf. Théorème 1.29]) aux groupes des similitudes.

Certains aspects de la correspondance de Howe, pour des groupes de similitudes, ont déjà été étudiés. Nous rappelons quelques résultats pour un corps global. Shimizu.H a étudié les groupes $(GL_2, D^\times)$ [cf. [Sh]], qui permet de réaliser la correspondance de Jacquet-Langlands en utilisant la correspondance de Howe. Puis, Waldspurger a déterminé complètement la correspondance de Howe sur les groupes $(\widetilde{SL_2}, PGL_2)$[cf. [Wa2]]. Dans le même genre, on peut renvoyer à l'article de I.I.Piateski-Shapiro [cf. [PS]] pour les groupes $(\widetilde{SL_2}, PGSp_4)$, à l'article de M.Harris et S.Kudla [cf. [HK]] pour les groupes (GSp_2, GO_4), ou bien aux autres articles de la bibliographie.

Cependant, nos Chapitres 2 et 3 sont consacrés à une étude analogue sur un corps p-adique. Dans la Thèse de L.Barthel [[Bar2]], elle a construit le groupe métaplectique $\widetilde{GSp}$, et a défini la représentation de Weil pour $\widetilde{GSp}$. En particulier, elle aussi mis en évidence les difficultés à généraliser la correspondance de Howe aux groupes de similitudes. Une difficulté est que pour une paire réductive duale (H_1, H_2) de GSp, leurs images réciproques $(\widetilde{H_1}, \widetilde{H_2})$ dans $\widetilde{GSp}$ ne commutent pas en général. Ensuite dans [R1], B.Roberts a généralisé définitivement la correspondance de Howe aux groupes (GSp, GO). Grâce à une analyse attentive de leur travaux, nous généralisons ce résultat à des paires plus nombreuses. Ceci formera les Chapitres 2 et 3.

Les résultats : Pour présenter les résultats, d'abord, nous introduisons des définitions. Soient G un groupe localement compact totalement discontinu, (ρ, W) une représentation lisse du groupe G [cf. [BZ]]. On note :

$$m_G(\rho, \pi) = \text{ le cardinal de la dimension de } \operatorname{Hom}_G(\rho, \pi) \text{ pour } \pi \in \operatorname{Irr}(G)$$

$$\mathcal{R}_G(\rho) = \{\pi \in \operatorname{Irr}(G) | m_G(\rho, \pi) \neq 0\}$$

Ensuite, on s'interesse à deux groupes. Soient G_1, G_2 deux groupes localement compacts totalement discontinus, π une représentation lisse du groupe $G_1 \times G_2$. Supposons que toute représentation lisse irréductible du groupe G_1 est admissible et de même pour G_2. Sous cette hypothèse, on définit des applications

$$p_i : \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_i}(\pi); \pi_1 \otimes \pi_2 \longmapsto \pi_i.$$

On notera leurs images par $\mathcal{R}^0_{G_i}(\pi)$. Si p_1(resp. p_2) est injectif, alors pour chaque $\pi_1 \in \mathcal{R}^0_{G_1}(\pi)$ (resp. $\pi_2 \in \mathcal{R}^0_{G_2}(\pi)$), il existe une unique représentation irréductible $\pi_2^{(1)} \in \mathcal{R}_{G_2}(\pi)$ (resp. $\pi_1^{(2)} \in \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$) telle que $\pi_1 \otimes \pi_2^{(1)} \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$ (resp. $\pi_1^{(2)} \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$).

(1) Si p_1(resp. p_2) est injectif, on définit une application $\theta_1 : \mathcal{R}^0_{G_1}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_2}(\pi); \pi_1 \longmapsto \pi_2^{(1)}$, (resp. $\theta_2 : \mathcal{R}^0_{G_2}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_1}(\pi); \pi_2 \longmapsto \pi_1^{(2)}$), on dit que $(\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi), p_i)$ est le graphe de l'application $\mathcal{R}^0_{G_1}(\pi) \xrightarrow{\theta_1} \mathcal{R}_{G_2}(\pi)$ (resp. $\mathcal{R}^0_{G_2}(\pi) \xrightarrow{\theta_2} \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$) et que $(\pi, G_1 \times G_2)$ est **une représentation de graphe à gauche** (resp. **à droite**). De plus, si π est aussi une représentation de quotient sans multiplicité, i.e.

$$m_{G_1 \times G_2}(\pi, \pi') \leq 1 \text{ pour tout } \pi' \in \operatorname{Irr}(G_1 \times G_2),$$

on dit que π est **une représentation de graphe forte à gauche** (resp. **à droite**), et que π satisfait **la propriété de graphe forte à gauche** (resp. **à droite**).

(2) Si p_1 et p_2 sont injectifs, on dit que $(\pi, G_1 \times G_2)$ est **une représentation de Howe** (ou **de bigraphe**). On obtient une bijection θ_i de $\mathcal{R}^0_{G_i}(\pi)$ sur $\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$, et donc une correspondance bijective entre $\mathcal{R}^0_{G_1}(\pi)$ et $\mathcal{R}^0_{G_2}(\pi)$ qu'on appelle **correspondance de Howe**(ou **de bigraphe**). De plus, si π satisfait la condition :

$$m_{G_1 \times G_2}(\pi, \pi') \leq 1 \text{ pour tout } \pi' \in \operatorname{Irr}(G_1 \times G_2),$$

alors on dit que π est **une représentation de Howe forte**(ou **de bigraphe forte**).

Les résultats principaux du chapitre 2 sont les suivants. La situation abstraite qui y est considérée reflète bien sûr celle du chapitre 1, et les théorèmes seront appliqués dans ce cas du chapitre 3.

Théorème (1)**.** *Soient H_1 (resp. H_2) un groupe distingué ouvert de G_1(resp. G_2), Γ un sous-groupe distingué de $G_1 \times G_2$ contenant $H_1 \times H_2$, tels que*

$$\Gamma/H_1 \times H_2 \text{ est le graphe d'un morphisme surjectif } \gamma : G_1/H_1 \longrightarrow G_2/H_2.$$

Supposons que (ρ, V) est une représentation de graphe forte à gauche (resp. à droite) du groupe $H_1 \times H_2$ qui peut se prolonger en une représentation du groupe Γ. Alors $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G_1 \times G_2} \rho$ est aussi une représentation de graphe forte à gauche (resp. à droite) du groupe $G_1 \times G_2$ dans les cas suivants :
(1) $G_i \simeq H_i \times G_i/H_i$ et G_i/H_i est un groupe abélien pour $i = 1, 2$.
(2) G_i/H_i est un groupe abélien de cardinal fini.

Théorème (2)**.** *Soient H_1 (resp. H_2) un groupe distingué ouvert de G_1(resp. G_2), Γ un sous-groupe distingué de $G_1 \times G_2$ contenant $H_1 \times H_2$, tels que*

$$\Gamma/H_1 \times H_2 \text{ est le graphe d'un morphisme bijectif } \gamma : G_1/H_1 \longrightarrow G_2/H_2.$$

Supposons que (ρ, V) est une représentation de bigraphe forte du groupe $H_1 \times H_2$ qui peut se prolonger en une représentation du groupe Γ. Alors $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G_1 \times G_2} \rho$ est aussi une représentation de bigraphe forte du groupe $G_1 \times G_2$ dans les cas suivants :
(1) $G_i \simeq H_i \times G_i/H_i$ et G_i/H_i est un groupe abélien pour $i = 1, 2$.
(2) G_i/H_i est un groupe abélien de cardinal fini.

Ces résultats sont inspirés des travaux de B.Roberts. Pour les démonstrations, nous utilisons la théorie de Clifford et un procédé de récurrence.

Dans le Chapitre 3, en utilisant les Théorèmes ci-dessus, nous généralisons la correspondance de Howe aux groupes de similitudes. On peut renvoyer à Exemples 1 pour les cas scindés et à Exemples 2 pour les cas non scindés. Un point intéressant est que nous ne demandons pas que les représentations lisses irréductibles de G_1 se restreignent à H_1 sans multiplicité, alors qu'une telle condition intervient dans les travaux de B.Roberts pour la paire (GSp, GO). D'ailleurs, elle ne serait pas vérifiée dans les cas que nous considérons.

L'organisation des chapitres 2 et 3 est comme suit : Dans le chapitre 2, nous donnons des propriétés élémentaires sur le plus grand quotient π-isotypique. Puis nous définissions "représentation de quotient admissible" et discutons les relations de cette notion avec celles de représentation de type fini et de longueur finie. En particulier, en utilisant les Théorèmes de Bernstein, de Zelevinsky, et de Howe, de Harish-Chandra, Jacquet, on montre que les foncteurs (Ind_P^G, J_N) préservent la classe des représentations lisses de quotients admissibles. Ensuite, nous rappelons deux lemmes techniques de Waldspurger pour comprendre les plus grands quotients π-isotypiques dans le cas d'un produit de deux groupes. Nous aussi donnons quelques lemmes dans ce cadre. Puis, nous donnons les définitions principales et montrons les Théorèmes principaux énoncés ci-dessus. En Appendice, nous rappelons la théorie de Clifford, les références sont disponibles en [B1], [GK], [H]. Pour le chapitre 3, d'abord, nous prenons un groupe intermédiaire Γ de $GU(W_1) \times GU(W_2)$ et montrons que la restriction du groupe métaplectique à ce groupe est scindé sauf dans un cas. Puis nous utilisons les résultats de chapitre 2 et une technique de récurrence pour donner plus exemples de représentations de bigraphe forte sur les groupes de similitudes, incluant des cas non scindés.

Chapitre 4

Dans ce chapitre, nous répondons à une question soulevée par V. Drinfeld, ainsi qu'à des variantes proposées par G. Henniart, S.Kudla et E.Lapid.

La question initiale était la suivante. Si F est un corps, la représentation de $GL_2(F)$ sur F^2 se fait par des similitudes symplectiques. Ainsi le groupe $G = GL_2(F) \times GL_2(F) \times GL_2(F)$ agit sur $F^2 \otimes F^2 \otimes F^2$, un espace vectoriel sur F de dimension 8, par des similitudes symplectiques.

Peut-on " restreindre" à ce groupe G la représentation métaplectique ? Les quotients irréductibles que l'on trouve sont-ils tous de la forme $\pi \otimes \pi \otimes \pi$?

Les variantes concernent le cas où $G = GL_2(A)$, où A est une algèbre étale de degré 3 sur F. Ainsi A est de la forme $F \times F \times F$ ou de la forme $F \times E$, E étant une extension quadratique séparable de F, ou encore une extension cubique séparable K de F.

Tout d'abord, nous définissons un homomorphisme de $GL_2(A)$ dans $GSp(V)$ où V est un espace symplectique de dimension 8 sur F, et nous utilisons le chapitre 3 pour définir une représentation " métaplcetique" de G. Puis nous étudions les quotients irréductibles de cette représentation.

Nous présentons ci-dessous nos résultats, suivant les différents cas. On désigne par ψ un caractère non trivial de F, les représentations métaplectiques considérées sont relatives au caractère ψ fixé.

Les résultats : Soient F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire, E un extension quadratique de F, K une extension cubique galoisienne de F. Soit A une algèbre étale de degré3 sur F. Notons ω_ψ la représentation de Weil liée au caractère ψ de F. Nous donnons un morphisme $GL_2(A) \longrightarrow GSp_8(F)$, et construirons des représentations de Weil de $GL_2(A)$. Le but de ce chapitre est de trouver les quotients irréductibles de ces représentations.

I. Soient $A = F \times F \times F$, $GL_2(A) \simeq GL_2(F) \times GL_2(F) \times GL_2(F)$.

On pose $G = GL_2(F)$. En ce cas, on obtient deux représentations intéressantes, une représentation $\pi_\psi^{\Gamma_0}$ de $G \times G \times G$, et une autre représentation π_ψ^{Γ} du produit $G \times [(G \times G) \rtimes S_2]$ (la première représentation est induite d'un sous-groupe Γ_0, la deuxième d'un sous-groupe Γ). En utilisant les résultats de B.Roberts, on peut trouver les Théorèmes suivants :

Théorème (3). *Pour la représentation $\pi_\psi^{\Gamma_0}$, on a*
(1) $\mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}) = \{\pi \otimes \pi \otimes \pi |$ *pour tout* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)\}$.
(2) $m_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}, \pi \otimes \pi \otimes \pi) = 1$.

Théorème (4). *(1) π_ψ^{Γ} est une représentation de bigraphe forte du groupe produit $G \times [(G \times G) \rtimes S_2]$.*
(2) $\mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma}) = Irr(G)$ *et* $\mathcal{R}_{(G\times G)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma}) = \{\sigma(\pi,\pi)^+ |$ *pour tout* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)\}$.
(3) L'application de bigraphe θ est définie comme

$$\theta : \mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma}) \longrightarrow \mathcal{R}_{(G\times G)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma}); \pi \longmapsto \sigma(\pi,\pi)^+$$

où $\sigma(\pi,\pi)^+$ est la représentation distinguée du groupe $(G \times G) \rtimes S_2$ attachée à $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ [cf. Définition 4.46 ou voir [R2]]

Ces résultats étaient connus, nous donnons plus de détails. Pour la démonstration du Théorème (3) ci-dessus, une difficulté sera de montrer que $\widetilde{\Gamma_0 \rtimes S_3}$ est scindé au-dessus de $\Gamma_0 \rtimes S_3$.

II. Si $A = F \times E$, $GL_2(A) \simeq GL_2(F) \times GL_2(E)$.

On pose $G = GL_2(F)$, $H = GL_2(E)$. Soient $F^{\times +} = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, $G^+ = \{g \in G | \det(g) \in F^{\times +}\}$, et $M = \{\begin{pmatrix} x & \alpha \\ \overline{\alpha} & y \end{pmatrix} | x, y \in F, \alpha \in E\}$ muni de la forme quadratique définie par $q(m) := \det(m)$.

En ce cas, on obtient deux représentations intéressantes, la première représentation $\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}$ du groupe $G \times H$ et la deuxième représentation $\pi_\psi^{\Gamma,+}$ de $G^+ \times GO(M)$. En utilisant les résultats de Brooks Roberts et Michel Cognet, on montre les Théorèmes suivants :

Théorème (5). *(1) $\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}$ est une représentation de* ***graphe*** *forte à gauche du groupe produit $G \times H$.*
(2) $\mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}) = \mathrm{Irr}(G)$*,* $\mathcal{R}_H(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}) = \{\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi) |$ *pour tout* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)\}$.
(3) L'application de bigraphe forte θ est définie comme

$$\theta : \mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}) \longrightarrow \mathcal{R}_H(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}); \pi \longmapsto \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$$

pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Dans ce théorème $\mathrm{Bc}_{E/F}$ désigne l'opération de changement de base quadratique de Langlands [L].

Théorème (6). *Pour la représentation de bigraphe forte $\pi_\psi^{\Gamma,+}$ du groupe $G^+ \times GO(M)$, on a*
(1) $\mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) = \mathrm{Irr}_D(GO(M))$.
(2) L'application θ de bigraphe est définie ci-dessous :

$$\theta : \mathcal{R}_{G^+}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) \longrightarrow \mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}); \rho^+ \longmapsto \delta^+.$$

Plus précisément :
Reprenons les notations dans le Théorème 4.9 pour la classification des représentations irréductibles du groupe G^+ et les notations dans la Proposition 4.21 pour les représentations irréductibles du groupe $GO(M)$.

(1) $\rho^+_{\lambda,\sigma} \stackrel{\theta}{\longleftrightarrow} \delta^+_{\lambda,\sigma}$ *où* $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfont à* $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm 1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm 1}$ *;*

(1') $\lambda^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}} \stackrel{\theta}{\longleftrightarrow} \lambda^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$ *où* $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*

(2) $\psi^+ \cdot \mathrm{St}_{G^+} \stackrel{\theta}{\longleftrightarrow} \psi^+ \cdot \mathrm{St}^+_{GSO(M)}$ *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*

(3) $\psi^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}} \stackrel{\theta}{\longleftrightarrow} \psi^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}}$ *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*

(4) $\psi^+ \cdot 1_{G^+} \stackrel{\theta}{\longleftrightarrow} \psi^+ \cdot 1^+_{GSO(M)}$ *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*

(5) $\rho^+_\Theta \stackrel{\theta}{\longleftrightarrow} \delta^+_\Theta$ *où* Θ *est un caractère régulier de* $E^\times$ *;*

(6) $\rho^+_\pi \stackrel{\theta}{\longleftrightarrow} \delta^+_\pi$ *où les représentations sont attachées à une représentation cuspidale* π *du groupe* G*.*

Ces résultats étaient essentiellement connus, la difficulté était surtout de comprendre et préciser les résultats de M.Cognet et B.Roberts.

III. Si $A = K$, $GL_2(A) = GL_2(K)$

En ce cas, on pose $G = GL_2(K)$. On considère la représentation $\pi_\psi^{\Gamma_0} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{F^\times \times G} \rho_\psi|_{\Gamma_0}$. Nous déterminons une partie des quotients irréductibles de $\pi_\psi^{\Gamma_0}$.

Proposition ($\star$). *(i)* $m_G(\pi_\psi^\Gamma, \Pi_{\Phi_1,\Phi_2}) = 1$, *si* $\Phi_1 = \phi_1 \circ \mathrm{N}_{K/F}$, $\Phi_2 = \phi_2 \circ \mathrm{N}_{K/F}$ *pour* $\phi_1, \phi_2 \in Irr(F^\times)$ *; sinon* $= 0$.
(ii) $m_{F^\times \times G}(\pi_\psi^\Gamma, \phi \otimes \Pi_{\phi\circ \mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F, \phi\circ \mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^2}) = 1$ *pour* $\phi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *;* $= 0$ *sinon.*

L'organisation de chapitre 4 est comme suit : En vue de l'application au cas II, nous donnons la classification des représentations irréductibles du groupe G^+. Après des rappels de résultats connus, nous classifions les représentations distinguées ou distinguées génériques du groupe $GSO(M)$. Puis nous rappelons et précisons les résultats de M.Cognet et B.Roberts pour les quotients de la représentation de Weil sur $GL_2(F)\times GL_2(E)$. Finalement en utilisant les résultats de B.Roberts et M.Cognet, nous traitons les exemples pour les groupes $GL_2(F) \times GL_2(F) \times GL_2(F)$ et $GL_2(F) \times GL_2(E)$, ensuite pour le groupe $GL_2(K)$. Pour le groupe $GL_2(K)$, c'est plus original. Dans le cas de $GL_2(K)$, nous vérifions que notre représentation est compatible avec celle construite par Kazhdan [cf. [Kazh]], ou même de Mao Z-Y et S.Rallis [cf. [MR]].

Chapitre 5

Dans ce chapitre, on considère les problèmes analogues à ceux du chapitre 4, mais pour un corps fini F.
Les résultats : Soient F un corps fini d'ordre $q = p^f$ avec $p \neq 2$, E une extension quadratique de F, K une extension cubique de F, $GSp_8(F)$ le groupe symplectique de similitudes de degré 8, (ρ, V) la représentation de Weil sur $GSp_8(F)$. Notons A une algèbre étale sur F de degré 3. Donc $A \simeq F \times F \times F$, $F \times E$, ou bien K. On définit un morphisme $GL_2(A) \longrightarrow GSp_8(F)$, et grâce à ce morphisme, on obtient la représentation de Weil de $GL_2(A)$, notée π. La décomposition de cette représentation se présente de la façon suivante :

Soient $G = GL_2(L)$ ou L un corps fini quelconque, L_1/L une extension quadratique, χ_1, χ_2 deux caractères de $F^\times$, on note $\pi_{\chi_1,\chi_2} = \mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2$, 1_G la représentation triviale du groupe G, St_G la représentation de Steinberg du groupe G et π_θ la représentation cuspidale du groupe G attachée au caractère régulier θ de $L_1^\times$.

Théorème (7). *Si* $A = F \times F \times F$, $GL_2(A) = GL_2(F) \times GL_2(F) \times GL_2(F)$, *alors*

$$\pi = \bigoplus_{\chi_1 \neq \chi_2 \mod \chi_1 \sim \chi_2^\omega} \Big(\pi_{\chi_1,\chi_2} \otimes \pi_{\chi_1,\chi_2} \otimes \pi_{\chi_1,\chi_2}\Big) \oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)} \Big(\psi\cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi\cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi\cdot \mathrm{St}_G\Big)$$

$$\oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)} \Big(\psi\cdot 1_G \otimes \psi\cdot 1_G \otimes \psi\cdot 1_G\Big) \oplus \bigoplus_{\theta \in \mathrm{Irr}(E^\times) - \mathrm{Irr}(F^\times), mod\, \theta\sim\theta^q} \Big(\pi_\theta \otimes \pi_\theta \otimes \pi_\theta\Big)$$

$$\oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)} \bigg(\Big(\psi\cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi\cdot 1_G \otimes \psi\cdot 1_G\Big) \oplus \Big(\psi\cdot 1_G \otimes \psi\cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi\cdot 1_G\Big) \oplus \Big(\psi\cdot 1_G \otimes \psi\cdot 1_G \otimes \psi\cdot \mathrm{St}_G\Big)\bigg).$$

Théorème (8). *Si $A = F \times E$, $GL_2(A) = GL_2(F) \times GL_2(E)$, alors*

$$\pi = \bigoplus_{\psi\in \mathrm{Irr}(F^\times),\Psi\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Psi=\psi\circ \mathrm{N}_{E/F}} \Big(\psi\cdot 1_G \otimes \Psi\cdot 1_H\Big) \oplus \bigoplus_{\psi\in \mathrm{Irr}(F^\times),\Psi\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Psi=\psi\circ \mathrm{N}_{E/F}} \Big(\psi\cdot \mathrm{St}_G \otimes \Psi\cdot \mathrm{St}_H\Big)$$

$$\oplus \bigoplus_{\lambda\neq\sigma\in \mathrm{Irr}(F^\times),\Lambda\neq\Sigma\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Lambda=\lambda\circ \mathrm{N}_{E/F},\Sigma=\sigma\circ\mathrm{N}_{E/F}} \Big(\pi_{\lambda,\sigma}\otimes\Pi_{\Lambda,\Sigma}\Big) \oplus \bigoplus_{\Lambda\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Lambda\neq\Lambda^q} \Big(\pi_\Lambda\otimes\Pi_{\Lambda,\Lambda^q}\Big)$$

$$\oplus \bigoplus_{\psi\in \mathrm{Irr}(F^\times),\Psi\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Psi=\psi\circ \mathrm{N}_{E/F}} \Big(\psi \mathrm{St}_G \otimes \Psi\cdot 1_H\Big).$$

Théorème (9). *Si $A = K$, $GL_2(A) = GL_2(K)$, alors*

$$\pi = \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Irr}(GL_2(F))} \mathrm{Bc}_{K/F}(\sigma).$$

Pour montrer le Théorème (9) ci-dessus, nous discutons le problème du changement de base pour les représentations de Weil. Nous montrons en fait que sur un corps fini, les représentations de Weil sont, en un certain sens(Shintani-lift), compatibles au changement de base. Nous présentons le résultat ci-dessous :

Soit ψ un caractère non trivial de $F^\times$. On fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F. Supposons $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) = \langle\sigma\rangle$. On pose F_i le corps formé des points fixées de $\overline{F}$ par σ^i. On fixe un nombre positif m.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique connexe défini sur F, on note $\mathbf{G}(F_i)$ le groupe des F_i-points de $\mathbf{G}$. On note $\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)$ l'ensemble formé des éléments (σ^i, g) pour tout $g \in \mathbf{G}(F_m)$ pour $1 \leq i \leq m$. On note $C(\mathbf{G}(F_m))$ l'espace vectoriel des fonctions centrales de $\mathbf{G}(F_m)$ et $C(\mathbf{G}(F_m))_\sigma$ le sous-espace de fonctions des $C(\mathbf{G}(F_m))$ constitué des éléments σ-invariants.

Dans l'article [Gy], Gyoja a défini l'opérateur de norm N_m, qui permet de donner une bijection entre les classes de $\mathbf{G}(F_m)$-conjugaison dans $\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)$ et les classes de conjugaison dans $\mathbf{G}(F_{(m,i)})$, où (m,i) est le plus grand commun diviseur de m et i. On définit

$$i - res : C(\,\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \mathbf{G}(F_m)) \longrightarrow C(\mathbf{G}(F_{(m,i)}))_\sigma$$

$$f \longmapsto i - res(f)$$

où $i - res(f) \circ \mathrm{N}_i = f|_{\sigma^i \rtimes \mathbf{G}(F_m)}$.

On pose $\psi_{F_i} = \psi \circ \mathrm{Tr}_{F_i/F}$. Soit V un espace symplectique sur F de dimension $2n$. On note $\mathbf{Sp}_V$ (resp. $\mathbf{GSp}_V$) le groupe symplectique(resp. symplectique de similitudes) associé à V. On note $\Pi_{\psi_{F_i}}$ (resp. $\Xi_{\psi_{F_i}}$) la représentation de Weil du groupe $\mathbf{Sp}_V(F_i)$(resp. $\mathbf{GSp}_V(F_i)$) pour $1 \leq i \leq m$.

Théorème (10). *Il existe une représentation unique $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$ (resp. $\widetilde{\Xi_{\psi_{F_m}}}$) du groupe $\boldsymbol{Sp}_V(F_m) \rtimes \mathrm{Gal}(F_m/F)$ (resp. $\boldsymbol{GSp}_V(F_m) \rtimes \mathrm{Gal}(F_m/F)$ telle que i-res($\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$)= $\Pi_{\psi_{F_{(m,i)}}}$ (resp. i-res($\widetilde{\Xi_{\psi_{F_m}}}$)= $\Xi_{\psi_{F_{(m,i)}}}$) pour $1 \leq i \leq m$.*

1 Préliminaires généraux

1.1 Les sous-groupes de Howe réductifs de $Sp(W)$

Dans cette sous-sous-section, on désigne par F un corps non archimédien de caractéristique impaire et de caractéristique résiduelle p.

Définition 1.1 ([MVW] Page 10)**.** *Soit G un groupe. Un sous-groupe $H \subset G$ tel que le double commutant de H dans G soit égal à H sera appelé* ***un sous-groupe de Howe*** *de G. Si $H' = Z_G(H)$ est le commutant de H dans G, on dira que (H, H') est* ***une paire duale*** *dans G.*

Soit D un corps de dimension finie sur son centre(pas nécessairement commutatif), muni d'une involution τ. Soit W un espace vectoriel à droite sur D, de dimension n, muni d'un produit ϵ-hermitien, où $\epsilon\tau(\epsilon) = 1$. W est dit de **type 2**(resp. de **type 1**) si le produit hermitien est nul(resp. non dégénéré).

Définition 1.2 ([MVW] Page 11)**.** *Soit W un D-espace à droite ϵ-hermitien de dimension finie de type 1 ou 2, une paire duale (H, H') de $U(W)$ est dite* ***réductive*** *si*
(i) W est HD et $H'D$-semi-simple.
(ii) H et H' sont réductifs.
(Ces deux conditions sont probablement équivalentes). On dit alors que H est ***un sous-groupe de Howe réductif*** *de $U(W)$.*

Définition 1.3 ([MVW] Page 11)**.** *Une paire duale (H, H') de $U(W)$ est dite irréductible s'il n'existe pas de décomposition orthogonale de W stable par $HH'D$.*

Lemme 1.4 ([MVW] Page 13)**.** *Toute paire réductive duale de $U(W)$ est produit de paires réductives duales irréductibles.*

Démonstration. Ceci découle de [[MVW] Page 10-11] □

Ci-dessous, nous citons la classification des paires duales irréductibles de $Sp(2n, F)$ dans [[MVW], Page 15]. Soit $t_{D/F} \in \mathrm{Hom}_F(D, F)$ tel que la forme bilinéaire $(d, d') \longmapsto t_{D/F}(dd')$ pour $d, d' \in D$ soit non dégénérée.

Lemme 1.5 ([MVW] Page 14)**.** *Si $(W_1, \langle,\rangle_1)$, $(W_2, \langle,\rangle_2)$ sont deux espaces sur D respectivement à droite et à gauche, ϵ_i-hermitiens de type 1 tels que $-1 = \epsilon_1\epsilon_2$, alors le produit tensoriel $W = W_1 \otimes_D W_2$ muni de la forme*

$$<< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' >>= t_{D/F}(< w_1, w_1' >_1 \tau(< w_2, w_2' >_2)), \quad w_i, w_i' \in W_i$$

est symplectique. Inversement, toute décomposition d'un espace symplectique $(W, <, >)$ en produit tensoriel hermitien est de ce type.

Démonstration. Ceci découle de [[MVW], Page 14-15, Lemme]. Nous montrons “inversement”. Supposons $W = W_1 \otimes_D W_2$ une décomposition de $(W, \langle,\rangle)$, $B_1 = \mathrm{End}_D(W_1)$, $B_2 = \mathrm{End}_D(W_2)$, $A = \mathrm{End}_F(W)$. Rappelons qu'il existe une involution adjointe $\star$ sur l'algèbre centrale A associée à l'espace hermitien $(W, \langle,\rangle)$ à isomorphisme près, Par définition, les algèbres B_1, B_2 sont stables sous l'involution adjointe $\star$. La restriction de cette involution sur B_1(resp. B_2) donne une forme ϵ_1-hermitienne $\langle,\rangle_1$(resp. ϵ_2-hermitienne $\langle,\rangle_2$) sur W_1(resp. W_2). D'après rappeler la construction, on sait que $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$. Maintenant, nous pouvons définir une forme $<<, >>$ comme l'hypothèse au lemme ci-dessus, elle aussi induit sur $\mathrm{End}_F(W)$ une involution $\star'$ coincident avec l'involution adjointe associée à $\langle,\rangle_i$ sur B_i, $i = 1, 2$. Deux involutions $\star, \star'$ de $\mathrm{End}_F(W)$ sont différentes par un automorphisme intérieur μ. Comme $\star|_{B_i}$ est isomorphe à $\star'|_{B_i}$ pour $i = 1, 2$, on sait que l'automorphisme intérieur μ est trivial sur $\mathrm{End}_D(W_i)$ $i = 1, 2$ qui est donnée par conjugaison par un élément non nul du centre de D. C'est-à-dire que

$$\langle w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2'\rangle =<< aw_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' >>= t_{D/F}(a < w_1, w_1' >_1 \tau(< w_2, w_2' >_2)) \qquad w_i, w_i' \in W_i,$$

pour quelque $a \in \mathrm{Cent}(D) = F'$. D'après modifier le produit $\langle,\rangle_1$, par $a\langle,\rangle_1$, on obtient le résultat. □

Remarque 1.6 (Restriction des scalaires, cf. [MVW], Page 15)**.** *(1) Soient $(W, \langle,\rangle)$ un espace anti-hermitien sur (D, τ), $t_{D/F}$ un élément de $\mathrm{Hom}_F(D, F)$ tel que $(d, d') \longmapsto t_{D/F}(dd')$ est non dégénérée, on obtient une forme symplectique $t_{D/F}(\langle,\rangle)$ sur le F-espace W, l'espace symplectique $(W, t_{D/F}(\langle,\rangle))$ sera dit* ***déduit*** *de $(W, \langle,\rangle)$ et $t_{D/F}$ par restriction des scalaires.*

(2) Supposons l'espace W' *déduit de* W *par restriction des scalaires par une extension* F'/F*. Par la classification des sous-groupes de Howe réductifs des groupes classiques dans [[MVW] Page 13], on sait qu'une paire duale non triviale de* $Sp(W)$ *reste une parie duale non triviale de* $Sp(W')$*. Comme* $\mathrm{Cent}_{Sp(W')}(\{\pm 1\}) = Sp(W')$*, on voit que la paire duale triviale* $(\{\pm 1\}, Sp(W))$ *ne peut pas être une paire duale du groupe* $Sp(W')$*.*

Théorème 1.7 ([MVW] Page 15)**.** *Voici la classification des paires duales irréductibles de* $Sp(W)$ *qui ne proviennent pas par restriction des scalaires de* $Sp(W')$ *satisfaisant à* $(\dim_{F'} W')[F' : F] = \dim_F W$ *pour une extension* F' *sur* F*.*

(1) Les paires duales de type 2 : $(GL_D(X_1), GL_D(X_2))$*.*
Si W *est totalement isotrope et non dégénéré pour toute décomposition d'un lagrangien* X *de* V *en produit tensoriel* $X = X_1 \otimes_D X_2$*.*

(2) Les paires duales de type 1 :
(i) $(O(W_1), Sp(W_2))$*.*
Ici $W \simeq W_1 \otimes_F W_2$ *avec* W_1*(resp.* W_2*) un espace orthogonal (resp. symplectique) sur* F*.*
(ii) $(U(W_1), U(W_2))$*.*
Ici $W \simeq W_1 \otimes_D W_2$ *où* D/F *est une extension quadratique ou un corps de quaternions muni de l'involution canonique.* W_1*(resp.* W_2*) est un espace hermitien (resp. anti-hermitien) sur* D *et* $\dim_D W_2 \neq 1$ *si* D *est un corps de quaternions.*

Démonstration. Ceci découle de [MVW]. Utilisons les énoncés dans la page 13 de [MVW]. Ils donnent le cas (1). Pour (2), supposons $W \simeq W_1 \otimes_{D'} W_2$ une décomposition de W en produit tensoriel hermitien. Par définition, le centre F' de D' contient F. Par le lemme 1.5, la forme symplectique s'écrit

$$<< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' >>= t_{D/F}\Big(< w_1, w_1' >_1 \tau(< w_2, w_2' >_2)\Big)$$

pour un homomorphisme $t_{D/F} \in \mathrm{Hom}_F(D, F)$ satisfaisant aux conditions requises. Si $F' = F$, alors $D = F$ ou D un corps de quaternions sur F, on obtient les résultats de (2) (i) et partie de résultats de (2) (ii). Si $F' \neq F$, on regarde $W = W_1 \otimes_{D'} W_2$ comme un espace symplectique sur F', notée W'. Choisissons un élément non trivial $t_{F'/F} \in \mathrm{Hom}_{F'}(F', F)$ et $t_{D/F'} \in \mathrm{Hom}_{F'}(D, F')$ tels que $(d, d') \longmapsto t_{D/F'}(dd')$ soit non dégénérée, alors on sait que $t_{F'/F} \circ t_{D/F'} \in \mathrm{Hom}_F(D, F)$ et $(d, d') \longmapsto t_{F'/F} \circ t_{D/F'}(dd')$ est aussi non dégénérée. Par le Lemme 1.5, il existe une forme ε_1-hermitienne $\langle , \rangle_1$ (resp. ε_2-hermitienne $\langle , \rangle_2$) sur W_1 (resp. W_2) telles que

$$<< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' >>= t_{F'/F} \circ t_{D/F'}\Big(< w_1, w_1' >_1 \tau(< w_2, w_2' >_2)\Big).$$

Si $\tau|_{F'} = \mathrm{Id}$, alors W', muni d'une forme $t_{D/F'}(\langle , \rangle_1 \tau(\langle , \rangle_2))$, est un espace symplectique et W est déduit de W' par restriction des scalaires. Ceci contredit à l'hypothèse. Si $\tau|_{F'} \neq \mathrm{Id}$, nous notons F_1' le corps commutatif formé par les points fixés de τ. Le même argument que ci-dessus, montre que $F_1' = F$ et on obtient l'autre partie des résultats de (2)(ii). □

1.2 Le groupe métaplectique $Mp(W)$

Soit W un F-espace vectoriel de dimension $2n$, muni d'une forme symplectique $\langle , \rangle$. On note $Sp(W)$ le groupe symplectique, $GSp(W)$ le groupe symplectique de similitudes, $\widehat{Sp}(W)$ (resp. $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$) le groupe métaplectique associé à l'extension du centre $\{\pm 1\}$ (resp. $\mu_8 = \langle e^{\frac{2\pi i}{8}} \rangle$,$\mathbb{C}^\times$). Si H est un sous-groupe fermé de $Sp(W)$, nous notons son image réciproque dans $\widehat{Sp}(W)$ (resp. $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$) par $\widehat{H}$ (resp. $\overline{H}$, $\widetilde{H}$). Dans cette sous-sous-section, nous dirons le groupe métaplectique $Mp(W)$ pour $\widehat{Sp}(W)$, ou $\overline{Sp}(W)$, ou bien $\widetilde{Sp}(W)$, sauf mention explicite.

On sait que $\widehat{Sp}(W)$ est l'unique revêtement à deux feuillets non trivial de $Sp(W)$. Il est déterminé par un cocycle $[\widehat{Sp}(W)]$ non trivial dans $H^2(Sp(W), \{\pm 1\}) \simeq \mathbb{Z}_2$. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \widehat{Sp}(W) \xrightarrow{p} Sp(W) \longrightarrow 1,$$

et $\overline{Sp}(W) = \widehat{Sp}(W) \times_{\{\pm 1\}} \mu_8$, $\widetilde{Sp}(W) \simeq \widehat{Sp}(W) \times_{\{\pm 1\}} \mathbb{C}^\times$, le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & \widehat{Sp}(W) & \longrightarrow & Sp(W) & \longrightarrow & 1 & (1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & & \\
1 & \longrightarrow & \mu_8 & \longrightarrow & \overline{Sp}(W) & \longrightarrow & Sp(W) & \longrightarrow & 1 & (2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^\star & \longrightarrow & \widetilde{Sp}(W) & \longrightarrow & Sp(W) & \longrightarrow & 1 & (3)
\end{array}$$

C'est-à-dire que le cocycle $[\overline{Sp}(W)]$ (resp. $[\widetilde{Sp}(W)]$) associé au groupe $\overline{Sp}(W)$ (resp. $\widetilde{Sp}(W)$) est l'image de $[\widehat{Sp}(W)]$ par l'application $H^2(Sp(W),\{\pm 1\}) \longrightarrow H^2(Sp(W),\mu_8)$ (resp. $H^2(Sp(W),\{\pm 1\}) \longrightarrow H^2(Sp(W),\mathbb{C}^\times)$). Donc ces classes de cohomologie sont d'ordre 2.

Théorème 1.8 (C.C.Moore)**.** *Il existe un et un seul élément non trivial d'ordre 2 dans $H^2(Sp(W),\mu_8)$ ou $H^2(Sp(W),\mathbb{C}^\times)$.*

Démonstration. Ceci découle de [Mo2]. □

Nous allons donner des formules explicites pour comprendre ces cocycles. D'après le Théorème 1.8, il suffit de construire des 2-cocycles non trivials d'ordre 2. Nous citons les résultats dans [P], [Rao], mais nous adopterons les descriptions dans [MVW], [Bar1]. Pour présenter les formules, quelques définitions sont nécessaires.

Soient W un espace symplectique de dimension $2n$ sur F, $W = X \oplus X^\star$ une polarisation complète de W. Choisissons une base $\{e_1,\cdots,e_n\}$ resp. $\{e_1^\star,\cdots,e_n^\star\}$ de X resp. $X^\star$ telle que $\langle e_i, e_j^\star\rangle = \delta_{ij}$, i.e. $\{e_1,\cdots,e_n; e_1^\star,\cdots,e_n^\star\}$ forme une base symplectique de W.

Notons $P = P(X)$(resp. $N = N(X)$) le groupe parabolique(resp. le radical unipotent) associé à X, Ω l'ensemble des lagrangiens de W. Un élément g de $Sp(W)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathrm{End}_F(X), b \in \mathrm{Hom}_F(X^\star, X), c \in \mathrm{Hom}_F(X, X^\star), d \in \mathrm{End}_F(X^\star).$$

On a la décomposition de Bruhat de $Sp(W)$

$$Sp(W) = \cup_{S\subset\{1,\cdots,n\}} P\omega_S P,$$

d'où

$$\omega_S(e_i) = -e_i^\star, \omega_S(e_i^\star) = e_i, \text{ si } i \in S$$

$$\omega_S(e_i) = e_i, \omega_S(e_i^\star) = e_i^\star, \text{ si } i \notin S.$$

L'invariant de Leray Soit (X_1, X_2, X_3) un triplet de lagrangiens deux à deux transverses. On peut lui associer un espace quadratique qui sera appelé *l'invariant de Leray* de (X_1, X_2, X_3), et noté $q(X_1, X_2, X_3)$.
D'abord, on a deux polarisations complètes $W = X_1 \oplus X_2$ et $W = X_1 \oplus X_3$, donc il existe un élément unique $u \in N(X_1)$ tel que $u(X_2) = X_3$. On définit une forme symétrique bilinéaire $(,)$ sur X_2 par

$$(x_2, x_2') := \langle x_2, u(x_2')\rangle = \langle x_2', u(x_2)\rangle.$$

Comme $X_2 \cap X_3 = 0$ et que u est bijective, la forme symétrique bilinéaire est non dégénérée. En ce cas, on définit

$$q(X_1, X_2, X_3)(x_2) := (x_2, x_2) \text{ pour } x_2 \in X_2 \cdots {}^{1}.$$

Si (X_1, X_2, X_3) est un triplet de lagrangiens pas forcément transverses deux à deux, on modifie la définition de la façon suivante :

Notons : $M = (X_1 \cap X_2) + (X_2 \cap X_3) + (X_3 \cap X_1)$.

Considérons : $Z_i = (X_i + M) \cap M^\perp / M$.

On vérifie que (Z_1, Z_2, Z_3) est un triplet de lagrangiens de l'espace symplectique $W_M = M^\perp/M$ transverses deux à deux [cf.[MVW], Page 54]. En ce cas, on définit

$$q(X_1, X_2, X_3) := q(Z_1, Z_2, Z_3).$$

Proposition 1.9 ([Rao])**.** *(1) Soit (X_1, X_2, X_3) un triplet de Ω, alors $q(X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}, X_{\tau(3)}) \simeq \mathrm{sign}(\tau) q(X_1, X_2, X_3)$ pour $\tau \in S_3$.*

(2) Soient (X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3) deux triplets de Ω, supposons qu'il existe un élément g de $Sp(W)$ tel que $Y_i = g(X_i)$. Alors les espaces quadratiques $q(Y_1, Y_2, Y_3)$ et $q(X_1, X_2, X_3)$ sont isomorphes

Démonstration. Ceci découle de [[MVW], Page 54-55]. □

1. ! Ici, ne multiplions pas la constante $\frac{1}{2}$

Un cocycle pour les groupes $\overline{Sp}(W)$ et $\widetilde{Sp}(W)$: Soit X un lagrangien de W, ψ un caractère continu non trivial de F et γ l'invariant de Weil [cf. [Kud2], chapter I]. Pour deux éléments $g_1, g_2 \in Sp(W)$, on pose

$$q(g_1, g_2) := -q(X, g_1^{-1}(X), g_2(X)).$$

Théorème 1.10 ([P],[Rao]). *La classe du 2-cocycle*

$$c(g_1, g_2) = \gamma\Big(\psi(q(g_1, g_2))\Big) \cdots {}^{2}$$

dans $H^2(Sp(W), \mathbb{C}^\times)$, ou $H^2(Sp(W), \mu_8)$, est non triviale d'ordre 2.

Démonstration. Ceci découle de [[Rao], Page 358, Theorem 4.1]. □

Remarque 1.11. *(1) $c(g_1, g_2)$ est une racine huitième de l'unité, qui dépend du choix de ψ, X.*
(2) D'après la Proposition 1.9 (2), on sait que pour $p, p_1, p_2 \in P = P(X)$, $c(p_1 g_1 p, p^{-1} g_2 p_2) = c(g_1, g_2)$. En particulier $c(p, g) = c(1, g) = \gamma\Big(\psi(q(X, X, g(X)))\Big) = 1$ pour $p \in P, g \in Sp(W)$.

Un cocycle pour le groupe $\widehat{Sp}(W)$: Tout d'abord, fixons une polarisation complète $W = X \oplus X^\star$. Pour présenter la formule, nous rappelons quelques notations et définitions. Nous notons $(\,,\,)_F : F^\times/F^{\times 2} \times F^\times/F^{\times 2} \longrightarrow \{\pm 1\}$ le symbole de Hilbert. Soit (q, V) une forme quadratique non dégénérée sur F de dimension m. Par le Théorème d'orthogonalisation [cf. [MVW], Page 4], V est isométrique à une somme $W = \oplus_{i=1}^m F(a_i)$ où $F(a_i)$ est la forme canonique de F de dimension 1, définie par $x \longmapsto a_i x^2$ pour $x \in F$. Rappelons quelques invariants de V. Le déterminant $\det(q) \in F^\times/F^{\times 2}$ est représenté par le produit des a_i. L'invariant de Hasse est défini par la formule :

$$\epsilon(V) := \prod_{1 \leq i \neq j \leq m} (a_i, a_j)_F.$$

De plus, Rao a défini les applications :

$$x : Sp(W) \longrightarrow F^\times/F^{\times 2}; p_1 \omega_S p_2 \longmapsto \det(p_1 p_2|_X) \mod F^{\times 2};$$

$$t : Sp(W) \times Sp(W) \longrightarrow \mathbb{Z}; (g_1, g_2) \longmapsto \frac{1}{2}(|S_1| + |S_2| - |S_3| - l),$$

pour $g_1 = p_1 \omega_{S_1} p_1', g_2 = p_2 \omega_{S_2} p_2'$ et $g_1 g_2 = p_3 \omega_{S_3} p_3', l = \dim q(X, g_1^{-1}(X), g_2(X))$, S, S_1, S_2, S_3 des parties de $\{1, \cdots, n\}$.
On peut définir un 2-cocycle grâce aux applications ci-dessus, qui sera appelé le **2-cocycle de Rao** :

$$c_{Rao}(g_1, g_2) = (x(g_1), x(g_2))_F (-x(g_1)x(g_2), x(g_1 g_2))_F ((-1)^t, \det(q))_F (-1, -1)_F^{\frac{t(t-1)}{2}} \epsilon(q),$$

où $t = t(g_1, g_2)$, $q = q(g_1, g_2)$ pour $g_1, g_2 \in Sp(W)$.

Théorème 1.12 (Rao). *La classe du 2-cocycle de Rao est un élément non trivial d'ordre 2 de $H^2(Sp(W), \{\pm 1\})$.*

Démonstration. Ceci découle de [[Kud1], Page 20, Theorem 4.5]. □

Exemple 1.13 (cf. [MVW] Page 56). *Si $\dim_F(W) = 2$, $Sp(W) \simeq SL_2(F)$, en ce cas, on retrouve la formule de Kubota :*

$$c_{Rao}(g_1, g_2) = (x(g_1), x(g_2))_F (-x(g_1)x(g_2), x(g_1 g_2))_F,$$

ou $x(g) = dF^{\times 2}$ si $c = 0$; $cF^{\times 2}$ si $c \neq 0$ pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(F)$.

Pour le 2-cocycle de Rao, on a les propriétés :

Proposition 1.14. *Soient $g, g_1, g_2 \in Sp(W)$, $p \in P = P(X)$.*
(1) $c_{Rao}(p, g) = c_{Rao}(g, p) = (x(p), x(g))_F$. En particulier, $c_{Rao}(1, g) = c_{Rao}(g, 1) = 1$.
(2) $c_{Rao}(pg_1, g_2) = (x(p), x(g_1)x(g_1 g_2))_F\, c_{Rao}(g_1, g_2)$ et $c_{Rao}(g_1, g_2 p) = (x(p), x(g_2)x(g_1 g_2))_F c_{Rao}(g_1, g_2)$.

2. ! Ici, ne mulitilions pas la constante $\frac{1}{2}$

(3) $c_{Rao}(g_1p^{-1}, pg_2) = (x(p), -x(g_1)x(g_2))_F$.

Démonstration. (1) Dans ce cas, on a $q(g,p) = q(p,g) = 0$ et $t(p,g) = t(g,p) = 0$, $c_{Rao}(p,g) = (x(p), x(g))_F(-x(p)x(g), x(pg))_F = (x(p), x(g))_F(-x(p)x(g), x(p)x(g))_F = (x(p), x(g))_F$. En faisant le calcul analogue, on obtient $c_{Rao}(g,p) = (x(g), x(p))_F = (x(p), x(g))_F$, en particulier $x(1) = 1$, donc $c_{Rao}(1,g) = c_{Rao}(g,1) = 1$, c'est-à-dire que le 2-cocycle est normalisé.
(2) D'abord, on a $q := q(pg_1, g_2) = q(g_1, g_2)$, $q(g_1, g_2p) = q(g_1, g_2)$, $t := t(pg_1, g_2) = t(g_1, g_2)$, $t(g_1, g_2p) = t(g_1, g_2)$.
$c_{Rao}(pg_1, g_2) = (x(pg_1), x(g_2))_F(-x(pg_1)x(g_2), x(pg_1g_2))_F((-1)^t, \det(q))_F(-1,-1)_F^{\frac{t(t-1)}{2}}\epsilon(q)$
$= c_{Rao}(g_1, g_2)(x(p), x(g_2))_F(x(p), x(p))_F(x(p), x(g_1g_2))_F(-x(g_1)x(g_2), x(p))_F$
$= c_{Rao}(g_1, g_2)(x(p), x(g_2))_F(x(p), -1)_F(x(p), x(g_1g_2))_F(x(p), -x(g_1)x(g_2))_F$
$= c_{Rao}(g_1, g_2)(x(p), x(g_1)x(g_1g_2))_F$.
$c_{Rao}(g_1, g_2p) = c_{Rao}(g_1, g_2)(x(g_1), x(p))_F(-x(g_1)x(g_2), x(p))_F(x(p), x(g_1g_2))_F(x(p), x(p))_F$
$= c_{Rao}(g_1, g_2)(x(p), x(g_2)x(g_1g_2))_F$.
(3) on a $q(g_1p^{-1}, pg_2) = q(g_1, g_2)$ et $t(g_1p^{-1}, pg_2) = t(g_1, g_2)$. Donc $c_{Rao}(g_1p^{-1}, pg_2) = (x(g_1), x(p))_F(x(p^{-1}), x(g_2))_F\ (x(p^{-1}), x(p))_F c_{Rao}(g_1, g_2) = c_{Rao}(g_1, g_2)(x(g_1), x(p))_F(x(p), x(g_2))_F(x(p), x(p))_F = c_{Rao}(g_1, g_2)(x(p), -x(g_1)x(g_2))_F$. □

On a vu que le 2-cocycle de Rao ne possède pas de la même propriété que celle pour le groupe $\overline{Sp}(W)$ ou $\widetilde{Sp}(W)$. Par ailleurs, le 2-cocycle de Rao aussi détermine le groupe $\overline{Sp}(W)$. Donc il existe une application $\beta : Sp(W) \longrightarrow \mu_8$ telle que

$$c(g_1, g_2) = \beta(g_1g_2)\beta(g_1)^{-1}\beta(g_2)^{-1}c_{Rao}(g_1, g_2),$$

où $c(g_1, g_2)$ est le 2-cocycle, défini au Théorème 1.10 pour le lagrangien X fixé et le caractère additif ψ fixé.

La relation entre $c(g_1, g_2)$ et $c_{Rao}(g_1, g_2)$: Fixons une polarisation complète $W = X \oplus X^\star$, un caractère non trivial ψ de F. Nous notons $\gamma(\psi^a)$ la constante de Weil attachée à la forme quadratique $x \longmapsto ax^2$ et $\gamma(a, \psi) = \frac{\gamma(\psi^a)}{\gamma(\psi)}$ la constante normalisée. On sait que $\gamma(a, \psi)$ est un caractère du second degré de $F^\times/F^{\times 2}$ et $\gamma(ab, \psi)\gamma(a, \psi)^{-1}\gamma(b, \psi)^{-1} = (a, b)_F$. De plus, il satisfait aux propriétés : (1) $\gamma(a, \psi)^4 = 1$; (2) $\gamma(a, \psi)^2 = (a, a)_F = (-1, a)_F$; (3) $\gamma(\psi)^2 = \gamma(-1, \psi)^{-1}$; (4) $\gamma(\psi)^8 = 1$. Soit (q, V) une forme quadratique non dégénérée sur F de dimension m et $V \simeq \oplus_{i=1}^m F(a_i)$; alors $\gamma(\psi \circ q) = \prod_{i=1}^m \gamma(\psi^{a_i}) = \gamma(\det(q), \psi)\gamma(\psi)^m\epsilon(q)$ où $\epsilon(q)$ est l'invariant de Hasse pour q.

Théorème 1.15 ([Rao])**.** *Soit $g = p_1\omega_S p_2 \in Sp(W)$, pour $p_i \in P(X)$, on définit*

$$\beta(g) := \gamma(x(g), \psi)^{-1}\gamma(\psi)^{-|S|},$$

alors $c(g_1, g_2) = \beta(g_1g_2)\beta(g_1)^{-1}\beta(g_2)^{-1}c_{Rao}(g_1, g_2)$.

Démonstration. Ceci découle de [[Kud2], Theorem 4.5]. □

1.3 Les paires duales de Howe pour $Mp(W)$

Théorème 1.16. *Soient $g_1, g_2 \in Sp(W)$, $\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}$ des images réciproques quelconques dans $\widetilde{Sp}(W)$. Supposons $g_1g_2 = g_2g_1$. Alors $\widetilde{g_1}\widetilde{g_2} = \widetilde{g_2}\widetilde{g_1}$.*

Démonstration. Ceci découle de [[MVW], Page 39-40]. □

Corollaire 1.17. *Si deux éléments de $Sp(W)$ commutent, alors leurs images réciproques quelconques dans $\widehat{Sp}(W)$ ou $\overline{Sp}(W)$ commutent aussi.*

Démonstration. Par définition, on peut regarder $\widehat{Sp}(W)$, $\overline{Sp}(W)$ comme des sous-groupes de $\widetilde{Sp}(W)$. □

Supposons $W = W_1 \oplus W_2$ une somme orthogonale. On considère l'application canonique

$$Sp(W_1) \times Sp(W_2) \stackrel{p}{\longrightarrow} Sp(W).$$

On note $Sp(W_1)\widehat{\times} Sp(W_2)$ l'image réciproque de $p(Sp(W_1) \times Sp(W_2))$ dans $\widehat{Sp}(W)$.

Lemme 1.18. *On a un morphisme de groupes*

$$\widehat{Sp}(W_1) \times \widehat{Sp}(W_2) \xrightarrow{\hat{p}} Sp(W_1)\widehat{\times Sp}(W_2),$$

$$[(g_1, \epsilon_1), (g_2, \epsilon_2)] \longmapsto [(g_1, g_2), \epsilon_1\epsilon_2 c_{Rao}((g_1, 1), (1, g_2))],$$

où on écrit (g_1, g_2) *pour l'image* $p(g_1, g_2)$ *dans* $Sp(W)$*. En particulier, en considèrant* $\hat{p}|_{\widehat{Sp}(W_1)}$ *et* $\hat{p}|_{\widehat{Sp}(W_2)}$*, on obtient*

$$c_{Rao}(g_1, g_1') = c_{Rao}((g_1, 1), (g_1', 1))$$

et

$$c_{Rao}(g_2, g_2') = c_{Rao}((1, g_2), (1, g_2'))$$

pour $g_1, g_1' \in Sp(W_1)$*,* $g_2, g_2' \in Sp(W_2)$*.*

Démonstration. Ceci découle de [[HM], Page 245-246]. □

Lemme 1.19. *Si* $W_1 \simeq W_2$*, on regarde* $Sp(W_1)$ *comme un sous-groupe de* $Sp(W_1) \times Sp(W_1)$ *par l'application diagonale, alors* $Sp(W_1)\widehat{\times Sp}(W_1)$ *est scindé au-dessus* $Sp(W_1)$*.*

Démonstration. Supposons (g_1, ϵ_1), (g_2, ϵ_2), (g_1', ϵ_1'), (g_2', ϵ_2') des éléments de $\widehat{Sp}(W_1)$. Comme $\hat{p}$ est un morphisme des groupes, on a

$$p\Big([(g_1, \epsilon_1), (g_2, \epsilon_2)]\Big)p\Big([(g_1', \epsilon_1'), (g_2', \epsilon_2')]\Big) = p\Big([(g_1, \epsilon_1), (g_2, \epsilon_2)][(g_1', \epsilon_1'), (g_2', \epsilon_2')]\Big).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}&[(g_1, g_2), \epsilon_1\epsilon_2 c_{Rao}((g_1, 1), (1, g_2))][(g_1', g_2'), \epsilon_1'\epsilon_2' c_{Rao}((g_1', 1), (1, g_2'))]\\ &= p\Big([\Big(g_1g_1', \epsilon_1\epsilon_1' c_{Rao}(g_1, g_1')\Big), \Big(g_2g_2', \epsilon_2\epsilon_2' c_{Rao}(g_2, g_2')\Big)]\Big)\end{aligned}$$

Donc

$$c_{Rao}\Big((g_1, 1)(1, g_2)\Big)c_{Rao}\Big((g_1', 1), (1, g_2')\Big)c_{Rao}\Big((g_1, g_2), (g_1', g_2')\Big) = c_{Rao}(g_1, g_1')c_{Rao}(g_2, g_2')c_{Rao}\Big((g_1g_1', 1), (1, g_2g_2')\Big).$$

Maintenant considérons $c_{Rao}|_{Sp(W_1)\times Sp(W_1)}$; i.e prenons $g_1 = g_2, g_1' = g_2'$. Nous obtenons

$$c_{Rao}\Big((g_1, g_1), (g_1', g_1')\Big) = c_{Rao}\Big((g_1g_1', 1), (1, g_1g_1')\Big)c_{Rao}^{-1}\Big((g_1, 1), (1, g_1)\Big)c_{Rao}^{-1}\Big((g_1', 1), (1, g_1')\Big),$$

qui est un cobord, donc on trouve le résultat. □

Corollaire 1.20. *Le résultat dans le lemme précédent est aussi vrai si on remplace le groupe métaplectique* $\widehat{Sp}$ *par* $\overline{Sp}, \widetilde{Sp}$*.*

Démonstration. On sait que la classe du 2-cocycle de Rao aussi détermine les groupes $\overline{Sp}, \widetilde{Sp}$, d'où le résultat. □

Soit (H_1, H_2) une paire réductive duale de $Sp(W)$. On s'intèresse aux images réciproques explicites de H_1 et H_2 dans $Mp(W)$, Par le Théorème 1.16, le Corollaire1.17, le Lemme 1.19, le Corollaire 1.20, on se ramère à traiter les paires réductives duales irréductibles.

Supposons que l'espace $(W, \langle,\rangle_W)$ est déduit de $(W_E, \langle,\rangle_{W_E})$ et $0 \neq t_{E/F} \in \mathrm{Hom}_F(E, F)$ par restriction des scalaires où E/F est une extension finie. Soit X un lagrangien de W_E qui est aussi un lagrangien de W. Si c_E est le cocycle de $Sp(W_E)$ associé à $(X, \psi \circ t_{E/F})$, c celui de $Sp(W)$ associé à (X, ψ) pour les groupes $\overline{Sp}(W)$ et $\widetilde{Sp}(W)$, soit $c_{Rao,E}$(resp. c_{Rao}) le cocycle de Rao de $Sp(W_E)$ (resp. $Sp(W)$).

Lemme 1.21. *On peut regarder* $Sp(W_E)$ *comme un sous-groupe de* $Sp(W)$*, alors* $c|_{Sp(W_E)\times Sp(W_E)}$ *resp.* $c_{Rao}|_{Sp(W_E)\times Sp(W_E)}$ *définit un 2-cocycle pour le groupe* $\overline{Sp}(W)$ *resp.* $\widehat{Sp}(W)$*, i.e. pour les classes, on a* $[c|_{Sp(W_E)\times Sp(W_E)}] = [c_E]$ *et* $[c_{Rao}|_{Sp(W_E)\times Sp(W_E)}] = [c_{Rao,E}]$*.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 1.10. □

Si (H_1, H_2) une paire réductive duale irréductible de $Sp(W)$ qui est déduit de $Sp(W_E)$ et $t_{E/F}$ par restriction des scalaires. En Utilisant le Lemme1.21, nous trouvons $[c|_{H_i\times H_i}] = [c_E|_{H_i\times H_i}]$ et $[c_{Rao}|_{H_i\times H_i}] = [c_{Rao,E}|_{H_i\times H_i}]$. Donc $\widehat{H_i}$(resp. $\overline{H_i}$, $\widetilde{H_i}$) est scindé comme un sous-groupe de $\widehat{Sp}(W)$(resp. $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$) ssi il est scindé comme un sous-groupe de $\widehat{Sp}(W_E)$(resp. $\overline{Sp}(W_E)$, $\widetilde{Sp}(W_E)$). On réduit le problème aux cas dans le Théorème 1.7.

Pour les groupes $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$ (cf. [MVW], Page 51).

Plusieurs points utilisés

(1) Soient Y un lagrangien de W, $P = P(Y)$ le sous-groupe parabolique minimal, comme le cocycle $c|_{P\times P} = 1$, on sait que la restriction de l'extension métaplectique de $Sp(W)$ à P est scindée.

(2) Soient D un corps de centre F' contenant F, $W \simeq W_1 \otimes_D W_2$ une décomposition en produit tensoriel hermitien, et $(U(W_1), U(W_2))$ la paire duale de $Sp(W)$. Considèrons une décomposition orthogonale $W_2 = mH \oplus W_2^0$ où H est le plan hyperbolique, et W_2^0 est un espace anisotrope, Notant $W^0 \simeq W_1 \otimes_D W_2^0$, on sait que la paire $(U(W_1), U(W_2^0))$ est aussi une paire duale de $Sp(W^0)$. De plus, $\widetilde{U}(W)$(resp. $\overline{U}(W)$) est scindé si et seulement si l'image inverse de $U(W)$ dans $\widetilde{Sp}(W^0)$ (resp. $\overline{Sp}(W^0)$) est scindée.

(3) Soit $W = W_1 \otimes_D W_2$ une décomposition en produit tensoriel hermitien. Supposons que W_2 est anisotrope et $(U(W_1), U(W_2))$ est une paire duale dans $Sp(W)$. Si $\dim_D(W_2)$ est paire, alors on obtient que $\widetilde{U}(W_1)$(resp. $\overline{U}(W_1)$) est scindé sur $U(W_1)$ par le Lemme 1.19.

(4) Soit $W = W_1 \otimes_D W_2$ une décomposition en produit tensoriel hermitien. L'espace W_1 peut se plonge dans l'espace hyperbolique $W_1 \oplus (-W_1)$, donc le groupe $U(W_1)$ se plonge dans $U(W_1 \oplus (-W_1))$ en opérant par l'identité sur le second facteur et par le Lemme 1.18, ce plongement p conserve le cocycle de Rao, de sorte que si le groupe $\widetilde{U}(W_1 \oplus -W_1)$(resp. $\overline{U}(W_1 \oplus -W_1)$) est scindé sur $U(W_1 \oplus -W_1)$, alors $\widetilde{U}(W_1)$(resp. $\widetilde{U}(W_1)$) est aussi scindé sur $U(W_1)$.

Passons en revue les différents types, en reprenant les notations du Théorème 1.7.

Type 1 $(GL_D(X_1), GL_D(X_2))$

Par le point (1) ci-dessus, on sait que $\overline{GL_D}(X_1)$, $\overline{GL_D}(X_2)$(resp. $\widetilde{GL_D}(X_1)$, $\widetilde{GL_D}(X_2)$) sont scindés.

Type 2 (i) $(O(W_1), Sp(W_2))$

Par le point (1) ci-dessus, $\widetilde{O}(W_1)$, $\overline{O}(W_1)$ sont scindés sur $O(W_1)$.
Par les points (1)—(3) ci-dessus, $\overline{Sp}(W_2)$, $\widetilde{Sp}(W_2)$ sont scindés si $\dim_F(W_2)$ est paire. Si $\dim_F W_2$ est impaire, on sait que la classe $[c]$ de $\widetilde{Sp}(W)$ restreignant à $Sp(W_2)$ est non triviale [cf. [MVW], Page 51] et d'ordre 2, donc en ce cas, l'image inverse de $Sp(W_2)$ dans $\widetilde{Sp}(W)$(resp. $\overline{Sp}(W)$) est le groupe métaplectique $\widetilde{Sp}(W_2)$(resp. $\overline{Sp}(W_2)$) sur $Sp(W_2)$.

Type 2 (ii) $(H_1, H_2) = (U(W_1), U(W_2))$

où $W = W_1 \otimes_D W_2$, D est une extension quadratique de F ou un corps de quaternions de centre F, τ est l'involution canonique.

Par les points (1)—(3) ci-dessus, si $\dim_D(W_2)$ est paire, alors $\widetilde{H_1}$, $\overline{H_1}$ sont scindés sur H_1. Si $\dim_D(W_2)$ est impaire, on se ramère au cas : $\dim_D(W_2) = 1$.

(1). W_1 est anti-hermitien sur (D, τ).

(1)(a). W_1 est hyperbolique anti-hermitien sur D. En ce cas, W_2 est un espace hermitien sur D de dimension 1. Par la classification des espaces hermitiens sur un corps local, on sait que $W_2 \simeq (1)D, (f)D$ si $D = E$ une extension quadratique sur F avec $f \in F^\times$ qui n'est pas norme d'un élément de E ; $W_2 \simeq (1)D$ si D est l'unique corps de quaternions sur F. Comme $f \in F^\times$, on peut supposer que $W_2 \simeq (1)D$ et $W = (W_1, \tau_{D/F}(\langle,\rangle))$, où τ est la trace réduite.

(1)(a)(α). $\dim_D(W_1) = 2$, W_1 est le plan hyperbolique anti-hermitien à droite sur D, muni de base hyperbolique $\{e_1, e_1^\star\}$. Si $w_1 = e_1a_1 + e_1^\star a_2 \in W_1$, $w_2 = e_1b_1 + e_1^\star b_2 \in W_1$, on a

$$\langle w_1, w_2\rangle_1 = \tau(a_1)b_2 - \tau(a_2)b_1 = \tau((a_1, a_2))\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(D)$ agit sur $w = e_1x + e_1^\star y$ par $w \cdot g = (e_1, e_1^\star)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $g \in U(W_1)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \tau(a) & \tau(c) \\ \tau(b) & \tau(d) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} \tau(a)c = \tau(c)a \\ \tau(b)d = \tau(d)b \\ \tau(d)a - \tau(b)c = 1 \end{cases}$$

Soient P le stabilisateur de e_1D dans $U(W_1)$, N le radical unipotent , M un Levi de P ; alors

$$N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in F\right\}, M = \left\{\begin{pmatrix} \tau(d)^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} | d \in D^\times\right\}.$$

Comme $N \subset SL_2(F)$, ainsi que

$$U(W_1) = P \cdot SL_2(F) = M \cdot SL_2(F) \simeq D^\times SL_2(F)$$

et on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow SL_2(F) \longrightarrow U(W_1) \longrightarrow M/F^\times \simeq D^\times/F^\times \longrightarrow 1.$$

(1)(a) (α) (i). Supposons ici que $D = E/F$ est une extension quadratique, et que $W = (W_{1/E}, \mathrm{Tr}_{E/F}(\langle, \rangle))$. Soient $W_1 = Ee_1 \oplus Ee_1^\star$ avec $\langle e_1, e_1^\star\rangle_1 = \frac{1}{2}, \langle e_1^\star, e_1\rangle_1 = -\frac{1}{2}$ et $E = F(i)$ avec $i^2 = -\alpha \in F^\times$(donc $\mathrm{Tr}_{E/F}(i) = 0$). Par définition, $\{e_1, e_1^\star; -e_1i/\alpha, e_1^\star i\}$ forme une base symplectique de l'espace W sur F et l'application $SL_2(F) \longrightarrow U(W_1) \hookrightarrow Sp(W)$ se factorise par $SL_2(F) \times SL_2(F) \longrightarrow Sp(W)$. Comme $(-e_1i/\alpha, e_1^\star i) = (e_1, e_1^\star)\begin{pmatrix} -i/\alpha & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, par définition, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(-e_1i/\alpha, e_1^\star i) := (e_1, e_1^\star)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i/\alpha & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= (-e_1i/\alpha, e_1^\star i)\begin{pmatrix} -\alpha/i & 0 \\ 0 & i^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i/\alpha & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = (-e_1i/\alpha, e_1^\star i)\begin{pmatrix} a & -\alpha b \\ -c/\alpha & d \end{pmatrix}.$$

Donc le morphisme $SL_2(F) \longrightarrow SL_2(F) \times SL_2(F)$ est défini par $s \longmapsto (s, s^{-\alpha^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^{-1} \end{pmatrix} s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix})$. Par la démonstration du Lemme 1.19, on sait que

$$c_{Rao}\Big((s_1, s_1^{-\alpha^{-1}}), (s_2, s_2^{-\alpha^{-1}})\Big) = c_{Rao}\Big((s_1s_2, 1), (1, s_1^{-\alpha^{-1}} s_2^{-\alpha^{-1}})\Big)$$

$$c_{Rao}^{-1}\Big((s_1, 1), (1, s_1^{-\alpha^{-1}})\Big)c_{Rao}^{-1}\Big((s_2, 1), (1, s_2^{-\alpha^{-1}})\Big)c_{Rao}(s_1, s_2)^{-1}c_{Rao}\Big(s_1^{-\alpha^{-1}}, s_2^{-\alpha^{-1}}\Big)$$

$$= [c_{Rao}\Big((s_1s_2, 1), (1, s_1^{-\alpha^{-1}} s_2^{-\alpha^{-1}})\Big)\nu(s_1s_2, -\alpha^{-1})][c_{Rao}\Big((s_1, 1), (1, s_1^{-\alpha^{-1}})\Big)\nu(s_1, -\alpha^{-1})]$$

$$[c_{Rao}\Big((s_2, 1), (1, s_2^{-\alpha^{-1}})\Big)\nu(s_2, -\alpha^{-1})] = \delta(\mu),$$

où $\mu(s) = c_{Rao}\Big((s, 1), (1, s^{-\alpha^{-1}})\Big)\nu(s, -\alpha^{-1})$.

Si $c = 0$, $\mu(s) = (d, d)_F(d, -\alpha^{-1})_F = (d, \alpha)_F$. En particulier $\mu(a) = (a, \alpha)_F$ pour $F^\times \hookrightarrow SL_2(F); a \longmapsto \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Si $c \neq 0$, $g_1 = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^{-\alpha^{-1}} \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-\alpha^{-1}} \end{pmatrix}$; $x(g_1) = cF^{\times 2}$, $|s_1| = 1$; $x(g_2) = -c/\alpha F^{\times 2}$, $|s_2| = 1$;

$x(g_3) = -\alpha F^{\times 2}$, $|s_3| = 2$; Prenons $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} | x, y \in F \right\} = X_1 \oplus X_2$ avec $X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | x \in F \right\}$, $X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} | y \in F \right\}$ et $q(X, g_1^{-1}(X), g_2(X)) = q(X_1 \oplus X_2, s(X_1) \oplus X_2, X_1 \oplus s^{-\alpha^{-1}}(X_2)) = q(X_1, s(X_1), X_1) \oplus q(X_2, X_2, s^{-\alpha^{-1}}(X_2)) = 0$, donc $l = 0$, $t = \frac{1}{2}(|s_1| + |s_2| - |s_3| - l) = 0$. Rappelant la formule explicite pour le cocycle de Rao, on obtient

$$\begin{aligned} c_{Rao}(g_1, g_2) &= (x(g_1), x(g_2))_F(-x(g_1)x(g_2), x(g_1g_2))_F((-1)^t, \det(q))_F(-1,-1)_F^{\frac{t(t-1)}{2}} \epsilon(q) \\ &= (c, -c/\alpha)_F = (c, \alpha)_F. \end{aligned}$$

Donc

$$\mu(s) = c_{Rao}(g_1, g_2)\nu(s, -\alpha^{-1})_F = (c, \alpha)_F.$$

En suite, considérons $M \simeq D^\times = E^\times$ qui est dans le groupe parabolique $P = P(Ee_1)$. Nous trouvons que

$$c_{Rao}|_{E^\times \times E^\times} = \delta(\nu) \text{ un cobord pour une application } \nu : E^\times \longrightarrow \mu_8.$$

Par le Théorème 1.15, comme $c_{Rao}|_{E^\times\times E^\times} = 1$, on peut prendre $\nu_1(g) = \beta(g)^{-1} = \gamma(x(g), \psi)\gamma(\psi)^{-|S|}$ tel que $c|_{E^\times\times E^\times} = \delta(\nu_1)$. En particulier, pour $g = a \in F^\times$, $\nu_1(a) = \gamma(x(g), \psi) = 1$. On définit un caractère

$$\varphi_\alpha(a) = (a, \alpha) \text{ pour } a \in F^\times,$$

d'où un isomorphisme de $F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ sur $\{\pm 1\}$. Soit $E_1 = E(i_1)$ une extension quadratique séparable de E, on pose

$$\chi : E^\times \longrightarrow \{\pm 1\}; e \longmapsto (e, \mathrm{N}_{E_1/E}(i_1)),$$

donc cela définit un isomorphisme de $E^\times/\mathrm{N}_{E_1/E}(E_1^\times)$ sur $\{\pm 1\}$, et $\chi|_{F^\times} = \varphi_\alpha$. Modéfions l'application ν_1 par $\nu : E^\times \longrightarrow \mu_8; e \longmapsto \nu_1(e)\chi(e)$. On trouve

$$c_{Rao}|_{E^\times\times E^\times} = \delta(\nu) \text{ et } \nu|_{F^\times} = \mu|_{F^\times}.$$

Soient $g_1 = e_1 s_1, g_2 = e_2 s_2 \in U(W_1)$, on a

$$\begin{aligned} c_{Rao}(e_1s_1, e_2s_2) &= (x(e_1), x(s_1)x(s_1e_2s_2))_F c_{Rao}(s_1, e_2s_2) \\ &= (x(e_1), x(s_1)x(e_2^{-1}s_1e_2s_2)x(e_2))_F c_{Rao}(s_1e_2, s_2)(x(e_2), -x(s_1e_2)x(s_2))_F \\ &= c_{Rao}\Big(e_2^{-1}s_1e_2, s_2\Big)(x(e_2), x(e_2^{-1}s_1e_2)x(e_2^{-1}s_1e_2s_2))_F(x(e_1), x(s_1)x(e_2^{-1}s_1e_2s_2)x(e_2))_F(x(e_2), -x(s_1e_2)x(s_2))_F \\ &= c_{Rao}\Big(e_2^{-1}s_1e_2, s_2\Big)(x(e_1), x(e_2))_F(x(e_1), x(s_1))_F(x(e_2), x(s_2))_F(x(e_1e_2), x(e_2^{-1}s_1e_2s_2))_F(x(e_2), -x(s_1e_2)x(e_2^{-1}s_1e_2))_F \\ &= \mu(e_2^{-1}s_1e_2s_2)\mu(e_2^{-1}s_1e_2)^{-1}\mu(s_2)^{-1}\nu(e_1e_2)\nu(e_1)^{-1}\nu(e_2)^{-1}(x(e_1), x(s_1))_F(x(e_2), x(s_2))_F \\ &\quad (x(e_1e_2), x(e_2^{-1}s_1e_2s_2))_F. \qquad (\star) \end{aligned}$$

D'abord, on définit une application

$$a : U(W_1) \longrightarrow \{\pm 1\}; es \longmapsto (x(e), x(s))_F.$$

Comme $\dim_F W_1 = 4$, donc $x|_{F^\times} = F^{\times 2}$, ceci sera bien défini. D'ailleurs, on définit une autre application

$$b : U(W_1) \longrightarrow \mu_8; es \longmapsto \mu(s)\nu(e).$$

Cette application est bien définie, parce que : si $e_1s_1 = e_2s_2$, on obtient $e_1^{-1}e_2 = s_1s_2^{-1} = k \in F^\times$, donc

$$\mu(s_2)\nu(e_2) = \mu(k^{-1}s_1)\nu(ke_1) \overset{\text{rentrons à la formule explicite}}{=} \mu(k^{-1})\mu(s_1)\nu(k)\nu(e_1) = \mu(s_1)\nu(e_1).$$

De plus

$$\mu(e_2^{-1}s_1e_2)^{-1}\mu(s_2)^{-1}\nu(e_1)^{-1}\nu(e_2)^{-1} = b(s_1e_2)^{-1}b(s_2e_1)^{-1} = \mu(s_1)^{-1}\mu(s_2)^{-1}\nu(e_2)^{-1}\nu(e_1)^{-1} = b(s_1e_1)^{-1}b(s_2e_2)^{-1}.$$

Revenant à l'équalité ($\star$), nous trouvons

$$\begin{aligned} c_{Rao}(e_1s_1, e_2s_2) &= \mu(e_2^{-1}s_1e_2s_2)\nu(e_1e_2)\mu(e_2^{-1}s_1e_2)^{-1}\mu(s_2)^{-1}\nu(e_1)^{-1}\nu(e_2)^{-1}a(e_1s_1e_2s_2)a(e_1s_1)^{-1}a(e_2s_2)^{-1} \\ &= b(e_1s_1e_2s_2)b(e_1s_1)^{-1}b(e_2s_2)^{-1}a(e_1s_1e_2s_2)a(e_1s_1)^{-1}a(e_2s_2)^{-1}, \end{aligned}$$

i.e. $c_{Rao}|_{U(W_1)\times U(W_1)} = \delta(ab)$ un cobord, donc $\overline{U}(W_1)$, $\widetilde{U}(W_1)$ sont scindés sur $U(W_1)$.

(1)(a)(α) (ii) Considèrons maintenant le cas où D est un corps de quaternions de centre F. On peut choisir une base $1, i, j, ji$ vérifiant

$$i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, ji = -ij = k.$$

Posons $E = F(i)$; c'est une extension séparable de F de degré 2 avec la conjugaison $\overline{a+bi} = a-bi$. La conjugaison, la trace réduite et la norme réduite se décrivent de la façon suivante :
Si $d = x + yi + zj + tk$, alors $\overline{d} = x - yi - zj - tk$, $\mathrm{Tr}_{D/F}(d) = 2x$, $\mathrm{N}_{D/F}(d) = x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2 - \alpha\beta t^2$. Rappelons que W_1 est le plan anti-hermitien à droite sur D, muni de la base hyperbolique $\{e_1, e_1^\star\}$. Comme $D = E + jE$, on a

$$W_1 = e_1E + e_1jE + e_1^\star E + e_1^\star jE, \text{ et } W_1 \text{ est donc}$$

un espace à droite sur E de dimension 4. D'autre part $\mathrm{Tr}_{D/F}(\langle,\rangle) = \mathrm{Tr}_{E/F}(\mathrm{Tr}_{D/E}(\langle,\rangle))$, où $\mathrm{Tr}_{D/E}(d = a + jb) := 2a$ pour a, b dans E et $\mathrm{Tr}_{D/E}(\langle,\rangle)$ une forme anti-hermitienne, donc la paire (H_1, H_2) est déduite de $(W_{1_{/E}}, \mathrm{Tr}_{D/E}(\langle,\rangle)$ et $\mathrm{Tr}_{E/F}$ par restriction des scalaires. Donc on se ramène au cas $(1)(a)(\beta)(i)$ dans la suite.

(1)(a)(β). $\dim_D(W_1) = 2n$, pour un nombre naturel n.

(1)(a)(β)(i) $D = E/F$ une extension quadratique. Par un théorème général de Prasad et Ragunathan [cf. [PR] Theorem 9.5], on sait que $\widetilde{SU}(W_1)$, $\overline{SU}(W_1)$ sont scindés au-dessus $SU(W_1)$. De plus, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow SU(W_1) \longrightarrow U(W_1) \longrightarrow E^1 \longrightarrow 1,$$

où E^1 est le noyau de la norme $\mathrm{N}_{E/F} : E^\times \longrightarrow F^\times$, comme $H^1(SU(W_1), \mu_8) = H^1(SU(W_1), \mathbb{C}^\times) = 0$, on déduit la suite d'Hochschid-Serre, les suites exactes

$$1 \longrightarrow H^2(E^1, \mu_8) \longrightarrow H^2(U(W_1), \mu_8) \longrightarrow H^2(SU(W_1), \mu_8)$$

et

$$1 \longrightarrow H^2(E^1, \mathbb{C}^\times) \longrightarrow H^2(U(W_1), \mathbb{C}^\times) \longrightarrow H^2(SU(W_1), \mathbb{C}^\times).$$

Si c est le 2-cocycle de $\overline{Sp}(W)$, qui restreint à $U(W_1)$, notée c_U, sa restriction à $SU(W_1)$ étant triviale, il existe un 2-cocycle χ sur E^1 tel que

$$c_U(g, g') = \chi(\det(g), \det(g')) \text{ modulo un cobord .}$$

Comme W_1 est hyperbolique anti-hermitien, on peut prendre un plan hyperbolique H dans W_1. Comme la restriction de c_U à $U(H)$ est triviale par (α), ceci implique que χ étant trivial. Donc c_U l'est aussi, en ce cas, nous avons montré que $\overline{U}(W_1)$, $\widetilde{U}(W_1)$ sont scindés au-dessus $U(W_1)$.

(1)(a)(β)(ii). Si D est un corps de quaternions de centre F, on se ramème au cas (1)(a)(β)(i) par le même argument que dans le cas (1) (a)(α)(ii) ci-dessus. Donc en ce cas, $\overline{U}(W_1)$, $\widetilde{U}(W_1)$ sont scindés au-dessus $U(W_1)$.

(1)(b). En cas général, si W_1 est anti-hermitien sur (D, τ). Par le point (4), nous pouvons remplace W_1 par $W_1 \oplus (-W_1)$, qui vient à (4) lié haute. Ainsi $\overline{U}(W_1)$ et $\widetilde{U}(W_1)$ sont scindés au-dessus $U(W_1)$.

(2). W_1 est hermitien sur (D, τ).

(2)(i). $D = E$ une extension quadratique de F, le résultat a montré dans [[MVW], Page 2]. En multipliant par une constante, on obtient une bijection entre les espaces hermitiens et les espaces anti-hermitiens, donc en ce cas, $\overline{U}(W_1)$, $\widetilde{U}(W_1)$ sont scindés au-dessus $U(W_1)$.

(2)(ii). $D =$ un corps de quaternions du centre F [ceci vient de [MVW], Page 53].
On choisit $W_2 = D(i)$ où $i \in D$ est trace nulle, soient $F' = F(i)$, $j \in D$ tels que $j^2 \in F, ji = -ij$. Alors $D = F' + jF'$. On note par $r : D \longrightarrow F'$ la projection sur le premier facteur. D'abord, $\mathrm{Tr}_{D/F}(d = a+bi+j(c+di)) = 2a = \mathrm{Tr}_{F'/F}(r(d))$. Considèrons l'espace W_1, muni de la forme $r(i\langle,\rangle_1)$. Prenons deux éléments $w_1, w_1' \in W_1$, $r(i\langle w_1, w_1'\rangle_1) = r(\overline{i\langle w_1, w_1'\rangle_1}) = -r(\overline{i\langle w_1, w_1'\rangle_1}) = -\overline{r(i\langle w_1, w_1'\rangle_1)}$. Donc on a montré que l'espace $(W_1, r(i\langle,\rangle_1))$ est un espace anti-hermitien sur F' que l'on notera W'. On a $U(W_1) \subset U(W')$. L'espace W est l'espace symplectique

sur F, d'espace vectoriel W_1, de produit $\mathrm{Tr}_{D/F}(i\langle,\rangle_1) = \mathrm{Tr}_{F'/F}(r(i\langle,\rangle_1))$. On a montré que $\widetilde{U}(W')$ est scindé sur $U(W')$, on en déduit que $\widetilde{U}(W_1)$ est scindé sur $U(W_1)$.

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats, déjà énoncé dans [MVW] et dont nous venons de compléter les démonstrations.

Théorème 1.22. *Soient $(W,\langle,\rangle)$ un espace symplectique sur un corps non archimédien F de caractéristique impaire, (H_1,H_2) une paire duale irréductible de $Sp(W)$, $\overline{H_i}$, $\widetilde{H_i}$ leur images réciproques dans $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$, alors $\overline{H_1}$, $\widetilde{H_1}$ sont scindés au-dessus H_1, sauf si $W \simeq W_1 \otimes_{F'} W_2$, $H_1 = Sp(W_1)$ où W_1 est un espace symplectique sur une extension F' de F et $\dim_{F'} W_2$ impaire.*

1.4 Le groupe métaplectique de similitude $GMp^{[B]}(W)$

Rappelons les définitions des groupes $\widehat{Sp}(W)$, $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$ dans la sous-sous-section 1.2.

1.4.1 La constitution de Barthel

Théorème 1.23 (L.Barthel)**.** *Il existe une et une seule extension de $GSp(W)$ par $\{\pm 1\}$ (resp. μ_8, $\mathbb{C}^\times$) qui soit produit semi-direct[3] de $\widehat{Sp}(W)$ (resp. $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$) avec $F^\times$. On note le groupe correspondant par $\widehat{GSp}^{[B]}(W)$ (resp. $\overline{GSp}^{[B]}(W)$, $\widetilde{GSp}^{[B]}(W)$).*

Démonstration. C'est le Théorème de L.Barthel [cf. [Bar2] Théorème 1.A]. □

De façon analogue aux groupes métaplectiques, on a les relations : $\overline{GSp}^{[B]}(W) \simeq \widehat{GSp}^{[B]}(W) \times_{\{\pm1\}} \mu_8$, $\widetilde{GSp}^{[B]}(W) \simeq \widehat{GSp}^{[B]}(W) \times_{\{\pm1\}} \mathbb{C}^\times$ et $\widehat{GSp}^{[B]}(W)$ est un l-groupe dénombrable à l'infini.

Soient $W = X \oplus X^\star$ une polarisation complète, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GSp(W)$ avec $a \in \mathrm{End}_F(X)$, $b \in \mathrm{Hom}_F(X^\star, X)$, $c \in \mathrm{Hom}_F(X, X^\star)$, $d \in \mathrm{End}_F(X^\star)$. On note $\lambda(g)$ le rapport de similitude de g. On définit un groupe $Sp(W) \rtimes F^\times$ sous la loi :

$$(g_1, y_1)(g_2, y_2) := (g_1 g_2^{y_1}, y_1 y_2),$$

où $g_2^{y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} g_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y_1^{-1} \end{pmatrix}$. Pour le groupe $GSp(W)$. On a donc un isomorphisme $Sp(W) \rtimes F^\times \simeq GSp(W); (g, y) \longmapsto g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. D'après le Théorème 1.23, nous pouvons représenter les éléments du groupe métaplectique $GMp^{[B]}(W)$(i,e $\widehat{GSp}^{[B]}(W)$, $\overline{GSp}^{[B]}(W)$, $\widetilde{GSp}^{[B]}(W)$) sous deux formes, que nous expliquons successivement.

Regardons d'abord le groupe $GMp^{[B]}(W)$ comme le produit semidirect de $F^\times$ avec le groupe métaplectique $Mp^{[B]}(W)$(i,e $\widehat{Sp}(W)$, $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$). On obtient la première forme, c'est-à-dire que un élément $h^\star$(i,e $\widehat{h}$, $\overline{h}$, $\widetilde{h}$) de $GMp^{[B]}(W)$ peut s'écrire sous la formule : $h^\star = (g^\star, y) = (g, \epsilon_{g^\star}; y)$ avec $g^\star \in Mp^{[B]}(W)$, $g \in Sp(W)$, $y \in F^\times$ et la loi de ce groupe est définie suivante

$$h_1^\star \cdot h_2^\star = (g_1^\star, y_1)(g_2^\star, y_2) = (g_1^\star g_2^{\star y_1}, y_1 y_2),$$

où $g_2^{\star y_1}$ est défini par l'action de y_1 sur l'élément $g_2^\star$ de $Mp^{[B]}(W)$. Comme cette action est comparable avec celle de $F^\times$ sur $Sp(W)$, pour $h^\star = (g, \epsilon)$, $y \in F^\times$, on a $h^{\star y} := (g^y, \nu(g, y)\epsilon)$ par une fonction ν de $Sp(W) \times F^\times$ dans le groupe abélien $\mathbb{A}$ (i.e $\{\pm 1\}$, μ_8, $\mathbb{C}^\times$) associé à $Mp^{[B]}(W)$. On sait que l'action de y est un automorphisme de $Mp^{[B]}(W)$. Donc

$$(g_1, \epsilon_1)^y (g_2, \epsilon_2)^y = ((g_1, \epsilon_1)(g_2, \epsilon_2))^y,$$

i.e

$$(g_1^y, \nu(g_1, y)\epsilon_1) \cdot (g_2^y, \nu(g_2, y)\epsilon_2) = (g_1^y g_2^y, c(g_1, g_2)\epsilon_1\epsilon_2 \nu(g_1 g_2, y)),$$

où $c(g_1, g_2)$ est un cocycle associé à $Mp^{[B]}(W)$. Cela implique que

$$\nu(g_1 g_2, y) = \nu(g_1, y)\nu(g_2, y) c(g_1^y, g_2^y) c(g_1, g_2)^{-1}. \qquad (\star)$$

3. le produit semi-direct sera expliqué dans la suite.

Réciprociquement, si ν satisfait à la condition ($\star$), on vérifie que l'action de y sur $Mp^{[B]}(W)$ définit un automorphisme. D'après l'unicité du relèvement de l'action de y sur $Sp(W)$ à une action sur $Mp^{[B]}(W)$. La fonction ν est déterminée uniquement par la relation ($\star$).

D'autre part, si on regarde $GMp^{[B]}(W)$ comme l'extension de $GSp(W)$ par un groupe abélien $\mathbb{A}$ (i,e $\{\pm 1\}$, μ_8, $\mathbb{C}^\times$), nous pouvons écrire l'élément $h'^\star$ de $GMp^{[B]}(W)$ sous la forme

$$h'^\star = (h, \epsilon) = (g, y; \epsilon)$$

avec $h' = g\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix} \in GSp(W)$, $g \in Sp(W)$, $y \in F^\times$, $\epsilon \in \mathbb{A}$ (i,e $\{\pm 1\}$, μ_8 ou bien $\mathbb{C}^\times$). Alors

$$h_1'^\star h_2'^\star = (h_1, \epsilon_1)(h_2, \epsilon_2) = (h_1h_2, \epsilon_1\epsilon_2 C(h_1, h_2))$$

pour un cocycle $C : GSp(W) \times GSp(W) \longrightarrow \mathbb{A}$. Écrivons $h_1 = (g_1, y_1), h_2 = (g_2, y_2)$ avec $g_i \in Sp(W)$, $y_i \in F^\times$ satisfaisant à $h_i = g_i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y_i\end{pmatrix}$

Composant les deux formes de éléments du groupe $GMp^{[B]}(W)$ en identifiant $h^\star = (g, \epsilon; y)$ à $h'^\star = (g, y; \epsilon)$, on a

$$\begin{aligned} h_1^\star h_2^\star &= (g_1, \epsilon_1; y_1)(g_2, \epsilon_2; y_2) = ((g_1, \epsilon_1)(g_2, \epsilon_2)^{y_1}, y_1y_2) \\ &= ((g_1, \epsilon_1)(g_2^{y_1}, \nu(g_2, y_1)\epsilon_2); y_1y_2) = (g_1g_2^{y_1}, c(g_1, g_2^{y_1})\nu(g_2, y_1)\epsilon_1\epsilon_2; y_1y_2) \end{aligned}$$

et

$$h_1'^\star h_2'^\star = (g_1, y_1; \epsilon_1)(g_2, y_2; \epsilon_2) = \Big(g_1g_2^{y_1}, y_1y_2; C((g_1, y_1), (g_2, y_2))\epsilon_1\epsilon_2\Big).$$

Donc on obtient la relation

$$C\Big((g_1, y_1), (g_2, y_2)\Big) = c(g_1, g_2^{y_1})\nu(g_2, y_1).$$

Pour obtenir le cocycle $C : GSp(W) \times GSp(W) \longrightarrow \mathbb{A}$, il reste à déterminier l'application $\nu : Sp(W) \times F^\times \longrightarrow \mathbb{A}$.

Calcul de $\nu(g, y)$: Pour le groupe abélien $\mathbb{A} = \mu_8$, ou $\mathbb{C}^\times$, Barthel a fait des calculs explicites dans [Bar2]. Nous citons ses résultats ci-dessous. Rappelons la décomposition de Bruhat de $Sp(W)$ et le cocycle c du groupe $\overline{Sp}(W)$ ou $\widetilde{Sp}(W)$ dans la sous-sous-section 1.2.

Proposition 1.24 (L.Barthel). *(1) Soient $y \in F^\times$ et un élément $g = p_1\omega_S p_2$ de $Sp(W)$ avec $p_i = \begin{pmatrix}a_i & b_i\\ 0 & a_i^{\star -1}\end{pmatrix} \in P = P(X)$, $S \subset \{1, \cdots, n\}$. Alors*

$$\nu(g, y) = (x(g), y)_F(\frac{\gamma(-y)}{\gamma(-1)})^{|S|} = (x(g), y)_F\gamma(y, \psi)^{|S|}(-1, y)_F^{|S|} \cdots {}^{4}$$

où $\gamma(y)$ est l'invariant de Weil attaché à la forme quadratique $x \longmapsto yx^2$.

(2) $C((g, y)(g', y')) = c(g, g'^{y})(x(g), y)_F\gamma(y, \psi)^{|S'|}(-1, y)_F^{|S'|}$ où $g' = \begin{pmatrix}a_1' & b_1'\\ 0 & a_1'^{\star -1}\end{pmatrix}\omega_{S'}\begin{pmatrix}a_2' & b_2'\\ 0 & a_2'^{\star -1}\end{pmatrix} \in Sp(W)$

Démonstration. Ceci découle de [[Bar2], Page 55]. □

Pour des applications dans la suite, il faut aussi déterminer l'application $\nu(g, y)$ pour le groupe $\mathbb{A} = \{\pm 1\}$. Composons le Théorème 1.15 et la relation ($\star$) ci-dessus. Nous trouvons

$$\nu(g_1g_2, y)\Big(\frac{\beta(g_1g_2)}{\beta((g_1g_2)^y)}\Big) = \nu(g_1, y)\Big(\frac{\beta(g_1)}{\beta(g^y)}\Big)\nu(g_2, y)\Big(\frac{\beta(g_2)}{\beta(g_2^y)}\Big)c_{Rao}(g_1^y, g_2^y)c_{Rao}(g_1, g_2)^{-1}.$$

Comme l'application $\nu_{Rao}(g, y)$ est déterminée uniquement par la relation ($\star$), on trouve

$$\nu_{Rao}(g, y) = \nu(g, y)\frac{\beta(g)}{\beta(g^y)}.$$

Supposons $g = p_1\omega_S p_2$ avec $p_i \in P = P(X)$. On a $g^y = p_1^y\omega_S^y p_2^y$. Par définition, on a

$$\omega_S^y(e_i) = -ye_1^\star \text{ et } \omega_S^y(e_i^\star) = y^{-1}e_i \text{ si } i \in S.$$

4. Ici, Rappelons la définition $\gamma(\psi(q)) = \gamma(\psi(q(g_1, g_2))) = \gamma(\psi(-q(X, g_1^{-1}(X), g_2(X))))$, la constante -1 vient de là.

$$\omega_S^y(e_i) = e_i \text{ et } \omega_S^y(e_i^\star) = e_i^\star \text{ sinon.}$$

Donc $\omega_S^y = p\omega_S$ avec $x(p) = y^{|S|} \mod F^{\times 2}$. C'est-à-dire que $x(g^y) = x(g)y^{|S|} \mod F^{\times 2}$.

$$\nu(g,y)\frac{\beta(g)}{\beta(g^y)} = (x(g),y)_F(\frac{\gamma(-y)}{\gamma(-1)})^{|S|}\Big(\frac{\gamma(x(g),\psi)^{-1}}{\gamma(x(g)y^{|S|},\psi)^{-1}}\Big)$$

$$= (x(g),y)_F\frac{\gamma(-y,\psi)}{\gamma(-1,\psi)}^{|S|}(x(g),y^{|S|})_F\gamma(y^{|S|},\psi)$$

$$= (x(g),y)_F(-1,y)_F^{|S|}\gamma(y,\psi)^{|S|}(x(g),y)_F^{|S|}\gamma(y,\psi)^{|S|}((-1),y)_F^{|S|(|S|-1)/2}$$

$$= (x(g),y)_F^{|S|+1}(-1,y)_F^{|S|}(-1,y)_F^{|S|}((-1),y)_F^{|S|(|S|-1)/2}$$

$$= (x(g),y)_F^{|S|+1}((-1),y)_F^{|S|(|S|-1)/2}$$

$$= (x(g)^{|S|+1}(-1)^{|S|(|S|-1)/2},y)_F$$

$$= \begin{cases} (x(g),y)_F & \text{si } |S| \equiv 0 \mod 4 \\ 1 & \text{si } |S| \equiv 1 \mod 4 \\ (-x(g),y)_F & \text{si } |S| \equiv 2 \mod 4 \\ (-1,y)_F & \text{si } |S| \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Nous avons trouvé les formules pour le cocycle de $\widehat{GSp}^{[B]}(W)$.

Proposition 1.25. *Soient $h = g\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}, h' = g'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y'\end{pmatrix}$ deux éléments de $GSp(W)$ avec $g, g' \in Sp(W)$, $y, y' \in F^\times$, alors*

$$C_{Rao}(h,h') := C_{Rao}((g,y),(g',y')) = c_{Rao}(g,g'^y)\nu(g',y),$$

où $\nu(g',y) = (x(g'),y)^{|S'|+1}((-1),y)_F^{|S'|(|S'|-1)/2}$ pour $g' = p_1'\omega_{S'}p_2'$.

Exemple 1.26. *Si $\dim_F W = 2$, $Sp(W) \simeq SL_2(F)$ et $GSp(W) \simeq GL_2(F)$. Prenons $s = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(F)$. On obtient les formules de Kubota :*

$$\nu(s,y) = \begin{cases} (a,y)_F = (d,y)_F & si\ c = 0 \\ 1 & si\ c \neq 0 \end{cases}.$$

Pour $g_i = \begin{pmatrix}a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix} \in GL_2(F)$, supposons $g_3 = g_1g_2 = \begin{pmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{pmatrix}$ et $g_i = s_i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t_i\end{pmatrix}$ avec $s_i \in SL_2(F)$, $t_i = \det(g_i)$. On a

$$C_{Rao}(g_1,g_2) = c_{Rao}(s_1,s_2^{t_1})_F\nu(s_2,t_1) = (x(s_1),x(s_2^{t_1}))_F(-x(s_1)x(s_2^{t_1}),x(s_1s_2^{t_1}))_F\nu(s_2,t_1)$$

$$= (x(s_1),x(s_2))_F(-x(s_1)x(s_2),x(s_3))_F(x(s_1),\det(g_1))_F^{|i_{s_2}|}(x(s_3),\det(g_1))_F^{|i_{s_2}|}(x(s_2)^{|i_{s_2}|+1}(-1)^{\frac{|i_{s_2}|(|i_{s_2}|-1)}{2}},\det(g_1))_F$$

$$= (x(s_1),x(s_2))_F(-x(s_1)x(s_2),x(s_3))_F(x(s_2),\det(g_1))_F(x(s_1)x(s_2)x(s_3),\det(g_1))_F^{|i_{s_2}|},$$

où $s_2 = p_2\omega_{i_{s_2}}p_2'$.

1.4.2 Le cas général

On notera par $\mathbb{I}$ un groupe abélien qui représente $\mathbb{C}^\times$ ou A un groupe abélien fini d'ordre n satisfaisant $2|n$ et $(n,p) = 1$. Les résultats dans le Théorème 1.8 étaient vrais si on remplace μ_8 par $\mathbb{I}$, donc il aussi détermine un groupe métaplectique, notée par $\widetilde{Sp}^{\mathbb{I}}(W)$.
On a la suite canonique

$$1 \longrightarrow Sp(W) \xrightarrow{i} GSp(W) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow 1.$$

Il en résulte que

$$\cdots \longrightarrow H^2(F^\times,\mathbb{I}) \xrightarrow{\lambda^2} G^2(GSp(W),\mathbb{I}) \xrightarrow{i^2} H^2(Sp(W),\mathbb{I}) \longrightarrow \cdots.$$

On note $[c_{Rao}]$ le 2-cocycle de Rao dans $H^2(Sp(W), \mathbb{I})$. Si on prend un autre élément $[c]$ dans $H^2(GSp(W), \mathbb{I})$ tel que $i^2([c]) = [c_{Rao}]$, il détermine un groupe de similitudes, notée par $\widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W)$, on peut trouver le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{I} & \longrightarrow & \widetilde{Sp}^{\mathbb{I}}(W) & \longrightarrow & Sp(W) & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{I} & \longrightarrow & \widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W) & \longrightarrow & GSp(W) & \longrightarrow & 1 \end{array}.$$

Par le lemme du serpent, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \widetilde{Sp}^{\mathbb{I}}(W) \longrightarrow \widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W) \xrightarrow{\overline{\lambda}} \Lambda_{\widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W)} = F'^{\times} \longrightarrow 1.$$

(1) Si $\mathbb{I} = \mathbb{C}^\times$, on notera $\widetilde{Sp}(W) := \widetilde{Sp}^{\mathbb{I}}(W)$ et $\widetilde{GSp}(W) := \widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W)$.
(2) Si $\mathbb{I} = \{\pm 1\}$, on notera $\widetilde{Sp}(W) := \widetilde{Sp}^{\mathbb{I}}(W)$ et $\widetilde{GSp}(W) := \widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W)$.
(3) Si $\mathbb{I} = \mu_8$, on notera $\overline{Sp}(W) := \widetilde{Sp}^{\mathbb{I}}(W)$ et $\overline{GSp}(W) := \widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W)$.
(4) Si $\mathbb{I} = A$ où A est un groupe abélien d'ordre n et $2|n, (n, p) = 1$, on notera $\widetilde{Sp}^{A}(W) := \widetilde{Sp}^{\mathbb{I}}(W)$ et $\widetilde{GSp}^{A}(W) := \widetilde{GSp}^{\mathbb{I}}(W)$.

1.5 Les représentations de Weil

Notre reférence dans cette sous-sous-section est [MVW]. Soit W un espace vectoriel de dimension $2n$ sur F, muni d'une forme symplectique non dégénérée $\langle , \rangle$. Le groupe d'Heisenberg associé à $(W, \langle , \rangle)$, est l'ensemble $W \times F$, muni de la topologie produit et de la loi de groupe

$$(w, t)(w', t') := (w + w', t + t' + \langle w, w' \rangle / 2).$$

Notons $\xi : F \longrightarrow H$ le monomorphisme $t \longmapsto (0, t)$. Nous fixons un caractère non trivial $\psi : F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.

Théorème 1.27 (Stone, Von Neumann)**.** *A isomorphisme près, il existe une et une seule représentation lisse irréductible de H, notée par ρ_ψ, telle que*

$$\rho_\psi \circ \xi(t) = \psi(t) \text{ pour tout } t \in F.$$

Démonstration. Ceci découle de [[MVW], Page 28-29]. □

Soit A un sous-groupe fermé de W, posons

$$A^\perp = \{w \in W, \text{ pour tout } a \in A, \psi(\langle w, a \rangle) = 1\}.$$

On note

$$\mathcal{A} = \{A | A \text{ un sous-groupe fermé de } W \text{ tel que } A = A^\perp\}.$$

Théorème 1.28 ([MVW])**.** *Pour chaque $A \in \mathcal{A}$, la représentation $c - \mathrm{Ind}_{A \times F^\times}^{H} 1 \cdot \psi$ réalise la représentation unique ρ_ψ de H, associée à ψ, dans le Théorème 1.27.*

Démonstration. Voir [[MVW], Page 28-29]. □

Soit (ρ_ψ, S) un modèle par ρ_ψ. On pose

$$\widetilde{Sp_\psi}(W) = \{(g, M_g) | g \in Sp(W); M_g \rho_\psi(h) M_g^{-1} = \rho_\psi(gh) \text{ pour tout } h \in H\},$$

qui est un sous groupe topologique de $Sp(W) \times GL(S)$. On a aussi une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \widetilde{Sp}_\psi(W) \xrightarrow{p_W} Sp(W) \longrightarrow 1$$

et il existe un unique isomorphisme

$$I : \widetilde{Sp}(W) \longrightarrow \widetilde{Sp}_\psi(W)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{Sp}(W) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "I", "\sim"'] & Sp(W) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] & \widetilde{Sp}_\psi(W) \arrow[r, "p_W"] & Sp(W) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

est commutatif. Le composé de l'isomorphisme I avec la projection $\widetilde{Sp}_\psi(W) \longrightarrow GL(S)$ donne une représentation du groupe métaplectique, qu'on appelle souvent **la représentation de Weil**, liée à ψ, qu'on note ω_ψ. Pour utiliser la théorie des représentations des groupes localement compacts totalement discontinus, nous considérons par la suite la représentation de Weil sur le groupe métaplectique $Mp(W)$ qui est égal à $\overline{Sp}(W)$ ou $\widehat{Sp}(W)$ sauf mention explicite.
La représentation de Weil vérifie les propriétés élémentaires ci-dessous[cf. [MVW] Page 35-36] :
(1) ω_ψ est une représentation lisse admissible.
(2) $\omega_\psi = \omega_\psi^+ \oplus \omega_\psi^-$, où $\omega_\psi^\mp \in \mathrm{Irr}(Mp(W))$.
(3) La contragrédiente de ω_ψ est ω_{ψ^-}.

Si on définit le groupe $H \rtimes \overline{Sp}(W)$ sous la loi :

$$((w_1,t_1),(g_1,\epsilon)) \cdot ((w_2,t_2),(g_2,\epsilon)) := ((w_1,t_1) + (g_1 w_2, t_2), (g_1,\epsilon_1) \cdot (g_2,\epsilon_2)),$$

où $(w_i,t_i) \in H$ et $(g_i,\epsilon_i) \in \overline{Sp}(W)$.

($\star\star$) En effet, la représentation unique (ρ_ψ, S) du groupe H peut prolonger dans $H \rtimes \overline{Sp}(W)$, notée par Ω_ψ, alors $\Omega_\psi|_{\overline{Sp}(W)} \simeq \omega_\psi$ est la représentation de Weil associée à ψ.

En utilisant le point ($\star\star$) ci-dessus, pour chaque $A \in \mathcal{A}$, si on note $Stab_A(Sp(W)) = G_A$ et $\overline{G_A}$ l'image de réciproque de G_A dans $\overline{Sp}(W)$, alors la représentation $\Omega_{\psi, H\rtimes\overline{G_A}} = c - \mathrm{Ind}_{A\rtimes\overline{G_A}}^{H\rtimes\overline{G_A}} 1 \cdot \psi \cdot 1$ est une représentation du groupe $H \rtimes \overline{G_A}$ satisfaisant $\Omega_{\psi,H\rtimes\overline{G_A}}|_H \simeq \rho_\psi$. Donc la représentation $\Omega_{\psi,H\rtimes\overline{G_A}}|_{\overline{G_A}}$ peut prolonger en la représentation de Weil du groupe $\overline{Sp}(W)$.
Si on prend $A =$ un lagrangien maximal, alors on obtient un modèle de Schödinger réalisé la représentation ω_ψ.
Si on prend $A =$ un réseau tel que $A = A^\perp$, alors on obtient un modèle latticiel réalisé ω_ψ.

Soient (H_1, H_2) une paire réductive duale de $Sp(W)$, et $\overline{H_1}, \overline{H_2}$(resp. $\widehat{H_1}$, $\widehat{H_2}$) leurs images réciproques dans $\overline{Sp}(W)$(resp. $\widehat{Sp}(W)$), on a vu que $\overline{H_1}$,$\overline{H_2}$ (resp. $\widehat{H_1}$, $\widehat{H_2}$) sont commutant l'un de l'autre. On note $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\overline{H}) = \{\overline{\pi} \in \mathrm{Irr}(\overline{H}) |$ tel que $\mathrm{Hom}_{\overline{H}}(\omega_\psi, \overline{\pi}) \neq 0\}$ et $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\widehat{H}) = \{\widehat{\pi} \in \mathrm{Irr}(\widehat{H}) | \mathrm{Hom}_{\widehat{H}}(\omega_\psi, \widehat{\pi}) \neq 0\}$ pour H un sous-groupe fermé de $Sp(W)$.

Théorème 1.29 (Howe, Waldspurger)**.** *Si F est local non archimédien de caractéristique résiduelle $\neq 2$, alors $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\overline{H_1 \times H_2})$ (resp. $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\widehat{H_1 \times H_2})$) est le bigraphe forte[cf. Définition 2.23] d'une bijection entre $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\overline{H_1})$ (resp. $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\widehat{H_1})$) et $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\overline{H_2})$(resp. $\mathcal{R}_{\omega_\psi}(\widehat{H_2})$).*

Remarque 1.30. *(1) Par définition de la représentation ω_ψ, on sait que $\omega_\psi(z) = z\,\mathrm{Id}_{\omega_\psi}$ pour $z \in \mu_8$. Il en résulte que si $\overline{\pi_i} \in \mathcal{R}_{\omega_\psi}(\overline{H_i})$, $\overline{\pi_i}(z) = z\,\mathrm{Id}_{\overline{\pi_i}}$ pour $z \in \mu_8$ a fortiori. Cette défintion est comparable avec celle dans le livre [MVW] ou [Howe1]. (Le même argument est aussi vrai pour le métaplectique groupe $Mp(W) = \widehat{Sp}(W)$). Néanmoins, si on considérait le groupe $\widetilde{Sp}(W)$, pour utiliser la théorie de représentations des groupes localement compacts totalement discontinus, il serait commode d'adopter le point de vue de [MVW] ou [Howe1], i.e. de considérer les représentations $\widetilde{\pi_i} \in \mathrm{Irr}(\widetilde{H_i})$ telles que $\widetilde{\pi_i}|_{\mathbb{C}^\times} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^\times}$.*
(2) Si les groupes $\overline{H_i}$ satisfont aux conditions : $\overline{H_i} \simeq H_i \times \mu_8$, par l'axiome (1) ci-dessus, on sait que si $\overline{\pi_i} \in \mathcal{R}_{\omega_\psi}(\overline{H_i})$, il faut que $\overline{\pi_1} \simeq \pi_i \otimes \mathrm{Id}_{\mu_8}$ pour telle représentation $\pi_i \in \mathrm{Irr}(H_i)$ et l'unique représentation Id_{μ_8} du groupe μ_8, donc $\omega_\psi|_{H_1 \times H_2}$ est aussi une représentation de bigraphe forte.

2 La propriété du graphe

Ce chapitre est de nature assez abstraite. On considère une situation générale, qui reflète les constructions du chapitre précédent. On a deux groupes localement compacts totalement discontinus G_1 et G_2, qui peuvent être des groupes de similitudes apparaissant dans des paires réductives duales sur un corps local non archimédien F, ainsi que des sous-groupes H_1 et H_2 de G_1 et G_2 respectivement, qui peuvent être les groupes d'isométries correspondantes. On dispose d'une représentation particulières de $H_1 \times H_2$, pour laquelle on dispose de la correspondance de Howe. Cette représentation provient par restriction d'une représentation d'un groupe Γ intermédiaire entre $H_1 \times H_2$ et $G_1 \times G_2$, et on considère aussi la représentation π de $G_1 \times G_2$ induite par ρ. On cherche à donne des conditions pour que l'on dispose aussi de la correspondance de Howe pour π.

2.1 Le plus grand quotient du groupe

Dans ce chapitre, nous utilisons librement les notions et notations de la théorie des représentations lisses de groupes localement compacts totalement discontinus [cf.[BZ]]. Soient G un groupe localement compact totalement discontinu, (ρ, V) une représentation lisse de G. Si (π, W) est une représentation lisse irréductible de G, on note V_π le plus grand quotient π-isotypique de V.
Posant

$$V[\pi] = \cap_f \ker(f) \text{ où } f \text{ parcourt } \mathrm{Hom}_G(V, W),$$

on a

$$V_\pi = V/V[\pi].$$

Il satisfait à la propriété universelle suivante : l'application quotient $V \longrightarrow V_\pi$ induit une isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) \simeq \mathrm{Hom}_G(V_\pi, W)$$

et

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0 \text{ si et seulement si } V_\pi = 0.$$

Dans le cas particulier où $\pi = 1_G$, V_π n'est pas autre que l'espace V_G coinvariants de G dans V, c'est-à-dire que le quotient de V par le sous-espace $V[G] = V[1_G]$ engendré par les éléments $\rho(g)v - v$ pour v parcourant V et g parcourant G.

Soient G un groupe localement compact totalement discontinu, (ρ, V) une représentation lisse de G. On notera

$$\mathcal{R}_G(\rho) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(G) | \mathrm{Hom}_G(\rho, \pi) \neq 0\}$$

Proposition 2.1. *Supposons que (ρ, V) est une représentation de type fini. Alors $(\rho, V) = 0$ si et seulement si $\mathcal{R}_G(\rho) = 0$.*

Démonstration. Ceci découle de [[BZ], Page 16, Lemma]. □

Proposition 2.2. *Soient G un groupe localement compact totalement discontinu, H un sous-groupe fermé de G.*
(1) Si H est aussi un sous-groupe ouvert de G et que π est une représentation lisse de type fini de H, alors $c-\mathrm{Ind}_H^G \pi$ est une représentation lisse de type fini de G.
(2) Si G/H est compact et que (π, V) est une représentation lisse de type fini de G, alors $\mathrm{Res}_H^G \pi$ est une représentation lisse de type fini de H.

Démonstration. (1) Comme H est un sous-groupe ouvert de G, l'induite compacte $c-\mathrm{Ind}_H^G \pi$ s'indentifie à l'induite ordinaire $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} \pi$; le résultat est alors clair.
(2) Soient $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un ensemble de vecteurs engendrant V comme représentation de G et K un sous-groupe ouvert de G, tels que

$$\epsilon_K \star v_i = v_i \text{ pour chaque } i$$

L'image de K dans $H\backslash G$ est ouverte ; Comme $H\backslash G$ est compact, il existe des éléments en nombre fini, $g_1, \cdots, g_m \in G$, tels que G soit l'union des Hg_iK pour $i = 1, \cdots, m$. Il en résulte que $\mathrm{Res}_H^G \pi$ est engendré par les éléments $\pi(g_i)v_j$ pour $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$ comme H-module. □

Soit ρ une représentation lisse du groupe localement compact totalement discontinu G, on définit une application $m_G(\rho, -)$ sur $\mathrm{Irr}(G)$ de la façon suivante :

$$m_G(\rho, \pi) = \text{ le cardinal de la dimension de } \mathrm{Hom}_G(\rho, \pi) \text{ pour } \pi \in \mathrm{Irr}(G).$$

Ainsi $\mathcal{R}_G(\rho)$ est le support de cette application.

Définition 2.3. *(1) Si $m_G(\rho, \pi)$ est fini pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, on dit que ρ est* ***une représentation de quotient admissible****.*

(2) Si $m_G(\rho, \pi)$ est égal à 0 ou 1 pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, on dit que ρ est ***une représentation de quotient sans multiplicité****.*

(3) Si ρ est une représentation de quotient admissible et que le support de l'application $m_G(\rho, -)$ est un seul élément π, on dit que ρ est ***une représentation de quotient de Langlands*** *et que π est* ***le quotient de Langlands de*** *ρ.*

Proposition 2.4. *Soit (ρ, V) une représentation lisse de type fini du groupe localement compact totalement discontinu G. Supposons que toute représentation irréductible de G est admissible. Alors ρ est une représentation de quotient admissible.*

Démonstration. Supposons que V est engendré par les éléments $v_1, \cdots, v_n$ comme G-module. Prenons un élément (π, W) de $\mathrm{Irr}(G)$. Soit f un élément de $\mathrm{Hom}_G(V, W)$, on a

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\pi(g_j)v_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\pi(g_j)f(v_i).$$

C'est-à-dire que l'application sera déterminée par ses valeurs en points $v_1, \cdots, v_n$. Soit K un groupe ouvert fixant tous éléments $v_1, \ldots, v_n$, alors $f(v_i)$ est un élément de W^K pour tout i et par hypothèse, la dimension de W^K est finie. Donc

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) \leq n \dim W^K$$

est finie. □

Jusqu'à la fin de cette sous-sous-section, on suppose que G est un groupe réductif p-adique et que P est un sous-groupe parabolique de G, et que $P = MN$ est une décomposition de Levi.
On rappel deux foncteurs non normalisés :

$$\mathrm{Ind}_P^G : \mathrm{Rep}(M) \longrightarrow \mathrm{Rep}(G) \text{ le foncteur d'induction parabolique}$$

$$J_N : \mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}(M) \text{ le foncteur de Jacquet}$$

Théorème 2.5. *Les foncteurs (Ind_P^G, J_N) préservent la classe des représentations lisses de type fini.*

Démonstration. (1) Soit (π, V) une représentation lisse de type fini du groupe G. Comme G/P est compact, par la Proposition 2.2 (2), $\mathrm{Res}_P^G\,\pi$ est aussi de type fini. Soit l'espace V qui est engendré par les éléments $v_1, \cdots, v_n$, fixés par un sous-groupe ouvert compact K de P. L'espace de $J_N(\pi)$ est l'espace des coinvariants de N dans V ; Il est de type fini comme représentation de P, mais N agit trivialement donc il est de type fini comme représentation de M.
(2) C'est un résultat difficile de Bernstein (voir [[Rena], Page 215, Théorème]). □

Lemme 2.6. *Soient (π, V) une représentation lisse de quotient admissible de G et (ρ, W) une représentation lisse de longueur finie de G ; alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \rho) \textit{ est finie .}$$

Démonstration. Si

$$0 = W_0 \leqq W_1 \leqq \cdots \leqq W_s = W$$

est une filtration de W par des sous G-modules telle que W_i/W_{i-1} est une représentation irréductible de G pour $i = 1, \cdots, s$. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow W_{s-1} \longrightarrow W \xrightarrow{p} W/W_{s-1} \longrightarrow 1$$

comme le foncteur $\mathrm{Hom}_G(V, -)$ est exact à gauche, on obtient

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V, W_{s-1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V, W/W_{s-1}).$$

Cela implique que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W_{s-1}) + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W/W_{s-1}).$$

Par récurrence sur s, on trouve

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W) \leq \sum_{i=1}^{s} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W_i/W_{i-1}),$$

qui est finie par hypothèse. □

Lemme 2.7. *Soit (π, V) une représentation lisse du groupe N, alors l'application canonique*

$$V^N \xrightarrow{p_N} V_N$$

est injective.

Démonstration. Soit $p_N(v) = 0$ pour quelque v de V^N. Par définition, on a $v \in V[N]$. Comme N est une union des sous-groupes ouvert compact de lui-même, on a

$$V[N] = \cup_K V[K] \text{ où } K \text{ parcourt les sous-groupes ouvert et compact de } N.$$

Il existe un groupe ouvert compact K_v de N tel que

$$v \in V[K_v] \text{ i.e } v = \sum_{i=1}^{n} \pi(k_i)v_i - v_i \text{ pour quelques } v_i \in V, k_i \in K_v.$$

Choisissons un sous-groupe ouvert et compact K de G qui contient chacun des k_i. Alors $v = \pi(\epsilon_K)v = \pi(\epsilon_K)(\sum_{i=1}^{n} \pi(k_i)v_i - v_i) = 0$. □

Rappelons le théorème de Howe et celui de Jacquet et Harish-Chandra [cf.[BZ]. p.37 et [B3] Theorem].

Théorème 2.8 (Howe)**.** *Soit (π, V) une représentation lisse de G, alors (π, V) est de longueur finie ssi elle est de type fini et admissible.*

Théorème 2.9 (Harish-Chandra, Jacquet)**.** *Toute représentation lisse irréductible du groupe G est admissible.*

Corollaire 2.10. *Le foncteur de Jacquet préserve les représentations de longueur finie.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Howe, du Théorème 2.9 et du Théorème 2.5. □

Lemme 2.11. *Soient (π, V) une représentation lisse du groupe M qui est de quotient admissible, (ρ, W) une représentation irréductible du groupe G ; alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_P(V, W) < \infty.$$

Démonstration. Supposons $T \in \mathrm{Hom}_P(V, W)$. On a $T(v) = T(nv) = nT(v)$ pour $n \in N, v \in V$. Composant le par l'application de W^N dans W_N, qui est injective (Lemme 2.7), on trouve

$$\mathrm{Hom}_P(V, W) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_P(V, W_N) \simeq \mathrm{Hom}_M(V, W_N).$$

Comme W_N est une représentation du groupe M de longueur finie (Corollaire 2.10), en utilisant le Lemme 2.6, on obtient le résultat. □

Proposition 2.12. *Les foncteurs (Ind_P^G, J_N) préservent la classe des représentations lisses de quotients admissibles.*

Démonstration. (i) Pour Ind_P^G : soient (π, V) une représentation lisse de quotient admissible du groupe M et $\rho \in \mathrm{Irr}(G)$. On a

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_P^G \pi, \rho) \simeq \mathrm{Hom}_P(\Delta_P^{-1}\pi, \mathrm{Res}_P^G \rho),$$

qui est de dimension finie par le Lemme 2.11.
(ii) Soient (π, V) une représentation de quotient admissible du groupe G et $(\rho, W) \in \mathrm{Irr}(M)$. Par la réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_M(J_N(\pi), \rho) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_P^G \rho).$$

Comme G/P est compact, on sait que $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ est une représentation lisse du groupe G de longueur finie. Comme π est une représentation de quotient admissible, par le Lemme 2.6, on obtient

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_P^G \rho) < \infty$$

ceci montre l'assertion ! □

2.2 Les quotients pour le produit de deux groupes

Soient G_1, G_2 deux groupes localement compacts totalement discontinus, (π, S) une représentation lisse de $G_1 \times G_2$. Rappelons les définitions des ensembles

$$\mathcal{R}_{G_1\times G_2}(S), \mathcal{R}_{G_1}(S), \mathcal{R}_{G_2}(S).$$

Lemme 2.13 ([MVW] Page 45-46)**.** *Soient (π_1, V_1) une représentation admissible irréductible de G_1, (π_2, V_2) une représentation lisse de G_2, V un sous-espace $G_1 \times G_2$-invariant de $V_1 \otimes V_2$. Alors il existe un sous-espace V_2' de V_2, invariant par G_2, tel que $V = V_1 \otimes V_2'$.*

Démonstration. Nous suivons la démonstration de [MVW]. On note

$$V_2' = \{v_2' \in V_2 | \text{ il existe } 0 \neq v_1 \in V_1 \text{ tel que } v_1 \otimes v_2' \in V\},$$

qui est un $\mathbb{C}$-espace G_2-invariant. En effet, prenons $v_1 \otimes v_2', u_1 \otimes u_2' \in V$ avec $v_1, u_1 \neq 0$. Comme V_1 est irréductible, il existe $f \in \mathcal{H}(G_1)$ tel que $u_1 = \pi_1(f)v_1$, soit K_2' un sous-groupe ouvert compact de G_2 fixant v_2' et u_2'. On a, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha\pi_1(f) \otimes \pi_2(\epsilon_{K_2'})(v_1 \otimes v_2') + \beta u_1 \otimes u_2' = u_1 \otimes (\alpha v_2' + \beta u_2') \in V,$$

pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ainsi $\alpha v_2' + \beta u_2' \in V_2'$. Évidement, $V_1 \otimes V_2'$ est un sous-espace de V, et on veut montrer que c'est tout. Si $V = 0$, ceci termine la démonstration. Sinon, soit $0 \neq v = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i \in V$ avec $0 \neq u_i \in V_1, 0 \neq v_i \in V_2$. On suppose $u_1, \cdots, u_n \in V_1^{K_1}$ pour quelque sous-groupe ouvert compact K_1 de G_1. Comme V_1 est admissible irréductible et on sait que $V_1^{K_1}$ est un $\mathcal{H}(G, K_1)$-module irréductible de dimension finie. Donc $\mathcal{H}(G, K_1) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1^{K_1})$ est surjectif, et on peut trouver des éléments $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ de $\mathcal{H}(G, K_1)$, tels que $\pi_1(\epsilon_i)u_j = \delta_{ij}u_j$; soit K_2 un sous-groupe ouvert compact de G_2, qui satisfait à $\pi_2(\epsilon_{K_2})v_i = v_i$; alors $\pi_1(\epsilon_i) \otimes \pi_2(\epsilon_{K_2})v = u_i \otimes v_i \in V$, il en résulte que $v_i \in V_2'$ pour $i = 1, \cdots, n$, enfin on trouve $v \in V_1 \otimes V_2'$. □

Lemme 2.14 ([MVW] Page 45-46)**.** *Soient (π_1, V_1) une représentation admissible irréductible de G_1, (π, V) une représentation lisse de $G_1 \times G_2$. Supposons que*

$$\cap \ker(f) = \{0\} \textit{ où } f \textit{ parcourt } \mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1).$$

Alors il existe une représentation lisse (π_2', V_2') de G_2, unique à isomorphisme près, telle que π soit isomorphe au produit tensoriel externe $\pi_1 \otimes \pi_2'$.

Démonstration. Nous suivons la démonstration de [MVW].
(1) L'unicité. Soient $V \simeq V_1 \otimes V_2 \simeq V_1 \otimes V_2'$ pour deux représentations lisses (π_2, V_2), (π_2', V_2') du groupe G_2, on a

$$V_2 \simeq (\check{V}_1 \otimes V_1)_{G_1} \otimes V_2 \simeq (\check{V}_1 \otimes (V_1 \otimes V_2))_{G_1} \simeq (\check{V}_1 \otimes (V_1 \otimes V_2'))_{G_1} \simeq V_2'$$

comme représentations de G_2.
(2) L'existence.
(i) D'abord, nous avons l'application bilinéaire

$$V \times \mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1) \longrightarrow V_1;$$

$$(v, f) \longmapsto f(v).$$

Comme $\cap_f \mathrm{Ker}(f) = 0$ où f parcourt $\mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1)$, on obtient un morphisme injectif :

$$V \stackrel{\star}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1), V_1).$$

Pour utiliser le résultat du Lemme 2.13 ci-dessus, on va montrer que son image est dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1), \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} V_1$.
(ii) Vérifions cela. Prenons un élément $0 \neq v \in V$ fixé par un sous-groupe ouvert compact $K_1 \times K_2$ de $G_1 \times G_2$. Supposons que K_1 est suffisamment petit pour que $V_1^{K_1} \neq 0$, qui est alors un $\mathcal{H}(G_1, K_1)$-module irréductible de dimension finie. Choisissons une base $v_1, \cdots, v_n$ de $V_1^{K_1}$. Pour $f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1)$, on a

$$v^\star(f) = f(v) = f(\pi|_{G_1}(\epsilon_{K_1})v) = \epsilon_{K_1} \star f(v) = \sum_{i=1}^n f_i(v)v_i$$

pour quelques $f_i(v) \in \mathbb{C}$. On définit ainsi une application

$$c_{i,v}^{\star} : \mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1) \longrightarrow \mathbb{C};$$

$$f \longmapsto f_i(v).$$

On vérifie que $c_{i,v}^{\star}$ est $\mathbb{C}$-linéaire et on a alors $v^{\star} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,v}^{\star} \otimes v_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1), \mathbb{C}) \otimes V_1$.
(iii) Par hypothèse, V_1 est admissible, donc $\mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1) \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(V \otimes \check{V}_1, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}((V \otimes \check{V}_1)_{G_1}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((V \otimes \check{V}_1)_{G_1}, \mathbb{C})$. On a

$$V \overset{\star}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((V \otimes \check{V}_1)_{G_1}, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \otimes V_1 \simeq ((V \otimes \check{V}_1)_{G_1})^{\star\star} \otimes V_1.$$

Il reste à montrer qu'en fait, l'image est $(V \otimes \check{V}_1)_{G_1} \otimes V_1$. Prenons un élément $0 \neq v \in V$ comme en (i) ; on définit de même les applications $c_{i,v}^{\star}, \cdots, c_{n,v}^{\star}$ de $((V \otimes \check{V}_1)_{G_1})^{\star\star}$. Soit $\{v_1^{\star}, \cdots, v_n^{\star}\}$ la base duale de $\{v_1, \cdots, v_n\}$ dans $(\check{V}_1)^{K_1}$. On a

$$c_{i,v}^{\star} = \langle f(v), v_i^{\star} \rangle = \langle \overline{v \otimes v_i^{\star}}, f \rangle$$

où $\overline{v \otimes v_i^{\star}}$ est l'image de $v \otimes v_i^{\star}$ par l'application $(V \otimes \check{V}_1) \longrightarrow ((V \otimes \check{V}_1)_{G_1})^{\star\star}$. Donc nous avons montré que l'image de l'application $\star$ est un sous-espace de $(V \otimes \check{V}_1)_{G_1} \otimes V_1$. En utilisant le Lemme 2.13, on a $V \simeq V_2 \otimes V_1$ pour une représentation lisse V_2 de G_2 ; par le raisonnement pour l'unicité, nous obtenons $V_2 \simeq (V \otimes \check{V}_1)_{G_1}$. □

Remarque 2.15. *(1) Dans le lemme 2.13 ci-dessus, supposons que la représentation (π_2, V_2) de G_2 est admissible. Alors la sous-représentation (π_2', V_2') l'est aussi.*
(2) Dans le lemme 2.14 ci-dessus, si (π, V) est une représentation lisse admissible de $G_1 \times G_2$, alors la représentation (π_2', V_2') l'est aussi.

Démonstration. de (2) : nous suivons les démonstrations de la Proposition dans [[BZ] Page 20]. Soient K_i un sous-groupe ouvert compact de G_i pour $i = 1, 2$. On sait que $V^{K_1 \times K_2} \simeq (V_1 \otimes V_2')^{K_1 \times K_2} = V_1^{K_1} \otimes V_2'^{K_2}$ qui sont de dimension finie. Cela implique que l'espace $V_2'^{K_2}$ l'est aussi (car on peut choisir K_1 pour que $V_1^{K_1} \neq 0$). □

Soient (π_1, V_1) une représentation admissible irréductible de G_1, et $S_{\pi_1} = S/S[\pi_1]$ le plus grand quotient π_1-isotypique. Par le Lemme 2.13, à isomorphisme près, il existe une unique représentation lisse (π_2', V_2') de G_2 telle que

$$S_{\pi_1} \simeq \pi_1 \otimes \pi_2'.$$

De plus

$$\pi_2' \simeq (\check{V}_1 \otimes S_{\pi_1})_{G_1}$$

pour le plus grand quotient de $\check{V}_1 \otimes S_{\pi_1}$, sur lequel G agisse trivialement.
Par passage au dual, d'après le résultat du Lemme 2.13, on trouve

$$\pi_2'^{\star} \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(\check{V}_1 \otimes S_{\pi_1}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(S_{\pi_1}, V_1) \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(S, V_1) \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(\check{V}_1 \otimes S, \mathbb{C}).$$

L'espace $\mathrm{Hom}_{G_1}(S, V_1)$ est naturellement muni d'une action de G_2, et les isomorphismes précédents sont G_2-équivariants. Par passage à la partie lisse, on obtient

$$\check{\pi}_2' \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(S, V_1)^{\infty} \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(\check{V}_1 \otimes S, \mathbb{C})^{\infty}.$$

En vue des applications, nous démontons un lemme de la page 59 de [MVW]. Soient $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur G, muni de la représentation naturelle ρ de $G \times G$:

$$\rho(g_1, g_2)f(g) := f(g_1^{-1} g g_2).$$

Lemme 2.16. *Pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, le plus grand quotient π-isotopique de $\rho_{G \times 1}$ est isomorphisme à $\pi \otimes \check{\pi}$ comme $G \times G$-module.*

Démonstration. Soit ρ_π le plus grand quotient π-isotypique de $\rho_{G \times 1}$, alors $\rho_\pi \simeq \pi \otimes \sigma$. Par la discussions ci-dessus, on sait que $\check{\sigma} \simeq \mathrm{Hom}_{G_1}(\rho, \pi)^{\infty}$, et le résultat dans la page 74 de [B2], a montré que $\mathrm{Hom}_{G_1}(S, \pi)^{\infty} \simeq \pi$. □

Nous donnons de plus un lemme pour expliquer pourquoi nous intéressons au plus grand quotient π_1-isotypique.

Lemme 2.17. *Soient G_1, G_2 deux groupes localement compacts totalement discontinus, (π, S) une représentation lisse de $G_1 \times G_2$, (π_1, V_1)(resp. (π_2, V_2)) une représentation admissible irréductible de G_1 (resp. G_2). On note par S_{π_1} le plus grand quotient π_1-isotypique de π et soit $S_{\pi_1} \simeq \pi_1 \otimes \pi_2'$, alors*
(1) $\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(S, V_1 \otimes V_2) \simeq \mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(S_{\pi_1}, V_1 \otimes V_2)$.
(2) $\mathrm{Hom}_{G_2}(\pi_2', \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(\pi_1 \otimes \pi_2', \pi_1 \otimes \pi_2)$.

Démonstration. (1) D'abord, si $\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(S, V_1 \otimes V_2) = 0$, comme $S \longrightarrow S_{\pi_1}$ est surjective, donc on a $\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(S_\pi, V_1 \otimes V_2) = 0$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(S, V_1 \otimes V_2)$ qui n'est pas triviale, comme $(\pi_1 \otimes \pi_2, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ est une représentation irréductible, alors $f : S \longrightarrow V_1 \otimes V_2$ est surjective. Prenons un élément non trivial e_2 de V_2. On définit un morphisme canonique $V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{p} V_1 \otimes e_2$ qui est G_1-équivalent. Le composé de f avec p détermine un morphisme non trivial dans $\mathrm{Hom}_{G_1}(S, V_1)$, il implique que f se factorise par $S_{\pi_1} \longrightarrow V_1 \otimes V_2$.
(2) L'isomorphisme est défini par $\varphi \longrightarrow 1 \otimes \varphi$. Ce morphisme est bien défini et injectif. Il suffit de démonter qu'il est aussi surjectif. Soit $\varphi' \in \mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(V_1 \otimes V_2', V_1 \otimes V_2)$ un élément non trivial. Choisissons une base $\{u_i\}_{i\in I}$ de V_2, nous notons par $V_{2,i}$ la droite engendrée par l'élément u_i pour $i \in I$. On a

$$V_2 = \oplus_{i\in I} V_{2,i}$$

qui peut plonger dans $\prod_{i\in I} V_{2,i}$ comme un sous-espace. Donc $V_1 \otimes V_2 \simeq \oplus_{i\in I} V_1 \otimes V_{2,i}$ se voit aussi comme un sous-espace vectoriel de $\prod_{i\in I} V_1 \otimes V_{2,i}$. Nous notons sa projection canonique $\prod_{i\in I} V_1 \otimes V_{2,i} \longrightarrow V_1 \otimes V_{2,i}$ par p_i. Chaque composante $V_1 \otimes V_{2,i}$ est isomorphe à V_1. Prenons un élément non trivial $e_2' \in V_2'$, et considérons le morphisme $\varphi'|_{V_1\otimes e_2'} : V_1 \otimes e_2' \longrightarrow V_1 \otimes V_2$. Composons le avec

$$V_1 \otimes V_2 \longrightarrow \prod_{i\in I} V_1 \otimes V_{2,i} \xrightarrow{p_i} V_1 \otimes V_{2,i}.$$

Nous obtenons un morphisme

$$\varphi_i' : V_1 \otimes e_2' \longrightarrow V_1 \otimes V_{2,i},$$

qui est G_1-équivariant.

Puisque π_1 est admissible, on sait que le lemme de Schur est vrai en ce cas, c'est-à-dire que $\mathrm{End}_{G_1}(V_1) \simeq \mathbb{C}$. Cela implique que φ_i' est défini par

$$V_1 \otimes e_2' \longrightarrow V_1 \otimes V_{2,i};$$
$$\sum_k v_k \otimes e_2' \longmapsto \sum_k v_k \otimes c_i u_i,$$

pour quelque $c_i \in \mathbb{C}$.

De plus le morphisme $\prod_{i\in I} \varphi_i' : V_1 \otimes e_2' \longrightarrow \prod_{i\in I} V_1 \otimes V_{2,i}$ se factorise à $V_1 \otimes e_2' \longrightarrow V_1 \otimes V_2$, ce qui implique que sauf pour un nombre fini d'indices i, $\varphi_i' = 0$.

Ensuite, nous définissons une application $\varphi_{e_2'} : \mathbb{C}e_2' \longrightarrow V_2$ par $\varphi_{e_2'}(e_2') = \sum_{i\in I} c_i u_i$. On a

$$\varphi'|_{V_1\otimes e_2'} = 1 \otimes \varphi_{e_2'}.$$

De cette manière, pour chaque élément $v_2' \in V_2'$, on construit une application $\varphi_{v_2'} : \mathbb{C}v_2' \longrightarrow V_2$ satisfaisant à $\varphi'|_{V_1\otimes v_2'} = 1 \otimes \varphi_{v_2'}$, et cette application est unique. On a donc

$\varphi_{\alpha v_2'+\beta v_2'} = \varphi_{\alpha v_2'} + \varphi_{\beta v_2''} = \alpha\varphi_{v_2'} + \beta\varphi_{v_2''}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $v_2', v_2'' \in V_2'$.

Nous avons une application $\mathbb{C}$-linéaire : $\varphi : V_2' \longrightarrow V_2$ donnée par $\varphi(\sum_i v_{2,i}') := \sum_i \varphi_{v_{2,i}'}(v_{2,i}')$. Alors $\varphi' = 1 \otimes \varphi$, et φ est forcément G_2-équivariant, i.e. $\varphi \in \mathrm{Hom}_{G_2}(V_2', V_2)$. □

Passons aux relations $\mathcal{R}_{G_1\times G_2}(S)$, $\mathcal{R}_{G_1}(S)$ et $\mathcal{R}_{G_2}(S)$. Pour comprendre facilement, d'abord nous adopterons les hypothèses :
(1) $(\pi, G_1 \times G_2, S)$ est une représentation lisse de type fini.
(2) Toute représentation irréductible de $G_1 \times G_2$ est admissible.

Remarque 2.18. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*
(1) π est une représentation de quotient admissible.
(2) $\mathcal{R}_{G_1\times G_2}(S) = \varnothing$ si et seulement si $(\pi, S) = 0$.
(3) Soient $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G_1)$, S_{π_1} le plus grand quotient π_1-isotypique de π et $S_{\pi_1} \simeq \pi_1 \otimes \pi_2'$; alors π_2' est une représentation de type fini de G_2.

Démonstration. nous avons vu (1) [cf. Proposition 2.4] et (2) [cf. Proposition 2.1]. Pour (3), on a

$$S_{\pi_1} \simeq S/S[\pi_1] \simeq \pi_1 \otimes \pi_2'$$

qui est aussi une représentation du groupe $G_1 \times G_2$ de type fini. On choisit l'ensemble $\{v_1^{(1)} \otimes v_2^{'(1)}, \cdots, v_1^{(n)} \otimes v_2^{'(n)}\}$ de n vecteurs engendrant S_{π_1}. Comme (π_1, V_1) est irréductible admissible, par le Lemme 2.14, on a vu que π_2' est engendré par les éléments $v_2^{'(1)}, \cdots, v_2^{'(n)}$. □

Par [[BZ], Page 20, Proposition], on sait qu'un quotient irréductible de π est de la forme $\pi_1 \otimes \pi_2$ où π_1 et π_2 sont uniques à isomorphisme près.

Proposition 2.19. *(1) Si $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$ alors $\pi_1 \in \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$.*
(2) Si $\pi_1 \in \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$, il existe $\pi_2 \in \mathcal{R}_{G_2}(\pi)$ tel que $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$.

Démonstration. (1) Soit $(\pi_1 \otimes \pi_2, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ un élément de $\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$, on a une application non triviale

$$V \xrightarrow{f} V_1 \otimes V_2$$

qui est surjective. Prenons un élément $0 \neq e_2 \in V_2$ et une application canonique

$$V_2 \xrightarrow{p_{e_2}} \mathbb{C}e_2.$$

Composons f avec $1 \otimes p_{e_2}$; nous obtenons une application non triviale de V à V_1 i.e. $\pi_1 \in \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$.
(2) Supposons $(\pi_1, V_1) \in \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$. On peut trouver le plus grand quotient π_1-isotypique $S_\pi \simeq \pi_1 \otimes \pi_2'$, qui n'est pas trivial, cela implique que π_2' ne l'est pas aussi. Comme π_2' est une représentation lisse de type fini, il en résulte que

$$\mathcal{R}_{G_2}(\pi_2') \neq 0.$$

Par le lemme 2.17, on a une bijection entre $\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$ et $\mathcal{R}_{G_2}(\pi_2')$. Ceci montre qu'il existe une représentation (π_2, V_2) de G_2 telle que $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$. □

On définit deux applications projectives canoniques

$$\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi) \xrightarrow{p_i} \mathcal{R}_{G_i}(\pi); \pi_1 \otimes \pi_2 \longmapsto \pi_i \text{ pour } i = 1, 2.$$

Corollaire 2.20. *p_i est surjective pour $i = 1, 2$.*

Remarque 2.21. *Si on ne suppose pas la condition :*
π est une représentation de type fini du groupe $G_1 \times G_2$,
alors les applications p_i toujours existent, mais peut-être elles ne sont pas surjectives, on notera leurs images par $\mathcal{R}^0_{G_i}(\pi)$.

Si p_1(resp. p_2) est injectif, alors pour chaque $\pi_1 \in \mathcal{R}^0_{G_1}(\pi)$ (resp. $\pi_2 \in \mathcal{R}^0_{G_2}(\pi)$), il existe une unique représentation irréductible $\pi_2^{(1)} \in \mathcal{R}_{G_2}(\pi)$ (resp. $\pi_1^{(2)} \in \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$) telle que $\pi_1 \otimes \pi_2^{(1)} \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$ (resp. $\pi_1^{(2)} \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$).

Définition 2.22. *Si p_1(resp. p_2) est injectif, on définit une application $\theta_1 : \mathcal{R}^0_{G_1}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_2}(\pi); \pi_1 \longmapsto \pi_2^{(1)}$; (resp. $\theta_2 : \mathcal{R}^0_{G_2}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_1}(\pi); \pi_2 \longmapsto \pi_1^{(2)}$), on dit que $(\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi), p_i)$ est le graphe de l'application $\mathcal{R}^0_{G_1}(\pi) \xrightarrow{\theta_1} \mathcal{R}_{G_2}(\pi)$(resp. $\mathcal{R}^0_{G_2}(\pi) \xrightarrow{\theta_2} \mathcal{R}_{G_1}(\pi)$) et que $(\pi, G_1 \times G_2)$ est* ***une représentation de graphe à gauche*** *(resp.* ***à droite****). De plus, si π est aussi une représentation de quotient sans multiplicité, i.e.*

$$m_{G_1 \times G_2}(\pi, \pi') \leq 1 \textit{ pour tout } \pi' \in \mathrm{Irr}(G_1 \times G_2),$$

on dit que π est ***une représentation de graphe forte à gauche*** *(resp.* ***à droite****), et que π satisfait à* ***la propriété de graphe forte à gauche*** *(resp.* ***à droite****).*

Définition 2.23. *Si p_1, p_2 sont injectifs, on dit que $(\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi), p_i)$ est un* ***bigraphe*** *entre $\mathcal{R}^0_{G_1}(\pi)$ et $\mathcal{R}^0_{G_2}(\pi)$, et que $(\pi, G_1 \times G_2)$ est une* ***représentation de Howe*** *(ou de bigraphe). Il a déterminé une correspondance bijective entre $\mathcal{R}^0_{G_1}(\pi)$ et $\mathcal{R}^0_{G_2}(\pi)$ qui sera appelée la* ***correspondant de Howe*** *(ou de bigraphe), on aussi dit que $(\pi, G_1 \times G_2)$ satisfait à la* ***propriété de Howe****(ou de bigraphe). De plus, si π est aussi une représentation de quotient sans multiplicité, i.e.*

$$m_{G_1 \times G_2}(\pi, \pi') \leq 1 \textit{ pour tout } \pi' \in \mathrm{Irr}(G_1 \times G_2),$$

on dit que π est une ***représentation de Howe forte*** *(ou de bigraphe forte), et que π satisfait à la* ***propriété de Howe forte*** *(ou de bigraphe forte). Ce qui détermine* ***une correspondance de Howe forte*** *(ou de bigraphe forte) entre $\mathcal{R}^0_{G_1}(\pi)$ et $\mathcal{R}^0_{G_2}(\pi)$.*

2.3 Les représentations de graphe forte

Dans cette sous-sous-section, pour présenter simplement les résultats, "graphe" signe " graphe à gauche" sauf mention du contraire. Et on supposera que toute représentation irréductible du groupe localement compact totalement discontinu est admissible.

Proposition 2.24 (Produits)**.** *Soient G_i, H_i des groupes localement compacts totalement discontinus pour $i = 1, 2$. (π, V) une représentation lisse de $(G_1 \times G_2) \times (H_1 \times H_2)$,*

(1) Supposons que pour chaque indice i, $\pi|_{G_i \times H_i}$ satisfait à la propriété de graphe. Alors π est une représetnation de graphe du groupe $(G_1 \times G_2) \times (H_1 \times H_2)$.

(2) Supposons que π est une représentation de graphe du groupe $G_1 \times \cdots \times G_n$ et qu'il existe un couple (G_i, G_j) de l'ensemble $\{G_1, \cdots, G_n\}$ tel que $\pi|_{G_i \times G_j}$ satisfait à la condition de sans multiplicité. Alors π est une représentation de graphe forte du groupe $G_1 \times \cdots \times G_n$.

Démonstration. Par définition, $p_1^{(i)} : \mathcal{R}_{G_i \times H_i}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_i}(\pi)$ est injective pour $i = 1, 2$. Il en résulte que $p_1 : \mathcal{R}_{(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$ est aussi injective. Donc $(\pi, (G_1 \times G_2) \times (H_1 \times H_2))$ est une représentation de graphe. De plus, l'application du graphe de π soit définie par $\theta = \theta_1 \times \theta_2 : \mathcal{R}^0_{G_1 \times G_2}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}^0_{H_1 \times H_2}(\pi)$ où $\theta_i : \mathcal{R}^0_{G_i}(\pi) \longrightarrow \mathcal{R}^0_{H_i}(\pi)$ est l'application du graphe de $\pi|_{G_i \times H_i}$.
(2) Soit $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_n \in \mathcal{R}_{G_1 \times \cdots \times G_n}(\pi)$, si $m_{G_i \times G_j}(\pi, \pi_i \otimes \pi_j) \leq 1$, on a alors $m_{G_1 \times \cdots \times G_n}(\pi, \pi_1 \otimes \cdots \pi_n) \leq m_{G_i \times G_j}(\pi, \pi_i \otimes \pi_j) \leq 1$. Ceci trouve le résultat. □

Théorème 2.25 (Abélien Scindé)**.** *Soient G_1, G_2, H_1, H_2 des groupes localement compacts totalement discontinus. Supposons que H_1, H_2 sont abéliens et H est un sous-groupe de $H_1 \times H_2$, tels que*

$$H \text{ est le graphe d'un morphisme surjectif } \gamma : H_1 \longrightarrow H_2.$$

Supposons que (ρ, V) est une représentation de graphe forte du groupe $G_1 \times G_2$ qui se prolonge en une représentation du groupe $G_1 \times G_2 \times H$. On note $\pi = c - \mathrm{Ind}_{G_1 \times G_2 \times H}^{(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)} \rho$; alors π est aussi une représentation de graphe forte de $(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)$.

Démonstration. (1) D'abord, comme $pr_1 : H \longrightarrow H_1$ est un isomorphisme de groupes, la représentation irréductible du groupe H s'identifie à celle du groupe H_1. Si $(\pi_1 \otimes \chi_1) \otimes (\pi_2 \otimes \chi_2) \in \mathcal{R}_{(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)}(\pi)$, par le réciprocité de Frobenius, on obtient $(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \chi_1 \otimes \chi_2)|_{G_1 \times G_2 \times H} \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2 \times H}(\rho)$. Il en résulte que $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\rho)$. De plus, comme $m_{G_1 \times G_2}(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2) = 1$, il existe au plus un seul caractère χ_0 de H_1 tel que $m_{G_1 \times G_2 \times H}(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \chi_0) = 1$. Donc on a trouvé que $\chi_1 \chi_2 \circ \gamma = \chi_0$, i.e. $\chi_2 \circ \gamma = \chi_1^{-1} \chi_0$. Comme γ est surjective, on trouve que χ_2 est déterminé uniquement par χ_1 et $\pi_1 \otimes \pi_2$. Comme $\pi_2 = \theta(\pi_1)$ où θ est l'application du graphe de $\pi|_{G_1 \times G_2}$, finalement on voit que χ_2 est détermine uniquement par $\pi_1 \otimes \chi_1$; ceci implique que π est une représentation de graphe. De plus, comme

$$m_{(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)}\Big(\pi, (\pi_1 \otimes \chi_1) \otimes (\pi_2 \otimes \chi_2)\Big) \leq m_{G_1 \times G_2}\Big(\pi, \pi_1 \otimes \pi_2\Big) \leq 1,$$

on voit que la représentation π aussi satisfait à la propriété de sans multiplicité. Ceci termine la démonstration ! □

Remarque 2.26. *Supposons qu'on a un morphisme de groupes ouvert $G_i \times H_i \xrightarrow{p_i} G_i H_i$ pour $i = 1, 2$. Ils donnent un morphisme ouvert $(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2) \xrightarrow{p_1 \times p_2} G_1 H_1 \times G_2 H_2$; on note $(G_1 \times G_2)H$ l'image de $G_1 \times G_2 \times H$. Si la représentation ρ dans le Théorème 2.25 est aussi définie sur le groupe $(G_1 \times G_2)H$, alors les résultats dans Le Théorème 2.25 précédent sont aussi vrais pour la représentation $\pi = c - \mathrm{Ind}_{(G_1 \times G_2)H}^{G_1 H_1 \times G_2 H_2} \rho$.*

Démonstration. Comme p_i (resp. $p_1 \times p_2$) est un morphisme ouvert, toute représentation lisse du groupe $G_i H_i$ (resp. $(G_1 \times G_2)H$) est donnée par une représentation lisse du groupe $G_i \times H_i$ (resp. $(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)$) qui est triviale en sous-groupe $\ker(p_i)$ (resp. $\ker(p_1 \times p_2|_{G_1 \times G_2 \times H})$). En suivant la démonstration du Théorème 2.25, on montre le résultat. □

Ceci est un des résultats principaux du chapitre.

Théorème 2.27 (Abélien fini)**.** *Soit H_1(resp. H_2) un sous-groupe distingué ouvert de G_1 (resp. G_2). Supposons G_1/H_1(resp. G_2/H_2) un groupe abélien de cardinal fini et Γ un sous-groupe de $G_1 \times G_2$ contenant $H_1 \times H_2$ tels que*

$$\Gamma / H_1 \times H_2 \text{ est le graphe d'un morphisme surjectif } \gamma : G_1/H_1 \longrightarrow G_2/H_2.$$

Supposons que (ρ, V) est une représentation de graphe forte du groupe $H_1 \times H_2$ qui se prolonge en une représentation du groupe Γ. Alors $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G_1 \times G_2} \rho$ est aussi une représentation de graphe forte du groupe $G_1 \times G_2$.

On procède par récurrence sur le cardinal du groupe fini $\Gamma/H_1 \times H_2$, en traitant d'abord le cas où ce groupe est cyclique.

Lemme 2.28. *Dans la situation du théorème 2.27, supposons de plus que G_1/H_1 est cyclique. Si $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi)$ avec $\mathcal{R}_{H_1}(\pi_1) = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{k_1}\}$ et $\mathcal{R}_{H_2}(\pi_2) = \{\delta_1, \cdots, \delta_{k_2}\}$, alors*
(1) $k_1 \geq k_2$.
(2) Pour chaque $\sigma_\alpha \in \mathcal{R}_{H_1}(\pi_1)$, il existe un et un seul élément $\delta_\alpha \in \mathcal{R}_{H_2}(\pi_2)$ tel que $\sigma_\alpha \otimes \delta_\alpha \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)$.
(3) $m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1) = m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_\alpha \otimes \delta_\alpha)$.
(4) L'application γ aussi définit un morphisme surjectif $G_{1_{\sigma_\alpha}}/H_1 \longrightarrow G_{2_{\delta_\alpha}}/H_2$ et $\Gamma \cap (G_{1_{\sigma_\alpha}} \times G_{2_{\delta_\alpha}})/H_1 \times H_2$, est le graphe pour $1 \leq \alpha \leq k_1$, où $G_{1_{\sigma_\alpha}} = \{g \in G_1 | \sigma_\alpha^g \simeq \sigma_\alpha\}$, $G_{2_{\delta_\alpha}} = \{g \in G_2 | \delta_\alpha^g \simeq \delta_\alpha\}$.
(5) $m_{G_1\times G_2}(\pi, \pi_1 \otimes \pi_2) \leq m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1)$.

Démonstration. (1)—(3) : Comme $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi)$, par Le Théorème Réciproque de Frobenius, on a

$$0 \neq m_{G_1\times G_2}(\pi, \pi_1 \otimes \pi_2) = m_\Gamma(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2).$$

A fortiori, $m_{H_1\times H_2}(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2) \neq 0$. Quitte à change l'indexation, on trouve que $m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1) \neq 0$. Par le Théorème de Clifford, il existe un élément $t_\alpha H_1$ de G_1/H_1 tel que $\sigma_1^{t_\alpha} \simeq \sigma_\alpha$ où $\sigma_1^{t_\alpha}(h_1) := \sigma_1(t_\alpha^{-1} h_1 t_\alpha)$ pour $h_1 \in H_1$. Soit $\gamma(t_\alpha H_1) = s_\alpha H_2 \in G_2/H_2$, alors $(t_\alpha, s_\alpha)H_1 \times H_2$ appartient à $\Gamma/H_1 \times H_2$. Supposons que $(t_\alpha, s_\alpha) \in \Gamma$ et $\delta_\alpha = \delta_1^{s_\alpha}$. On a

$$0 \neq m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1) = m_{H_1\times H_2}(\rho^{(t_\alpha, s_\alpha)}, \sigma_1^{t_\alpha} \otimes \delta_1^{s_\alpha}) = m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_\alpha \otimes \delta_\alpha).$$

Il en résulte que $\sigma_\alpha \otimes \delta_\alpha \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)$. De plus, comme $\rho|_{H_1\times H_2}$ satisfait à la propriété de graphe, la représentation δ_α est déterminée uniquement par σ_α et on sait que γ est surjective, donc $k_1 \geq k_2$.
(4) Supposons $\alpha = 1$. D'abord, nous vérifions l'assertion suivante :

$$\text{soit } g_1 H_1 \in G_{1_{\sigma_1}}/H_1 \text{ alors } \gamma(g_1 H_1) = g_2 H_2 \in G_{2_{\delta_1}}/H_2.$$

On peut supposer $(g_1, g_2) \in \Gamma$, comme $m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1) \neq 0$, on a $m_{H_1\times H_2}(\rho^{(g_1,g_2)}, \sigma_1^{g_1} \otimes \delta_1^{g_2}) \neq 0$. Il en résulte que $\delta_1^{g_2} = \theta(\sigma_1^{g_1}) \simeq \theta(\sigma_1) = \delta_1$, donc $g_2 H_2 \in G_{2_{\delta_1}}/H_2$.
On définit les applications :

$$a : G_1 \times G_2/H_1 \times H_2 \xrightarrow{\sim} G_1/H_1 \times G_2/H_2 \text{ et } G_1/H_1 \times G_2/H_2 \xrightarrow{p_i} G_i/H_i.$$

Si on note $\overline{\Gamma}$ comme le graphe de l'application $\gamma : G_1/H_1 \longrightarrow G_2/H_2$ dans le groupe $G_1/H_1 \times G_2/H_2$. Par hypothèse, on sait que $a(\Gamma/H_1 \times H_2) = \overline{\Gamma}$. On prend un système de représentants $\{a_1^{(1)}, \cdots, a_{n_1}^{(1)}; \cdots; a_{n_1+\cdots n_{k_2-1}+1}^{(k_2)}, \cdots, a_{k_1}^{(k_2)}\}$ (resp. $\{b_1, \cdots, b_{k_2}\}$) de G_1 (resp. G_2) dans $G_1/G_{1_{\sigma_1}}$ (resp. $G_2/G_{2_{\delta_1}}$) tels que $\{a_j^{(i)}, b_i\} \in \Gamma$ pour $1 \leq i \leq k_2$, $n_{i-1} < j \leq n_i$. Donc

$$\oplus_{i=1}^{k_2} b_i G_{2_{\delta_1}}/H_2 = G_2/H_2 = \gamma(G_1/H_1) = \gamma\Big(\oplus_{i=1}^{k_2}\left(\oplus_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{n_j}^{(i)} G_{1_{\sigma_1}}/H_1\right)\Big) = \oplus_{i=1}^{k_2} b_i \gamma(G_{1_{\sigma_1}}/H_1)$$

Il en résulte que $\gamma : G_{1_{\sigma_1}}/H_1 \longrightarrow G_{2_{\delta_1}}/H_2$ est surjective. On examine aisément que $\Gamma \cap (G_{1_{\sigma_1}} \times G_{2_{\delta_1}})/H_1 \times H_2$ est le graphe par cette application.
(5) $\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(\pi, \pi_1 \otimes \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2)$ par la réciprocité de Frobenius. Mais $\mathrm{Hom}_\Gamma(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2)$ est inclus dans $\mathrm{Hom}_{H_1\times H_2}(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2)^{\Gamma/H_1\times H_2}$ par une action évidente de $\Gamma/H_1 \times H_2$. C'est-à-dire que $\gamma \cdot \varphi := \pi_1 \otimes \pi_2(\gamma) \circ \varphi \circ \rho(\gamma^{-1})$ pour $\gamma \in \Gamma/H_1 \times H_2, \varphi \in \mathrm{Hom}_{H_1\times H_2}(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2)$. Par les raisonnement précédents

$$\mathrm{Hom}_{H_1\times H_2}(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2) = \oplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_i \otimes \delta_j) = \oplus_\alpha \mathrm{Hom}_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_\alpha \otimes \delta_\alpha)$$

(Car les autres espaces sont nuls). De plus chacun des facteurs est de dimension 1 et l'action de Γ permute transtivement les facteurs. Donc on trouve $m_{G_1\times G_2}(\pi, \pi_1 \otimes \pi_2) \leq m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1)$. □

La preuve du Théorème 2.27 :
La première étape— cas cyclique : Supposons que G_i/H_i est un groupe cyclique d'ordre fini pour $i = 1, 2$.
D'abord, la propriété de sans multiplicité vient du Lemme 2.28(5). Il suffit de montrer que π satisfait à la propriété de graphe. Supposons $\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_1 \otimes \pi_2' \in \mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi)$. Par hypothèse, on sait que $\pi_2|_{H_2}, \pi_2'|_{H_2}$ sont sans multiplicités. Soient $\mathcal{R}_{H_1}(\pi_1) = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{k_1}\}$, $\mathcal{R}_{H_2}(\pi_2) = \{\delta_1, \cdots, \delta_{k_2}\}$ et $\mathcal{R}_{H_2}(\pi_2') = \{\delta_1', \cdots, \delta_{k_2'}'\}$. Par le Lemme 2.28, $\mathcal{R}_{H_2}(\pi_2) =$

$\mathcal{R}_{H_2}(\pi_2') = \{\delta_1, \cdots, \delta_{k_2}\}$. On suppose que $\sigma_1 \otimes \delta_1 \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)$. Supposons que $\mathcal{R}_{G_{\delta_1}}(\pi_2) = \{\widetilde{\delta_1}, \cdots, \widetilde{\delta_{k_2}} | \widetilde{\delta_i} \not\simeq \widetilde{\delta_j}$ pour $i \neq j$ et $\widetilde{\delta_i}|_{H_2} = \delta_i\}$. Par le Théorème de Clifford, il existe un caractère ν du groupe $G_{2_{\delta_1}}$ qui est trivial sur H_2 tel que $\widetilde{\delta_1} \simeq \widetilde{\delta_1}' \otimes \nu$. Si $\pi_1 = c - \mathrm{Ind}_{G_{1_{\sigma_1}}}^{G_1} \widetilde{\sigma_1}$ telle que $\widetilde{\sigma_1}|_{H_1} \simeq \sigma_1$, alors on a

$$\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G_1\times G_2} \rho, \pi_1 \otimes \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma}(\rho, \mathrm{Res}_{\Gamma}^{G_1\times G_2} \mathrm{Ind}_{G_{1_{\sigma_1}}\times G_2}^{G_1\times G_2} \widetilde{\sigma_1} \otimes \pi_2)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma}(\rho, \mathrm{Ind}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}^{\Gamma} \widetilde{\sigma_1} \otimes \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \widetilde{\sigma_1} \otimes \pi_2)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_i}) \simeq \mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1})$$

et

$$\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G_1\times G_2} \rho, \pi_1 \otimes \pi_2') \simeq \mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1}').$$

Comme $(G_{1_{\sigma_1}} \times G_{2_{\delta_1}}) \cap \Gamma / H_1 \times H_2$ est le graphe de l'application surjective $\gamma : G_{1_{\sigma_1}}/H_1 \longrightarrow G_{2_{\delta_1}}/H_2$. Utilisons le résultat du Lemme 2.28 pour la représentation $c - \mathrm{Ind}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}^{G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}}} \rho$; nous trouvons

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1}) \simeq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1}') = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1) = 1.$$

Soit $0 \neq T_1 \in \mathrm{Hom}_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \delta_1)$, il existe un morphisme unique $\widetilde{T_1}$(resp. $\widetilde{T_1}'$) prolongeant T_1 dans $\mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1})$ (resp. $\mathrm{Hom}_{(G_{1_{\sigma_1}}\times G_{2_{\delta_1}})\cap\Gamma}(\rho, \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1}')$). Comme $\widetilde{\sigma_1}|_{H_1} = \sigma_1$ et $\widetilde{\delta_1}|_{H_2} = \delta_1$, on peut supposer que $T_1 = \widetilde{T_1} = \widetilde{T_1}'$. Si on prend un élément $(g, h) \in (G_{1_{\sigma_1}} \times G_{2_{\delta_1}}) \cap \Gamma$, on a

$$\widetilde{T_1}(\rho(g, h)v) = T_1(\rho(g, h)v) = \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1}(g, h) T_1(v)$$

et

$$\widetilde{T_1}'(\rho(g, h)v) = T_1(\rho(g, h)v) = \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1}'(g, h) T_1(v) = \widetilde{\sigma_1} \otimes \widetilde{\delta_1}(g, h) T_1(v)\nu(h).$$

Il en résulte que $\nu(h) = 1$. Puisque l'application $(G_{1_{\sigma_1}} \times G_{2_{\delta_1}}) \cap \Gamma / H_1 \times H_2 \longrightarrow G_{2_{\delta_1}}/H_2$ est surjective, il est clair que $\nu = 1$, donc $\pi_2 \simeq \pi_2'$.
<u>La deuxième étape— raisonnement par récurrence</u> : On vient de traiter le cas où G_1/H_1 est cyclique. Pour le cas général, comme annoncé, on procède par récurrence sur le cardinal de G_1/H_1. Si $G_1 \neq H_1$, introduisons une sous-groupe G_1' de G_1, contenant H_1, et tel que G_1/G_1' soit cyclique. Notons G_2' l'image inverse dans G_2 de $\gamma(G_1'/H_1) \subset G_2/H_2$. Alors γ induit un homomorphisme surjectif γ' de G_1'/H_1 sur G_2'/H_2 ; on note Γ' le sous-groupe de Γ contenant $H_1 \times H_2$ et tel que $\Gamma'/H_1 \times H_2$ soit le graphe de γ'. Par récurrence, la représentation $\pi' = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma'}^{G_1'\times G_2'} \rho$ est une représentation de graphe forte. D'autre part, γ induit par passage aux quotients un homomorphisme surjectif de G_1/G_1' sur G_2/G_2', dont le graphe est $\Gamma(G_1' \times G_2')/G_1' \times G_2'$. Considérons la représentation $\rho' = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{\Gamma(G_1'\times G_2')} \rho$; sa restriction à $G_1' \times G_2'$ est π'. Par le cas cyclique traité dans le lemme, on obtient que $c - \mathrm{Ind}_{\Gamma(G_1'\times G_2')}^{G_1\times G_2} \rho'$ est une représentation de graphe forte de $G_1 \times G_2$. Mais cette représentation n'est pas autre que $c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G_1\times G_2} \rho$.

Remarque 2.29. *Tous les résultats dans cette sous-sous-section sont aussi vrais, si on considère " graphe à droite".*

2.4 Les représentations de bigraphe forte

Proposition 2.30 (Produits)**.** *Soient G_i, H_i des groupes localement compacts totalement discontinus pour $i = 1, 2$. Soit (π, V) une représentation lisse de $(G_1 \times G_2) \times (H_1 \times H_2)$,*

(1) Supposons que pour chaque index i, $\pi|_{G_i\times H_i}$ satisfait à la propriété de bigraphe. Alors π est une représet-nation de bigraphe du groupe $(G_1 \times G_2) \times (H_1 \times H_2)$.

(2) Supposons que π est une représentation de graphe du groupe $G_1 \times \cdots \times G_n$ et qu'il existe un couple (G_i, G_j) de l'ensemble $\{G_1, \cdots, G_n\}$ tel que $\pi|_{G_i\times G_j}$ satisfait à la condition de sans multiplicité. Alors π est une représentation de bigraphe forte du groupe $G_1 \times \cdots \times G_n$.

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 2.24. □

Proposition 2.31. *Soient G_1, G_2, H des groupes localement compacts totalement discontinus et H un groupe abélien, γ un automorphisme de H, soit (π, V) une représentation lisse de $G_1 \times G_2 \times H$. Grâce au morphisme des groupes*

$$(G_1 \times H) \times (G_2 \times H) \longrightarrow G_1 \times G_2 \times H$$
$$[(g_1, h_1), (g_2, h_2) \longmapsto (g_1 g_2, h_1 \gamma(h_2))]$$

on obtient une représentation $\widetilde{\pi}$ du groupe $(G_1 \times H) \times (G_2 \times H)$.

(1) Si $\pi|_{G_1 \times G_2}$ est une représentation de bigraphe, alors $\widetilde{\pi}$ l'est aussi.

(2) Si $\pi|_{G_1 \times G_2}$ est une représentation de bigraphe forte, alors $\widetilde{\pi}$ l'est aussi.

Démonstration. (1) Soit $(\pi_1 \otimes \chi_1) \otimes (\pi_2 \otimes \chi_2) \in \mathcal{R}_{(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)}(\widetilde{\pi})$. Si

$$0 \neq F \in \mathrm{Hom}_{(G_1 \times H) \times (G_2 \times H)}(\pi, (\pi_1 \otimes \chi_1) \otimes (\pi_2 \otimes \chi_2)).$$

On a

$$F(\pi((g_1 \otimes g_2), h_1 \gamma(h_2))v) = \pi_1(g_1) \otimes \pi_2(g_2) F(v) \chi_1(h_1) \chi_2(h_2) \text{ pour } v \in V, g_i \in G_i, h_i \in H.$$

En particulier, prenons $g_1 = g_2 = 1$, $h_1 = h \in H$ et $h_2 = \gamma^{-1}(h^{-1}) \in H$, nous obtenons

$$F(v) = F(v) \chi_1(h) \chi_2\big(\gamma^{-1}(h^{-1})\big) \text{ pour tout } v \in V.$$

Comme $F \neq 0$ et γ est un isomorphisme , on trouve $\chi_2 = \chi_1^\gamma$ où $\chi_1^\gamma(h) := \chi_1\big(\gamma(h)\big)$ pour $h \in H$. Si θ_π est l'application de graphe de $\pi|_{G_1 \times G_2}$, alors on obtient une application de bigraphe de $\widetilde{\pi}$:

$$\theta : \mathcal{R}_{G_1 \times H_1}(\widetilde{\pi}) \longrightarrow \mathcal{R}_{G_2 \times H_2}(\widetilde{\pi});$$
$$\pi_1 \otimes \chi_1 \longmapsto \theta_\pi(\pi_1) \otimes \chi_1^\gamma,$$

donc on a trouvé que $(\pi, (G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2))$ est une représentation de bigraphe.
(2) Il suffit de montrer que la représentation $\widetilde{\pi}$ satisfait à la propriété de sans multiplicité. Comme $m_{G_1 \times H_1 \times G_2 \times H_2}(\widetilde{\pi}, (\pi_1 \otimes \chi_1) \otimes \pi_2 \otimes \chi_1^\gamma) \leq m_{G_1 \times G_2}(\pi, \pi_1 \otimes \pi_2)$, on obtient le résultat. □

Remarque 2.32. *Si le morphisme précédent, $(G_1 \times H) \times (G_2 \times H) \longrightarrow G_1 \times G_2 \times H$, se factorise par $(G_1 \times H) \times (G_2 \times H) \longrightarrow G_1 H \times G_2 H$, où $G_i \times H \longrightarrow G_i H$ est un morphisme de groupes ouvert surjectif pour $i = 1, 2$, alors le résultat dans le Lemme 2.31 est aussi vrai pour la représentation $(\pi, G_1 H \times G_2 H)$.*

Démonstration. Comme p_i est un morphisme ouvert, toute représentation lisse du groupe $G_i H$ est donnée par une représentation lisse du groupe $G_i \times H$ qui est triviale en sous-groupe $\ker(p_i)$. Cela entraîne le résultat. □

Théorème 2.33 (Abélien Scindé). *Soient G_1, G_2, H_1, H_2 des groupes localement compacts totalement discontinus. Supposons que H_1, H_2 sont abéliens et que H est un sous-groupe de $H_1 \times H_2$, tels que*

$$H \text{ est le graphe d'un isomorphisme } \gamma : H_1 \longrightarrow H_2.$$

Supposons que (ρ, V) est une représentation de bigraphe forte du groupe $G_1 \times G_2$ qui peut se prolonger en une représentation du groupe $G_1 \times G_2 \times H$. On note $\pi = c - \mathrm{Ind}_{G_1 \times G_2 \times H}^{(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2)} \rho$. Alors π est aussi une représentation de graphe forte du groupe $G_1 \times G_2$.

Démonstration. C'est une consequence du Théorème 2.25. □

Remarque 2.34. *Supposons qu'on a un morphisme de groupes ouvert $G_i \times H_i \longrightarrow G_i H_i$ pour $i = 1, 2$. Ils donnent un morphisme ouvert $(G_1 \times H_1) \times (G_2 \times H_2) \longrightarrow G_1 H_1 \times G_2 H_2$, et on note $(G_1 \times G_2)H$ l'image de $G_1 \times G_2 \times H$. Si la représentation ρ dans le Théorème 2.33 est une représentation du groupe $(G_1 \times G_2)H$, alors les résultats dans le Théorème 2.33 précédent sont aussi vrais pour la représentation $c - \mathrm{Ind}_{(G_1 \times G_2)H}^{G_1 H_1 \times G_2 H_2} \rho$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la Remarque 2.26. □

Théorème 2.35 (Abélien Fini). *Soit H_1(resp. H_2) un sous-groupe distingué ouvert de G_1 (resp. G_2) tel que G_1/H_1(resp. G_2/H_2) soit un groupe abélien de cardinal fini, et soit Γ un sous-groupe ouvert de $G_1 \times G_2$ contenant $H_1 \times H_2$ tel que*

$$\Gamma / H_1 \times H_2 \text{ est le graphe d'un isomorphisme } \gamma : G_1/H_1 \longrightarrow G_2/H_2.$$

Supposons que (ρ, V) est une représentation de bigraphe forte du groupe $H_1 \times H_2$ qui peut se prolonger en une représentation du groupe Γ. Alors $c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2} \rho$ est aussi une représentation de bigraphe forte du groupe $G_1 \times G_2$.

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 2.27. □

Proposition 2.36. *Conservons les notations et hypothèses du Théorème 2.35. Soient $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G_1)$, $\pi_2 \in \mathrm{Irr}(G_2)$ tels que*

$$\pi_1|_{H_1} = m_1\sigma_1 \oplus \cdots \oplus m_1\sigma_{k_1}$$

(les représentations $\sigma_1, \cdots, \sigma_{k_1}$ ne sont pas équivalentes), et

$$\pi_2|_{H_2} = m_2\delta_1 \oplus \cdots \oplus m_2\delta_{k_2}$$

(les représentations $\delta_1, \cdots, \delta_{k_2}$ ne sont pas équivalentes), Supposons que $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi)$. Alors

(i) $k = k_1 = k_2$ et quitte à change l'indexation, on a

$$\sigma_\alpha \otimes \delta_\alpha \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho) \text{ pour } \alpha = 1, \cdots, k.$$

et

$$\sigma_\alpha \otimes \delta_\beta \notin \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho) \text{ pour } 1 \leqq \alpha \neq \beta \leqq k.$$

(ii) L'application γ aussi définit une bijection entre $G_{1_{\sigma_\alpha}}/H_1 \xrightarrow{\sim} G_{2_{\delta_\alpha}}/H_2$ avec $\Gamma \cap (G_{1_{\sigma_\alpha}} \times G_{2_{\delta_\alpha}})/H_1 \times H_2$ comme graphe pour $1 \leq \alpha \leq k$.

Démonstration. (i) Comme $\pi_1\otimes\pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi)$, par le Théorème Réciproque de Frobenius, on obtient $\mathcal{R}_\Gamma(\pi_1\otimes\pi_2)\cap\mathcal{R}_\Gamma(\rho) \neq \emptyset$, a fortiorie, $\mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\pi_1\otimes\pi_2)\cap\mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho) \neq \emptyset$. On peut supposer que $\sigma_1\otimes\delta_1 \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\pi_1\otimes\pi_2)\cap\mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho) \neq \emptyset$. Par le Théorème de Clifford, il existe un élément $t_\alpha H_1$ de G_1/H_1 tel que $\sigma_1^{t_\alpha} \simeq \sigma_\alpha$ où $\sigma_1^{t_\alpha}(h_1) := \sigma_1(t_\alpha^{-1}h_1t_\alpha)$. Soit $\gamma(t_\alpha H_1) = s_\alpha H_2 \in G_2/H_2$, alors $(t_\alpha, s_\alpha)H_1 \times H_2$ appartient à $\Gamma/H_1 \times H_2$. Supposons que $(t_\alpha, s_\alpha) \in \Gamma$, on note $\delta_\alpha = \delta_1^{s_\alpha}$. Donc

$$\sigma_\alpha \otimes \delta_\alpha = \sigma_1^{t_\alpha} \otimes \delta_1^{s_\alpha} \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}((\pi_1 \otimes \pi_2)^{(t_\alpha,s_\alpha)}) \cap \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho^{(t_\alpha,s_\alpha)}) = \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\pi_1 \otimes \pi_2) \cap \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho).$$

Comme $\rho|_{H_1\times H_2}$ satisfait à la propriété de bigraphe, on sait que $\delta_\alpha \not\simeq \delta_\beta$ si $1 \leq \alpha \neq \beta \leq k_1$. D'autre part, si on choisit un élément δ_β, il aussi existe un élément σ_β tel que $\sigma_\beta \otimes \delta_\beta \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)$, donc $k_1 = k_2 = k$. Comme $\rho|_{H_1\times H_2}$ satisfait à la propriété de bigraphe, on trouve $\sigma_\alpha \otimes \delta_\beta \notin \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)$ pour $1 \leq \alpha \neq \beta \leq k$.
(ii) On peut supposer $\alpha = 1$. Par (1), $|G_1/G_{1_{\sigma_1}} \simeq G_1/H_1 \diagup G_{1_{\sigma_1}}/H_1| = |G_2/G_{2_{\delta_1}} \simeq G_2/H_2 \diagup G_{2_{\delta_1}}/H_2| = k$. Par hypothèse $|G_1/H_1| = |G_2/H_2|$, donc on sait que $|G_{1_{\sigma_1}}/H_1| = |G_{2_{\delta_1}}/H_2|$, il suffit de vérifier l'assertion :

$$\text{Soit } g_1H_1 \in G_{1_{\sigma_1}}/H_1, \text{ alors } \gamma(g_1H_1) = g_2H_2 \in G_{2_{\delta_1}}/H_2.$$

On peut supposer $(g_1, g_2) \in \Gamma$. Comme $\sigma_1 \otimes \delta_1 \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)$, il en résulte que

$$\sigma_1 \otimes \delta_1^{g_2} \simeq (\sigma_1^{g_1} \otimes \delta_1^{g_2}) \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho^{(g_1,g_2)}) = \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho).$$

Par (1), on sait que $\delta_1^{g_2} \simeq \delta_1$, donc $g_2 \in G_{2_{\delta_1}}$. □

Proposition 2.37. *Conservons les notations et hypothèses du Théorème 2.27, si $\chi_k \in \mathrm{Irr}(\Gamma/H_1 \times H_2)$ pour $k = 1, \cdots, n$, on note $\pi_k = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1\times G_2}(\rho \otimes \chi_k)$.*

(1) π_k est aussi une représentation de bigraphe forte du groupe $G_1 \times G_2$.

(2) Si on pose $\mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi_k)|_{H_1\times H_2} := \{\sigma_1 \otimes \sigma_2|$ il existe un élément $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi_k)$ tel que $\sigma_i \in \mathcal{R}_{H_i}(\pi_i)$ et $\sigma_1 \otimes \sigma_2 \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)\}$, alors $\mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho) = \cup_{k=1}^n \mathcal{R}_{G_1\times G_2}(\pi_k)|_{H_1\times H_2}$.

Démonstration. (1) Comme $\rho \otimes \chi$ aussi prolonge $\rho \otimes \chi|_{H_1\times H_2} = \rho|_{H_1\times H_2}$, on obtient le résultat.
(2) Si $\sigma_1 \otimes \sigma_2 \in \mathcal{R}_{H_1\times H_2}(\rho)$, on a

$$1 = m_{H_1\times H_2}(\rho, \sigma_1 \otimes \sigma_2) = m_\Gamma(\rho, \mathrm{Ind}_{H_1\times H_2}^\Gamma(\sigma_1 \otimes \sigma_2)).$$

Cela implique que

$$\mathrm{Ind}_{H_1\times H_2}^\Gamma(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \oplus_{\chi_i\in\mathrm{Irr}(\Gamma/H_1\times H_2)}\widetilde{\sigma_1}^0 \otimes \widetilde{\sigma_2}^0 \otimes \chi_i,$$

où $\widetilde{\sigma_1}^0 \otimes \widetilde{\sigma_2}^0$ est la représentation irréductible unique du groupe Γ telle que

$$m_\Gamma(\rho, \widetilde{\sigma_1}^0 \otimes \widetilde{\sigma_2}^0) = 1.$$

Pour chaque $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathrm{Irr}(G_1 \times G_2)$ tel que $\pi_1 \otimes \pi_2|_{H_1\times H_2}$ continent $\sigma_1 \otimes \sigma_2$, il existe $\chi_k \in \mathrm{Irr}(\Gamma/H_1 \times H_2)$ tel que $\pi_1 \otimes \pi_2|_\Gamma$ contient $\widetilde{\sigma_1}^0 \otimes \widetilde{\sigma_2}^0 \otimes \chi_k$. Donc

$$m_{G_1\times G_2}(\pi_k, \pi_1 \otimes \pi_2) = m_{G_1\times G_2}(c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1\times G_2} \rho \otimes \chi_k, \pi_1 \otimes \pi_2) = m_\Gamma(\rho \otimes \chi_k, \pi_1 \otimes \pi_2)$$

$$\geq m_\Gamma(\rho \otimes \chi_k, \widetilde{\sigma_1}^0 \otimes \widetilde{\sigma_1'}^0 \otimes \chi_k) = m_\Gamma(\rho, \widetilde{\sigma_1}^0 \otimes \widetilde{\sigma_1'}^0) = 1.$$

Donc on a montré que

$$\mathcal{R}_{H_1 \times H_2}(\rho) = \cup_{k=1}^n \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi_k)|_{H_1 \times H_2}.$$

□

Proposition 2.38 (B.Roberts). *Conservons les notations et hypothèses du Théorème 2.35, Soient* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G_1)$, $\pi_2 \in \mathrm{Irr}(G_2)$ *tels que*

$$\pi_1|_{H_1} = m_1\sigma_1 \oplus \cdots \oplus m_1\sigma_k$$

(les représentations $\sigma_1, \cdots, \sigma_{k_1}$ *ne sont pas équivalentes), et*

$$\pi_2|_{H_2} = m_2\delta_1 \oplus \cdots \oplus m_2\delta_k$$

(les représentations $\delta_1, \cdots, \delta_{k_2}$ *ne sont pas équivalentes), si* $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}_{G_1 \times G_2}(\pi)$, *alors* $m_1 = 1$ *ssi* $m_2 = 1$.

Démonstration. On suppose $m_1 = 1$. On procède par récurrence sur le caradinal de G_1/H_1. Reprenons les notations dans la démonstrations du Théorème 2.35(cf. la deuxième étape). Par récurrence, on suppose $\pi_1|_{G_1'} = \sigma_1' \oplus \cdots \oplus \sigma_l'$ et $\pi_2|_{G_2'} = \delta_1' \oplus \cdots \oplus \delta_l'$ pour des représentations irréductibles différentes σ_i' (resp. δ_i') du groupe G_1' (resp. G_2'). De plus, on suppose $\sigma_i' \otimes \delta_i' \in \mathcal{R}_{G_1' \times G_2'}(\rho')$ pour $i = 1, \cdots, l$. Par récurrence, pour chaque indice fixé i, on a $\sigma_i' = \oplus_{j=1}^{n_i}\sigma_{ij}$ et $\delta_i' = \oplus_{j=1}^{n_i}\delta_{ij}$, de plus on suppose $\theta_\rho(\sigma_{ij}) = \delta_{ij}$ où θ_ρ est l'application de graphe de ρ. Par hypothèse, $\sigma_{ij} \not\simeq \sigma_{st}$ si $s \neq i$ ou $t \neq j$. Cela en résulte que $\delta_{ij} = \theta_\rho(\sigma_{ij}) \not\simeq \delta_{st} = \theta_\rho(\sigma_{st})$ $s \neq i$ ou $t \neq j$, d'où le résultat. □

Remarque 2.39. *Le résultat dans la Proposition 2.38 est sans doute vrai aussi pour les représentations dans les Exemples I, II construit dans la section 3.*

2.5 Appendices

Pour la commodité du lecture, et parce que nous l'utilisons ci-dessus et dans la suite, nous rappelons dans cet appendice les principaux résultats de la théorie de Clifford, avec des démonstrations [cf. [B1],[GK], [H]].

2.5.1 Le Théorème de Clifford (I) Cas abélien

Soient G un groupe localement compact totalement discontinu, H un sous-groupe ouvert distingué de G d'indice fini, (π, V) une représentation irréductible de G, (σ, W) une représentation irréductible de H, supposons que G/H est un groupe abélien.

Théorème 2.40 (Clifford). *(1)* $\pi|_H$ *est semi-simple et* $\pi|_H = \oplus_{i=1}^l m\pi_i$ *pour des représentations irréductibles différentes* $\pi_1, \cdots, \pi_l$ *de H et une constante m.*
(2) Si $G_{\pi_i} = \{g \in G | \pi_i^g \simeq \pi_i\}$ *où* $\pi_i^g(h) := \pi_i(g^{-1}hg)$, *alors* G/G_{π_i} *permute la classe de l'ensemble* $\{\pi_1, \cdots, \pi_l\}$ *transitivement et* $G_{\pi_i} = G_{\pi_j}$ *pour* $1 \leq i, j \leq l$.
(3) Supposons $\widetilde{\pi_i}$ *le composant* π_i*-isotype de* $\pi|_H$ *et* $G_{\widetilde{\pi_i}} = \{g \in G | \widetilde{\pi_i}^g \simeq \widetilde{\pi_i}\}$. *Alors* $G_{\widetilde{\pi_i}} = G_{\pi_i}$ *et* $\widetilde{\pi_i}$ *est une représentation irréductible du groupe* $G_{\widetilde{\pi_i}}$.
(4) $\pi|_{G_{\widetilde{\pi_i}}} = \oplus_{i=1}^l \widetilde{\pi_i}$ *et* $\widetilde{\pi_i}|_H = m\pi_i$.
(5) On a $\pi \simeq c\text{-}\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i} = \mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i}$.

Démonstration. (1) Soient $\{t_1, \cdots, t_k\}$ un système de représentants de G dans G/H, $0 \neq v \in V$. La représentation $\pi|_H$ est de type fini, engendrée par $\pi(t_1)v, \cdots, \pi(t_k)v$ comme représentation de H, donc il existe une sous-représentation (π_0, V_0) de $(\pi|_H, V)$ telle que V/V_0 est une représentation de H. Considèrons l'application $V \longrightarrow \oplus_{i=1}^k V/\pi(t_i)V_0$. On peut vérifier que c'est un H-morphisme injectif, donc V est une sous-représentation de $\oplus_{i=1}^k V/\pi(t_i)V_0$, de sorte que V est semi-simple. Supposons (π_1, V_1) une sous-représentation irréductible de $(\pi|_H, V)$. Considérons $V' = \sum_{i=1}^k \pi(t_i)V_1$ qui est G-invariante, donc $V = \sum_{i=1}^k \pi(t_i)V_1$, chaque composante $\pi(t_i)V_1$ est une représentation irréductible du groupe H. En éliminant quelques indices, nous obtenons le cardinal d'indice minimal tel que $V = \sum_{i \in \{k_1, \cdots, k_l\}} \pi(t_i)V_1 \simeq \oplus_{i=1}^l m_i\pi_i$. On sait que $\pi_j \simeq \pi_1^{t_j}$ pour quelque $t_j \in \{t_1, \cdots, t_k\}$, de plus $V^{t_j^{-1}} \simeq \oplus_{i=1}^l m_i\pi_i^{t_j^{-1}} \simeq V = \oplus_{i=1}^l m_i\pi_i$, il résulte de ceci que $m_j = m_1 = m$.

(2) Par (1), on a vu que le groupe G/H permute transitif la classe de l'ensemble $\{\pi_1, \cdots, \pi_l\}$. Si on définit un autre sous-groupe $\overline{G_{\pi_i}}$ de G/H par $\overline{G_{\pi_i}} = \{\overline{g} \in G/H | \pi_i^{\overline{g}} \simeq \pi_i\}$, on voit aisément que $\overline{G_{\pi_i}} = G_{\pi_i}/H$ et que $\frac{G/H}{\overline{G_{\pi_i}}} \simeq G/G_{\pi_i}$ permute la classe de l'ensemble $\{\pi_1, \cdots, \pi_l\}$ transitif simplement. Comme $\pi_i \simeq \pi_j^{t_{ij}}$ pour quelque $t_{ij} \in \{t_1, \cdots, t_k\}$, on a un morphisme bijectif $G_{\pi_i} \longrightarrow G_{\pi_j}; g \longmapsto t_{ij} g t_{ij}^{-1}$. Comme G/H est abélien. On sait que G_{π_i}, G_{π_j} sont des groupes distingues du groupe G, donc $G_{\pi_i} = G_{\pi_j}$.
(3) Prenons un élément non trivial $v_i \in V_i$. Par (1). On sait que $\widetilde{\pi_i} = \sum_{j=1}^m \pi(t_{k_j}) V_i = \sum_{j=1}^m \pi(t_{k_j})\pi(H) v_i$ pour quelques $t_{k_1}, \cdots, t_{k_m}$ appartenant à l'ensemble $\{t_1, \cdots, t_k\}$. On peut vérifier que $t_{k_j} \in G_{\widetilde{\pi_i}}$ pour $j = 1, \cdots, m$, donc $mV_i \simeq \widetilde{\pi_i}(G_{\widetilde{\pi_i}}) v_i$ est une représentation irréductible du groupe $G_{\widetilde{\pi_i}}$.
(4) Ceci découle de (2) et (3).
(5) Soit $\{s_1, \cdots, s_l\}$ un système de représentants de G dans $G_{\widetilde{\pi_i}} \setminus G$. Par définition

$$c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i} = \mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i} = \{f : G \longrightarrow V_i | f(g_0 g) = \widetilde{\pi_i}(g_0) f(g) \text{ pour } g_0 \in G_{\widetilde{\pi_i}}, g \in G\}.$$

Donc $\mathrm{Res}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i} = \oplus_{j=1}^l V_i(s_j)$, où $V_i(s_j) = \{f \in c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i} | \text{ supp } (f) \subset G_{\widetilde{\pi_i}} s_j\}$ qui est équivalente à V_i comme $\mathbb{C}$-espace. Prenons $g_0 \in G_{\widetilde{\pi_i}}, f \in V_i(s_j)$, nous avons que $g_0 \cdot f(s_j) = f(s_j g_0) = f(s_j g_0 s_j^{-1} s_j) = \widetilde{\pi_i}(s_j g_0 s_j^{-1}) f(s_j) = \widetilde{\pi_i}^{s_j^{-1}}(g_0) f(s_j)$. Il en résulte que $\mathrm{Res}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i} \simeq \oplus_{j=1}^l \widetilde{\pi_j}$. En utilisant le Théorème réciproque de Frobenius, on obtient

$$\mathrm{Hom}_G(c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i}, c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i}) \simeq \mathrm{Hom}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}(\widetilde{\pi_i}, \mathrm{Res}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}} \widetilde{\pi_i}) \simeq \mathbb{C} \tag{1}$$

et

$$\mathrm{Hom}_G(c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i}, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}(\widetilde{\pi_i}, \pi) \simeq \mathbb{C}. \tag{2}$$

Comme $c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i}$ est semi-simple, par (1), on vérifie d'abord que $c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i}$ étante irréducitible. Par (2), on vérifie que $c-\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi_i}}}^G \widetilde{\pi_i} \simeq \pi$. □

Lemme 2.41. *(1)* $\mathrm{Ind}_H^G 1 \simeq \oplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G/H)} \chi$.
(2) Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}(G)$*, alors* $\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G \pi = \oplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G/H)} \pi \otimes \chi$.

Démonstration. (1) Si on prend $\chi \in \mathrm{Irr}(G/H)$, on a $\mathrm{Hom}_G(\chi, \mathrm{Ind}_H^G 1) \simeq \mathrm{Hom}_H(\chi, 1) \simeq \mathrm{Hom}_H(1_H, 1_H)$. Comme $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_H^G 1 = |G/H| = |\mathrm{Irr}(G/H)|$, donc on trouve le résultat.
(2) On définit une application

$$(Ind_H^G 1) \otimes V \xrightarrow{\tau} \mathrm{Ind}_H^G V;$$
$$((f : G \longrightarrow \mathbb{C}) \otimes V) \longmapsto (f \otimes v : G \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq V).$$

Elle est injective. Donc Il reste à montrer ce qui est aussi surjective. Supposons $\overline{f} \in \mathrm{Ind}_H^G V$, $\{a_1, \cdots, a_l\}$ une système de représentants du groupe G dans G/H. Si on définit une application $\overline{f}_i : G \longrightarrow V$ par $\overline{f}_i(g) = \overline{f}(g)$ si $g \in Ha_i$; et $\overline{f}_i(g) = 0$ si $g \notin Ha_i$. On a $\overline{f}_i \in \mathrm{Ind}_H^G V$ et $\overline{f} = \sum_{i=1}^l \overline{f}_i$. De plus, on peut trouver aisément des éléments f_i de $\mathrm{Ind}_H^G 1 \otimes V$ tels que $\tau(f_i) = \overline{f}_i$. □

Lemme 2.42. *Soit* $\pi|_H = \oplus_{i=1}^l m\pi_i$*. Si on notera* $Car_\pi(G) = \{\nu \text{ un caractère de } G \text{ tel que } \nu|_H = 1 \text{ et } \nu \otimes \pi \simeq \pi\}$*, alors* $|Car_\pi(G)| = m^2 l$*.*

Démonstration. $m^2 l = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_H(\pi, \pi) \simeq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_H^G \pi, \pi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\oplus_{\nu \in \mathrm{Irr}(G/H)} \pi \otimes \nu, \pi) = |Car_\pi(G)|$. □

Théorème 2.43 (Clifford)**.** *(1)* $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ *est semi-simple et* $\mathrm{Ind}_H^G \sigma = \oplus_{j=1}^k n\pi_j$ *pour des représentations irréductibles différentes* $\pi_1, \cdots, \pi_k$ *de* G*.*
(2) Si on notera $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)} = \{\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Irr}(G_\sigma) | \mathrm{Hom}_H(\widetilde{\sigma}, \sigma) \neq 0\}$*, alors*
- *(i)* $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)} \neq \emptyset$.
- *(ii) Si on prend* $\widetilde{\pi_0}$, $\widetilde{\pi_1}$ *deux éléments de* $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$*, alors il existe un caractère* χ *de* G_σ/H *tel que* $\widetilde{\pi_1} \simeq \widetilde{\pi_0} \otimes \chi$*.*
- *(iii) Pour chaque élément* $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$*, on a* $\widetilde{\sigma}|_H = n\sigma$ *pour une constante n indépendant en l'index i .*
- *(iv) Si on prend un élément* $\widetilde{\sigma_0} \in \mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$ *et on note* $\mathrm{Irr}_\sigma(G_\sigma/H) = \mathrm{Irr}(G_\sigma/H)/Car_\sigma(G_\sigma)$*, on a une bijection entre* $\mathrm{Irr}_\sigma(G_\sigma/H)$ *et* $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$ *par* $\overline{\chi} \longmapsto \chi \otimes \widetilde{\sigma_0}$ *pour* χ *un caractère de* G_σ/H*, et* $\overline{\chi} = \chi \bmod Car_\sigma(G_\sigma)$*.*
- *(v) Si* $|\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}| = k$*, alors* $|Car_\sigma(G_\sigma)| = n^2$ *et* $|\mathrm{Irr}(G_\sigma/H)| = kn^2$*.*

(3) $\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma} \sigma \simeq \oplus_{j=1}^k n\widetilde{\sigma_j}$ *pour* $\widetilde{\sigma_j}$ *parcourant* $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$*.*
(4) $\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G \widetilde{\sigma_j} = \pi_j$ *pour* $j = 1, \cdots, k$ *et* $\pi_i \not\simeq \pi_j$ *si* $1 \leq i \neq j \leq k$*.*

Démonstration. (1) Ceci découle de (3) et (4).
(2) (i) Prenons une sous-représentation irréductible $\widetilde{\sigma}$ de $\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma}\sigma$. Par le Théorème réciproque de Frobenius, on obtient

$$\mathrm{Hom}_H(\widetilde{\sigma},\sigma)\simeq \mathrm{Hom}_{G_\sigma}(\widetilde{\sigma},\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma}\sigma)\neq 0,$$

il en résulte que $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}\neq\emptyset$.
(ii) Comme $0\neq \mathrm{Hom}_H(\widetilde{\sigma_1},\widetilde{\sigma_0})\simeq \mathrm{Hom}_{G_\sigma}(\widetilde{\sigma_1},\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma}\widetilde{\sigma_0})\simeq \mathrm{Hom}_{G_\sigma}(\widetilde{\sigma_1},\oplus_{\chi\in\mathrm{Irr}(G_\sigma/H)}\widetilde{\sigma_0}\otimes\chi)$, on obtient $\widetilde{\sigma_1}\simeq\widetilde{\sigma_0}\otimes\chi$ pour quelque caractère χ de G_σ/H.
(iii) Par le Théorème 2.40, on sait que $\widetilde{\sigma_i}|_H = m_i\sigma$ pour une constante m_i. Si $\widetilde{\sigma_i}$, $\widetilde{\sigma_j}\in\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$, alors on a $\widetilde{\sigma_j}\simeq\widetilde{\sigma_i}\otimes\chi$, il en résulte que $m_i=m_j$.
(iv) Ceci résulte de (*ii*).
(v) D'abord, par le Lemme 2.42, on a $|Car_\sigma(G_\sigma)|=n^2$, donc $|\mathrm{Irr}(G_\sigma/H)|=|Car_\sigma(G_\sigma)|\cdot|\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}|=kn^2$.
(3) Comme G_σ/H est un groupe d'indice fini, on sait que $\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma}\sigma$ étante semi-simple, i.e.

$$\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma}\sigma=\oplus_{i=1}^l n_i\tau_i \text{ pour } \tau_i\in\mathrm{Irr}(G_\sigma).$$

Par le Théorème réciproque de Frobenius, on obtient $n_i=\mathrm{Hom}_{G_\sigma}(\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma}\sigma,\tau_i)\simeq\mathrm{Hom}_H(\sigma,\tau_i|_H)$, ce qui implique que $\tau_i\in\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$, de plus $n_i=\mathrm{Hom}_H(\sigma,\tau_i|_H)=n$.
(4) Soit $\{s_1,\cdots,s_t\}$ un système de représentants de G dans G/G_σ. Par définition, on a $\mathrm{Res}_{G_\sigma}^G\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G\widetilde{\sigma_j}\simeq\oplus_{\alpha=1}^t\widetilde{\sigma_j}^{s_\alpha}$. Si $\widetilde{\sigma_j}^{s_\alpha}\simeq\widetilde{\sigma_j}^{s_\beta}$, a fortiori $\widetilde{\sigma_j}^{s_\alpha}|_H\simeq\widetilde{\sigma_j}^{s_\beta}|_H$ i.e. $\sigma^{s_\alpha}\simeq\sigma^{s_\beta}$, il en résulte que $s_\alpha s_\beta^{-1}\in G_\sigma$. Par définition, $s_\alpha=s_\beta$, i.e. $\widetilde{\sigma_j}^{s_\alpha}\not\simeq\widetilde{\sigma_j}^{s_\beta}$ si $1\leq\alpha\neq\beta\leq t$. En utilisant le Théorème Réciproque de Frobenius, on obtient

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G\widetilde{\sigma_j},\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G\widetilde{\sigma_j})\simeq\mathrm{Hom}_{G_\sigma}(\widetilde{\sigma_j},\mathrm{Res}_{G_\sigma}^G\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G\widetilde{\sigma_j})\simeq\mathbb{C}.$$

Donc $\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G\widetilde{\sigma_j}\simeq\pi_j$ étante irréductible. De plus, si $1\leq i\neq j\leq k$, on a

$$\mathrm{Hom}(\pi_i,\pi_j)\simeq\mathrm{Hom}_{G_\sigma}(\widetilde{\sigma_i},\mathrm{Res}_{G_\sigma}^G\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G\widetilde{\sigma_j})\simeq\mathrm{Hom}_{G_\sigma}(\widetilde{\sigma_i},\oplus_{\alpha=1}^t\widetilde{\sigma_j}^\alpha)=0.$$

Parce que si $\widetilde{\sigma_i}\simeq\widetilde{\sigma_j}^\alpha$, en considérant ses restrictions à H, nous obtenons $\alpha\in G_\sigma$, cela montre que $\widetilde{\sigma_i}\simeq\widetilde{\sigma_j}$, i.e. $\pi_i\simeq\pi_j$. □

Corollaire 2.44. *Soient π une représentation irréductible admissible de H, $\widetilde{\pi}_1,\widetilde{\pi}_2$ deux représentations irréductibles de G telles que*
(1) $\widetilde{\pi}_i|_H$ est sans multiplicité pour $i=1,2$.
(2) $\widetilde{\pi}_i|_H$ contient la représentation π comme une sous-représentation pour $i=1,2$,
alors
(1) $\widetilde{\pi_1}|_H$ est équivalente à $\widetilde{\pi_2}|_H$.
(2) $\widetilde{\pi_1}\simeq\widetilde{\pi_2}\otimes\mu$ comme représentation du groupe G pour un caractère μ de G tel que $\mu|_H$ est trivial.

Démonstration. Supposons que $\widetilde{\pi_1}$, $\widetilde{\pi_2}$ contiennent la même représentation π de H. Par le Théorème de Clifford, on a $\widetilde{\pi_1}\simeq\mathrm{Ind}_{G_\pi}^G\pi_1$, $\widetilde{\pi_2}\simeq\mathrm{Ind}_{G_\pi}^G\pi_2$ où π_1,π_2 sont deux représentations du groupe G_π tels que $\pi_1|_H\simeq\pi$, $\pi_2|_H\simeq\pi$, donc il existe un caractère χ du groupe G_σ/H tel que
(1) $\chi|_H$ est triviale.
(2) $\pi_2\simeq\pi_1\otimes\chi$.
Comme G/H est un groupe abélien, il existe un caractère $\widetilde{\chi}$ du groupe G/H prolongeant χ, donc $\widetilde{\pi_2}\simeq\mathrm{Ind}_{G_\pi}^G\pi_2\simeq\mathrm{Ind}_{G_\pi}^G(\pi_1\otimes\chi)\simeq\mathrm{Ind}_{G_\pi}^G(\pi_1)\otimes\widetilde{\chi}\simeq\widetilde{\pi_1}\otimes\widetilde{\chi}$. □

Corollaire 2.45. *Soient π_1,π_2 deux représentations irréductible de G, σ une représentation irréductible de H telles que*

$$\pi_1|_H\simeq m_1\sigma,\quad \pi_2|_H=m_2\sigma,$$

alors
(1) $m_1=m_2$.
(2) Il existe un caractère ν de G qui est trivial sur H tel que $\pi\simeq\pi'\otimes\nu$.

Démonstration. Par le Théorème réciproque de Frobenius, on a

$$m_i=\mathrm{Hom}_H(\pi_i,\sigma)\simeq\mathrm{Hom}_G(\pi_i,\mathrm{Ind}_H^G\sigma).$$

Comme $\mathrm{Ind}_H^G\sigma\simeq\oplus_{j=1}^k m\pi_j$, on sait que $m_1=m_2=m$. De plus $0\neq\mathrm{Hom}_H(\pi_1,\pi_2)\simeq\mathrm{Hom}_G(\pi_1,\mathrm{Ind}_H^G\pi_2)\simeq\mathrm{Hom}_G(\pi_1,\oplus_{\chi\in\mathrm{Irr}(G/H)}\pi_2\otimes\chi)$, donc il existe un caractère ν du groupe G/H tel que $\pi_2\simeq\pi_1\otimes\nu$. □

2.5.2 Le Théorème de Clifford (II) Cas cyclique

Soient G un groupe localement compact totalement discontinu, H un sous-groupe ouvert distingué de G d'indice fini, (π, V) une représentation irréductible de G, (σ, W) une représentation irréductible de H, supposons que G/H est un groupe **cyclique**.

Théorème 2.46 (Clifford). *(1)* $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ *est semi-simple et* $\mathrm{Ind}_H^G \sigma = \oplus_{j=1}^k \pi_j$ *pour des représentations irréductibles différentes* $\pi_1, \cdots, \pi_k$ *de* G.
(2) Si on notera $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)} = \{\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Irr}(G_\sigma) | \quad \widetilde{\sigma}|_H \simeq \sigma\}$*, alors*
(i) $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)} \neq \emptyset$.
(ii) Si on prend un élément $\widetilde{\sigma_0} \in \mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$*, il existe une bijection entre* $\mathrm{Irr}(G_\sigma/H)$ *et* $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$ *par* $\chi \longmapsto \chi \otimes \widetilde{\sigma_0}$.
(3) $\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma} \sigma \simeq \oplus_{j=1}^k \widetilde{\sigma_j}$ *pour* $\widetilde{\sigma_j}$ *parcourant* $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$.
(4) $\mathrm{Ind}_{G_\sigma}^G \widetilde{\sigma_j} = \pi_j$ *pour* $j = 1, \cdots, k$ *et* $\pi_i \not\simeq \pi_j$ *si* $1 \leq i \neq j \leq k$.

Démonstration. (1) Ceci découle de (3) et (4).
(2) Tout d'abord, par hypothèse, G_σ/H est un groupe cyclique qui est engendré par $\langle \overline{s} \rangle$. On prend un élément représentative s de $\overline{s}$ dans le groupe G. Comme $\sigma^s \simeq \sigma$, il existe une application linéaire $A : W \longrightarrow W$ telle que

$$\sigma^s(h)A = A\sigma(h) \text{ pour tout } h \in H.$$

Par ailleurs, $\sigma^{s^i}(h)A^i = A^i\sigma(h)$ pour tout $h \in H$. Si on définit un homomorphsime $\widetilde{\sigma} : G_\sigma \longrightarrow Aut(W)$ pour $\widetilde{\sigma}(s^i h) := A^{-i}\sigma(h)$, comme $\widetilde{\sigma}(s^i h_1 s^j h_2) = \widetilde{\sigma}(s^{i+j} s^{-j} h_1 s^j h_2) = A^{-i-j}\sigma(s^{-j}h_1 s^j h_2) = A^{-i-j}\sigma^{s^j}(h_1)\sigma(h_2) = A^{-i}\sigma(h_1)A^{-j}\sigma(h_2) = \widetilde{\sigma}(s^i h_1)\widetilde{\sigma}(s^j h_2)$, on a montré ce qui est bien défini. D'ailleurs, on vu aisément qu'il définit une représentation lisse irréductible de G_σ, donc $\mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)} \neq \emptyset$. Si on prend deux éléments $\widetilde{\sigma_0}, \widetilde{\sigma_1} \in \mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$, on obtient

$$\widetilde{\sigma_0}(s^{-1})\widetilde{\sigma_0}(h)\widetilde{\sigma_0}(s) = \widetilde{\sigma_0}(s^{-1}hs) = \sigma(s^{-1}hs) = \widetilde{\sigma_1}(s^{-1}hs) = \widetilde{\sigma_1}(s^{-1})\widetilde{\sigma_1}(h)\widetilde{\sigma_1}(s),$$

il en résulte que $\widetilde{\sigma_0}(s) = c(s)\widetilde{\sigma_1}(s)$ pour quelque $c(s) \in \mathbb{C}^\times$. De plus, si on définit un caractère $\chi : G/H \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \langle \overline{s} \rangle \longmapsto c(s)$. On trouve

$$\widetilde{\sigma_0}(s^i h) = \widetilde{\sigma_0}(s^i)\widetilde{\sigma_0}(h) = c(s)^i\widetilde{\sigma_1}(s^i)\sigma(h) = c(s)^i\widetilde{\sigma_1}(s^i)\widetilde{\sigma_1}(h) = \chi(\overline{s}^i)\widetilde{\sigma_1}(s^i h),$$

ce qui démontre $\widetilde{\sigma_0} \simeq \widetilde{\sigma_1} \otimes \chi$ pour un caractère χ de G_σ. Par le Lemme 2.42, on sait que $\widetilde{\sigma_0} \simeq \widetilde{\sigma_1}$ ssi χ étant trivial.
(3) Comme G_σ/H est un groupe d'indice fini. On sait que $\mathrm{Ind}_H^{G_\sigma} \sigma$ étante semi-simple. Si on prend un élément $\widetilde{\sigma_j} \in \mathrm{Irr}(G_\sigma)_{(\sigma_H)}$, par le Théorème Réciproque de Frobenius, alors on obtient

$$\mathrm{Hom}_{G_\sigma}(c - \mathrm{Ind}_H^{G_\sigma} \sigma, \widetilde{\sigma_j}) \simeq \mathrm{Hom}_H(\sigma, \widetilde{\sigma_j}) \simeq \mathbb{C}$$

C'est-à-dire que chaque élément $\widetilde{\sigma_j}$ étant une sous-représentation de $c - \mathrm{Ind}_H^{G_\sigma} \sigma$, d'après comparer l'indice de G_σ/H, on obtient le résultat.
(4) Ceci découle du Théorème 2.43 (4). □

Théorème 2.47 (Clifford). *(1)* $\pi|_H$ *est semi-simple et* $\pi|_H = \oplus_{i=1}^l \pi_i$ *pour des représentations irréductibles différentes* $\pi_1, \cdots, \pi_l$ *de* H.
(2) Si $G_{\pi_i} = \{g \in G | \pi_i^g \simeq \pi_i\}$ *où* $\pi_i^g(h) := \pi_i(g^{-1}hg)$*, alors* G/G_{π_i} *permute la classe de l'ensemble* $\{\pi_1, \cdots, \pi_l\}$ *transitivement et* $G_{\pi_i} \simeq G_{\pi_j}$ *pour* $1 \leq i, j \leq l$.
(3) $\pi|_{G_{\widetilde{\pi}_i}} = \oplus_{i=1}^l \widetilde{\pi_i}$ *et* $\widetilde{\pi_i}|_H = \pi_i$.
(4) On a $\pi \simeq c\text{-}\mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi}_i}}^G \widetilde{\pi_i} = \mathrm{Ind}_{G_{\widetilde{\pi}_i}}^G \widetilde{\pi_i}$.

Démonstration. Par le Théorème 2.40, il suffit de monter que $m = 1$. Par le théorème réciproque de Frobenius et le Théorème 2.46, on a $m = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\pi, \pi_i) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{Ind}_H^G \pi_i) = 1$. □

3 Représentations de bigraphe forte de groupes similitudes

Ce chapitre est pour but de généraliser la correspondance de Howe aux groupes de similitudes. A l'aide des Théorèmes principaux du chapitre 2 et d'une technique de récurrence, nous obtenons plus nombreuses représentations de bigraphe forte pour les groupes de similitudes, qui seront énoncées aux Exemples I pour les cas scindés et aux Exemples II pour les cas non scindés.

Dans ce chapitre, on désigne par F un corps non archimédien de caractéristique résiduelle p (impaire sauf mention explicite).

3.1 Un sous-groupe intermédiaire Γ de $Mp(W)$

Soient D un corps, muni d'une involution τ, F le corps commutatif formé par les points fixés de τ, W un espace vectoriel de dimension finie sur D, muni d'un produit ϵ-hermitien $\langle , \rangle$(où $\epsilon = \pm 1$). On désigne par $U(W)$ le groupe unitaire de $(W, \langle , \rangle)$ et par $GU(W)$ le groupe de similitudes unitaires de $(W, \langle , \rangle)$. On note $\mathbb{G}_m$ le groupe algébrique multiplicatif.

On peut regarder $U(W)$ ou $GU(W)$ comme schémas en groupes de la façon suivante : on désigne par $\underline{Alg_F}$ la catégorie des F-algèbres commutatives unitaires, par $\underline{Gr}$ la catégorie des groupes. Soit A un élément de $\underline{Alg_F}$, on note $D_A = D \otimes_F A$, $W_A = W \otimes_F A$. D_A est une F-algère munie d'une τ-involution : $\tau(d \otimes a) = \tau(d) \otimes \overline{a}$, pour $d \in D, a \in A$ et le A_D-module W_A est muni d'une structure ϵ-hermitienne : $\langle w_i \otimes a_i, w_j \otimes a_j \rangle_A = \langle w_i, w_j \rangle \otimes a_i a_j$. Alors $\mathbf{GU}(W)$(resp. $\mathbf{U}(W)$) est le foncteur de $\underline{Alg_F}$ dans $\underline{Gr}$ défini par

$$\mathbf{GU}(W)(A) = \{g \in GL(W_A) | \langle gw_a, gw'_a \rangle_A = \lambda(g)\langle w_a, w'_a \rangle_A \text{ pour tous } w_a, w'_a \in W_A \text{ et un élément } \lambda(g) \text{ de } D_A^\times\}$$

(resp. $\mathbf{U}(W)(A) = \{g \in GL(W_A) | \langle gw_a, gw'_a \rangle_A = \langle w_a, w'_a \rangle_A$ pour tous $w_a, w'_a \in W_A\}$).

On sait que $\mathbf{U}(W)$, $\mathbf{GU}(W)$ sont des F-groupes algébriques, par définition, on a $U(W) = \mathbf{U}(W)(F)$ et $GU(W) = \mathbf{GU}(W)(F)$.

Proposition 3.1. *On a une suite exacte des schémas en groupes*

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{U}(W) \longrightarrow \boldsymbol{GU}(W) \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 1.$$

Démonstration. Ceci découle de [[KMRT], Page 346, Sequence (23.4)]. □

Soient $\overline{F}$ une clôture séparable de F, Gal = Gal$(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois de $\overline{F}/F$. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow U(W) \longrightarrow GU(W) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}, U(W)) \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}, GU(W)) \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}, \mathbb{G}_m) = 1.$$

Lemme 3.2. *Si on a la décomposition de Witt* $W = V_H \oplus W^0$ *avec* $V_H \simeq mH$ *où* H *est le plan hyperbolique* ϵ*-hermitien sur* D *et* W^0 *est un espace anisotrope, alors on a la suite exacte suivante :*

$$1 \longrightarrow U(W) \longrightarrow GU(W) \longrightarrow \lambda(GU(W^0)) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $g \in GU(W)$, $W = g(V_H) \oplus g(W^0)$ est aussi la décomposition de Witt de W. Par le Théorème de Witt [cf. [MVW], Page 6], il existe un élément $g_0 \in U(W)$, tel que $g(W^0) = g_0(W^0)$, il en résulte que $g_0^{-1}g \in GU(W^0)$ et $\lambda(g_0^{-1}g) = \lambda(g)$. Donc on a montré que $\lambda(GU(W)) \subset \lambda(GU(W^0))$. Il reste à montrer que c'est tout. Rappelons que le plan hyperbolique ϵ-hermitien H égal au D-espace vectoriel à droite $D \times D$ muni du produit ϵ-hermitien $\langle (d_1, d_2), (d'_1, d'_2) \rangle = \tau(d_1)d'_2 + \epsilon\tau(d_2)d'_1$. Ainsi, $\lambda(GU(H)) = F^\times$, Par la suite exacte ci-dessus, on sait que $\lambda(GU(W^0))$ est un sous-groupe de $F^\times$, il en résulte que si on prend un élément $\lambda \in \lambda(GU(W^0))$, alors il existe des éléments $g_0 \in GU(W^0)$ et $g_H \in GU(H)$ tels que $\lambda(g_0) = \lambda(g_H) = \lambda$. Donc on peut regarder $g = g_0 \times \underbrace{g_H \times \cdots \times g_H}_{m}$ comme un élément du groupe $GU(W)$, de plus, on voit aisément que $\lambda(g) = \lambda$, ceci termine la démonstration. □

Proposition 3.3. *(1) Si* $D = F$, $\epsilon = -1$, $U(W) = Sp(W)$, $GU(W) = GSp(W)$*, alors on a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow Sp(W) \longrightarrow GSp(W) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow 1.$$

(2) Si $D = F$, $\epsilon = 1$, $U(W) = O(W)$, $GU(W) = GO(W)$*, supposons que on a la décomposition de Witt* $W = W^0 \oplus mH$ *; alors*

(i) si $\dim_F W^0 = 0, 3, 4$*, alors on a une suite exacte :*

$$1 \longrightarrow O(W) \longrightarrow GO(W) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow 1.$$

(ii) si $\dim_F W^0 = 1$*, alors on une suite exacte :*

$$1 \longrightarrow O(W) \longrightarrow GO(W) \xrightarrow{\lambda} F^{\times 2} \longrightarrow 1.$$

(iii) si $\dim_F W^0 = 2$*, donc* $W^0 = E(f)$ *où* E *est une extension quadratique de* F *et un élément* $f \in F^\times$ *modulo* $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$*, alors on a une suite exacte :*

$$1 \longrightarrow O(W) \longrightarrow GO(W) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \longrightarrow 1.$$

(3) Si $D = E$ *est une extension quadratique de* F*,* $\epsilon = \pm 1$*, alors on a des suites exactes*

$$1 \longrightarrow U(W) \longrightarrow GU(W) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow 1 \text{ si } n \text{ pair },$$

et

$$1 \longrightarrow U(W) \longrightarrow GU(W) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \longrightarrow 1 \text{ si } n \text{ impair }.$$

(4) Si D *est l'unique corps de quaternions sur* F*,* $\epsilon = 1$*, alors on a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow U(W) \longrightarrow GU(W) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow 1.$$

(5) Si D *est l'unique corps de quaternions sur* F*,* $\epsilon = -1$*, alors on a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow U(W) \longrightarrow GU(W) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow 1.$$

Démonstration. Par le Lemme 3.2, en fait, le morphisme λ est défini sur le groupe de Witt-Grothendieck.
(1) C'est bien connu.
(2) Par [[MVW], Page 7], on connaît les espaces quadratiques anisotropes à isomorphisme près : (i) $F(a)$ pour $a \in F^\times$ modulo $F^{\times 2}$, de dimension 1, en ce cas $\lambda(GU(W)) = F^{\times 2}$; (ii) E, $E(f)$ pour chaque extension quadratique E/F, munie de la norme sur F, et $f \in F^\times$ n'est pas norme d'un élément de E, donc en ce cas $\lambda(GU(W)) = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$; (iii) $D^0(a)$ ou D où D est l'unique corps de quaternions sur F, muni de la norme réduite, D^0 étant le sous-espace des éléments de trace nulle de D, et $a \in F^\times/F^{\times 2}$. Donc en ce cas, $\lambda(GU(W)) = \mathrm{N}_{D/F}(D^\times) = F^\times$.
(3) Dans ce cas, τ est de seconde espèce, on a une bijection entre les espaces ϵ-hermitiens et les espaces hermitiens. Par les énoncés de [[MVW], Page 7], les espaces hermitiens anisotropes sur E sont classifiées de la façon suivante (i) E , $E(f)$ où $f \in F^\times$ n'est pas norme d'un élément de E. (ii) D. Donc en le cas (i), $\lambda(GU(W)) = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$; en le cas (ii) $\lambda(GU(W)) = F^\times$, on a trouvé le résultat.
(4) Par les énoncés de [[MVW], Page 7], il existe un seul espace anisotrope sur D, et $\lambda(GU(D)) = \mathrm{N}_{D/F}(D^\times) = F^\times$.
(5) Par le Théorème d'orthogonalisation, on a $W \simeq \oplus_{i=1}^n D(a_i)$. Pour chaque élément $a \in F^\times$, par le résultat dans [[Sc], Page 364], il existe un élément $d_a^i \in D^\times$ tel que $d_a^i a_i d_a^{i\star} = a a_i$. L'élément $\delta_a = \underbrace{d_a^1 \times \cdots \times d_a^n}_{n}$ appartient à $GU(W)$ et satisfait à $\lambda(\delta_a) = a$, donc $\lambda(GU(W)) = F^\times$. □

Soient W un espace symplectique sur F, $W = W_1 \otimes_D W_2$ une décomposition en produit tensoriel, donnant $(U(W_1), U(W_2))$ une paire réductive duale irréductible de $Sp(W)$. On définit un sous-groupe intermédiaire Γ de $Sp(W)$ de la façon suivante :

$$\Gamma = \{(g_1, g_2) | g_1 \in GU(W_1), g_2 \in GU(W_2) \text{ tels que } \lambda(g_1 g_2) = 1\}.$$

On a l'application canonique

$$\Gamma \xrightarrow{i} Sp(W); i(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \otimes g_2.$$

On note $\widehat{\Gamma}$ (resp. $\overline{\Gamma}$, $\widetilde{\Gamma}$) l'image réciproque de $i(\Gamma)$ dans $\widehat{Sp}(W)$ (resp. $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$).

Théorème 3.4. *Soient* $(W, \langle , \rangle)$ *un espace symplectique sur le corps non archimédien* F *avec une décomposition en produit tensoriel* $W = W_1 \otimes_D W_2$*,* Γ *le sous-groupe intérmédiaire,* $\overline{\Gamma}$ *(resp.* $\widetilde{\Gamma}$*) leur image réciproque dans* $\overline{Sp}(W)$*(resp.* $\widetilde{Sp}(W)$*) ; alors* $\overline{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}$ *sont scindés au-dessus* Γ *sauf si* $W \simeq W_1 \otimes_{F'} W_2$ *où* W_1 *est un espace symplectique sur une extension* F' *de* F*, et* $\dim_{F'} W_2$ *impaire.*

Par le Lemme 1.21, il suffit de considérer les paires duales de type 1 dans le Théorème 1.7. Nous posons

$$\Lambda_\Gamma = \{\lambda(g_1) = \lambda(g_2)^{-1} | (g_1, g_2) \in \Gamma\},$$

donc il existe une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U(W_1) \times U(W_2) & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{\lambda} & \Lambda_\Gamma & \longrightarrow & 1 \\ & & & & (g_1, g_2) & \longmapsto & \lambda(g_1) & & \end{array}$$

En utilisant la suite exacte d'Hochschild-Serre :

$$\cdots \longrightarrow H^2(\Lambda_\Gamma, \mu_8) \longrightarrow H^2(\Gamma, \mu_8) \longrightarrow H^2(U(W_1) \times U(W_2), \mu_8) \longrightarrow \cdots$$

Par le Théorème 1.22, la restriction à $U(W_1) \times U(W_2)$ de la classe $[c_{Rao}]$ est triviale ; ainsi on peut choisir un 2-cocycle c de $[c_{Rao}]$ tel que

$$c(r, r') = c_{\Lambda_\Gamma}(\lambda(r), \lambda(r')) \cdots (1)$$

pour un 2-cocycle c_{Λ_Γ} dans $H^2(\Lambda_\Gamma, \mu_8)$.

$(\star)$ Si on peut trouver un sous-groupe Γ_1 de Γ tel que $\lambda(\Gamma_1) = \Lambda_\Gamma$ et que la restriction de $[c]$ à Γ_1 est triviale, alors $[c_{\Lambda_\Gamma}]$ est aussi triviale, donc $[c]$ l'est aussi.

Lemme 3.5. *Si* W_1 *ou* W_2 *est un espace hyperbolique, alors les extensions* $\overline{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}$ *sont scindées sur* Γ.

Démonstration. On peut supposer que $W_2 = nH$ où H est le plan hyperbolique sur D, on a alors $W_{1_H} = W_1 \otimes_D H \hookrightarrow \oplus_1^n W_{1_H} \simeq W_1 \otimes_D W_2; w \longmapsto (w)_1^n$. Soit $\Gamma_{W_{1_H}}$ le sous-groupe intermédiaire attaché à W_{1_H}. On a un morphisme de groupes

$$\Gamma_{W_{1_H}} \longrightarrow \Gamma; \gamma \longmapsto (\gamma)_1^n.$$

L'image est un sous-groupe de Γ satisfaisant les conditions du point $(\star)$ ci-dessus, notée Γ_1. Notant $\overline{\Gamma_{W_{1_H}}}$ (resp. $\overline{\Gamma_1}$) l'image réciproque de $\Gamma_{W_{1_H}}$ (resp. Γ_1) dans $\overline{Sp}(W_{1_H})$ (resp. $\overline{Sp}(W)$). Par le Lemme 1.18, on a un morphisme

$$\overline{\Gamma_{W_{1_H}}} \longrightarrow \overline{\Gamma_1}.$$

Si $\overline{\Gamma_{W_{1_H}}}$ est scindé au-dessus $\Gamma_{W_{1_H}}$, on trouve une section-morphisme $\Gamma_1 \longrightarrow \overline{\Gamma_1}$, d'où le résultat. Ainsi, il suffit de supposer $W = W_1 \otimes_D H$. D'abord, supposons que H est le plan hyperbolique hermitien à gauche sur D, muni de la base hyperbolique $\{e_1, e_1^\star\}$; si $w_2 = a_1 e_1 + a_2 e_1^\star \in H$, $w_2' = b_1 e_1 + b_2 e_1^\star \in H$, on a

$$\langle w_1, w_1' \rangle_2 = a_1 \tau(b_2) + a_2 \tau(b_1) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right).$$

Notant que $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(D)$ agit sur $w_2 = xe_1 + ye_1^\star \in H$ par $g \cdot w_2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1^\star \end{pmatrix}$, alors $g \in GU(H)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(a) & \tau(c) \\ \tau(b) & \tau(d) \end{pmatrix} = \lambda(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\lambda(g) \in F^\times$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda(g) \end{pmatrix} \in GU(H)$. Donc on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow U(H) \longrightarrow GU(H) \xrightarrow{\lambda} F^\times \longrightarrow 1.$$

On a même une section, i.e. un homomorphisme $s : F^\times \longrightarrow GU(H); a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ qui satisfait à $\lambda \circ s = id_F$. On voit aisément que le même argument est aussi vrai si H est le plan hyperbolique anti-hermitien sur D. Ainsi, on peut définir un sous-groupe Γ_1 de Γ où

$$\Gamma_1 = \{(g_1, g_2) \in GU(W_1) \times s(F^\times) | \lambda(g_1) = \lambda(g_2)^{-1}\}.$$

L'image de Γ_1 dans le groupe $Sp(W)$ est dans un sous-groupe parabolique de $Sp(W)$. Cela implique que la restriction de $[c_{Rao}]$ à Γ_1 est triviale. Par le point $(\star)$ ci-dessus, on obtient le résultat. $\square$

Lemme 3.6. *Si W_1 est un espace symplectique de dimension $2n$ et W_2 est un espace orthogonal de dimension $2m$ sur F, alors les groupes $\overline{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}$ sont scindés au-dessus Γ.*

Démonstration. C'est une conséquence du Lemme 3.5. □

Lemme 3.7. *Soient $D = E$ une extension quadratique de F, W_1(resp. W_2) un espace hermitien (resp. anti-hermitien) anisotrope sur E, alors les groupes $\overline{\Gamma}$, $\widetilde{\Gamma}$ sont scindés au-dessus Γ.*

Démonstration. (i) Si $\dim_E(W_1) = 1$, $W_1 = E(f)$ où $f = 1$ ou $f \in F^\times \setminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. La forme associée est définie par $\langle e_1, e_2\rangle_1 = f\overline{e_1}e_2$. On a une application bijective E-linéaire $W = E(f) \otimes_E W_2 \xrightarrow{b} W_2; e \otimes w_2 \longmapsto ew_2$. Si $e_1 \otimes w_2, e_1' \otimes w_2' \in W$, on a

$$\langle e_1 \otimes w_2, e_1' \otimes w_2'\rangle_W = \mathrm{Tr}_{E/F}(\langle e_1, e_1'\rangle_1 \overline{\langle w_2, w_2'\rangle_2}) = \mathrm{Tr}_{E/F}(f\overline{e_1}e_1'\overline{\langle w_2, w_2'\rangle_2})$$

$$= \mathrm{Tr}_{E/F}(\overline{f e_1\langle w_2, w_2'\rangle_2 \overline{e_1}'}) \overset{\text{par définition}}{=} \mathrm{Tr}_{E/F}(f\overline{\langle e_1 w_2, e_1' w_2'\rangle_2}).$$

Donc si on munit l'espace W_2 de la forme symplectique $\langle , \rangle_2' = \mathrm{Tr}_{E/F}(f\overline{\langle , \rangle_2})$, alors l'application b ci-dessus est une isométrie. Rappelons :

$$\Gamma = \{(g_1, g_2) | g_1 \in E^\times, g_2 \in GU(W_2), \text{ tels que } \lambda(g_1)\lambda(g_2) = 1\}$$

et

$$\Gamma \hookrightarrow Sp(W, \langle , \rangle) \simeq Sp(W_2', \langle , \rangle_2').$$

On note par i le morphisme composé. Ainsi, on peut voir aisément que $i(\Gamma) = i(U(W_1) \times U(W_2))$, donc $\overline{\Gamma}$, $\widetilde{\Gamma}$ sont scindés au-dessus Γ en ce cas.
(ii) Si $\dim_E(W_2) = 1$, $W_2 \simeq E(f)$ où $f = 1$ ou $f \in F^\times \setminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. On peut prendre un tel élément $u \in E^\times$ satisfaisant à $\overline{u}/u = -1$, tel que la forme anti-hermitienne soit donnée par la formule suivante :

$$\langle e_2, e_2'\rangle = uf e_2 \overline{e_2'} \text{ pour } e_2, e_2' \in E.$$

On a

$$W = W_1 \otimes_E E(f) \simeq W_1.$$

Rappelons la forme :

$$\langle w_1 \otimes e_2, w_1' \otimes e_2'\rangle_W = \mathrm{Tr}_{E/F}\left(\langle w_1, w_1'\rangle_1(-uf\overline{e_2}e_2')\right) = \mathrm{Tr}_{E/F}(uf\langle e_2 w_1, e_2' w_1'\rangle_1).$$

Nous pouvons identifier W à W_1 par munir W_1 de la forme $\mathrm{Tr}_{E/F}(-uf\langle , \rangle_1)$. Il en résulte que

$$i(\Gamma) = i(U(W_1) \times U(W_2))$$

où $i : \Gamma \longrightarrow Sp(W_1, \mathrm{Tr}_{E/F}(-uf\langle , \rangle_1))$, donc $\overline{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}$ sont scindés au-dessus Γ.
(iii) Si $\dim_E W_1 = \dim_E W_2 = 2$, donc $W_1 \simeq D$ et $W_2 \simeq D$ où D est le corps des quaternions sur F. Soit $E = F(i)$ avec $i^2 = -\alpha$, choisissons un élément j de D tels que $j^2 = -\beta, ij = -ji = k$, de sorte que $\{1, i, j, k\}$ forme une base de D. On note $-$ la conjugaison canonique de D. Par hypothèse, $W_1 \simeq D = E + jE$ muni de la forme

$$\langle e_1 + je_2, e_1' + je_2'\rangle_1 = \mathrm{Tr}_{D/E}\left(\overline{(e_1 + je_2)}(e_1' + je_2')\right) = \overline{e_1}e_1' + \beta\overline{e_2}e_2'$$

où $\mathrm{Tr}_{D/E}(e_1 + je_2) := e_1$. D'autre part, $W_2 \simeq D = E + Ej$, et il existe un élément u de E satisfait à $u^\sigma/u = -1$ où $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle$ tels que la forme anti-hermitienne sur D soit définie de la façon suivante :

$$\langle e_1 + e_2 j, e_1' + e_2' j\rangle_2 = \mathrm{Tr}_{D/E}\left(u(e_1 + e_2 j)(\overline{e_1'} + \overline{e_2' j})\right) = u(e_1\overline{e_1'} + \beta e_2\overline{e_2'}).$$

Rappelons que la F-forme associée à $W = W_1 \otimes W_2$ soit définie de la façon suivante :

$$\langle w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2'\rangle = \mathrm{Tr}_{E/F}\left(\langle w_1, w_1'\rangle\overline{\langle w_2, w_2'\rangle_2}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}_{E/F}\left(-u(\overline{a_1}a_1' + \beta\overline{a_2}a_2')(\overline{b_1}b_1' + \beta\overline{b_2}b_2')\right)$$

pour $w_1 = a_1 + ja_2, w_1' = a_1' + ja_2' \in W_1; w_2 = b_1 + b_1'j, w_2' = b_2' + b_2'j \in W_2$.
On sait que $W = W_1 \otimes_E W_2 \simeq D \otimes_E D \simeq (E + jE) \otimes_E D \simeq D \oplus D$ comme F-espace. Pour montrer que ceci sont aussi isométriques, il suffit de munir l'espace $D \oplus D$ de la forme symplectique ci-dessous :

$$\langle, \rangle_{D\oplus D} = \mathrm{Tr}_{E/F}\left(\overline{\langle, \rangle_2}\right) + \mathrm{Tr}_{E/F}\left(\beta\overline{\langle, \rangle_2}\right).$$

Soit Γ_1 le sous-groupe de $D^\times$ engendré par $E^\times$ et $\langle j \rangle$. Par définition, on peut identifier Γ_1 à un sous-groupe de Γ. De plus $\lambda(\Gamma_1) = \langle \lambda(E^\times), \lambda(j) \rangle = \langle \mathrm{N}_{E/F}(E^\times), \beta \rangle = F^\times$. Rappelons l'application $\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma \xrightarrow{i} Sp(D \oplus D)$. Si $e \in E^\times$, $i((e, e^{-1})) = 1$; Si on prend $j \in \Gamma_1$, on peut voir aisément que $i((j, j^{-1}))$ est dans un sous-groupe parabolique de $Sp(D \oplus D)$. Comme Γ_1 est engendré par $E^\times$ et f, de plus i est un homomorphisme de groupes, il en résulte que $i(\Gamma_1)$ est dans un sous-groupe parabolique de $Sp(D \oplus D)$. Donc la restriction de $[c_{Ro}]$ à Γ_1 est triviale ; utilisant le point $(\star)$, nous obtenons le résultat. □

Lemme 3.8. *Si D est l'unique corps de quaternions sur F et $W_1 = D$, alors les extensions $\overline{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}$ sont scindées sur Γ.*

Démonstration. Rappelons que la forme hermitienne sur D est donnée par $\langle d, d' \rangle_1 = \tau(d)d'$ où τ est l'involution canonique de D. On note

$$\Gamma_1 = \{(g, g^{-1}) | g \in D^\times\}.$$

Γ_1 est un sous-groupe de Γ satisfaisant du point $(\star)$. Par le Théorème d'orthogonalisation, on a $W_2 \simeq \oplus_{i=1}^n (a_i)D$. Par le Lemme 1.18, on se ramère au cas $\dim_D W_2 = 1$. Dans ce cas, l'espace W est isométrique à W_2 en munissant W_2 de la forme $\langle, \rangle_2' = \mathrm{Tr}_{D/F}(\tau(\langle, \rangle_2))$. L'action de Γ_1 sur W_2 est donnée par la formule suivante :

$$d \longmapsto gdg^{-1} \text{ pour } (g, g^{-1}) \in \Gamma_1, d \in W_2 \simeq D.$$

On prend une base $\{1, i, j, k = ij\}$ de D. Par la théorie des nombres, $F^\times$ est engendré par $F^{\times 2}, \mathrm{N}_{D/F}(i), \mathrm{N}_{D/F}(j)$. Notant $t : \Gamma \longrightarrow Sp(W_2, \langle, \rangle_2')$. On pose

$$\Gamma_{1,0} = \{\gamma = (g, g^{-1}) \in \Gamma_1 | \mathrm{N}_{D/F}(g) \in F^{\times 2}\}.$$

L'image de $\Gamma_{1,0}$ dans $Sp(W_2, \langle, \rangle_2')$ est dans celle de $U(W_1) \times U(W_2)$. Soit $\Gamma_{1,1}$ le groupe engendré par (i, i^{-1}) et (j, j^{-1}). L'image de $\Gamma_{1,1}$ est dans un groupe de Borel de $Sp(W_2, \langle, \rangle_2')$. Considérons le groupe intermédiaire Γ_1' engendré par $\Gamma_{1,0}$, i, j. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \Gamma_{1,0} \longrightarrow \Gamma_1' \longrightarrow \Gamma_1'/\Gamma_{1,0} \simeq F^\times/F^{\times 2} \longrightarrow 1.$$

Par le même argument du point $(\star)$, on voit que $\overline{\Gamma_1'}$ est scindé au-dessus Γ_1', d'où le résultat. □

La preuve du Théorème 3.4

D'abord, on a les décompositions de Witt, $W_1 = m_1 H \oplus W_1^0$ et $W_2 = m_2 H \oplus W_2^0$ où W_1^0 et W_2^0 sont anisotropes. Si $W_1^0 = 0$ ou $W_2^0 = 0$, on déduit le résultat du Lemme 3.5. Si $W_1^0 \neq 0$ et $W_2^0 \neq 0$, on a une application $W^0 = W_1^0 \otimes_D W_2^0 \hookrightarrow W = W_1^0 \otimes_D W_2^0 \oplus (W_1^0 \otimes_D m_2 H \oplus m_1 H \otimes_D W_2^0 \oplus m_1 H \otimes m_2 H)$. On peut définir un sous-groupe

$$\Gamma_1 = \{(g_1, g_2) | g_1 \in GU(W_1^0), g_2 \in GU(W_2^0) \text{ tels que } \lambda(g_1)\lambda(g_2) = 1\}.$$

Par le Lemme 3.2, on sait que Γ est un sous-groupe de $U(W_1) \times U(W_2)\Gamma_1$. Il suffit de considèrer the groupe intermédiaire $U(W_1) \times U(W_2) \cdot \Gamma_1$. Par le même argument du point $(\star)$, on est réduit à traiter le groupe Γ_1. Par le Lemme 1.18, on est donc ramené au cas $W = W_1^0 \otimes_D W_2^0$, et par les lemmes 3.6 à 3.8, on trouve le résultat dans ces cas. Ceci termine la démonstration.

Remarque 3.9. *Dans le Théorème 3.4, nous excluons le cas :*
$W = W_1 \otimes_{F'} W_2$ où W_1 (resp. W_2) est un espace symplectique (resp. orthogonal) sur une extension F' de F, de dimension $2n$ (resp. $2m - 1$) avec $n \geq 1, m \geq 1$.
Dans ce cas, on a vu que l'image réciproque de $Sp(W_1)$ dans $\widehat{Sp}(W)$(resp. $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$) est égale à $\widehat{Sp}(W_1)$ (resp. $\overline{Sp}(W)$, $\widetilde{Sp}(W)$) ; a fortiori, le groupe intermédiaire $\widehat{\Gamma}$ (resp. $\overline{\Gamma}$, $\widetilde{\Gamma}$) n'est pas scindé au-dessus Γ.

Proposition 3.10. *Soit $W = W_1 \otimes_{F'} W_2$ un espace symplectique sur F', où W_1 (resp. W_2) est un espace symplectique (resp. orthogonal) de dimension $2n$ (resp. $2m - 1$) avec $n \geq 1$ et $m \geq 1$. On note $\widetilde{GSp}(W_1)$ chaque extension du groupe de similitudes par $\mathbb{C}^\times$ tel que $\widetilde{GSp}(W_1)$ contient $\widetilde{Sp}(W_1)$ comme un sous-groupe.*
On définit

$$\widetilde{\Gamma}^{1/2} = \{(\widetilde{g}, h) \in \widetilde{GSp}(W_1) \times GO(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\lambda(h) = 1\}$$

où $\widetilde{\lambda}$ est le morphisme $\widetilde{GSp}(W_1) \longrightarrow F'^{\times}$. Alors on a un morphisme de groupes $\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{i_{\frac{1}{2}}} \widetilde{Sp}(W); ((g,\epsilon),h) \longmapsto (g\otimes h,\epsilon)$ pour $g\in GSp(W_1), \epsilon\in\mathbb{C}^{\times}, h\in GO(W_2)$, et $\lambda(g)\lambda(h)=1$.

Démonstration. Soient $\{e_1,\cdots,e_n;e_1^{\star},\cdots,e_n^{\star}\}$ une base symplectique de W_1, X (resp. $X^{\star}$) le lagrangien engendré par les e_i (resp. $e_i^{\star}$), $\{f_1,\cdots,f_{2m-1}\}$ une base orthogonale de W_2 sur F'. On sait que $W=X\otimes W_2\oplus X^{\star}\otimes W_2$ (resp. $W_1=X\oplus X^{\star}$) est une polarisation complète. Sous les polarisations ci-dessus, on sait que le groupe $\widetilde{GSp}(W_1)$ (resp. $\widetilde{GSp}(W)$) est engendré par $\widetilde{Sp}(W_1)$ (resp. $\widetilde{Sp}(W)$) avec $F'^{\times}$. On désigne par c_W le 2-cocycle associé au groupe $\widetilde{Sp}(W)$ lié à ψ et $X^{\star}\otimes W_2$ [cf.[MVW], chapitre 1 ou [Kud2]].
(i) $\widetilde{Sp}(W_1)\times O(W_2)$ est un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}$. Par le Théorème 1.22 , on prend le 2-cocycle c_{W_1} de $H^2(Sp(W_1),\mathbb{C}^{\times})$, tel que

$$\widetilde{Sp}(W_1) \xrightarrow{s_1} \widetilde{Sp}(W);$$

$$\widetilde{g}=(g,\epsilon)\longmapsto (g\otimes 1,\epsilon),$$

définit un homomorphisme de groupes, i.e. $c_{W_1}(g_1,g_2)=c_W(g_1\otimes 1, g_2\otimes 1)$ pour $g_1,g_2\in Sp(W_1)$. Comme $O(W_2)$ est un sous-groupe du groupe parabolique $P(X^{\star}\otimes W_2)$, on a un morphisme

$$O(W_2)\xrightarrow{s_2}\widetilde{Sp}(W);$$

$$h\longmapsto (1\otimes h,1).$$

Il s'ensuit que

$$s_1((g,\epsilon))s_2(h)=(g\otimes 1,\epsilon)\cdot(1\otimes h,1)=(g\otimes h, c_W(g\otimes 1,1\otimes h)\epsilon)=(g\otimes h,\epsilon)=i_{\frac{1}{2}}(\widetilde{g},h).$$

Par le résultat de Waldspurger, on sait que $s_1(\widetilde{g})$ commute avec $s_2(h)$, donc $i_{\frac{1}{2}}|_{\widetilde{Sp}(W_1)\times O(W_2)}$ est un homomorphisme de groupes.
De plus, soient $\widetilde{g_1}=(g_1,\epsilon_1),\widetilde{g_2}=(g_2,\epsilon_2)\in\widetilde{Sp}(W_1)$ et $h_1,h_2\in O(W_2)$. On a

$$i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g_1}\widetilde{g_2},h_1h_2)\Big)=i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g_1},h_1)\cdot(\widetilde{g_2},h_2)\Big)=(g_1\otimes h_1,\epsilon_1)\cdot(g_2\otimes h_2,\epsilon_2).$$

Il en résulte que

$$c_{W_1}(g_1,g_2)=c_W(g_1\otimes h_1,g_2\otimes h_2).$$

(ii) On définit $\Lambda(\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}})=\{(\widetilde{g_t},h)\in\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}|\widetilde{g_t}=(g_t,\epsilon) \text{ avec } g_t=\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}, \text{ pour } t\in F^{\times},\epsilon\in\mathbb{C}^{\times},h\in GO(W_2)\}$.

Si on prend deux élements $(\widetilde{g_{t_i}},h_i)=((g_{t_i},\epsilon_i),h_i)$ de $\Lambda(\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}})$ pour $i=1,2$, alors

$$i_{\frac{1}{2}}((\widetilde{g_{t_i}},h_i))=(g_{t_i}\otimes h_i,\epsilon_i)=\left(\begin{pmatrix}h_i&0\\0&t_ih_i\end{pmatrix},\epsilon_i\right).$$

$$c_W(g_{t_1}\otimes h_1,g_{t_2}\otimes h_2)=c_W\left(\begin{pmatrix}h_1&0\\0&t_1h_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_2&0\\0&t_2h_2\end{pmatrix}\right)=1.$$

Donc

$$i_{\frac{1}{2}}((\widetilde{g_{t_1}},h_1))i_{\frac{1}{2}}((\widetilde{g_{t_2}},h_2))=(g_{t_1t_2}\otimes h_1h_2,\epsilon_1\epsilon_2).$$

De plus

$$(\widetilde{g_{t_1}},h_1)(\widetilde{g_{t_2}},h_2)=(\widetilde{g_{t_1}}\widetilde{g_{t_2}},h_1h_2)\overset{c_{W_1}(g_{t_1},g_{t_2})=c_W(g_{t_1}\otimes 1,g_{t_2}\otimes 1)=1}{=}\Big((g_{t_1t_2},\epsilon_1\epsilon_2),h_1h_2\Big).$$

$$i_{\frac{1}{2}}\Big(((g_{t_1t_2},\epsilon_1\epsilon_2),h_1h_2)\Big)=(g_{t_1t_2}\otimes h_1h_2,\epsilon_1\epsilon_2).$$

Il en résulte que

$$i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g_{t_1}},h_1)(\widetilde{g_{t_2}},h_2)\Big)=i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g_{t_1}},h_1)\Big)i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g_{t_2}},h_2)\Big),$$

i.e. $i_{\frac{1}{2}}|_{\Lambda(\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}})}$ est un homomorphisme de groupes.
(iii) Soient $(\widetilde{g},h)=\Big((g,\epsilon),h\Big)\in\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}$ et $(\widetilde{g},h)=(\widetilde{g_0},h_0)\cdot(\widetilde{g_t},h_t)$ avec $(\widetilde{g_0},h_0)=\Big((g_0,\epsilon),h_0\Big)\in\widetilde{Sp}(W_1)\times O(W_2)$, $(\widetilde{g_t},h_t)=\Big((g_t,1),h_t\Big)\in\Lambda(\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}})$, alors

$$i_{\frac{1}{2}}((\widetilde{g},h))=(g\otimes h,\epsilon)=(g_0\otimes h_0,\epsilon)(g_t\otimes h_t,1)=i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g_0},h_0)\Big)i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g_t},h_t)\Big).$$

(iv) En général, soient $(\widetilde{g}^{(i)}, h^{(i)}) = \Big((g^{(i)}, \epsilon^{(i)}), h^{(i)}\Big) \in \widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}$ pour $i = 1, 2$, où $(\widetilde{g}^{(i)}, h^{(i)}) = (\widetilde{g_0}^{(i)}, h_0^{(i)})(\widetilde{g_t}^{(i)}, h_t^{(i)})$ avec $(\widetilde{g_0}^{(i)}, h_0^{(i)}) = \Big((g_0^{(i)}, \epsilon^{(i)}), h_0^{(i)}\Big) \in \widetilde{Sp}(W_1) \times O(W_2)$ et $(\widetilde{g_t}^{(i)}, h_t^{(i)}) = \Big((g_t^{(i)}, 1), h_t^{(i)}\Big) \in \Lambda(\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}})$; alors

$$(\widetilde{g}^{(1)}, h^{(1)})(\widetilde{g}^{(2)}, h^{(2)}) = \Big((g_0^{(1)}, \epsilon^{(1)}), h_0^{(1)}\Big)\Big((g_t^{(1)}, 1), h_t^{(1)}\Big)\Big((g_0^{(2)}, \epsilon^{(2)}), h_0^{(2)}\Big)\Big((g_t^{(2)}, 1), h_t^{(2)}\Big)$$

$$\overset{\text{La restriction du cocycle } c_W \text{ au groupe parabolique minimal est triviale}}{=} \Big((g_0^{(1)}, \epsilon^{(1)}), h_0^{(1)}\Big)\Big((g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1}, \epsilon^{(2)}), h_t^{(1)} h_0^{(2)} (h_t^{(1)})^{-1}\Big)$$

$$\Big((g_t^{(1)}, 1), h_t^{(1)}\Big)\Big((g_t^{(2)}, 1), h_t^{(2)}\Big)$$

$$= \Big(\Big(g_0^{(1)} g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1}, c_{W_1}(g_0^{(1)}, g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1}) \epsilon_1^{(1)} \epsilon^{(2)}\Big), h_0^{(1)} h_t^{(1)} h_0^{(2)} (h_t^{(1)})^{-1}\Big)\Big((g_t^{(1)} g_t^{(2)}, 1), h_t^{(1)} h_t^{(2)}\Big).$$

Donc

$$i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g}^{(i)}, h^{(i)})\Big) = \Big(g_0^{(i)} \otimes h_0^{(i)}, \epsilon^{(i)}\Big)\Big(g_t^{(i)} \otimes h_t^{(i)}, 1\Big).$$

$$i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g}^{(1)}, h^{(1)})\Big) i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g}^{(2)}, h^{(2)})\Big) = \Big(g_0^{(1)} \otimes h_0^{(1)}, \epsilon^{(1)}\Big)\Big(g_t^{(1)} \otimes h_t^{(1)}, 1\Big)\Big(g_0^{(2)} \otimes h_0^{(2)}, \epsilon^{(2)}\Big)\Big(g_t^{(2)} \otimes h_t^{(2)}, 1\Big),$$

et

$$i_{\frac{1}{2}}\Big(\big(\widetilde{g}^{(1)}, h^{(1)}\big)\big(\widetilde{g}^{(2)}, h^{(2)}\big)\Big) = \Big(g_0^{(1)} g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1} \otimes h_0^{(1)} h_t^{(1)} h_0^{(2)} (h_t^{(1)})^{-1}, \epsilon^{(1)} \epsilon^{(2)} c_{W_1}(g_0^{(1)}, g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1})\Big)$$

$$\Big(g_t^{(1)} g_t^{(2)} \otimes h_t^{(1)} h_t^{(2)}, 1\Big)$$

$$\overset{c_{W_1}\big(g_0^{(1)}, g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1}\big) = c_W(g_0^{(1)} \otimes h_0^{(1)}, g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1} \otimes h_t^{(1)} \otimes h_0^{(2)} (h_t^{(1)})^{-1})}{=} \Big(g_0^{(1)} \otimes h_0^{(1)}, \epsilon^{(1)}\Big)$$

$$\Big(g_t^{(1)} g_0^{(2)} (g_t^{(1)})^{-1} \otimes h_t^{(1)} h_0^{(2)} (h_t^{(1)})^{-1}, \epsilon^{(2)}\Big)\Big(g_t^{(1)} g_t^{(2)} \otimes h_t^{(1)} h_t^{(2)}, 1\Big)$$

$$\overset{c_W|_{P \times G} = 1}{=} \Big(g_0^{(1)} \otimes h_0^{(1)}, \epsilon^{(1)}\Big)\Big(g_t^{(1)} \otimes h_t^{(1)}, 1\Big)\Big(g_0^{(2)} \otimes h_0^{(2)}, \epsilon^{(2)}\Big)\Big(g_t^{(2)} \otimes h_2^{(2)}, 1\Big) = i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g}^{(1)}, h^{(1)})\Big) i_{\frac{1}{2}}\Big((\widetilde{g}^{(2)}, h^{(2)})\Big).$$

Ceci termine la démonstration ! □

Remarque 3.11. *(1) La démonstration de la Proposition 3.10 peut expliquer concrètement les démonstrations des Lemme 3.6— Lemme 3.8.*
(2) Le résultat dans la Proposition 3.10 sera vrai si on considère le groupe métaplectique $\overline{Sp}(W)$ ou le groupe de similitudes $\overline{GSp}(W)$ défini en la sous-sous-section 1.4.2.
(3) On a vu que le résultat dans la Proposition 3.10 est essentiellement pour le groupe métaplectique $\widetilde{Sp}(W)$, qui ne dépend pas de choix de l'extension du groupe $\widetilde{Sp}(W)$ par $F^\times$, i.e. $\widetilde{GSp}(W)$.

3.2 Des Lemmes

Dans cette sous-sous-sous section, nous rappelons des lemmes de Moore en homologie et montrons quelque résultats en scindage.
Pour le corps $F^\times$, on désigne par $\mathfrak{O}$ l'anneau d'entiers, $\mathfrak{P}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{O}$, $U_n = \{u \in F^\times | u \equiv 1 \mod \mathfrak{P}^n\}$, $U = U_0$, k_F sons corps résiduelle d'ordre $q = p^l$ avec $p \neq 2$, $U_0/U_1 \simeq k^\times$ un groupe cyclique d'ordre $q - 1$. De plus, on peut prendre un sous-groupe de S de U tel que $U \simeq U_1 \times S$ [cf. [Mo2] Page 20]. On désigne par A un groupe abélien fini d'ordre n. Supposons que $2|n$ et $(n, p) = 1$.

Lemme 3.12. *On a l'isomorphisme*

$$H^2(F^\times, A) \simeq \mathrm{Hom}(S, A).$$

Démonstration. Ceci découle de [[Mo2], Page 20]. D'abord, $F^\times \simeq U \times \mathbb{Z}$, par la suite spectrale de Leray, on obtient

$$H^2(F^\times, A) \simeq H^2(\mathbb{Z}, A) \oplus H^1(\mathbb{Z}, H^1(U, A)) \oplus H^2(U, A).$$

Le premier terme est zéro et $H^1(\mathbb{Z}, H^1(U, A)) \simeq \mathrm{Hom}(U, A)$. Comme $U \simeq S \times U_1$, on a $\mathrm{Hom}(U, A) \simeq \mathrm{Hom}(S, A)$. En utilisant la suite de spectrale de Leray encore une fois, on obtient

$$H^2(U, A) \simeq H^2(S, A) \oplus H^1(S, H^1(U_1, A)) \oplus H^2(U_1, A).$$

Comme S est cyclique, on a $H^2(S, A) = 0$ et $H^1(S, H^1(U_1, A)) \simeq \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}(U_1, A)) = 0$. De plus $H^2(U_1, A)$ est un groupe de p-torsion et de n-torsion, donc zéro. Finalement, on trouve le résultat. □

Lemme 3.13. *Pour le sous-groupe $F^{\times n}$ de $F^\times$, l'application $H^2(F^\times, A) \longrightarrow H^2(F^{\times n}, A)$ est nulle.*

Démonstration. C'est une consequence du Lemme 3.12 et Proposition 3.27. □

Rappels : Soient D un corps, muni d'une involution τ, F le corps commutatif formé par les points fixés de τ, W un espace vectoriel de dimension finie sur D, muni d'un produit ϵ-hermitien $\langle,\rangle$(où $\epsilon = \pm 1$). On désigne par $U(W)$ le groupe unitaire de $(W, \langle,\rangle)$ et par $GU(W)$ le groupe de similitudes unitaire de $(W, \langle,\rangle)$.
On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow U(W) \longrightarrow GU(W) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{GU(W)} \longrightarrow 1.$$

Il en résulte qu'on a des longues suites exactes

$$\cdots \longrightarrow H^2(\Lambda_{GU(W)}, A) \longrightarrow H^2(GU(W), A) \xrightarrow{\lambda^2} H^2(U(W), A) \longrightarrow \cdots$$

Prenons un élément $[c]$ de $H^2(GU(W), A)$. Associons $[c]$(resp. $\lambda^2([c])$) le groupe $\widetilde{GU}^A(W)$ (resp. $\widetilde{U}^A(W)$). On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \widetilde{U}^A(W) & \longrightarrow & U(W) & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \widetilde{GU}^A(W) & \longrightarrow & GU(W) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Par le lemme du serpent, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \widetilde{U}^A(W) & \longrightarrow & U(W) & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \widetilde{GU}^A(W) & \longrightarrow & GU(W) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \Lambda_{\widetilde{GU}^A(W)} & = & \Lambda_{GU(W)} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Lemme 3.14. *Grâce au monomorphisme $F^\times \hookrightarrow GU(W)$, on peut regarder $F^\times$ comme un sous-groupe de $GU(W)$, alors la suite exacte*

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \widetilde{GU}^A(W) \longrightarrow GU(W) \longrightarrow 1$$

est scindée sur $F^{\times n}$.

Démonstration. On note $F^\times\widetilde{U(W)}^A$ l'image réciproque de $F^\times U(W)$ dans $\widetilde{GU}^A(W)$. Il suffit de montrer que chaque suite exacte

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow F^\times\widetilde{U(W)}^A \longrightarrow F^\times U(W) \longrightarrow 1$$

est scindée sur $F^{\times n}$. Comme $F^\times U(W) \simeq F^\times \times PU(W)$, où $PU(W) = U(W)/\{\pm 1\}$. Par la suite spectrale de Leray, on obtient

$$H^2\Big(F^\times PU(W), A\Big) \simeq H^2(PU(W), A) \oplus H^1(PU(W), H^1(F^\times, A)) \oplus H^2(F^\times, A)$$

$$\simeq H^2(PU(W), A) \oplus \Big(\mathrm{Hom}(PU(W), \mathrm{Hom}(F^\times, A)) \oplus Hom(S, A)\Big),$$

où S est le sous-groupe de $F^\times$ défini en Lemme 3.12. Donc l'application $H^2(F^\times U(W), A) \longrightarrow H^2(F^{\times n}, A)$ est nulle. □

Lemme 3.15. *Par le Lemme 3.14 ci-dessus, considérons $F^{\times n}$ comme un sous-groupe de $\widetilde{GU}^A(W)$, alors $F^{\times n}$ commute à $\widetilde{U}^A(W)$.*

Démonstration. Par la suite spectrale de Leray ci-dessus, on a vu que la restriction du cocycle de $[c]$ à $F^{\times n} \times PU(W)$ est triviale, ceci implique le résultat. □

3.3 Constitution des représentations de bigraphe forte

Dans cette sous-sous-section, nous expliquont comment on obtient une représentation du bigraphe forte en utilisant le théorie établie dans la section 2.

Supposons que F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire p. Fixons un caractère non trivial $\psi : F \longrightarrow \mathbb{C}$. Soient W un espace symplectique de dimension $2n$ sur F, ω_ψ la représentation de Weil du groupe $\overline{Sp(W)}$. Si H est un sous-groupe réductif de $Sp(W)$, nous notons $\overline{H}$ son image réciproque dans $\overline{Sp(W)}$.

Soient D un corps de centre F', F' une extension finie de F, $W = W_1 \otimes_D W_2$ une décomposition en produit tensoriel. Ainsi $(U(W_1), U(W_2))$ est une paire réductive duale irréductible de $Sp(W)$; nous notons Γ le groupe intermédiaire associé. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow U(W_1) \times U(W_2) \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\lambda} \Lambda_\Gamma \longrightarrow 1$$

où $\Lambda_\Gamma = \{\lambda(g_1) = \lambda(g_2)^{-1} | (g_1, g_2) \in \Gamma\}$ est un sous-groupe de $F'^{\times}$. On a aussi les suites exactes

$$1 \longrightarrow U(W_i) \longrightarrow GU(W_i) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{GU(W_i)} \longrightarrow 1,$$

où $\Lambda_{GU(W_i)}$ est un sous-groupe de $F'^{\times}$ contenant Λ_Γ.On notera

$$G^\Gamma U(W_i) = \text{ l'image réciproque de } \Lambda_\Gamma \text{ dans } GU(W_i).$$

3.3.1 Le cas des groupes scindés

(i) Tout d'abord, supposons que $W = W_1 \otimes_D W_2$ n'est pas le cas dans la Proposition 3.10. Par le Théorème 3.4 , l'extension $\overline{\Gamma}$ est scindée sur Γ, on peut obtenir un homomorphisme qui n'est pas unique en général

$$\Gamma \xrightarrow{i_\Gamma} \overline{Sp(W)}.$$

Donc on obtient une représentation lisse du groupe Γ par restriction de la représentation de Weil à Γ, on note ρ_ψ cette représentation de Γ.
Pour les groupes, on a les relations suivantes

$$G^\Gamma U(W_i)/U(W_i) \simeq \Lambda_\Gamma$$

et

$$\Gamma/U(W_1) \times U(W_2) \simeq \Lambda_\Gamma.$$

Par la Proposition 3.3, $\Lambda_\Gamma = F'^{\times}$ ou F'^{2} ou bien $\mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$ avec E'/F' une extension quadratique, il en résulte que $F'^{\times}/\Lambda_\Gamma$ est un groupe abélien de cardinal fini.
De plus, par défintion, $G^\Gamma U(W_i) \supset F'^{\times} U(W_i)$ et $G^\Gamma U(W_i)/F'^{\times} U(W_i)$ est un groupe abélien de cardinal fini.

Théorème 3.16. *Si on définit*

$$\pi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^\Gamma U(W_1) \times G^\Gamma U(W_2)} \rho_\psi,$$

alors π est une représentation de bigraphe forte.

Démonstration. Pour $i = 1, 2$, on a

$$F'^{\times} \times U(W_i) \longrightarrow GU(W_i).$$

L'image est dans le groupe $G^\Gamma U(W_i)$, notée par $F'^{\times} U(W_i)$. On a aussi un homomorphisme

$$\Big(F'^{\times} \times U(W_1)\Big) \times \Big(F'^{\times} \times U(W_2)\Big) \longrightarrow GU(W_1) \times GU(W_2).$$

Supposons $F'^{\times} \times U(W_1) \times U(W_2)$ le sous-groupe de $\Big(F'^{\times} \times U(W_1)\Big) \times \Big(F'^{\times} \times U(W_2)\Big)$ constitué par les éléments $\Big((f, g_1), (f^{-1}, g_2)\Big)$ pour $f \in F'^{\times}$, $g_i \in U(W_i)$. Notons son image dans $GU(W_1) \times GU(W_2)$ par $F'^{\times}\Big(U(W_1) \times U(W_2)\Big)$ qui est un sous-groupe de Γ. On définit une représentation intermédiaire

$$\pi^{int} = c - \mathrm{Ind}_{F'^{\times}\left(U(W_1) \times U(W_2)\right)}^{F'^{\times} U(W_1) \times F'^{\times} U(W_2)} \rho_\psi.$$

Comme $\rho_\psi|_{U(W_1)\times U(W_2)}$ est une représentation de bigraphe forte, par le Théorème 2.33 et la Remarque 2.34, on voit que π^{int} est aussi une représentation de bigraphe forte.
De plus, pour les groupes, on a

$$G^\Gamma U(W_1)/F'^\times U(W_1) \simeq G^\Gamma U(W_2)/F'^\times U(W_2) \simeq \Gamma/F'^\times\Big(U(W_1)\times U(W_2)\Big) \simeq \Lambda_\Gamma/F'^{\times 2}$$

et

$$\Gamma \cap \Big(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2)\Big) = F'^\times\Big(U(W_1)\times U(W_2)\Big).$$

Donc

$$\Gamma\Big(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2)\Big)/F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2) \simeq \Gamma/\Gamma\cap\Big(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2)\Big) \simeq \Lambda_\Gamma/F'^{\times 2}.$$

Cela implique que

$$\Gamma\Big(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2)\Big)/F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2) \text{ est le graphe d'un isomorphisme}$$

$$G^\Gamma U(W_1)/F'^\times U(W_1) \longrightarrow G^\Gamma U(W_2)/F'^\times U(W_2).$$

Par la relation des groupes ci-dessous, on trouve

$$\pi^{int} = \mathrm{Res}^{\Gamma(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2))}_{F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2)}\, c-\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2))}\rho_\psi.$$

C'est-à-dire que π^{int} peut se prolonger en une représentation du groupe $\Gamma\Big(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2)\Big)$, en fait $c-\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2))}\rho_\psi$. Utilisons le Théorème 2.35 ; nous obtenons que la représentition

$$c-\mathrm{Ind}^{G^\Gamma U(W_1)\times G^\Gamma U(W_2)}_{\Gamma(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2))}\Big(c-\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma(F'^\times U(W_1)\times F'^\times U(W_2))}\rho_\psi\Big) = \pi$$

est une représentation de bigraphe forte. □

(ii) Soit $W \simeq W_1\otimes_{F'} W_2$ un espace symplectique sur F' où W_1(resp. W_2) est un espace symplectique (resp. orthogonal) de dimension $2n$ (resp. $2m-1$) avec $n\geq 1$ et $m \geq 1$. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow Sp(W_1) \longrightarrow GSp(W_1) \longrightarrow F'^\times \longrightarrow 1.$$

On déduit de la suite exacte de Hochschild-Serre

$$\cdots \longrightarrow H^2(F'^\times, A) \longrightarrow H^2(GSp(W_1), A) \xrightarrow{d} H^2(Sp(W_1), A) \longrightarrow \cdots$$

où A est un groupe abélien d'ordre n et $2|n, (n,p)=1$.
Prenons un élément $[c]$ de $H^2(GSp(W_1), A)$ tel que $d([c]) = [c_{Rao}]$. La classe $[c]$ détermine un groupe $\widetilde{GSp}^A(W_1)$, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \widetilde{Sp}^A(W) & \longrightarrow & Sp(W) & \longrightarrow & 1\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \widetilde{GSp}^A(W) & \longrightarrow & GSp(W) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Par le lemme du serpent, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \widetilde{Sp}^A(W_1) \longrightarrow \widetilde{GSp}^A(W_1) \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} \Lambda_{\widetilde{GSp}^A(W_1)} = F'^\times \longrightarrow 1.$$

Nous pouvons définir un sous-groupe intermédiaire

$$\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} = \{(\widetilde{g}, h) \in \widetilde{GSp}^A(W_1)\times GO(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\lambda(h) = 1\}.$$

Considérons l'application $H^2(GSp(W_1), A) \longrightarrow H^2(GSp(W_1), \mathbb{C}^\times)$, l'image de $[c]$ détermine le groupe $\widetilde{GSp}(W_1)$. Donc on peut regarder $\widetilde{GSp}^A(W_1)$ comme un sous-groupe de $\widetilde{GSp}(W_1)$. Il en résulte que $\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}$ est un sous-groupe de

$\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}$ défini dans la Proposition 3.10. Donc par la Proposition 3.10 et la Remarque 3.11, on peut obtenir un morphisme de groupes

$$\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} \xrightarrow{i_{A\frac{1}{2}}} \widetilde{Sp}(W).$$

Grâce à ce morphisme, on obtient une représentation lisse du groupe $\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}$ par restriction de la représentation de Weil, notée ρ_ψ. Par suite, on a des suites exactes

$$1 \longrightarrow \widetilde{Sp}^A(W_1) \times O(W_2) \longrightarrow \widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}} \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow O(W_2) \longrightarrow GO(W_2) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{GO(W_2)} \longrightarrow 1.$$

Par définition, $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}} \subset \Lambda_{GO(W_2)} \subset \Lambda_{\widetilde{GSp}^A(W_1)} = F'^{\times}$, nous noterons $G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)$ (resp. $G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^A(W_1)$) l'image réciproque de $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}$ dans $GO(W_2)$ (resp. $\widetilde{GSp}^A(W_1)$). Pour les groupes, on a les relations

$$G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^A(W_1)/\widetilde{Sp}^A(W_1) \simeq G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)/O(W_2) \simeq \widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}/\widetilde{Sp}^A(W_1) \times O(W_2) \simeq \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}.$$

Par la Proposition 3.3, les groupes $F'^{\times}/\Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}$, ou $G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_1)/F'^{\times}O(W_1)$ sont abéliens de cardinals finis.

Théorème 3.17. *Si on définit*

$$\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}^{G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)} \rho_\psi,$$

alors π est une représentation de bigraphe forte.

Démonstration. Nous choisissions les groupes intermédiaires suivants :

$$F'^{\times n}O(W_2), F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \text{ et } F'^{\times n}(\widetilde{Sp}^A(W_1) \times O(W_2)).$$

On a

$$G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^A(W_1)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \simeq G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)/O(W_2) \simeq \widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}/F'^{\times n}(\widetilde{Sp}^A(W_1) \times O(W_2)) \simeq \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}/F'^{\times 2n} \subset F'^{\times}/F'^{\times 2n}.$$

Par la théorie des nombres[cf. [N], Chapter II, Page 142, Corollary], on sait que $F'^{\times}/F'^{\times 2n}$ est un groupe abélien de cardinal fini. Nous définissons la représentation intermédiaire de la façon suivante :

$$\pi^{int} = c - \mathrm{Ind}_{F'^{\times n}(\widetilde{Sp}^A(W_1)\times O(W_2))}^{F'^{\times n}(\widetilde{Sp}^A(W_1))\times F'^{\times n}(O(W_2))} \rho_\psi.$$

Par le Théorème 2.33 et la Remarque 2.34, on sait que π^{int} est aussi une représentation de bigraphe forte. On a aussi la relation entre groupes suivante :

$$\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} \cap \Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \times F'^{\times n}O(W_2)\Big) = F'^{\times n}\Big(\widetilde{Sp}^A(W_1) \times O(W_2)\Big),$$

et

$$\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}\Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2)\Big)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \times F'^{\times n}O(W_2) \simeq \widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}/\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} \cap \Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \times F'^{\times n}O(W_2)\Big) \simeq \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}/F'^{\times 2n}.$$

Cela implique que

$$\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}\Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \times F'^{\times n}O(W_2)\Big)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \times F'^{\times n}O(W_2) \text{ est le graphe d'un isomorphisme}$$

$$G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^A(W_1)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \longrightarrow G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)/F'^{\times n}O(W_2).$$

Par la relation entre groupes ci-dessous, on trouve

$$\pi^{int} = \mathrm{Res}_{F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2)}^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2))} c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2))} \rho_\psi.$$

Donc π^{int} peut se prolonger en une représentation (i.e. $c-\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^{A}(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2))}\rho_\psi$) du groupe $\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}\Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^{A}(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2)\Big)$. Utilisant le Théorème 2.35, nous obtenons que

$$c-\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^{A}(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2))}^{G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^{A}(W_1)\times G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)}\Big(c-\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^{A}(W_1)\times F'^{\times n}O(W_2))}\rho_\psi\Big)=\pi$$

est une représentation de bigraphe forte. □

Remarque 3.18. *Pour présenter simplement le résultat, nous notons aussi $G^{\Gamma}U(W_1)\times G^{\Gamma}U(W_1)$ (resp. Γ) représenté $G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^{A}(W_1)\times G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)$ (resp. $\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}$) en cas (ii) ci-dessus.*

Remarque 3.19. *(1) La définition de π dépend du choix de l'homomorphisme $\Gamma\xrightarrow{i_\Gamma}Mp(W)$, pour obtenir une correspondance intéressante, il faut choisir le morphisme **approprié** $\Gamma\xrightarrow{i_\Gamma}Mp(W)$.*
(2) On peut prendre un autre sous-groupe intermédiaire Γ'(par exemple un sous-groupe de Γ contenant $U(W_1)\times U(W_2)$) pour construire des représentations de bigraphe forte, mais ce seront des représentations des groupes $G^{\Gamma'}U(W_1)\times G^{\Gamma'}U(W_2)$.
(3) Pour le modèle realisé la représentation de bigraphe π du groupe $G^{\Gamma}U(W_1)\times G^{\Gamma}U(W_2)$, nous indiquons une voie possible : le premier étape, on peut essayer de écrire le modèle realisé la représentation ρ_ψ du groupe intermédiaire Γ qui est une extension de $U(W_1)\times U(W_2)$ par un groupe abélien Λ_Γ en utilisant les démonstrations des Lemme 3.5— Lemme 3.8 et de la Proposition 3.10 ; le deuxiéme étape, utilisons le technique canonique en représentation locale pour trouver finalement un modèle de $c-\mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G^{\Gamma}U(W_1)\times G^{\Gamma}U(W_2)}\rho_\psi$.

Remarque 3.20. *Si $W=W^{(1)}\oplus W^{(2)}$ avec $W^{(i)}=W_1^{(i)}\otimes_{D^{(i)}}W_2^{(i)}$, on sait que $\Big(U(W_1^{(1)})\times U(W_1^{(2)}),U(W_2^{(1)})\times U(W_2^{(2)})\Big)$ est une paire réductive duale de $Sp(W)$, en ce cas, on prend les groupes intermédiaires $\Gamma^{(i)}$ et construit les représentations $\pi^{(i)}$ de bigraphe forte des groupes $G^{\Gamma^{(i)}}U(W_1^{(i)})\times G^{\Gamma^{(i)}}U(W_2^{(i)})$ pour $i=1,2$, par la Proposition 2.30, $\pi_1\times\pi_2$ est aussi une représentation du bigraphe forte du groupe $\Big(G^{\Gamma^{(1)}}U(W_1^{(1)})\times G^{\Gamma^{(2)}}U(W_1^{(2)})\Big)\times\Big(G^{\Gamma^{(1)}}U(W_2^{(1)})\times G^{\Gamma^{(2)}}U(W_2^{(2)})\Big)$.*

3.3.2 Exemples I

Soient F un corps local non archimédien caractéristique résiduelle impaire p, A un groupe abélien fini d'ordre n avec $2|n$ et $(n,p)=1$; D un corps sur F' qui soit une extension finie de F, muni de l'involution canonique τ.

$(W_1,\langle,\rangle_1)$(resp. $(W_2,\langle,\rangle_2)$) un espace ϵ_1(resp. ϵ_2)-hermitien sur D à droite(resp. à gauche) tel que $\epsilon_1\epsilon_2=-1$, $W=W_1\otimes_D W_2$ un espace symplectique sur F, muni de la forme $\mathrm{Tr}_{F'/F}(\langle,\rangle_1\otimes\tau(\langle,\rangle_2))$, $(U(W_1),U(W_2))$ une paire réductive duale de $Sp(W)$.

Γ le groupe intermédiaire défini ci-dessus, ω_ψ la représentation de Weil de $\widetilde{Sp}(W)$, $\Gamma\xrightarrow{i_\Gamma}\widetilde{Sp}(W)$ l' homomorphisme naturel , $\rho_\psi=\omega_\psi|_\Gamma$. Supposons qu'on a des décompositions de Witt $W_i=W_i^0\oplus m_iH_i$ avec W_i^0 un espace anisotrope et H_i le plan hyperbolique.

Cas (1) Soient $D=F'$, $\epsilon_1=-1$, $\epsilon_2=1$, $U(W_1)=Sp(W_1)$, $U(W_2)=O(W_2)$; $GU(W_1)=GSp(W_1)$, $GU(W_2)=GO(W_2)$.

(i) $\dim_{F'}W_2^0=0,4$, $\Gamma=\{(g,h)\in GSp(W_1)\times GO(W_2)|\lambda(g)\lambda(h)=1\}$, $\Lambda_\Gamma=F'^{\times}$, $G^{\Gamma}Sp(W_1)=GSp(W_1)$, $G^{\Gamma}O(W_2)=GO(W_2)$. Donc $\pi=c-\mathrm{Ind}_{\Gamma}^{GSp(W_1)\times GO(W_2)}\rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

(ii) $\dim_{F'}W_2^0=1$, $\Gamma^A:=\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}=\{(\widetilde{g},h)\in\widetilde{GSp}^{A}(W_1)\times GO(W_2)|\widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\lambda(h)=1\}$, $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}=F^{\times2}$, $\widetilde{GSp}^{A}_{+}(W_1):=G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}\widetilde{Sp}^{A}(W_1)=\{\widetilde{g}\in\widetilde{GSp}^{A}(W_1)|\widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\in F^{\times2}\}$, $G^{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}O(W_2)=GO(W_2)$. Donc $\pi=c-\mathrm{Ind}_{\Gamma^A}^{\widetilde{GSp}^{A}_{+}(W_1)\times GO(W_2)}\rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

(iii) $\dim W_2^0 = 2$, $W_2^0 = E'(f)$ où E' est une extension quadratique de F', $f = 1$ ou $f \in F' \setminus \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$. $\Gamma = \{(g,h) \in GSp(W_1) \times GO(W_2) | \lambda(g)\lambda(h) = 1\}$, $\Lambda_\Gamma = \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$, $GSp_+(W_1) := G^\Gamma Sp(W_1) = \{g \in GSp(W_1) | \lambda(g) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$, $G^\Gamma O(W_2) = GO(W_2)$. Donc $\pi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{GSp_+(W_1)\times GO(W_2)} \rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

(iv) $\dim_{F'} W_2^0 = 3$, $\Gamma^A := \widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} = \{(\widetilde{g}, h) \in \widetilde{GSp}^A(W_1) \times GO(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\lambda(h) = 1\}$, $\Lambda_\Gamma = F'^{\times}$, $G^{\Gamma^A}\widetilde{Sp}^A(W_1) = \widetilde{GSp}^A(W_1)$, $G^{\Gamma^A}O(W_2) = GO(W_2)$. Donc $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma^A}^{\widetilde{GSp}^A(W_1)\times GO(W_2)} \rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

Cas (2) Soient $D = E'$ une extension quadratique de F', $\Gamma = \{(g,h) \in GU(W_1) \times GU(W_2) | \lambda(g)\lambda(h) = 1\}$.

(i) Si $\dim_{E'} W_1$ et $\dim_{E'} W_2$ sont paires. En ce cas, $\Lambda_\Gamma = F'^{\times}$, $G^\Gamma U(W_i) = GU(W_i)$, $\pi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{GU(W_1)\times GU(W_2)} \rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

(ii) Si $\dim_{E'} W_1$, $\dim_{E'} W_2$ sont impaires, $\Lambda_\Gamma = \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$, $G^\Gamma U(W_1) = GU(W_i)$, $\pi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{GU(W_1)\times GU(W_2)} \rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

(iii) L'autre cas, supposons que $\dim_{E'} W_1$ est paire et $\dim_{E'} W_2$ est impaire. $\Lambda_\Gamma = \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$, $GU_+(W_1) := G^\Gamma U(W_2) = \{g \in GU(W_2) | \lambda(g) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$. $G^\Gamma U(W_2) = GU(W_2)$. Donc $\pi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{GU_+(W_1)\times GU(W_2)} \rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

Cas (3) Soient D l'unique corps de quaternions sur F', $G^\Gamma U(W_i) = GU(W_i)$, alors $\pi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{GU(W_1)\times GU(W_2)} \rho_\psi$ est une représentation de bigraphe forte.

Cas (1)' Soient $D = F'$, $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = 1$, $U(W_1) = Sp(W_1)$, $U(W_2) = O(W_2)$; $GU(W_1) = GSp(W_1)$, $GU(W_2) = GO(W_2)$.

(i)' Si $\dim_{F'} W_2$ est paire.
Pour chaque une extension quadratique E' de F', On définit : $G^{E'}Sp(W_1) = \{g \in GSp(W_1) | \lambda(g) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$, $G^{E'}O(W_2) = \{h \in GO(W_2) | \lambda(h) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$, et un autre sous-groupe intermédiaire $\Gamma^{E'} = \{(g,h) \in G^{E'}Sp(W_1) \times G^{E'}O(W_2) | \lambda(g)\lambda(h) = 1\}$ de Γ. Alors $\pi^{E'} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma^{E'}}^{G^{E'}Sp(W_1)\times G^{E'}O(W_2)} \rho_\psi|_{\Gamma^{E'}}$ est une représentation de bigraphe forte.

(ii)' Si $\dim_{F'} W_2$ est impaire.
Dans ce cas, on définit : $\widetilde{GSp}_+^A(W_1) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GSp}^A(W_1) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) \in F'^{\times 2}\}$, $GO_+(W_2) = \{h \in GO(W_2) | h \in GO(W_2) \lambda(h) \in F^{\times 2}\}$, un autre sous-groupe intermédiaire $\Gamma_+^A = \{(g,h) \in \widetilde{GSp}_+^A(W_1) \times GO_+(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\lambda(h) = 1\}$ de $\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}$. Alors $\pi_+ = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_+^A}^{\widetilde{GSp}_+^A(W_1)\times GO_+(W_2)} \rho_\psi|_{\Gamma_+^A}$ est aussi une représentation de bigraphe forte.

Cas (2)' Soit $D = E'$ une extension quadratique de F'. Si on définit $GU^{E'}(W_i) = \{g \in GU(W_i) | \lambda(g) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$, $\Gamma^{E'} = \{(g,h) \in GU^{E'}(W_i) | \lambda(g)\lambda(h) = 1\}$, alors $\pi^{E'} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma^{E'}}^{GU^{E'}(W_1)\times GU^{E'}(W_2)} \rho_\psi|_{\Gamma^{E'}}$ est aussi une représentation de bigraphe forte.

3.3.3 Le cas des groupes non scindés

(i) Supposons que $W = W_1 \otimes_D W_2$ n'est pas le cas dans la Proposition 3.10. Rappelons la définition du groupe intermédiaire

$$\Gamma = \{(g,h) \in GU(W_1) \times GU(W_2) | \lambda(g)\lambda(h) = 1\}.$$

Par le Théorème 3.4, l'extension $\overline{\Gamma}$ est scindée sur Γ, et on obtient une représentation lisse du groupe Γ par restriction de la représentation de Weil à Γ, on la note ρ_ψ. De plus, pour chaque groupe $\widetilde{GU}^A(W_i)$, on a les suites exactes

$$1 \longrightarrow \widetilde{U}^A(W_i) \longrightarrow \widetilde{GU}^A(W_i) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{\widetilde{GU}^A(W_i)} = \Lambda_{GU(W_i)} \longrightarrow 1.$$

On notera

$$\widetilde{\Gamma}^A = \{(\widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \widetilde{GU}^A(W_1) \times \widetilde{GU}^A(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) = 1\},$$

donc on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \widetilde{U}^A(W_1) \times \widetilde{U}^A(W_2) \longrightarrow \widetilde{\Gamma}^A \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A} = \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A} \longrightarrow 1.$$

On notera

$$G^{\widetilde{\Gamma}^A} \widetilde{U}^A(W_i) = \text{ l'image réciproque de } \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A} \text{ par l'application de } \lambda.$$

Évidemment, on a un homomorphisme

$$\widetilde{\Gamma}^A \xrightarrow{p} GU(W_1) \times GU(W_2);$$

son image est Γ. Donc on obtient une représentaion $\rho_\psi|_{\widetilde{\Gamma}^A}$ de $\widetilde{\Gamma}^A$, notée $\widetilde{\rho}_\psi$. D'après le Lemme 3.15, on obtient un sous-groupe $F^{\times n}\widetilde{U}^A(W_i)$ de $\widetilde{GU}^A(W_i)$; de la même manière, on définit un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}^A$ de la fraçon suivante :

$$F^{\times n}(\widetilde{U}^A(W_1) \times \widetilde{U}^A(W_2)) = \{\big((t_1, \widetilde{u_1}), (t_2, \widetilde{u_2})\big) | t_1 = t_2^{-1} \in F^{\times n}, \widetilde{u_i} \in \widetilde{U}^A(W_i)\}.$$

Théorème 3.21. *Si on définit*

$$\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_1) \times G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_2)} \widetilde{\rho}_\psi,$$

alors π est une représentation de bigraphe forte.

Démonstration. Vu la définition de $\widetilde{\rho}_\psi = \rho_\psi|_{\widetilde{\Gamma}^A}$ à l'aider du morphisme $\widetilde{\Gamma}^A \xrightarrow{p} \Gamma$, il en résulte que $\widetilde{\rho}_\psi|_{\widetilde{U}(W_1)\times\widetilde{U}(W_2)}$ est une représentation de bigraphe forte par la démonstration de la Remarque 2.32. On définit une représentation intermédiaire

$$\pi^{int} = c - \mathrm{Ind}_{F^{\times n}\left(\widetilde{U}^A(W_1) \times \widetilde{U}^A(W_2)\right)}^{F^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)} \widetilde{\rho}_\psi.$$

Par le Théorème 2.33 et la Remarque 2.34, on sait que π^{int} est aussi une représentation de bigraphe forte. De plus, on a

$$G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_1)/F^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \simeq G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_2)/F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2) \simeq \widetilde{\Gamma}^A/F'^{\times n}(\widetilde{U}^A(W_1) \times \widetilde{U}^A(W_2)) \simeq \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A}/F'^{\times 2n},$$

et

$$\widetilde{\Gamma}^A \cap \left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right) = F'^{\times n}\left(\widetilde{U}^A(W_1) \times \widetilde{U}^A(W_2)\right)$$

$$\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)/F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2) \simeq \widetilde{\Gamma}^A/\widetilde{\Gamma}^A \cap \left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right) \simeq \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A}/F'^{\times 2n}.$$

Cela implique que

$$\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)/F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2) \text{ est le graphe d'un isomorphisme}$$

$$G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_1)/F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \longrightarrow G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_2)/F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2).$$

Par la relation des groupes ci-dessus, on trouve

$$\pi^{int} = \mathrm{Res}_{F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)} c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)} \widetilde{\rho}_\psi.$$

C'est-à-dire que π^{int} peut se prolonger en une représentation du groupe $\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)$, à savoir $c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)} \widetilde{\rho}_\psi$. Utilisant le Théorème 2.35, nous savons que la représentition

$$c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)}^{G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_1) \times G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{U}^A(W_2)} \left(c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_1) \times F'^{\times n}\widetilde{U}^A(W_2)\right)} \widetilde{\rho}_\psi\right) = \pi$$

est une représentation de bigraphe forte. □

(ii) Soit $W \simeq W_1 \otimes_{F'} W_2$ un espace symplectique sur F' où W_1(resp. W_2) est un espace symplectique (resp. orthogonal) de dimension $2n$ (resp. $2m-1$) avec $n \geq 1$ et $m \geq 1$. On a deux suites exactes

$$1 \longrightarrow Sp(W_1) \xrightarrow{i} GSp(W_1) \xrightarrow{\lambda} F'^{\times} \longrightarrow 1,$$

et

$$1 \longrightarrow O(W_2) \xrightarrow{i} GO(W_2) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{GO(W_2)} \longrightarrow 1.$$

On déduit des suites exactes de Hochschild-Serre

$$\cdots \longrightarrow H^2(F'^{\times}, A) \longrightarrow H^2(GSp(W_1), A) \xrightarrow{i^2} H^2(Sp(W_1), A) \longrightarrow \cdots$$

et

$$\cdots \longrightarrow H^2(\Lambda_{GO(W_2)}, A) \longrightarrow H^2(GO(W_2), A) \xrightarrow{i^2} H^2(O(W_2), A) \longrightarrow \cdots .$$

Prenons un élément $[c_{GSp}]$ (resp. chaque $[c_{GO}]$) de $H^2(GSp(W_1), A)$ (resp. $H^2(GO(W_2), A)$) tel que $i^2([c_{GSp}]) = [c_{Rao}]$. La classe $[c_{GSp}]$ détermine un groupe $\widetilde{GSp}^A(W_1)$(resp. $\widetilde{GO}^A(W_2)$).
Rappelons que nous avons déjà défini un sous-groupe intermédiaire dans le cas scindé (ii)

$$\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} = \{(\widetilde{g}, h) \in \widetilde{GSp}^A(W_1) \times GO(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\lambda(h) = 1\},$$

grâce au morphisme

$$\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}} \xrightarrow{\widetilde{i}_{\frac{1}{2}}} \widetilde{Sp}(W).$$

On obtient une représentation lisse du groupe $\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}$, i.e. $\rho_\psi = \omega_\psi|_{\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}}$, où ω_ψ est la représentation de Weil du groupe $\widetilde{Sp}(W)$.
<u>Dans le cas non scindé</u>, on peut définir un autre sous-groupe intermédiaire

$$\widetilde{\Gamma}^A = \{(\widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \widetilde{GSp}^A(W_1) \times \widetilde{GO}^A(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) = 1\}.$$

On a les suites exactes canoniques

$$1 \longrightarrow \widetilde{Sp}^A(W_1) \longrightarrow \widetilde{GSp}^A(W_1) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{\widetilde{GSp}^A(W_1)} = F'^{\times} \longrightarrow 1 \cdots (1)$$

$$1 \longrightarrow \widetilde{O}^A(W_2) \longrightarrow \widetilde{GO}^A(W_2) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{\widetilde{GO}^A(W_2)} = \Lambda_{GO(W_2)} \longrightarrow 1 \cdots (2)$$

et

$$1 \longrightarrow \widetilde{Sp}^A(W_1) \times \widetilde{O}^A(W_2) \longrightarrow \widetilde{\Gamma}^A \longrightarrow \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A} \longrightarrow 1.$$

On notera

$G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{Sp}^A(W_1)$ l'image réciproque de $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A}$ par l'application λ dans la suite (1),

et

$G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{O}^A(W_2)$ l'image réciproque de $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A}$ par l'application λ dans la suite (2).

Comme on a l'homorphisme canonique

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \widetilde{GO}^A(W_2) \longrightarrow GO(W_2) \longrightarrow 1,$$

on obtient un homomorphisme

$$\widetilde{\Gamma}^A \longrightarrow \widetilde{GSp}^A(W_1) \times GO(W_2).$$

Son image est $\widetilde{\Gamma}^{A\frac{1}{2}}$, ainsi on a une représentation lisse $\rho_\psi|_{\widetilde{\Gamma}^A}$ du groupe $\widetilde{\Gamma}^A$, notée $\widetilde{\rho}_\psi$.
Rappels : pour la représentation de Weil ω_ψ, on sait que $\omega_\psi|_{\widetilde{Sp}^A(W_1)\times O(W_2)}$ est une représentation de bigraphe forte.
On définit

$$\widetilde{O}^A(W_2) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GO}^A(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) = 1\}$$

d'où une suite exacte

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \widetilde{O}^A(W_2) \xrightarrow{p^A} O(W_2) \longrightarrow 1.$$

Grâce au morphisme p^A, on obtient une représentation $\omega_\psi|_{\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)}$. Par la démonstration de la Remarque 2.32, $\omega_\psi|_{\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)}$ est une représentation de bigraphe forte. Par définition

$$\widetilde{\rho}_\psi|_{\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)} = \omega_\psi|_{\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)}.$$

Théorème 3.22. *Si on définit*

$$\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{O}^A(W_2)}\widetilde{\rho_\psi},$$

alors π est une représentation de bigraphe forte.

Démonstration. Comme $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A}$ contient $F'^{\times 2n}$, par le lemme 3.15, on sait que

$$F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \subset G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{Sp}^A(W_1), F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2) \subset G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{O}^A(W_2), F'^{\times n}\Big(\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)\Big) \subset \widetilde{\Gamma}^A$$

où $F'^{\times n}\Big(\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)\Big) = \{\Big((t_1,\widetilde{g}),(t_2,\widetilde{h})\Big) \in F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2) | t_1 = t_2^{-1} \in F'^{\times n}, \widetilde{g}\in\widetilde{Sp}^A(W_1), \widetilde{h}\in \widetilde{O}^A(W_2)\}$.
On définit une représentation intermédiaire

$$\pi^{int} = c - \mathrm{Ind}_{F'^{\times n}\left(\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^n(W_2)\right)}^{F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^n(W_2))}\widetilde{\rho_\psi}.$$

Comme $\widetilde{\rho_\psi}|_{\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)}$ est une représentation de bigraphe forte, par le Théorème 2.33 et la Remarque 2.34, on sait que π^{int} est aussi une représentation de bigraphe forte. On a la relation entre groupes suivante :

$$G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{Sp}^A(W_1)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \simeq G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{O}^A(W_1)/F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2) \simeq \widetilde{\Gamma}^A/F'^{\times n}\Big(\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)\Big) \simeq \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A}/F'^{\times 2n},$$

et

$$\widetilde{\Gamma}^A \cap \Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\Big) = F'^{\times n}\Big(\widetilde{Sp}^A(W_1)\times\widetilde{O}^A(W_2)\Big).$$

Donc

$$\widetilde{\Gamma}^A\Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\Big)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2) \simeq \widetilde{\Gamma}^A/\widetilde{\Gamma}^A\cap\Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\Big) \simeq \Lambda_{\widetilde{\Gamma}^A}/F'^{\times 2n}.$$

Cela implique que

$$\widetilde{\Gamma}^A\Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\Big)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2) \text{ est le graphe d'un isomorphisme}$$

$$G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{Sp}^A(W_1)/F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1) \longrightarrow \widetilde{O}^A(W_2)/F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2).$$

Par la relation entre groupes ci-dessous, on trouve

$$\pi^{int} = \mathrm{Res}_{F'^{\times n}\widetilde{Sp}(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}(W_2)}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{Sp}(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}(W_2)\right)} c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{Sp}(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}(W_2)\right)}\widetilde{\rho_\psi}.$$

Donc π^{int} peut se prolonger en la représentation $c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\right)}\widetilde{\rho_\psi}$ du groupe $\widetilde{\Gamma}^A\Big(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\Big)$. Utilisant le Théorème 2.35, nous savons que la représentition

$$c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\right)}^{G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times G^{\widetilde{\Gamma}^A}\widetilde{O}^A(W_2)}\Big(c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^A}^{\widetilde{\Gamma}^A\left(F'^{\times n}\widetilde{Sp}^A(W_1)\times F'^{\times n}\widetilde{O}^A(W_2)\right)}\widetilde{\rho_\psi}\Big) = \pi$$

est une représentation de bigraphe forte. □

3.3.4 Exemples II

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire p, F' une extension finie de F, et D un corps de quaternions sur F' muni de l'involution canonique τ.

$(W_1, \langle,\rangle_1)$(resp. $(W_2,\langle,\rangle_2)$) un espace ϵ_1(resp. ϵ_2)-hermitien sur D à droite(resp. à gauche) tel que $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$, $W = W_1 \otimes_D W_2$ un espace symplectique sur F, muni de la forme $\mathrm{Tr}_{F'/F}(\langle,\rangle_1 \otimes \tau(\langle,\rangle_2))$.

ω_ψ la représentation de Weil liée au caractère non trivial ψ, $U(W_i)$ (resp. $GU(W_i)$) le groupe unitaire (resp. le groupe unitaire de similitudes) de $(W_i,\langle,\rangle_i)$, A un groupe abélien fini fixé d'ordre n et $2|n, (n,p) = 1$; $\widetilde{GU}(W_i)$ le revêtement central de $GU(W_i)$ par A défini en la sous-section 3.2, $\widetilde{\lambda}$ le morphisme canonique de $\widetilde{GU}(W)$ dans $F'^{\times}$, $\widetilde{U}(W_i)$ son noyau et $\Lambda_{\widetilde{GU}}(W_i)$ son image.

Notons $\widetilde{\Gamma}$ le groupe intermédiaire constitué par les éléments $(\widetilde{g}, \widetilde{h})$ de $\widetilde{GU}(W_1) \times \widetilde{GU}(W_2)$ tels que $\widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) = 1$; $\widetilde{\Gamma} \xrightarrow{i_{\widetilde{\Gamma}}} \widetilde{Sp}(W)$ le homomorphisme naturel et $\widetilde{\rho}_{\psi} = \omega_{\psi}|_{\widetilde{\Gamma}}$.

Choisissons des décompositions de Witt $W_i = W_i^0 \oplus m_i H_i$ avec W_i^0 un espace anisotrope et H_i le plan hyperbolique.

Cas (1) Soient $D = F'$, $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = 1$, $U(W_1) = Sp(W_1)$, $U(W_2) = O(W_2)$; $GU(W_1) = GSp(W_1)$, $GU(W_2) = GO(W_2)$.

Discutons suivant la dimension de la partie anisotrope de W_2.

(i) $\dim_{F'} W_2^0 = 0, 4$, $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}} = F'^{\times}$, $\widetilde{GSp}^{\widetilde{\Gamma}}(W_1) = \widetilde{GSp}(W_1)$, $\widetilde{GO}^{\widetilde{\Gamma}}(W_2) = \widetilde{GO}(W_2)$. Donc $\pi = c{-}\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GSp}(W_1)\times\widetilde{GO}(W_2)} \widetilde{\rho}_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

(ii) $\dim_{F'} W_2^0 = 1$, $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}} = F'^{\times 2}$, $\widetilde{GSp}^{+}(W_1) := \widetilde{GSp}^{\widetilde{\Gamma}}(W_1) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GSp}(W_1) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) \in F'^{\times 2}\}$, $\widetilde{GO}^{\widetilde{\Gamma}}(W_2) = \widetilde{GO}(W_2)$. Donc $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GSp}^{+}(W_1)\times\widetilde{GO}(W_2)} \widetilde{\rho}_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

(iii) $\dim W_2^0 = 2$, $W_2^0 = E'(f)$ où E' est une extension quadratique F', $f = 1$ ou $f \in F' \setminus \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$. $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}} = \mathrm{N}_{E'/F'}(E^{\times})$, $\widetilde{GSp}^{+}(W_1) := \widetilde{GSp}^{\widetilde{\Gamma}}(W_1) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GSp}(W_1) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) \in \mathrm{N}_{E/F}(E'^{\times})\}$, $\widetilde{GO}^{\widetilde{\Gamma}}(W_2) = \widetilde{GO}(W_2)$. Donc $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GSp}^{+}(W_1)\times\widetilde{GO}(W_2)} \widetilde{\rho}_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

(iv) $\dim_{F'} W_2^0 = 3$, $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}} = F'^{\times}$, $\widetilde{GSp}^{\widetilde{\Gamma}}(W_1) = \widetilde{GSp}(W_1)$, $\widetilde{GO}^{\widetilde{\Gamma}}(W_2) = \widetilde{GO}(W_2)$. Donc $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GSp}(W_1)\times\widetilde{GO}(W_2)} \widetilde{\rho}_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

Cas (2) Soit $D = E'$ une extension quadratique de F'.

(i) Si $\dim_{E'} W_1$ et $\dim_{E'} W_2$ sont paires. En ce cas, $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}} = F'^{\times}$, $\widetilde{GU}^{\widetilde{\Gamma}}(W_i) = \widetilde{GU}(W_i)$, $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GU}(W_1)\times\widetilde{GU}(W_2)} \widetilde{\rho}_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

(ii) Si $\dim_{E'} W_1$, $\dim_{E'} W_2$ sont impaires, $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}} = \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$, $\widetilde{GU}^{\widetilde{\Gamma}}(W_1) = \widetilde{GU}(W_i)$, $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GU}(W_1)\times\widetilde{GU}(W_2)} \widetilde{\rho}_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

(iii) Supposons que $\dim_{E'} W_1$ est paire et $\dim_{E'} W_2$ est impaire. Alors $\Lambda_{\widetilde{\Gamma}} = \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})$, $\widetilde{GU}_{+}(W_1) := \widetilde{GU}^{\widetilde{\Gamma}}(W_2) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GU}(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$. $\widetilde{GU}^{\widetilde{\Gamma}}(W_2) = \widetilde{GU}(W_2)$. Donc $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GU}_{+}(W_1)\times\widetilde{GU}(W_2)} \widetilde{\rho}_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

Cas (3) Soient D l'unique corps de quaternions sur F', $\widetilde{GU}^{\widetilde{\Gamma}}(W_i) = \widetilde{GU}(W_i)$, alors $\pi = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{GU}(W_1)\times\widetilde{GU}(W_2)} \rho_{\psi}$ est une représentation de bigraphe forte.

Cas (1)' Soient $D = F'$, $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = 1$, $U(W_1) = Sp(W_1)$, $U(W_2) = O(W_2)$; $GU(W_1) = GSp(W_1)$, $GU(W_2) = GO(W_2)$.

(i)' Si $\dim_{F'} W_2$ est paire.
Pour chaque une extension quadratique E' de F', On définit : $\widetilde{GSp}^{E'}(W_1) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GSp}(W_1) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$,

$\widetilde{GO}^{E'}(W_2) = \{\widetilde{h} \in \widetilde{GO}(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$, et un autre sous-groupe intermédiaire $\widetilde{\Gamma}^{E'} = \{(\widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \widetilde{GSp}^{E'}(W_1) \times \widetilde{GO}^{E'}(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) = 1\}$ de $\widetilde{\Gamma}$. Alors $\pi^{E'} = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^{E'}}^{\widetilde{GSp}^{E'}(W_1) \times \widetilde{GO}^{E'}(W_2)} \rho_{\psi}|_{\widetilde{\Gamma}^{E'}}$ est une représentation de bigraphe forte.

(ii)' Si $\dim_{F'} W_2$ est impaire.
Dans ce cas, on définit : $\widetilde{GSp}_+(W_1) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GSp}(W_1) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) \in F'^{\times 2}\}$, $\widetilde{GO}_+(W_2) = \{\widetilde{h} \in \widetilde{GO}(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) \in F'^{\times 2}\}$, et un autre sous-groupe intermédiaire $\widetilde{\Gamma}_+ = \{(\widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \widetilde{GSp}_+(W_1) \times \widetilde{GO}_+(W_2) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) = 1\}$ de $\widetilde{\Gamma}$, alors $\pi_+ = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_+}^{\widetilde{GSp}_+(W_1) \times \widetilde{GO}_+(W_2)} \rho_{\psi}|_{\widetilde{\Gamma}_+}$ est une représentation de bigraphe forte.

Cas (2)' Soient $D = E'$ une extension quadratique de F'. Si on définit $\widetilde{GU}^{E'}(W_i) = \{\widetilde{g} \in \widetilde{GU}(W_i) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g}) \in \mathrm{N}_{E'/F'}(E'^{\times})\}$, $\widetilde{\Gamma}^{E'} = \{(\widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \widetilde{GU}^{E'}(W_i) | \widetilde{\lambda}(\widetilde{g})\widetilde{\lambda}(\widetilde{h}) = 1\}$, alors $\pi^{E'} = c - \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}^{E'}}^{\widetilde{GU}^{E'}(W_1) \times \widetilde{GU}^{E'}(W_2)} \rho_{\psi}|_{\widetilde{\Gamma}^{E'}}$ est aussi une représentation de bigraphe forte.

3.4 Appendice

Dans cet appendice, nous pouvons rappeler quelques résultats dans [Mo1] et [Mo2].

3.4.1 Définition de $H^2(G, A)$

On suppose G, A des groupes localement compacts, et que A est abélien, muni d'une G-action continue. On pose

$$C^n(G, A) = \{f | f : G \times G \times \cdots \times G \longrightarrow A \text{ une fonction de Borel telle que } f(s_1, \cdots, s_n) = 0$$
$$\text{si pour quelconque } s_i = \text{ l'élément neutre de } G\} \text{ pour } n \geq 0,$$

et

$$C^n(G, A) = 0 \text{ pour } n < 0.$$

On définit une différentielle dans $C^n(G, A)$ à l'aide de la formule

$$d_n f(s_1, \cdots, s_{n+1}) = s_1 \cdot f(s_2, \cdots, s_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(s_1, \cdots, s_i s_{i+1}, \cdots, s_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(s_1, \cdots, s_n)$$

pour $f \in C^n(G, A)$. Ces définitions permettent de donner des groupes de cohomologie

$$H^n(G, A) = \ker(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1}).$$

3.4.2 Suite spectrale

On introduit une filtration $\{L_j\}$ sur $C^\star(G, A)$ de la façon suivante :
(i) $L_j = \sum_{n=0}^{\infty} (L_j \cap C^n(G, A))$.
(ii) $L_j \cap C^n(G, A) = \{f \in C^n(G, A) | f$ est une fonction de $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{j} \times \underbrace{G/H \times \cdots \times G/H}_{n-j}\}$ si $0 \leq j \leq n$.
(iii) $L_j \cap C^n(G, A) = 0$ pour $j > n$ et $L_j = C^\star(G, A)$ pour $j < 0$.

Cette filtration est positive et régulière, donc on trouve alors $E_r^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(G, A)$.

Supposons H un sous-groupe fermé distingué de G. On définit

$$C^j(G/H, C^i(G, A)) = \{f | f : \text{ une } j-\text{cochaïne normalisée de } G/H \text{ à values dans } C^i(H, A), \text{ telle que la fonction}$$
$$\widetilde{f}(h_1, \cdots, h_i, \hat{s_1}, \cdots, \hat{s_j}) := [f(\hat{s_1}, \cdots, \hat{s_j})](h_1, \cdots, h_i) \text{ est une fonction de Borel}\}.$$

Par [HS], on sait que $E_1^{ji} \simeq H^{i+j}(L_j/L_{j+1})$. De plus, on définit

$$\gamma'_j : L_j \cap C^{i+j}(G, A) \longrightarrow C^j(G/H, C^i(H, A));$$

$$f \longmapsto \gamma'_j(f),$$

où $\gamma'_j(f)\Big([\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_j]\Big)(h_1, \cdots, h_i) := f(h_1, \cdots, h_i, s_1, \cdots, s_j)$. Cela aussi définit un homomorphisme

$$\gamma_j : L_j \cap C^{i+j}(G, A)/L_{j+1} \cap C^{i+j}(G, A) \hookrightarrow C^j(G/H, C^i(H, A)).$$

Lemme 3.23. *L'homomorphisme γ_j induise des isomorphismes en homologie :*

$$E_1^{ji} \xrightarrow{\sim} H^i(C^j(G/H, C^\star(H, A)))$$

pour tout i.

Démonstration. Ceci découle de [[Mo1], Page 48, Lemma 1.1]. □

D'appeler quelque travaux dans [Mo1], on a

Lemme 3.24. *Si $H^i(H, A)$ est régulière de dimension i [cf. [Mo1], Definition 1.5] , alors $\gamma_j^\star$ définit des isomorphismes*

$$E_2^{ji} \xrightarrow{\sim} H^j(\widetilde{C^\star}(G/H, H^i(H, A))).$$

Démonstration. Ceci découle de [[Mo1], Page 50, Lemma 1.2]. □

Lemme 3.25. *Si (a) $Z^1(H, A)$ est localement compact et $B^1(H, A)$ est fermé ou (b) $B^1(H, A) = 0$, alors $\widetilde{C^\star}(G/H, H^1(H, A)) = C^\star(G/H, H^1(H, A))$.*

Démonstration. Ceci découle de [[Mo1], Page 51, Lemma 1.4]. □

Theorem 3.26. *Si (a) $Z^1(H, A)$ est localement compact et $B^1(H, A)$ est fermé ou (b) $B^1(H, A) = 0$, alors $\gamma_j^\star$ induit des isomorphismes*

$$E_2^{j1} \xrightarrow{\sim} H^j(G/H, H^1(H, A)).$$

Démonstration. Ceci découle de [[Mo1], Page 52, Theorem 1.1]. □

Proposition 3.27. *Supposons $G \simeq U \times V$. Par la suite spectrale, on a un isomorphisme naturel*

$$H^2(G, A) \simeq H^2(U, A) \oplus H^1(U, H^1(V, A)) \oplus H^2(V, A).$$

Démonstration. Ceci découle de [[Mo2], Page 20, Lemma 4.I]. □

4 Des exemples explicites

Dans ce chapitre, on traite des exemples sur les représentations de bigraphe forte. Soient F un corps non archimédien de caractéristique résiduelle impaire, A une algègre étale de dégre 3 sur F. On construit un homomorphisme de $GL_2(A)$ à $GSp_8(F)$. On utilise le chapitre 3 pour définir des représentations métaplectiques de $GL_2(A)$. Le but de ce chapitre sera consacré à trouver les quotients irréductibles de ces représentations.

4.1 Préliminaires

4.1.1 La classification des représentations irréductibles de G^+

Dans cette sous-sous-section, on notera F un corps non archimédien de caractéristique résiduelle impaire, E une extension quadratique de F, on notera $Gal(E/F) = \langle\sigma\rangle$, $G = GL_2(F)$, $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$, $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\}$, $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$; $F^{\times +} = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, $G^+ = \{g \in G | \det(g) \in F^{\times +}\}$; $\chi_{E/F}$ le caractère quadratique du groupe $F^\times$ de noyau $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. Si λ, σ sont deux caractères de $F^\times$, nous noterons $\pi_{\lambda,\sigma}$ la représentation lisse du groupe G dans l'espace des fonctions $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ localement constantes et telles que

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \lambda(a)|a|^{\frac{1}{2}}\sigma(d)|d|^{-\frac{1}{2}} f(g)$$

pour tous $g \in G$, $a, d \in F^\times$, $b \in F$. On sait que $\pi_{\lambda,\sigma}$ est irréductible ssi $\lambda\sigma^{-1} \neq |\cdot|_F^{\pm 1}$. Dans ce cas, $\pi_{\lambda,\sigma} \simeq \pi_{\lambda',\sigma'}$ ssi $(\lambda', \sigma') = (\lambda, \sigma)$ ou $(\lambda', \sigma') = (\sigma, \lambda)$. Pour la représentation $\pi_{\lambda,\sigma}$, sa contragrédiente est simplement $\pi_{\lambda^{-1},\sigma^{-1}}$. Nous noterons 1_G la représentation triviale du groupe G ; St_G la représentation de Steinberg du groupe G ; dans ces cas, on a $(1_G)^\vee \simeq 1_G$ et $(\mathrm{St}_G)^\vee \simeq \mathrm{St}_G$. Si $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, nous définissons une autre représentation irréductible $\psi \cdot \pi$ par $\psi \cdot \pi(g) := \psi(\det(g))\pi(g)$. Si $\lambda\sigma^{-1} = |\cdot|_F^{\pm 1}$, on sait que $\pi_{\lambda,\sigma}$ est réductible. De plus
Si $\lambda\sigma^{-1} = |\cdot|_F$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \lambda|\cdot|_F^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{St}_G \longrightarrow \pi_{\lambda,\sigma} \longrightarrow \lambda|\cdot|_F^{-\frac{1}{2}} \cdot 1_G \longrightarrow 0.$$

Si $\lambda\sigma^{-1} = |\cdot|_F^{-1}$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \lambda|\cdot|_F^{\frac{1}{2}} \cdot 1_G \longrightarrow \pi_{\lambda,\sigma} \longrightarrow \lambda|\cdot|_F^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{St}_G \longrightarrow 0.$$

Rappelons qu'un caractère Θ de $E^\times$ est dit *régulier*, si

($\star$) Θ ne se factorise pas la norme $\mathrm{N}_{E/F}$ i.e. on ne peut pas trouver $\theta \in F^\times$ tel que $\Theta = \theta \circ \mathrm{N}_{E/F}$.

Dans [BH], à l'aide de la représentation, à chaque caractère régulier Θ de $E^\times$ est attachée une représentation irréductible π_Θ de G. Cette construction est compatible à la correspondance de Langlands au sens où π_Θ correspond à la représentation du groupe de Weil de F, induite du caractère du groupe de Weil de E correspond à Θ par la théorie locale du corps de classes. En particulier, π_Θ et $\pi_{\Theta'}$ sont isomorphes si et seulement si $\Theta' = \Theta$ ou $\Theta' = \Theta^\sigma$. D'ailleurs, il y a une autre famille des représentations irréductibles cuspidales du groupe G non attachant aux caractères réguliers associés à $E^\times$.

Proposition 4.1. *Nous donnons une classification des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles du groupe G ci-dessous :*

(α) les series principales :
(1) $\pi_{\lambda,\sigma}$ pour $\lambda, \sigma \in F^\times$ tels que $\lambda\sigma^{-1} \neq |\cdot|_F^{\pm 1}$,
dans ce cas, on a $\pi_{\lambda,\sigma} \simeq \pi_{\sigma,\lambda}$;
(β) les séries spéciales :
(2) $\psi \cdot \mathrm{St}_G$ pour $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$;
(γ) les représentations de dimension 1 :
(3) $\psi \cdot 1_G$ pour $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$;
(δ) les représentations cuspidales :
(4) π_Θ pour un caractère régulier Θ de $E^\times$,
dans ce cas, on a $\Theta \sim \Theta^\sigma$;
(5) π non attachée au caractère régulier de $E^\times$;
(ϵ) il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations provenant de familles différentes.

Démonstration. Voir [BH] ou l'article [GL]. □

Rappelons que l'application $\chi_{E/F} \circ \det : G \longrightarrow \{\pm 1\}$. On sait que son noyau est G^+. Soit a un élément de G n'appartenant pas à G^+. Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(G^+)$, on définit une autre représentation irréductible ρ^a du groupe G^+ par : $\rho^a(g) := \rho(a^{-1}ga)$ pour $g \in G^+$. Nous rappelons une Proposition pour expliquer la relation entre $\mathrm{Irr}(G)$ et $\mathrm{Irr}(G^+)$.

Proposition 4.2. *(1) Soit* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$.

(a) $\pi|_{G^+}$ *est réductible ssi* $\pi \simeq \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$. *Dans ce cas,* $\pi|_{G^+} = \rho^+ \oplus \rho^-$ *avec* $\rho^+ \simeq \rho^{-a}$.

(b) $\pi|_{G^+}$ *est irréductible ssi* π *n'est pas équivalente à* $\pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$, *mais* $\pi|_{G^+} \simeq \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det|_{G^+} \in \mathrm{Irr}(G^+)$.

(2) Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(G^+)$.

(a) $\mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho$ *est réductible ssi* $\rho \simeq \rho^a$. *Dans ce cas,* $\mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho = \pi \oplus \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$ *et* π *n'est pas équivalente à* $\pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$, *mais* $\pi|_{G^+} = \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det|_{G^+} \simeq \rho$.

(b) $\mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho$ *est irréductible ssi* ρ *n'est pas équivalente à* ρ^a. *Dans ce cas, si* $\pi = \mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho$ *alors* $\pi|_{G^+} \simeq \rho \oplus \rho^a$ *et* $\pi \simeq \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$.

Démonstration. Ceci découle de [[MVW], Page 60]. □

Comme on connaît bien les représentations irréductibles du groupe G, par exemple, dans [BH] ou la Proposition 4.1 ci-dessus. Ainsi nous pouvons expliquer la Proposition précédente en termes de la classification des représentations irréductibles du groupe G.

Lemme 4.3. *Soit* $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$.

(i) Si $\pi = \pi_{\lambda,\sigma}$, *alors* $\pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det = \pi_{\lambda\chi_{E/F},\sigma\chi_{E/F}}$, $\pi|_{G^+}$ *est réductible ssi* $\lambda = \sigma\chi_{E/F}$.

(a) Si $\lambda \neq \sigma\chi_{E/F}$, *alors* $\pi_{\lambda,\sigma}|_{G^+}$ *est irréductible, notée par* $\rho^+_{\lambda,\sigma}$ *comme représentation de* G^+.

(b) Si $\lambda = \sigma\chi_{E/F}$, *alors* $\pi_{\lambda,\sigma}|_{G^+} = \lambda \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}} \oplus \lambda \cdot \rho^-_{1,\chi_{E/F}}$, *où* $\rho^+_{1,\chi_{E/F}} \oplus \rho^-_{1,\chi_{E/F}} = \pi_{1,\chi_{E/F}}|_{G^+}$.

(ii) Si $\pi = \psi \cdot St_G$, *alors* $\pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det \not\simeq \pi$ *et* $\pi|_{G^+}$ *est irréductible, nous la notons par* $\psi \cdot St_{G^+}$ *comme représentation de* G^+.

(iii) Supposons π *cuspidale.*

(a) Si π *est attachée au caractère régulier* Θ *de* $E^\times$, *alors* $\pi \simeq \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$ *et* $\pi|_{G^+} = \rho^+_\Theta \oplus \rho^-_\Theta$.

(b) Si π *n'est pas attachée à un caractère régulier de* $E^\times$, *alors* π *n'est pas équivalente à* $\pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$ *et* $\pi|_{G^+}$ *est irréductible, nous la notons* ρ^+_π *comme représentation du groupe* G^+.

(iv) Si $\pi = \psi \cdot 1_G$, *alors* π *n'est pas équivalente à* $\pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$ *et* $\pi|_{G^+}$ *est irréductible, nous la notons* $\psi \cdot 1_{G^+}$.

Démonstration. (i), (ii), (iv) sont évidents. Pour (iii) : l'hypothèse $\pi \simeq \pi \otimes (\chi_{E/F} \circ \det)$ se traduit par $\sigma \simeq \sigma \otimes \chi_{E/F}$ où σ est la représentation irréductible de $\mathcal{W}_F$ correspondant à π, et où $\chi_{E/F}$ est vu comme un caractère de $F^\times$ par la théorie du corps de classe. Par la théorie de Clifford pour $\mathcal{W}_F$, cela signifie que σ est induite à partie d'un caractère régulier de $\mathcal{W}_E$. Voguant Θ comme un caractère(régulier) de $E^\times$, on a bien $\pi \simeq \pi_\Theta$. □

Traduisons maintenant le Lemme précédent en termes de représentations irréductibles de G^+. Nous noterons : $\mathrm{Irr}(F^{\times +})$ les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles du groupe $F^{\times +}$, $B^+ = G^+ \cap B$, $T^+ = G^+ \cap T$, 1_{G^+} la représentation triviale du groupe G^+, $\mathrm{St}_{G^+} = \mathrm{St}_G|_{G^+}$; Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(G^+)$, $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, nous définissons $\psi^+ \cdot \rho$ comme : $\psi^+ \cdot \rho(g) := \psi^+(\det(g))\rho(g)$; Soit $\pi = \pi_{\lambda,\sigma} \in \mathrm{Irr}(G)$, nous la noterons par $\rho^+_{\lambda,\sigma} = \pi_{\lambda,\sigma}|_{G^+}$; Soit $\pi = \pi_{1,\chi_{E/F}}$ nous définissons $\pi|_{G^+} = \rho^+_{1,\chi_{E/F}} \oplus \rho^-_{1,\chi_{E/F}}$; Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ une représentation cuspidale attachée à un caractère régulier Θ de $E^\times$, nous la noterons par $\pi|_{G^+} = \rho^+_\Theta \oplus \rho^-_\Theta$; Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ une représentation cuspidale qui n'est pas attachée à un caractère régulier de $E^\times$, $\pi|_{G^+}$ est irréductible, nous la noterons par ρ^+_π.

Lemme 4.4. *Soit* $\rho \in \mathrm{Irr}(G^+)$.

(i) Si $\rho = \rho^+_{\lambda,\sigma}$,
alors $\mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho = \pi_{\lambda,\sigma} \oplus \pi_{\lambda\chi_{E/F},\sigma\chi_{E/F}}$, *où* $\rho^+_{\lambda,\sigma} = \pi_{\lambda,\sigma}|_{G^+}$ *et* $\pi_{\lambda,\sigma} \not\simeq \pi_{\lambda\chi_{E/F},\sigma\chi_{E/F}}$.

(ii) Si $\rho = \psi^+\rho^+_{1,\chi_{E/F}}$ *ou* $\psi^+\rho^-_{1,\chi_{E/F}}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *et* $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *tel que* $\psi|_{F^{\times +}} = \psi^+$,
alors $\pi = \mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho = \pi_{\psi,\psi\chi_{E/F}}$ *est une repésentation irréductible de G.*

(iii) Si $\rho = \psi^+ \cdot St_{G^+}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$,
alors $\pi = \mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho = \psi \cdot St_G \oplus \chi_{E/F}\psi \cdot St_G$, *ici nous choisissons un caractère* $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *tel que* $\psi|_{F^{\times +}} = \psi^+$.

(iv) Si $\rho = \rho^+_\Theta$ *ou* ρ^-_Θ, *où* Θ *est un caractère régulier de* $E^\times$,
alors $\pi = \mathrm{Ind}_{G^+}^G \rho$ *est la représentation attachée au caractère* Θ.

(v) Si $\rho = \rho^+_\pi = \pi|_{G^+}$, *où* π *est une représentation cuspidale* π *de G,*
alors $\mathrm{Ind}_{G^+}^G = \pi \oplus \chi_{E/F}\pi$ *et* $\pi \not\simeq \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$.

(vi) $\rho = \psi^+ \cdot 1_{G^+}$, *nous fixons un caractère* ψ *de* G *tel que* $\psi|_{F^{\times+}} = \psi^+$,
alors $\pi = \mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \psi^+ \cdot 1_{G^+} = \psi \cdot 1_G \oplus \chi_{E/F}\psi \cdot 1_G$.

Démonstration. Ceci résulte de la Proposition 4.2 et du Lemme 4.3. □

Lemme 4.5. *Soient* $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Irr}(G)$, *alors* $\mathrm{Hom}_{G^+}(\pi_1, \pi_2) \neq 0$ *ssi* $\pi_1 \simeq \pi_2$, *ou bien* $\pi_1 \simeq \pi_2 \otimes \chi_{E/F} \circ \det$.

Démonstration.

$$\mathrm{Hom}_{G^+}(\pi_1, \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \mathrm{Res}_{G^+}^{G} \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2 \otimes \mathrm{Ind}_{G^+}^{G} 1)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2 \otimes [1 \oplus \chi_{E/F}]) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2 \otimes \pi_2 \chi_{E/F}),$$

d'où le résultat. □

Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(G^+)$, elle sera appelée **cuspidale** si ρ n'est jamais une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_{B^+}^{G^+} |\cdot|_F^{1/2} \lambda \otimes |\cdot|_F^{-1/2} \sigma$ pour toute paire (λ, σ) consistant deux représentations irréductibles du groupe $F^\times$.

Lemme 4.6. *(1) Si* $\rho \in \mathrm{Irr}(G^+)$ *et* $\mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \rho = \pi \oplus \pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$, *alors* π *est cuspidale ssi* $\pi \otimes \chi_{E/F} \circ \det$ *l'est aussi.*
(2) Si $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ *et* $\pi|_{G^+} = \rho^+ \oplus \rho^-$, *alors* ρ^+ *est cuspidale ssi* ρ^- *l'est aussi.*

Démonstration. (1) C'est évident.
(2)

$$\mathrm{Hom}_{G^+}(\rho^+, \mathrm{Ind}_{B^+}^{G^+} |\cdot|_F^{\frac{1}{2}} \lambda \otimes |\cdot|_F^{-\frac{1}{2}} \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \rho^+, \mathrm{Ind}_{B}^{G} |\cdot|_F^{\frac{1}{2}} \lambda \otimes |\cdot|_F^{-\frac{1}{2}} \sigma)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{G^+}(\rho^-, \mathrm{Ind}_{B^+}^{G^+} |\cdot|_F^{\frac{1}{2}} \lambda \otimes |\cdot|_F^{-\frac{1}{2}} \sigma).$$

Cela implique le résultat. □

Lemme 4.7. *(1) Si* $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}(G)$, *alors* π *est cuspidale ssi une composante de* $\pi|_{G^+}$ *l'est aussi.*
(2) Si $\rho \in \mathrm{Irr}(G^+)$, *alors* ρ *est cuspidale ssi une composante de* $\mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \rho$ *l'est aussi.*

Démonstration. (1) Par le Lemme 4.6, $\pi|_{G^+}$ est cuspidale ssi chaque sa composante l'est aussi. Par définition, π est une représentation cuspidale de G ou G^+ ssi $V_N = 0$, donc on trouve le résultat.
(2) Par la théorie de Clifford, on a $\mathrm{Res}_{G^+}^{G} \mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \rho = \rho \oplus \rho^a$ ou 2ρ pour un élément $a \in G \backslash G^+$. Par le Lemme 4.6 et le point (1) ci-dessus, on obtient le résultat. □

Lemme 4.8. *(1) Si* $(\rho, W) \in \mathrm{Irr}(G^+)$, *alors* $\mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \check{\rho} \simeq (\mathrm{Ind}_{G^+}^{G} \rho)^\vee$.
(2) Si $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}(G)$, *alors* $(\pi|_{G^+})^\vee = \check{\pi}|_{G^+}$.

Démonstration. (1) Ceci découle de [[BZ]].
(2) On sait que G^+ est un sous-groupe ouvert de G, il en résulte que $(V|_{G^+})^\vee \simeq \check{V}|_{G^+}$. Enfin le résultat découle de la définition de la représentation contragrédiente. □

D'après les lemmes précédents, nous pouvons donner une classification des représentations irréductibles du groupe G^+ .

Théorème 4.9. *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles du groupe* G^+ *se présentent comme suit :*
(α) Les représentations non cuspidales :
(a) Les séries principales :
(1) $\rho_{\lambda,\sigma}^+$, *où* $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfaisant à* $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm 1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm 1}$.
Dans ce cas, on a $\rho_{\lambda,\sigma}^+ \simeq \rho_{\sigma,\lambda}^+ \simeq \rho_{\chi_{E/F}\lambda, \chi_{E/F}\sigma}^+ \simeq \rho_{\chi_{E/F}\sigma, \chi_{E/F}\lambda}^+$ *;*
(1') $\lambda^+ \cdot \rho_{1, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}^+$, *où* $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times+})$.
Dans ce cas, $\rho_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}^+$ *est une représentation irréductible fixée du group* G^+ *et par définition, on a* $\lambda^+ \cdot \rho_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}^+ \simeq \lambda^+ \cdot \rho_{\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1},1}^+ \simeq \lambda^+ \cdot \rho_{\chi_{E/F},|\cdot|_F^{-1}}^+ \simeq \lambda^+ \cdot \rho_{|\cdot|_F^{-1},\chi_{E/F}}^+$ *;*
(b) Les séries spéciales :
(2) $\psi^+ \cdot St_{G^+}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times+})$ *;*
(3) $\psi^+ \cdot \rho_{1,\chi_{E/F}}^+, \psi^+ \cdot \rho_{1,\chi_{E/F}}^-$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times+})$ *;*
(c) Les représentations de dimension 1 :

(4) $\psi^+ \cdot 1_{G^+}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*

(γ) Les représentations cuspidales :

(5) ρ^+_Θ, ρ^-_Θ *attachées au caractère régulier* Θ *de* $E^\times$.

Dans ce cas,on a $\Theta \sim \Theta^\sigma$ *;*

(6) ρ^+_π *attachée à une représentation cuspidale* π *de* G. *Dans ce cas, on a* $\rho^+_\pi \simeq \rho^+_{\pi\chi_{E/F}}$ *;*

(δ) La liste au-dessus est complétée, et il n'existe pas d'isomorphisme entre représentations provenant de familles différentes.

Proposition 4.10. *Soit* ρ^+ *une représentation irréductible du groupe* G^+, *nous décrivons sa contragrédiente ci-dessous :*

(1) si $\rho^+ = \rho^+_{\lambda,\sigma}$, *où* $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfaisant à* $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm 1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm 1}$, *alors* $(\rho^+_{\lambda,\sigma})^\vee = \rho^+_{\lambda^{-1},\sigma^{-1}}$ *;*

(1') si $\rho^+ = \lambda^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$, *où* $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, *alors* $(\lambda^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}})^\vee = (\lambda^+)^{-1} \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F}$ *;*

(2) si $\rho^+ = \psi^+ \cdot St_{G^+}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, *alors* $(\psi^+ \cdot St_{G^+})^\vee = (\psi^+)^{-1} \cdot St_{G^+}$ *;*

(3) si $\rho^+ = \psi^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}}$ *ou* $\psi^+ \cdot \rho^-_{1,\chi_{E/F}}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, *alors* $\{(\psi^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}})^\vee, (\psi^+ \cdot \rho^-_{1,\chi_{E/F}})^\vee\} = \{(\psi^+)^{-1} \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}}, (\psi^+)^{-1} \cdot \rho^-_{1,\chi_{E/F}}\}$ *;*

(4) si $\rho^+ = \psi^+ \cdot 1_{G^+}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, *alors* $(\psi^+ \cdot 1_{G^+})^\vee = (\psi^+)^{-1} \cdot 1_{G^+}$ *;*

(5) si $\rho^+ = \rho^+_\Theta$ *ou* ρ^-_Θ *attachée au caractère régulier* Θ *de* $E^\times$, *alors* $\{(\rho^+_\Theta)^\vee, (\rho^-_\Theta)^\vee\} = \{\rho^+_{\Theta^{-1}}, \rho^-_{\Theta^{-1}}\}$ *;*

(6) si $\rho^+ = \rho^+_\pi$ *attachée à une représentation cuspidale* π *de* G, *alors* $(\rho^+_\pi)^\vee = \rho^+_{\check{\pi}}$.

Démonstration. Ceci découle du Lemme 4.8 et du Théorème 4.9. □

En suite, nous citons la définition habituelle du changement de base entre $\mathrm{Irr}(G)$ et $\mathrm{Irr}(H)$ au sens de Langlands dans [GL] , [L] et nous décrivons les fibres de cette application.

Proposition 4.11. *Soient* $\lambda, \sigma, \psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, $\Lambda, \Sigma, \Psi, \Theta \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ *telles que* $\lambda \circ \mathrm{N}_{E/F} = \Lambda, \sigma \circ \mathrm{N}_{E/F} = \Sigma, \psi \circ \mathrm{N}_{E/F} = \Psi$ *et* $\lambda\sigma^{-1} \neq |, |_F^{\pm 1}$.

(1) $\mathrm{Bc}_{E/F} : \mathrm{Irr}(G) \longrightarrow \mathrm{Irr}(H); \pi \longmapsto \Pi$.

(i) Si $\pi = \psi \cdot 1_G$, *alors* $\Pi = \Psi \cdot 1_H$.

(ii) Si $\pi = \pi_{\lambda,\sigma}$ *avec* $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}|, |_F^{\pm 1}$, *alors* $\Pi = \Pi_{\Lambda,\Sigma}$.

(iii) Si $\pi = \pi_{\lambda,\sigma}$ *avec* $\lambda\sigma^{-1} = \chi_{E/F}|, |_F$, *alors* $\Pi = \Lambda| \cdot |_E^{-1/2} \cdot 1_H$.

(iv) Si $\pi = \psi \cdot \mathrm{St}_G$, *alors* $\Pi = \Psi \cdot \mathrm{St}_H$.

(v) Si $\pi = \pi_\Theta$, *où* π_Θ *est la représentation de* G *associée au caractère régulier* Θ *de* $E^\times$ *par la correspondance de Langlands locale, alors* $\Pi = \Pi_{\Theta,\Theta^\sigma}$.

(vi) Si π *est cuspidale sans être du type* π_Θ, *alors* $\Pi = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$ *est aussi cuspidale.*

(2) $\mathrm{Bc}^{-1}_{E/F} : \mathrm{Irr}(H) \longrightarrow \mathrm{Irr}(G); \Pi \longmapsto \flat_\Pi$ *;*

(i) Si $\Pi = \Pi_{\Lambda,\Sigma}$ *avec* $\Lambda\Sigma^{-1} \neq |, |_E^{\pm 1}$, *alors* $\flat_\Pi = \{\pi_{\lambda,\sigma}, \pi_{\chi_{E/F}\lambda,\sigma}, \pi_{\lambda,\chi_{E/F}\sigma}, \pi_{\chi_{E/F}\lambda,\chi_{E/F}\sigma}\}$, *où on choisit deux caractères* $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfaisant à* $\Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{E/F}, \Sigma = \sigma \circ \mathrm{N}_{E/F}$ *;*

(ii) Si $\Pi = \Psi \cdot \mathrm{St}_H$, *alors* $\flat_\Pi = \{\psi \cdot \mathrm{St}_G, \chi_{E/F}\psi \cdot \mathrm{St}_G\}$, *où on choisit un caractère* $\psi \in F^\times$ *tel que* $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}$.

(iii) Si $\Pi = \Pi_{\Theta,\Theta^\sigma}$, *alors* $\flat_\Pi = \{\pi_\Theta, \pi_{\Theta^\sigma}\}$, *où* π_Θ *est une représentation de* G *attachée au caractère régulier* Θ *de* $E^\times$ *par la correspondance de Langlands locale.*

(iv) Si Π *est cuspidale, alors* $\flat_\Pi = \{\pi, \chi_{E/F}\pi\}$, *où* π *est une représentation cuspidale du groupe* G.

(v) Si $\Pi = \Psi \cdot 1_H$, *alors* $\flat_\Pi = \{\psi \cdot 1_G, \chi_{E/F}\psi \cdot 1_G, \psi \cdot \pi_{\chi_{E/F}|\cdot|_F^{1/2}, |\cdot|_F^{-1/2}}, \psi \cdot \pi_{|\cdot|_F^{1/2}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1/2}}\}$, *où* ψ *est un caractère fixé du groupe* $F^\times$ *tel que* $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}$.

Démonstration. (1) Ceci découle de [[GL]] et de [[L]].
(2) On peut obtenir le résultat après (1). □

4.1.2 La classification des représentations distinguées de $GSO(M)$ et de $GO(M)$

Dans cette sous-sous-section, on désignera par F un corps non archimédien de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle impaire, par E une extension quadratique de F, on note $\alpha \longmapsto \overline{\alpha}$ l'involution de E/F. Rappelons $G = GL_2(F)$, $H = GL_2(E)$. G sera vu comme sous-groupe de H. Soient $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle$, $M = \{\begin{pmatrix} y & \overline{\alpha} \\ \alpha & -x \end{pmatrix} | x, y \in F, \alpha \in E\}$; $q(m) := -\det(m)$ pour $m \in M$. Soit $GO(M)$ le groupe de similitudes de l'espace quadratique (M, q). On peut définir une application sign : $GO(M) \longrightarrow \{\pm 1\}$, nous notons son noyau par $GSO(M)$, on a une suite exacte $1 \longrightarrow E^\times \xrightarrow{a} F^\times \times H \xrightarrow{b} GSO(M) \longrightarrow 1$ où $a(e) = (\mathrm{N}_{E/F}(e), e^{-1})$. Le groupe $GO(M)$

est simplement $GSO(M) \rtimes \sigma$, où σ agit sur M par permutation. Chaque représentation irréductible de $GSO(M)$ est bien déterminée par une représentation Π de H et un autre caractère χ de $F^\times$ tels que $\chi \circ \mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$, où ω_Π est le caractère central de la représentation Π, c'est-à-dire que si on choisit un caractère χ satisfaisant à $\chi \circ \mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$ pour $\Pi \in \mathrm{Irr}(H)$, alors on peut obtenir deux représentations irréductibles de $GSO(M)$, notée $(\Pi, \chi)_{E^\times}$ et $(\Pi, \chi\chi_{E/F})_{E^\times}$.
Rappelons quelques définitions pour étudier les représentations du groupe $GSO(M)$. Si m un élément de M, nous notons $m^\perp$ l'ensemble orthogonal de m dans M.

Définition 4.12. *Soit $\delta = (\Pi, \chi)_{E^\times}$ une représentation irréductible de $GSO(M)$.*
(1) On dit que δ est ***invariante****, si Π est σ-invariante.*
(2) On dit que δ est ***distinguée générique****, si Π est σ-invariante et qu'il existe un élément anisotrope m de M tel que* $\mathrm{Hom}_{SO(m^\perp)}(\delta, 1_{SO(m^\perp)}) \neq 0$.
(3) On dit que δ est ***distinguée****, si Π est distinguée générique ou bien Π est σ-invariante et de dimension 1.*

Soient m_0, m_1 deux éléments anisotropes de M. Notons $\mathfrak{m}_0$(resp. $\mathfrak{m}_1$) l'espace engrendré par m_0(resp. m_1). On peut définir $i_{0,1} : \mathfrak{m}_0 \longrightarrow M$ envoyant m_0 vers m_1. Par le Théorème de Witt, le homomorphisme $i_{0,1}$ peut se prolonger en un isomorphisme de M et $i_{0,1} \in GO(M)$, cela implique que $i_{0,1}(m_0^\perp) = m_1^\perp$. On sait que la dimension de $m_0^\perp$ ou $m_1^\perp$ est 3, donc on peut supposer que $i_{0,1}$ est dans $GSO(M)$. En utilisant l'isomorphisme $i_{0,1}$, on définit les isomorphismes $SO(m_0^\perp) \xrightarrow{\sim} SO(m_1^\perp); g \longmapsto i_{0,1} g i_{0,1}^{-1}$ et $\mathrm{Hom}_{SO(m_0^\perp)}(\delta, 1) \simeq \mathrm{Hom}_{SO(m_1^\perp)}(\delta, 1); f \longmapsto f^{i_{0,1}}$, où $f^{i_{0,1}}(v) := f(\delta(i_{0,1})^{-1}v)$, alors la définition de la répresentation distinguée générique ne dépendent pas de choix de m.

Maintenant, supposons $E = F(\sqrt{\xi})$; nous choisissons $m = m_0 := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\xi} \\ -\sqrt{\xi} & 0 \end{pmatrix} \in M$, $SO(m_0^\perp) = \{h \in SO(M) | h \cdot m_0 = m_0\}$. D'abord, supposons $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(E) \cap SO(m_0^\perp)$, la condition $h \cdot m_0 = m_0$ se traduit par $1 = h \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\xi} \\ -\sqrt{\xi} & 0 \end{pmatrix} \bar{h}^{t} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\xi}^{-1} \\ \sqrt{\xi}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$; ce qui implique que $h \in SL_2(F)$. De plus, supposons $h = (s, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}) \in SO(M)$ où $s \in F^\times, t \in E^\times$ satisfaisant à $s^2 \mathrm{N}_{E/F}(t) = 1$. La condition $h \cdot m_0 = m_0$ se traduit par $1 = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\xi} \\ -\sqrt{\xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\xi}^{-1} \\ \sqrt{\xi}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \bar{t} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, cela implique que $s = t^{-1} = \bar{t}^{-1} \in F^\times$. Finalement, on obtient que $SO(m_0^\perp) = \{h \in SO(M) | h = (\det g^{-1}, g)$ avec $g \in G\}$.

Soient $\delta = (\Pi, \chi)_{E^\times}$, $h = (\det g^{-1}, g) \in SO(m_0^\perp)$, on a $\delta((\det g^{-1}, g)) = \delta((\det g^{-1}, 1))\delta((1, g)) = \chi(\det g^{-1})\Pi(g)$. Ce qu'implique que

$$\mathrm{Hom}_{SO(m_0^\perp)}(\delta, 1) \simeq \mathrm{Hom}_G(\chi^{-1}\Pi, 1) \simeq \mathrm{Hom}_G(\Pi, \chi).$$

Nous avons démontré la Proposition due à Hakim :

Proposition 4.13 (Hakim)**.** *Si $(\Pi, \chi)_{E^\times} \in \mathrm{Irr}(H)$, et Π est σ-invariante, alors $(\Pi, \chi)_{E^\times}$ est distinguée générique ssi*

$$\mathrm{Hom}_G(\Pi, \chi \circ \det) \neq 0.$$

Proposition 4.14. *Soit $\Pi \in \mathrm{Irr}(H)$ une représentation irréductible de dimension 1 et $\Pi \simeq \Pi^\sigma$, alors on a un et un seul caractère χ de $F^\times$ satisfaisant à $\chi \circ \mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$ tel que*

$$\mathrm{Hom}_G(\Pi, \chi \circ \det) = 1.$$

Démonstration. Soit $(\Pi, \chi)_{E^\times} \in \mathrm{Irr}(GSO(M))$ de dimension 1 qui est σ-invariante, on sait qu'il y a deux caractères η et $\eta\chi_{E/F}$ du groupe G de dimension 1 tels que $\Pi = \eta \circ \mathrm{N}_{E/F} = \eta\chi_{E/F} \circ \mathrm{N}_{E/F}$ et $\eta^2 \circ \mathrm{N}_{E/F} = \chi \circ \mathrm{N}_{E/F}$, ce qui implique que $(\eta\chi_{E/F})^2 = \eta^2 = \chi$ ou $\eta^2 = (\eta\chi_{E/F})^2 = \chi\chi_{E/F}$ et $\Pi|_G = \eta \circ \mathrm{N}_{E/F}|_G = \eta^2 \circ \det$. Donc $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \chi \circ \det) = 1$ ssi $\chi = \eta^2 = (\eta\chi_{E/F})^2$. □

Théorème 4.15 (Hakim-Flicker)**.** *Soit $\Pi \in \mathrm{Irr}(H)$ une représentation irréducible de dimension infinie qui est σ-invariante, et soit χ un caractère de $F^\times$ satisfaisant à $\chi \circ \mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$. Alors les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \chi \circ \det) \neq 0$ *;*

(ii) Pour tout caractère ζ de $E^\times$ prolongeant χ, on a

$$\varepsilon(\Pi \otimes \zeta^{-1}, \frac{1}{2}, \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}) = \chi(-1);$$

(iii) $\Pi = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$ *où* $\omega_\pi = \chi\chi_{E/F}$.

Démonstration. Voir [[R2], Page 783, Theorem 5.3]. □

Nous noterons $\mathrm{Irr}_D(GSO(M))$(resp. $\mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$) les classes d'isomorphisme des représentations distinguées (resp. distinguées génériques) du groupe $GSO(M)$. Le but principal de la sous-sous-section sera consacré à déterminer les classes $\mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$ et $\mathrm{Irr}_D(GSO(M))$. Si $(\Pi,\chi)_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$, il faut que Π soit σ-invariante, i.e. $\Pi = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$ pour quelque $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Proposition 4.16. *Soient* $\lambda,\sigma,\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, $\Lambda,\Sigma,\Psi,\Theta \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ *telles que* $\lambda\circ\mathrm{N}_{E/F} = \Lambda, \sigma\circ\mathrm{N}_{E/F} = \Sigma, \psi\circ\mathrm{N}_{E/F} = \Psi$ *et* $\lambda\sigma^{-1} \neq |\cdot|_F^{\pm1}$.

(i) Si $\Pi = \Pi_{\Lambda,\Sigma} \in \mathrm{Irr}(H)$ *et* χ_1,χ_2 *est les deux caractères de* $\mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfaisant à* $\chi_i \circ \mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$*, on a* $(\Pi,\chi_i)_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$ *pour* $i = 1,2$.

(ii) Si $\Pi = \Psi\cdot St_H$,

  (a) on a un caractère unique $\chi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfaisant à* $\chi\circ\mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi = \Psi^2$ *et* $\mathrm{Hom}_G(\Pi,\chi) \neq 0$*; En fait* $\chi = \psi^2$ *;*

  (b) $(\Pi,\chi\chi_{E/F})_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$*, mais* $(\Pi,\chi)_{E^\times} \notin \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$.

(iii) Si $\Pi = \Pi_{\Theta,\Theta^\sigma} = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi_\Theta)$*, où* π_Θ *est la représentation de G associée au caractère régulier* Θ *de* $E^\times$ *par la correspondance de Langlands locale,*

  (a) on a un caractère unique $\chi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfaisant à* $\chi\circ\mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$ *et* $\mathrm{Hom}_G(\Pi,\chi\chi_{E/F}) \neq 0$*; Dans ce cas,* $\chi = \omega_{\pi_\Theta}$ *;*

  (b) $(\Pi,\chi\chi_{E/F})_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$*, mais* $(\Pi,\chi)_{E^\times} \notin \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$.

(iv) Si $\Pi = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$ *où* Π,π *sont cuspidales,*

  (a) on a un caractère unique $\chi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfaisant à* $\chi\circ\mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$ *et* $\mathrm{Hom}_G(\Pi,\chi\chi_{E/F}) \neq 0$*, en fait* $\chi = \omega_\pi$ *;*

  (b) $(\Pi,\chi\chi_{E/F})_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$*, mais* $(\Pi,\chi)_{E^\times} \notin \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$.

(v) Si $\Pi = \Psi\cdot 1_H$ *avec* $\Psi = \psi\circ\mathrm{N}_{E/F}$,

  (a) on a un caractère unique satisfaisant à $\chi\circ\mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$ *et* $\mathrm{Hom}_G(\Pi,\chi) \neq 0$*. Dans ce cas,* $\chi = \psi^2$ *;*

  (b) $(\Pi,\chi)_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$*, mais* $(\Pi,\chi\chi_{E/F})_{E^\times} \notin \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$.

Démonstration. (i) Par la Proposition 4.13, on sait que $(\Pi,\chi)_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_G(\Pi,\chi) \neq 0$. D'après la démonstration du Théorème 5.3 dans la page 783 de [R2], on sait que $\mathrm{Hom}_G(\Pi,\chi_i\circ\det) \neq 0$ pour les deux caractères χ_i du groupe $F^\times$ satisfaisant à $\chi_i\circ\mathrm{N}_{E/F} = \omega_\Pi$.
(ii) D'après la Proposition 4.11 (2)(ii), on sait que $\Pi = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$, où $\pi = \psi\cdot\mathrm{St}_G$, donc $\omega_\pi = \psi^2$. En appliquant le Théorème 4.15, on a $\mathrm{Hom}_G(\Psi\cdot\mathrm{St}_H, \omega_\pi\chi_{E/F}) \neq 0$ et aussi l'unicité de χ. La partie (b) découle alors de la Proposition 4.13.
(iii)—(iv) D'après [[HST], Page 400, Lemme 14] et la Propostion 4.11, on sait que $\Pi = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$ et ω_π est déterminée uniquement par Π, en utilisant le Théorème 4.15 et le Lemme 14.4 de [HST], on trouve le résultat.
(v) C'est une conséquence de la Proposition 4.14. □

Nous décrivons maintenant les représentations distinguées génériques du groupe $GSO(M)$. Soient $\lambda,\sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ satisfaisant à $\lambda\sigma^{-1} \neq |\cdot|_F^{\pm1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm1}$. Si $\Lambda = \lambda\circ\mathrm{N}_{E/F}, \Sigma = \sigma\circ\mathrm{N}_{E/F}$, on a $\Lambda\Sigma^{-1} \neq |\cdot|_E^{\pm1}$, on peut leur associer une représentation $\Pi = \Pi_{\Lambda,\Sigma} \in \mathrm{Irr}(H)$ de caractère central $\omega_\Pi = \Lambda\Sigma = \lambda\sigma\circ\mathrm{N}_{E/F}$; on sait que $(\Pi_{\Lambda,\Sigma}, \lambda\sigma\chi_{E/F})_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$, nous la noterons par $\delta_{\lambda,\sigma}$; soient $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ et $\Psi = \psi\circ\mathrm{N}_{E/F}$; on a $(\Psi\cdot\mathrm{St}_H, \psi^2\chi_{E/F})_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$, notées $\psi\cdot\mathrm{St}_{GSO(M)}$. Comme $\psi\cdot\mathrm{St}_{GSO(M)} \simeq \psi\chi_{E/F}\cdot\mathrm{St}_{GSO(M)}$, cela implique qu'en fait la représentation est déterminée par $\psi|_{F^\times}$, donc nous la noterons par $\psi^+\cdot\mathrm{St}_{GSO(M)}$, où $\psi^+ = \psi|_{G^+}$. Soit Θ un caractère régulier de $E^\times$, on lui associe une représentation cuspidale π_Θ du groupe G et une représentation $\Pi_{\Theta,\Theta^\sigma} = \mathrm{Bc}_{E/F}(\Pi_\Theta)$ du groupe H. On sait que $(\Pi_{\Theta,\Theta^\sigma}, \omega_{\pi_\Theta}\chi_{E/F})$ est dans $\mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$, nous la noterons par δ_Θ. Si $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ et $\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi) \in \mathrm{Irr}(H)$ sont cuspidales, on a $(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \omega_\pi\chi_{E/F}) \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$, nous la noterons par δ_π. Soit $\lambda \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, on a $(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi_{\lambda,\lambda\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}), \lambda^2|\cdot|_F^{-1})_{E^\times} = (\Lambda|\cdot|_E^{-1/2}\cdot 1_H, \lambda^2|\cdot|_F^{-1})_{E^\times} \in \mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$, nous la notons par $\lambda\delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$; comme $\lambda\delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}} \simeq \lambda\chi_{E/F}\delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$, on voit que $\lambda\delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|^{-1}}$ est bien déterminée par $\lambda^+ := \lambda|_{F^{\times +}}$. D'ailleurs, nous la noterons par $\lambda^+\cdot\delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$. Par définition, on sait que $\lambda^+\cdot\delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}} \simeq \lambda^+\cdot\delta_{\chi_{E/F},|\cdot|_F^{-1}} \simeq \lambda^+\cdot\delta_{\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1},1} \simeq \lambda^+\cdot\delta_{|\cdot|_F^{-1},\chi_{E/F}}$.

Proposition 4.17. *Les classes d'isomorphisme des représentations distinguées génériques du groupe* $GSO(M)$ *seront décrites ci dessous :*

(1) $\delta_{\lambda,\sigma}$, *où* $\lambda,\sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfait à* $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm1}$,
dans ce cas, on a $\delta_{\lambda,\sigma} \simeq \delta_{\sigma,\lambda} \simeq \delta_{\lambda\chi_{E/F},\sigma\chi_{E/F}} \simeq \delta_{\sigma\chi_{E/F},\lambda\chi_{E/F}}$ *;*

(1') $\lambda^+ \cdot \delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$, où $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;
(2) $\psi^+ \cdot \mathrm{St}_{GSO(M)}$, où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;
(3) $\lambda^+ \delta_{1,\chi_{E/F}}$, où $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;
(4) δ_Θ, où Θ est un caractère régulier de $E^\times$, dans ce cas, on a $\Theta \simeq \Theta^\sigma$;
(5) δ_π, où π est une représentation cuspidale du groupe G qui n'est pas attachée à un caractère régulier de $E^\times$ par la correspondance de Langlands locale.
Dans ce cas, on a $\delta_\pi \simeq \delta_{\pi\chi_{E/F}}$;
(6) Les isomorphismes décrits sont les seuls entre ces représentations.

Soient $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}$, on a la représentation $(\Psi \cdot 1_H, \psi^2\chi_{E/F})_{E^\times}$ qui est σ-invariante et de dimension 1. Par Définition 4.12, on sait que $(\Psi \cdot 1_H, \psi^2\chi_{E/F})_{E^\times}$ est distinguée, mais n'est pas distinguée générique. Comme $(\Psi \cdot 1_H, \psi^2\chi_{E/F})_{E^\times} \simeq (\psi\chi_{E/F} \circ \mathrm{N}_{E/F} \cdot 1_H, (\psi\chi_{E/F})^2\chi_{E/F})_{E^\times}$, elle est bien déterminée par $\psi|_{F^{\times +}}$, donc nous la noterons par $\psi^+ \cdot 1_{GSO(M)}$.

Proposition 4.18. *Les classes d'isomorphisme des représentations distinguées du groupe $GSO(M)$ sont décrites ci-dessous :*
(1) $\delta_{\lambda,\sigma}$, où $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ satisfait à $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm 1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm 1}$;
Dans ce cas, on a $\delta_{\lambda,\sigma} \simeq \delta_{\sigma,\lambda} \simeq \delta_{\lambda\chi_{E/F},\sigma\chi_{E/F}} \simeq \delta_{\sigma\chi_{E/F},\lambda\chi_{E/F}}$;
(1') $\lambda^+ \cdot \delta_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$, où $\lambda \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;
(2) $\psi^+ \cdot \mathrm{St}_{GSO(M)}$, où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;
(3) $\psi^+ \cdot \delta_{1,\chi_{E/F}}$, où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;
(4) $\psi^+ \cdot 1_{GSO(M)}$, où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;
(5) δ_Θ, où Θ est un caractère régulier de $E^\times$.
Dans ce cas, on a $\Theta \simeq \Theta^\sigma$;
(6) δ_π, où π est une représentation cuspidale du groupe G non attachée à un caractère régulier par la correspondance de Langlands locale.
Dans ce cas, on a $\delta_\pi \simeq \delta_{\pi\chi_{E/F}}$;
(7) Les isomorphismes décrits sont les seuls entre ces représentations.

Pour l'instant, nous connaissons la classification des représentations distinguées du groupe $GSO(M)$. Pour la suite, nous aurons besoin de décrire les représentations irréductibles du groupe $GO(M)$. Soient $h_0 \in GO(M)$ et $h_0^2 = 1$, n'appartenant par à $GSO(M)$. On a $GO(M) \simeq GSO(M) \rtimes \{1, h_0\}$. Si on regarde $GSO(M)$ comme $F^\times \times H/a(E^\times)$, alors on peut choisir σ comme h_0 et l'action est définie par $\sigma(\overline{(t \times h)}) := \overline{(t \times h^\sigma)}$.

Proposition 4.19. *(1) Soit $\delta \in \mathrm{Irr}(GSO(M))$ une représentation invariante, alors $\mathrm{Ind}_{GSO(M)}^{GO(M)} \delta$ est réductible.*
(2) Soient $\delta \in \mathrm{Irr}(GSO(M))$ une représentation distinguée générique et m un élément anisotrope de M, tels que $\mathrm{Hom}_{SO(m^\perp)}(\Pi, 1_{SO(m^\perp)}) \neq 0$, alors il existe une composante unique de $\mathrm{Ind}_{GSO(M)}^{GO(M)} \delta$, notée δ^+ tel que $\mathrm{Hom}_{O(m^\perp)}(\delta^+, 1_{O(m^\perp)}) \neq 0$; on note l'autre composante par δ^-.

Démonstration. (1) Ceci découle de la théorie de Clifford.
(2) Par le résultat dans la page 20 de [R2], on a $\mathrm{Hom}_{SO(m^\perp)}(\delta, 1) = 1$, en appliquant le Théorème Réciproque de Frobenius, on obtient $\mathrm{Hom}_{O(m^\perp)}(\mathrm{Ind}_{GSO(M)}^{GO(M)} \delta, 1) \simeq \mathrm{Hom}_{O(m^\perp)}(\mathrm{Ind}_{SO(M)}^{O(M)} \delta, 1) \simeq \mathrm{Hom}_{O(m^\perp)}(\mathrm{Ind}_{SO(m^\perp)}^{O(m^\perp)} \delta, 1) \simeq \mathrm{Hom}_{SO(m^\perp)}(\delta, 1) = 1$, ce qui entraîne qu'il y a une composante unique δ^+ telle que $\mathrm{Hom}_{O(m^\perp)}(\delta^+, 1_{O(m^\perp)}) \neq 0$. □

Remarque 4.20. *(1) La définition de δ^+ ne dépend par de choix de l'élément anisotrope m de M.*
(2) Si $\delta = \psi^+ \cdot 1_{GSO(M)}$ un élément de $\mathrm{Irr}_D(GSO(m))$ n'appartenant pas à $\mathrm{Irr}_{DG}(GSO(M))$, on sait qu'elle est invariante de dimension 1, elle peut se prolonger en une représentation du groupe $GO(M)$ définie par $\sigma \longmapsto \chi_{E/F}(-1)$. On la note par $\psi^+ \cdot 1_{GSO(M)}^+$.

Démonstration. (1) Comme la définition de la représentation distinguée générique ne dépend par de choix de l'élément anisotrope m de M, cela implique le résultat.
(2) Comme $\chi_{E/F}(-1)\delta(h^\sigma) = \chi_{E/F}(-1)\Psi(\det(h)^\sigma) = \chi_{E/F}(-1)\Psi(\det(h)) = \delta(h)\chi_{E/F}(-1)$ pour $h \in H$, donc le prolongement est bien défini. □

Soit $\delta \in \mathrm{Irr}_D(GSO(M))$, on vient de définir une représentation δ^+ du groupe $GO(M)$ prolongeant δ. Nous notons $\mathrm{Irr}_D(GO(M))$ l'ensemble de ces classes d'isomorphisme et en faisons la liste dans la Proposition suivante.

Proposition 4.21. *Les $\delta' \in \mathrm{Irr}_D(GO(M))$ sont de la forme suivante :*

(1) $\delta' = \delta^+_{\lambda,\sigma}$, *où* $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *satisfont à* $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm 1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm 1}$.
Dans ce cas, on a $\delta^+_{\lambda,\sigma} \simeq \delta^+_{\sigma,\lambda} \simeq \delta^+_{\lambda\chi_{E/F},\sigma\chi_{E/F}} \simeq \delta^+_{\sigma\chi_{E/F},\lambda\chi_{E/F}}$ *;*
(1') $\delta' = \lambda^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$, *où* $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*
(2) $\delta' = \psi^+ \cdot \mathrm{St}^+_{GSO(M)}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*
(3) $\delta' = \psi^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*
(4) $\delta' = \psi^+ \cdot 1^+_{GSO(M)}$, *où* $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$ *;*
(5) $\delta' = \delta^+_\Theta$ *où* Θ *est un caractère régulier de* $E^\times$.
Dans ce cas, on a $\Theta \simeq \Theta^\sigma$ *;*
(6) $\delta' = \delta^+_\pi$ *où* π *est une représentation cuspidale du groupe* G *non attachée à un caractère régulier de* $E^\times$ *par la correspondance de Langlands locale.*
Dans ce cas, on a $\delta_\pi \simeq \delta_{\pi\chi_{E/F}}$ *;*
(7) Les isomorphismes indiqués sont les seuls entre les éléments listes.

4.1.3 Les résultats de Micheal Cognet

I Originaux Dans cette sous-sous-section, nous rappelons et précisons les résultats principaux dans [Co]. Dans cette sous-sous-section, on désignera par F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2, par E une extension quadratique de F, par $G = GL_2(F)$, par $H = GL_2(E)$, par $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle$. Soit $M = \{\begin{pmatrix} y & \overline{\alpha} \\ \alpha & -x \end{pmatrix} | x, y \in F, \alpha \in E\}$, sur cet espace vectoriel sur F, on peut définir une forme q par :

$$q(m) := -\det(m) \text{ où } m \in M.$$

Soit $GO(M)$ le groupe de similitudes de l'espace quadratique (M, q). On peut en montrer une application :

$$H \longrightarrow GO(M)$$

$$(h \longmapsto (m \mapsto hm\overline{h}^t)).$$

Micheal Cognet a étudié la représentation suivante :

$$R_\psi((1,h))f(m,u) = f(h^{-1}m(\overline{h}^t)^{-1}, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))u), \tag{3}$$

$$R_\psi((\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \chi_{E/F}(a)|a|_F^2 f(am, u), \tag{4}$$

$$R_\psi((\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \psi(ubq(m))f(m,u), \tag{5}$$

$$R_\psi((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = |t|_F^{-1} f(m, t^{-1}u), \tag{6}$$

$$R_\psi((\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \gamma(uq)\int_M f(n,u)\psi(uq(m,n))|u|_F^2 dn, \tag{7}$$

où $f \in \mathcal{S}(M \times F^\times), m \in M; b \in F; u, a \in F^\times$; de plus $q(m,n) = q(m+n) - q(m) - q(n)$ et $\gamma(uq)$ est le facteur de Weil associé à la forme uq [cf. [W]].

Pour f dans $\mathcal{S}(M \times F^\times)$, on définit sa transformée de Fourier $\widetilde{f}$ par rapport à y qui appartient à $\mathcal{S}(F^2 \times E \times F^\times)$:

$$\widetilde{f}(x, y, b, u) = \int_F f(\begin{pmatrix} v & \overline{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, u)\psi(vuy)|u|_F^{-1/2} dv,$$

où $|u|_F^{-1/2}dv$ est la mesure de Haar sur F autoduale pour ψ^u.
Par l'isomorphisme de $\mathcal{S}(M \times F^\times)$ dans $\mathcal{S}(F^2 \times E \times F^\times)$ qui à f associe $\widetilde{f}$, on peut définir une autre représentation $\widetilde{R}$ de $G \times H$ sur $\mathcal{S}(F^2 \times E \times F^\times)$ par :

$$\widetilde{R}((g,h))\widetilde{f} := \widetilde{R(g,h)f}.$$

Evidemment , $(R_\psi, G \times H, \mathcal{S}(M \times F^\times))$ est isomorphe à $(\widetilde{R}, G \times H, \mathcal{S}(F^2 \times E \times F^\times)))$.
Soit ψ^- le caractère de F défini par $\psi^-(x) := \psi(-x)$. Soit π une représentation irréductible de dimension infinie de

G, réalisée dans son modèle de Whittaker $W_\pi^{\psi^-}$ relatif au caractère continu non trivial ψ^-.
Pour f appartenant à $\mathcal{S}(M \times F^\times)$, W à $W_\pi^{\psi^-}$ et h à H, on définit la fonction

$$B^h_{f,W} : G \longrightarrow \mathbb{C};$$

$$g \longmapsto W(g)\widetilde{R(g,h)}\widetilde{f}((0,1,1,1)).$$

On sait que la fonction $B^h_{f,W}$ a de bonnes proprétés ; en particulier elle est intégrable sur $N \setminus G$ [cf. [Co]].
On définit la fonction

$$A_{f,W} : H \longrightarrow \mathbb{C};$$

$$h \longmapsto \int_{N\setminus G} B^h_{f,W}(\dot{g})d\,\dot{g}\ .$$

On définit l'espace

$$\mathcal{B} = \{A_{f,W}, f \in \mathcal{S}(M \times F^\times), W \in W_\pi^{\psi^-}\}.$$

Soit $(\Pi, \mathcal{B})$ la représentation de H dont l'action est définie par translations à droite. Après une analyse difficile, Micheal Cognet a démonté le théorème suivant :

Théorème 4.22 (Micheal Cognet)**.** *Soient $\lambda, \sigma, \psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, $\Lambda, \Sigma, \Psi, \Theta \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ telles que $\lambda \circ \mathrm{N}_{E/F} = \Lambda$, $\sigma \circ \mathrm{N}_{E/F} = \Sigma$, $\psi \circ \mathrm{N}_{E/F} = \Psi$ et $|\lambda\sigma^{-1}| = |\cdot|_F^s$ avec $Res \geqq 0$; supposons $\lambda\sigma^{-1} \neq |,|_F$.*
(1) Si $\pi = \pi_{\lambda,\sigma}$, alors $\Pi = \Pi_{\Lambda,\Sigma}$.
(2) Si $\pi = \psi \cdot \mathrm{St}_G$, alors $\Pi = \Psi \cdot \mathrm{St}_H$.
(3) Si $\pi = \pi_\Theta$ où π_Θ est la représentation de G associée au caractère régulier Θ de $E^\times$ par la correspondence de Langlands locale, alors $\Pi = \Pi_{\Theta,\Theta^\sigma}$.
(4) Si π est cuspidale sans être du type π_Θ, alors $\Pi = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$.

II. Analyse des résultats de Cognet Comment comprendre le Théorème 4.22 ? On peut espérer qu'il s'exprime avec les quotients irréductibles de la représentation R_ψ ; nous expliquons les détails ci-dessous.

Pour trouver les quotients de la représentation $(\widetilde{R}, G \times H, \mathcal{S} = \mathcal{S}(F^2 \times E \times F^\times))$, d'abord, nous choisissons une représentation irréductible (π, V) du groupe G de dimension infinie. Soit $\check{\pi}$ sa contragrédiente, nous notons son plus grand quotient $\check{\pi}$-isotypique par $\mathcal{S}_{\check{\pi}}$. Supposons que $\mathcal{S}_{\check{\pi}} \simeq \check{\pi} \otimes \pi'$ où π est une représentation lisse de H. On réalise π dans son modèle de Whittaker $W_\pi^{\psi^-}$.

Proposition 4.23. *La représentation $(\check{\pi} \otimes \pi', G \times H, \mathcal{S}_{\check{\pi}})$ est lisse admissible.*

Démonstration. On a vu que $\check{\pi'} \simeq \mathrm{Hom}_G(\widetilde{R}, \pi)^\infty$ comme H-représentation [cf. subsection 2.2]. Par le Lemme 4.35, nous remplaçons $\widetilde{R}$ par $\pi_\psi^{\Gamma_0} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G\times H}(\rho_\psi|_{\Gamma_0})$. Comme G/G^+ et $GO(M)/H$ sont des groupes finis. Par le Théorème Réciproque de Frobenius, il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{G^+}(c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi, \pi^+)^\infty$ est une représentation admissible du groupe $GO(M)$ pour $\pi^+ \in \mathrm{Irr}(G^+)$. On a les relations

$$\Gamma \cap (G^+ \times 1) = SL_2(F) \times 1,$$

et

$$G^+ \times GO(M)/\Gamma \simeq G^+/SL_2(F) \simeq \mathrm{N}_{E/F}(E^\times).$$

Il en résulte que

$$\mathrm{Hom}_{G^+}(c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi, \pi^+) \overset{\text{Pro. 4.72}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{G^+}(c - \mathrm{Ind}_{SL_2(F)}^{G^+}\rho_\psi, \pi^+) \overset{\text{Thm.4.70 et Lem.4.69}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{SL_2(F)}(\rho_\psi, \pi^+)$$

comme $O(M)$-représentation. On aussi sait que $\pi^+|_{SL_2(F)}$ est semi-simple et $\sharp\mathcal{R}_{SL_2(F)}(\pi^+) \leq 4$. Par le résultat de Waldspurger, on sait que $\mathrm{Hom}_{SL_2(F)}(\rho_\psi, \pi^+)^\infty$ est une représentation de longeur finie du groupe $O(M)$. Soit f un élément de $\mathrm{Hom}_{G^+}(c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi, \pi^+)^\infty$. Si f est fixé par un sous-groupe ouvert compact K de $GO(M)$, alors il est aussi fixé par $K \cap O(M)$. Donc on trouve que $\mathrm{Hom}_{G^+}(c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi, \pi^+)^\infty$ est une représentation de longeur finie du groupe $GO(M)$. Par le Théorème de Howe, on obtient le résultat. □

Pour un moment, nous fixons un élément $h_0 \in H$. Par définition, on sait que la fonction :

$$B^{h_0} = \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{-,-} : \pi \otimes \mathcal{S}(F^2 \times E \times F^\times) \longrightarrow \mathbb{C};$$

$$W \otimes \widetilde{f} \longmapsto \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{f,W}(\dot{g})d\dot{g},$$

appartient à $\mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \mathcal{S}, \mathbb{C})$. Parce que, pour $g_1 \in G, W \in W^{\psi-}_\pi, \widetilde{f} \in \mathcal{S}(F^2 \times E \times F^\times)$, on a

$$\int_{N\backslash G} B^{h_0}_{-,-}\Big(\widetilde{R}((g_1,1))(W \otimes \widetilde{f})\Big) = \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{R_\psi((g_1,1))(f),\pi(g_1)W}(\dot{g})d\dot{g}$$

$$= \int_{N\backslash G} W(gg_1)\widetilde{R}(gg_1,h_0)\widetilde{f}((0,1,1,1))d\dot{g} = \int_{N\backslash G} W(g)\widetilde{R}(g,h_0)\widetilde{f}((0,1,1,1))d\dot{g}$$

$$= \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{f,W}(g)d\dot{g} = \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{-,-}\Big((W \otimes \widetilde{f})\Big).$$

On sait que

$$(\pi')^\vee \simeq \mathrm{Hom}_G(\check{V} \otimes \mathcal{S}, \mathbb{C})^\infty$$

comme représentation du groupe H. Maintenant, nous pouvons écrire précisément l'action :

Supposons F un élément de $\mathrm{Hom}_G(\check{V} \otimes \mathcal{S}, \mathbb{C})$, alors $((\pi'^\star)(h)F)(W \otimes \widetilde{f}) := F(W \otimes \widetilde{R}((1,h^{-1}))\widetilde{f})$. En particulier, $F = B^{h_0} := \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{-,-} \in \mathrm{Hom}_G(\check{V} \otimes \mathcal{S}, \mathbb{C})$, pour $h_0 \in H$. On a

$$(\pi'^\star(h)(B^{h_0}))(W \otimes \widetilde{f}) = \Big((\pi'^\star)(h)\int_{N\backslash G} B^{h_0}_{-,-}\Big)(W \otimes \widetilde{f})$$

$$= \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{-,-}(W \otimes \widetilde{R}((1,h^{-1}))\widetilde{f}) = \int_{N\backslash G} B^{h_0}_{R_\psi(1,h^{-1})f,W}(g)d\dot{g}$$

$$= \int_{N\backslash G} W(g)\widetilde{R}((g,h_0)\widetilde{R}((1,h^{-1}))\widetilde{f}((0,1,1,1))d\dot{g}$$

$$= \int_{N\backslash G} W(g)\widetilde{R}(g,h_0h^{-1})\widetilde{f}((0,1,1,1))d\dot{g} = \int_{N\backslash G} B^{h_0h^{-1}}_{f,W}(g)d\dot{g}$$

$$= \int_{N\backslash G} B^{h_0h^{-1}}_{-,-}(W \otimes \widetilde{f}) = B^{h_0h^{-1}}(W \otimes \widetilde{f}),$$

ce qui implique que $(\pi'^\star)(h)B^{h_0} = B^{h_0h^{-1}}$.

Nous voulons obtenir des éléments lisses dans $\mathrm{Hom}_G(\check{V} \otimes \mathcal{S}, \mathbb{C})^\star$. Pour achever ce but, nous considérons l'élément suivant :

$$\int_{N\backslash G} B^K_{-,-} : \check{V} \otimes \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$W \otimes \widetilde{f} \longmapsto \int_K \int_{N\backslash G} B^h_{f,W}(\dot{g})d\dot{g}dh,$$

pour tout sous-ensemble compact et ouvert K de H. Ici, nous fixons une mesure dh de H. Comme $\widetilde{f}$ est une fonction de Bruhat-Schwartz, on sait que l'application est bien définie. Soit $k \in K$, on sait que K est un voisinage ouvert du point k, par la structure de H, il existe un sous-groupe compact-ouvert K_1 de H, tel que $kK_1 \subset K$. Il en résulte que $\int_{N\backslash G} B^{Kk}_{f,W} = \int_{N\backslash G} B^K_{f,W}$ pour $k \in K_1$.

Notons $\mathcal{A}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les éléments $B^K = \int_{N\backslash G} B^K_{-,-}$ pour tout sous-ensemble compact ouvert K de H. Nous pouvons définir une représentation $(\Pi_\vee, \mathcal{A})$ du groupe H. Comme

$$\Pi_\vee(h)(\sum_i c_i B^{K_i}) = \sum_i c_i B^{K_ih^{-1}}$$

pour $h \in H$, $c_i \in \mathbb{C}$ et K_i des sous-ensembles compacts ouverts de H. Si $\sum_i c_i B^{K_i} = 0$, on a

$$\Pi_\vee(h)(\sum_i c_i B^{K_i})(W \otimes \widetilde{f}) = \sum_i c_i B^{K_i}(W \otimes (R_\psi\widetilde{(1,h^{-1})}f)) = 0.$$

C'est-à-dire que la représentation $\Pi_\vee$ est bien définie. D'autre part, elle est lisse par construction.

D'ailleurs, nous savons la représentation $(\Pi, \mathcal{B})$ de H. En fait, on peut définir une application bilinéaire sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\langle , \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C};$$
$$(B^K, A_{f,W}) \longmapsto \int_K \int_{N\backslash G} B^h_{f,W}(\dot{g}) d\dot{g} dh.$$

On vérifie que elle est bien définie. De plus

$$\langle \Pi_\vee(h_0) B^K, \Pi(h_0) A_{f,W} \rangle = \langle B^{K h_0 h^{-1}}, \Pi(h_0) A_{f,W} \rangle$$
$$= \int_K \int_{N\backslash G} B^{hh_0^{-1}h_0}_{f,W}(\dot{g}) d\dot{g} dh = \langle B^K, A_{f,W} \rangle.$$

Si $\langle B^K, A_{f,W} \rangle = 0$ pour tout $B^K \in \mathcal{A}$, alors on a

$$0 = \int_K \int_{N\backslash G} B^h_{f,W}(\dot{g}) d\dot{g} dh = \int_K \int_{N\backslash G} W(g) \widetilde{R}(g,h) \widetilde{f}((0,1,1,1)) d\dot{g} dh,$$

pour tous éléments fixés $W \in W_\pi^{\psi^-}$, $f \in \mathcal{S}(M \times F^\times)$, $h_0 \in H$; il existe un sous-groupe compact ouvert K de H tel que $\widetilde{R}(1,h)\widetilde{f} = \widetilde{f}$ pour tout $h \in K$. Cela implique que $0 = \int_{N\backslash G} W(g)\widetilde{R}(g,h)\widetilde{f}((0,1,1,1))\mu(K)$. Donc $A_{f,W}(h_0) = 0$, il en résulte que $A_{f,W} = 0$. D'autre part, supposons $\langle B^K, A_{f,W} \rangle = 0$ pour tout $A_{f,W} \in \mathcal{B}$, donc nous trouvons que $B^K = 0$. En fin, nous démontrons que $\Pi_\vee \subset \Pi^\star$ et $\Pi \subset \Pi_\vee^\star$. Ces deux représentations sont lisses, donc on obtient :

Lemme 4.24. $\Pi_\vee \simeq \Pi^\vee$.

Proposition 4.25. *Il existe non trivial élément $f \in \mathrm{Hom}_H(\pi', \Pi)$ tel que la suite $\pi' \xrightarrow{f} \Pi \longrightarrow 0$ est exacte.*

Démonstration. Par le Théorème 4.23, on sait que π' est admissible, ce qui implique que $(\pi')^{\vee\vee} \simeq \pi'$. Comme $(\Pi_\vee, \mathcal{A})$ est une sous-représentation de $(\Pi')^\vee$, donc on obtient que $\Pi^\vee$ est une sous-représentation de $(\pi')^\vee$, ce qui montre le résultat. □

Théorème 4.26. $\mathrm{Hom}_{G\times H}(\mathcal{S}, \pi \otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\check{\pi})) \neq 0$ *pour toute représentation irréductible de dimension infinie de G.*

Démonstration. Par le Lemme 2.17, on a $\mathrm{Hom}_{G\times H}(\mathcal{S}, \pi \otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\check{\pi})) \simeq \mathrm{Hom}_H(\pi', \mathrm{Bc}_{E/F}(\check{\pi}))$. Donc on trouve le résultat après le Théorème 4.22 et la Proposition 4.25. □

Néanmoins, pour obtenir que les quotients irréductibles de la représentation R_ψ sont tous de la forme $\pi \otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$, on peut passage à un isomorphisme. Nous donnons quelques lemmes pour expliquer les détails.

Soient G_1, G_2 deux groupes localement compacts totalement discontinus, (π, S) une représentation lisse de $G_1 \times G_2$. Si (π_1, V_1) est une représentation admissible irréductible de G_1, nous notons par S_{π_1} son plus grand quotient π_1-isotypique. Soient μ un automorphisme du groupe G_2. On définit une autre représentation π^μ de $G_1 \times G_2$ par $\pi^\mu(g_1, g_2) = \pi(g_1, \mu^{-1}(g_2))$.

Lemme 4.27. *Soient $S_{\pi_1} \simeq \pi_1 \otimes \pi_2$, $S^\mu_{\pi_1} \simeq \pi_1 \otimes \pi_2'$, alors $\pi_2' \simeq \pi_2^\mu$ où $\pi_2^\mu(g_2) := \pi_2(\mu^{-1}(g_2))$ pour $g_2 \in G_2$.*

Démonstration. Nous rappelons que la construction des représentations π_2, π_2' dans la sous-section 2.2, $S_\pi = S/S[\pi_1]$ où $S[\pi_1] = \cap_f \ker(f)$ pour f parcourt $\mathrm{Hom}_{G_1}(S, V_1)$, de plus $\pi_2 \simeq (\check{V_1} \otimes S_{\pi_1})_{G_1}$ le plus grand quotient de $\check{V_1} \otimes S_{\pi_1}$. Comparant le résultat du lemme 2.14, on voit que $\pi_2' \simeq \pi_2^\mu$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Et l'action de G_2 dans π_2, π_2' provient de celle de π, π^μ, d'où le résultat. □

Corollaire 4.28. *Il existe une bijection $\mu : \mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(S, \pi_1 \otimes \pi_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(S^\mu, \pi \otimes \pi_2^\mu)$.*

En certain cas, on peut choisir un automorphisme μ de G_2 pour obtenir les quotients désirés. Pour nous, il est utile de modifier la définition de la représentation R_ψ étudiée par Micheal Cognet. En ce cas, on peut prendre pour μ

l'involution de Cartan $\theta : H \longrightarrow H; h \longmapsto (h^t)^{-1}$. En modifiant R_ψ par θ, nous obtenons une représentation R^c_ψ. En vue d'applications plus tard, nous écrivons les formules précisées ci-dessous :

$$R^c_\psi((1,h))f(m,u) = f(h^t m\bar{h}, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h)^{-1})u), \tag{8}$$

$$R^c_\psi((\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \chi_{E/F}(a)|a|^2_F f(am,u), \tag{9}$$

$$R^c_\psi((\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \psi(ubq(m))f(m,u), \tag{10}$$

$$R^c_\psi((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = |t|^{-1}_F f(m, t^{-1}u), \tag{11}$$

$$R^c_\psi((\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \gamma(uq)\int_M f(n,u)\psi(uq(m,n))|u|^2_F dn. \tag{12}$$

Proposition 4.29. *Pour la représentation R^c_ψ, on a*

$$\mathrm{Hom}_{G\times H}(R^c_\psi, \pi\otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)) \neq 0,$$

pour toute représentation irréductible de dimension infinie π de G.

Démonstration. Ceci découle du Théorème 4.26, du Lemme 4.27 et du Corollaire 4.28. □

Remarque 4.30. *Si on change la forme q en $-q$, on obtient une autre représentation comme $(R^c_\psi, H\times G, \mathcal{S}(M\times F^\times))$, mais associée à la forme $-q$, notée ${}_{-q}R^c_\psi$. Par les formules (8)—(12), on connaît que cette représentation est isomorphe à $(R^c_{\psi^-}, H\times G, \mathcal{S}(M\times F^\times))$ associée à la forme q, donc les résultats dans la Proposition 4.29 sont aussi vrais par la représentation ${}_{-q}R^c_\psi$.*

4.1.4 Les résultats de Brooks Roberts

Conversons les notations dans la sous-sous-sous section 4.1.3. On pose $W = W_1 \otimes M$; c'est un espace vectoriel sur F de dimension 8, muni de la forme symplectique induite par celle de W_1 et la forme q sur M. On notera ω_ψ la représentation de Weil sur $Mp(W)$ liée à ψ.

On définit le groupe intermédiaire :

$$\Gamma = \{(g,h) \in G\times GO(M) | \lambda(g)\lambda(h) = 1\}.$$

Par le Théorème 3.4, on peut trouver un homomorphisme $\Gamma \longrightarrow Mp(W)$. Grâce à un tel homomorphisme $\Gamma \longrightarrow Mp(W)$, on obtient une représentation lisse sur Γ, notée ρ_ψ, qui peut se réaliser dans$\mathcal{S}(M)$ par les formules suivantes :

(i) $g = (1,s)$, où $s \in SL_2(E)$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = f(s^t m\bar{s});$$

(ii) $g = (1,\sigma)$, où $\sigma \in GO(M)$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = f(m^\sigma);$$

(iii) $g = (1,\bar{t})$, où $\bar{t} = b(t,1,1) \in GO(M)$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = f(tm);$$

(iv) $g = (\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1)$, où $b \in F$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = \psi(b\det(m))f(m);$$

(v) $g = (\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1)$, où $a \in F^\times$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = \chi_{E/F}(a)|a|^2_F f(am);$$

(vi) $g = (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1)$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = \gamma(q)\int_M f(n)\psi(q(m,n))dn;$$

(vii) $g = (g_1, h_1)$ avec $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et $t\,\mathrm{N}_{E/F}(e) = 1$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = |\,\mathrm{N}_{E/F}(e)|_F f(h_1^{-1t}m(\overline{h_1}));$$

où $\chi_{E/F}$ est le caractère quadratique de $F^\times$ de noyau $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$; de plus $\gamma(q)$ est le facteur de Weil associé à la forme quadratique q, et dn est la mesure de Haar duale par ψ, et $q(m,n) = q(m+n) - q(m) - q(n)$.

On définit

$$\pi_\psi^{\Gamma,+} = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi.$$

Cette représentation peut se réaliser dans$\mathcal{S}(M \times F^{\times +})$ par les formules suivantes :

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,h))f(m,u) = |\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))|_F f(h^t m(\overline{h}), \mathrm{N}_{E/F}(\det(h)^{-1})u). \tag{13}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,\sigma))f(m,u) = f(m^\sigma, u). \tag{14}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,\bar{t}))f(m,u) = |t^2|_F f(tm, t^{-2}u). \tag{15}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \chi_{E/F}(a)|a|_F^2 f(am, u). \tag{16}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \psi_F(bu\det(m))f(m,u). \tag{17}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = f(m, ut^{-1}). \tag{18}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \gamma(uq)\int_M f(n,u)\psi_F(uq(m,n))|u|_F^2 dn. \tag{19}$$

Proposition 4.31. *$\pi_\psi^{\Gamma,+}$ est une représentation de bigraphe forte.*

Démonstration. Ceci découle du Théorème 3.16. □

On pose $\mathcal{R}_{G^+}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(G^+) |\, \mathrm{Hom}_{G^+}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi) \neq 0\}$ et $\mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) = \{\sigma \in \mathrm{Irr}(GO(M)) |\, \mathrm{Hom}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \sigma) \neq 0\}$.

Théorème 4.32 (Brooks Roberts)**.** *$\mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) = \mathrm{Irr}_D(GO(M))$ où $\mathrm{Irr}_D(GO(M))$ est constitué par les représentations σ^+ définies dans la Proposition 4.21, et σ parcourt $\mathrm{Irr}_D(GSO(M))$.*

Démonstration. Ceci découle de [[R2], Page 27, Theorem 7.4] □

La relation entre les représentations étudiées par B.Roberts et M.Cognet D'abord, reprenons quelques définitions dans la sous-sous-section 4.1.3. La représentation R_ψ^c de $G \times H$ peut se prolonger en une représentation du groupe $G \times GSO(M)$, encore notée R_ψ^c . L'action est donnée par les formules (8)—(12), et complétées par la formule suivante :
Soit $t \in F^\times$, on note $\bar{t}$ l'image de $(t, 1)$ dans $GSO(M)$ par l'homomorphisme $F^\times \times H \longrightarrow GSO(M)$; alors

$$R_\psi^c((1,\bar{t}))f(m,u) := f(tm, t^{-2}u). \tag{20}$$

Remarque 4.33. *On peut voir $R_\psi^c((1,\bar{t}))(f) = \chi_{E/F}(t)R_\psi^c((t,1))(f)$ par les formules (9),(11), (20).*

Proposition 4.34. *Pour la représentation $(R_\psi^c, G \times GSO(M), \mathcal{S}(M \times F^\times))$, on a*

$$\mathrm{Hom}_{G\times GSO(M)}\left(R_\psi^c, \pi \otimes (\,\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi)_{E^\times}\right) \neq 0,$$

pour toute représentation lisse irréductible π du groupe G de dimension infinie.

Démonstration. Par le Corollaire 4.29, on a $\mathrm{Hom}_{G\times H}(R^c_\psi, \pi\otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)) \neq 0$. Soit $0 \neq F \in \mathrm{Hom}_{G\times H}(R^c_\psi, \pi\otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi))$. En utilisant la Remarque 4.33, on a $F(R^c_\psi((1,\bar{t})f) = \chi_{E/F}(t)F(R^c_\psi(t,1)f) = \omega_\pi(t)\chi_{E/F}(t)F(f)$, ce qui implique le résultat. □

Ensuite, rappelons que nous avons défini le groupe intermédiaire :

$$\Gamma_0 = \{(g,h) \in G^+ \times GSO(M) | \lambda(g)\lambda(h) = 1\}$$

qui est un sous-groupe de Γ.
On peut définir encore une autre représentation

$$\pi^{\Gamma_0,+}_\psi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G^+\times GSO(M)}(\rho_\psi|_{\Gamma_0}).$$

Donc on a

$$\pi^{\Gamma,+}_\psi|_{G^+\times GSO(M)} \simeq \pi^{\Gamma_0,+}_\psi.$$

Nous aussi noterons $\pi^{\Gamma_0}_\psi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G\times GSO(M)}(\rho_\psi|_{\Gamma_0})$. Soit $|\cdot|_F \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, elle donne une représentation irréductible du groupe G, notée aussi $|\cdot|_F$. De la même manière, nous notons $|\cdot|_E \in \mathrm{Irr}(H)$ la représentation irréductible de dimension 1 du groupe H associée à $|\cdot|_E \in \mathrm{Irr}(E^\times)$, on obtient ainsi une représentation irréductible $(|\cdot|_E, |\cdot|^2_F)_{E^\times}$ du groupe $GSO(M)$.

Lemme 4.35. *La représentation $|\cdot|_F \otimes (|\cdot|_E, |\cdot|^2_F)_{E^\times} \cdot R^c_\psi$ est isomorphe à $\pi^{\Gamma_0}_\psi$ comme représentation du groupe $G\times GSO(M)$.*

Démonstration. On sait que la représentation $(\pi^{\Gamma_0}_\psi, G\times GSO(M))$ peut se réaliser dans $\mathcal{S}(M\times F^\times)$ par les formules (13), (15)—(19). En comparant avec (8)—(12) et (20), on trouve le résultat. □

Corollaire 4.36. *Pour la représentation $\pi^{\Gamma_0}_\psi$, on a*

$$\mathrm{Hom}_{G\times GSO(M)}\left(\pi^{\Gamma_0}_\psi, \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)_{E^\times}\right) \neq 0$$

pour toute représentation lisse irréductible π du groupe G de dimension infinie.

Démonstration. Par la Proposition 4.34, on a $\mathrm{Hom}_{G\times GSO(M)}\left(R^c_\psi, \pi\otimes(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi)_{E^\times}\right) \neq 0$ pour toute représentation irréductible π du groupe G de dimension infinie. On voit que $|\cdot|_F\cdot\pi\otimes(\mathrm{Bc}_{E/F}(|\cdot|_F\cdot\pi), \chi_{E/F}\omega_{|\cdot|_F\cdot\pi})_{E^\times} = |\cdot|_F\otimes(|\cdot|_E, |\cdot|^2_F)_{E^\times}\cdot\pi\otimes(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi)_{E^\times}$. D'après le Lemme 4.35, on trouve le résultat. □

Proposition 4.37. *Pour la représentation $\pi^{\Gamma,+}_\psi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi$, on a*

$$\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}\left(\pi^{\Gamma,+}_\psi, \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)^+_{E^\times}\right) \neq 0$$

pour toute représentation lisse irréductible π du groupe G de dimension infinie.

Démonstration. Par [Appendice lemme 4.68], on voit aisément que tous les groupes concernés sont unimodulaires. Par le corollaire 4.36, $\mathrm{Hom}_{G\times GSO(M)}\left(\pi^{\Gamma_0}_\psi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G\times GSO(M)}(\rho_\psi|_{\Gamma_0}), \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)_{E^\times}\right)$ n'est pas nul. Donc

$$\begin{aligned}
0 \neq \mathrm{Hom}_{G\times GSO(M)}&\left(\pi^{\Gamma_0}_\psi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G\times GSO(M)}(\rho_\psi|_{\Gamma_0}), \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)_{E^\times}\right)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_0}\left(\rho_\psi|_{\Gamma_0}, \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)_{E^\times}\right)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{G^+\times GSO(M)}\left(\pi^{\Gamma_0,+}_\psi = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G^+\times GSO(M)}(\rho_\psi|_{\Gamma_0}), \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)_{E^\times}\right)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{G^+\times GSO(M)}\left(\mathrm{Res}^{G^+\times GO(M)}_{G^+\times GSO(M)}\, c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi, \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)_{E^\times}\right)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}\left(\pi^{\Gamma,+}_\psi = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi, \pi\otimes\mathrm{Ind}^{GO(M)}_{GSO(M)}\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)_{E^\times}\right).
\end{aligned}$$

Par le Théorème 4.32, on sait que $\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}\left(\pi^{\Gamma,+}_\psi, \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)^-_{E^\times}\right) = 0$ (cf. la défintion dans la Proposition 4.19), ce qui implique $\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}\left(\pi^{\Gamma,+}_\psi, \pi\otimes\left(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi\right)^+_{E^\times}\right) \neq 0$. □

4.2 Exemples proposés par Guy Henniart I Cas d'un corps non archimédien

4.2.1 $GL_2(F) \times GL_2(F) \times GL_2(F)$

Dans cette sous-sous-section, on désignera par F un corps local non archimédien de caractèristique nulle et de caractéristique résiduelle impaire, par G le groupe $GL_2(F)$. Soient V un espace vectoriel de dimension 2 sur F, muni d'une forme symplectique non dégénérée $\langle , \rangle_1$, $\mathscr{A} = \{e_1, e_2\}$ une base symplectique de V, i.e. $\langle e_1, e_2\rangle_1 = 1, \langle e_2, e_1\rangle_1 = -1$. On fixera un caractère non trivial ψ de F.

Posons $W = V \otimes_F V \otimes_F V$. C'est un espace vectoriel de dimension 8 sur F, muni d'une forme symplectique $\langle , \rangle$, définie par $\langle v_1 \otimes v_2 \otimes v_3, w_1 \otimes w_2 \otimes w_3\rangle := \langle v_1, w_1\rangle_1 \langle v_2, w_2\rangle_1 \langle v_3, w_3\rangle_1$. On notera ω_ψ la représentation de Weil sur $Mp(W)$ liée à ψ et $\Gamma_0 = \{(g_1, g_2, g_3) \in GL(V) \times GL(V) \times GL(V) | \det(g_1g_2g_3) = 1\}$.

Les groupes Dans ce cas, on prend $W_1 = V$, donc $Sp(W_1) \simeq SL(V)$, $GSp(W_1) \simeq GL(V)$. Posons $W_2 = V \otimes_F V$; c'est un espace orthogonal sur F de dimension 4, muni de la forme $\langle , \rangle_1 \otimes \langle , \rangle_1$, alors on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow F^\times \xrightarrow{a} \big(GL(V) \times GL(V)\big) \rtimes S_2 \longrightarrow GO(W_2) \longrightarrow 1$$

où l'élément non trivial s de S_2 agit sur $W_2 \simeq V \otimes V$ par permutation des deux facteurs, et $(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) := g_1v_1 \otimes g_2v_2$ pour $g_i \in G$, $v_i \in V$; et $a(e) = (e, e^{-1})$. Il en résulte un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & F^\times & \longrightarrow & H^0 & \longrightarrow & O(W_2) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & F^\times & \longrightarrow & \big(GL(V) \times GL(V)\big) \rtimes S_2 & \longrightarrow & GO(W_2) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda & & \\
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & F^\times & = & F^\times & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

où $H^0 = \{(g_1, g_2, s) | g_i \in GL(V), s \in S_2 \text{ et } \det(g_1g_2) = 1\}$
On notera :

$$\Gamma = \{(g, h) \in GL(V) \times [\big(GL(V) \times GL(V)\big) \rtimes S_2] | \lambda(g)\lambda(h) = 1\},$$

qui contient Γ_0.

Les représentations Comme $W = W_1 \otimes_F W_2$ est une décomposition en produit tensoriel, $(SL(V = W_1), O(W_2))$ est une paire réductive duale de $Sp(W)$. Soit $\widetilde{O}(W_2)$ l'image réciproque de $O(W_2)$ dans $\widetilde{Sp}(W)$. Comme $\dim_F W_2 = 4$, on a vu que $\widetilde{O}(W_2)$ est scindé au-dessus $O(W_2)$. Etant donné un homomorphisme $SL(V) \times O(W_2) \xrightarrow{t} \widetilde{Sp}(W)$, on obtient une représentation lisse ω_ψ^t(dépendant en t) du groupe $SL(V) \times O(W_2)$. Au-dessus, on a un homomorphisme surjectif $H^0 \twoheadrightarrow O(W_2)$. Cela permet de donner une représentation lisse du groupe $SL(V) \times H^0$, notée ρ_ψ^t. Par le Théorème 3.4, ρ_ψ^t peut se prolonger en une représentation du groupe Γ.

Proposition 4.38. $\pi_\psi^{\Gamma,t} := c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{GL(V) \times \left(GL(V) \times GL(V)\right) \rtimes S_2} \rho_\psi^t$ *est une représentation de bigraphe forte.*

Démonstration. Ceci est un exemple dans le Théorème 3.16. □

Réalisation de ρ_ψ^t Posons une polarisation complète $W = Y \oplus Y^\star$ où $Y = Fe_1 \otimes_F V \otimes_F V$; $Y^\star = Fe_2 \otimes_F V \otimes_F V$. Notons $S(Y^\star)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $Y^\star$. La représentation de Weil ω_ψ peut se réaliser dans $S(Y^\star)$. Par la base donnée $\mathscr{A}$ ci-dessus , on peut identifier $SL(V)$(resp. $GL(V)$) à $SL_2(F)$ (resp. G). Choisissons une base symplectique $\mathscr{B}_{Y \oplus Y^\star}$=$\{y_{11} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, y_{12} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2, y_{21} = e_1 \otimes e_2 \otimes e_1, y_{22} = e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 ; y_{11}^\star = e_2 \otimes e_2 \otimes e_2, y_{12}^\star = -e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, y_{21}^\star = -e_2 \otimes e_1 \otimes e_2, y_{22}^\star = e_2 \otimes e_1 \otimes e_1\}$ par $Y \oplus Y^\star$. Nous identifions ainsi l'espace vectoriel $Y^\star$ sur F à l'anneau des matrices $M = M_2(F)$ et $S(Y^\star)$ à $S(M)$. De la même manière, par la base $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$, identifions $\big(GL(V) \times GL(V)\big) \rtimes S_2$ à $\big(G \times G\big) \rtimes S_2$ et regardons Γ comme le groupe

$\{\Big(g_1,((g_2,g_3),s)\Big)|g_i\in G, s\in S_2, \det(g_1g_2g_3)=1\}$ et Γ_0 comme le groupe $\{(g_1,g_2,g_3)\in G\times G\times G|\det(g_1g_2g_3)=1\}$. Donc grâce à un tel homomorphisme $\Gamma\longrightarrow \widetilde{Sp}(W)$, nous obtenons une représentation ρ_ψ de Γ sur l'espace $S(M)$ par les formules suivantes :

$$\rho_\psi\Big(\Big(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},1\Big)\Big)f(m)=|a|^2f(am), \tag{21}$$

$$\rho_\psi\Big(\Big(\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\Big)\Big)f(m)=\psi(b\det(m))f(m), \tag{22}$$

$$\rho_\psi\Big(\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},1\Big)\Big)f(m)=\int_{n\in M_2(F)}f(n)\psi_F(q(m,n))dn, \tag{23}$$

$$\rho_\psi\Big(\big(1,(1,s)\big)\Big)f(m)=f(m^t), \tag{24}$$

$$\rho_\psi\Big(\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \det(g_2g_3)^{-1}\end{pmatrix},(g_2,g_3)\Big)\Big)f(m)=|\det(g_2g_3)|f(g_2^tmg_3), \tag{25}$$

où $a\in F^\times, b\in F, m,n\in M=M_2(F)$, $q(m,n):=m_{11}n_{22}+m_{22}n_{11}-m_{12}n_{21}-m_{21}n_{12}$ pour $m=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}, n=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12}\\ n_{21} & n_{22}\end{pmatrix}$ dans $M=M_2(F)$, $dn=\prod_{i,j=1}^2 d\mu_\psi(n_{ij})$, $f\in S(M)$, $g_i\in G$, m^t := la transposée de m, $1\neq s\in S_2$, μ_ψ est la mesure de Haar duale par ψ(cf.[BH]p_{138}).

Remarque 4.39. *Les formules (21)— (24) et (25) pour* $\det(g_2g_3)=1$ *précédentes viennent du modèle de Schrödinger[cf. [MVW], Page 40-41]. La formule (25) pour* $\det(g_2g_3)$ *quelconque vient de la démonstration du Lemme 3.6.*

Relèvement de $\Gamma_0\rtimes S_3$ D'abord, on a un homomorphisme $\Gamma_0\rtimes S_3\longrightarrow Sp(W)$, on note $\widetilde{\Gamma_0\rtimes S_3}$ l'image réciproque de $\Gamma_0\rtimes S_3$ dans $\widetilde{Sp}(W)$. Nous allons montrer que $\widetilde{\Gamma_0\rtimes S_3}$ est scindé au-dessus $\Gamma_0\rtimes S_3$.

Posons une autre polarisation complète $X=FV\otimes V\otimes e_1; X^\star=FV\otimes V\otimes e_2$. La représentation de Weil ω_ψ peut aussi se réaliser dans $S(X^\star)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $X^\star$. Si on choit une base symplectique $\mathscr{B}_{X\oplus X^\star}=\{x_{11}=e_1\otimes e_1\otimes e_1, x_{12}=e_1\otimes e_2\otimes e_1, x_{21}=e_2\otimes e_1\otimes e_1, x_{22}=e_2\otimes e_2\otimes e_1\,;\, x_{11}^\star=e_2\otimes e_2\otimes e_2, x_{12}^\star=-e_2\otimes e_1\otimes e_2, x_{21}^\star=-e_1\otimes e_2\otimes e_2, x_{22}^\star=e_1\otimes e_1\otimes e_2\}$ par $W=X\oplus X^\star$. Identifions l'espace vectoriel $X^\star$ sur F à l'anneau des matrices $M=M_2(F)$ (resp. $S(X^\star)$ à $S(M)$). On peut construire un opérateur d'entrelacement $\mathcal{F}: S(M)\overset{\mathscr{B}_{X\oplus X^\star}}{\simeq}S(X^\star)\longrightarrow S(Y^\star)\overset{\mathscr{B}_{Y\oplus Y^\star}}{\simeq}S(M); f\longmapsto \mathcal{F}(f)$ où $\mathcal{F}(f)(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}):=\int_{F\times F}f(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21}\\ x & y\end{pmatrix})\psi(ym_{12}-xm_{22})d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(x)$, ici μ_ψ est la mesure de Haar duale sur F autoduale pour ψ(cf.[BH]p_{138}).

Proposition 4.40. *Si nous noterons $\mathcal{G}=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}$ l'endomorphisme de $S(M)$, alors*
(i) $\mathcal{G}(f)(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix})=\int_{F\times F}f(\begin{pmatrix} m_{11} & \alpha\\ m_{12} & \beta\end{pmatrix})\psi(\beta m_{21}-\alpha m_{22})d\mu_\psi(\alpha)d\mu_\psi(\beta)$,
(ii) $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=\mathcal{G}\circ\mathcal{F}=\mathrm{Id}_{S(M)}$.

Démonstration.

$$(i)\quad \mathcal{G}(f)(m)=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}(f)(m)=\int_{F\times F}\mathcal{F}(f)(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21}\\ x & y\end{pmatrix})\psi(ym_{12}-xm_{22})d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(y)$$

$$=\int_{F\times F\times F\times F}f(\begin{pmatrix} m_{11} & x\\ \alpha & \beta\end{pmatrix})\psi(\beta m_{21}-xm_{22}+y(m_{12}-\alpha))d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(\alpha)d\mu_\psi(\beta)$$

$$=\int_{F\times F}\psi(\beta m_{21}-xm_{22})d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(\beta)\int_{F\times F}f(\begin{pmatrix} m_{11} & x\\ \alpha & \beta\end{pmatrix})\psi(y(m_{12}-\alpha))d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(\alpha)$$

$$=\int_{F\times F}f(\begin{pmatrix} m_{11} & x\\ m_{12} & \beta\end{pmatrix})\psi(\beta m_{21}-xm_{22})d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(\beta).$$

$$(ii)\quad \mathcal{F}\circ\mathcal{G}(f)(m)=\int_{F\times F}\mathcal{G}(f)(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21}\\ x & y\end{pmatrix})\psi(ym_{12}-xm_{22})d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(x)$$

$$=\int_{F\times F\times F\times F} f(\begin{pmatrix} m_{11} & \alpha\\ m_{21} & \beta\end{pmatrix})\psi(ym_{12}+\beta x-\alpha y-xm_{22})d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(\alpha)d\mu_\psi(\beta)$$

$$=\int_{F\times F}\left(\int_{F\times F} f(\begin{pmatrix} m_{11} & \alpha\\ m_{21} & \beta\end{pmatrix})\psi(x(\beta-m_{22}))d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(\beta)\right)\psi(y(m_{12}-\alpha))d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(\alpha)$$

$$=\int_{F\times F} f(\begin{pmatrix} m_{11} & \alpha\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix})\psi(y(m_{12}-\alpha))d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(\alpha)=f(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix})=f(m).$$

Comme $\mathcal{G}=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=\mathcal{F}\circ(\mathcal{F}\circ\mathcal{F})=(\mathcal{F}\circ\mathcal{F})\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=\mathrm{Id}_{S(M)}$. □

Regardons $S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G\times G\times G)$ ou $\mathrm{Aut}(\Gamma_0)$. Notons ses images par $\{\tau_1,\tau_{12}\ ,\tau_{13},\tau_{23},\tau_{123},\tau_{132}\}$. Soit $\tau\in S_3$, nous définissons une autre représentation $\rho_\psi^\tau((g_1,g_2,g_3)):=\rho_\psi((g_1,g_2,g_3)^{\tau^{-1}})$ pour $(g_1,g_2,g_3)\in\Gamma_0$. Nous introduisons deux opérateurs endomorphismes I_{12},I_{23} de $S(M)$, par $I_{23}(f)(m):=f({}^tm)$, $I_{12}(f)(m):=\mathcal{G}\circ I_{23}\circ\mathcal{F}$.

Proposition 4.41. *(i)* $I_{12}^2=\mathrm{Id}_{S(M)}$, I_{23}^2=$\mathrm{Id}_{S(M)}$.
(ii) $I_{12}\circ I_{23}=\mathcal{F}$.

Démonstration. (i) On voit aisément que $I_{23}^2=\mathrm{Id}_{S(M)}$, et $I_{12}^2=\mathcal{G}\circ I_{23}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ I_{23}\circ\mathcal{F}$=$\mathrm{Id}_{S(M)}$.
(ii)

$$(I_{12}\circ I_{23}(f))(m)=\mathcal{G}\circ I_{23}\circ\mathcal{F}\circ I_{23}(f)(m)$$

$$=\int_{F\times F}(I_{23}\circ\mathcal{F}\circ I_{23}(f))\begin{pmatrix} m_{11} & x\\ m_{12} & y\end{pmatrix}\psi(m_{21}y-m_{22}x)d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(y)$$

$$=\int_{F\times F}\mathcal{F}\circ I_{23}(f)\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ x & y\end{pmatrix}\psi(m_{21}y-m_{22}x)d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(y)$$

$$=\int_{F\times F\times F\times F} I_{23}(f)(\begin{pmatrix} m_{11} & x\\ \alpha & \beta\end{pmatrix})\psi(m_{21}y-m_{22}x+\beta m_{12}-\alpha y)d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(\alpha)d\mu_\psi(\beta)$$

$$=\int_{F\times F\times F\times F} f(\begin{pmatrix} m_{11} & \alpha\\ x & \beta\end{pmatrix})\psi(y(m_{21}-\alpha))\psi(\beta m_{12}-xm_{22})d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(\alpha)d\mu_\psi(x)d\mu_\psi(\beta)$$

$$=\int_{F\times F} f(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21}\\ x & \beta\end{pmatrix})\psi(\beta m_{12}-xm_{22})d\mu_\psi(\beta)d\mu_\psi(x)=(\mathcal{F}(f))(m),$$

où $m=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}\in M=M_2(F),\quad f\in S(M)$. □

Corollaire 4.42. *Il existe un unique homomorphisme de groupes tel que $I((12))=I_{21}$, et $I((23))=I_{23}$; c'est un isomorphisme.*

Démonstration. Nous savons que le groupe S_3 est engendré par deux générateurs a,b et les relations $\mathscr{R}=\langle a^2=1,b^3=1,ba=ab^2\rangle$. Pour le groupe $\mathcal{I}$, nous pouvons choisir $a=I_{12},b=I_{12}\circ I_{23}$, et les résultats dans la Proposition 4.40, la Proposition 4.41 garantissent les relations $\mathscr{R}$, donc l'isomorphisme I est bien défini, c'est clairement surjectif par construction. □

Proposition 4.43. *I_{12} (resp. I_{23}) donne un opérateur d'entrelacement entre $(\rho_\psi^{\tau_{12}},\Gamma_0,S(M))$ (resp. $(\rho_\psi^{\tau_{23}},\Gamma_0,S(M))$) et $(\rho_\psi,\Gamma_0,S(M))$, i.e. on a les relations $I_{12}(\rho_\psi^{\tau_{12}}(h)f)=\rho_\psi(h)(I_{12}(f))$(resp. $I_{23}(\rho_\psi^{\tau_{23}}(h)f)=\rho_\psi(h)(I_{23}(f))$) pour $f\in S(M)$, $h\in\Gamma_0$.*

Démonstration. (1) L'opérateur I_{23} : le groupe Γ_0 est engendré par les groupes $SL_2(F)\times SL_2(F)\times SL_2(F)$ et $T_0=\{(\begin{pmatrix}1&0\\0&k_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&k_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&k_3\end{pmatrix})|k_i\in F^\times$ et $k_1k_2k_3=1\}$. Il suffit de prouver les identités requises pour des ensembles de générateurs h de Γ_0.
(i) $h=(1,g_2,g_3)\in SL_2(F)\times SL_2(F)\times SL_2(F)$,
$\Big(I_{23}(\rho_\psi(h^{\tau_{23}^{-1}})f)\Big)(m)=(\rho_\psi(h^{\tau_{23}^{-1}})f)({}^tm)=f({}^tg_3^tmg_2)$=$f({}^t({}^tg_2mg_3))=\Big(\rho_\psi(h)(I_{23}(f))\Big)(m)$.

(ii) $h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \times 1 \times 1$ où $a \in F^{\times}$,
$\Big(I_{23}(\rho_\psi(h^{\tau_{23}^{-1}})f)\Big)(m) = |a|^2 f(a^t m) = |a|^2 f({}^t(am)) = |a|^2 I_{23}(f)(am) = \Big(\rho_\psi(h)(I_{23}(f))\Big)(m)$.
(iii) $h = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \times 1$ où $b \in F$,
$\Big(I_{23}(\rho_\psi(h^{\tau_{23}^{-1}})f)\Big)(m) = \psi(b\det({}^t m))f({}^t m) = \psi(b\det(m))f({}^t m) = I_{23}(f)(m)\psi(b\det(m)) = \Big(\rho_\psi(h)(I_{23}(f))\Big)(m)$.
(iv) $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times 1 \times 1$,
$\Big(I_{23}(\rho_\psi(h^{\tau_{23}^{-1}})f)\Big)(m) = \int_{n \in M_2(F)} f(n)\psi(q({}^t m, n))d\mu_\psi(n) = \int_{n \in M_2(F)} f(n)\psi(q(m, {}^t n))d\mu_\psi(n) = \int_{n \in M_2(F)} f({}^t n)\psi(q(m, n))d\mu_\psi(n) = \Big(\rho_\psi(h)(I_{23}(f))\Big)(m)$.
(v) $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix}$ où $k_1 k_2 k_3 = 1$,
$\Big(I_{23}(\rho_\psi(h^{\tau_{23}^{-1}})f)\Big)(m) = f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix} {}^t m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}) = f({}^t\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix}\Big)) = \Big(\rho_\psi(h) I_{23}(f)\Big)(m)$.
(2) L'opérateur $I_{12} : \mathcal{G} : S(M) \simeq S(Y^\star) \longrightarrow S(X^\star) \simeq S(M)$, Soit $f \in S(M)$, on note $\mathcal{G}(f) = g$. Utilisant l'opérateur $\mathcal{G}$, nous pouvons réaliser ρ_ψ dans l'espace vectoriel $S(X^\star) \simeq S(M)$ et la représentation se donne par $\rho_\psi(h) \odot g := \mathcal{G}(\rho_\psi(h) f)$. Comme dans le résultat précédent, on trouve que $I_{23}(\rho_\psi^{\tau_{12}}(h) \odot g) = \rho_\psi(h) \odot (I_{23}(g))$. Cela implique que $I_{12}(\rho_\psi^{\tau_{12}}(h) f) = \rho_\psi(h)(I_{12}(f))$. □

Proposition 4.44. *La représentation $(\rho_\psi, \Gamma_0, S(M))$ peut se prolonger en une représentation du groupe $\Gamma_0 \rtimes S_3$.*

Démonstration. Utilisant les résultats dans le Corollaire 4.42, la Proposition 4.43, nous voyons immédiatement que l'application : $\underline{\rho_\psi} : \Gamma_0 \rtimes S_3 \longrightarrow GL(S(M)); (h, \tau_s) \longmapsto \rho_\psi(h) I_s$ est un morphisme de groupes. C'est-à-dire que :
$\underline{\rho_\psi}((h, 1)(1, \tau_s)) = \rho_\psi(h) I_s \overset{\text{Pro 4.43}}{=} I_s(\rho_\psi^{\tau_s}(h)) = \underline{\rho_\psi}((1, \tau_s)(h^{\tau_s^{-1}}, 1))$ pour $s = 12, 23$. □

Corollaire 4.45. $\widetilde{\Gamma_0 \rtimes S_3}$ *est scindé au-dessus* $\Gamma_0 \rtimes S_3$.

Démonstration. On a vu que $\Gamma_0 \rtimes \langle \tau_{23} \rangle \longrightarrow \widetilde{Sp_\psi}(W); (h, \tau_{23}) \longmapsto ((h, \tau_{23}), \rho_\psi(h) I_{23})$ est un morphisme de groupes, La même conséquence est aussi vraie pour le sous groupe $\Gamma_0 \rtimes \langle \tau_{12} \rangle$. Donc on peut trouver le résultat après la Proposition 4.44. □

Les résultats de Brooks Roberts On définit le groupe

$$SO = \{(g_1, g_2) \in G \times G | g_2 = (g_1^t)^{-1}\}$$

Pour $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, on a

$$m_{SO}(c - \mathrm{Ind}_{G\times G}^{(G\times G)\rtimes S_2} \pi \otimes \pi, 1) = m_{SO}\Big(\mathrm{Res}_{SO}^{(G\times G)\rtimes S_2}(c - \mathrm{Ind}_{G\times G}^{(G\times G)\rtimes S_2} \pi \otimes \pi), 1\Big)$$
$$= m_{SO}(c - \mathrm{Ind}_{SO}^{SO\rtimes S_2} \pi \otimes \pi, 1) = m_G(\pi \otimes \check{\pi}, 1) = 1.$$

Définition 4.46. *Soit $\sigma \in \mathrm{Irr}\Big(G \times G\Big) \rtimes S_2$.*
*(1) On dit que σ est **invariante**, s'il existe $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ tel que $\mathrm{Hom}_{(G\times G)\rtimes S_2}(\sigma, \mathrm{Ind}_{G\times G}^{(G\times G)\rtimes S_2} \pi \otimes \pi) \neq 0$.*
*(2) On dit que σ est **distinguée** si σ est invariante et $m_{SO}(\sigma, 1) = 1$.*
*(3) On dit que σ est **régulière** s'il existe deux représentations différentes irréductibles π_1, π_2 de G tels que $\mathrm{Hom}_{(G\times G)\rtimes S_2}(\sigma, \mathrm{Ind}_{G\times G}^{(G\times G)\rtimes S_2} \pi_1 \otimes \pi_2) \neq 0$ i.e. $\sigma = \mathrm{Ind}_{G\times G}^{(G\times G)\rtimes S_2} \pi_1 \otimes \pi_2$.*

Si σ est distinguée, on a vu qu'elle est l'unique sous-représentation de $\mathrm{Ind}_{G\times G}^{(G\times G)\rtimes S_2} \pi \otimes \pi$ telle que $\mathrm{Hom}_{SO}(\sigma, 1) \neq 0$, pour quelque $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$; on la note donc $\sigma(\pi, \pi)^+$.

Théorème 4.47 (Brooks Roberts)**.** *Pour la représentation de bigraphe forte $\pi_\psi^\Gamma = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G\times(G\times G)\rtimes S_2} \rho_\psi$, on a $\sigma \in \mathcal{R}_{(G\times G)\rtimes S_2}(\pi_\psi^\Gamma)$ ssi σ est distinguée i.e. $\sigma = \sigma(\pi, \pi)^+$ pour quelque $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$.*

Démonstration. Ceci découle de [[R2], Page 807, Théorème 7.4] □

Les résultats principaux On notera $\pi_\psi^{\Gamma_0} = c-\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G\times G\times G}(\rho_\psi|_{\Gamma_0})$. Cette représentation peut se réaliser dans l'espace vectoriel $S = S(M \times F^\times)$ par les formules ci-dessous :

$$\pi_\psi^{\Gamma_0}((1, g_2, g_3))f(m,t) = |\det(g_2g_3)|f({}^tg_2mg_3, \det(g_2g_3)^{-1}t), \tag{26}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma_0}((\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, 1, 1))f(m,t) = |a|^2 f(am, t), \tag{27}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma_0}((\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}, 1, 1))f(m,t) = \psi(tb\det(m))f(m,t), \tag{28}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma_0}((\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}, 1, 1))f(m,t) = \int_{n\in M_2(F)} f(n,t)\psi(q(t^{-1}m, n))dn, \tag{29}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma_0}((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix}, 1, 1))f(m,t) = f(m, r^{-1}t), \tag{30}$$

où $g_2, g_3 \in G, m \in M_2(F), a, r, t \in F^\times, b \in F$.

Théorème 4.48. *Pour la représentation $\pi_\psi^{\Gamma_0}$, on a*
(1) $\mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}) = \{\pi\otimes\pi\otimes\pi|$ pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)\}$.
(2) $m_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}, \pi\otimes\pi\otimes\pi) = 1$.

Démonstration. (1) **Prolongement** : Par le Corollaire 4.45, on a vu que ρ_ψ peut se prolonger en une représentation du groupe $\Gamma_0 \rtimes S_3$, donc $\pi_\psi^{\Gamma_0} = \mathrm{Res}_{G\times G\times G}^{(G\times G\times G)\rtimes S_3}\left(c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0\rtimes S_3}^{\left(G\times G\times G\right)\rtimes S_3}\rho_\psi\right)$. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0})$ est S_3-invariant, i.e. si on définit un $\mathbb{C}$-espace $\mathfrak{R}_{\pi_\psi^{\Gamma_0}}$, engendré par les éléments de $\mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0})$, alors $\mathfrak{R}_{\pi_\psi^{\Gamma_0}}$ est une représentation de S_3.

(2) **La relation entre $\mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0})$ et $\mathcal{R}_{G\times\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma})$** : Comme $\pi_\psi^{\Gamma_0} = \mathrm{Res}_{G\times G\times G}^{G\times\left(G\times G\right)\rtimes S_2}\left(\pi_\psi^{\Gamma}\right)$, par le Théorème Réciproque de Frobenius, on a les relations suivantes :
si $\pi\otimes\sigma \in \mathcal{R}_{G\times\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma})$, on a $\mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi\otimes\sigma) \cap \mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}) \neq \emptyset$;
si $\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3 \in \mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0})$, on a $\mathcal{R}_{G\times\left(G\times G\right)\rtimes S_2}\left(\pi_1 \otimes \mathrm{Ind}_{G\times G}^{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}\left(\pi_2\otimes\pi_3\right)\right) \cap \mathcal{R}_{G\times\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma}) \neq \emptyset$.
(3) On sait que π_ψ^{Γ} est une représentation de bigraphe forte, on note l'application de bigraphe : $\mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma}) \longrightarrow \mathcal{R}_{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma})$, par θ. On a

$$\theta(\pi') = \sigma \text{ où } \sigma = \sigma(\pi,\pi)^+ \text{ pour quelque } \pi \in \mathrm{Irr}(G).$$

Il en résulte que

$$m_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}, \pi'\otimes\pi\otimes\pi) = m_{G\times\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma}, \pi'\otimes\mathrm{Ind}_{G\times G}^{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi\otimes\pi)) = 1.$$

Cela implique que $\pi'\otimes\pi\otimes\pi \in \mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0})$. Comme $\mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0})$ est S_3-invariant, donc $\pi\otimes\pi'\otimes\pi \in \mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0})$. Par le point (2) ci-dessus, $\mathcal{R}_{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}\left(\mathrm{Ind}_{G\times G}^{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi'\otimes\pi)\right) \cap \mathcal{R}_{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma}) \neq \emptyset$, donc $\pi' \simeq \pi$. Finalement , on trouve

$$\pi\otimes\pi\otimes\pi \in \mathcal{R}_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}).$$

Par le point (2) ci-dessus, on sait que c'est tout, de plus $m_{G\times G\times G}(\pi_\psi^{\Gamma_0}, \pi\otimes\pi\otimes\pi) = 1$. □

Théorème 4.49. *Pour la représentation de bigraphe forte π_ψ^{Γ}, on a*
(1) $\mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma}) = Irr(G)$ et $\mathcal{R}_{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma}) = \{\sigma(\pi,\pi)^+|$ pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)\}$.
(2) L'application de bigraphe θ est définie comme

$$\theta : \mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma}) \longrightarrow \mathcal{R}_{\left(G\times G\right)\rtimes S_2}(\pi_\psi^{\Gamma}); \pi \longmapsto \sigma(\pi,\pi)^+.$$

Démonstration. Ceci découle du Théorème 4.47 et du Théorème 4.49, et du point (2) dans la démonstration du Théorème 4.48. □

4.2.2 $GL_2(F) \times GL_2(E)$

Dans cette sous-sous-section, on désigne par F un corps local non archimédien de caractéristique nulle ; on suppose que sa caractéristique résiduelle est différente de 2. On fixe une extension galoisienne E de F de degré 2. On note $G = GL_2(F)$, $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$, $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\}$, $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$; $F^{\times +} = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, $G^+ = \{g \in G | \mathrm{N}_{E/F}(\det(g)) \in F^\times\}$; $H = GL_2(E)$, $B' = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H\}$, $N' = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H\}$, $T' = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H\}$; $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle \sigma \rangle$; Pour $h \in H$, on désigne h^t la transposée de la matrice h et $\overline{h} := h^\sigma$ le conjugué de la matrice h par σ. Nous toujours fixons un caractère continu non trivial ψ de F.

Les groupes Soit W un espace vectoriel de dimension 2 sur E muni d'une forme symplectique $\langle , \rangle_W$. Nous fixons une base symplectique $\{e_1, e_2\}$. Soit W_0 l'espace symplectique sur F, engendré par les éléments $\{e_1, e_2\}$, alors on peut identifier W à $E \otimes_F W_0$ comme E-espace vectoriel. Nous définissons une action du groupe de galois $\mathrm{Gal}(E/F)$ sur $W = E \otimes_F W_0$ par : $Gal(E/F) \times E \otimes_F V_0 \longrightarrow E \otimes_F V_0; (\sigma, \sum_i k_i \otimes e_i) \longmapsto \sum_i k_i^\sigma \otimes e_i$. On voit que σ n'est pas dans $\mathrm{End}_E(W)$, mais au moins $\sigma \in \mathrm{End}_F(W)$.

Soit $V = W \otimes_E W$ un espace de dimension 4 sur E, muni d'une forme bilinéaire induite par W. On notera $GO(V)$ le groupe de similitudes de l'espace symétrique V et $\lambda(g)$ le rapport de similitude de l'élément g de $GO(V)$. On a une application $GL(W) \times GL(W) \longrightarrow GO(V)$. Grâce à la base donnée $\{e_1, e_2\}$, on peut identifier $GL_2(E)$ à $GL(W)$.

Nous définissons une action galoisienne tordue du groupe $Gal(E/F)$ sur V de la façon suivante : $Gal(E/F) \times V \longrightarrow V; (\sigma, v = \sum_i u_i \otimes w_i) \longmapsto {}^\sigma v = \sum_i w_i^\sigma \otimes u_i^\sigma$, aussi définissons une action galoisienne tordue du groupe $Gal(E/F)$ sur $H \times H$: $Gal(E/F) \times (H \times H) \longmapsto H \times H; (\sigma, h' = (h_1, h_2)) \longmapsto {}^\sigma h' = (\overline{h}_2, \overline{h}_1)$.

Nous notons $V_0 = \{v \in V | {}^\sigma v = v\}$, alors on a $V_0 = \{v_0 = xe_1 \otimes e_1 + \alpha e_1 \otimes e_2 + \alpha^\sigma e_2 \otimes e_1 + ye_2 \otimes e_2 | x, y \in F; \alpha \in E\}$ qui est un espace vectoriel sur F de dimension 4. On vérifie aisément que la restriction de la forme bilinéaire symétrique $\langle , \rangle_V$ à F-espace vectoriel V_0 est une F-forme bilinéaire symétrique, notée $\langle , \rangle_{V_0}$. On peut associer une F-forme quadratique q à l'espace vectoriel V_0, c'est-à-dire que $q(v_0) := \frac{1}{2}\langle v_0, v_0 \rangle_{V_0}$ où $v_0 \in V_0$.

Nous noterons $\overline{H} = \{h' \in H \times H | {}^\sigma h' = h'\}$. On a un isomorphisme de groupes $i : H \simeq \overline{H}; h \longmapsto (h, \overline{h})$. Et on vérifie facilement que ${}^\sigma h' \cdot {}^\sigma v_0 = {}^\sigma(h' \cdot v_0)$ pour $h \in \overline{H}$, $v_0 \in V_0$, de sorte qu'on a un morphisme de groupes $p' : \overline{H} \longrightarrow GO(V_0)$. On notera $p = p' \circ i$; c'est un morphisme de H dans $GO(V_0)$.

Quand on regarde la formule de l'élément dans l'espace V_0, on peut considérer V_0 comme le sous F-espace M de l'anneau de matrices $M_2(E)$ où $M = \{\begin{pmatrix} x & \alpha \\ \overline{\alpha} & y \end{pmatrix} | x, y \in F, \alpha \in E\}$; alors la F-forme quadratique s'identifie par $q(m) := \det(m)$ pour $m \in M$, et l'application $p : H \longrightarrow GO(M)$ est définie par $H \times M \longrightarrow M; (h, m) \longmapsto hm\overline{h}^t$.

Nous notons $\mathbb{W} = V_0 \otimes_F W_0$; c'est un espace vectoriel sur F de dimension 8, muni d'une forme symplectique $\langle , \rangle_{\mathbb{W}} = \langle , \rangle_{V_0} \otimes \langle , \rangle_{W_0}$. On a un homomorphisme naturel $\phi : H \times G \longrightarrow GSp(\mathbb{W})$, on notera son noyau par U_0, l'image réciproque de $Sp(\mathbb{W})$ par Γ_0 et $\Gamma_0' = \phi(\Gamma_0)$. On voit imméditement les propriétés suivantes :

(i) on a une suite exacte $1 \longrightarrow \Gamma_0 \longrightarrow H \times G \longrightarrow F^\times \longrightarrow 1$;

(ii) Γ_0 est engendré par les sous-groupes $SL_2(E) \times SL_2(F)$ et $T_0 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} | t \in F, e \in E, t\mathrm{N}_{E/F}(e) = 1\}$;

(iii) on a une suite exacte $1 \longrightarrow U_0 \longrightarrow \Gamma_0 \xrightarrow{\phi} \Gamma_0' \longrightarrow 1$;

(iv) $GSp(W_0) \simeq G$, $1 \longrightarrow E^\times \xrightarrow{a} (F^\times \times H) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F) \xrightarrow{b} GO(V_0) \longrightarrow 1$ où $a(e) = (\mathrm{N}_{E/F}(e), e^{-1}; 1)$ et soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ qui agit sur V_0, comme sous-espace de $W \otimes_E W$, par permutation des deux facteurs W. Il se traduit en M par : $\sigma \cdot m := m^\sigma$ pour $m \in M$.

Les représentations Soit $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})$ le groupe métaplectique associé à $\mathbb{W}$, ω_ψ la représentation de Weil liée au caractère additif continu non trivial ψ de F. On définit le groupe intermédiaire :

$$\Gamma = \{(g, h) \in GSp(W_0) \times GO(V_0 = M) | h \in GO(V_0 = M), g \in GSp(W_0) \text{ et } \lambda(g)\lambda(h) = 1\}.$$

On note $\widetilde{\Gamma}$ l'image réciproque de Γ dans $\widetilde{Sp}(\mathbb{W})$. Par le Théorème 3.4, $\widetilde{\Gamma}$ est scindé au-dessus Γ. Donc on choisit un tel scindage de $\widetilde{\Gamma}$ au-dessus de Γ, de sorte qu'on obtient une représentation $\rho_\psi := \omega_\psi|_\Gamma$ du groupe Γ, réalisée dans $S(M)$ par les formules suivantes :
(1) $g = (1, s)$, où $s \in SL_2(E)$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = f(s^t m\overline{s}).$$

(2) $g = (1, \sigma)$, où $1 \neq \sigma \in \mathrm{Gal}(E/F) \subseteq GO(M)$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = f(m^\sigma).$$

(3) $g = (1, \bar{t})$ pour $\bar{t} = b(t, 1, 1) \in GO(M)$ avec $t^2 = 1$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = f(tm).$$

(4) $g = (\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1)$ pour $b \in F$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = \psi(b\det(m))f(m).$$

(5) $g = (\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1)$ pour $a \in F^\times$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = \chi_{E/F}(a)|a|_F^2 f(am).$$

(6) $g = (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1)$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = \gamma(q)\int_M f(n)\psi(q(m,n))dn.$$

(7) $g = (g_1, h_1)$ avec $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et $t\,\mathrm{N}_{E/F}(e) = 1$,

$$\rho_\psi(g)f(m) = |\,\mathrm{N}_{E/F}(e)|_F f(h_1^t m\overline{h}_1).$$

Proposition 4.50. *La représentation* $\pi_\psi^{\Gamma,+} = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{G^+\times GO(M)}\rho_\psi$ *est une représentation de bigraphe forte.*

Démonstration. Ceci est un exemple dans le Théorème 3.16. □

Cette représentation peut se réaliser dans $S(M \times F^{\times +})$ par les formules suivantes :

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,h))f(m,u) = |\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))|_F f(hm\overline{(h)}, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h)^{-1})u). \tag{31}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,\sigma))f(m,u) = f(m^\sigma, u). \tag{32}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,\bar{t}))f(m,u) = |t^2|_F f(tm, t^{-2}u). \tag{33}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \chi_{E/F}(a)|a|_F^2 f(am, u). \tag{34}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \psi_F(bu\det(m))f(m,u). \tag{35}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = f(m, ut^{-1}). \tag{36}$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1))f(m,u) = \gamma(uq)\int_M f(n,u)\psi_F(uq(m,n))|u|_F^2 dn. \tag{37}$$

Les résultats de Micheal Cognet et Brooks Roberts On définit

$$\Gamma_0^{(1)} = \{(g,h) \in G \times H |\, \det(g)\, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h)) = 1\}.$$

On a défini

$$\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0^{(1)}}^{G\times H} \rho_\psi$$

en sous-sous-section 4.1.4.

Théorème 4.51 (Micheal Cognet)**.**

$$\mathrm{Hom}_{G\times H}(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}, \pi \otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)) \neq 0$$

pour toute représentation irréductible π de dimension infinie de G.

Démonstration. Ceci découle de la Proposition 4.29, de la Remarque 4.30, et du Lemme 4.35. □

Théorème 4.52 (Brooks Roberts)**.** *Pour la représentation de bigraphe forte $\pi_\psi^{\Gamma,+}$, on a*

$$\mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) = \mathrm{Irr}_D(GO(M)),$$

où $\mathrm{Irr}_D(GO(M))$ est l'ensemble défini en Proposition 4.21.

Démonstration. Ceci découle du Théorème 4.32. □

Les résultats principaux

Théorème 4.53. *(1) $\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}$ est une représentation de graphe forte à gauche du groupe $G \times H$.*
(2) $\mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}) = \mathrm{Irr}(G)$, $\mathcal{R}_H(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}) = \{\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)|$ pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)\}$.
(3) L'application de graphe forte θ est définie comme

$$\theta : \mathcal{R}_G(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}) \longrightarrow \mathcal{R}_H(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}); \pi \longmapsto \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$$

pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Théorème 4.54. *Pour la représentation de bigraphe forte $\pi_\psi^{\Gamma,+}$ du groupe $G^+ \times GO(M)$, on a*
(1) $\mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) = \mathrm{Irr}_D(GO(M))$.
(2) L'application θ de bigraphe est définie ci-dessous :

$$\theta : \mathcal{R}_{G^+}(\pi_\psi^{\Gamma,+}) \longrightarrow \mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}); \rho^+ \longmapsto \delta^+,$$

plus précisément :
Reprenons les notations dans le Théorème 4.9 pour la classification des représentations irréductibles du groupe G^+ et les notations dans la Proposition 4.21 pour les représentations irréductibles du groupe $GO(M)$.

(1) $\rho^+_{\lambda,\sigma} \overset{\theta}{\longleftrightarrow} \delta^+_{\lambda,\sigma}$ *où $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ satisfont à $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm 1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm 1}$;*

(1') $\lambda^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}} \overset{\theta}{\longleftrightarrow} \lambda^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$ *où $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;*

(2) $\psi^+ \cdot \mathrm{St}_{G^+} \overset{\theta}{\longleftrightarrow} \psi^+ \cdot \mathrm{St}^+_{GSO(M)}$ *où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;*

(3) $\psi^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}} \overset{\theta}{\longleftrightarrow} \psi^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}}$ *où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;*

(4) $\psi^+ \cdot 1_{G^+} \overset{\theta}{\longleftrightarrow} \psi^+ \cdot 1^+_{GSO(M)}$ *où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$;*

(5) $\rho^+_\Theta \overset{\theta}{\longleftrightarrow} \delta^+_\Theta$ *où Θ est un caractère régulier de $E^\times$;*

(6) $\rho^+_\pi \overset{\theta}{\longleftrightarrow} \delta^+_\pi$ *où les représentations sont attachées à une représentation cuspidale π du groupe G ;*

La preuve du Théorème 4.54 :
Pour $\delta' \in \mathcal{R}_{GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+})$, on va décrire $\theta(\delta') \in \mathcal{R}_{(G^+)}(\pi_\psi^{\Gamma,+})$. Examinons les différents cas.
(1) $\delta' = \delta^+_{\lambda,\sigma}$ où $\lambda, \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ satisfont à $\lambda\sigma^{-1} \neq \chi_{E/F}, |\cdot|_F^{\pm 1}, \chi_{E/F}|\cdot|_F^{\pm 1}$, alors $\theta(\delta') = \rho^+_{\lambda,\sigma}$. Par la Proposition 4.37, on a
$\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi_{\lambda,\sigma} \otimes (\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi_{\lambda,\sigma}), \omega_{\pi_{\lambda,\sigma}}\chi_{E/F})^+_{E^\times}) \neq 0$, i.e. $\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \rho^+_{\lambda,\sigma} \otimes \delta^+_{\lambda,\sigma}) \neq 0$, d'où le résultat

en ce cas.

(1') $\delta' = \lambda^+\delta^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$ où $\lambda^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, alors $\theta(\delta') = \lambda^+ \cdot \rho^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$.

Soient $\lambda \in \mathrm{Irr}(F^\times), \Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{E/F}$ $\lambda|_{F^{\times +}} = \lambda^+, \pi = \pi_{\lambda,\lambda\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}$, on a $\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi) = \Lambda|\cdot|_E^{-1/2} \cdot 1_H$, $\omega_\pi = \lambda^2\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}$. Par la Proposition 4.37, on obtient $0 \neq \mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi \otimes (\Lambda|\cdot|_E^{-1/2} \cdot 1_H, \lambda^2|\cdot|_F^{-1})^+_{E^\times}) = \mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \lambda^+\rho^+_{1,\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}} \otimes \delta^+_{\lambda,\lambda\chi_{E/F}|\cdot|_F^{-1}}) \neq 0$.

(2) $\delta' = \psi^+ \cdot \mathrm{St}^+_{GSO(M)}$ où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, alors $\theta(\delta') = \psi^+ \cdot \mathrm{St}_{G^+}$.

Soient $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ satisfaisant à $\psi|_{F^{\times +}} = \psi^+$, $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}$, on sait que $\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi) = \Psi \cdot \mathrm{St}_H$, $\omega_\pi = \psi^2$, donc on a $\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \psi^+ \cdot \mathrm{St}_{G^+} \otimes (\Psi \cdot \mathrm{St}_H, \psi^2\chi_{E/F})^+_{E^\times}) \neq 0$, par la définition de $\Psi^+ \cdot \mathrm{St}^+_{GSO(M)}$, on trouve le résultat.

(3) $\delta' = \psi^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}}$ où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, alors $\theta(\delta') = \psi^+\rho^+_{1,\chi_{E/F}}$.

Soient $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ satisfaisant à $\psi|_{F^{\times +}} = \psi^+$, $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}$, $\pi = \pi_{\psi,\psi\chi_{E/F}} \in \mathrm{Irr}(G)$, on a $\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi) = \Pi_{\Psi,\Psi}$, $\omega_\pi = \psi^2\chi_{E/F}$. Par la Proposition 4.37, on a $0 \neq \mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \psi^+ \cdot \pi_{1,\chi_{E/F}} \otimes (\Psi^{-1}\,\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi_{1,\chi_{E/F}}), \psi^{-2})_{E^\times}) = \mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \psi^+ \cdot \pi_{1,\chi_{E/F}} \otimes \psi^+ \cdot \delta^+_{1,\chi_{E/F}})1_{GO(M)})$. Comme $\pi_{1,\chi_{E/F}}|_{G^+} = \rho^+_{1,\chi_{E/F}} \oplus \rho^-_{1,\chi_{E/F}}$. D'après arranger l'index $\{+,-\}$, on peut supposer que $\mathrm{Hom}_{G^+\otimes GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \psi^+\rho^+_{1,\chi_{E/F}} \otimes \psi^+\delta^+_{1,\chi_{E/F}}) \neq 0$.

(5) $\delta' = \delta^+_\Theta$ où Θ est un caractère régulier Θ, alors $\theta(\delta') = \rho^+_\Theta$.

Soient π_Θ la représentation du groupe G associée au caractère régulier Θ. On a $\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi_\Theta) \simeq \Pi_{\Theta,\Theta^\sigma}$. Par la Proposition 4.37, on a $0 \neq \mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi_\Theta \otimes (\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi_\Theta), \chi_{E/F}\omega_{\pi_\Theta})^+_{E^\times}) = \mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi_\Theta \otimes \delta^+_\Theta)$. Comme $\pi_\Theta|_{G^+}$ est réductible. Nous pouvons choir une composante, notée ρ^+_Θ telle que $\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \rho^+_\Theta \otimes \delta^+_\Theta) \neq 0$.

(6) $\delta' = \delta^+_\pi$ où π est une représentation cuspidale du groupe G non attachée à un caractère régulier de $E^\times$ par la correspondance de Langlands locale, alors $\theta(\delta^+_\pi) = \rho^+_\pi$.

Par la Proposition 4.37, on a $\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}\left(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi \otimes (\,\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi), \chi_{E/F}\omega_\pi)^+_{E^\times}\right) \neq 0$, i.e. $\mathrm{Hom}_{G^+\times GO(M)}\left(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \rho^+_\pi \otimes \delta^+_\pi\right) \neq 0$.

(4) $\delta' = \psi^+ \cdot 1^+_{GSO(M)}$ où $\psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +})$, on a $\theta(\delta') = \psi^+ \cdot 1_{G^+}$. Prouvons-cela, en traitant d'abord le cas de la représentation triviale.

Lemme 4.55. *Par le Théorème 1.29, on a vu que $\rho_\psi|_{SL_2(F)\times O(M)}$ est une représentation de bigraphe forte. Notons θ_{ρ_ψ} l'application de bigraphe associée. On a*

$$\theta_{\rho_\psi}(1_{SL_2(F)}) \cap \mathcal{R}_{O(M)}\left(\mathrm{Ind}_{GSO(M)}^{GO(M)}\left(\mathrm{Ind}_{B'}^H\,(|\cdot|_E \otimes |\cdot|_E^{-1}, \chi_{E/F})_{E^\times}\right)\right) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Ceci découle de [[Kud1], Page 240, Corollary 2.6] ou de [[R2], Page 800]. □

Corollaire 4.56. $\theta_{\rho_\psi}(1_{G^+}) = 1^+_{GSO(M)}$.

Démonstration. Soit $1_G \otimes \sigma \in \mathcal{R}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma,+})$ pour quelque $\sigma \in \mathrm{Irr}(GO(M))$. Par le Théorème Réciproque de Frobenius, on a

$$\mathcal{R}_\Gamma(1_{G^+} \otimes \sigma) \cap \mathcal{R}_\Gamma(\rho_\psi) \neq \emptyset.$$

A fortiori

$$\mathcal{R}_{SL_2(F)\times O(M)}(1_{G^+} \otimes \sigma) \cap \mathcal{R}_{SL_2(F)\times O(M)}(\rho_\psi) \neq \emptyset.$$

Par le Lemme 4.55 ci-dessus, on a

$$\emptyset \neq \mathcal{R}_{O(M)}(\sigma) \cap \mathcal{R}_{O(M)}\left(\mathrm{Ind}_{GSO(M)}^{GO(M)}\left(\left(\mathrm{Ind}_{B'}^H\,(|\cdot|_E \otimes |\cdot|_E^{-1}), \chi_{E/F}\right)_{E^\times}\right)\right).$$

Rappelons que nous avons le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & E^\times & \xrightarrow{a} & H^0 \rtimes \mathrm{Gal}(E/F) & \xrightarrow{b_0} & O(M) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & E^\times & \xrightarrow{a} & (F^\times \times H) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F) & \xrightarrow{b} & GO(M) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) & = & \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

où $H^0 = \{(a,h) \in F^\times \times H | \mathrm{N}_{E/F}(a \det(h)) = 1\}$ et $b_0(H^0) = SO(M)$.
Donc

$$\mathrm{Res}^{GO(M)}_{O(M)}\Big(\mathrm{Ind}^{GO(M)}_{GSO(M)}\big(\mathrm{Ind}^H_{B'}(|\cdot|_E \otimes |\cdot|_E^{-1}), \chi_{E/F}\big)_{E^\times}\Big) = \mathrm{Ind}^{O(M)}_{SO(M)}\big(\mathrm{Ind}^H_{B'}(|\cdot|_E \otimes |\cdot|_E^{-1}), \chi_{E/F}\big)_{E^\times}.$$

C'est-à-dire que

$$(\star\star\star) \qquad \mathcal{R}_{O(M)}(\sigma) \cap \mathcal{R}_{O(M)}\Big(\mathrm{Ind}^{O(M)}_{SO(M)}\big(\mathrm{Ind}^H_{B'}(|\cdot|_E \otimes |\cdot|_E^{-1}), \chi_{E/F}\big)_{E^\times}\Big) \neq \emptyset.$$

Comme $O(M) \supseteq N'$, il en résulte que $\sigma|_H$ est une série principale. Par le point (2) ci-dessus, $\sigma|_H$ est une représentation de dimension 1. Comme $\sigma \in \mathrm{Irr}_D(GO(M))$, on a

$$\sigma = \psi^+ \cdot 1^+_{GSO(M)} \text{ pour quelque } \psi^+ \in \mathrm{Irr}(F^{\times +}).$$

Utilisons l'égalité $(\star\star\star)$ encore une fois

$$\sigma|_{O(M)} = \psi^+ \cdot 1^+_{GSO(M)}|_{O(M)} = \psi^+ \cdot \big(1_H, \chi_{E/F}\big)^+_{E^\times} \subseteq \mathcal{R}_{O(M)}\big(\mathrm{Ind}^{O(M)}_{SO(M)}(1_H, \chi_{E/F})_{E^\times}\big).$$

On trouve que $\sigma = 1^+_{GSO(M)}$. □

La preuve du point (4) : soient $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, $\psi^+ = \psi|_{F^{\times +}}$, on définit une représentation ψ^+ du groupe $G^+ \times GO(M)$ de dimension 1 suivante :
(i) $\psi^+((1,h)) = \psi(\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)))$ pour $h \in H$.
(ii) $\psi^+((1,a)) = \psi(a^2)$ pour $a \in F^\times$.
(iii) $\psi^+((1,\sigma)) = 1$ pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$.
(iv) $\psi^+((g,1)) = \psi(\det(g))$ pour $g \in G^+$.
(a) $\psi^+ \cdot \pi^{\Gamma,+}_\psi \simeq \pi^{\Gamma,+}_\psi$.
Par définition, on a $\psi^+|_\Gamma = 1$. Comme $\pi^{\Gamma,+}_\psi = c - \mathrm{Ind}^{G^+\times GO(M)}_\Gamma \rho_\psi$, on a $\psi^+ \cdot \pi^{\Gamma,+}_\psi \simeq c - \mathrm{Ind}^{G^+\times GO(M)}_\Gamma(\psi^+|_\Gamma \rho_\psi) \simeq c - \mathrm{Ind}^{G^+\times GO(M)}_\Gamma(\rho_\psi) = \pi^{\Gamma,+}_\psi$.
(b) Par définition, on a $\psi^+ 1_{G^+} \otimes \psi^+ 1^+_{GSO(M)} = \psi^+\big(1_{G^+} \otimes 1^+_{GSO(M)}\big)$. Par le Corollaire 4.56, on sait que $1_{G^+} \otimes 1^+_{GSO(M)} \in \mathcal{R}_{G^+\times GO(M)}(\pi^{\Gamma,+}_\psi)$. Il en résulte que

$$\psi^+ 1_{G^+} \otimes \psi^+ 1^+_{GSO(M)} = \psi^+\big(1_{G^+} \otimes 1^+_{GSO(M)}\big) \in \mathcal{R}_{G^+\times GO(M)}\big(\psi^+ \cdot \pi^{\Gamma,+}_\psi\big) = \mathcal{R}_{G^+\times GO(M)}\big(\pi^{\Gamma,+}_\psi\big)$$

La preuve du Théorème 4.53 :
Les représentations : rappelons la définition des groupes :

$$\Gamma_0^{(1)} = \{(g,h) \in G \times H | \det(g)\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)) = 1\},$$

$$\Gamma_0 = \{(g,h) \in G \times GSO(M) | \det(g)\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)) = 1\}.$$

$$\Gamma = \{(g,h) \in G \times GO(M) | \det(g)\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)) = 1\} = \{(g,h) \in G^+ \times GO(M) | \det(g)\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)) = 1\}$$

On a les représentations :

$$\pi^{\Gamma_0^{(1)}}_\psi = c - \mathrm{Ind}^{G\times H}_{\Gamma_0^{(1)}} \rho_\psi, \qquad \pi^{\Gamma_0,+}_\psi = c - \mathrm{Ind}^{G^+\times GSO(M)}_{\Gamma_0} \rho_\psi,$$

$$\pi_\psi^{\Gamma_0} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{G\times GSO(M)} \rho_\psi, \qquad \pi_\psi^{\Gamma,+} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G^+\times GO(M)} \rho_\psi.$$

On a les relations :

$$(1) \qquad \mathrm{Res}_{G\times H}^{G\times GSO(M)} (\pi_\psi^{\Gamma_0}) = \pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}.$$

$$(2) \qquad \mathrm{Res}_{G^+\times GSO(M)}^{G^+\times GO(M)} (\pi_\psi^{\Gamma,+}) = \pi_\psi^{\Gamma_0,+}.$$

Les graphes :
(3) Par le Théorème 4.54, on a

$$\mathcal{R}_{G^+\times GO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma_0,+}) = \{\rho^+ \otimes \delta^+ | \rho^+ \xrightarrow{\theta} \delta^+ \text{ défini au Théorème 4.54 }\}.$$

(4) $\pi \otimes \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi) \in \mathcal{R}_{G\times H}\Big(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}\Big)$ pour toute représentation irréductible de dimension infinie π de G.
Les relations :
Si $\pi \otimes \sigma \in \mathcal{R}_{G\times H}(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}})$, on a

$$\begin{aligned}
0 \neq m_{G\times H}\Big(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}, \pi\otimes\sigma\Big) &= m_{G\times H}\Big(\mathrm{Res}_{G\times H}^{G\times GSO(M)}(\pi_\psi^{\Gamma_0}), \pi\otimes\sigma\Big) \\
= m_{G\times GSO(M)}\Big(\pi_\psi^{\Gamma_0}, \pi\otimes \mathrm{Ind}_H^{GSO(M)}\sigma\Big) &= m_{\Gamma_0}\Big(\rho_\psi, \pi\otimes\mathrm{Ind}_H^{GSO(M)}(\sigma)\Big) \\
= m_{G^+\times GSO(M)}\Big(\pi_\psi^{\Gamma_0,+}, \pi\otimes\mathrm{Ind}_H^{GSO(M)}\sigma\Big) &= m_{G^+\times GSO(M)}\Big(\mathrm{Res}_{G^+\times GSO(M)}^{G^+\times GO(M)}\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi\otimes\mathrm{Ind}_H^{GSO(M)}(\sigma)\Big) \\
&= m_{G^+\times GO(M)}\Big(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi\otimes\mathrm{Ind}_H^{GO(M)}(\sigma)\Big).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{R}_{G^+\times GO(M)}\Big(\pi\otimes\mathrm{Ind}_H^{GO(M)}(\sigma)\Big) \cap \mathcal{R}_{G^+\times GO(M)}\Big(\pi_\psi^{\Gamma,+}\Big) \neq \emptyset$$

Par le point (3) ci-dessus, on trouve que $\sigma = \mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)$.
De plus

$$m_{G\times H}\Big(\pi_\psi^{\Gamma_0^{(1)}}, \pi\otimes\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi)\Big) = m_{G^+\times GO(M)}\Big(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \pi\otimes\mathrm{Ind}_H^{GO(M)}(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi))\Big) = m_{G^+\times GO(M)}\Big(\pi_\psi^{\Gamma,+}, \rho_\pi\otimes\mathrm{Ind}_H^{GO(M)}(\mathrm{Bc}_{E/F}(\pi))\Big) = 1,$$

où $\rho_\pi^+ \in \mathcal{R}_{G^+}(\pi) \cap \mathcal{R}_{G^+}(\pi_\psi^{\Gamma,+})$. Ceci termine la démonstration !

4.2.3 $GL_2(K)$

Dans cette sous-sous-section, F désignera un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2. On fixera K une extension galoisienne de F de degré 3. On notera $G = GL_2(K)$, $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} \in G\}$, $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G\}$, $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix} \in G\}$; $\mathrm{Gal}(K/F) = \langle\sigma\rangle$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $h(a,d) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}$ où b décrit K, a, d décrivent $K^\times$; $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} \in G$.

Les groupes Soit V un espace vectoriel de dimension 2 sur K, muni d'une forme symplectique $\langle,\rangle$. Nous fixons une base symplectique $\{e_1, e_2\}$ i.e. $\langle e_1, e_2\rangle = 1, \langle e_2, e_1\rangle = -1$. Soit V_0 l'espace symplectique sur F, engendré par les $\{e_1, e_2\}$. On identifie V et $K\otimes_F V_0$; si $\langle,\rangle_0$ est la restriction à V_0 de $\langle,\rangle$; c'est une forme symplectique sur V_0, et on récupère la forme symplectique $\langle,\rangle$ sur V par restriction des scalaires de K. Nous définissons une action du groupe de Galois $Gal(K/F)$ sur V par : $Gal(K/F)\times K\otimes_F V_0 \longrightarrow K\otimes_F V_0$; $(\sigma, \sum_i k_i\otimes e_i) \longmapsto \sum_i k_i^\sigma \otimes e_i$. Il est clair que $\sigma \in \mathrm{End}_F(V)$.

Soit $W = V\otimes_K V\otimes_K V$; c'est un espace de dimension 8 sur K, muni d'une forme symplectique induite par celle de V. On notera $GSp(W)$ le groupe de similitudes de l'espace W, on a certainement une application $GL(V)\times GL(V)\times GL(V) \longrightarrow GSp(W)$. Grâce à la base fixée $\{e_1, e_2\}$, on peut identifier $GL_2(K)$ à $GL(V)$, ou $GSp_8(K)$ à $GSp(W)$.

Maintenant nous définissons une action de Galois tordue du groupe $Gal(K/F)$ sur W par : $Gal(K/F)\times W \longrightarrow W$; $(\sigma, w = \sum_i u_i\otimes v_i\otimes w_i) \longmapsto {}^\sigma w = \sum_i w_i^\sigma \otimes u_i^\sigma \otimes v_i^\sigma$. De la même manière définissons une action de Galois tordue

$Gal(K/F) \times (G \times G \times G) \longmapsto G \times G \times G; (\sigma, h = (g_1, g_2, g_3)) \longmapsto {}^{\sigma}h := (g_3^{\sigma}, g_2^{\sigma}, g_1^{\sigma})$.

Nous notons $W_0 = \{w \in W | {}^{\sigma}w = w\}$. Alors W_0 est un espace vectoriel sur F de dimension 8 et l'application naturelle $K \otimes W_0 \longrightarrow W$ est un isomorphisme. D'autre part, la forme symplectique $\langle,\rangle_W$, restreinte au F-espace vectoriel W_0, est une F-forme symplectique.(voir ci-après)

Nous noterons $\overline{G} = \{h \in G \times G \times G | {}^{\sigma}h = h\}$. On a un isomorphismes de groupes $i : G \simeq \overline{G}; g \longmapsto (g, g^{\sigma}, g^{\sigma^2})$. Et on vérifie facilement que ${}^{\sigma}h \cdot {}^{\sigma}w_0 = {}^{\sigma}(h \cdot w_0)$ pour $h \in \overline{G}$, $w_0 \in W_0$, de sorte qu'on a un morphisme de groupes, $p' : \overline{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow GSp(W_0)$ où $p'((h,\sigma))(\sum_i u_i \otimes v_i \otimes w_i) = h \cdot (\sum_i u_i^{\sigma} \otimes v_i^{\sigma} \otimes w_i^{\sigma})$ pour $h \in \overline{G}$, $w_0 = \sum_i u_i \otimes v_i \otimes w_i \in W_0$.

Pour construire et étudier la représentation "de Weil" associée au groupe $GL_2(K)$, nous avons besoin d'écrire W_0 plus précisément ; ce qui justifie aussi les assertions plus haut.
$W_0 = \{w_0 = xe_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + \alpha e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + \alpha^{\sigma} e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + \alpha^{\sigma^2} e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + \beta^{\sigma^2} e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + \beta^{\sigma} e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + \beta e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 + ye_2 \otimes e_2 \otimes e_2 | x, y \in F; \alpha, \beta \in K\}$.

Grâce à cette expression, tout élément w_0 de W_0 est bien déterminé par ses coefficients x, y, α, β. Nous écrivons $w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ \beta & y \end{pmatrix}$ au lieu du terme total. La F-forme symplectique associée à l'espace vectoriel W_0 peut s'écrire, de la façon suivante :

$$\langle w_0, w_0' \rangle = xy' - x'y - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta') + \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta) \text{ pour } w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ \beta & y \end{pmatrix}, w_0' = \begin{pmatrix} x' & \alpha' \\ \beta' & y' \end{pmatrix}.$$

Posons $X_0 = \{w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | w_0 \in W_0\}$, $Y_0 = \{w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y \end{pmatrix} | w_0 \in W_0\}$. Alors $W_0 = X_0 \oplus Y_0$ est une polarisation complète. Via les morphismes p' et i ci-dessus, ils donnent un morphisme $p : G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow GSp(W_0)$, l'action du groupe $G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ sur W_0 est définie par :
soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$, $w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ \beta & y \end{pmatrix}$ alors $\sigma \cdot w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha^{\sigma} \\ \beta^{\sigma} & y \end{pmatrix}$; $g \cdot w_0 = \begin{pmatrix} x' & \alpha' \\ \beta' & y' \end{pmatrix}$ où $x' = \mathrm{N}_{K/F}(a)x + \mathrm{Tr}_{K/F}(aa^{\sigma}b^{\sigma^2}\alpha) + \mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta) + \mathrm{N}_{K/F}(b)y$; $\alpha' = aa^{\sigma}c^{\sigma^2}x + (aa^{\sigma}d^{\sigma^2}\alpha + ba^{\sigma}c^{\sigma^2}\alpha^{\sigma} + ab^{\sigma}c^{\sigma^2}\alpha^{\sigma^2}) + (bb^{\sigma}c^{\sigma^2}\beta + ab^{\sigma}d^{\sigma^2}\beta^{\sigma} + ba^{\sigma}d^{\sigma^2}\beta^{\sigma^2}) + bb^{\sigma}d^{\sigma^2}y$; $\beta' = dd^{\sigma}b^{\sigma^2}y + (dd^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta + cd^{\sigma}b^{\sigma^2}\beta^{\sigma} + dc^{\sigma}b^{\sigma^2}\beta^{\sigma^2}) + (cc^{\sigma}b^{\sigma^2}\alpha + dc^{\sigma}a^{\sigma^2}\alpha^{\sigma} + cd^{\sigma}a^{\sigma^2}\alpha^{\sigma^2}) + cc^{\sigma}a^{\sigma^2}x$; $y' = \mathrm{N}_{K/F}(d)y + \mathrm{Tr}_{K/F}(dd^{\sigma}c^{\sigma^2}\beta) + \mathrm{Tr}_{K/F}(cc^{\sigma}d^{\sigma^2}\alpha) + \mathrm{N}_{K/F}(c)x$.

Nous écrivons l'élément $g \in GSp(W_0)$ en la forme suivante : $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a \in \mathrm{End}_F(X_0), b \in \mathrm{Hom}_F(Y_0, X_0), c \in \mathrm{Hom}_F(X_0, Y_0), d \in \mathrm{End}_F(Y_0)$.

Corollaire 4.57. *Via le morphisme p, l'expression explicite de l'action des $u(b), h(a,d), \omega$ dans W_0 est donnée par les formules :*
(1) $p(u(b)) = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & m^{\vee} \end{pmatrix}$ *où $b \in K$, $m \in \mathrm{End}_F(X_0), n \in \mathrm{Hom}_F(Y_0, X_0)$ et $m^{\vee} \in \mathrm{End}_F(Y_0)$ qui est la contragrédiente de m associée à la forme symplectique $\langle,\rangle$.* $m\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \mathrm{Tr}_{K/F}(b^{\sigma^2}\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}\beta) + \mathrm{N}_{K/F}(b)y & b^{\sigma}\beta^{\sigma} + b\beta^{\sigma^2} + bb^{\sigma}y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $m^{\vee}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta + b^{\sigma^2}y & y \end{pmatrix}$.
(2) $p(h(a,d)) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ *où* $m\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{K/F}(a)x & aa^{\sigma}d^{\sigma^2}\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dd^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta & \mathrm{N}_{K/F}(d)y \end{pmatrix}$.
(3) $p(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}$ *où* $u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $v\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -x \end{pmatrix}$.

Corollaire 4.58. *Posons $\Delta_0 := p^{-1}(Sp(W_0))$. Alors $\Delta_0 = G_0 \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$, où $G_0 = \{g \in G | N_{K/F}(\det(g)) = 1\}$.*

Relèvement du groupe Γ Soit $\widetilde{Sp}(W_0)$ le groupe métaplectique associé à W_0 rapport au caractère ψ fixé de F. Soit ρ_{ψ} la représentation de Weil de $\widetilde{Sp}(W_0)$ associée à ψ. On définit des groupes intermédiaires de la façon suivante :

$$\Gamma = \{[t, (g, \sigma)] \in F^{\times} \times (G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)) | t^2 \mathrm{N}_{K/F}(\det(g)) = 1\},$$

et

$$\Gamma_0 = \{(t, g) \in F^{\times} \times G | t^2 \mathrm{N}_{K/F}(\det(g)) = 1\}.$$

Evidémment, on a un homomorphisme de groupes

$$F^\times \times (G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)) \longrightarrow F^\times \times (\overline{G} \rtimes \mathbb{Z}_3); [t,(g,\sigma)] \longmapsto [t,(i(g),\tau_{123})].$$

Nous notons $\widetilde{\Gamma}$ l'image réciproque de Γ dans $\widetilde{Sp}(W_0)$.

Proposition 4.59. *$\widetilde{\Gamma}$ est scindé au-dessus Γ.*

Démonstration. On a un homomorphisme de groupes $F^\times \times G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow F^\times \times \overline{G} \rtimes \mathbb{Z}_3; [t,(g,\sigma)] \longmapsto [t,(i(g),\tau_{123})]$. Nous notons l'image de Γ par $\overline{\Gamma}$, donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \overline{\Gamma} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Sp(W_0) & \longrightarrow & Sp(W_0 \otimes_F K) \end{array}$$

Il en résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2(Sp(W_0 \otimes_F K), \mathbb{C}^\times) & \xrightarrow{Res_1} & H^2(Sp(W_0), \mathbb{C}^\times) \\ {\scriptstyle Res_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Res_3} \\ H^2(\phi(\overline{\Gamma}), \mathbb{C}^\times) & \longrightarrow & H^2(p(\Gamma), \mathbb{C}^\times) \end{array}$$

est aussi commutatif. Comme $[K : F] = 3$, par [[Kud2], Page 36 , Corollary], on a $\mathrm{Res}_1([\widetilde{Sp}(W_0 \otimes K)]) = [\widetilde{Sp}(W_0)]$, où $[\widetilde{Sp}(W_0 \otimes_F K)]$ (resp. $[\widetilde{Sp}(W_0)]$) est la classe du 2-cocycle associée à $\widetilde{Sp}(W_0 \otimes_F K)$ (resp. $\widetilde{Sp}(W_0)$). Par le Corollaire 4.45, on a trouvé que $\mathrm{Res}_2([\widetilde{Sp}(W_0 \otimes_F K)])$ est triviale, donc Res_3 $([\widetilde{Sp}(W_0)])$ est triviale. Cela achève la démonstration. □

Maintenant nous pouvons donner un relèvement précis du groupe Γ dans $\widetilde{Sp}(W_0)$. Utilisons le modèle de Schödinger dans [MVW] et les énoncés du Corollaire 5.17. D'abord nous écrirons les formules selon les résultats dans [[MVW], Page 40]. Ensuite nous montrons que ces formules déterminent bien un relèvement du groupe Γ dans $\widetilde{Sp}(W_0)$.

Nous rappelons que $W_0 = X_0 \oplus Y_0$ est une polarisation complète. Identifions Y_0 à $F \times K$. L'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat $S(Y_0)$ s'identifie à $S(F \times K)$. La representation de Weil $(\rho_\psi, \widetilde{Sp}(W_0))$ peut se réaliser dans $S(F \times K)$. Dans ce qui suit, nous fixerons la mesure duale de Haar pour F (resp. K) associée à ψ (resp. $\psi_K = \psi \circ \mathrm{Tr}_{K/F}$)).

Nous affirmons que les formules ci-dessus donnent un relèvement du groupe Γ dans $\widetilde{Sp}(W_0)$:

$$\rho_\psi([1,(h(a,a^{-1}),1)])f(y,\beta) = |\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F f(\mathrm{N}_{K/F}(a)y, a^{-1}a^\sigma a^{\sigma^2}\beta). \tag{38}$$

$$\rho_\psi([c,(h(1,t),1)])f(y,\beta) = |c|_F f(cy, ct\beta). \tag{39}$$

$$\rho_\psi([1,(u(b),1)])f(y,\beta) = f(y,\beta - by)\psi(\mathrm{Tr}_{K/F}(bb^\sigma\beta^{\sigma^2})y - \mathrm{N}_{K/F}(b)y^2 - \mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^\sigma\beta^{\sigma^2})). \tag{40}$$

$$\rho_\psi([1,(1,\sigma)]f)(y,\beta) = f(y,\beta^{\sigma^{-1}}). \tag{41}$$

$$\rho_\psi([1,(\omega,1)])f(y,\beta) = \gamma \int_{x\in F,\alpha\in K} f(x,\alpha)\psi(-xy - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_\psi(x)d\mu_{\psi_K}(\alpha). \tag{42}$$

où $f \in S(F \times K)$; $c \in F^\times$, $t \in K^\times$ tels que $c^2\,\mathrm{N}_{K/F}(t) = 1$; $y \in F$, $b,\beta \in K$, $a \in K^\times$; γ est la constante de Weil définie en [[Kazh], Page 138].

L'ensemble $\mathscr{S} = \{\underline{h}[1,(a,a^{-1})] = [1,(h(a,a^{-1}),1)], \underline{h}[c,(1,t)] = [c,(h(1,t),1)], \underline{u}[1,b] = [1,(u(b),1)], \underline{\omega} = [1,(\omega,1)], \underline{\sigma} = [1,(1,\sigma)]\}$ engendre le groupe Γ. Utilisons les énoncés dans [[MVW], Page 40-41], nous savons que les éléments $(g,\rho(g))$ sont dans $\widetilde{Sp}(W_0)$ selon le modèle de Schödinger pour tous $g \in \mathscr{S}$ et les formules (38)—(41) définissent une représentation du sous-groupe $P(X_0) \cap \Gamma$ de $Sp(W_0)$. Donc il suffit d'examiner les relations ci-dessous [cf.[W]] :

(i) $\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{h}[1,(a,a^{-1})]) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(a^{-1},a)])\rho_\psi(\underline{\omega})$.

(ii) $\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{h}[c,(1,t)]) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(t,t^{-1})])\rho_\psi(\underline{h}[c,(1,t)])\rho_\psi(\underline{\omega})$.
(iii) $\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{u}[1,b]) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(b^{-1},b)])\rho_\psi(\underline{u}[1,-b])\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{u}[1,-b^{-1}])\rho_\psi(\underline{\omega})$.
(iv) $\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{\omega}) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(-1,-1)])$.
(v) $\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{\sigma}) = \rho_\psi(\underline{\sigma})\rho_\psi(\underline{\omega})$.
Pour (i) :

$$\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{h}[1,(a,a^{-1})])f(y,\beta) = \gamma\int_{x\in F,\alpha\in K}|\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F f(\mathrm{N}_{K/F}(a)x, a^{-1}a^\sigma a^{\sigma^2}\alpha)\psi(-xy-\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_\psi(x)d\mu_{\psi_K}(\alpha)$$

$$\overset{\text{remplaçons}:\alpha'=a^{-1}a^\sigma a^{\sigma^2}\alpha\text{ et }x'=\mathrm{N}_{K/F}(a)x}{=}\gamma\int_{x'\in F,\alpha'\in K} f(x',\alpha')\psi(-x'y\,\mathrm{N}_{K/F}(a^{-1})-\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta a(a^{-1})^\sigma(a^{-1})^{\sigma^2}))|a(a^{-1})^\sigma(a^{-1})^{\sigma^2}|_K d\mu_\psi(x')d\mu_{\psi_K}(\alpha')$$

$$\overset{K/F\text{ non-ramifié}}{=}\gamma\int_{x'\in F,\alpha'\in K} f(x',\alpha')\psi(-x'y\,\mathrm{N}_{K/F}(a^{-1})-\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta a(a^{-1})^\sigma(a^{-1})^{\sigma^2}))|\mathrm{N}_{K/F}(a^{-1})|_F d\mu_\psi(x')d\mu_{\psi_K}(\alpha')$$

$$= |\mathrm{N}_{K/F}(a^{-1})|_F(\rho_\psi(\underline{\omega})f)(\mathrm{N}_{K/F}(a^{-1})y, a(a^{-1})^\sigma(a^{-1})^{\sigma^2}\beta) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(a,a^{-1})])\rho_\psi(\underline{\omega})f(y,\beta).$$

Pour (ii) :

$$\rho_\psi(\underline{h}[1,(t,t^{-1})])\rho_\psi(\underline{h}[c,(1,t)])\rho_\psi(\underline{\omega})f(y,\beta) = |\mathrm{N}_{K/F}(t)|_F\rho_\psi(\underline{h}[c,(1,t)])\rho_\psi(\underline{\omega})f(\mathrm{N}_{K/F}(t)y, t^{-1}t^\sigma t^{\sigma^2}\beta)$$

$$= |\mathrm{N}_{K/F}(t)c|_F\rho_\psi(\underline{\omega})f(c\,\mathrm{N}_{K/F}(t)y, ct^\sigma t^{\sigma^2}\beta)$$

$$= \gamma|\mathrm{N}_{K/F}(t)c|_F\int_{x\in F,\alpha\in K} f(x,\alpha)\psi(-xc\,\mathrm{N}_{K/F}(t)y-\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha c\beta t^\sigma t^{\sigma^2}))d\mu_\psi(x)d\mu_{\psi_K}(\alpha)$$

$$\overset{\alpha'=c\alpha t^\sigma t^{\sigma^2}\text{ et }x'=c\,\mathrm{N}_{K/F}(t)x}{=}\gamma|c|_F\int_{x'\in F,\alpha'\in K} f(x'\,\mathrm{N}_{K/F}(t^{-1})c^{-1}, \alpha'c^{-1}(t^{-1})^\sigma(t^{-1})^{\sigma^2})\psi(-x'y-\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta))d\mu_\psi(x')d\mu_{\psi_K}(\alpha')$$

$$= \gamma\int_{x'\in F,\alpha'\in K}\big(\rho_\psi(\underline{h}[c,(1,t)])f\big)(x',\alpha')\psi(-x'y-\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta))d\mu_\psi(x')d\mu_{\psi_K}(\alpha')$$

$$= \rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{h}[c,(1,t)])f(y,\beta).$$

Pour (iii), Afin d'éviter les calculs superflus, nous adoptons quelques formules dans [[Kazh]]. Dans [[Kazh], Page 132], il a défini une forme quadratique Q_b sur l'espace vectoriel $F\oplus K$, où

$$Q_b(y,\beta) = \mathrm{N}_{K/F}(b)y^2 + y\,\mathrm{Tr}_{K/F}(bb^\sigma\beta^{\sigma^2}) + \mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^\sigma\beta^{\sigma^2}).$$

Dans [[Kazh], Page 139], il a déterminé une représentation ${}^0\sigma$ du groupe P dans l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}(F^\times\times F\times K)$, où $P = G/S\ltimes H$ pour $S = \mathrm{Hom}_F(K,F)$ et H est le groupe de Heisenberg associé à V_0, une partie des formules sont les suivantes :

$${}^0\sigma(\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}f)(e,y,\beta) = \psi(e^{-1}Q_b(y,\beta))f(e,y,\beta+yb).$$

$${}^0\sigma(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}f)(e,y,\beta) = \gamma(e,\delta_{K/F})|e|_F^{-2}\int_{F\times K} f(e,x,\alpha)\psi(e^{-1}(xy+\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_\psi(x)\mu_{\psi_K}(\alpha).$$

$${}^0\sigma(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}f)(e,y,\beta) = (\mathrm{N}_{K/F}(a),\delta)|\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F f(e,\mathrm{N}_{K/F}(a)y, a^{-1}a^\sigma a^{\sigma^2}\beta).$$

où $\beta,b\in K, e\in F^\times, y\in F, f\in\mathcal{S}(F^\times\times F\times K)$; ici $\delta_{K/F}\in F^\times/F^{\times 2}$ est le discriminant de la forme bilinéaire $K\times K\longrightarrow F;(k_1,k_2)\longmapsto\mathrm{Tr}_{K/F}(k_1k_2)$. Comme K/F est une extension galoisienne, on a $\delta_{K/F} = 1$ par [[MR], Lemma 2]. En comparant que les formules ci-dessus, on trouve

$${}^0\sigma(h(a,a^{-1}))f(1,y,\beta) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(a,a^{-1})])g(y,\beta), \tag{43}$$

$${}^0\sigma(u(-b))f(1,y,\beta) = \rho_\psi(\underline{u}[1,b])g(y,\beta), \tag{44}$$

$${}^0\sigma(\omega^{-1})f(1,y,\beta) = \rho_\psi(\underline{\omega})g(y,\beta), \tag{45}$$

pour $a\in K^\times, b\in K, f\in\mathcal{S}(F^\times\times F\times K)$ et $g(y,\beta) := f(1,y,\beta)\in\mathcal{S}(F\times K)$. On sait que ${}^0\sigma$ est une représentation du groupe P, donc on a l'égalité

$${}^0\sigma(\omega)\,{}^0\sigma(u(-b)) = {}^0\sigma(h(-b^{-1},-b))\,{}^0\sigma(u(b))\,{}^0\sigma(\omega)\,{}^0\sigma(u(b^{-1}))\,{}^0\sigma(\omega).$$

Grâce aux relations (43)—(45), on a

$$\rho_\psi(\underline{\omega}^{-1})\rho_\psi(\underline{u}[1,b]) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(-b^{-1},-b)])\rho_\psi(\underline{u}[1,-b])\rho_\psi(\underline{\omega}^{-1})\rho_\psi(\underline{u}[1,-b^{-1}])\rho_\psi(\underline{\omega}^{-1}).$$

De plus, $\omega^{-1} = \omega \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est un élément du centre de G ; on obtient donc enfin l'équation (iii), i.e.

$$\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{u}[1,b]) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(b^{-1},b)])\rho_\psi(\underline{u}[1,-b])\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{u}[1,-b^{-1}])\rho_\psi(\underline{\omega}).$$

Pour (iv) :

$$\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{\omega})f(x,\alpha) = \gamma \int_{y\in F,\beta\in K} \rho_\psi(\underline{\omega})(f)(y,\beta)\psi(-xy - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_\psi(y)d\mu_{\psi_K}(\beta)$$

$$= \gamma^2 \int_{y,z\in F;\beta,\zeta\in K} f(z,\gamma)\psi(-(x+z)y - \mathrm{Tr}_{K/F}((\alpha+\zeta)\beta))d\mu_\psi(y)d\mu_\psi(z)d\mu_{\psi_K}(\beta)d\mu_{\psi_K}(\zeta) = f(-x,-\alpha) = \rho_\psi(\underline{h}[1,(-1,-1)])(f)(x,\alpha).$$

Pour (v) :

$$\begin{aligned}
\rho_\psi(\underline{\omega})\rho_\psi(\underline{\sigma})f(y,\beta) &= \gamma \int_{x\in F,\alpha\in K} \rho_\psi(\underline{\sigma})f(x,\alpha)\psi(-xy - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_\psi(x)d\mu_{\psi_K}(\alpha) \\
&= \gamma \int_{x\in F,\alpha\in K} f(x,\alpha^{\sigma^{-1}})\psi(-xy - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_\psi(x)d\mu_{\psi_K}(\alpha) \\
&\overset{\alpha'=\alpha^{\sigma^{-1}}}{=} \gamma \int_{x\in F,\alpha'\in K} f(x,\alpha')\psi(-xy - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'^{\sigma}\beta))d\mu_\psi(x)d\mu_{\psi_K}(\alpha') \\
&= \gamma \int_{x\in F,\alpha'\in K} f(x,\alpha')\psi(-xy - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta^{\sigma^{-1}}))d\mu_\psi(x)d\mu_{\psi_K}(\alpha') \\
&= \gamma\rho_\psi(\underline{\sigma})\rho_\psi(\underline{\omega})f(y,\beta).
\end{aligned}$$

Les représentations On définit les représentations

$$\pi_\psi^\Gamma = c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{F^\times \times (G\rtimes \mathrm{Gal}(K/F))} \rho_\psi$$

et

$$\pi_\psi^{\Gamma_0} = c - \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}^{F^\times \times G} \rho_\psi|_{\Gamma_0}.$$

On a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & F^\times \times (G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)) & \xrightarrow{a} & F^\times & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & [t,g,\sigma] & \longmapsto & t^2\,\mathrm{N}_{K/F}(\det(g)) & &
\end{array}$$

On trouve une section s de a, donnée par

$$s : F^\times \longrightarrow F^\times \times (G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F))$$

$$t \longmapsto [t^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1].$$

Par définition, on a

$$c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{F^\times \times (G\rtimes \mathrm{Gal}(K/F))} \rho_\psi = \{\phi \in F^\times \times (G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)) \longrightarrow S(F \times K) | \phi(rg) = \rho_\psi(r)\phi(g)$$

$$\text{pour } r \in \Gamma, \text{ et } \phi \text{ est localement constante, à support compact modulo } \Gamma\}.$$

On a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$c - \mathrm{Ind}_\Gamma^{F^\times \times (G\rtimes \mathrm{Gal}(K/F))} \rho_\psi \xrightarrow{\tau} S(F^\times \times F \times K)$$

$$\phi \longmapsto \Phi,$$

où $\Phi(x,y,\beta) := \phi([x^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, 1])(xy,\beta)$.

Utilisant l'isomorphisme τ, nous réalisons π_ψ^Γ dans $S(F^\times \times F \times K)$. Donnons les formules détaillées pour cette action :

(1)

$$\pi_\psi^\Gamma([t,1,1])\Phi(x,y,\beta)=\phi([x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1][t,1,1])(xy,\beta)$$

$$=\phi([x^{-1}t,\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1])(xy,\beta)=\phi\Big([t^3,\begin{pmatrix}1&0\\0&t^{-2}\end{pmatrix},1][x^{-1}t^{-2},\begin{pmatrix}1&0\\0&t^2x\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)$$

$$=\rho_\psi\Big([t^3,\begin{pmatrix}1&0\\0&t^{-2}\end{pmatrix},1]\Big)\phi([x^{-1}t^{-2},\begin{pmatrix}1&0\\0&xt^2\end{pmatrix},1])(xy,\beta)$$

$$=|t^3|_F\phi\Big([x^{-1}t^{-2},\begin{pmatrix}1&0\\0&xt^2\end{pmatrix},1]\Big)(t^3xy,t\beta)=|t^3|_F\phi\Big([(xt^2)^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&xt^2\end{pmatrix},1]\Big)(xt^2\,ty,t\beta)$$

$$=|t^3|_F\Phi(t^2x,ty,t\beta).$$

(2)

$$\pi_\psi^\Gamma\Big([1,\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},1]\Big)\Phi(x,y,\beta)=\phi\Big([x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1][1,\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)$$

$$=\phi\Big([1,\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},1][x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)=|\,\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F\phi\Big([x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1]\Big)(x\,\mathrm{N}_{K/F}(a)y,a^{-1}a^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta)$$

$$=|\,\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F\Phi(x,\mathrm{N}_{K/F}(a)y,a^{-1}a^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta).$$

(3)

$$\pi_\psi^\Gamma\Big([1,\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix},1]\Big)\Phi(x,y,\beta)=\phi\Big([x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1][1,\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)$$

$$=\phi\Big([1,\begin{pmatrix}1&bx^{-1}\\0&1\end{pmatrix},1][x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)$$

$$=\phi\Big([x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta-by)\psi\Big(\,\mathrm{Tr}_{K/F}\,(bb^{\sigma}\beta^{\sigma^2})x^{-1}y-\mathrm{N}_{K/F}(b)x^{-1}y^2-x^{-1}\,\mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^{\sigma}\beta^{\sigma^2})\Big)$$

$$=\Phi(x,y,\beta-by)\psi\Big(x^{-1}(\,\mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}\beta^{\sigma^2}y-\mathrm{N}_{K/F}(b)y^2-\mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^{\sigma}\beta^{\sigma^2})))\Big).$$

(4)

$$\pi_\psi^\Gamma\Big([1,\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix},1]\Big)\Phi(x,y,\beta)=\phi\Big([x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1][1,\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)$$

$$=\phi\Big([x^{-1},\begin{pmatrix}a&0\\0&x\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)=\phi\Big([\mathrm{N}_{K/F}(a),\begin{pmatrix}a&0\\0&\mathrm{N}_{K/F}(a)^{-1}\end{pmatrix},1][x^{-1}\,\mathrm{N}_{K/F}(a)^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\,\mathrm{N}_{K/F}(a)\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)$$

$$=\phi\Big([1,\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},1][\mathrm{N}_{K/F}(a),\begin{pmatrix}1&0\\0&a\,\mathrm{N}_{K/F}(a)^{-1}\end{pmatrix},1][x^{-1}\,\mathrm{N}_{K/F}(a)^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\,\mathrm{N}_{K/F}(a)\end{pmatrix},1]\Big)(xy,\beta)$$

$$=|\,\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F\phi\Big([\mathrm{N}_{K/F}(a),\begin{pmatrix}1&0\\0&a\,\mathrm{N}_{K/F}(a)^{-1}\end{pmatrix},1][x^{-1}\,\mathrm{N}_{K/F}(a)^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\,\mathrm{N}_{K/F}(a)\end{pmatrix},1]\Big)(xy\,\mathrm{N}_{K/F}(a),a^{-1}a^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta)$$

$$=|\,\mathrm{N}_{K/F}(a)|^2\phi\Big([(x\,\mathrm{N}_{K/F}(a))^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\,\mathrm{N}_{K/F}(a)\end{pmatrix},1]\Big)(\mathrm{N}_{K/F}(a)^2xy,a^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta)=|\,\mathrm{N}_{K/F}(a)^2|_F\Phi(x\,\mathrm{N}_{K/F}(a),\mathrm{N}_{K/F}(a)y,a^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta).$$

(5)

$$\pi_\psi^\Gamma\Big([1,\omega,1]\Big)\Phi(x,y,\beta)=\phi([x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1][1,\omega,1])(xy,\beta)$$

$$=\phi([1,\omega,1][1,\begin{pmatrix}x&0\\0&x^{-1}\end{pmatrix},1][x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1])(xy,\beta)$$

$$=\gamma\int_{z\in F,\alpha\in K}\phi\Big([1,\begin{pmatrix}x&0\\0&x^{-1}\end{pmatrix},1][x^{-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},1]\Big)(z,\alpha)\psi(-xyz-\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_\psi(z)d\mu_{\psi_K}(\alpha)$$

$$= \gamma \int_{z\in F,\alpha\in K} |\,\mathrm{N}_{K/F}(x)|_F \phi\Big([x^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, 1]\Big)(\mathrm{N}_{K/F}(x)z, x^{-1}x^{\sigma}x^{\sigma^2}\alpha)\psi(-xyz - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))d\mu_{\psi}(z)d\mu_{\psi_K}(\alpha)$$

$$\overset{z'=zx^2,\alpha'=\alpha x}{=} \gamma |\,\mathrm{N}_{K/F}(x)|_F |x^{-2}|_F |\,\mathrm{N}_{K/F}(x)^{-1}|_F \int_{z'\in F,\alpha\in K} \phi\Big([x^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, 1]\Big)(xz', \alpha')\psi(-x^{-1}yz' - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta x^{-1})d\mu_{\psi}(z')d\mu_{\psi_K}(\alpha')$$

$$= \gamma |z'|_F^{-2} \int_{z'\in F,\alpha'\in K} \phi\Big([x^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, 1]\Big)(xz', \alpha')\psi\Big(-x^{-1}(yz' + \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta))\Big)d\mu_{\psi}(z')d\mu_{\psi_K}(\alpha')$$

$$= \gamma |z'|_F^{-2} \int_{z'\in F,\alpha'\in K} \Phi\Big(x, z', \alpha'\Big)\psi\Big(x^{-1}(-yz' - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta))\Big)d\mu_{\psi}(z')d\mu_{\psi_K}(\alpha').$$

(6)

$$\pi_{\psi}^{\Gamma}\Big([1,1,\sigma]\Big)\Phi(x,y,\beta) = \phi([x^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, 1][1,1,\sigma])(xy,\beta)$$

$$= \phi([1,1,\sigma][x^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, 1])(xy,\beta) = \phi([x^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, 1])(xy,\beta^{\sigma^{-1}}) = \Phi(x,y,\beta^{\sigma^{-1}}).$$

En concluons la représentation $(\pi_{\psi}^{\Gamma}, F^{\times} \times \big(G \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)\big))$ se réalise dans l'espace vectoriel des fonctions de Schartz-Bruhat par les formules suivantes :

$$\pi_{\psi}^{\Gamma}([t,1,1])\Phi(x,y,\beta) = |t^3|_F \Phi(t^2x, ty, t\beta) \tag{46}$$

$$\pi_{\psi}^{\Gamma}([1, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1])\Phi(x,y,\beta) = |\,\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F \Phi(x, \mathrm{N}_{K/F}(a)y, a^{-1}a^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta). \tag{47}$$

$$\pi_{\psi}^{\Gamma}([1, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1])\Phi(x,y,\beta) = \psi\Big(x^{-1}(\,\mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}\beta^{\sigma^2})y - \mathrm{N}_{K/F}(b)y^2 - \mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^{\sigma}\beta^{\sigma^2})\Big)\Phi(x,y,\beta - by). \tag{48}$$

$$\pi_{\psi}^{\Gamma}([1, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1])\Phi(x,y,\beta) = |\,\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F^2 \Phi(x\,\mathrm{N}_{K/F}(a), \mathrm{N}_{K/F}(a)y, a^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta). \tag{49}$$

$$\pi_{\psi}^{\Gamma}([1,\omega,1])\Phi(x,y,\beta) = \gamma|z|_F^{-2} \int_{z\in F,\alpha\in K} \Phi(x,z,\alpha)\psi\Big(-x^{-1}(yz + \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))\Big)d\mu_{\psi}(z)d\mu_{\psi_K}(\alpha). \tag{50}$$

$$\pi_{\psi}^{\Gamma}([1,1,\sigma])\Phi(x,y,\beta) = \Phi(x,y,\beta^{\sigma^{-1}}). \tag{51}$$

Remarque 4.60. *Si on prend ψ^- au liée de ψ, et que on utilise l'isomorphisme $S(F^{\times} \times F \times K) \longrightarrow S(F^{\times} \times F \times K)$; $f(x,y,\beta) \longmapsto f(x,-y,\beta)$, on retrouve les formules dans [[MR], Page 175].*

Les quotients 1—les séries principales On dit qu'un espace topologique X(resp. un groupe topologique G) est un l-espace(resp. l-groupe) si X(resp. G) est localement compact totalement discontinu. On a une action de l-groupe G sur un l-espace X si l'application $G \times X \longrightarrow X$ est continue ; on désignera par $\mathcal{S}(X)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat et par $\mathcal{S}^{\star}(X)$ l'espace des distributions de Schwartz muni de la topologie faible, c'est-à-dire la topologie moins fine telle que pour tout élément $\phi \in \mathcal{S}$, l'ensemble $\phi^{\perp} = \{\phi^{\star} \in \mathcal{S}^{\star}(X) | \langle \phi^{\star}, \phi \rangle = 0\}$ est ouvert. Soient X un l-espace, Z un sous-l-espace fermé de X et $U = X \backslash Z$. On a deux suites exactes induites par l'induisons i_U de U dans X et celle p_Z de Z dans X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(U) \xrightarrow{i_U} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{p_Z} \mathcal{S}(Z) \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^{\star}(Z) \xrightarrow{p_Z^{\star}} \mathcal{S}^{\star}(X) \xrightarrow{i_U^{\star}} \mathcal{S}^{\star}(U) \longrightarrow 0.$$

Pour chaque élément $\phi^{\star} \in \mathcal{S}^{\star}(X)$, il existe un ensemble ouvert maximal U tel que $i_U^{\star}(\phi^{\star}) = 0$, donc on dit que $Z = X \backslash U$ est le support de $\phi^{\star}$.

Théorème 4.61 (Bernstein)**.** *Si $q : X \longrightarrow T$ est une application continue de l-espaces, on note $X_t := q^{-1}(t)$ pour $t \in T$. On a deux applications :*

$$\mathcal{S}(T) \times \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(X);$$

$$(f, \phi) \longmapsto f \times \phi,$$

où $f \times \phi(x) := f(q(x))\phi(x)$.

$$\mathcal{S}(T) \times \mathcal{S}^{\star}(X) \longrightarrow \mathcal{S}^{\star}(X);$$

$$(f, \phi^\star) \longmapsto f \times \phi^\star,$$

où $\langle f \times \phi^\star \rangle := \langle \phi^\star, f \times \phi \rangle$*. Soit* M *un sous-espace fermé de* $\mathcal{S}^\star(X)$*, muni d'une* $S(T)$*-action, alors*

$$M = \overline{\bigoplus_{t \in T} (M \cap \mathcal{S}^\star(X_t))}.$$

Démonstration. Ceci découle de [[B2], Page 58] □

Théorème 4.62 (Bernstein)**.** *Soient* G *un l-groupe unmodulaire,* Z *un l-espace muni d'une* G*-action transitive,* X *un l-espace et* φ *une application de* X *dans* Z *qui est* G*-équivariante. Soient* $z_0 \in Z$, $\mathrm{Stab}_G(z_0) = H$*,* $X_{z_0} = \varphi^{-1}(z_0)$ *le fibre de* z_0*,* χ *un caractère de* G*. On suppose que* H *est unimodulaire. Alors :*
(1) Il existe un isomorphisme

$$Fr : \mathcal{S}^\star(X)^{G,\chi} \longrightarrow \mathcal{S}^\star(X_{z_0})^{H,\chi|_H},$$

défini par

$$\langle Fr(I), f \rangle = \int_Z \chi(g_z)\langle I, g_z f \rangle dg,$$

où $g_z \in G$ *est un élément satisfaisant à* $g_z(z) = z_0$*, et* dg *est une mesure de Haar de* Z*.*
(2) Pour chaque élément $I \in \mathcal{S}^\star(X)^{G,\chi}$*, on a* $\mathrm{supp}(Fr(I)) = \mathrm{supp}(I) \cap X_{z_0}$.

Démonstration. Ceci découle de [[B2], Page 60] □

Reprenons les notations du début, où en particulier T est le sous-groupe diagonal de $G = GL_2(K)$.

Lemme 4.63. *(1)* $(\pi_\psi^\Gamma)_N \simeq S(F^\times \times F^\times)$*.*
(2) L'action de $F^\times \times T$ *est décrite par les formules ci-dessous :*
(i) $\pi_\psi^{\Gamma,T}([t, 1, 1])F(x, y) = |t^3|_F F(t^2 x, ty)$*,*
(ii) $\pi_\psi^{\Gamma,T}([1, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}])F(x, y) = |\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F F(x, \mathrm{N}_{K/F}(a)y)$*,*
(iii) $\pi_\psi^{\Gamma,T}([1, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}])F(x, y) = |\mathrm{N}_{K/F}(a)|_F^2 F(\mathrm{N}_{K/F}(a)x, \mathrm{N}_{K/F}(a)y)$*,*
où $t \in F^\times$*,* $a \in K^\times$*.*

Démonstration. (1) Pour $\Phi \in S(F^\times \times F \times K)$, on définit

$$\Phi_N(x, y, \beta) := \int_N \pi_\psi^\Gamma(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\Phi(x, y, \beta)db.$$

Calculons cette fonction sur $F^\times \times F \times K$.
(i) Prenons d'abord $y = 0$. On a

$$\Phi_N(x, 0, \beta) = \int_N \pi_\psi^\Gamma(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\Phi(x, 0, \beta)db$$

$$= \int_N \psi(-\mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^\sigma\beta^{\sigma^2}))\Phi(x, 0, \beta)db = \int_N \psi(-\mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^\sigma\beta^{\sigma^2})\Phi(x, 0, \beta)db = 0.$$

(ii) Pour $y \neq 0$, on a

$$\Phi_N(x, y, \beta) = \int_N \pi_\psi^\Gamma(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\Phi(x, y, \beta)db$$

$$= \int_N \psi(x^{-1}(\mathrm{Tr}_{K/F}(bb^\sigma\beta^{\sigma^2})y - \mathrm{N}_{K/F}(b)y^2 - \mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta^\sigma\beta^{\sigma^2}))\Phi(x, y, \beta - by)db.$$

Posons $\beta = b_0 y$, et effectuions la changement de variable $b' = b - b_0$. On obtient

$$\Phi_N(x, y, \beta) = \int_N \Phi(x, y, b')db' = \int_N \psi(x^{-1}[-\mathrm{N}_{K/F}(b')y^2 + \mathrm{N}_{K/F}(b_0)y^2])\Phi(x, y, -b'y)db' = \psi(x^{-1}\mathrm{N}_{K/F}(b_0)y^2)\Phi_N(x, y, 0).$$

(iii) Supposons $\psi|_{\mathfrak{P}^n} = 1$. Prenons $f_1, f_2 \in S(F^\times)$. Supposons $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq K_i$ un ensemble ouvert compact de $F^\times$. On note

$$S = \{(x, y, \beta) \in F^\times \times F^\times \times K | x^{-1}y^{-1}\mathrm{N}_{K/F}(\beta) \in \mathfrak{P}^n, x \in K_1, y \in K_2\}.$$

On prend

$$\Phi(x,y,\beta) = |y|_K f_1(x) f_2(y) 1_S(x,y,\beta).$$

Pour $y \neq 0$, on a

$$\Phi_N(x,y,0) = |y|_K \int_N \phi(x^{-1}y^{-1}\,\mathrm{N}_{K/F}(by)) f_1(x) f_2(y) 1_S(-by)db = \int_N \psi(x^{-1}y^{-1}\,\mathrm{N}_{K/F}(b')) f_1(x) f_2(y) 1_S(-b')db'$$

$$= f_1(x) f_2(y) \int_S 1_S(-b)db = c f_1(x) f_2(y).$$

(iv) On note $S_N = \{\Phi_N | \Phi \in S(F^\times \times F \times K)\}$. On a une application bijective

$$S_N \xrightarrow{i} S(F^\times \times F^\times); \Phi_N \longmapsto \Phi_N|_{F^\times \times F^\times \times 0}.$$

Cette application est bien définie. Par les points (i) et (ii), i est injective, et par le point (iii), i est surjective.
(2) Ceci résulte de la définition de i ci-dessus. □

On définit des applications

$$F^\times \times T \times (F^\times \times F) \longrightarrow F^\times \times F;$$

$$[t, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}](x,y) \longmapsto [t^2\,\mathrm{N}_{K/F}(ad)x, t\,\mathrm{N}_{K/F}(a)y].$$

Aussi

$$T \times (F^\times \times F) \longrightarrow F^\times \times F;$$

$$[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix})(x,y) \longmapsto [\mathrm{N}_{K/F}(ad)x, \mathrm{N}_{K/F}(a)y].$$

Lemme 4.64. *(i) Les actions ci-dessus sont simplement transitives .*
(ii) $Stab_{F^\times \times T}((1,1)) = \{(t, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) | t\,\mathrm{N}_{K/F}(a) = t\,\mathrm{N}_{K/F}(d) = 1\}$.
$Stab_T((1,1)) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} | \mathrm{N}_{K/F}(a) = \mathrm{N}_{K/F}(d) = 1\}$.

Démonstration. C'est évident. □

Proposition 4.65. *(i)* $m_G(\pi_\psi^\Gamma, \Pi_{\Phi_1,\Phi_2}) = 1$, *si* $\Phi_1 = \phi_1 \circ \mathrm{N}_{K/F}$, $\Phi_2 = \phi_2 \circ \mathrm{N}_{K/F}$ *pour* $\phi_1, \phi_2 \in Irr(F^\times)$ *; sinon* $= 0$.
(ii) $m_{F^\times \times G}(\pi_\psi^\Gamma, \phi \otimes \Pi_{\phi\circ\mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F, \phi\circ\mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^2}) = 1$ *pour* $\phi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ *;* $= 0$ *sinon.*

Démonstration. (1) On note $H_1 = Stab_G((1,1))$. On a $\mathrm{Hom}_G(\pi_\psi^\Gamma, \Pi_{\Phi_1,\Phi_2}) \simeq \mathrm{Hom}_T((\pi_\psi^\Gamma)_N, \Phi_1 \otimes \Phi_2) \simeq S^\star(F^\times \times F^\times)^{\Phi_1^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-2} \otimes \Phi_2^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-1}} \overset{\text{Théorème 4.62}}{=} S^\star((1,1))^{\Phi_1^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-2} \otimes \Phi_2^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-1}|_{H_1}}$. Donc $m_G(\pi_\psi^\Gamma, \Pi_{\Phi_1,\Phi_2}) = 1$, si $\Phi_1^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|^{-2} \otimes \Phi_2^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-1}|_{H_1} = 1$, c'est-à-dire que $\Phi_1 = \phi_1 \circ \mathrm{N}_{K/F}$, $\Phi_2 = \phi_2 \circ \mathrm{N}_{K/F}$ pour quelques $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Irr}(F^\times)$. Sinon, on a $m_G(\pi_\psi^\Gamma, \Pi_{\Phi_1,\Phi_2}) = 0$.
(2) On note $H_2 = Stab_{F^\times \times G}((1,1))$. On a $\mathrm{Hom}_{F^\times \times G}(\pi_\psi^\Gamma, \phi \otimes \Pi_{\Phi_1,\Phi_2}) \simeq \mathrm{Hom}_{F^\times \times T}((\pi_\psi^\Gamma)_N, \phi \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_2) \simeq S^\star(F^\times \times F^\times)^{\phi^{-1}|\cdot|_F^{-3} \otimes \Phi_1^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-2} \otimes \Phi_2^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-1}} \overset{\text{Théorème 4.62}}{=} S^\star((1,1))^{\phi^{-1}|\cdot|_F^{-3} \otimes \Phi_1^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-2} \otimes \Phi_2^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-1}|_{H_2}}$. Donc $m_{F^\times \times G}(\pi_\psi^\Gamma, \phi \otimes \Pi_{\Phi_1,\Phi_2}) \neq 0$ ssi $\phi^{-1}|\cdot|_F^{-3} \otimes \Phi_1^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-2} \otimes \Phi_2^{-1}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^{-1}|_{H_2} = 1$. I,e $\Phi_1 = \phi \circ \mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F$, $\Phi_2 = \phi \circ \mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^2$. De plus, $m_{F^\times \times G}(\pi_\psi^\Gamma, \phi \otimes \Pi_{\phi\circ\mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F, \phi\circ\mathrm{N}_{K/F}|\mathrm{N}_{K/F}(\cdot)|_F^2}) = 1$. □

4.3 Appendices

4.3.1 Appendice 1. Des lemmes en représentation locale

En vue d'application, nous citons et montrons des résultats en représentation locale. Soit G un groupe localement compact totalement discontinu, H un sous-groupe fermé de G, Δ_G (resp. Δ_H) les fonctions unimodulaires de G (resp. H)[cf.[BZ], Page 10] ; (π, V) (resp. (ρ, W)) une représentation lisse de G (resp. H), et $(\check{\pi}, \check{V})$ (resp. $(\check{\sigma}, \check{W})$) la représentation contragriénte de (π, V) (resp. (σ, W)).

Lemme 4.66.
$$(c - \mathrm{Ind}_H^G \sigma)^\vee \simeq \mathrm{Ind}_H^G \check{\sigma}\Delta_G/\Delta_H.$$

Démonstration. Ceci découle de [[BZ], Page 23] □

Lemme 4.67. *Supposons* $\Delta_G/\Delta_H = 1$. *Si* (σ, W) *est une représentation lisse admissible de* H*, alors*
$$\mathrm{Ind}_H^G \sigma \simeq (c - \mathrm{Ind}_H^G \check{\sigma})^\vee.$$
En particulier, si $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ *est admissible, alors* $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma)^\vee \simeq c - \mathrm{Ind}_H^G \check{\sigma}$.

Démonstration. C'est une consequence du lemme 4.66. □

Lemme 4.68. *(i) Si* H *est un sous-groupe ouvert de* G*, alors* $\Delta_H = \Delta_G|_H$.
(ii) Si H *est un sous-groupe distingué de* G*, et que* G/H *est abélien, alors* $\Delta_H = \Delta_G|_H$.

Démonstration. (1) Par hypothèse, on a une suite exacte
$$1 \longrightarrow S^\star(H \setminus G) \longrightarrow S^\star(G) \xrightarrow{p^\star_{H\setminus G}} S^\star(H) \longrightarrow 1.$$
Si μ_G est une mesure duale de Haar à gauche de G, alors $p^\star_{H\setminus G}(\mu_G)$ l'est aussi de H, d'où le résultat.
(2) Si μ_H est une mesure duale de Haar à gauche de H, et que $\mu_{G/H}$ est une mesure duale de Haar de G/H. Rappelons qu'on a un homomorphisme
$$S(G) \longrightarrow S(G/H);$$
$$f \longmapsto \overline{f},$$
où $\overline{f}(gH) := \int_H f(gh)\mu_H(h)$. Comme $\left(g^{-1}\,\mathrm{supp}(f)\right) \cap H$ et $\mathrm{supp}(f)H/H$ sont compacts, on voit que $\overline{f}$ est bien définie. On définit un élément $\mu_G \in S^\star(G)$ de la façons suivante :
$$\mu_G(f) := \int_{G/H} \overline{f}(\overline{g})d\mu_{G/H}(\overline{g}).$$
Si on définit une application $\rho(g_0) : G \longrightarrow G; g \longmapsto g_0g$, alors $\mu_G(\rho(g_0)f) = \int_{G/H} \overline{\rho(g_0)f}(\overline{g})d\mu_{G/H}(\overline{g})$ $= \int_{G/H} \overline{f}(\overline{g_0}^{-1}\overline{g})d\mu_{G/H}(\overline{g}) = \mu_G(f)$, i.e. μ_G est une mesure duale de Haar à gauche du groupe G. Si $\delta(g) : G \longrightarrow G; g' \longmapsto g'g^{-1}$, alors par définition[cf.[BZ]], $\delta(g)\mu_G = \Delta(g)\mu_G$. En particulier, pour $h_0 \in H$, $\overline{\delta(h_0^{-1})f}(\overline{g}) = \int_H f(ghh_0)d\mu_H(h) = \Delta_H(h_0)\overline{f}(\overline{g})$. Il en résulte que $\left(\delta(h_0)\mu_G\right)(f) = \mu_G\left(\delta(h_0^{-1})f\right) = \int_{G/H} \overline{\delta(h_0^{-1})f}(\overline{g})d\mu_{G/H}(\overline{g})$ $= \int_{G/H} \Delta_H(h_0)\overline{f}(\overline{g})d\mu_{G/H}(\overline{g}) = \Delta_H(h_0)\mu_G(f)$, d'où le résultat. □

Lemme 4.69. *Si* $\pi|_H$ *est une représentation lisse admissible du groupe* H*, alors* $(\pi|_H)^\vee \simeq \check{\pi}|_H$.

Démonstration. Par hypothèse, π est aussi une représentation lisse admissible de G, et on a des homomorphismes canoniques
$$\check{\pi}|_H \hookrightarrow (\pi|_H)^\vee \qquad \cdots(1)$$
et
$$\pi|_H \hookrightarrow (\check{\pi}|_H)^\vee \qquad \cdots(2).$$
Par (1), on sait que $\check{\pi}|_H$ est aussi une représentation lisse admissible de H.
Par (2), on a
$$\check{\pi}|_H \simeq (\check{\pi}|_H)^{\vee\vee} \twoheadrightarrow (\pi|_H)^\vee,$$
donc on trouve le résultat. □

Théorème 4.70 (BZ)**.**
$$\mathrm{Hom}_G(c - \mathrm{Ind}_H^G \rho, \check{\pi}) \simeq \mathrm{Hom}_H(\frac{\Delta_G}{\Delta_H}\rho, (\pi|_H)^\vee).$$

Démonstration. Ceci découle de [[BZ], Page 23-24, Proposition]. □

Proposition 4.71. *Conservons les hypothèses dans le Lemme 4.68 et le Lemme 4.69. On a*

$$\mathrm{Hom}_G(c-\mathrm{Ind}_H^G\rho,\pi)\simeq \mathrm{Hom}_H(\rho,\pi|_H).$$

Démonstration. Ceci est une conséquence du Théorème 4.70. □

Proposition 4.72. *Si G_1 est un sous-groupe de G tel que*

$$H\cap G_1\backslash G_1 \xrightarrow{e} H\backslash G$$

est une bijection, alors

$$\mathrm{Res}_{G_1}^G(c-\mathrm{Ind}_H^G\rho)\simeq c-\mathrm{Ind}_{H\cap G_1}^{G_1}(\mathrm{Res}_{H\cap G_1}^H\rho).$$

Démonstration. (0) Bijection=Homéomorphisme : e est continue et bijective, il reste à vérifier ce qui est fermée. Soit $\overline{P}$ un ensemble fermé de $H\cap G_1\setminus G_1$. On note P l'image inverse de $\overline{P}$ dans G_1 par $G_1\longrightarrow H_1\cap G_1\setminus G_1$. Ce qui résulte que $e(\overline{P})=H\cdot P$ est un ensemble fermé de G, et $\left(H\setminus H\cdot P\right)^c=H\setminus(H\cdot P)^c$. Donc $H\setminus H\cdot P$ est aussi fermé dans $H\setminus G$, d'où le résultat.
(1) Rappelons la définition :
$c-\mathrm{Ind}_H^G(W)=\{f:G\longrightarrow W|$
  (a) $f(hg)=\rho(h)f(g)$ pour $g\in G,h\in H$,
  (b) il existe un sous-groupe ouvert compact K de G(dépendant de f) tel que $f(gk)=f(g)$ pour $g\in G,k\in K$,
  (c) il existe une partie compact K_f de G tel que $supp(f)\subset HK_f\}$.
(2) Vectors K_1-invariants (i). Soit K_1 un sous-groupe ouvert compact de G_1 et soit Ω un système de représentants des doubles classes $H\cap G_1\backslash G_1/K_1$. Posons $K_{1_{g_1}}=H\cap G_1\cap g_1K_1g_1^{-1}$ pour $g_1\in\Omega$. On sait que [cf. [Rena], Page 83, lemme]

$$(c-\mathrm{Ind}_{H\cap G_1}^{G_1}\rho)^{K_1}\overset{i}{\simeq}\{f:\Omega\longrightarrow W|f(g_1)\in W^{K_{1_{g_1}}}\text{ pour tout } g_1\in\Omega \text{ et } f \text{ ait un support fini }\},$$

où i est la restriction des fonctions de $c-\mathrm{Ind}_{H\cap G_1}^{G_1}W$ à Ω.
(2) Vectors K_1-invariants (ii). Maintenant, on considère $\left(\mathrm{Res}_{G_1}^G\,c-\mathrm{Ind}_H^G W\right)^{K_1}$. Par hypothèse, on a

$$H_1\setminus G_1/K_1\simeq H\setminus G/K_1.$$

Reprenons Ω comme le système de représentants des doubles classes $H\setminus G/K_1$ et $K_{1_{g_1}}=H\cap g_1K_1g_1^{-1}=(H\cap G_1)\cap g_1K_1g_1^{-1}$ pour $g_1\in\Omega$. On considère la restriction des fonctions de $(c-\mathrm{Ind}_H^G W)^{K_1}$ à Ω.
(a) Toute fonction f dans $(c-\mathrm{Ind}_H^G W)^{K_1}$, vérifie :

$$f(hg_1k_1)=\rho(h)f(g_1)\text{ pour } h\in H,g_1\in\Omega,k_1\in K_1.$$

Il en résulte que la restriction de f à Ω détermine bien f.
(b) Soient $g_1\in\Omega$, $h\in K_{1_{g_1}}=H\cap g_1K_1g_1^{-1}$, $f\in(c-\mathrm{Ind}_H^G W)^{K_1}$, on a

$$\rho(h)f(g_1)=f(hg_1)=f(g_1g_1^{-1}hg_1)=f(g_1),$$

donc $f(g_1)$ appartient à $W^{K_{1_{g_1}}}$.
(c) Nous affirmons que toute fonction f sur Ω de support fini à valeurs dans W vérifiant $f(g)\in W^{K_{1_g}}$ pour $g\in\Omega$, peut se relever en une fonction de $(c-\mathrm{Ind}_H^G W)^{K_1}$. Il reste à montrer que $f\in c-\mathrm{Ind}_H^G W$.
  (i) D'abords, le composé de les applications $G_1\longrightarrow G_1/H_1\simeq G/H$ est continu et ouvert, donc pour un sous-groupe ouvert compact C (resp. C_1) de G (resp. G_1), et $g\in G_1$, on a les égalités

$$HgC=HgC^{(1)},$$

et

$$HgC^{(0)}=HgC_1.$$

pour un voisinage ouvert compact $C^{(1)}$ de l'élément 1_{G_1} dans G_1 et un voisinage ouvert compact $C^{(0)}$ de l'élément 1_G dans G.

(ii) Soit $g \in \Omega$. Si $HgK_1 = HgE_g$ pour un voisinage ouvert compact E_g de l'élément 1_G dans G. On suppose que $K_1 \subset E \cap G_1$ pour un sous-groupe ouvert compact E de G. Comme $HgE \supset HgE_g$, on suppose que $E_g \subset E$. On note

$$\cap_{g\in\Omega} E_g = E_\Omega,$$

qui est un ensemble compact de G. On a l'égalité

$$E \setminus E_\Omega = \cup_{g\in\Omega}(E \setminus E_g).$$

Comme $E \setminus E_\Omega$ est compact, il existe un ensemble $\{g^{(1)}, \cdots, g^{(n)}\}$ dans G, tels que $E \setminus E_\Omega = \cup_{i=1}^n E \setminus E_{g^{(i)}}$, d'où $E_\Omega = \cap_{i=1}^n E_{g^{(i)}}$ est un ensemble ouvert compact. On suppose que E_Ω contient un sous-groupe ouvert compact E_0 de G.

Supposons que $\mathrm{supp}(f) \cap \Omega = \{g_1, \cdots, g_n\}$. On prend un sous-groupe ouvert compact F_0 de G tel que

$$F_0 \subset E_0$$

et

$$F_0 \cap G_1 = F_0^{(1)} \subseteq K_1.$$

(iii) Par définition, $f(g_i) = v_{g_i} \in W^{K_{1_{g_i}}}$. On prend des sous-groupes ouverts compacts F_i de G tels que

$$v_{g_i} \in W^{F_{i_{g_i}}} \tag{52}$$

où $F_{i_{g_i}} = g_i F_i g_i^{-1} \cap H$, et

$$F_i \subseteq F_0.$$

Supposons que

$$Hg_i(F_i \cap G_1) \supseteq Hg_i L_i,$$

pour des sous-groupes ouverts compacts L_i de G satisfaisant à $L_i \subseteq F_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

On définit un sous-groupe ouvert compact de G de la façons suivante

$$K = \cap_{i=1}^n L_i.$$

Donc on a

$$Hg_i K = Hg_i K_i^{(1)} \subseteq Hg_i L_i \subseteq Hg_i(F_i \cap G_1).$$

On suppose que $K_i^{(1)} \subseteq F_i \cap G_1$. Si $k \in K$, on a

$$k = g_i^{-1} h_i g_i l_i$$

pour $h_i \in H \cap g_i F_i g_i^{-1} = F_{i_{g_i}}$, et $l_i \in K_i^{(1)} \subseteq F_i \cap G_1 \subseteq F_0 \cap G_1$.

Donc

$$\begin{aligned} f(g_i k) &= f(g_i g_i^{-1} h_i g_i l_i) = f(h_i g_i l_i) = f(h_i g_i) \\ &= \rho(h_i) f(g_i) = \rho(h_i) v_{g_i} \overset{\text{l'égalité (52)}}{=} v_{g_i} = f(g_i). \end{aligned}$$

(iv) On prend

$$K_0 = \cap_{k_1 \in K_1} k_1^{-1} K k_1.$$

Comme $K_1 K \subseteq E$, par la démonstration du point $(c)(ii)$, on voit que K_0 est un sous-groupe ouvert compact de G et $K_0 K_1 = K_1 K_0$.

D'abords, pour $k_1 \in K_1$, $k_0 \in K_0$, on a $k_1 k_0 = k_1' k_0'$ pour $k_0' \in K_0, k_1' \in K_1$. On trouve

$$f(g_i k_1 k_0) = f(g_i k_0' k_1') = f(g_i k_0') = f(g_i).$$

Si $g \in \Omega \setminus \{g_1, \cdots, g_n\}$, on a

$$HgK_1 \subseteq HgK_1K_0 \subseteq HgK_0K_1 \subseteq HgE_g = HgK_1.$$

Donc, on a aussi

$$0 = f(g) = f(gk_0) \text{ pour } g \in HgK_1 \text{ et } k_0 \in K_0.$$

Finalement, on a affirmé l'assertion !

(3) L'isomorphisme. On définit

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{G_1}^G (c - \mathrm{Ind}_H^G W) &\xrightarrow{\gamma} c - \mathrm{Ind}_{H\cap G_1}^{G_1} W, \\ f &\longmapsto f|_{G_1}. \end{aligned}$$

Si $\mathrm{supp}(f) \subseteq HK$ pour un ensemble compact K de G ; comme $H_1\backslash G_1 \simeq H\backslash G$, on vérifie que $\mathrm{supp}(f|_{G_1}) \subseteq H_1 K^1$ pour un ensemble compact K^1 de G_1. Donc γ est bien définie, et on voit asiément ce qui est aussi injective.

D'autre part, par le point (2) ci-dessus, on a vu que, pour chaque sous-groupe ouvert compact K_1 de G_1, γ induit une bijection entre $(\mathrm{Res}_{G_1}^G (c - \mathrm{Ind}_H^G W))^{K_1}$ et $(c - \mathrm{Ind}_{H\cap G_1}^{G_1} W)^{K_1}$, d'où le résultat. □

4.3.2 Appendice 2. Des formules

"l'application $p : H \longrightarrow GO(M)$ est définie par $H \times M \longrightarrow M; (h, m) \longmapsto hm\overline{h}^t$"

(i) $GL_2(E) \longrightarrow \overline{H}; h \longmapsto (h, \overline{h})$. Soit $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(E)$, $h \cdot (e_1, e_2) := (e_1, e_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ae_1 + ce_2; be_1 + de_2)$.

(ii) $(h, 1) \cdot (\alpha e_1 \otimes e_1 + \beta e_1 \otimes e_2 + \gamma e_2 \otimes e_1 + \delta e_2 \otimes e_2) = (a\alpha + b\gamma)e_1 \otimes e_1 + (a\beta + b\delta)e_1 \otimes e_2 + (c\alpha + d\gamma)e_2 \otimes e_1 + (c\beta + d\delta)e_2 \otimes e_2 \Longleftrightarrow (h \times 1)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

(iii) $(1, \overline{h}) \cdot (\alpha e_1 \otimes e_1 + \beta e_1 \otimes e_2 + \gamma e_2 \otimes e_1 + \delta e_2 \otimes e_2) = (\alpha\overline{a} + \beta\overline{b})e_1 \otimes e_1 + (\beta\overline{d} + \alpha\overline{c})e_1 \otimes e_2 + (\gamma\overline{a} + \delta\overline{b})e_2 \otimes e_1 + (\delta\overline{d} + \gamma\overline{c})e_2 \otimes e_2 \Longleftrightarrow (1, \overline{h}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} & \beta\overline{d} + \alpha\overline{c} \\ \gamma\overline{a} + \delta\overline{b} & \delta\overline{d} + \gamma\overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\overline{h}^t$.

Les formules (13)—(19).

Nous expliquons ensuite comment on obtient les formules (13)—(19).
D'abord, on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G^+ \times GO(M) \xrightarrow{\lambda} F^{\times +} \longrightarrow 1,$$

où $\lambda((g, h)) := \lambda(g)\lambda(h)$.
Cette suite est scindée sous une section $d : F^{\times +} \longrightarrow G^+ \times GO(M); t \longmapsto (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1)$.
Alors $c - \mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G^+ \times GO(M)} \rho_\psi = \{F : G^+ \times GO(M) \longrightarrow \mathcal{S}(M) | F(\alpha A) = \rho_\psi(\alpha)F(A)$ pour $\alpha \in \Gamma$, $A \in G^+ \times GO(M)$ et $\mathrm{supp}(F) \subset \Gamma K_F$ pour une partie compact K_F de $G^+ \times GO(M)\} \overset{i}{\simeq} \mathcal{S}(M \times F^{\times +})$.
D'où $i : F \longrightarrow i(F)$, $i(F)(m, u) := F([d(u), 1])(m)$ pour $d(u) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
(13) $h \in H$, $\lambda(h) = \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))$, on note $e = \det h$.

$$\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}([1, h])F([d(u), 1])(m) = F([1, h\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}] \cdot [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda(h)^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}] \cdot [d(u\lambda(h)), 1])(m)$$

$$= |\lambda(h)|_F F([d(u\lambda(h)), 1])(h^t m\overline{h})$$

$$\Rightarrow \widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}([1, h])f(m, u) = |\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))|_F f(h^t m\overline{h}, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))u).$$

(14)

$$\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}([1, \sigma])F([d(u), 1])(m)$$
$$= F([d(u), \sigma])(m)$$
$$= F([d(u), 1])(m^\sigma)$$
$$\Longrightarrow \widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}([1, \sigma])f(m, u) = f(m^\sigma, u).$$

(15)

$$\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}([1, \overline{t}])F([d(u), 1])(m)$$
$$= F([d(u), \overline{t}])(m) = F([d(t^2), t][d(t^2u), 1])(m)$$
$$= |t|_F^2 F([d(t^2u), 1])(tm)$$
$$\Longrightarrow \widetilde{\pi_\psi^{\Gamma,+}}([1, \overline{t}])F(m, u) = |t|_F^2 f(tm, t^2u).$$

(16)

$$\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1])F([d(u), 1])(m)$$
$$= F([\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} d(u), 1])(m)$$
$$= \chi_F(a)|a|_F^2 F([d(u), 1])(am)$$

$$\Longrightarrow \widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1])f(m,u) = \chi_F(a)|a|_F^2 f(am,u).$$

(17)

$$\widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1])F([d(u),1])(m)$$

$$= F([\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & u \end{pmatrix}, 1])(m)$$

$$= F([\begin{pmatrix} 1 & bu^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1] \cdot [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, 1])(m)$$

$$= \psi_F(bu^{-1}\det(m))F([d(u),1])(m)$$

$$\Longrightarrow \widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1])f((m,u)) = \psi_F(bu^{-1}\det(m))f(m,u).$$

(18)

$$\widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1])F([d(u),1])(m)$$

$$= F([d(ut),1])(m)$$

$$\Longrightarrow \widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1])f((m,u)) = f(m,tu).$$

(19)

$$\widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1])F([d(u),1])(m)$$

$$= \widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, 1] \cdot [\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1] \cdot [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, 1])(m)$$

$$= \chi_F(u^{-1})|u^{-1}|_F^2(\widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1])F)([d(u),1])(u^{-1}m)$$

$$= \chi_F(u^{-1})|u^{-1}|_F^2\gamma(q)\int_M F([d(u),1])(n)\psi_F(q(u^{-1}m,n))dn$$

$$\stackrel{?}{=} \gamma(u^{-1}q)\int_M F([d(u),1])(n)\psi_F(u^{-1}q(m,n))dn$$

$$\Longrightarrow \widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}([\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1])f(m,u) = \gamma(u^{-1}q)\int_M f(n,u)\psi_F(u^{-1}q(m,n))|u^{-1}|_F^2 dn.$$

$\stackrel{?}{=}$ Utilisons le résultats dans [[JL], Page 4] :

$$\gamma(q) = \gamma = \chi_F(a)\frac{\int_{U_F}\chi_F^{-1}(x)\psi_F(xa^{-1})dx}{|\int_{U_F}\chi_F^{-1}(x)\psi_F(xa^{-1})dx|}$$

$$\overset{\text{par définition, replacez } a \text{ par } ua \text{ et } \psi_F \text{ par } \psi_F^u}{\Longrightarrow} \gamma(uq) = \chi_F(au)\frac{\int_{U_F}\chi_F^{-1}(x)\psi_F(xa^{-1})dx}{|\int_{U_F}\chi_F^{-1}(x)\psi_F(xa^{-1})dx|}.$$

$$= \chi_F(u)\gamma(q)$$

Grâce à l'isomorphisme $\mathcal{S}(M \times F^{\times}) \simeq \mathcal{S}(M \times F^{\times}); f(m,u) \overset{l_V}{\longmapsto} f(m,u^{-1})$, on obtient les formules (13)—(19). C'est-à-dire que :

$$l_V(\widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}(g)f)(m,u) = \pi_{\psi}^{\Gamma,+}(g)l_V(f)(m,u) \text{ pour } g \in G^+ \times GO(M).$$

(13) $g = (h,1)$.

$$l_V(\widetilde{\pi_{\psi}^{\Gamma,+}}(1,h)f)(m,u) = (\widetilde{\pi}_{\psi}^{\Gamma,+}(h,1)f)(m,u^{-1}) = |\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))|_F f(h^t m\overline{h}, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))u^{-1}).$$

$$\pi_{\psi}^{\Gamma,+}(g)l_V(f)(m,u) = |\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))|_F l_V(f)(h^t m\overline{h}, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h)^{-1})u) = |\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))|_F f(h^t m\overline{h}, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))u^{-1}).$$

(14) $g = (1, \sigma)$.

$$l_V(\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(1,\sigma)f)(m,u) = f(m^\sigma, u^{-1}).$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,\sigma))l_V(f)(m,u) = l_V(f)(m^\sigma, u) = f(m^\sigma, u^{-1}).$$

(15) $g = (1, \bar{t})$.

$$l_V\Big(\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}((1,\bar{t}))f\Big)(m,u) = |t|_F^2 f(tm, t^2u^{-1}).$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}((1,\bar{t}))l_V(f)(m,u) = |t|_F^2 l_V(f)(tm, t^2u) = |t|_F^2 f(tm, t^{-2}u^{-1}).$$

(16) $g = (\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, 1)$.

$$l_V(\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(g)f)(m,u) = \chi_F(a)|a|_F^2 f(am, u^{-1}).$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}(g)l_V(f)(m,u) = \chi_F(a)|a|_F^2 l_V(f)(am,u) = \chi_F(a)|a|_F^2 f(am, u^{-1}).$$

(17) $g = (\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1)$.

$$l_V(\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(g)f)(m,u) = (\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(g)f)(m,u^{-1}) = \psi_F(bu\det(m))f(m,u^{-1}).$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}(g)l_V(f)(m,u) = \psi_F(bu\det(m))l_V(f)(m,u) = \psi_F(bu\det(m))f(m,u^{-1}).$$

(18) $g = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, 1)$.

$$l_V(\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(g)f)(m,u) = \widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(g)f(m,u^{-1}) = f(m, tu^{-1}).$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}(g)l_V(f)(m,u) = l_V(f)(m, t^{-1}u) = f(m, tu^{-1}).$$

(19) $g = (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1)$.

$$l_V(\widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(g)f)(m,u) = \widetilde{\pi}_\psi^{\Gamma,+}(g)f(m,u^{-1}) = \gamma(uq)\int_M f(n,u^{-1})\psi_F(uq(m,n))|u|_F^2 dn$$

$$\pi_\psi^{\Gamma,+}(g)l_V(f)(m,u) = \gamma(uq)\int_M l_V(f)(n,u)\psi_F(uq(m,n))|u|_F^2 dn.$$

$$= \gamma(uq)\int_M f(m,u^{-1})\psi_F(uq(m,n))|u|_F^2 dn.$$

La formule (6).

On sait que [cf.[Co]]

$$\widetilde{R_\psi}(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix})\widetilde{f}((x,y,\alpha,u)) = |t|_F^{-1/2}\widetilde{f}(x, ty, \alpha, t^{-1}u). \tag{53}$$

Par passager à transformée de Fourier $\widetilde{f}$, on obtient la formule (53) à l'aider de la formule (6) :

$$\widetilde{R_\psi}(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix})\widetilde{f}((x,y,\alpha,u)) = \int_F (R_\psi f)(\begin{pmatrix} v & \overline{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, u)\psi(vuy)|u|_F^{1/2} dv$$

$$= \int_F |t|^{-1} f(\begin{pmatrix} v & \overline{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, t^{-1}u)\psi(vuy)|u|_F^{1/2} dv$$

$$= |t|_F^{-1/2}\int_F f(\begin{pmatrix} v & \overline{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, t^{-1}u)\psi(v(t^{-1}u)(yt))|t^{-1}u|_F^{1/2} dv$$

$$= |t|_F^{-1/2}\widetilde{f}(x, ty, b, t^{-1}u),$$

donc on trouve le résultat.

Références

[Bar1] L.BARTHEL, *Local Howe correspondence for groups of similitudes*, J. Reine Angew. Math. 414 (1991), 207-220.

[Bar2] L.BARTHEL, *Thèse.*

[B1] J. BERNSTEIN, *rédigé par P. Deligne, Le centre de Bernstein*, in "Représentations des groupe réductifs sur un corps local, Travaux en cours," Hermann, Paris, 1984.

[B2] J. BERNSTEIN, *P-invariant distributions on GL(n) and the classification of unitary representations of GL(n) (non-Archimedean case)*, Lecture Notes in Math 943, Springer-Verlag, 50-102 (1984).

[B3] I.N. BERNSHTEIN, *All reductive p-adic groups are of type I*, Functional Anal. Appli 8 (1974) 91-93.

[BZ] I.N. BERNSTEIN, A.V.ZELEVINSKY, *Representations of the group* $GL(n,F)$ *where* F *is a non-archimedean local field*, Russ.Math.Surv.31(3). 1-68(1976).

[BH] C.J.BUSHNELL, G.HENNIART, *The local langlands conjecture for* $GL(2)$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 335. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Co] M.COGNET, *Represéntation de Weil et changement de base quadratique*, Bull. Soc. Math. France 113 (1985) no.4 403-457.

[GK] S.GELBART, A.KNAPP, *L-indistinguishability and R-groups for special linear groups*, Adv, Math. 43(1982), 101-121.

[GL] P.GÉRARDIN, J-P.LABESSE, *The solution of a base change for* $GL(2)$, In Automorphic forms, representations et L-functions, Proc, Symp, Pure Maths, Vol. 33, Part 2, Amer.Math.Soc.Providence,R.I, 1977, pp. 115-133.

[HM] M. HANZER, G. MUIČ, *Parabolic induction and Jacquet functors for metaplectic groups*, J.Algebra 323 (2010), 241–260.

[HK] M.HARRIS, S.S.KUDLA, *Arithmetic automorphic forms for the non-holomorphic discrete series of GSp(2)*, Duke Math. J. 66 (1992), 59-121.

[HST] M.HARRIS, D.SOUDRY, R.TAYLOR, *l-adic representations associated to modular forms over imaginary quadratic fields I : lifting to* $Gsp_4(\mathbb{Q})$, Invent. Math. 112(1993), 377-411.

[H] G. HENNIART, *Représentations des groupes réductifs p-adiques et de leurs sous-groupes distingués cocompacts*, J. Algebra 236 :1 (2001).

[HS] G.HOCHSCHILD, J-P.SERRE, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. 74(1953), 110-134.

[Howe1] R. HOWE, *θ-series and invariant theory, in automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII,AMS 1979, 275-286.

[Howe2] R. HOWE, *Transcending classical invariant theory*, J. Amer. Math. Soc. 2(3), 535-552 (1984).

[JL] H.JACQUET, R.P.LANGLANDS, *Automorphic forms on* $GL(2)$, Lecture notes in Mathematics, 114. Springer-Verlag, New York, 1970.

[Kazh] D. KAZHDAN, *The minimal representation of D4*, Prog.Math. 92(1990), 125-158.

[KMRT] M-A. KNUS, A. A. MERKURJEV, M. ROST, and J-P. TIGNOL, *The Book of Involutions*, Number 44 in American Mathematical Society Colloquium Publications. AmericanMathematical Society, Providence, R.I., 1998. With a preface in French by J. Tits.

[Kud1] S.KUDLA, *On the local theta correspondence*, Invent. Math. 83 (1986), 229-255.

[Kud2] S. KUDLA, *Notes on the local theta correspondence(lectures at the European School in Group Theory)*, preprint, available at http ://www.math.utotonto.ca/ skudla/castle.pdf, 1996.

[L] R.P.LANGLANDS, *Base chane for* GL_2, Annals of Math. Studies 96, Princeton Univ. Press 1980.

[MR] Z.Y.MAO, S.RALLIS, *Cubic base change for* GL(2), Canad. J. Math. 52 (2000), no. 1, 172-196.

[Mi] A. MINGUEZ, *Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.41, f.5, (2008), 715-739.

[MVW] C.MOEGLIN, M.F.VIGNERAS, J-L. WALDSPURGER, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Math. Vol 1921, Springer-Verlag, New York, 1987.

[Mo1] C.C. MOORE, *Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups, I*, Tran. Amer. Math. Soc., vol. 113(1964), pp. 40-63.

[Mo2] C.C. MOORE, *Group extensions of p-adic and adelic linear groups*, Publ. IHES 35 (1968), 5670.

[N] J.NEUKIRCH, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol.322. Springer Berlin (1999).

[P] P.PERRIN, *Représentations de Schrödinger. Indice de Maslov et groupe métaplectique*, in Non commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Proceedings Marseille-Luminy 1980, Springer-Verlag LN 880, Berlin, Heidelberg.

[PS] PIATESHI-SHAPIRO,I.I, *Special automorphic forms on* $PGSp_4$, Arithmetic and Geometry, Vol.I, 309-325, Progr. Math,35, Birhäuser Boston, Bostonn, MA, 1983.

[PR] D.PRASAD, G.RAGUNATHAN, *Central extensions of rational points of groups over fields*, Ann. of Math. 119(1984) 143-201.

[R] S.RALLIS, *On the Howe duality conjecture*, Compositio Math. 51 (1984) 333-399.

[Rao] R.R.RAO, *On some explicit formulas in the theory of the Weil representation*, Pacific J. Math. 157 (1993), 335-371.

[Rena] D.RENARD, *Représentations des groupes réductifs p-adiques*, Cours Spécialisés 17, Société Math. de France 2010.

[R1] B.ROBERTS, *The theta correspondence for similitudes*, Israel J. of Math. 94 (1996), 285-317.

[R2] B.ROBERTS, *The nonarchimedean theta correspondence for* $GSp(2)$ *and* $GO(4)$, Trans. AMS 351 (1999), 781-811.

[Sc] W.SCHARLAU, *Quadratic and Hermitiens forms*, Springer-Verlag Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 270 [1985].

[Sh] H.SHIMIZU, *Theta-series and automorphic forms on* GL_2, J. Math.Soc.Japan 24 (1972), 638-683.

[S] A.J.SILBERGER, *Isogeny restriction of iireductible admissible representation are finite direct sums of irreducible admissible representations*, Proc. Amer. Math. Soc. 79(1979), 378-397.

[Wa1] J-L. WALDSPURGER, *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique* $p \neq 2$, in Israel Math. Conf. Proc. vol.2 (1990), 267-324.

[Wa2] J-L. WALDSPURGER, *Correspondance de Shimura*, J. Math. Pures Appl.(9) 59 (1980), no.1, 1-132.

[W] A.WEIL, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Mathematica 111 (1964), 143-211.

5 The decomposition of certain Weil representations and base change

5.1 Introduction

Let F be a finite field of odd order q. Let $GSp_8(F)$ be the similitude symplectic group over F of degree 8. Let (ρ, V) be the Weil representation of the group $GSp_8(F)$. Suppose that E/F (resp. K/F) is a Galois field extension of degree 2 (resp. 3).

Take A to be an étale algebra over F of degree 3, so A is isomorphic to one of the algebras $F \times F \times F, F \times E, K$. We shall construct a homomorphism from $GL_2(A)$ to $GSp_8(F)$. This map leads us to define a representation $\pi := \rho|_{GL_2(A)}$. The sections 2 – 4 are devoted to determining the decomposition of this representation. The results are the following :

For the group $G = GL_2(F)$, let us denote by $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$; let χ_1, χ_2 be two characters of $F^\times$, they provide one character $\chi_1 \otimes \chi_2$ of B which is defined by $\chi_1 \otimes \chi_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \chi_1(a)\chi_2(d)$. We write $\pi_{\chi_1,\chi_2} = \mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2$; 1_G as the trivial representation of G ; St_G as the Steinberg representation of G ; π_θ as the irreducible cuspidal representation of G associated to the regular character θ of $E^\times$. If (π, V) is a representation of G and ψ is a character of $F^\times$, we define the representation $(\psi \cdot \pi, V)$ of G by setting $\psi \cdot \pi(g) = \psi(det\, g)\pi(g)$.

Theorem (1). *If $A = F \times F \times F$, $GL_2(A) = GL_2(F) \times GL_2(F) \times GL_2(F)$, then*

$$\pi = \bigoplus_{\chi_1 \neq \chi_2 \in \mathrm{Irr}(F^\times) \quad \mathrm{mod}\ \chi_1 \sim \chi_2^\omega} \left(\pi_{\chi_1,\chi_2} \otimes \pi_{\chi_1,\chi_2} \otimes \pi_{\chi_1,\chi_2}\right) \oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)} \left(\psi \cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi \cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi \cdot \mathrm{St}_G\right)$$

$$\oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)} \left(\psi \cdot 1_G \otimes \psi \cdot 1_G \otimes \psi \cdot 1_G\right) \oplus \bigoplus_{\theta \in \mathrm{Irr}(E^\times) - \mathrm{Irr}(F^\times), mod\, \theta \sim \theta^q} \left(\pi_\theta \otimes \pi_\theta \otimes \pi_\theta\right)$$

$$\oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)} \Big((\psi \cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi \cdot 1_G \otimes \psi \cdot 1_G) \oplus (\psi \cdot 1_G \otimes \psi \cdot \mathrm{St}_G \otimes \psi \cdot 1_G) \oplus (\psi \cdot 1_G \otimes \psi \cdot 1_G \otimes \psi \cdot \mathrm{St}_G)\Big).$$

Theorem (2). *If $A = F \times E$, $GL_2(A) = GL_2(F) \times GL_2(E)$, then*

$$\pi = \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times), \Psi \in \mathrm{Irr}(E^\times), \Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}} \left(\psi \cdot 1_G \otimes \Psi \cdot 1_H\right) \oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times), \Psi \in \mathrm{Irr}(E^\times), \Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}} \left(\psi \cdot \mathrm{St}_G \otimes \Psi \cdot \mathrm{St}_H\right)$$

$$\oplus \bigoplus_{\lambda \neq \sigma \in \mathrm{Irr}(F^\times), \Lambda \neq \Sigma \in \mathrm{Irr}(E^\times), \Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{E/F}, \Sigma = \sigma \circ \mathrm{N}_{E/F}} \left(\pi_{\lambda,\sigma} \otimes \Pi_{\Lambda,\Sigma}\right) \oplus \bigoplus_{\Lambda \in \mathrm{Irr}(E^\times), \Lambda \neq \Lambda^q} \pi_\Lambda \otimes \Pi_{\Lambda,\Lambda^q}$$

$$\oplus \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times), \Psi \in \mathrm{Irr}(E^\times), \Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}} \left(\psi \mathrm{St}_G \otimes \Psi \cdot 1_H\right).$$

Theorem (3). *If $A = K$, $GL_2(A) = GL_2(K)$, then*

$$\pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Irr}(GL_2(F))} \mathrm{Bc}_{K/F}(\sigma).$$

In order to obtain the above Theorem (3), we discuss the behavior of the Weil representation under base change ; this is done in the final section. We prove that in finite field case, the Weil representations are invariant under the operator of base change. This is presented as the following theorem :

Let X be a set on which there exists a σ-action, we denote by X_σ the set of σ-fixed points. Let $\mathbf{G}$ be a connected linear algebraic group over the field F with Frobenius map σ. We denote by : $\overline{F}$ one fixed algebraic closure of F, F_i the σ^i-fixed points of $\overline{F}$, $\mathbf{G}(F_i)$ the F_i-geometric points of $\mathbf{G}$ and $C(\mathbf{G}(F_i))$ the set of complex valued class functions of $\mathbf{G}(F_i)$.

Let m be a fixed natural number. Via the map $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F_m/F)$, we regard the Frobenius element σ as one generator for the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)$. Let us denote by $\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)$ the subset of semi-product group $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes$

$\mathbf{G}(F_m)$ which consists of elements (σ^i, g) for any $g \in \mathbf{G}(F_m)$. In the article [Gy], Gyoja constructs the norm map N_i which induces a bijection from the set of $\mathbf{G}(F_m)$-conjugacy classes of $\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)$ onto the set of conjugacy classes of $\mathbf{G}(F_m)_{\sigma^i} = \mathbf{G}(F_{(m,i)})$. Through this map, he defines the i-restriction map from $C(\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \mathbf{G}(F_m))$ to $C(\mathbf{G}(F_{(m,i)}))_\sigma$ such that $(i{-}res(f)) \circ \mathrm{N}_i = f|_{\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)}$ for any $f \in C(\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \mathbf{G}(F_m))$.

Let ψ be a non trivial character of F. We denote by $\psi_{F_i} = \psi \circ \mathrm{Tr}_{F_i/F}$. Let V be a finite dimensional symplectic vector space over F of dimension $2n$. Denote by $\mathbf{Sp}_V$(resp. $\mathbf{GSp}_V$) the symplectic (resp.the similitude symplectic) group scheme associated to V. Let $\Pi_{\psi_{F_i}}$(resp. Ξ_{F_i}) be the Weil representation of $\mathbf{Sp}_V(F_i)$(resp. $\mathbf{GSp}_V(F_i)$) for $1 \leq i \leq m$.

Theorem (4)**.** *There exists a unique representation $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$ (resp. $\widetilde{\Xi_{\psi_{F_m}}}$) of the group $\boldsymbol{Sp}_V(F_m) \rtimes \mathrm{Gal}(F_m/F)$ (resp. $\boldsymbol{GSp}_V(F_m) \rtimes \mathrm{Gal}(F_m/F)$) such that i-res($\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$)= $\Pi_{\psi_{F_{(m,i)}}}$ (resp. i-res($\widetilde{\Xi_{\psi_{F_m}}}$)= $\Xi_{\psi_{F_{(m,i)}}}$).*

The second section of this paper is devoted to giving the notations and recalling some well-known results about the Weil representation[cf. [Ge],[MVW], [Sh]], the representation of the group GL_2[cf. [A], [BH], [P-S]] and the lifting of the representations of GL_2[cf. [Shin]]. In the third and the fourth sections, we consider the étale algebras $A = F \times F \times F$ or $F \times E$. We adopt a method similar in [A] to decompose one reducible representation (In [A], Andrade considers the higher rank groups). In the fifth section, we discuss the case $A = K$ where we use a method similar to that of [Gan] to settle the case of a cuspidal representation. In the final section, we discuss the behavior of the Weil representation under base change. The main references for the lifting theory of finite groups are [Di], [DM], [Gy], [Shin].

5.2 Notation and Preliminaries

0. The following notations will be standard through the whole paragraph, they will be used repeatedly without recalling their meaning :

- F = a finite field with odd cardinality q ;
- ϕ = a fixed non trivial character of the additive group of F ;
- E = the Galois field extension of F of degree 2 ;
- K = the Galois field extension of F of degree 3 ;
- ϕ^a = the character of F, defined by $\phi^a(b) := \phi(ab)$ for $b \in F$, $a \in F^\times$;
- X_G = the set of all non trivial irreducible complex representations of an abelian group G ;
- $\mathrm{Rep}(G)$ = the category of complex representations of a finite group G ;
- $\mathrm{Irr}(G)$ = the class of all irreducible complex representations of a finite group G, up to isomorphism.

1. For later use, we recall some notations and properties about the Weil representation for GSp_{2n}. (cf. [Ge] and [MVW]).

Let V be a 2n-dimensional F-vector space, endowed with a non-degenerate symplectic form $\langle\ \rangle$. For each non trivial character ψ of the additive group F, we can associate the Weil representation (π_ψ, W_ψ) of the metaplectic group $Mp_{2n}(F)$ (see [MVW] chapter 2). The exact sequence

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow Mp_{2n}(F) \xrightarrow{p} Sp_{2n}(F) \longrightarrow 1$$

is splitting. Since the group $Sp_{2n}(F)$ is perfect, there exists one unique section morphism i from $Sp_{2n}(F)$ to $Mp_{2n}(F)$, such that $p \circ i = \mathrm{Id}_{Sp_{2n}}$. Via the map i, we could obtain the Weil representation $(\pi_\psi, Sp_{2n}(F), W_\psi)$. One can extend it as a representation of $GSp_{2n}(F)$. That is $\rho_\psi = \mathrm{Ind}_{Sp_{2n}(F)}^{GSp_{2n}(F)} \pi_\psi$; It is observed that ρ_ψ is independent on ψ (see [Ge] Theorem 2.15). Hence we could omit ψ, only write ρ briefly.

The study of the Weil representation often involves an explicit model on which the representation is realized. For later direct use, here we recall one natural model :

Let $V = V_+ \oplus V_-$ be a complete polarization for V, let $\{v_1, \ldots, v_n\}$ be a F-basis of V_+, and $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ be its dual basis in V_-. Every element $g \in GSp(V)$ can be written in the following form : $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ where $\alpha \in \mathrm{End}_F(V_+)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_F(V_-, V_+)$, $\gamma \in \mathrm{Hom}_F(V_+, V_-)$, $\delta \in \mathrm{End}_F(V_-)$. The group $GSp(V)$ is generated by the set $\{h(a), u(b), h'(t), \omega\}$ (see [A] page 163), where $h(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^\vee \end{pmatrix}$, $a^\vee$ is the contragredient of a ; $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ for a symmetric morphism $b \in \mathrm{Hom}_F(V_-, V_+)$; $h'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, t \in F^\times$; $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ with $\omega(v_i) = v_i'$, $\omega(v_i') = -v_i$. The Weil representation ρ of $GSp(V)$ can be realized in the space $W_- = \mathbb{C}^{V_- \times X_F}$. More precisely the action of $GSp(V)$ on W_- is determined by the following formulas (see [Sh] page 270) :

$$(\rho(h(a))F)(y, \psi) = \chi_q^+(det_{V_+} a)F(a^{\vee -1}y, \psi), \tag{54}$$

$$(\rho(u(b))F)(y, \psi) = \psi(\frac{1}{2}\langle by, y\rangle)F(y, \psi), \tag{55}$$

$$(\rho(\omega)F)(y, \psi) = g(\psi^{-\frac{1}{2}})^{-n} \sum_{z \in V_-} F(z, \psi)\psi(\langle z, \omega^{-1}(y)\rangle), \tag{56}$$

$$(\rho(h'(t))F)(y, \psi) = F(y, \psi^{t^{-1}}), \tag{57}$$

where $y \in V_-, \psi \in X_F, g(\psi) = \sum_{x \in F} \psi(x^2), x_q^+ =$ Legendre symbol $(\frac{}{\mathbb{F}_q})$.

2. We sum out some knowledge about the irreducible representations of the group $GL_2(F)$, and also of the Borel subgroup B of $GL_2(F)$. (see [BH] chapter 2 and [P-S])

We write $G = GL_2(F), B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$, $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\}$, $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$, $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\}$, $Z = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G\}$;

Proposition 5.1. *The following is a complete list of the isomorphism classes of the irreducible representations of G :*
(1) π_{χ_1,χ_2} where $\chi_1 \neq \chi_2$ are characters of $F^\times$;
(2) $\psi \cdot 1_G$ where ψ ranges over the characters of $F^\times$;
(3) $\psi \cdot \mathrm{St}_G$ where ψ ranges over the characters of $F^\times$;
(4) π_θ where θ ranges over the regular characters of $E^\times$.
The classes in the list are all distinct except that in (1) $\pi_{\chi_1,\chi_2} \simeq \pi_{\chi_2,\chi_1}$, and in (4) $\pi_\theta \simeq \pi_{\theta^q}$.

Now we investigate the behavior of the representations of the group B : let σ_{χ_1,χ_2} be the character of B, which is defined by $\sigma_{\chi_1,\chi_2}(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \chi_1(a)\chi_2(d)$. Let σ be the unique irreducible representation of M of dimension > 1 and ψ be a character of $F^\times$. Attached to σ and ψ, there is an irreducible representation $\psi \otimes \sigma$ of B, where $(\psi \otimes \sigma)(zm) := \psi(z)\sigma(m)$ for $z \in Z, m \in M$.

Proposition 5.2. *The following is a complete list of the isomorphism classes of irreducible representations of B :*
(1) σ_{χ_1,χ_2} for any pair (χ_1, χ_2) of characters of $F^\times$;
(2) $\psi \otimes \sigma$ for any character ψ of Z.

For convenience use, we describe the decomposition of each irreducible representation of G when it restricts to the subgroup B :

Proposition 5.3. *(1)* $\mathrm{Res}_B^G(\psi \cdot 1_G) = \sigma_{\psi,\psi}$.
(2) $\mathrm{Res}_B^G(\psi \cdot \mathrm{St}_G) = \sigma_{\psi,\psi} \oplus \psi^2 \otimes \sigma$.
(3) $\mathrm{Res}_B^G(\pi_{\chi_1,\chi_2}) = \sigma_{\chi_1,\chi_2} \oplus \sigma_{\chi_2,\chi_1} \oplus \chi_1\chi_2 \otimes \sigma$.
(4) $\mathrm{Res}_B^G(\pi_\theta) = \theta|_{F^\times} \otimes \sigma$.

Proof. See the table in [A] page 87. □

3. Let L be the Galois field extension of F of degree n, one knows that that there exists the Base change operator $\mathrm{Bc}_{L/F} : \mathrm{Irr}(GL_2(F)) \longrightarrow \mathrm{Irr}(GL_2(L))$, which involves some equalities about the characters and one may see [Shin] for more details. For later direct application, we describe the explicit behavior of this operator in terms of the classification of the irreducible representations of the group GL_2 in the case $n = 2, 3$.

Proposition 5.4. *(1) If* $[L : F] = 2$,
$(i)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\pi_{\xi_1,\xi_2}) = \Pi_{\Xi_1,\Xi_2}$ *where* $\Xi_i = \xi_i \circ \mathrm{N}_{L/F}$ *as characters of* $L^\times$, *for* $i = 1, 2$;
$(ii)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\psi \cdot 1_{GL_2(F)}) = \Psi \cdot 1_{GL_2(L)}$ *where* $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{L/F}$ *as characters of* $L^\times$;
$(iii)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\psi \cdot \mathrm{St}_{GL_2(F)}) = \Psi \cdot \mathrm{St}_{GL_2(L)}$ *where* $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{L/F}$ *as characters of* $L^\times$;
$(iv)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\pi_\theta) = \Pi_{\theta,\theta^q}$.
(2)If $[L : F] = 3$,
$(i)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\pi_{\xi_1,\xi_2}) = \Pi_{\Xi_1,\Xi_2}$ *where* $\Xi_i = \xi_i \circ \mathrm{N}_{L/F}$ *as characters of* $L^\times$,*for* $i = 1, 2$;
$(ii)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\psi \cdot 1_{GL_2(F)}) = \Psi \cdot 1_{GL_2(L)}$ *where* $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{L/F}$ *as characters of* $L^\times$;
$(iii)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\psi \cdot \mathrm{St}_{GL_2(F)}) = \Psi \cdot \mathrm{St}_{GL_2(L)}$ *where* $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{L/F}$ *as characters of* $L^\times$;
$(iv)\,\mathrm{Bc}_{L/F}(\pi_\theta) = \Pi_\Theta$ *where* $[F_1 : F] = 2, [L_1 : L] = 2, L_1 \supseteq F_1, \theta \in \mathrm{Irr}(F_1^\times) - \mathrm{Irr}(F^\times), \Theta \in \mathrm{Irr}(L_1^\times) - \mathrm{Irr}(L^\times)$, *and* $\Theta = \theta \circ \mathrm{N}_{L_1/F_1}$ *as characters of* $L_1^\times$.

Proof. See [Shin] Section 4, page 410—414. □

5.3 The decomposition of the Weil representation over $GL_2(F)\times GL_2(F)\times GL_2(F)$

5.3.1 Preliminaries

In this section, we denote by : $G = GL_2(F)$, $H = G \times G$, $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$, $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\}$, $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G\}$, $Z = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G\}$; $h(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $\omega' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ elements in G, S_3 = the permutation group of 3 variables.

Let V be a vector space over F of dimension 2, endowed with a non-degenerate symplectic form $\langle, \rangle$, let $\{e_1, e_2\}$ be one canonical basis of V i.e. $\langle e_1, e_2\rangle = 1$, $\langle e_2, e_1\rangle = -1$. We attach the vector space $V^{\otimes 3} = V \otimes_F V \otimes_F V$ with the symplectic form induced from V, then there exists a homomorphism from $GSp(V) \times GSp(V) \times GSp(V) \rtimes S_3$ to $GSp(V^{\otimes 3})$, we denote it by p. By the fixed basis $\{e_1, e_2\}$ of V and $\{e_i \otimes e_j \otimes e_k | 1 \leq i, j, k \leq 2\}$ of $V^{\otimes 3}$, we could identify the group $GL_2(F)$ with $GL(V)$, and also the group $GSp_8(F)$ with $GSp(V^{\otimes 3})$.

Let ρ be the Weil representation of $GSp(V^{\otimes 3})$, through the morphism p, it gives rise to a representation π' of the group $GSp(V)\times GSp(V)\times GSp(V) \rtimes S_3$. Let us denote by π the restriction representation of π' to the subgroup $GSp(V)\times GSp(V)\times GSp(V)$. We denote by ${}_+V^{\otimes 3} = \{x \in V^{\otimes 3} | x \in Fe_1 \otimes V \otimes V\}$, ${}_-V^{\otimes 3} = \{y \in V^{\otimes 3} | y \in Fe_2 \otimes V \otimes V\}$. Every element $y \in {}_-V^{\otimes 3}$ has the form $y = \sum_{j,k=1}^2 a_{j,k} e_2 \otimes e_j \otimes e_k$, which corresponds one matrix $m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. So we could identify ${}_-V^{\otimes 3}$ with the matrix ring $M_2(F)$ as vector space over F. The representation π of the group $G \times G \times G$ can be realized in the vector space $W = \mathbb{C}^{M_2(F)\times X_F}$.

Proposition 5.5. *The representation* $(\pi, G \times G \times G, W)$ *is determined by the following formulas :*
$(1)(\pi(h(a), 1, 1)f)(m, \psi) = f(am, \psi)$,
$(2)(\pi(u(b), 1, 1)f)(m, \psi) = \psi(b\,det(m))f(m, \psi)$,
$(3)(\pi(h'(t), 1, 1)f)(m, \psi) = f(m, \psi^{t^{-1}})$,
$(4)(\pi(\omega, 1, 1)f)(m, \psi) = q^{-2} \sum_{n\in M_2(F)} \psi(B(m, n)) f(n, \psi)$,
$(5)(\pi(1, g_2, g_3)f)(m, \psi) = f(\det(g_2g_3)g_2^{-1}mg_3^{-1t}, \psi^{det(g_2g_3)^{-1}})$,
where $g_2, g_3 \in G, m \in M_2(F)$, g_3^t*= the transpose matrix of* g_3, $B(m, n) = m_{11}n_{22} + m_{22}n_{11} - m_{12}n_{21} - m_{21}n_{12}$ *for* $m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \in M_2(F)$.

Proof. It follows from the formulas (1)—(4) in subsection 2.1. □

We consider the set $\mathcal{S} = \{(\pi_1, \pi_2) | \pi_i \in Rep(G)$ such that $(\pi_1 \otimes \pi_2)|_Z = \mathrm{Id}\}$. For each pair $(\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{S}$, it determine a representation $(\pi_1 \otimes \pi_2, V_1 \otimes V_2)$ of the group H. Let $\mathrm{Rep}_0(H)$ be the subcategory of $\mathrm{Rep}(H)$ where the objects consist of $(\pi_1 \otimes \pi_2, V_1 \otimes V_2)$ for $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{S}$. We also write $\mathrm{Irr}_0(H)$ as the set of isomorphism classes of all irreducible representations of H, which appear in the subcategory $\mathrm{Rep}_0(H)$.

Now we concentrate on the decomposition of the representation $(\pi, G\times G\times G, W)$. Using the method in [A], first we associate one representation $(\pi_0', G, W[\pi_1\otimes\pi_2])$ for any representation $\pi_1\otimes\pi_2\in \mathrm{Irr}_0(H)$. The vector space $W[\pi_1\otimes\pi_2]$ consists of functions $f: M_2(F)\times X_F \longrightarrow V_1\otimes V_2$ such that :

$$f(\det(g_1g_2)g_1^{-1}mg_2^{-1t}, \psi^{det(g_1g_2)^{-1}}) = (\pi_1(g_1)\otimes\pi_2(g_2))f(m,\psi), \tag{58}$$

where $(g_1,g_2)\in H, m\in M_2(F), \psi\in X_F$; and the action of G is given by the formulas (1)- (4) in Proposition 5.5 .

Proposition 5.6. *For the representation $(\pi, G, G\times G\times G)$, we have the following decomposition :*

$$W = \bigoplus_{\pi_1\otimes\pi_2\in Irr_0(H)} W[\pi_1\otimes\pi_2]\otimes V_1\otimes V_2.$$

Proof. The representation W has the following decomposition $W=\oplus_{\pi_1\otimes\pi_2\in Irr_0(H)} W_{\pi_1\otimes\pi_2}\otimes V_1\otimes V_2$ and we have the identification of vector spaces $W_{\pi_1\otimes\pi_2}\simeq W\otimes (V_1\check{\otimes} V_2)^{1\times G\times G} \simeq \mathrm{Hom}_{1\times G\times G}(W,\mathbb{C}\otimes V_1\otimes V_2)\simeq W[V_1\otimes V_2]$. □

Let $(\check{\sigma},\check{V})$ be the contragredient representation of (σ, V) of the group G. Recall the Cartan involution $\theta: G\longrightarrow G; g\longmapsto (g^t)^{-1}$. It is well-known that $\check{\sigma}\simeq\sigma\circ\theta$. By applying this special result for G, and also the isomorphism of vector spaces $\lambda: V_1\otimes V_2^\star \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1); v_1\otimes v_2^\star \longmapsto \varphi_{v_1\otimes v_2^\star}$ where $\varphi_{v_1\otimes v_2^\star}(v_2) = \langle v_2^\star, v_2\rangle v_1$, we could obtain the isomorphism of the representations of H : $(\pi_1\otimes\pi_2, V_1\otimes V_2)\simeq ([\pi_1,\pi_2\circ t], \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1))$ where $([\pi_1,\pi_2\circ t](g_1,g_2)(\varphi) = \pi_1(g_1)\circ\varphi\circ\pi_2(g_2^t)$ for $g_1,g_2\in G, \varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)$. Now let $W[\pi_1,\pi_2]$ be the vector space which consists of all functions $f: M_2(F)\times X_F\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)$ such that :

$$f(\det(g_1g_2)g_1^{-1}mg_2^{-1t}, \psi^{det(g_1g_2)^{-1}}) = \pi_1(g_1)\circ f(m,\psi)\circ\pi_2(g_2^t). \tag{59}$$

Hence the following proposition is straightforward :

Proposition 5.7. *Let $\pi_1\otimes\pi_2\in\mathrm{Irr}_0(H)$. Then $(\pi_0', G, W[\pi_1\otimes\pi_2])\simeq(\pi_0, G, W[\pi_1,\pi_2])$, where the action of $\pi_0(g)$ on $W[\pi_1,\pi_2]$ is given by the formulas $(1)-(4)$ in Proposition 5.5, for any $g\in G$.*

5.3.2 Description of the vector spaces $W[\pi_1,\pi_2]$

For $\pi_1\otimes\pi_2\in\mathrm{Irr}_0(H)$, we write $W[\pi_1,\pi_2](\xi) = \{f(\xi)|f\in W[\pi_1,\pi_2], \xi\in M\times X_F\}$. Now we define a H-action on the set $M_2(F)\times X_F$ as follows :

$$(g_1,g_2)(m,\psi) := (\det(g_1^{-1}g_2^{-1})g_1mg_2^t, \psi^{\det(g_1g_2)}), \tag{60}$$

where $(g_1,g_2)\in H, \psi\in X_F, m\in M_2(F)$. It is observed that $W[\pi_1,\pi_2](\xi) = \mathrm{Fix}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)}(\mathrm{Stab}_H(\xi))$ where $\xi\in M_2(F)\times X_F$, more precisely

$$W[\pi_1,\pi_2](\xi) = \{\varphi: V_2\longrightarrow V_1|\pi_1(g_1)\circ\varphi = \varphi\circ\pi_2(g_2^{t^{-1}})\quad \forall g_1,g_2\in\mathrm{Stab}_H(\xi)\}. \tag{61}$$

Let us determine the H-orbits in $M_2(F)\times X_F$, they are of the following three kinds :

(i) Orbit $\{\xi_a\}$ where $\xi_a = (\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\phi^a)$ for any $a\in F^\times$;

(ii) Orbit $\{\eta\}$ where $\eta = (\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\phi)$;

(iii) Orbit $\{\delta\}$ where $\delta = (\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\phi)$.

And by straight forward calculation, the corresponding stabilizer of the given representative element in each orbit has the following form :

(i) $\mathrm{Stab}_H(\xi_a) = \{(g, g^{-1t})|g\in G\}$.

(ii) $\mathrm{Stab}_H(\eta) = \{(sn_1, sn_2)|s\in T, n_1,n_2\in N\}$.

(iii) $\mathrm{Stab}_H(\delta) = \{(g_1,g_2)|$ where $g_1,g_2\in G$ and $\det(g_1g_2)=1\}$.

To obtain the dimension of the vector space $W[\pi_1,\pi_2]$, we state the lemma :

Lemma 5.8. *(1) $W[\pi_1,\pi_2](\xi_a)\neq 0$ iff $\pi_1\simeq\pi_2$, in this case $\dim_{\mathbb{C}} W[\pi_1,\pi_2](\xi_a) = 1$;*
(2) $W[\pi_1,\pi_2](\eta) = 0$ except the following cases :
(a) $\dim_{\mathbb{C}} W[\pi_{\chi_1,\chi_2},\pi_{\chi_1,\chi_2}](\eta) = 2$,

(b) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot 1_G, \psi\cdot 1_G](\eta) = 1$,
(c) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot \mathrm{St}_G, \psi\cdot \mathrm{St}_G](\eta) = 1$,
(d) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot 1_G, \psi\cdot \mathrm{St}_G](\eta) = 1$,
(e) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot \mathrm{St}_G, \psi\cdot 1_G](\eta) = 1$,

for characters $\chi_1 \neq \chi_2$, ψ *of* $F^\times$ *;*
(3) $W[\pi_1,\pi_2](\delta) = 0$ *except* $\pi_1 = \pi_2 = \psi\cdot 1_G$, *in which case* $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot 1_G, \psi\cdot 1_G](\delta) = 1$, *for character* ψ *of* $F^\times$.

Proof. (1) $W[\pi_1,\pi_2](\xi_a) = \{\varphi : V_2 \longrightarrow V_1 | \pi_1(g_1)\circ\varphi = \varphi\circ\pi_2(g_2^{-1t})$ where $(g_1,g_2)\in \mathrm{Stab}_H(\xi_a)\} \simeq \mathrm{Hom}_G(V_2,V_1)$.
(2) We notice that $W[\pi_1,\pi_2](\eta) \simeq \mathrm{Hom}_T(V_2^N, V_1^N)$, therefore if π_1 or π_2 is not the principal series representation then $W[\pi_1,\pi_2](\eta) = 0$. And for $(\pi, V) = \mathrm{Ind}_B^G\,\chi$ where $\chi = \chi_1\otimes\chi_2$ is the character of group T. V^N is generated by the functions f_χ and g_χ, with $\mathrm{supp}\, f_\chi = B$ and $\mathrm{supp}\, g_\chi = B\omega' N$. They satisfy $f_\chi(tn) = \chi(t)$, $g_\chi(tn_1\omega' n_2) = \chi(t)$. Consequently by considering the action of T, we obtain the result.
(3) $W[\pi_1,\pi_2](\delta) = \{\varphi : V_2 \longrightarrow V_1 | \pi_1(g_1)\circ\varphi = \varphi\circ\pi_2(g_2^{-1t}) \quad (g_1,g_2)\in\mathrm{Stab}_H(\delta)\} = \{\varphi : V_2 \longrightarrow V_1 | \pi_1(g_1)\circ\varphi = \varphi\circ\pi_2(g_2)$ where $g_1, g_2 \in G$, $\det g_1 = \det g_2\}$. By explicit analysis of the representations of G, we obtain the result. □

Corollary 5.9. *For any irreducible representation* $\pi_1\otimes\pi_2 \in \mathrm{Irr}_0(H)$*, the dimension of the representation* $(\pi_0, G, W[\pi_1,\pi_2])$ *is presented as follows :*

(i) $\dim_{\mathbb{C}} W[\pi_{\chi_1,\chi_2}, \pi_{\chi_1,\chi_2}] = q+1$,
(ii) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot\mathrm{St}_G, \psi\cdot\mathrm{St}_G] = q$,
(iii) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot 1_G, \psi\cdot 1_G] = q+1$,
(iv) $\dim_{\mathbb{C}} W[\pi_\theta, \pi_\theta] = q-1$,
(v) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot\mathrm{St}_G, \psi\cdot 1_G) = 1$,
(vi) $\dim_{\mathbb{C}} W[\psi\cdot 1_G, \psi\cdot\mathrm{St}_G) = 1$,

for the characters $\chi_1\neq\chi_2, \psi$ *of* $F^\times$*, the regular character* θ *of* $E^\times$*. And the above list are all representations* $\pi_1\otimes\pi_2\in\mathrm{Irr}_0(H)$*, such that* $W[\pi_1,\pi_2]\neq 0$.

Theorem 5.10. *The decomposition of the representation* $(\pi, G\times G\times G, W)$ *has the following form :*

$$\pi = \bigoplus_{\chi_1\neq\chi_2\in\mathrm{Irr}(F^\times)\mod \chi_1\sim\chi_2^\omega} \left(\pi_{\chi_1,\chi_2}\otimes\pi_{\chi_1,\chi_2}\otimes\pi_{\chi_1,\chi_2}\right) \oplus \bigoplus_{\psi\in\mathrm{Irr}(F^\times)} \left(\psi\cdot\mathrm{St}_G\otimes\psi\cdot\mathrm{St}_G\otimes\psi\cdot\mathrm{St}_G\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\psi\in\mathrm{Irr}(F^\times)} \left(\psi\cdot 1_G\otimes\psi\cdot 1_G\otimes\psi\cdot 1_G\right) \oplus \bigoplus_{\theta\in\mathrm{Irr}(E^\times)-\mathrm{Irr}(F^\times), mod\,\theta\sim\theta^q} \left(\pi_\theta\otimes\pi_\theta\otimes\pi_\theta\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\psi\in\mathrm{Irr}(F^\times)} \Big((\psi\cdot\mathrm{St}_G\otimes\psi\cdot 1_G\otimes\psi\cdot 1_G) \oplus (\psi\cdot 1_G\otimes\psi\cdot\mathrm{St}_G\otimes\psi\cdot 1_G) \oplus (\psi\cdot 1_G\otimes\psi\cdot 1_G\otimes\psi\cdot\mathrm{St}_G)\Big).$$

Proof. Since $\pi = \mathrm{Res}_{G\times G\times G}^{(G\times G\times G)\rtimes S_3}\pi'$, by the Clifford theorem, the representation π could be written as the direct sum of the following three kinds of forms : (1) $\tau_0\otimes\tau_0\otimes\tau_0$ for $\tau_0\in\mathrm{Irr}(G)$; (2) $\tau_1\otimes\tau_1\otimes\tau_2 + \tau_1\otimes\tau_2\otimes\tau_1 + \tau_2\otimes\tau_1\otimes\tau_1$ for $\tau_1\neq\tau_2\in\mathrm{Irr}(G)$; (3) $\tau_0'\otimes\tau_1'\otimes\tau_2' + \tau_0'\otimes\tau_2'\otimes\tau_1' + \tau_1'\otimes\tau_0'\otimes\tau_2' + \tau_1'\otimes\tau_2'\otimes\tau_0' + \tau_2'\otimes\tau_0'\otimes\tau_1' + \tau_2'\otimes\tau_1'\otimes\tau_0'$ for three different representations $\tau_0', \tau_1', \tau_2'$ in $\mathrm{Irr}(G)$. Comparing the result in Corollary 5.9, we can obtain the theorem. □

5.4 The decomposition of the Weil representation over $GL_2(F)\times GL_2(E)$

5.4.1 Preliminaries

In this section, we denote by : $G = GL_2(F)$, $B = \{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in G\}$, $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G\}$, $T = \{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\in G\}$, $Z = \{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\in G\}$; $H = GL_2(E)$, $B' = \{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in H\}$, $N' = \{\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H\}$, $T' = \{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\in H\}$, $Z' = \{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\in H\}$;$h(r) = \begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $h'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$, $\omega' = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ elements in G or H.
For matrix $g\in M_2(E)$, we denote by g^t the corresponding transpose matrix, $\overline{g}$ the conjugate matrix and $g^\star := \overline{g}^t$. Let $M = \{g\in M_2(E) | g = g^\star\}$, it is a vector space over F of dimension 4, and one considers the quadratic form q on it, which is defined by the determinant of the matrix. There exists a homomorphism from $GL_2(E)$ to $GO(q)$, which is defined by $h\cdot m := hmh^\star$ for $h\in H, m\in M$. Let V be the vector space over F of dimension 2, endowed with symplectic form $\langle,\rangle$. Clearly it induces a map from $G\times H$ to the group $GSp(V\otimes_F M)\simeq GSp_8(F)$. Similarly as in

section 5.3, we consider the restriction of the Weil representation $(\rho, GSp_8(F), W)$ to the group $G \times H$, and denote it by $(\pi, G \times H, W)$.

The Weil representation $(\pi, G \times H, W)$ can be realized in the space $W = \mathbb{C}^{M \times X_F}$, the action of $G \times H$ on W is determined by the following formulas :

$$(\pi([h(a), 1])F)(m, \psi) = F(am, \psi), \tag{62}$$

$$(\pi([u(b), 1])F)(m, \psi) = \psi(b \det(m))F(m, \psi), \tag{63}$$

$$(\pi([\omega, 1])F)(m, \psi) = -q^{-2} \sum_{n \in M} F(n, \psi)\psi(B(m, n)), \tag{64}$$

$$(\pi([h'(t), 1])F)(m, \psi) = F(m, \psi^{t^{-1}}), \tag{65}$$

$$(\pi([1, h])F)(m, \psi) = F(h^{-1} m h^{\star -1}\ \mathrm{N}_{E/F}(\det(h)), \psi^{\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)^{-1})}), \tag{66}$$

where $h(a), u(b), h'(t) \in G$; $h \in H, m \in M, \psi \in X_F$; $B(m, n) := q(m + n) - q(m) - q(n)$ for $m, n \in M$.

Let $U = \{x \in E^\times | N_{E/F}(x) = 1\}$, we regard U as a subgroup of H. Let $\mathrm{Irr}_0(H)$ be the set of isomorphism classes of the irreducible representations of H, which are trivial over U. For each representation $(\pi_1, V_1) \in \mathrm{Irr}_0(H)$, we associate one representation $(\pi_0, W[\pi_1])$ of G, where the vector space $W[\pi_1]$ consists of all the functions : $f : M \times X_F \longrightarrow V_1$ such that

$$f(h^{-1} m h^{\star -1}\ \mathrm{N}_{E/F}(\det(h)), \psi^{\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)^{-1})}) = \pi_1(h) \circ f(m, \psi), \tag{67}$$

where $h \in H, (m, \psi) \in M \times X_F$ and the action of G on $W[\pi_1]$ is given by the formulas (62)—(65).

Proposition 5.11. *For the representation $(\pi, G \times H, W)$, we have the following decomposition :*

$$\pi = \bigoplus_{(\pi_1, V_1) \in \mathrm{Irr}_0(H)} W[\pi_1] \otimes V_1.$$

Proof. The representation W has the decomposition $\pi = \oplus_{(\pi_1, V_1)} W_{[\pi_1]} \otimes V_1$ then $W_{\pi_1} \simeq (W \otimes \check{V}_1)^H \simeq \mathrm{Hom}_H(W, V_1)$. The action of G on $W[\pi_1]$ arises from the definition of π and the above isomorphisms. □

5.4.2 Description of the vector space $W[\pi_1]$

For $(\pi_1, V_1) \in \mathrm{Irr}_0(H)$, we define $W[\pi_1](\xi) = \{f(\xi) | f \in W[\pi_1]\}$ and a H-action on the set $M_2(F) \times X_F$ as

$$h \cdot (m, \psi) := (h m h^\star\ \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))^{-1}, \psi^{\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))}) \text{ where } h \in H, \psi \in X_F, m \in M. \tag{68}$$

It is observed that $W[\pi_1](\xi) = V_1^{\mathrm{Stab}_H(\xi)}$ for any $\xi \in M \times X_F$.

Proposition 5.12. *For the action of H on $M \times X_F$.*
(1) The distinct orbit of this action can be described as follows :

(i) Orbit $\{\xi_a\}$ where $\xi_a = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi^a)$ for any $a \in F^\times$;

(ii) Orbit $\{\eta\}$ where $\eta = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi)$;

(iii) Orbit $\{\delta\}$ where $\delta = (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi)$.

(2) The corresponding stabilizer of the canonical element in each orbit is presented as following :

(i) $\mathrm{Stab}_H(\xi_a) = U(2, E)$ where $U(2, E) = \{h \in H | hh^\star = 1\}$;

(ii) $\mathrm{Stab}_H(\eta) = H_1$ where $H_1 = \{h = \begin{pmatrix} u & b \\ 0 & v \end{pmatrix} | u, v \in U, b \in E\}$;

(iii) $\mathrm{Stab}_H(\delta) = H_2$ where $H_2 = \{h \in H | \det(h) \in U\}$.

Proof. We transfer the H-action $\cdot$ to another H-action $\odot$ where $\odot$ is defined by $h \odot (m, \psi) := (hmh^{\star}, \psi^{\mathrm{N}_{E/F}(\det(h)^{-1})})$ and the map $\alpha : H \longrightarrow H; h \longmapsto h/\det(h)$ is a group isomorphism. Since $\alpha(h) \odot (m, \psi) = h \cdot (m, \psi)$, it reduces to consider the action $\odot$.
(1) Every element $m \in M$ corresponds one hermitian form over 2-dimension E-vector space V. By the property of hermitian form over finite field and the surjection of the morphism $\mathrm{N}_{E/F} : E^{\times} \longrightarrow F^{\times}$, we can find $h \in H$ such that $hmh^{\star} = \mathrm{diag}(a, b)$ where $(a, b) = (1, 1)$, $(1, 0)$ or $(0, 0)$. Consequently one can calculate the stabilizer $H_{ab} = \mathrm{Stab}_H(\mathrm{diag}(a, b))$ and determine the orbit of H_{ab}-action over X_F.
(2) It is straightforward. □

Let us determine the dimension of the vector space $W[\pi_1]$ for each $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_0(H)$.

Lemma 5.13. *Let (π_1, V_1) be an irreducible representation of H, which belongs to $\mathrm{Irr}_0(H)$.*
(1) For $\pi_1 = \Psi \cdot 1_H$ where $\Psi \in \mathrm{Irr}(E^{\times})$:
  (a) If $\Psi \neq \Psi^q$ then $W[\pi_1] = 0$;
  (b) If $\Psi = \Psi^q$ then $\dim_{\mathbb{C}} W[\pi_1](\xi_a) = \dim_{\mathbb{C}} W[\pi](\eta) = \dim_{\mathbb{C}} W[\pi_1](\delta) = 1$.
(2) For $\pi_1 = \Psi \cdot \mathrm{St}_H$ where $\Psi \in \mathrm{Irr}(E^{\times})$:
  (a) If $\Psi \neq \Psi^q$ then $W[\pi_1] = 0$;
  (b) If $\Psi = \Psi^q$ then $\dim_{\mathbb{C}} W[\pi](\xi_a) = \dim_{\mathbb{C}} W[\pi_1](\eta) = 1$ and $\dim_{\mathbb{C}} W[\Psi \cdot \mathrm{St}_H](\delta) = 0$.
(3) For $\pi_1 = \Pi_{\Lambda,\Sigma}$ where $\Lambda \neq \Sigma \in \mathrm{Irr}(E^{\times})$:
  (a) If $\Lambda = \Lambda^q, \Sigma = \Sigma^q$ then $\dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}](\xi_a) = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}](\eta) = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}](\delta) = 0$;
  (b) If $\Lambda = \Sigma^q, \Sigma = \Lambda^q$ then $\dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}](\xi_a) = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}](\eta) = \dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}](\delta) = 0$;
  (c) for the other kind of $\Lambda \neq \Sigma \in \mathrm{Irr}(E^{\times})$ $W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}] = 0$.
(4) For $\pi_1 = \Pi_{\Theta}$ where $\Theta \in \mathrm{Irr}(E_1^{\times}) - \mathrm{Irr}(E^{\times})$ for some quadratic extension E_1 over E :
  (a) $W[\Pi_{\Theta}] = 0$.

Proof. (1) It is easy checked that the image of the map $\det : \mathrm{Stab}_H(\xi) \longrightarrow E^{\times}$ is U whence $\xi = \xi_a, \eta, \delta$. It implies that $V_1 = V_1^{\mathrm{Stab}_H(\xi)}$ iff Ψ is trivial over U.
(2) Let us denote by $(\pi_2, V_2) = \mathrm{Ind}_{B'}^{H}(\Psi \cdot 1_{B'})$, since $W[\pi_2](\xi) = W[\Psi \cdot 1_H](\xi) \oplus W[\Psi \cdot \mathrm{St}_H](\xi)$ for $\xi = \xi_a, \eta, \delta$. So it remains to determine the dimension $W[\pi_2](\xi)$ for $\xi = \xi_a, \eta, \delta$.
For $\xi = \xi_a$, $\mathrm{Stab}_H(\xi) = U_2(E) = \{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^q & a^q \end{pmatrix} | u \in U, a, b \in E, \mathrm{N}_{E/F}(a) + \mathrm{N}_{E/F}(b) = 1\}$ and $G = BU_2(E) \cup B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_2(E)$. So $V_2^{U_2(E)}$ is generated by two functions α, β in V_2 where $supp(\alpha) = BU_2(E)$, $\alpha(bu) := \Psi \cdot 1_B(b)$ for $b \in B, u \in U_2(E)$ and $\Psi \cdot 1_B$ is trivial over $B \cap U_2(E)$; $supp(\beta) = B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_2(E), \beta\Big(b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u\Big) := \Psi \cdot 1_B(b)$ and $\Psi \cdot 1_B$ is trivial over $B \cap \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_2(E) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$. By a calculation, we obtain $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ if $\Psi = \Psi^q$; $\alpha = \beta = 0$ if $\Psi \neq \Psi^q$.
For $\xi = \eta$, $\mathrm{Stab}_H(\xi) = H_1 = N' \rtimes T''$ where $T'' = \{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} | u, v \in U\}$ therefore $V_2^{H_1} = (V_2^{N'})^{T''}$. And it is well-known that $V_2^{N'}$ is generated by two functions f_{Ψ}, g_{Ψ} (notations as in Lemma 5.8). Consequently by considering the action of T'', we obtain : if $\Psi = \Psi^q$, $f_{\Psi}, g_{\Psi} \in V_2^{H_1}$; if $\Psi \neq \Psi^q$, $V_2^{H_1} = 0$.
For $\xi = \delta$, $\mathrm{Stab}_H(\delta) = H_2$, $G = BH_2$ and $B \cap H_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} | ad \in U\}$. It implies that $\dim_{\mathbb{C}} V_2^{H_2} = 1$(resp. 0) if Ψ is trivial (resp. not trivial) over U.
(3) For $\xi = \xi_a$, $V_1^{U_2(E)}$ is generated by two functions α, β in V_1 where $supp(\alpha) = BU_2(E)$, $\alpha(bu) := \Lambda\Sigma(b)$ for $b \in B, u \in U_2(E)$ and $\Lambda \otimes \Sigma$ is trivial over $B \cap U_2(E)$; $supp(\beta) = B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_2(E), \beta\Big(b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u\Big) := \Lambda \otimes \Sigma(b)$ and $\Lambda \otimes \Sigma$ is trivial over $B \cap \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_2(E) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$. By a careful calculation, we obtain : if $\Lambda = \Lambda^q, \Sigma = \Sigma^q$ then $\alpha \neq 0, \beta = 0$; if $\Lambda = \Sigma^q, \Sigma = \Lambda^q$ then $\alpha = 0, \beta \neq 0$; in other case $\alpha = \beta = 0$.
For $\xi = \eta$, $\mathrm{Stab}_H(\xi) = N' \rtimes T''$, and $V_1^{N'}$ is generated by two functions $f_{\Lambda,\Sigma}, g_{\Lambda,\Sigma}$. By considering the T''-action on $V_1^{N'}$, we obtain : if $\Lambda = \Lambda^q, \Sigma = \Sigma^q$ then $f_{\Lambda,\Sigma}, g_{\Lambda,\Sigma} \in V_1^{H_1}$; in other case $V_1^{H_1} = 0$.
For $\xi = \delta$, $\mathrm{Stab}_H(\xi) = H_2$ and $G = BH_2$, $B \cap H_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} | ad \in U\}$ then $V_1^{H_2}$ is generated by function f where $f(bh) = (\Lambda \otimes \Sigma)(b)$ for $b \in B, h \in H_2$ and $\Lambda \otimes \Sigma$ is trivial over $B \cap H_2$, it implies $V_1^{H_2} = 0$.
(4) For $\xi = \xi_a$, $U_2(E) \supseteq SU_2(E) = SL_2(E) \cap U_2(E)$ and there exists $h \in H$ such that $hSU_2(E)h^{-1} = SL_2(F)$ (see

[A] page 242). Hence $V_1^{U_2(E)} \subseteq V_1^{SU_2(E)} \simeq V_1^{SL_2(F)} = 0$.
For $\xi = \eta, \delta$, $H_i \supseteq N'$ and $V_1^{N'} = 0$ which implies that $V_1^{H_i} = 0$ for $i = 1, 2$. □

Corollary 5.14. *For any irreducible* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_0(H)$*, the dimension of the representation* $(\pi_0, G, W[\pi_1])$ *is exhibited as follows :*
(i) $\dim_{\mathbb{C}} W[\Psi \cdot 1_H] = q + 1$ *if* $\Psi = \Psi^q$ $\Psi \in \mathrm{Irr}(E^\times)$*;*
(ii) $\dim_{\mathbb{C}} W[\Psi \cdot \mathrm{St}_H] = q$ *if* $\Psi = \Psi^q$ $\Psi \in \mathrm{Irr}(E^\times)$*;*
(iii) $\dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}] = q + 1$ *if* $\Lambda, \Sigma \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ *and* $\Lambda \neq \Sigma, \Lambda = \Lambda^q, \Sigma = \Sigma^q$*;*
(iv) $\dim_{\mathbb{C}} W[\Pi_{\Lambda,\Sigma}] = q - 1$ *if* $\Lambda, \Sigma \in \mathrm{Irr}(E^\times)$*, and* $\Lambda \neq \Sigma, \Lambda = \Sigma^q, \Sigma = \Lambda^q$*,*
the above list are all representations $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_0(H)$*, such that* $W[\pi_1] \neq 0$*.*

5.4.3 Determination of the representation $(\pi_0, G, W[\pi_1])$

(1) For the representation $(\pi_0, W[\pi_1])$ where $\pi_1 = \Psi \cdot 1_H$ $\Psi = \Psi^q \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ and $\Psi = \psi \circ \mathrm{N}_{E/F}$ for some $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$.

The vector space $W[\pi_1]$ is generated by functions $\{F_a, R, S : M \times X_F \longrightarrow V_1$ for any $a \in F^\times\}$. They all satisfy the equality (67). And supp(F_a)= Orbit$\{\xi_a\}$, $F_a(\xi_a) = v_0 \in V_1^{U_2(E)}$ for any $a \in F^\times$; supp(R)= Orbit$\{\eta\}$, $R(\eta) = v_1 \in V_1^{H_1}$; supp(S)= Orbit$\{\delta\}$, $S(\delta) = v_2 \in V_1^{H_2}$. By referring the explicit action, we obtain the following formulas (see my thesis for more details) :
(I) $\pi_0(h(r)F_{ar^2}) = \psi(r^2)F_a$; (II) $\pi_0(h'(t))F_{at^{-1}} = F_a$; (III) $\pi_0(u(b))F_a = \phi^a(b)F_a$; (IV) $\pi_0(h(r))R = R$; (v) $\pi_0(h'(t))R = \psi(t)R$;
(VI) $\pi_0(u(b))R = R$; (VII) $\pi_0(h(r))S = S$; (VIII) $\pi_0(h'(t))S = \psi(t)S$; (IX) $\pi_0(u(b)S) = S$; (X) $\pi_0(\omega)S \neq S$.
By the above formulas (I)—(IX), we have the equalities :
$\pi_0(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix})F_a = \psi(t_1^2)F_{at_2/t_1}$; $\pi_0(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix})R = \psi(t_1t_2)R$; $\pi_0(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix})S = \psi(t_1t_2)S$; $\pi_0(\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix})F_a = \psi(r^2)\phi^a(r^{-1})F_a$; $\pi_0(\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix})R = \psi(r^2)R$; $\pi_0(\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix})S = \psi(r^2)S$; hence $\chi_{\pi_0}(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}) = (q+1)\psi(r^2)$, $\chi_{\pi_0}(\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}) = 2\psi(r_1r_2)$ and $\chi_{\pi_0}(\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}) = \psi(r^2)$ for $t_1, t_2, r, r_1 \neq r_2 \in F^\times$. It implies that the restriction of π_0 and $\psi \cdot \mathrm{Ind}_B^G 1_G$ on B coincide with each other, i.e. $\mathrm{Res}_B^G(\pi_0) \simeq 2\sigma_{\psi,\psi} \oplus \psi^2 \otimes \sigma$ and the isotropic component $2\sigma_{\psi,\psi}$ is spanned by functions $\{R, S\}$. By Proposition 5.3, $\pi_0 \simeq \psi \cdot \mathrm{Ind}_B^G 1_G \cdots (1)$ or $\pi_0 \simeq 2\psi \cdot 1_G \oplus \pi_\theta$ for certain regular character θ of $E^\times \cdots (2)$. But by formula (X), $\pi_0(\omega)S \neq S$ which means that π_0 has only one isotropic component $\psi \cdot 1_G$ that is generated by R, hence the above case (2) is impossible. Finally we obtain $\pi_0 \simeq \psi \cdot \mathrm{Ind}_B^G 1_G$.

(2) For the representation $(\pi_0, W[\pi_1])$ where $\pi_1 = \Psi \cdot \mathrm{St}_H$ $\Psi = \Psi^q \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ and $\Psi = \psi \cdot \mathrm{N}_{E/F}$ for some $\psi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$.

The vector space $W[\pi_1]$ is generated by functions $\{F_a, R : M \times X_F \longrightarrow V_1$ for any $a \in F^\times\}$. They all satisfy the equality (67). And supp(F_a)= Orbit$\{\xi_a\}$, $F_a(\xi_a) = v_0 \in V_1^{U_2(E)}$ for any $a \in F^\times$; supp(R)= Orbit$\{\eta\}$, $R(\eta) = v_1 = q^2 f_\Psi - g_\Psi \in V_1^{H_1}$ (notation as in Lemma 5.8). We can see :
(XI) $\pi_0(h(r))F_{ar^2} = \psi(r^2)F_a$; (XII) $\pi_0(h'(t))F_{at^{-1}} = F_a$; (XIII) $\pi_0(u(b))F_a = \phi^a(b)F_a$; (XIV) $\pi_0(h(r))R = R$
(XV) $\pi_0(h'(t))R = \psi(t)R$; (XVI) $\pi_0(u(b))R = R$.
Similarly as the table C in [A] page 247, we consider the action of H_1 on the set $\{n \in M, \mathrm{rank}\, n = 1\}$, then

$$(\pi_0(\omega)R)(\eta) = -q^{-2} \sum_{n \in M, \mathrm{rank}\, n = 1} R(n, \phi)\phi\Big(B\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, n\Big)\Big)$$

$$= -q^{-2} \sum_{s \in F^\times} \Bigg[R\Big(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi\Big)\phi\Big(B\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big)\Big) + \sum_{b \in E} R\Big(u(b)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}u(b)^\star, \phi\Big)\phi\Big(B\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u(b)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}u(b)^\star\Big)\Big)\Bigg]$$

$$= -q^{-2} \sum_{s \in F^\times} \Bigg[v_1 + \phi(s) \sum_{b \in E} \pi_1\Big(u(-b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big)v_1 \Bigg]$$

$$= -q^{-2}[(q-1)v_1 + v_1] = -q^{-1}v_1.$$

It implies that (XVII) $\pi_0(\omega)R \neq R$.
By the formulas (XI)—(XVI), we obtain $\mathrm{Res}_B^G(\pi_0) = \mathrm{Res}_B^G(\psi \cdot \mathrm{St}_G)$. Consequently by the formula (XVII), π_0 has no $\psi \cdot 1_G$ isotropic component. Hence by comparing the result in Proposition 5.3, we obtain $\pi_0 \simeq \psi \cdot \mathrm{St}_G$.

(3) For the representation $(\pi_0, W[\pi_1])$ $\quad \pi_1 = \Pi_{\Lambda,\Sigma} \quad \Lambda \neq \Sigma$ and $\Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{E/F}, \Sigma = \sigma \circ \mathrm{N}_{E/F} \in \mathrm{Irr}(E^\times)$.

$V_1^{H_1} = V_1^{N'}$ is generated by functions $\{f_{\Lambda,\Sigma}, g_{\Lambda,\Sigma}\}$ (notations as in Lemma 5.8). Let $\Delta : M \times X_F \longrightarrow V_1$ such that it satisfies (67) and supp(Δ)= Orbit$\{\eta\}$, $\Delta = f_{\Lambda,\Sigma}$. Then :

$$\Big(\pi_0(h(r))(\Delta)\Big)(\eta) = \Delta\Big(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi\Big) = \Delta\Big(\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{-q} & 0 \\ 0 & x^q \end{pmatrix}^{-1}, \phi\Big) = \Pi_{\Lambda,\Sigma}\Big(\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\Big) \circ \Delta(\eta)$$

$= \Pi_{\Lambda,\Sigma}\Big(\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\Big) \circ f_{\Lambda,\Sigma} = \Lambda(x^{-1})\Sigma(x) f_{\Lambda,\Sigma} = \lambda(r^{-1})\sigma(r) f_{\Lambda,\Sigma}$ where $\mathrm{N}_{E/F}(x) = r$. It implies

$$\pi_0(h(r))\Delta = \lambda(r^{-1})\sigma(r)\Delta. \tag{69}$$

$$\Big(\pi_0(h'(t))(\Delta)\Big)\eta)\Delta\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi^{t^{-1}}\Big) = \Delta\Big(\mathrm{N}_{E/F}(x)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \phi^{\mathrm{N}_{E/F}(x)^{-1}}\Big)$$

$= \Pi_{\Lambda,\Sigma}\Big(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) \circ \Delta(\eta) = \Pi_{\Lambda,\Sigma}\Big(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) \circ f_{\Lambda,\Sigma} = \Lambda(x) f_{\Lambda,\Sigma} = \lambda(t) f_{\Lambda,\Sigma} = \lambda(t)\Delta(\eta)$, where $\mathrm{N}_{E/F}(x) = r$. It implies that

$$\pi_0(h'(t))\Delta = \lambda(t)\Delta. \tag{70}$$

By the formulas (69)—(70), we obtain $\pi_0\Big(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\Big)\Delta = \lambda(t_1)\sigma(t_2)\Delta$, it implies $\mathrm{Hom}_G(\pi_0, \mathrm{Ind}_B^G \lambda \otimes \sigma) \neq 0$ and $\dim_{\mathbb{C}} \pi_0 = q + 1$, finally we obtain $\pi_0 \simeq \pi_{\lambda,\sigma}$.

(4) For the representation $(\pi_0, W[\pi_1])$ $\quad \pi_1 = \Pi_{\Lambda,\Sigma} \quad \Lambda \neq \Sigma \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ and $\Lambda = \Sigma^q, \Sigma = \Lambda^q$.

We start with recalling some explicit models for certain representations(see [A] for more details) :

Model for $\pi_1 = \Pi_{\Lambda,\Sigma}$: π_1 could be realized in the vector space V_1 where V_1 is spanned by functions $v : E^2 \times E^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ such that $v(a(e_1, e_2); a^{-1}b^{-1}e_3) = \Lambda(a)\Sigma(b)v(e_1, e_2; e_3) \cdots (\star)$ and $(\pi(h)v)(e_1, e_2; e_3) = v((e_1, e_2)h; e_3 \det(h)^{-1})$ for $e_1, e_2 \in E; a, b, e_3 \in E^\times, h \in H$.

Model for the cuspidal representation π_Λ of G, associated to the regular character Λ of $E^\times$: π_Λ could be realized in the vector space $\mathbb{C}^{X_F}$, where the action is following : (1) $\pi_\Lambda\Big(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\Big)f = \Lambda(r)f$; (2) $\Big(\pi_\Lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}f\Big)(\psi) = f(\psi^{t^{-1}})$; (3) $\Big(\pi_\Lambda\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}f\Big)(\psi) = \psi(s)f(\psi)$; (4) $\Big((\pi_\Lambda(\omega))f\Big)(\psi) = -q^{-1}\sum_{y\in E^\times}\psi(Tr_{E/F}(y))\Lambda(y)f(\psi^{N_{E/F}(y)})$ where $\psi \in X_F, t, r \in F^\times, s \in F$.

Now we concentrate on the representation $(\pi_0, G, W[\pi_1])$. The vector space $W[\pi_1]$ is generated by functions $F_a : M \times X_F \longrightarrow V_1$, it satisfies (67) and $supp(F_a)$= Orbit$\{\xi_a\}$, $F_a(\xi_a) = v_1 \in V_1^{U_2(E)}$ for any $a \in F^\times$. Using the above model, we choose one element v_1 as follows : $v_1 : E^2 \times E^\times \longrightarrow \mathbb{C}$, it satisfies above $(\star)$ and $supp(v_1) = \cup_{u\in U}$ Orbit $\{(1, ue_{-1}; 1)\}$, $v_1(1, ue_{-1}; 1) = \Lambda(u)$ where Orbit$\{(1, ue_{-1}; 1)\}$=$\{(a, ue_{-1}a; a^{-1}b^{-1}) \in E^2 \times E^\times | a, b \in E^\times\}$, e_{-1} is one fixed element in $E^\times$ such that $\mathrm{N}_{E/F}(e_{-1}) = -1$. It can be checked that $v_1 \in V_1^{U_2(E)}$.
We define an intertwining operator between π_Λ and π_0 by $j : \pi_\Lambda \longrightarrow W[\pi_1]; f \longmapsto j(f) = \sum_{a\in F^\times} f(\phi^a)F_a$, i.e. $j(f)(\xi_a) = f(\phi^a)v_1$. One can verify that

$$j(\pi_\Lambda(g)f) = \pi_0(g)j(f) \text{ for } g \in B. \tag{71}$$

Consider the action of ω :

$$\Big(\pi_0(\omega)j(f)\Big)(\xi_a) = -q^{-2}\sum_{n\in M}\phi^a(B(\mathrm{Id}_H, n))j(f)(n, \phi^a)$$

$$= -q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{h\in H}\phi^a\Big(B(\mathrm{Id}_H, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))h^{-1}h^{\star -1})\Big)j(f)(\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))h^{-1}h^{\star -1}, \phi^a)$$

$$= -q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{h\in H}\phi^a\Big(B(\mathrm{Id}_H, \mathrm{N}_{E/F}(\det(h))h^{-1}h^{\star -1})\Big)f(\phi^{a\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))})\pi_1(h)v_1$$

$$\underset{=}{\underline{\text{replace } h \text{ by } h^{-1}\det(h)}} - q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{h\in H}\phi^a\Big(B(\mathrm{Id}_H, hh^\star)\Big)f(\phi^{a\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))})\pi_1(h^{-1}\det(h))v_1.$$

Let

$$\kappa_a = -q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{h\in H}\phi^a\Big(B(\mathrm{Id}_H, hh^\star)\Big)f(\phi^{a\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))})\Big(\pi_1(h^{-1}\det(h))v_1\Big)(1,e_{-1};1)$$

and

$$\kappa_a^s = -q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{h\in H,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))=s}\phi^a\Big(B(\mathrm{Id}_H, hh^\star)\Big)f(\phi^{a\,\mathrm{N}_{E/F}(\det(h))})\Big(\pi_1(h^{-1}\det(h))v_1\Big)(1,e_{-1};1) \text{ for any } s\in F^\times.$$

Then $\kappa_a = \sum_{s\in F^\times}\kappa_a^s$,

$$\kappa_a^1 = -q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{h\in\mathcal{M}}\phi^a\Big(\mathrm{N}_{E/F}(\alpha)+\mathrm{N}_{E/F}(\beta)+\mathrm{N}_{E/F}(\gamma)+\mathrm{N}_{E/F}(\delta)\Big)f(\phi^a)v_1(\delta-\gamma e_{-1},-\beta+\alpha e_{-1};\det(h^{-1}))$$

$$= q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{h\in\mathcal{M}}\phi^a\Big(\mathrm{N}_{E/F}(\alpha)+\mathrm{N}_{E/F}(\beta)+\mathrm{N}_{E/F}(\gamma)+\mathrm{N}_{E/F}(\delta)\Big)f(\phi^a)\Lambda^{1-q}(\delta-\gamma e_{-1})\Lambda^q(\alpha\delta-\beta\gamma)v_1(1,\frac{-\beta+\alpha e_{-1}}{\delta-\gamma e_{-1}};1), \tag{72}$$

where $\mathcal{M} = \{h = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in H|\,\mathrm{N}_{E/F}(\alpha\delta-\beta\gamma)=1; -\beta+\alpha e_{-1} = u_1e_{-1}(\delta-\gamma e_{-1}), \delta-\gamma e_{-1}\neq 0 \text{ for some } u_1\in U\}$;
By equations : $\{\alpha\delta-\beta\gamma = u_2; -\beta+\alpha e_{-1} = u_1e_{-1}(\delta-\gamma e_{-1})$ and $\delta-\gamma e_{-1} = y$ where $u_1,u_2\in U, y\in E^\times\}$, we change the variables $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ by $\{u_1,u_2,y,\gamma\}$, then :

$$(72) = -q^{-2}|U_2(E)|^{-1}\sum_{u_1,u_2\in U,y\in E^\times,\gamma\in E}\phi^a(\mathrm{Tr}_{E/F}(u_1u_2^{-1}y^{1-q}))\Lambda(u_1u_2^{-1}y^{1-q})f(\phi^a)$$

$$= -\frac{1}{(q-1)q}\sum_{y\in E^\times}\phi^a(\mathrm{Tr}_{E/F})(y^{1-q})\Lambda(y^{1-q})f(\phi^a) = -q^{-1}\sum_{y\in E^\times,\mathrm{N}_{E/F}(y)=1}\phi(\mathrm{Tr}_{E/F}(y))\Lambda(y)f(\phi^a).$$

Similarly we obtain

$$\kappa_a^s = -q^{-1}\sum_{y\in E^\times,\mathrm{N}_{E/F}(y)=s}\phi(\mathrm{Tr}_{E/F}(y))\Lambda(y)f(\phi^{a\,\mathrm{N}_{E/F}(y)}).$$

Finally

$$\kappa_a = -q^{-1}\sum_{y\in E^\times}\phi(Tr_{E/F}(y))\Lambda(y)f(\phi^{aN_{E/F}(y)})$$

and $V_1^{U_2(E)}$ is one dimension, it implies that :

$$(\pi_0(\omega)j(f))(\xi_a) = j(\pi_\Lambda(\omega)f)(\xi_a),$$

which means $\pi_0(\omega)j(f) = j(\pi_\Lambda(\omega)f)$, Hence $\pi_0\simeq\pi_\Lambda$. Finally we achieve the main theorem in this section

Theorem 5.15. *The decomposition of the representation $(\pi, G\times H, W)$ is following :*

$$\pi = \bigoplus_{\psi\in\mathrm{Irr}(F^\times),\Psi\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Psi=\psi\circ\mathrm{N}_{E/F}}\psi\cdot 1_G\otimes\Psi\cdot 1_H \oplus \bigoplus_{\psi\in\mathrm{Irr}(F^\times),\Psi\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Psi=\psi\circ\mathrm{N}_{E/F}}\psi\cdot\mathrm{St}_G\otimes\Psi\cdot\mathrm{St}_H$$

$$\oplus\bigoplus_{\lambda\neq\sigma\in\mathrm{Irr}(F^\times),\Lambda\neq\Sigma\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Lambda=\lambda\circ\mathrm{N}_{E/F},\Sigma=\sigma\circ\mathrm{N}_{E/F}}\pi_{\lambda,\sigma}\otimes\Pi_{\Lambda,\Sigma}\oplus\bigoplus_{\Lambda\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Lambda\neq\Lambda^q}\pi_\Lambda\otimes\Pi_{\Lambda,\Lambda^q}$$

$$\oplus\bigoplus_{\psi\in\mathrm{Irr}(F^\times),\Psi\in\mathrm{Irr}(E^\times),\Psi=\psi\circ\mathrm{N}_{E/F}}\psi\mathrm{St}_G\otimes\Psi\cdot 1_H.$$

5.5 The decomposition of the Weil representation over $GL_2(K)$

5.5.1 Preliminaries

In this section, we denote by : $G = GL_2(K)$, $B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$, $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\}$, $T = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$, $Z = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G\}$; $\mathrm{Gal}(K/F) = \langle \sigma \rangle$; $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ for $b \in K$, $h(a,d) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ for $a, d \in K^{\times}$, $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G$.

Let V be the vector space over K of dimension 2, endowed with symplectic form $\langle, \rangle$, we fix one canonical basis $\{e_1, e_2\}$ i.e. $\langle e_1, e_2 \rangle = 1, \langle e_2, e_1 \rangle = -1$. Clearly $V \simeq K \otimes_F V_0$ as K-vector space, where V_0 is a symplectic vector space over F, generated by the canonical basis $\{e_1, e_2\}$. Via this isomorphism, we identify V with $K \otimes_F V_0$, one could define the Galois group $\mathrm{Gal}(K/F)$ acting over V as follows : $\mathrm{Gal}(K/F) \times K \otimes_F V_0 \longrightarrow K \otimes_F V_0; (\sigma, \sum_i k_i \otimes e_i) \longmapsto \sum_i k_i^{\sigma} \otimes e_i$, naturally $\sigma \in \mathrm{End}_F(V)$. Now let $W = V \otimes_K V \otimes_K V$ be a 8-dimension vector space over K, equipped with symplectic form induced form V. Let us consider the twisted Galois action on W, defined by : $\mathrm{Gal}(K/F) \times W \longrightarrow W; (\sigma, w = \sum_i u_i \otimes v_i \otimes w_i) \longmapsto {}^{\sigma}w = \sum_i w_i^{\sigma} \otimes u_i^{\sigma} \otimes v_i^{\sigma}$. Let $GSp(W)$ be the corresponding similitude group of the symplectic K-space W, there exists a morphism $GL(V) \times GL(V) \times GL(V) \longrightarrow GSp(W)$; By the fixed basis $\{e_1, e_2\}$ of V, we identity $GL_2(K)$ with $GL(V)$, also $GSp(V)$ with $GSp_8(K)$. At the same time, we define the twisted Galois action of $\mathrm{Gal}(K/F)$ on $G \times G \times G$, that is $Gal(K/F) \times (G \times G \times G) \longrightarrow G \times G \times G; (\sigma, h = (g_1, g_2, g_3)) \longmapsto {}^{\sigma}h = (g_3^{\sigma}, g_1^{\sigma}, g_2^{\sigma})$. Let us denote by $W_0 = \{w \in W | {}^{\sigma}w = w\}$, $\overline{G} = \{h \in G \times G \times G | {}^{\sigma}h = h\}$, it verifies ${}^{\sigma}h \cdot {}^{\sigma}w_0 = {}^{\sigma}(h \cdot w_0)$ for $h \in \overline{G}, w_0 \in W_0$.

Proposition 5.16. *(i) W_0 is a vector space over F of dimension 8 and $W \simeq W_0 \otimes_F K$, the restriction of the symplectic form $\langle, \rangle_W$ to F-vector space W_0 is a F-symplectic form.*
(ii) There exists a group morphism $p' : \overline{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow GSp(W_0)$ and $i : G \simeq \overline{G}; g \longmapsto (g, g^{\sigma}, g^{\sigma^2})$.

Proof. (i) See below.
(ii) We only indicate the definition of the map $p' : p'((i(g), \sigma))(\sum_i u_i \otimes v_i \otimes w_i) := i(g^{\sigma})\Big(\sum_i u_i^{\sigma} \otimes v_i^{\sigma} \otimes w_i^{\sigma}\Big)$ for $g \in G$, $\sum_i u_i \otimes v_i \otimes w_i \in W_0$. □

For later application, we describe the symplectic F-vector space W_0, that is $W_0 = \{w_0 = xe_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + \alpha e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + \alpha^{\sigma} e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + \alpha^{\sigma^2} e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + \beta^{\sigma^2} e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + \beta^{\sigma} e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + \beta e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 + y e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 | x, y \in F; \alpha, \beta \in K\}$. Every element $w_0 \in W_0$ is well-defined by the corresponding coefficient, for later free handwrite, we only write $w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ \beta & y \end{pmatrix}$ instead of the whole term. The symplectic form over F-vector space W_0 is defined by

$$\langle w_0, w_0' \rangle = xy' - x'y - \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta') + \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha'\beta) \text{ for } w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ \beta & y \end{pmatrix}, w_0' = \begin{pmatrix} x' & \alpha' \\ \beta' & y' \end{pmatrix}.$$

Let $X_0 = \{w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | w_0 \in W_0\}$, $Y_0 = \{w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y \end{pmatrix} | w_0 \in W_0\}$. Then X_0, Y_0 are two vector spaces over F and $W_0 = X_0 \oplus Y_0$ is a complete polarization for W_0. Via the morphism $p = i \circ p'|_G : G \longrightarrow GSp(W_0)$, it gives rise to a G-action on W_0. The explicit description is the following : let $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $w_0 = \begin{pmatrix} x & \alpha \\ \beta & y \end{pmatrix}$; then $g \cdot w_0 = \begin{pmatrix} x' & \alpha' \\ \beta' & y' \end{pmatrix}$ where $x' = \mathrm{N}_{K/F}(a)x + \mathrm{Tr}_{K/F}(aa^{\sigma}b^{\sigma^2}\alpha) + \mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta) + \mathrm{N}_{K/F}(b)y$; $\alpha' = aa^{\sigma}c^{\sigma^2}x + (aa^{\sigma}d^{\sigma^2}\alpha + ba^{\sigma}c^{\sigma^2}\alpha^{\sigma} + ab^{\sigma}c^{\sigma^2}\alpha^{\sigma^2}) + (bb^{\sigma}c^{\sigma^2}\beta + ab^{\sigma}d^{\sigma^2}\beta^{\sigma} + ba^{\sigma}d^{\sigma^2}\beta^{\sigma^2}) + bb^{\sigma}d^{\sigma^2}y$; $\beta' = dd^{\sigma}b^{\sigma^2}y + (dd^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta + cd^{\sigma}b^{\sigma^2}\beta^{\sigma} + dc^{\sigma}b^{\sigma^2}\beta^{\sigma^2}) + (cc^{\sigma}b^{\sigma^2}\alpha + dc^{\sigma}a^{\sigma^2}\alpha^{\sigma} + cd^{\sigma}a^{\sigma^2}\alpha^{\sigma^2}) + cc^{\sigma}a^{\sigma^2}x$; $y' = \mathrm{N}_{K/F}(d)y + \mathrm{Tr}_{K/F}(dd^{\sigma}c^{\sigma^2}\beta) + \mathrm{Tr}_{K/F}(cc^{\sigma}d^{\sigma^2}\alpha) + \mathrm{N}_{K/F}(c)x$. We write element $g \in GSp(W_0)$ in the form of $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ where $a \in \mathrm{End}_F(X_0), b \in \mathrm{Hom}_F(Y_0, X_0), c \in \mathrm{Hom}_F(X_0, Y_0), d \in \mathrm{End}_F(Y_0)$.

Corollary 5.17. *Through the morphism p, the explicit expression for the action of $u(b), h(a,d), \omega$ on W_0 is described as following :*
(1) $p(u(b)) = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & m^{\vee} \end{pmatrix}$ where $b \in K$, $m \in \mathrm{End}_F(X_0)$, $n \in \mathrm{Hom}_F(Y_0, X_0)$, $m^{\vee} \in \mathrm{End}_F(Y_0)$: the contragredient of m for the symplectic form $\langle, \rangle$ and $m\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \mathrm{Tr}_{K/F}(b^{\sigma^2}\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}\beta)+\mathrm{N}_{K/F}(b)y & b^{\sigma}\beta^{\sigma}+b\beta^{\sigma^2}+bb^{\sigma}y \\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $m^{\vee}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta+b^{\sigma^2}y & y\end{pmatrix}$;

(2) $p(h(a,d))=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n\end{pmatrix}$ *where* $m\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{K/F}(a)x & aa^{\sigma}d^{\sigma^2}\alpha \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dd^{\sigma}a^{\sigma^2}\beta & \mathrm{N}_{K/F}(d)y\end{pmatrix}$;

(3) $p(\omega)=\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0\end{pmatrix}$ *where* $u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & -\beta \\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $v\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -x\end{pmatrix}$.

Let (ρ, V) be the Weil representation, associated to the similitude symplectic group $GSp(W_0)$. Via the morphism in Proposition 5.16, it gives rise to one representation $(\pi', G\rtimes \mathrm{Gal}(K/F), V)$. We denote by $\pi=\mathrm{Res}_G^{G\rtimes \mathrm{Gal}(K/F)}\pi'$. The whole goal of this section is to determine the isotropic components of the representation π. The representation π can be realized in vector space $V=\mathbb{C}^{Y_0\times X_F}$.

Proposition 5.18. *For the representation $(\pi, G, \mathbb{C}^{Y_0\times X_F})$, the action is determined by the following formulas :*

(1) $(\pi(u(b))F)\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix},\psi\Big)=\psi\Big(\mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}\beta y)-\mathrm{N}_{K/F}(b)y^2-\mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta\beta^{\sigma^2})\Big)F\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta-b^{\sigma^2}y & y\end{pmatrix},\psi\Big)$;

(2) $(\pi(h(a,d))F)\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix},\psi\Big)=\chi_q^{+}(\mathrm{N}_{K/F}(ad))F\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^{\sigma}a^{\sigma^2}}\beta & \mathrm{N}_{K/F}(a)y\end{pmatrix},\psi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big)$;

(3) $(\pi(\omega)F)\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix},\psi\Big)=q^{-2}\sum_{\beta'\in K, y'\in F}F\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta' & y'\end{pmatrix},\psi\Big)\psi(yy'+\mathrm{Tr}_{K/F}(\beta\beta'))$.

Proof. It follows from the formulas (1)—(4) in Subsection 2.1 and Corollary 5.17. For (3), one should choose a certain basis (see my thesis for more details). □

5.5.2 Determine the principal series components of π

Let $\alpha,\beta\in \mathrm{Irr}(K^{\times})$, to determine the principal series components of π, it involves to calculate the dimension of the vector space $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_B^G(\alpha\otimes\beta))$. Applying the Frobenius Reciprocity Theorem, we see $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_B^G(\alpha\otimes\beta))\simeq \mathrm{Hom}_T(V_N, \alpha\otimes\beta)\simeq \mathrm{Hom}_T(V^N,\alpha\otimes\beta)$. Therefore we should first describe the vector space V^N, then consider the T-action on it.

Once we regard the action of N on the vector space V, as described in Proposition 5.18 (1), we consider the action $N\times(Y_0\times X_F)\longrightarrow Y_0\times X_F$; $\Big(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix},\psi\Big)\Big)\longmapsto\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta-b^{\sigma^2}y & y\end{pmatrix},\psi\Big)$. And the orbits of this action are following :

(i) Orbit$\{\xi_{(\beta,0;\psi)}\}$ where $\xi_{(\beta,0;\psi)}=\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0\end{pmatrix},\psi\Big)$ for any $\beta\in K,\psi\in X_F$;

(ii) Orbit$\{\eta_{(0,y;\psi)}\}$ where $\eta_{(0,y;\psi)}=\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix},\psi\Big)$ for $y\in F^{\times}$, for any $\psi\in X_F$.

The stabilizers of the chosen element in each orbit is outlined as follows :

(i) $\mathrm{Stab}_N(\xi_{(\beta,0;\psi)})=N$;

(ii) $\mathrm{Stab}_N(\eta_{(0,y;\psi)})=1_N$.

Let F be one function in the vector space V ; then it belongs to V^N if and only if it satisfies the equality :

$$\psi(\mathrm{Tr}_{K/F}(bb^{\sigma}\beta y)-\mathrm{N}_{K/F}(b)y^2-\mathrm{Tr}_{K/F}(b\beta\beta^{\sigma^2}))F\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta-b^{\sigma^2}y & y\end{pmatrix},\psi\Big)=F\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & y\end{pmatrix},\psi\Big). \tag{73}$$

Proposition 5.19. *(1) The vector space V^N is generated by the following functions :*

(i) $F_{(0,0;\psi)}$ $\mathrm{supp}(F_{(0,0;\psi)})=$ *Orbit* $\{\xi_{(0,0;\psi)}\}$ *and* $F_{(0,0,\psi)}(\xi_{(0,0;\psi)})=1$, *it satisfies equality (73) for any* $\psi\in X_F$ *;*

(ii) $G_{(0,y;\psi)}$ $\mathrm{supp}(G_{(0,y;\psi)})=$ *Orbit* $\{\eta_{(0,y;\psi)}\}$ *and* $G_{(0,y;\psi)}(\eta_{(0,y;\psi)})=1$, *it satisfies equality (73) for any* $y\in F^{\times},\psi\in X_F$.

(2) Let $t=h(a,d)\in T$, the formula for the action of t on the vector space V^N is given as follows :

(i) $\pi(t)F_{(0,0;\psi)}=\chi_q^{+}(\mathrm{N}_{K/F}(ad))F_{(0,0;\psi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)})}$ *;*

(ii) $\pi(t)G_{(0,y;\psi)}=\chi_q^{+}(\mathrm{N}_{K/F}(ad))G_{(0,\frac{1}{\mathrm{N}_{K/F}(a)}y;\psi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)})}$.

Proof. (1) Every element F in V^N, that satisfies the (73), is completely determined by its values over the points $\{\xi_{(\beta,0;\psi)},\eta_{(0,y;\psi)}\}$. Let δ be one point among them ; then $F(\delta)$ can be nonzero if and only if the coefficient on the right hand in equality (73) is trivial over the stabilizer of δ, After checking every such point, we obtain the result.
(2) It is straightforward. □

Let Φ belongs to $\mathrm{Hom}_T(V^N, \alpha \boxtimes \beta)$, it is decided by the following two equations :

$$\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))\Phi(F_{(0,0;\psi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)})}) = \alpha(a)\beta(b)\Phi(F_{(0,0;\psi)}), \tag{74}$$

$$\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))\Phi(G_{(0,\frac{1}{\mathrm{N}_{E/F}(a)}y;\psi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)})}) = \alpha(a)\beta(b)\Phi(G_{(0,y;\psi)}). \tag{75}$$

We define a T-action on the vector space V^N : $t \cdot F_{(0,0;\psi)} := F_{(0,0;\psi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)})}$; and $t \cdot G_{(0,y;\psi)} = G_{(0,\frac{1}{\mathrm{N}_{E/F}(a)}y;\psi^{\mathrm{N}_{E/F}(ad)})}$ for any $t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. For such action, there are two kinds of orbits : (1) Orbit $\{F_{(0,0;\phi)}\}$ (2) Orbit $\{G_{(0,1;\phi)}\}$ for one fixing $\phi \in X_F$. The stabilizer of the representative element in each orbit is presented as follows : (1) $\mathrm{Stab}_T(F_{(0,0;\phi)}) = \{h(a,d) \in T | \mathrm{N}_{K/F}(ad) = 1\}$; (2) $\mathrm{Stab}_T(G_{(0,1;\phi)}) = \{h(a,d) \in T | \mathrm{N}_{K/F}(a) = \mathrm{N}_{K/F}(d) = 1\}$. Now we get the following statement relative to the principal series components of the representation π :

Proposition 5.20. *Let $\alpha, \beta \in \mathrm{Irr}(K^\times)$. Then :*
(1) if $\alpha = \chi_1 \circ \mathrm{N}_{K/F}, \beta = \chi_2 \circ \mathrm{N}_{K/F}$ for pair characters $\chi_1 \neq \chi_2 \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ then $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_B^G(\alpha \otimes \beta)) = 1$.
(2) if $\alpha = \beta = \chi \circ \mathrm{N}_{K/F}$ for character $\chi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ then $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_B^G \alpha \cdot 1_B) = 2$.
For the other kind of pair characters $\alpha, \beta \in \mathrm{Irr}(K^\times)$, $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_B^G(\alpha \otimes \beta)) = 0$.

Proof. Let $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathrm{Ind}_B^G(\alpha \otimes \beta)) \simeq \mathrm{Hom}_T(V^N, \alpha \otimes \beta)$, the function Φ is completely determined by its values on the points $F_{(0,0;\phi)}$ and $G_{(0,1;\phi)}$. The values $\Phi(F_{(0,0;\phi)})$ can be any complex number iff $\alpha \otimes \beta(t) = 1$ for $t = h(a,d) \in \mathrm{Stab}_T(F_{(0,0;\phi)})$ which is equivalent to $\alpha = \beta = \chi \circ \mathrm{N}_{K/F}$ for some character $\chi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$. Similarly the values $\Phi(G_{(0,1;\phi)})$ can be any complex number iff $\alpha = \chi_1 \circ \mathrm{N}_{K/F}, \beta = \chi_2 \circ \mathrm{N}_{K/F}$ for characters $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(F^\times)$, thus we achieve the result. □

Now we are reduced to check whether the representation $\chi \circ \mathrm{N}_{E/F} \cdot 1_G$ appears in the decomposition of π. Let $(\alpha \cdot \pi, V_\alpha)$ be the twist representation of π by the character $\alpha = \chi \circ \mathrm{N}_{K/F} \in \mathrm{Irr}(G)$. Since $\mathrm{Hom}_G(\pi, \alpha^{-1} \cdot 1_G) \simeq V_\alpha^G$. It is enough to determine the dimension of V_α^G for the representation $(\alpha \cdot \pi, G, V_\alpha)$. First we notice that $V_\alpha^N \simeq V^N$ which is generated by functions $\{F_{(0,0;\psi)}, G_{(0,y;\psi)}\}$ and the action of T on V_α^N is given by the following forms : (1) $(\alpha \cdot \pi)(h(a,d))F_{(0,0;\psi)} = \chi \cdot \chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))F_{(0,0;\psi^{\mathrm{N}_{E/F}(ad)})}$; (2)$(\alpha \cdot \pi)(h(a,d))G_{(0,y;\psi)} = \chi \cdot \chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))G_{(0,\frac{1}{\mathrm{N}_{K/F}(a)}y;\psi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)})}$.

Proposition 5.21. *The vector space V_α^B is generated by two non-zero functions $A = \sum_{t \in T} \alpha \cdot \pi(t) F_{(0,0;\phi)}$ and $B = \sum_{t \in T} \alpha \cdot \pi(t) G_{(0,1;\phi)}$ for the fixed $\phi \in X_F$.*

Proof. It is straightforward. □

The final key step is to consider the action of ω on the vector space V_α^B. Since $\alpha \cdot \pi(\omega)A, \alpha \cdot \pi(\omega)B$ both lie in V_α^T ; therefore we only need to decide their values on the following four kinds of points : (1) $x_{0,0} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi\right)$; (2) $x_{1,0} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \phi\right)$; (3) $x_{0,1} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi\right)$; (4) $y_k = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \phi^k\right)$ for the fixed character $\phi \in X_F$, $k \in F^\times$. After adequate calculation(see my thesis for more details), we obtain the following table for the values of the functions $A, B, \alpha \cdot \pi(\omega)A, \alpha \cdot \pi(\omega)B$ over the above points :

	x_{00}	x_{01}	x_{10}	y_k
A	$(q-1)(q^2+q+1)^2$	0	0	0
B	0	$(q^2+q+1)^2$	0	$\chi\chi_q^+(k)\phi(-k)(q^2+q+1)^2$
$\alpha \cdot \pi(\omega)A$	$q^{-2}(q-1)(q^2+q+1)^2$	$q^{-2}(q-1)(q^2+q+1)^2$	$q^{-2}(q-1)(q^2+q+1)^2$	$\chi\chi_q^+(k)q^{-2}(q-1)(q^2+q+1)^2$
$\alpha \cdot \pi(\omega)B$	$-q^{-1}(q-1)(q+1)(q^2+q+1)^2$	$q^{-1}(q+1)(q^2+q+1)^2$	$q^{-1}(q^2+q+1)^2$	

Corollary 5.22. *The element $qA - (q-1)B \in V_\alpha^B$ is $\pi(\omega)$ invariant.*

Proof. Let us consider $C = \sum_{g \in G} \alpha \cdot \pi(g) F_{(0,0;\phi)}$; then $C(x_{0,0}) = \sum_{n \in N, b \in B} \alpha \cdot \pi(n) \alpha \cdot \pi(\omega) \alpha \cdot \pi(b) F_{(0,0;\phi)}(x_{0,0}) + \sum_{b \in B} \alpha \cdot \pi(b) F_{(0,0;\phi)}(x_{0,0}) = q^3[\sum_{n \in N} \alpha \cdot \pi(n) \alpha \cdot \pi(\omega) A + A](x_{0,0}) = q^3[q^3 \alpha \cdot \pi(\omega) A(x_{0,0}) + A(x_{0,0})] = q^3(q^2-1)(q^2+q+1) \neq 0$. As $\pi(\omega)A \neq A$, this means that $\dim V_\alpha^G = 1$. So there exists two constants $a, b \in \mathbb{C}^\times$ such that $aA + bB$ is $\pi(\omega)$-invariant, by the above diagram, we can set $a = q, b = -(q-1)$. □

Corollary 5.23. *For any character $\chi \in \mathrm{Irr}(F^\times)$ and $\alpha^{-1} = \chi^{-1} \circ \mathrm{N}_{K/F}$:*
(1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \alpha^{-1} \cdot 1_G) = 1$ *;*
(2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \alpha^{-1} \cdot \mathrm{St}_G) = 1$.

Proof. (1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \alpha^{-1} \cdot \mathrm{St}_G) \simeq V_\alpha^G$ and $\pi(\omega)A \neq A$, $\pi(\omega)(qA - (q-1)B) = qA - (q-1)B$, it implies $\dim_{\mathbb{C}} V_\alpha^G = 1$.
(2) It follows from above (1) and Proposition 5.20. □

Proposition 5.24. *The non-cuspidal part of the Weil representation π is presented as follows :*

$$\pi_{non-cusp} = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Irr}_{non-cusp}(GL_2(F))} \mathrm{Bc}_{K/F}(\sigma),$$

where $\pi_{non-cusp}$ is the non-cuspidal part of the representation π and $\mathrm{Bc}_{K/F}$ is the operator of base change from $\mathrm{Irr}(GL_2(F))$ to $\mathrm{Irr}(GL_2(K))$.

Proof. It follows from Proposition 5.4(2) and Proposition 5.20 and Corollary 5.23. □

5.5.3 Determination of the cuspidal components of the representation π

At the beginning, we recall the definition of i-restriction, norm operator and liftings in section 6 ; see [Gy] or [Di] for discussing more details .

In this subsection, let K_1 (resp. F_1) be the quadratic field extension over K (resp. F) and assume $K_1 \supseteq F_1$. We fix one algebraic closed field $\overline{F}$ of F which contains K_1. Let σ be the Frobenius element of $Gal(\overline{F}/F)$ and $Gal(K_1/K) = \langle \Omega \rangle, Gal(F_1/F) = \langle \omega \rangle$. By restriction, we identify $\mathrm{Gal}(F_1/F)$ with $\mathrm{Gal}(K_1/K)$. We follow the notations in subsection 5.1 Preliminaries : V_0 is a non-degenerate symplectic vector space over F of dimension 2 and $V \simeq K \otimes_F V_0$, $W_0 = (V^{\otimes 3})^{\mathrm{Gal}(K/F)}$ the set of twisted $\mathrm{Gal}(K/F)$ invariant elements which is a F-symplectic vector space of dimension 8. Let us denote by $V_1 \simeq K_1 \otimes_F V_0$ and $W_1 = (V_1^{\otimes 3})^{\mathrm{Gal}(K_1/F_1)}$ the set of twisted $\mathrm{Gal}(K_1/F_1)$ invariant element which is also a F_1-symplectic vector space of dimension 8. The canonical map $V \overset{i_V}{\hookrightarrow} V_1$ yields an embedding $V \otimes_K V \otimes_K V \hookrightarrow V_1 \otimes_{K_1} V_1 \otimes_{K_1} V_1$ that is compatible with the twisted Galois action of the group $\mathrm{Gal}(F_1/F) \simeq \mathrm{Gal}(K_1/K)$. It follows that we could view W_0 as a subset of W_1 thus $V_1 \simeq V \otimes_K K_1$ and $W_1 \simeq W_0 \otimes_F F_1$.

Proposition 5.25. *The following diagram is commutative*

$$\begin{array}{ccc} GL_K(V) & \xrightarrow{p_0} & GSp_F(W_0) \\ {\scriptstyle e_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_{W_0}} \\ GL_{K_1}(V_1) & \xrightarrow{p_1} & GSp_{F_1}(W_1) \end{array},$$

where the map e_V, e_{W_0} are defined from $V_1 \simeq V \otimes_K K_1$ and $W_1 \simeq W_0 \otimes_F F_1$.

Proof. It follows from above discussing and the definition of p_0, p_1. □

The proceeding proposition indicate that we can view $GL_K(V)$ as $\mathbf{GL}_V(K)$ and $GL_{K_1}(V_1)$ as $\mathbf{GL}_V(K_1)$, also $GSp_F(W_0)$ as $\mathbf{GSp}_{W_0}(F)$ and $GSp_{F_1}(W_1)$ as $\mathbf{GSp}_{W_0}(F_1)$ where $\mathbf{GL}_V$, $\mathbf{GSp}_{W_0}$ is the algebraic group schemes associated to V and W_0. More generally, let K_i/K(resp. F_i/F) be a Galois field extension of dimension i and assume $K_i \supset F_i$, we also have the similar map p_i and the analogous diagram as in Proposition 5.25. In fact it defines a morphism of group schemes from $R_{K/F}(\mathbf{GL}_V)$ to $\mathbf{GSp}_{W_0}$, here $R_{K/F}$ is the corestriction of $\mathbf{GL}_V$ from K to F.

Now we come back to our primary problem. Let (ρ_1, V_1) (resp. (ρ, V)) be the Weil representation over the group $GSp_8(F_1)$ (resp. $GSp_8(F)$). By fixing some canonical basis, we could view ρ_i as the Weil representation over $\mathbf{GSp}_{W_0}(F_i)$. Let π_i be the restriction representation of ρ_i to $\mathbf{GL}_V(K_i) \simeq GL_2(K_i)$. Of course for the means of the notations, $F_0 = F, K_0 = K$ and $\pi_0 = \pi, \rho_0 = \rho$.

Let $\Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}} = \mathrm{Bc}_{K_1/K}(\Pi_\Lambda)$ which belongs to $\mathrm{Irr}(GL_2(K_1))$ for one cuspidal representation Π_Λ of the group $GL_2(K)$. Let us denote by $\widetilde{\Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}}}$ the unique representation of the group $\mathrm{Gal}(K_1/K) \ltimes GL_2(K_1)$ such that 0-res($\widetilde{\Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}}}$)= $\Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}}$ and 1-res($\widetilde{\Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}}}$)= Π_Λ.

By the morphism from $R_{K/F}(\mathbf{GL}_V)$ to $\mathbf{GSp}_{W_0}$, it induces a map from $\mathrm{Gal}(F_1/F) \ltimes R_{K/F}(\mathbf{GL}_V)(F_1)$ to $\mathrm{Gal}(F_1/F) \ltimes \mathbf{GSp}_{W_0}(F_1)$. If we identify $\mathrm{Gal}(K_1/K)$ with $\mathrm{Gal}(F_1/F)$ then one can see that $\mathrm{Gal}(F_1/F) \ltimes R_{K/F}(\mathbf{GL}_V)(F_1)$ is just the group $\mathrm{Gal}(K_1/K) \ltimes \mathbf{GL}_V(K_1)$ and we denote the above map by $\widetilde{p_1}$.

By the Theorem 5.44 in section 6, there exists a unique representation $\widetilde{\rho_1}$ of the group $\mathrm{Gal}(F_1/F) \ltimes \mathbf{GSp}_{W_0}(F_1)$ such that 0-res($\widetilde{\rho_1}$)= ρ_1 and 1-res($\widetilde{\rho_1}$)= ρ. Via the map $\widetilde{p_1}$, let us denote by $\widetilde{\pi_1} = \widetilde{\rho_1}|_{\mathrm{Gal}(K_1/K)\ltimes \mathbf{GL}_V(K_1)}$. Applying the Lemma 5.28, one can see 0-res($\widetilde{\pi_1}$)= π_1 and 1-res($\widetilde{\pi_1}$)= π.

By Proposition 5.20, $\langle \pi_1, \Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}}\rangle_{GL_2(K_1)} = 1$ for $\Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{K_1/F_1}$ where λ is a regular character of $F_1^\times$. And by Lemma 5.27(i), the integer $\langle \widetilde{\pi_1}, \widetilde{\Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}}}\rangle_{\mathrm{Gal}(K_1/K)\ltimes \mathbf{GL}_V(K_1)} = \frac{1}{2}\Big(\langle \pi_1, \Pi_{\Lambda,\Lambda^{q^3}}\rangle_{GL_2(K_1)} + \langle \pi, \Pi_\Lambda\rangle_{GL_2(K)}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \langle \pi, \Pi_\Lambda\rangle_{GL_2(K)}\Big)$ for $\Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{K_1/F_1}$. It follows that for such Λ, $\langle \pi, \Pi_\Lambda\rangle_{GL_2(K)} \geq 1$. By comparing the dimension of the representation π and the total dimension of the principal series representations of the group $GL_2(K)$ which appear in π as described in Proposition 5.24, we see that the above inequality must be an equality. Of course, the other kind of cuspidal representations of the group $GL_2(K)$ will not appear as a component of π. Finally we achieve the main theorem in this section :

Theorem 5.26. *The decomposition of* (π, V) *is presented as follows :*

$$\pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Irr}(GL_2(F))} \mathrm{Bc}_{K/F}(\sigma),$$

where $\mathrm{Irr}(GL_2(F))$ *is the set of the classes of the irreducible representations of* $GL_2(F)$*, and* $Bc_{K/F}$ *is the base change operator from* $\mathrm{Irr}(GL_2(F))$ *to* $\mathrm{Irr}(GL_2(K))$*.*

Proof. It follows from the result in Proposition 5.24 for the non-cuspidal representations and above discussing for the cuspidal representations. □

5.6 The liftings of the Weil representations over the groups Sp_{2n} and GSp_{2n}

The purpose of this section is to establish the (Shintani)-lift of the Weil representations associated to Sp_{2n} and GSp_{2n}. It is almost entirely independent of the previous sections. The results we obtain in this section rely on some results in [Gy] and [Ge].

5.6.1 Preliminaries

We begin with recalling some results which have been established in [Gy]. Let X be a set on which there exists a σ-action, we denote by X_σ the set of σ-fixed points. Let $\mathbf{G}$ be a connected linear algebraic group over field F with Frobenius map σ. We denote by : $\overline{F}$ the algebraic closure of F, F_i the σ^i-fixed points of $\overline{F}$, $\mathbf{G}(F_i)$ the F_i-geometric points of $\mathbf{G}$ and $C(\mathbf{G}(F_i))$ the set of complex valued class functions of $\mathbf{G}(F_i)$. For simplicity we use the same notation for a representation and its character as a class function.

From now on, we always fix a natural number m and let $\xi = exp(2\pi i/m)$. Via the map $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F_m/F)$, we regard the Frobenius element σ as a generator for the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)$. Let us denote by $\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)$ the subset of semi-product group $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \mathbf{G}(F_m)$ which consists of elements (σ^i, g) for $g \in \mathbf{G}(F_m)$.

In the article [Gy], Gyoja constructs the norm map N_i which induces a bijection from the set of $\mathbf{G}(F_m)$-conjugacy classes of $\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)$ onto the set of conjugacy classes of $\mathbf{G}(F_m)_{\sigma^i} = \mathbf{G}(F_{(m,i)})$. Through this map, he defines the i-restriction map from $C(\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \mathbf{G}(F_m))$ to $C(\mathbf{G}(F_{(m,i)}))_\sigma$ such that $(i\text{–}res(f)) \circ \mathrm{N}_i = f|_{\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)}$ for any $f \in C(\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \mathbf{G}(F_m))$.

Lemma 5.27. *(i) For any* $f, g \in C(\mathbf{G}(F_m)_{\sigma^i})$ *then* $\langle f, g\rangle_{\mathbf{G}(F_m)_{\sigma^i}} = \langle f \circ N_i, g \circ N_i\rangle_{\sigma^i \ltimes \mathbf{G}(F_m)}$*.*
(ii) The i-restriction defines an isomorphism $C(\,\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{G}(F_m)) \simeq \oplus_{i=0}^{m-1} C(\mathbf{G}(F_m)_{\sigma^i})_\sigma$*.*

Proof. See [Gy], page 1 introduction and page 11 Corollary 3.3. □

Lemma 5.28. *Let $\boldsymbol{H}$ be a connected closed subgroup of $\boldsymbol{G}$ defined over F. Then the following diagrams are commutative*

$$\begin{array}{ccc} C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{H}(F_m)) & \xrightarrow{\operatorname{Ind}} & C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{G}(F_m)) \\ \downarrow{\scriptstyle i-res} & & \downarrow{\scriptstyle i-res} \\ C(\boldsymbol{H}(F_{(m,i)}))_\sigma & \xrightarrow{\operatorname{Ind}} & C(\boldsymbol{G}(F_{(m,i)}))_\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{G}(F_m)) & \xrightarrow{\operatorname{Res}} & C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{H}(F_m)) \\ \downarrow{\scriptstyle i-res} & & \downarrow{\scriptstyle i-res} \\ C(\boldsymbol{G}(F_{(m,i)}))_\sigma & \xrightarrow{\operatorname{Res}} & C(\boldsymbol{H}(F_{(m,i)}))_\sigma \end{array}$$

where Ind *and* Res *mean the induction map and restriction map. Let $\boldsymbol{H}$ be normal and $\pi : \boldsymbol{G} \longrightarrow \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ be the canonical homomorphism. Then the following diagrams are commutative :*

$$\begin{array}{ccc} C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{G/H}(F_m)) & \xrightarrow{\pi^\star} & C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{G}(F_m)) \\ \downarrow{\scriptstyle i-res} & & \downarrow{\scriptstyle i-res} \\ C(\boldsymbol{G/H}(F_{(m,i)}))_\sigma & \xrightarrow{\pi^\star} & C(\boldsymbol{G}(F_{(m,i)}))_\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{G}_1(F_m))\otimes\cdots\otimes C(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{G}_n(F_m)) & \longrightarrow & C\Big(\operatorname{Gal}(F_m/F)\ltimes (\boldsymbol{G}_1\times\cdots\times\boldsymbol{G}_n)(F_m)\Big) \\ \downarrow{\scriptstyle i-res\otimes\cdots\otimes i-res} & & \downarrow{\scriptstyle i-res} \\ C(\boldsymbol{G}_1(F_{(m,i)}))_\sigma\otimes\cdots\otimes C(\boldsymbol{G}_n(F_{(m,i)}))_\sigma & \longrightarrow & C(\boldsymbol{G}_1(F_{(m,i)})\times\cdots\times\boldsymbol{G}_n(F_{(m,i)}))_\sigma \end{array}$$

here $\pi_i : \operatorname{Gal}(F_m/F)\boldsymbol{G}(F_m) \longrightarrow \operatorname{Gal}(F_m/F)\boldsymbol{G/H}(F_m)$ is defined by $(\pi(\sigma^i, x)) = \sigma^i\pi(x)$ for $(i = 0, \cdots, n-1)$.

Proof. See [Gy] page 12, Lemma 3.6 □

Lemma 5.29. *If $\boldsymbol{G}$ is an abelian algebraic group then the norm map is defined as follows : $N_i : \sigma^i \ltimes \boldsymbol{G}(F_m) \longrightarrow \boldsymbol{G}; (\sigma^i, x) \mapsto (1, \sigma^{im/d}(x)\cdots\sigma^i(x)x)$ where $d = (m, i)$, $ti \equiv d (mod\, m)$, here we identify $\boldsymbol{G}$ with $1 \ltimes \boldsymbol{G}$.*

Proof. It follows from the definition of the norm map. □

We also recall some known facts about rational algebraic groups for later application. Let us denote by $\mathscr{B}_F$(resp. $\mathscr{T}_F$) the set of all F-rational Borel (resp. Torus) subgroups of the connected algebraic group $\mathbf{G}$.

Lemma 5.30. *(1) Let $a \in \mathbf{G}(F)$ be a semi-simple element; then there exists a F-rational torus $\boldsymbol{T} \in \mathscr{T}_F$ such that $a \in \boldsymbol{T}(F)$.*
(2) Let $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ be any two elements in $\mathscr{B}_F$; then $\boldsymbol{B}_1(F)$ and $\boldsymbol{B}_2(F)$ are conjugated under $\mathbf{G}(F)$.
(3) Let $u \in \mathbf{G}(F)$ be a unipotent element; then there exists a F-rational Borel subgroup $\boldsymbol{B}$ such that $u \in \boldsymbol{B}(F)$.

Proof. See [DM] : page 40 Corollary, page 39 Application (i) and page 42 Corollary. □

5.6.2 The liftings of $\mathbf{Sp}_{2n}$ and $\mathbf{GSp}_{2n}$

In this subsection, for our purpose, we frequently use some results in [Ge] without pointing out exactly which one. For this reason, one has first to read that paper. Let V be a vector space over F, equipped with a non-degenerate symplectic form $\langle,\rangle_F$. We fix a complete polarisation $V = X \oplus X^\star$. Let $H(V)$ be the Heisenberg group defined by $(v_1, t_1)(v_2, t_2) := (v_1 + v_2, t_1 + t_2 + \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{2})$ for $v_i \in V, t_i \in F$. This defines a Heisenberg group scheme $\mathbf{H}_V$, that means $\mathbf{H}_V : Alg_F \longrightarrow Groups; R \longmapsto H(V \otimes_F R)$ a functor from the category of unital commutative associative F-algebras to the category of groups, here $\mathbf{H}(V \otimes_F R)$ is the Heisenberg group induced from $H(V)$. By fixing one canonical symplectic basis $\{e_1, \cdots, e_n; e_1^\star, \cdots, e_n^\star\}$, one can see $\mathbf{H}_V(\overline{F})$ is a connected linear algebraic group in the usual language (for example in [Bo]).

Let $\mathbf{Sp}_V$ (resp. $\mathbf{GSp}_V$) be the symplectic algebraic group (resp. the similitude symplectic algebraic group) associated to V, $\mathbf{P}_X$ the parabolic subgroup relative to X, $\mathbf{T}$ one maximal F-torus of $\mathbf{Sp}_V$, $\mathbf{V}$ the F-algebraic vector space associated to V, $\mathbf{U}$ one unipotent subgroup of $\mathbf{Sp}_V$. Since the actions involved in the semi-product groups $\mathbf{Sp}_V(\overline{F}) \ltimes \mathbf{H}_V(\overline{F})$, $\mathbf{GSp}_V(\overline{F}) \ltimes \mathbf{H}_V(\overline{F})$, $\mathbf{P}_X(\overline{F}) \ltimes \mathbf{H}_V(\overline{F})$, $\mathbf{T}(\overline{F}) \ltimes \mathbf{H}_V(\overline{F})$ and $\mathbf{U}(\overline{F}) \ltimes \mathbf{H}_V(\overline{F})$ all are algebraic, naturally all the above groups are connected linear algebraic groups.

The action of $\mathbf{T}$ on $\mathbf{V}$ leads to a decomposition of $\mathbf{V}$ parameterized by weights, i.e. $\mathbf{V} = \oplus_{\epsilon\in P}\mathbf{V}^{\epsilon}$ where P the set of weights of $\mathbf{T}$ in $\mathbf{V}$. The action of $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ permutes the spaces $\mathbf{V}^{\epsilon}$. For each orbit $\omega = \{\epsilon\} \in P/\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, the space $\mathbf{V}^{\omega} = \sum_{\epsilon\in\omega}\mathbf{V}^{\epsilon}$ is defined over F. Let $\mathbf{V}^{\Omega} = \mathbf{V}^{\omega} + \mathbf{V}^{-\omega}$ where $\Omega = \omega \cup -\omega$. The restriction of $\langle,\rangle_{\mathbf{V}}$ to $\mathbf{V}^{\Omega}$ is a non-degenerate alternating bilinear form, yielding an orthogonal decomposition $\mathbf{V} = \oplus_{\Omega\in P/\pm\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\mathbf{V}^{\Omega}$. Let us denote by $q_{\Omega} = \|\mathbf{V}^{\omega}(F)\|$, $F_{\Omega} \supset F$ the field of order q_{Ω}. We repeat one useful lemma in [Ge] page 92-93.

Lemma 5.31. *Fix an orbit $\Omega \in P/\pm\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ and ϵ in Ω, for $x, y \in \boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$, we define*

$$\langle x, y\rangle_{\epsilon} = \langle x_{\epsilon} + x_{-\epsilon}, y_{\epsilon} + y_{-\epsilon}\rangle_{\mathbf{V}^{\Omega}(F)} = \langle x, y\rangle_{-\epsilon}$$

(1) If the orbit of ϵ by $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ is nonsymmetric then
- *(a) $\boldsymbol{V}^{\Omega}$ is a direct sum of $\boldsymbol{V}^{\omega}$ and $\boldsymbol{V}^{-\omega}$ if $\Omega = \pm\omega$, $\langle,\rangle_{\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)}$ defines a duality between $\boldsymbol{V}^{\omega}(F)$ and $\boldsymbol{V}^{-\omega}(F)$;*
- *(b) $\boldsymbol{V}^{\epsilon}$ is a one dimensional space defined over F_{Ω} ;*
- *(c) The following mapping $x \longmapsto (x_{\epsilon}, x_{-\epsilon})$ for $x \in \boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ is an isomorphism of the F-vector space $\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ onto $\boldsymbol{V}^{\epsilon}(F_{\Omega}) \times \boldsymbol{V}^{-\epsilon}(F_{\Omega})$; it provides $\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ with a F_{Ω}-structure for which the symplectic form $\langle,\rangle_{\epsilon}$ is non-degenerate and satisfies $\mathrm{Tr}_{F_{\Omega}/F}\langle x, y\rangle_{\epsilon} = \langle x, y\rangle_{\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)}$ for $x, y \in \boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$;*
- *(d) The action of $\boldsymbol{T}(F)$ on $V^{\Omega} = \boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ leaves $\langle,\rangle_{\epsilon}$ invariant and defines an isomorphism of $\boldsymbol{T}^{\Omega}(F)$ onto the subgroup $\boldsymbol{G}_{\epsilon}(F_{\Omega})$ of $\boldsymbol{Sp}_{V^{\Omega}}(F_{\Omega})$ respect to $\langle,\rangle_{\epsilon}$ which leaves $\boldsymbol{V}^{\epsilon}(F_{\Omega})$ and $\boldsymbol{V}^{-\epsilon}(F_{\Omega})$ invariant and the map $t \longmapsto t^{\epsilon}$ is an isomorphism of $\boldsymbol{T}^{\Omega}(F)$ and $F_{\Omega}^{\times}$;*
- *(e) There exists a unique non trivial one-dimensional real representation $\chi_{\Omega}^{\boldsymbol{T}(F)}$ of $\boldsymbol{T}(F)$ which factors through $\boldsymbol{T}^{\Omega}(F)$; That is $\chi_{\Omega}^{\boldsymbol{T}(F)}(t) = (t^{\epsilon})^{\frac{(1-q_{\Omega})}{2}}$.*

(2) If the orbit of ϵ is symmetric then :
- *(a) $\boldsymbol{V}^{\epsilon}$ is one-dimensional space defined over the quadratic extension of K_{Ω} of F_{Ω} in $\overline{F}$;*
- *(b) The following mapping $x \longmapsto x_{\epsilon}$ for $x \in \boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ is an isomorphism of the F-vector space $\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ and $\boldsymbol{V}^{\epsilon}(K_{\Omega})$ affords $\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ with a K_{Ω}-structure for which the form $(x, y)_{\epsilon} = \langle x_{-\epsilon}, y_{\epsilon}\rangle$ is non-degenerate skew-hermitian form with associate symplectic form $\langle,\rangle_{\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)}$ such that $\mathrm{Tr}_{K_{\Omega}/F_{\Omega}}(x, y)_{\epsilon} = \langle x, y\rangle_{\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)}$;*
- *(c) The action of $\boldsymbol{T}(F)$ on $\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$ leaves $(,)_{\epsilon}$ invariant and defines an isomorphism of $\boldsymbol{T}^{\Omega}(F)$ onto the unitary subgroup $\boldsymbol{G}_{\epsilon}(F_{\Omega})$ of the Form $(,)_{\epsilon}$ on $\boldsymbol{V}^{\Omega}(F)$;*
- *(d) There exists a unique non trivial one-dimensional real representation $\chi_{\Omega}^{\boldsymbol{T}(F)}$ of $\boldsymbol{T}(F)$ which factors through $\boldsymbol{T}^{\Omega}(F)$. That is $\chi_{\Omega}^{\boldsymbol{T}(F)}(t) = (t^{\epsilon})^{\frac{(1+q_{\Omega})}{2}}$.*

Remark 5.32. *If we change the field F by its finite extension F_i which is Galois over F then the results in proceeding lemma satisfy the respective properties.*

Let χ_{F_i} be the unique non trivial real character of $F_i^{\times}$, it is obviously $\chi_{F_i} = \chi_F \circ \mathrm{N}_{F_i/F}$ where $\mathrm{N}_{F_i/F}$ is the usual norm map. Let ψ_F be a character of F and $\psi_{F_i} = \psi_F \circ \mathrm{Tr}_{F_i/F}$.

Lemma 5.33. *If we regard F_i as $\mathbb{G}_a(F_i)$ and $F_i^{\times}$ as $\mathbb{G}_m(F_i)$ then there exists a unique irreducible character $\widetilde{\psi_{F_m}}$ (resp. $\widetilde{\chi_{F_m}}$) of $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes F_m$ (resp. $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes F_m^{\times}$) such that $i{-}res(\widetilde{\psi_{F_m}}) = \psi_{F_{(m,i)}}$ (resp. $i{-}res(\widetilde{\chi_{F_m}}) = \chi_{F_{(m,i)}}$), where (m, i)=the greatest common divisor of natural numbers m and i.*

Proof. Using the results in Lemma 5.29, one can check the character $\widetilde{\psi_{F_m}}$ defined by $\widetilde{\psi_{F_m}}(\sigma^k, a) := \psi_{F_m}(a)$, satisfies the condition. And the uniqueness follows from Lemma 5.27(ii). The same proof remains valid for $\widetilde{\chi_{F_m}}(\sigma^k, a) := \chi_{F_m}(a)$. □

Let us denote by $\chi_{F_m}^X$ the character of the parabolic subgroup $\mathbf{P}_X(F_m)$ defined by $p \longmapsto \chi_{F_m}(\det_X(p))$, $\mathbf{Z}_V$ the central group scheme of $\mathbf{H}_V$, $\mathbf{X}_V$ the group scheme associated to X. In [Ge], the Weil representation associated to the group $\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$ is directly constructed. That is $\pi_{\psi_{F_m}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{X}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)}^{\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}\chi_{F_m}^X \cdot 1 \cdot \psi_{F_m}$.

Corollary 5.34. *There exists a unique irreducible representation $\widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}}$ of $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \boldsymbol{P}_X(F_m)\boldsymbol{H}_V(F_m)$ such that i-res$(\widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}}) = \pi_{\psi_{F_{(m,i)}}}$.*

Proof. Following from the liftings of the characters of the group $\mathbf{GL}_X$, one can see that there exists a unique irreducible character $\widetilde{\chi^X_{F_m}\cdot 1\cdot\psi_{F_m}}$ of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{X}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)$ such that i-res$(\widetilde{\chi^X_{F_m}\cdot 1\cdot\psi_{F_m}})$= $\chi^X_{F_{(m,i)}}\cdot 1\cdot\psi_{F_{(m,i)}}$. According to the above Lemma 5.28, $\widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}} = \mathrm{Ind}^{\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}_{\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{X}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)}\widetilde{\chi_{F_{(m,i)}}\cdot 1\cdot\psi_{F_{(m,i)}}}$ is the desired representation. And $\pi_{\psi_{F_m}} = 0-res(\widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}}) = \widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}}|_{\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}$ is irreducible, so is $\widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}}$. □

In order to get our desired results, it is necessary to write one model for the Weil representation for $\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$ that has been indicated in [Ge]. The Weil representation $(\rho_{\psi_{F_m}}, W)$ of the group $\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$ can be realized in the space $\mathbb{C}[X^\star]$ of complex functions on $X^\star = \mathbf{X}^\star_V(F_m)$ by the following formulas (see [Ge] for more details) :

$$\Big(\rho_{\psi_{F_m}}((1,(x+x^\star+k)))f\Big)(y^\star) = \psi_{F_m}(k+\langle y^\star, x\rangle)f(x^\star+y^\star), \tag{76}$$

$$\Big(\rho_{\psi_{F_m}}((u(b),1))f\Big)(y^\star) = \psi_{F_m}(\frac{\langle by^\star, y^\star\rangle}{2})f(y^\star), \tag{77}$$

$$\Big(\rho_{\psi_{F_m}}((h(a),1))f\Big)(y^\star) = \chi^X_{F_m}(a)f(a^{\star-1}y^\star), \tag{78}$$

$$\Big(\rho_{\psi_{F_m}}(\omega(c),1))f\Big)(y^\star) = \gamma(\psi_{F_m})^{-l}\chi^X_{F_m}(\det(c))\int_{X^\star} f(x^\star)\psi_{F_m}(\langle x^\star, c^{-1}y^\star\rangle)dx^\star, \tag{79}$$

where $\gamma(\psi_{F_m}) = \int_{F_m}\psi_{F_m}(\frac{t^2}{2})dt$ the Weil constant, $l = \dim_{F_m} X$, $u(b) = \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $h(a) = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^\vee\end{pmatrix}$, $\omega(c) = \begin{pmatrix}0 & c'\\ c & 0\end{pmatrix}\in$ $\mathbf{Sp}_V(F_m)$, and $x\in X, x^\star, y^\star\in X^\star$, $k\in F_m$ and $dx^\star = dx^{\star^\sigma}$.
Consequently we define a Galois action of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)$ on $\mathbb{C}[X^\star]$ by $f^\sigma(x^\star) = f(x^{\star\sigma})$. By the above formulas (76)—(79), one can verify that the map σ defines an intertwining operator between $\rho^\sigma_{\psi_{F_m}}$ and $\rho_{\psi_{F_m}}$. It follows that the representation $\rho_{\psi_{F_m}}$ is extended to a representation $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}$ of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$. Since $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}|_{\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)} = \rho_{\psi_{F_m}}|_{\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)} = \pi_{\psi_{F_m}}$; it implies that $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}|_{\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}$ is equal to $\widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}}$ up to a character of $\mathrm{Gal}(F_m/F)$. Hence we may chose the proper character of $\mathrm{Gal}(F_m/F)$ such that $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}|_{\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{P}_X(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)} = \widetilde{\pi_{\psi_{F_m}}}$.
From now on, we always fix such $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}$.

Proposition 5.35. *The support of the representation $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}$ lies in the set of conjugates of elements in $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)$.*

Proof. By the results in [Ge] page 84, the Weil representation $\rho^\vee_{\psi_{F_m}}\simeq\rho_{-\psi_{F_m}}$ can be realized in $\mathbb{C}[X]$ in terms of the corresponding formulas like (76)—(79), obtained by interchanging $X^\star$ and X. Let $\sigma_{\psi_{F_m}} = \mathrm{Ind}^{\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}_{\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)}1$ be the natural representation of $\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$ in $\mathbb{C}[\mathbf{V}(F_m)]$ which means :

$$\Big(\sigma_{\psi_{F_m}}(h)F\Big)(v) = F(v+v_0)\text{ for }h\in\mathbf{H}_V(F_m)\text{ with projection }v_0\text{ on }\mathbf{V}(F_m), \tag{80}$$

$$\Big(\sigma_{\psi_{F_m}}(s)F\Big)(v) = F(s^{-1}v)\text{ for }s\in\mathbf{Sp}_V(F_m). \tag{81}$$

One can also define an automorphism I on $\mathbb{C}[\mathbf{V}(F_m)]$ by $(IF)(x+x^\star) = \psi_{F_m}(\langle x, x^\star\rangle)F(x+x^\star)$ for $x\in X$ and $x^\star\in X^\star$. In [Ge] page 84, Paul Gérardin verify that $I\cdot\sigma_{\psi_{F_m}} = \rho^\vee_{\psi_{F_m}}\otimes\rho_{\psi_{F_m}}\cdot I$. By the construction of the representation $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}$, we see $\widetilde{\rho^\vee_{\psi_{F_m}}}\otimes\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}\simeq\mathrm{Ind}^{\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}_{\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)}\mathbf{1}$ which implies that the support of the representation $\widetilde{\rho^\vee_{\psi_{F_m}}}\otimes\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}$ lies in the set of conjugates of elements in $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)$, so is $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}$. □

Corollary 5.36. *The support of the class function $i-res(\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}})$ lies in the set of the conjugates of elements in $\mathbf{Sp}_V(F_{(m,i)})\mathbf{Z}_V(F_{(m,i)})$*

Proof. Let (σ^i, g) be an element in $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$ which is conjugated to one element in $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)$ i.e. $(\sigma^j, h)(\sigma^i, g)(\sigma^{-j}, (h^{-1})^{\sigma^{-j}})\in\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)$ therefore $(1,h)(\sigma^i, g)(1,h^{-1})$ also lies in $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{Z}_V(F_m)$. Since the definition of the norm operator is comparing with the product of groups, we can obtain the result. □

Let E_i be a quadratic field extension of F_i, assume $E_0 = E$ and $E_i\supset E_{(i,j)}$ for any $1\le i,j\le m$. Let V'' be an one dimensional vector space over E, endowed with a non-degenerate skew-hermitian form (,), the underlying F-vector space of V'', we denote by V' which is endowed with the non-degenerate symplectic form $\langle,\rangle$ definedly

$\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}_{E/F}(x, y)$.

Let $V' = X' \oplus X'^{\star}$ be a complete polarisation and we denote by $\mathbf{V}''$(resp. $\mathbf{V}', \mathbf{X}'^{\star}$) the associated algebraic vector space of V''(resp. $V', X'^{\star}$). Clearly, the unitary group $U_{V''}(F_m)$, which is the F_m-geometric points of some F-torus $\mathbf{T}$ of $\mathbf{Sp}_{V'}$, can be embedded into $\mathbf{Sp}_{V'}(F_m)$. By the Theorem 3.3 (c) in [Ge] page 73, we know the restriction of the Weil representation $(\rho'_{\psi_{F_m}}, \mathbf{Sp}_{V'}(F_m)\mathbf{H}_{V'}(F_m))$ to the group $U_{V''}(F_m)$ is just $\chi^-_{F_m} \circ det \cdot \rho^{U_{V''}(F_m)}$ where $\chi^-_{F_m}$ is the unique non trivial real representation of the group $U_{V''}(F_m)$ and $\rho^{U_{V''}}(F_m)$ is the sum of all non trivial irreducible representations of $U_{V''}(F_m)$.

Lemma 5.37. *There exists a unique representation $\widetilde{\chi^-_{F_m}}$ of the group* $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \boldsymbol{T}(F_m) \simeq \mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes U_{V''}(F_m)$ *such that $i - res(\widetilde{\chi^-_{F_m}}) = \chi^-_{F_{(m,i)}}$ for $1 \leq i \leq m$.*

Proof. Let $\widetilde{\chi^-_{F_m}}$ be the representation of the groups $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{T}(F_m) \simeq \mathrm{Gal}(F_m/F)U_{V''}(F_m)$ defined by $\widetilde{\chi^-_{F_m}}((\sigma, g)) := \chi^-_{F_m}(g)$. Since $\chi^-_{F_m}$ is σ-invariant, so it is well-defined. And the map N_i is surjective in this case, which implies that $i - res(\widetilde{\chi^-_{F_m}})$ is also a non trivial real character of $\mathbf{T}(F_{(m,i)})$, hence it must be $\chi^-_{F_{(m,i)}}$. □

The representation $\rho'_{\psi_{F_m}}|_{U_{V''}(F_m)\mathbf{H}_{V'}(F_m)}$ could be realized in the space $\mathbb{C}[X'^{\star}]$ by formulas (76)—(79). If we only consider $\rho'_{\psi_{F_m}}|_{U_{V''}(F_m)\mathbf{Z}_{V'}(F_m)}$ then we have the decomposition for the vector space $\mathbb{C}[X'^{\star}]$:

$$\mathbb{C}[X'^{\star}] = \oplus_{k=1}^{q^m} \mathbb{C}G_k,$$

where each G_k is an eigen-vector respect to the character $\chi^-_{F_m}\varphi_k^{U_{V''}(F_m)}\psi_{F_m}$ of the group $U_{V''}(F_m)\mathbf{Z}_{V'}(F_m)$, here $\varphi_k^{U_{V''}(F_m)}$ ranges all non trivial characters of $U_{V''}(F_m)$.

Let I_σ be the $\mathbb{C}$-automorphism of $\mathbb{C}[X'^{\star}]$ defined by $I_\sigma(f)(x'^{\star}) := f(x'^{\star\sigma})$. If $\varphi_k^{U_{V''}(F_m)}$ is not σ^i-invariant then it does not contribute to the trace $\mathrm{Tr}\,(I^i_\sigma\rho'_{\psi_{F_m}}|_{U_{V''}(F_m)\mathbf{Z}_{V'}(F_m)}(g))$ for $g \in U_{V''}(F_m)\mathbf{Z}_{V'}(F_m)$.

Let us denote by $(\widetilde{\rho'_{\psi_{F_m}}}, \mathrm{Gal}(F_m/F)U_{V''}(F_m)\mathbf{H}_{V'}(F_m))$ be one extension representation of $\rho'_{\psi_{F_m}}$, defined by $\widetilde{\rho'_{\psi_{F_m}}}((\sigma, g)) := I_\sigma\rho_{\psi_{F_m}}(g)$ for $g \in U_{V''}(F_m)\mathbf{H}_{V'}(F_m)$. Then

$$\mathrm{Tr}\left(\widetilde{\rho'_{\psi_{F_m}}}(\sigma^i, g)\right) = \mathrm{Tr}\left(I^i_\sigma\rho'_{\psi_{F_m}}(g)\right) = \rho'_{\psi_{F_{(m,i)}}}(\mathrm{N}_i(g)),$$

for any element $g \in U_{V''}(F_m)\mathbf{Z}_{V'}(F_m)$ and each $0 \leq i \leq m$. It means $i - res\left(\widetilde{\rho'_{\psi_{F_m}}}|_{\mathrm{Gal}(F_m/F)U_{V''}(F_m)\mathbf{Z}_{V'}(F_m)}\right) = \rho'_{\psi_{F_{(m,i)}}}|_{U_{V''}(F_m)\mathbf{Z}_{V'}(F_{(m,i)})}$.

Proposition 5.38. *There exists a unique representation $\widetilde{\rho'_{\psi_{F_m}}}$ of the group* $\mathrm{Gal}(F_m/F)U_{V''}(F_m)\boldsymbol{H}_{V'}(F_m)$ *such that $i - res(\widetilde{\rho'_{\psi_{F_m}}}) = \rho'_{\psi_{F_{(m,i)}}}|_{U_{V''}(F_{(m,i)})\boldsymbol{H}_{V'}(F_{(m,i)})}$.*

Proof. It follows from above discussing and Corollary 5.36. □

Proposition 5.39. *There exists a unique representation $\rho_{\psi_{F_m}}^{\widetilde{\boldsymbol{Sp}_{V'}\boldsymbol{H}_{V'}}}$ of the group* $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \boldsymbol{Sp}_{V'}(F_m)\boldsymbol{H}_{V'}(F_m)$ *such that*

$$i - res(\rho_{\psi_{F_m}}^{\widetilde{\boldsymbol{Sp}_{V'}\boldsymbol{H}_{V'}}}) = \rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}^{\boldsymbol{Sp}_{V'}\boldsymbol{H}_{V'}}$$

where $\rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}^{\boldsymbol{Sp}_{V'}\boldsymbol{H}_{V'}}$ is the Weil representation of the group $\boldsymbol{Sp}_{V'}(F_{(m,i)})\boldsymbol{H}_{V'}(F_{(m,i)})$ associated to the character $\psi_{F_{(m,i)}}$.

Proof. Let $g \in \mathbf{Sp}_{V'}(F_{F_{(m,i)}})$. Then g is conjugated to $\mathbf{B}_{V'}(F_{(m,i)})$ or $U_{V''}(F_{(m,i)})$, hence the result comes from Corollary 5.34 and Proposition 5.38. □

Lemma 5.40. *Let $\boldsymbol{T} \in \mathscr{T}_F$ be a maximal F-torus of $\boldsymbol{Sp}_V$. Then the restriction of the Weil representation ρ_{ψ_F} to $\boldsymbol{T}(F) \ltimes \boldsymbol{H}_V(F)$ is isomorphic to $\otimes_{\Omega \in P/\pm \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\rho_{\psi_{F_\Omega}}|_{\boldsymbol{G}_{\epsilon(\Omega)}(F_\Omega) \ltimes \boldsymbol{H}_{V^\Omega}(F_\Omega)}$ via $\boldsymbol{T}(F) \ltimes \boldsymbol{H}_V(F) \longrightarrow \oplus_{\Omega \in P/\pm \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\boldsymbol{G}_{\epsilon(\Omega)}(F_\Omega) \ltimes \boldsymbol{H}_{V^\Omega}(F_\Omega)$, where the notations are the same as in Lemma 5.31 and $\epsilon(\Omega)$ is any element of Ω.*

Proof. See Theorem 4.8 in [Ge]. ◻

Corollary 5.41. *Let $\boldsymbol{T}$ be a F-maximal torus of $\boldsymbol{Sp}_V$. Then $i-res\Big(\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}|_{\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes \boldsymbol{T}(F_m)\boldsymbol{H}_V(F_m)}\Big) = \rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}|_{\boldsymbol{T}(F_{(m,i)})\boldsymbol{H}_V(F_{(m,i)})}$.*

Proof. First we regard Lemma 5.40, let F^i_Ω be the Galois extension of F_Ω of dimension i, such that the diagram
$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F_\Omega \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ F_i & \longrightarrow & F^i_\Omega \end{array}$$
is commutative. If ϵ is non-symmetric, $\mathbf{G}_{\epsilon(\Omega)}$ belongs some F_Ω-splitting Borel subgroup. By the liftings theory for Borel subgroup i.e. Corollary 5.34, there exists a unique irreducible representation $\widetilde{\tau_{\mathbf{G}_\epsilon(\Omega)}}$ of $\mathrm{Gal}(F^m_\Omega/F_\Omega)\ltimes \mathbf{G}_{\epsilon(\Omega)}\mathbf{H}_{V^\Omega}(F^m_\Omega)$ such that $i-res(\widetilde{\tau_{\mathbf{G}_\epsilon(\Omega)}}) = \rho_{\psi_{F_\Omega^{(m,i)}}}|_{\mathbf{G}_{\epsilon(\Omega)}\mathbf{H}_{V^\Omega}(F_\Omega^{(m,i)})}$. If ϵ is symmetric, by above Proposition 5.38, the results remain valid. Hence by Lemma 5.28 and Remark 5.32, it really exists a unique irreducible representation $\widetilde{\tau}$ of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes \mathbf{T}(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$ such that $i-res\Big(\widetilde{\tau}|_{\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes\mathbf{T}(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}\Big) = \rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}|_{\mathbf{T}(F_{(m,i)})\mathbf{H}_V(F_{(m,i)})}$. And the irreducible implies that $\widetilde{\tau}$ and $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}|_{\mathrm{Gal}(F_m/F)\ltimes\mathbf{T}(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}$ is equal to each other up to one character of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)$, but the lifting theory of the Weil representations over $\mathbf{H}_V$ implies that the above character of $\mathrm{Gal}(F_m/F)$ must be trivial. ◻

Let V_+ be one non trivial totally isotropic subspace of V, assume V_+ is not maximal. We choose a decomposition, $V = V_+ + V_0 + V_-$. Let us denote by $\mathbf{V}_+, \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_-$ the corresponding algebraic schemes, and by $\mathbf{P}_{V_+}$ the corresponding parabolic subgroup scheme.

The group $\mathbf{V}_-(F_m)\mathbf{H}_{V_0}(F_m)$ is a subgroup of $\mathbf{H}_V(F_m)$ and $\mathbf{P}_{V_+}(F_m)\ltimes \mathbf{V}_-(F_m)\mathbf{H}_{V_0}(F_m)$ is also a subgroup of $\mathbf{P}_{V_+}(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$, clearly for $\mathbf{P}_{V_+}(F_m)$, there exists an exact sequence

$$1 \longrightarrow \mathbf{U}_{V_+}(F_m) \longrightarrow \mathbf{P}_{V_+}(F_m) \longrightarrow \mathbf{GL}_{V_-}(F_m)\times \mathbf{Sp}_{V_0}(F_m) \longrightarrow 1.$$

It follows that we have the surjective map :

$$\mathbf{P}_{V_+}(F_m)\mathbf{V}_-(F_m)\mathbf{H}_{V_0}(F_m) \xrightarrow{p_{F_m}} \mathbf{GL}_{V_-}(F_m)\times \mathbf{Sp}_{V_0}(F_m)\mathbf{H}_{V_0}(F_m).$$

We recall that $\rho_{\psi_{F_m}}$ is the Weil representation of the group $\mathbf{Sp}_V(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)$ and $\chi_{\mathbf{V}_-(F_m)}\circ\det$ is the unique non trivial real character of $\mathbf{GL}_{V_-}(F_m)$, we write $\rho^{V_0}_{\psi_{F_m}}$ as the Weil representation of the group $\mathbf{Sp}_{V_0}\mathbf{H}_{V_0}(F_m)$. Let $\chi_{\mathbf{V}_-(F_m)}\circ\det\otimes\rho^{V_0}_{\psi_{F_m}}$ be one representation of the group $\mathbf{GL}_{V_-}(F_m)\times\mathbf{Sp}_{V_0}(F_m)\mathbf{H}_{V_0}(F_m)$, via above map p_{F_m}, it gives rise to one representation of the group $\mathbf{P}_{V_+}(F_m)\mathbf{V}_-(F_m)\mathbf{H}_{V_0}(F_m)$, denoted by $\chi_{V_-(F_m)}\rho^{V_0}_{\psi_{F_m}}$.

Proposition 5.42. *For the Weil representation $\rho_{\psi_{F_m}}$, we have*

$$\rho_{\psi_{F_m}}|_{\boldsymbol{P}_{V_+}(F_m)\boldsymbol{H}_V(F_m)} = \mathrm{Ind}^{\boldsymbol{P}_{V_+}(F_m)\boldsymbol{H}_V(F_m)}_{\boldsymbol{P}_{V_+}(F_m)\boldsymbol{V}_-(F_m)\boldsymbol{H}_{V_0}(F_m)}\chi_{V_-(F_m)}\rho^{V_0}_{\psi_{F_m}}.$$

Proof. This comes from the mixed Schödinger model of the Weil representation, and one can see [[Ge], Theorem 2.4] for more details. ◻

Proposition 5.43. *For the representation $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}$, we have $i-res(\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}) = \rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}$ where $\rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}$ is the Weil representation of the group $\boldsymbol{Sp}_V(F_{(m,i)})\boldsymbol{H}_V(F_{(m,i)})$.*

Proof. First we know that every element of $\mathbf{Sp}_V(F_k)$ is either regular elliptic semisimple or conjugated to one element in some proper parabolic subgroup of $\mathbf{Sp}_V(F_k)$ for $1\le k\le m$.
For our purpose, we only need to check that the two class functions $i-res(\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}})$ and $\rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}$ are the same, i.e.

$$i-res(\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}})(A) = \rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}(A) \text{ for } A\in \mathbf{Sp}_V(F_{(m,i)})\mathbf{H}_V(F_{(m,i)}) \tag{82}$$

We proceed by induction on $2n = \dim V$. If $n=1$, it is just the Proposition 5.39. Now assume the result is right for all the dimension strictly smaller than n, let $A=(g,h)\in \mathbf{Sp}_V(F_{(m,i)})\mathbf{H}_V(F_{(F_{(m,i)})})$. If g is elliptic semisimple then by Corollary 5.41, the equality (82) is satisfied; If g lying some proper parabolic subgroup $\mathbf{P}_{V_+}(F_{(m,i)})$, by induction and Lemma 5.28, there exists a unique representation $\widetilde{\chi_{V_-(F_m)}\rho^{V_0}_{\psi_{F_m}}}$ of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)(\mathbf{GL}_{V_-}(F_m)\times$

$\mathbf{Sp}_{V_0}(F_m)\mathbf{H}_{V_0}(F_m))$ such that $i-res(\widetilde{\chi_{\mathbf{V}_-(F_m)}\rho^{V_0}_{\psi_{F_m}}}) = \chi_{\mathbf{V}_-(F_{(m,i)})}\rho^{V_0}_{\psi_{F_{(m,i)}}}$ for $1 \leq i \leq m$. Consequently by Lemma 5.28, there is also a unique representation $\widetilde{\kappa_{\psi_{F_m}}}$ such that $i-res(\widetilde{\kappa_{\psi_{F_m}}}) = \rho_{\psi_{F_{(m,i)}}}|_{\mathbf{P}_{V_+}(F_{(m,i)})\mathbf{H}_V(F_{(m,i)})}$ and the liftings theory for the Weil representation over the group $\mathbf{H}_V$ implies that the above representation $\widetilde{\kappa_{\psi_{F_m}}}$ must be $\widetilde{\rho_{\psi_{F_m}}}|_{\mathbf{P}_{V_+}(F_m)\mathbf{H}_V(F_m)}$, hence the equality (82) is also satisfied in this case. □

Now we arrive to present the main results in this section. Let us denote by $\Pi_{\psi_{F_i}} = \rho_{\psi_{F_i}}|_{\mathbf{Sp}_V(F_i)}$ the Weil representation of $\mathbf{Sp}_V(F_i)$ and $\Xi_{\psi_{F_i}} = \mathrm{Ind}^{\mathbf{GSp}_V(F_i)}_{\mathbf{Sp}_V(F_i)} \Pi_{\psi_{F_i}}$ the Weil representation of the group $\mathbf{GSp}_V(F_i)$.

Theorem 5.44. *There exists a unique representation $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$ (resp. $\widetilde{\Xi_{\psi_{F_m}}}$) of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)$(resp. $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{GSp}_V(F_m)$) such that i-res($\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$)= $\Pi_{\psi_{F_{(m,i)}}}$ (resp. i-res($\widetilde{\Xi_{\psi_{F_m}}}$)= $\Xi_{\psi_{F_{(m,i)}}}$) for $1 \leq i \leq m$.*

Proof. It follows from above Proposition 5.43 and Lemma 5.28. □

Remark 5.45. *Since the Weil representation $\Xi_{\psi_{F_m}}$ is independent of the character ψ_{F_m}, one could drop the notation ψ.*

5.6.3 Explication

Sp_{2n} Recall that the Weil representation $\Pi_{\psi_{F_k}}$ has two irreducible components $\Pi^+_{\psi_{F_k}}$, $\Pi^-_{\psi_{F_k}}$, which can be realized in the subspaces $\mathbb{C}[\mathbf{X}^\star(F_k)]^+$, $\mathbb{C}[\mathbf{X}^\star(F_k)]^-$ of even and odd functions on $\mathbf{X}^\star(F_k)$ for $1 \leq k \leq m$. And $\mathbb{C}[X^\star(F_k)]^+$, $\mathbb{C}[\mathbf{X}^\star(F_k)]^-$ are eigen-subspaces of $\Pi_{\psi_{F_k}}(-id)$.

Recall that the representation $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$ of the group $\mathrm{Gal}(F_m/F)\mathbf{Sp}_V(F_m)$ can be realized in the space $\mathbb{C}[\mathbf{X}^\star(F_m)]$ by the following formulas :

$$\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}([\sigma^i, g])f(y^\star) = (\xi^k_m)^i I^i_\sigma \Pi_{\psi_{F_m}}(g)(f)(y^\star)$$

where $I_\sigma(f)(y^\star) = f(y^{\star^\sigma})$, and $\xi^k_m = \exp(\frac{2\pi i k}{m})$ for some fixed natural number k. Since $\sigma(-id) = -id$, the subspaces $\mathbb{C}[\mathbf{X}^\star(F_m)]^+$, $\mathbb{C}[\mathbf{X}^\star(F_m)]^-$ are $\mathrm{Gal}(F_m/F) \ltimes \mathbf{Sp}_V(F_m)$ invariant. We denote the corresponding subrepresentations by $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^+$ and $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^-$.

Consider the element $g \in \mathbf{Sp}_V(F_m)$, we have

$$\mathrm{Tr}\left((\xi^k_m)^i I^i_{\sigma,+}\Pi^+_{\psi_{F_m}}(g)\right) + \mathrm{Tr}\left((\xi^k_m)^i I^i_{\sigma,-}\Pi^-_{\psi_{F_m}}(g)\right) = \mathrm{Tr}\left(\Pi^+_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g)\right) + \mathrm{Tr}\left(\Pi^-_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g))\right). \tag{83}$$

where $I_{\sigma,+}(f^+)(y^\star) = f^+(y^{\star^\sigma})$, and $I_{\sigma,-}(f^-)(y^\star) = f^-(y^{\star^\sigma})$ for $f^\pm \in \mathbb{C}[X^\star(F_m)]^\pm$.

Recall the definition of the norm map N from the subset $\sigma^i \ltimes \mathbf{Sp}_V(F_m)$ to the group $\mathbf{Sp}_V(\overline{F})$[cf. [Gy] :

$$N : ([\sigma^i, x]) = \alpha(x)^{-1}\left(x^{\sigma^{i(\frac{m}{d}-1)}} \cdots x^{\sigma^i} x\right)\alpha(x)$$

where $\alpha(x)$ is an element of $\mathbf{Sp}_V(\overline{F})$ such that

$$\alpha(x)^{\sigma^d}\alpha(x)^{-1} = x^{\sigma^{i(t-1)}} \cdots x^{\sigma^i} x$$

and d, t are intergers given as follows :

$$d = (m, i), ti \equiv d(\mod m).$$

Let g be a semi-simple element of $\mathbf{Sp}_V(F_m)$, we know $g \in \mathbf{T}(\overline{F})$ for some maximal torus $\mathbf{T}$ of $\mathbf{Sp}_V$. Naturally $-id \in \mathbf{T}(\overline{F})$. Following the definition of the norm map, we obtain

$$N_i(-g) = -N_i(g) \text{ if } [m : (m, i)] \text{ is odd},$$

and

$$N_i(-g) = N_i(g) \text{ if } [m : (m, i)] \text{ is even}.$$

Hence we obtain the equalities of the characters :

If $F_m/F_{(m,i)}$ is an extension of degree odd, then for the semi-simple element $g \in \mathbf{Sp}_V(F_m)$, we have

$$\mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,+}\Pi^+_{\psi_{F_m}}(g)) - \mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,-}\Pi^-_{\psi_{F_m}}(g)) = \mathrm{Tr}\,(\Pi^+_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g)) - \mathrm{Tr}\,(\Pi^-_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g))). \tag{84}$$

From (83) and (84), it follows that

$$\mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,+}\Pi^+_{\psi_{F_m}}(g)) = \mathrm{Tr}\,(\Pi^+_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g))),$$

and

$$\mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,-}\Pi^-_{\psi_{F_m}}(g)) = \mathrm{Tr}\,(\Pi^-_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g))).$$

If $F_m/F_{(m,i)}$ is an extension of degree even, then for the semi-simple element $g \in \mathbf{Sp}_V(F_m)$, we have

$$\mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,+}\Pi^+_{\psi_{F_m}}(g)) - \mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,-}\Pi^-_{\psi_{F_m}}(g)) = \mathrm{Tr}\,(\Pi^+_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g)) + \mathrm{Tr}\,(\Pi^-_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g))). \tag{85}$$

From (83) and (85), it follows that

$$\mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,+}\Pi^+_{\psi_{F_m}}(g)) = \mathrm{Tr}\,(\Pi^+_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g))) + \mathrm{Tr}\,(\Pi^-_{\psi_{F_{(m,i)}}}(N_i(g))),$$

and

$$\mathrm{Tr}\,((\xi_m^k)^i I^i_{\sigma,-}\Pi^-_{\psi_{F_m}}(g)) = 0.$$

In fact, we proof the following proposition :

Proposition 5.46. *(1) $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}$ has two irreducible components $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^+$, $\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^-$.*
(2) Let $\mathcal{S}_i$ be the set of the semi-simple elements of the group $\boldsymbol{Sp}_V(F_i)$. Then

(a) $i-res(\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^+)(g) = \Pi^+_{\psi_{F_{(m,i)}}}(g)$ and $i-res(\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^-)(g) = \Pi^-_{\psi_{F_{(m,i)}}}(g)$ for $g \in \mathcal{S}_{(m,i)}$, when $[m:(m,i)]$ is odd.

(b) $i-res(\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^+)(g) = \Pi_{\psi_{F_{(m,i)}}}(g)$ and $i-res(\widetilde{\Pi_{\psi_{F_m}}}^-)(g) = 0$, for $g \in \mathcal{S}_{(m,i)}$, when $[m:(m,i)]$ is even.

GL_2 For $\dim_F V = 2$, $GSp_V(F_m) \simeq GL_2(F_m)$. Recall that F is a finite field of odd order q, F_m/F is a Galois field extension of degree m. Let E_m (resp. E) be a quadratic field extension of F_m (resp.F). Let $\chi^+_{F_m}$ be the unique non real character of $F_m^\times$ and $\chi^-_{F_m}$ be the unique non trivial real character of the unitary group $\mathbf{U}_1(F_m)$.

Proposition 5.47. *For the Weil representation Ξ_{F_m} of the group $GL_2(F_m)$, we have the following decomposition :*

$$\Xi_{F_m} = \Big(\bigoplus_{\Lambda\in \mathrm{Irr}(F_m^\times),\, mod \Lambda\sim\Lambda\chi^+_{F_m}} \pi_{\Lambda,\Lambda\chi^+_{F_m}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\Theta\in\mathrm{Irr}(E_m^\times),\Theta|_{U_1(F_m)}=\chi^-_{F_m}\, mod\, \Theta\sim\Theta^{q^m}} \pi_\Theta\Big)$$

.

Proof. See [Sh] Page 271, example. □

We would like to see which components of Ξ_{F_m} are σ-invariant.

(1) If m is odd. By Proposition 5.47, we see

(a) $\pi_{\Lambda,\Lambda\chi^+_{F_m}}$ is σ-invariant iff $\Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{F_m/F}$ for some $\lambda \in \mathrm{Irr}(F^\times)$. In this case, $\Lambda\chi^+_{F_m} = (\lambda\chi^+_F)\circ \mathrm{N}_{F_m/F}$ and $\Lambda \sim \Lambda\chi^+_{F_m}$ is equivalent to $\lambda \sim \lambda\chi^+_F$.

(b) π_Θ is σ-invariant iff $\Theta = \theta \circ \mathrm{N}_{E_m/E}$ for some character θ of $E^\times$. Firstly we have the following diagram :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{U}_1(F_m) & \longrightarrow & E_m^\times & \overset{\mathrm{N}_{E_m/F_m}}{\longrightarrow} & F_m^\times & \longrightarrow & 1 \\ & & \mathrm{N}_{E_m/E}\downarrow & & \mathrm{N}_{E_m/E}\downarrow & & \mathrm{N}_{F_m/F}\downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{U}_1(F) & \longrightarrow & E^\times & \overset{\mathrm{N}_{E/F}}{\longrightarrow} & F^\times & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Let $x \in \mathbf{U}_1(F)$ and $x = y^{q-1}$ for some $y \in E^\times$. Since $\mathrm{N}_{E_m/E} : E_m^\times \longrightarrow E^\times$ is surjective, there exists $z \in E_m^\times$ such that $\mathrm{N}_{E_m/E}(z) = y$. Hence $\mathrm{N}_{E_m/E}(z^{q-1}) = x$ and $x^{1+q+\cdots+q^{m-1}} = x^{1+q(1+q)+q^2(1+q)+\cdots+q^{m-2}(1+q)} = x$. So $x = \mathrm{N}_{E_m/E}(z^{(q-1)(1+q+\cdots+q^{m-1})}) = \mathrm{N}_{E_m/E}(z^{q^m-1})$. Clearly $z^{q^m-1} \in \mathbf{U}_1(F_m)$. Finally we proof that $\mathrm{N}_{E_m/E} : \mathbf{U}_1(F_m) \longrightarrow \mathbf{U}_1(F)$ is surjective. Hence $\chi^-_{F_m} = \chi^-_F \circ \mathrm{N}_{E_m/E}$. So the condition $\Theta|_{\mathbf{U}_1(F_m)} = \chi^-_{F_m}$ means that $\theta\circ\mathrm{N}_{E_m/E} = \chi^-_F \circ \mathrm{N}_{E_m/E}$, since $\mathrm{N}_{E_m/E}$ is surjective, it is also equivalent to $\theta|_{\mathbf{U}_1(F)} = \chi^-_F$. Since m is odd, $\Theta \sim \Theta^{q^m} \iff \theta \sim \theta^q$.

(2) If $m = 2$. In this case, the principal series are the only possible representations which are σ-invariant.

(a) Assume $\pi_{\Lambda,\Lambda\chi^+_{F_m}}$ is σ-invariant and it is the image of some principal series representation of the group $GL_2(F)$, i.e $\Lambda = \lambda \circ \mathrm{N}_{F_m/F}$ for some character $\lambda \in \mathrm{Irr}(F^\times)$. And the condition $\Lambda \sim \Lambda\chi^+_{F_m}$ is equivalent to $\lambda \sim \lambda\chi^+_F$.

(b) Assume $\pi_{\Lambda,\Lambda\chi^+_{F_m}}$ is σ-invariant and it is the image of some cuspidal representation of the group $GL_2(F)$, then $\Lambda\chi^+_{F_m} = \Lambda^q \neq \Lambda$ for the regular representation Λ of the group $F_m^\times$.

Proposition 5.48. *Let $\Lambda \in \mathrm{Irr}(F_m^\times)$; Then $\Lambda\chi^+_{F_m} = \Lambda^q$ iff $\Lambda|_{\mathbf{U}_1(F)} = \chi^-_F$.*

Proof. Firstly we see that for any $x \in F_m^\times$, $x^{q-1} \in \mathbf{U}_1(F)$. On the other hand, for any $y \in \mathbf{U}_1(F)$, there exists $x \in F_m^\times$ such that $y = x^{q-1}$ for some $x \in F_m^\times$. Since $\Lambda\chi^+_{F_m} = \Lambda^q$ means that $\Lambda^{q-1} = \chi^+_{F_m}$, i.e $\Lambda(x^{q-1}) = \chi^+_{F_m}(x) = x^{\frac{q^2-1}{2}} = (x^{q-1})^{\frac{q+1}{2}}$ for any $x \in F_m^\times$. By setting $y = x^{q-1}$, we obtain $\Lambda(y) = \chi^-_F(y)$ for any $y \in \mathbf{U}_1(F)$. □

Let π_Λ be a cuspidal representation of $GL_2(F)$. It is well known that $\mathrm{Bc}_{F_2/F}(\pi_\Lambda) = \Pi_{\Lambda,\Lambda^q}$. By Proposition 5.48, we see that π_Λ is a subrepresentation of Ξ_F iff Π_{Λ,Λ^q} is a subrepresentation of Ξ_{F_2}.

Since the operator of base change is comparing with the field extension, finally we obtain the following Proposition :

Proposition 5.49. *Let $\mathcal{R}_{GL_2(F_m)}(\Xi_{F_m})_\sigma = \{\Pi \in \mathrm{Irr}(GL_2(F_m)) | \Pi^\sigma \simeq \Pi$ and $\mathrm{Hom}_{GL_2(F_m)}(\Xi_{F_m}, \Pi) \neq 0\}$ and $\mathcal{R}_{GL_2(F)}(\Xi_F) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(GL_2(F)) | \mathrm{Hom}_{GL_2(F)}(\Xi_F, \pi) \neq 0\}$. Then there is a map bijective*

$$\mathrm{Bc}_{F_m/F} : \mathcal{R}_{GL_2(F)}(\Xi_F) \longrightarrow \mathcal{R}_{GL_2(F_m)}(\Xi_{F_m})_\sigma;$$

$$\pi \longmapsto \mathrm{Bc}_{F_m/F}(\pi).$$

Question :

For the high rang group $\mathbf{GSp}_V(F_m)$. We denote by $\mathcal{R}_{\mathbf{GSp}_V(F_m)}(\Xi_{F_m})_\sigma = \{\Pi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{GSp}_V(F_m)) | \Pi^\sigma \simeq \Pi$ and $\mathrm{Hom}_{\mathbf{GSp}_V(F_m)}(\Xi_{F_m}, \Pi) \neq 0\}$ and $\mathcal{R}_{\mathbf{GSp}_V(F)}(\Xi_F) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{GSp}_V(F)) | \mathrm{Hom}_{\mathbf{GSp}_V(F)}(\Xi_F, \pi) \neq 0\}$. If we can define the operator of base change for the group $\mathbf{GSp}_V$, then one hope that the following result is also right :
there is a map bijective

$$\mathrm{Bc}_{F_m/F} : \mathcal{R}_{\mathbf{GSp}_V(F)}(\Xi_F) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{GSp}_V(F_m)}(\Xi_{F_m})_\sigma;$$

$$\pi \longmapsto \mathrm{Bc}_{F_m/F}(\pi).$$

Références

[A] J.S.ANDRADE, *Représentations de certains groupes symplectiques*, Bull.Soc.Math.France No. 55-56 (1978).

[BH] .C.J.BUSHNELL, G.HENNIART, *The local langlands conjecture for GL(2)*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 335. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Bo] A.BOREl, *Linear algebraic groups*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics , 126. Springer-. Verlag, New York, 1991.

[Co] M.COGNET, *Représentation de Weil et changement de base quadratique*, Bull. Soc. Math. France 113 (1985) no.4 403-457.

[Di] F.DIGNE, *Shintani descent and L functions of Deligne-Lusztig varieties*, Proc. of symp. in pure math., 47 (1987) 61–68.

[DM] F. DIGNE, J.MICHEL, *Representations of finite groups of Lie type*, London Mathematical Society Student Texts, 21. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Gan] W.T. GAN, *Exceptional Howe correspondences over finite fields*, Compositio Math. 118 (1999), no. 3, 323–344.

[Ge] P.GERARDIN, *Weil representations associated to finite fields*, J. Algebra 46 (1977) .

[Gy] A. GYOJA, *Liftings of irreducible characters of finite reductive groups*, Osaka J. Math. 16. (1979), no. 1, 1–30.

[MVW] C.MOEGLIN, M-F.VIGNERAS, J-L. WALDPURGER, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Math. Vol 1921, Springer-Verlag, New York, 1987.

[P-S] PIATETSKI-SHAPIRO.I, *Complex Representations of $GL(2, K)$ for finite fields K*, Contemporary Mathematics. Vol 16, American Mathematical Society P.RI.

[Sh] K-I. SHINODA, *The Characters of Weil Représentations associated to finite fields*, J. Algebra 66, 251-280 (1980).

[Shin] T. SHINTANI, *Two remarks on the irreducible characters of finite general linear groups*, J. Math. Soc. Japan. 28 (1976), no.2. 396-414.

5.7 Appendix

5.7.1 Appendix 1. The formulas (I)—(IX).

$$(\pi_0(h(r))F_{ar^2})(\xi_a) = F_{ar^2}\Big(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \phi^a\Big) = F_{ar^2}\Big(\mathrm{N}_{E/F}(r)\begin{pmatrix} r^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^{\frac{q}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{q}{2}} \end{pmatrix}^{-1}, \phi^a\Big)$$

$= \pi_1\Big(\begin{pmatrix} r^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\Big) \circ F_{ar^2}(\xi_{ar^2}) = \pi_1\Big(\begin{pmatrix} r^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\Big)v_0 = \Psi(r)v_0 = \psi(r^2)F_a(\xi_a)$, it implies :

$$\pi_0(h(r)F_{ar^2}) = \psi(r^2)F_a. \tag{86}$$

$(\pi_0(h'(t))F_{at^{-1}})(\xi_a) = F_{at^{-1}}(\xi_{at^{-1}}) = v_0 = F_a(\xi_a)$, it implies that

$$\pi_0(h'(t))F_{at^{-1}} = F_a \tag{87}$$

$$\pi_0(u(b))F_a = \phi^a(b)F_a. \tag{88}$$

$$(\pi_0(h(r)R))(\eta) = R\Big(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi\Big) = R\Big(\begin{pmatrix} r^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^{-\frac{q}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{q}{2}} \end{pmatrix}^{-1}, \phi^a\Big) = \pi_1\Big(\begin{pmatrix} r^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\Big) \circ R(\eta)$$

$= \pi_1\Big(\begin{pmatrix} r^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & r^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\Big)v_1 = v_1 = R(\eta)$, it implies that

$$\pi_0(h(r))R = R. \tag{89}$$

$$(\pi_0(h'(t))R)(\eta) = R\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi^{t^{-1}}\Big) = R\Big(\mathrm{N}_{E/F}(x)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \phi^{\mathrm{N}_{E/F}(x)^{-1}}\Big)$$

$= \Psi(x)R(\eta) = \psi(t)R(\eta)$ where $\mathrm{N}_{E/F}(x) = t$, it implies that

$$\pi_0(h'(t))R = \psi(t)R. \tag{90}$$

$$\pi_0(u(b))R = R. \tag{91}$$

$$\pi_0(h(r))S = S. \tag{92}$$

$$(\pi_0(h'(t))S)(\delta) = S\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi^{t^{-1}}\Big) = S\Big(\mathrm{N}_{E/F}(x)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \phi^{\mathrm{N}_{E/F}(x)^{-1}}\Big) = \Psi(x)S(\delta)$$

$= \psi(t)S(\delta)$ where $\mathrm{N}_{E/F}(x) = t$,
it implies that

$$\pi_0(h'(t))S = \psi(t)S. \tag{93}$$

$$\pi_0(u(b)S) = S. \tag{94}$$

$(\pi_0(\omega)S)(\delta) = q^{-2}\sum_{n\in M} S(n, \phi)\phi(B(0, n)) = q^{-2}S$, it implies that

$$\pi_0(\omega)S \neq S. \tag{95}$$

5.7.2 Appendix 2. The formula for the Proposition 5.18.

Let $\alpha = a_1\xi + a_2\xi^{\sigma} + a_3\xi^{\sigma^2} \in X_0, \beta = b_1\xi + b_2\xi^{\sigma} + b_3\xi^{\sigma^2} \in Y_0$
$E_0 = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1$
$E_1 = \xi e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + \xi^{\sigma} e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + \xi^{\sigma^2} e_1 \otimes e_2 \otimes e_1$;
$E_2 = \xi^{\sigma} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + \xi^{\sigma^2} e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + \xi e_1 \otimes e_2 \otimes e_1$;
$E_3 = \xi^{\sigma^2} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + \xi e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + \xi^{\sigma} e_1 \otimes e_2 \otimes e_1$;
$F_0 = -e_2 \otimes e_2 \otimes e_2$;
$F_1 = \xi e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 + \xi^{\sigma} e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + \xi^{\sigma^2} e_2 \otimes e_1 \otimes e_2$;
$F_2 = \xi^{\sigma} e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 + \xi^{\sigma^2} e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + \xi e_2 \otimes e_1 \otimes e_2$;
$F_3 = \xi^{\sigma^2} e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 + \xi e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + \xi^{\sigma} e_2 \otimes e_1 \otimes e_2$;
then $E_0, E_1, E_2, E_3, F_0, F_1, F_2, F_3$ form a basis of W_0.

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^t = -A & 0 \end{pmatrix},$$

where

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi^2) & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi\xi^{\sigma}) & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi\xi^{\sigma}) \\ 0 & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi\xi^{\sigma}) & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi^2) & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi\xi^{\sigma}) \\ 0 & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi\xi^{\sigma}) & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi\xi^{\sigma}) & \mathrm{Tr}_{K/F}(\xi^2) \end{pmatrix}.$$

Supposer $A = {}^tP_1P_1$ and $(G_0, \cdots, G_3; H_0, \cdots, H_3) = (E_0, \cdots, E_3; F_0, \cdots, F_3)P$ where $P = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_1^{-1} \end{pmatrix}$, hence

$$\begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & G_3 & H_0 & H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} P$$

$$= \begin{pmatrix} {}^tP_1^{-1} & 0 \\ 0 & {}^tP_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

So

$$\omega(G_i) = H_i, \quad \omega(H_i) = -G_i$$

and

$$\omega(G_0, \cdots, G_3, H_0, \cdots, H_3) = (G_0, \cdots, G_3, H_0, \cdots, H_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \omega(\begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}) = \omega(\begin{pmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & G_3 & H_0 & H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix} P^{-1})$$

$$= \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & G_3 & H_0 & H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \omega(E_i) = F_i \text{ and } \omega(F_i) = -E_i.$$

So

$$\rho(\omega)F((F_0,\cdots,F_3)b^t) = q^{-2}\sum_{z\in V_-} F(z,\psi)\psi(\langle z,\omega^{-1}(y)\rangle)$$

$$= q^{-2}\sum_{(F_0,\cdots,F_3)a^t\in V_-} F\Big((F_0,\cdots,F_3)a^t,\psi\Big)\psi(\langle -a_0e_2\otimes e_2\otimes e_2+\alpha e_2\otimes e_2\otimes e_1+\alpha^{\sigma}e_1\otimes e_2\otimes e_2+\alpha^{\sigma^2}e_2\otimes e_1\otimes e_2,$$

$$b_0e_1\otimes e_1\otimes e_1+\beta e_1\otimes e_1\otimes e_2+\beta^{\sigma}e_2\otimes e_1\otimes e_1+\beta^{\sigma^2}e_1\otimes e_2\otimes e_1\rangle)$$

$$= q^{-2}\sum_{a_0\in F,\alpha\in K} F(-a_0e_2\otimes e_2\otimes e_2+\alpha e_2\otimes e_2\otimes e_1+\alpha^{\sigma}e_1\otimes e_2\otimes e_2+\alpha^{\sigma^2}e_2\otimes e_1\otimes e_2)\psi(a_0b_0+\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))$$

$$\Longrightarrow \rho(\omega)F(-b_0e_2\otimes e_2\otimes e_2+\beta e_2\otimes e_2\otimes e_1+\cdots+\beta^{\sigma^2}e_2\otimes e_1\otimes e_2)$$

$$= q^{-2}\sum_{a_0\in F,\alpha\in K} F(-a_0e_2\otimes e_2\otimes e_2+\alpha e_2\otimes e_2\otimes e_1+\alpha^{\sigma}e_1\otimes e_2\otimes e_2+\alpha^{\sigma^2}e_2\otimes e_1\otimes e_2)\psi(a_0b_0+\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))$$

$$\overset{\text{base in paper}}{\Longrightarrow} \rho(\omega)F\begin{pmatrix}0&0\\\beta&-b_0\end{pmatrix} = q^{-2}\sum_{a_0\in F,\alpha\in K} F\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&-a_0\end{pmatrix}\psi(a_0b_0+\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta))$$

$$\rho(\omega)F\begin{pmatrix}0&0\\\beta&b_0\end{pmatrix} = q^{-2}\sum_{a_0\in F,\alpha\in K} F\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&a_0\end{pmatrix}\psi(a_0b_0+\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha\beta)).$$

5.7.3 Appendix 3. The calculs for the diagram.

From the definition, we see :

$$A\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\beta&y\end{pmatrix},\phi^k\Big) = \sum_{t\in T}\alpha\cdot\pi(t)F_{(0,0;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\beta&y\end{pmatrix},\phi^k\Big)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times} F_{(0,0;\phi)}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^{\sigma}a^{\sigma^2}}\beta&\mathrm{N}_{K/F}(a)y\end{pmatrix},\phi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}k}\Big)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=k}\chi\chi_q^+(k)F_{(0,0;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^{\sigma}a^{\sigma^2}}\beta&\mathrm{N}_{K/F}(a)y\end{pmatrix},\phi\Big);$$

$$B\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\beta&y\end{pmatrix},\phi^k\Big) = \sum_{t\in T}\alpha\cdot\pi(t)G_{(0,1;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\beta&y\end{pmatrix},\phi^k\Big)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))G_{(0,1;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^{\sigma}a^{\sigma^2}}\beta&\mathrm{N}_{K/F}(a)y\end{pmatrix},\phi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}k}\Big)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=k}\chi\chi_q^+(k)G_{(0,1;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^{\sigma}a^{\sigma^2}}\beta&\mathrm{N}_{K/F}(a)y\end{pmatrix},\phi\Big);$$

$$(\alpha\cdot\pi(\omega)A)\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\beta&y\end{pmatrix},\phi^k\Big)$$

$$= \sum_{t\in T}\alpha\cdot\pi(t)\Big(\alpha\cdot\pi(\omega)F_{(0,0;\phi)}\Big)\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\beta&y\end{pmatrix},\phi^k\Big)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))(\alpha\cdot\pi(\omega)F_{(0,0;\phi)})\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^{\sigma}a^{\sigma^2}}\beta&\mathrm{N}_{K/F}(a)y\end{pmatrix},\phi^{k\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big)$$

$$= q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times}\sum_{\begin{pmatrix}0&0\\\beta'&y'\end{pmatrix}\in Y_0} F_{(0,0;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0&0\\\beta'&y'\end{pmatrix},\phi^{k\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big)\phi^{k\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big(\mathrm{N}_{K/F}(a)yy'+\mathrm{Tr}_{K/F}(\frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^{\sigma}a^{\sigma^2}}\beta\beta')\Big)$$

$$= q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times, \mathrm{N}_{K/F}(ad)=k} \chi\chi_q^+(k) = q^{-2}\chi\chi_q^+(k)(q^3-1)(q^2+q+1);$$

For B, notice : $G_{(0,1;\phi)}(\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta & 1\end{pmatrix}, \phi) = \phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta))$ by the formula (73).

$$(\alpha\cdot\pi(\omega)B)\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta & y\end{pmatrix}, \phi^k\Big) = \sum_{t\in T}\alpha\cdot\pi(t)\alpha\cdot\pi(\omega)G_{(0,1;\phi)}(\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta & y\end{pmatrix}, \phi^k)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))\alpha\cdot\pi(\omega)G_{(0,1;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^\sigma a^{\sigma^2}}\beta & \mathrm{N}_{K/F}(a)y\end{pmatrix}, \phi^{k\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big)$$

$$= q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))\sum_{\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta' & y'\end{pmatrix}\in Y_0} G_{(0,1;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta' & y'\end{pmatrix}, \phi^{k\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big)\phi^{k\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big(\mathrm{N}_{K/F}(a)yy' + \mathrm{Tr}_{K/F}(\frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^\sigma a^{\sigma^2}}\beta\beta')\Big)$$

$$= q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times, \mathrm{N}_{K/F}(ad)=k}\chi\chi_q^+(k)\sum_{\beta'\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta'))\phi\Big(\mathrm{N}_{K/F}(a)y + \mathrm{Tr}_{K/F}(aa^\sigma d^{\sigma^2}\beta\beta')\Big);$$

(1)

$$A(x_{00}) = \sum_{t\in T}\Big(\alpha\cdot\pi(t)F_{(0,0;\phi)}\Big)(x_{00})$$

$$= \sum_{t=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\in T}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))F_{(0,0,\phi)}(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \phi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}})$$

$$= \sum_{t=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\in T;\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1} 1 = (q^3-1)(q^2+q+1)$$

$$A(x_{10}) = A(x_{01}) = A(y_k) = 0.$$

(2)

$$B(x_{00}) = \sum_{t\in T}\alpha\cdot\pi(t)G_{(0,1;\phi)}(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \phi) = 0 = B(x_{1,0})$$

$$B(x_{01}) = \sum_{t\in T}\alpha\cdot\pi(t)G_{(0,1;\phi)}(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathrm{N}_{K/F}(a)\end{pmatrix}, \phi^{\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}})$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times, \mathrm{N}_{K/F}(a)=\mathrm{N}_{K/F}(d)=1}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad)) = (q^2+q+1)^2$$

$$B(y_k) = \sum_{t\in T}\alpha\cdot\pi(t)G_{(0,1,\phi)}(y_k)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times}\chi\chi_q^+(\mathrm{N}_{K/F}(ad))G_{(0,1;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{\mathrm{N}_{K/F}(ad)}{dd^\sigma a^{\sigma^2}} & \mathrm{N}_{K/F}(a)\end{pmatrix}, \phi^{k\mathrm{N}_{K/F}(ad)^{-1}}\Big)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times, \mathrm{N}_{K/F}(a)=1, \mathrm{N}_{K/F}(d)=k}\chi\chi_q^+(k)G_{(0,1;\phi)}\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ aa^\sigma d^{\sigma^2} & 1\end{pmatrix}, \phi\Big)$$

$$\overset{\text{the equality (73)}}{=} \sum_{a,d\in K^\times, \mathrm{N}_{K/F}(a)=1, \mathrm{N}_{K/F}(d)=k}\chi\chi_q^+(k)\phi\Big(-\mathrm{N}_{K/F}(aa^\sigma d^{\sigma^2})\Big)$$

$$= \sum_{a,d\in K^\times, \mathrm{N}_{K/F}(a)=1, \mathrm{N}_{K/F}(d)=k}\chi\chi_q^+(k)\phi(-k)$$

$$= \phi(-k)\chi\chi_q^+(k)(q^2+q+1)^2.$$

(3)

$$(\alpha\cdot\pi(\omega)A)(x_{00}) = \alpha\cdot\pi(\omega)A(X_{10}) = \alpha\cdot\pi(\omega)A(x_{01}) = q^{-2}(q^3-1)(q^2+q+1)$$

$$\alpha\pi(\omega)A(y_k) = \chi\chi_q^+(k)q^{-2}(q^3-1)(q^2+q+1).$$

(4)
$$\alpha\cdot\pi(\omega)B(x_{00}) = q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1,\beta'\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta')) = q^{-2}(q^3-1)(q^2+q+1)(-q^2-q)$$

(Since $\sum_{\beta'\neq 0}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta')) + q^2+q+1 = 0$, we have $\sum_{\beta\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta)) = -q^2-q$).

$$\alpha\cdot\pi(\omega)B(x_{10}) = q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1}\sum_{\beta'\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta'))\phi(\mathrm{Tr}_{K/F}(\frac{1}{dd^\sigma a^{\sigma^2}}\beta'))$$

$$= \alpha\cdot\pi(\omega)B(x_{10}) = q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1}\sum_{\beta'\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta'))\phi(\mathrm{Tr}_{K/F}(\frac{1}{dd^\sigma a^{\sigma^2}}\beta')$$

$$= q^{-2}\sum_{t\in T,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1,\beta'\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(dd^\sigma a^{\sigma^2}\beta'))\phi(\mathrm{Tr}_{K/F}(\beta'))$$

$$= q^{-2}\sum_{t\in T,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1,\beta'\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(dd^\sigma a^{\sigma^2}\beta'))\phi(\mathrm{Tr}_{K/F}(\beta'))$$

$$(\star) = q^{-2}\sum_{\beta'\in K}\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(d)\,\mathrm{N}_{K/F}(\beta'))\phi(\mathrm{Tr}_{K/F}(\beta')),$$

(i) If $\beta'=0$, $\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(d)\,\mathrm{N}\,K/F(\beta') + \mathrm{Tr}_{K/F}(\beta')) = \sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1} 1 = (q^3-1)(q^2+q+1)$;
(ii) If $\beta'\neq 0$,

$$\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(d)\,\mathrm{N}_{K/F}(\beta'))$$

$$= \sum_{l\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(l)=1}\sum_{d\in K^\times}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(d)\,\mathrm{N}_{K/F}(\beta'))$$

$$= (q^2+q+1)(-q^2-q-1) = -(q^2+q+1)^2,$$

so
$$(\star) = q^{-2}[(q^3-1)(q^2+q+1) + \sum_{\beta'\in K^\times} -(q^2+q+1)^2\phi(\mathrm{Tr}_{K/F}(\beta'))]$$

$$= q^{-2}[(q^2+q+1)(q^3-1) + (q^2+q+1)^2] = q^{-2}(q^2+q+1)^2 q = q^{-1}(q^2+q+1)^2.$$

$$\alpha\cdot\pi(\omega)B(x_{01}) = q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1}\sum_{\beta'\in K}\phi(-\mathrm{N}_{K/F}(\beta'))\phi(\mathrm{N}_{K/F}(a))$$

$$= q^{-2}\sum_{a,d\in K^\times,\mathrm{N}_{K/F}(ad)=1}\phi(\mathrm{N}_{K/F}(a))(-q^2-q)$$

$$= q^{-2}(q^2+q+1)(-q^2-q-1)(-q^2-q) = q^{-1}(q+1)(q^2+q+1)^2.$$

Références

[A] J.S.ANDRADE, *Représentations de certains groupes symplectiques*, Bull.Soc.Math.France No. 55-56 (1978).

[BH] .C.J.BUSHNELL, G.HENNIART, *The local langlands conjecture for GL*(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 335. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Bo] A.BOREl, *Linear algebraic groups*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics , 126. Springer-. Verlag, New York, 1991.

[Di] F.DIGNE, *Shintani descent and L functions of Deligne-Lusztig varieties*, Proc. of symp. in pure math., 47 (1987) 61–68.

[DM] F. DIGNE, J.MICHEL, *Representations of finite groups of Lie type*, London Mathematical Society Student Texts, 21. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Gan] W.T. GAN, *Exceptional Howe correspondences over finite fields*, Compositio Math. 118 (1999), no. 3, 323–344.

[Ge] P.GERARDIN, *Weil representations associated to finite fields*, J. Algebra 46 (1977) .

[Gy] A. GYOJA, *Liftings of irreducible characters of finite reductive groups*, Osaka J. Math. 16. (1979), no. 1, 1–30.

[MVW] C.MOEGLIN, M-F.VIGNERAS, J-L. WALDPURGER, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Math. Vol 1921, Springer-Verlag, New York, 1987.

[Co] M.COGNET, *Représentation de Weil et changement de base quadratique*, Bull. Soc. Math. France 113 (1985) no.4 403-457.

[P-S] PIATETSKI-SHAPIRO.I, *Complex Representations of $GL(2,K)$ for finite fields K*, Contemporary Mathematics. Vol 16, American Mathematical Society P.RI.

[Sh] K-I. SHINODA, *The Characters of Weil Représentations associated to finite fields*, J. Algebra 66, 251-280 (1980).

[Shin] T. SHINTANI, *Two remarks on the irreducible characters of finite general linear groups*, J. Math. Soc. Japan. 28 (1976), no.2. 396-414.