



**HAL**  
open science

# Déconfinement de sources acoustiques par utilisation d'une méthode holographique à double information

Dorian Vigoureux

► **To cite this version:**

Dorian Vigoureux. Déconfinement de sources acoustiques par utilisation d'une méthode holographique à double information. Autre. INSA de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ISAL0063 . tel-00759412

**HAL Id: tel-00759412**

**<https://theses.hal.science/tel-00759412>**

Submitted on 30 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**  
**DÉCONFINEMENT DE SOURCES ACOUSTIQUES**  
**PAR UTILISATION D'UNE MÉTHODE HOLOGRAPHIQUE**  
**À DOUBLE INFORMATION**

présentée devant  
**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**



par  
**Dorian VIGOUREUX**  
Ingénieur diplômé de l'INSA de Lyon

pour obtenir  
**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :  
**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**  
Spécialité : **Acoustique**

Thèse préparée au Laboratoire Vibrations Acoustique,  
soutenue le 03/07/2012 devant la Commission d'examen

**jury**

JEAN-LOUIS GUYADER (Professeur)	INSA de Lyon	Directeur de thèse
NICOLAS TOTARO (Maître de Conférences)	INSA de Lyon	Co-Directeur
ALEXANDRE GARCIA (Professeur)	CNAM	Rapporteur
FRANK SIMON (Ingénieur de recherche)	ONERA	Rapporteur
BERT ROOZEN (Professeur)	TU Delft	Examineur

N° d'ordre XXXX-XXXX-XXXX

Année 2012







## Remerciements

Je remercie dans un premier temps Jean-Louis GUYADER ainsi que Nicolas TOTARO, mes directeurs de thèse, pour leur investissement dans l'encadrement de mes recherches. Je leur suis particulièrement reconnaissant pour leur disponibilité, leur gentillesse ainsi que leurs conseils avisés et leur soutien pour la réalisation de ces études de doctorat. Leur enseignement m'a été précieux, et il aura été particulièrement déterminant pour mes choix de carrière.

Je remercie très sincèrement Alexandre GARCIA et Frank SIMON, mes rapporteurs, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux, pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit, et pour la pertinence des commentaires qu'ils en ont fait. Je joins également Bert ROOZEN à ces remerciements, pour l'honneur qu'il m'a fait de participer à mon jury de thèse.

J'ai eu l'occasion d'effectuer mes travaux de recherches au Laboratoire de Vibrations et d'Acoustique de l'INSA de Lyon. De ces quatre années de doctorat, ainsi que de l'année de master qui leur a précédé, je retiendrai particulièrement la convivialité qui sévit dans les couloirs du laboratoire. Pour ne pas dévoiler intégralement les secrets de cette organisation, je n'évoquerai ici que les discussions enrichissantes tenues autour de la machine à café de compétition, ou des *mots-fléchés contest* faits à la pause de midi. Je remercie donc chacun des membres du LVA pour leur contribution à cette ambiance à la fois agréable, productive et enrichissante.

Un grand merci à mes co-bureaux à travers le temps : Vincent, Michal et Jérémy, qui ont subiit jours après jours mes états d'âme et ont accepté de répondre à mes questions ou de consoler mes angoisses, notamment en ces derniers mois de rédaction. Je remercie particulièrement Mathieu qui a longtemps occupé le bureau d'à côté. Il a toujours été mon modèle de doctorant, et même si je ne l'ai pas beaucoup revu depuis son installation

à Paris, je sais que c'est toujours un bon. Je remercie également l'ensemble des doctorants que j'ai eu l'occasion de croiser pour leur aide régulière, lors des différentes discussions que j'ai pu tenir avec eux. Merci à eux tous, Carmen, Julie, Liangfen, Anders, Antonio, Bin, Ha, Mickaël, Rainer, Rock, Thibaut et Yu Liang.

Je remercie également les personnels permanents du laboratoire. Les secrétaires, Corinne, Meriem et Nathalie, pour avoir su me guider avec bonne humeur, sympathie et efficacité dans la jungle administrative que représente la préparation d'un doctorat et pour m'avoir soutenu à travers les nombreuses étapes du parcours du combattant que constituent le dépôt et la soutenance de la thèse ; le chef d'atelier, Daniel, pour son soutien dans les parties expérimentales de mes travaux, ainsi que pour le partage de notre passion pour les véhicules roulants de plus d'un certain nombre d'année ; l'ensemble des professeurs et ingénieurs qui animent la vie scientifique du laboratoire avec pertinence, Céline, Bernard, Étienne, Goran, Jérôme, Kerem, Laurent et Quentin pour les échanges que j'ai eus avec eux sur nos travaux respectifs.

Je remercie également l'ensemble des personnels de l'université Lyon 1 qui m'ont accueilli dans leur équipe en tant que moniteur d'abord, puis ATER ensuite. Je remercie ainsi Delphine, Ivana, Laurence, Séverine, Bruno, Claude, Eric, Marc et Mathieu pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur aide et leur soutien dans la préparation de mes cours ainsi que pour leur disponibilité lorsqu'il a fallu organiser mon emploi du temps autour de mes temps de rédaction. Je garderai un excellent souvenir de ma première expérience dans l'enseignement supérieur et je leur en dois la qualité. Si les conditions pouvaient être réunies, je continuerais volontiers à travailler avec eux.

Mes remerciements vont aussi vers les personnes avec qui j'ai eu la possibilité de parler de choses qui, de près ou de loin, *ne se rattachent pas* à la recherche scientifique.

Je remercie donc les musiciens avec lesquels nous avons eu certes l'occasion d'échanger quelques fausses notes, mais surtout le plaisir de partager des moments magnifiques, Dominique, Madeleine, Renata, Sandra, Virginie, Aymeric, Benjamin, Damien, Éric et Victor. Je remercie également les membres de l'école de musique de Collonges où j'ai eu la joie d'assister à des moments musicaux riches en émotions. Merci à vous, Clarisse, Jeanne, Julie et Primo, ainsi qu'Annabelle, Marie, Dominique, Anthony, Clément, Roberto et Tom que j'ai côtoyés plus régulièrement (emploi du temps oblige...)

Je remercie le Monde de l'écriture ainsi que ses membres pour m'avoir permis de vider ma tête de toutes les équations qu'elle contenait par la lecture de leurs textes tous passionnants ainsi que pour la convivialité de l'espace d'échange qu'ils ont pu mettre en place à travers les années. Je les remercie notamment pour leur soutien dans ces derniers mois et leurs encouragements. Je sais que beaucoup d'entre eux sont également dans des études importantes (classes préparatoires, études doctorales, etc.) et je souhaite, par ces

remerciements que je leur adresse, qu'ils sachent que je serai également là pour eux comme ils l'ont été pour moi.

Je remercie la communauté du « troisième mardi » avec qui j'ai eu la chance de pouvoir vivre dans un monde beau et juste le temps de quelques soirées. Merci à Anne-Claire, Dorine, Benjamin, Cédric et Xavier pour les idées qu'ils ont. Pourvu qu'ils puissent les garder jusqu'au jour où elles ne seront plus nécessaires car nous vivons effectivement dans un monde beau et juste.

Je remercie aussi les lapins blancs, Anso, Nito et Zitoun, pour les douces soirées déconnectées de la réalité que j'ai pu passer dans leur terrier magique. Ces soirées ont été l'occasion de rencontres fabuleuses et j'espère que leur terrier restera toujours aussi accueillant.

Je remercie enfin *ma famille* pour le soutien quotidien qu'elle a su m'apporter.

Une part de ma gratitude revient à Jeanne et Juan-Pablo avec qui nous avons partagé nos aventures comparables.

Je remercie ma petite sœur, Anne-Laure, pour la confiance qu'elle a toujours eu en moi et j'envoie très au loin des remerciements qui, je l'espère, arriveront jusqu'à mon frère, Arnaud, et Lorraine sa compagne. Grâce à vous, j'ai eu la possibilité de voyager depuis mon bureau, par vos photographies, dessins et reportages. Merci pour ces visites que j'ai faites, à travers vos yeux, de tous ces endroits exotiques auxquels je n'avais pas le temps de rêver.

Je remercie également ma tante Édith et mon oncle Jean-Marie pour leur accueil en leur havre de paix lorsque j'ai eu besoin de me mettre au vert pour avancer dans l'écriture de ce mémoire. Je reviendrai vous voir, et cette fois-ci je ne vous ennuierais plus avec mes affaires, nous pourrions nous promener dans la forêt et manger des glaces au fond du jardin, c'est promis.

J'adresse enfin *un très grand merci* à mes parents, Colette et Pierre, pour tout ce qu'ils ont pu faire pour moi durant ces vingt-sept premières années. Je ne pourrai jamais vous remercier assez pour tout cela. Dans ces lignes, je souhaite au moins vous remercier pour le courage que vous avez eu de lire à maintes reprises ces nombreuses pages à la recherche des fautes de frappe, de grammaire, de sens et autre. La tâche n'était pas forcément facile et vous avez pourtant réussi à la mener avec brio. Comme toujours...

Juillet 2012  
Dorian Vigoureux





## Résumé

L'identification et la caractérisation des sources acoustiques restent encore aujourd'hui deux sujets d'importance pour les industriels qui ont besoin de techniques permettant d'identifier des sources acoustiques ou vibratoires sur des surfaces complexes dans un environnement acoustique non contrôlé. La thèse que nous présentons ici s'inscrit dans ce cadre. Nous y étudions les qualités d'une méthode inverse, appelée iPTF (pour **i**nverse **P**atch **T**ransfer **F**unctions), pour la résolution de ce problème particulier.

Nous consacrerons le *premier chapitre* de notre étude à la synthèse bibliographique des méthodes les plus pertinentes permettant de résoudre des problèmes similaires. Nous soulignerons également les difficultés de ces méthodes pouvant être liées à leurs applications pratiques ou à leurs fondements théoriques.

Dans un *second chapitre*, nous présenterons la méthode iPTF à partir de sa formulation directe, c'est-à-dire de la source vers le bruit rayonné. Celle-ci est une approche par sous-structuration de domaines permettant l'étude des problèmes vibro-acoustiques en basses et moyennes fréquences. Nous montrerons particulièrement la façon dont l'association des deux formulations directe et indirecte permet de définir une méthode pouvant conduire jusqu'à l'identification des trois champs de vitesses, de pressions et d'intensités sur la surface de l'objet source.

Notre *troisième chapitre* sera consacré à la présentation des premiers résultats d'identification dans un cas d'application numérique simple.

Nous effectuerons, dans les *chapitres quatre et cinq*, une étude des principaux paramètres conditionnant les résultats donnés par la méthode. Le premier de ces deux chapitres présentera la mise en place d'un code de calcul permettant de résoudre rapidement le problème de rayonnement d'une structure simple. La méthode ainsi définie sera utilisée dans le chapitre cinq afin de générer de nombreux champs rayonnés présentant des caractéristiques différentes de façon à étudier la stabilité de la méthode iPTF face à la variation de différents paramètres.

Un *sixième chapitre* présentera une étude approfondie faite sur les ondes évanescentes qui prennent une part non négligeable dans le champ rayonné par les structures. Ces ondes évanescentes, par définition, ne peuvent pas être mesurées au delà du champ proche, ce qui peut être la cause d'une part des défauts d'identification rencontrés lors de l'application de notre méthode. L'étude faite ici aura pour but de déterminer l'importance de ces ondes évanescentes dans le champ rayonné.

Nous présenterons enfin, dans un *dernier chapitre*, les résultats de mesures expérimentales réalisées.

**Mots clés :** holographie acoustique, déconfinement de source, méthode inverse, champ proche, ondes évanescentes, intensité rayonnée, inverse Patch Transfer Functions.

## Abstract

Nowadays, both identification and characterization of acoustical sources remain two important topics in industry as such methods are often required to localize acoustical or vibrational sources on complex surfaces in an acoustical environment that may not be well-known. The PhD Thesis we present hereby is set in this purpose. We will study the ability of an inverse method, named iPTF (standing for **i**nverse **P**atch **T**ransfert **F**unctions) used to solve this particular problem.

In our *first chapter* we will present a bibliographical study of the different methods dealing with the resolution of similar problems. We will particularly underline the difficulties encountered with these methods, either regarding their practical application or their theoretical bases.

The presentation of the iPTF method will be made in the *second chapter*. This presentation will be organized starting from the direct formulation, that is from the source to the radiated sound. This direct method is a sub-domain decomposition based approach, allowing the study of vibro-acoustical problems in low and mid frequencies. We will especially explain how the association of both direct and reverse formulation enables to identify the pressure, velocity and intensity fields on the source.

The *third chapter* will concern the presentation of the first identification results in a simple numerical application.

In the *fourth* and *fifth chapters*, the main parameters conditioning the results given by our method will be studied. The first of these two chapters will introduce a calculation routine used to compute quickly the radiation field of a simple structure. This routine will then be used in our *fifth* chapter in order to build numerous fields having different characteristics. Using all these fields will let us know the stability of our method regarding different parameters.

A *sixth chapter* will present a precise study of evanescent waves that constitute a non-neglectful part of the radiated field. According to their definition, those evanescent waves

cannot be taken into account beyond the near-field, and this may be the reason of some difficulties while applying our method. The objective of the study herein presented is to determine the importance of those evanescent waves in the radiated field.

We eventually present, in a *last chapter*, the results of experimental measures conducted during the preparation of this PhD Thesis.

**Keywords :** acoustical holography, sources deconfining, inverse method, near-field, evanescent waves, radiated intensity, inverse Patch Transfert Functions.

# Table des matières

Remerciements	iv
Résumé	viii
Abstract	xi
Table des matières	xvi
<b>1 Introduction générale - Contexte scientifique</b>	<b>3</b>
1.1 L'identification de sources . . . . .	3
1.2 Méthodes d'identification . . . . .	5
1.2.1 Méthodes d'identification de sources sollicitant les structures . . . . .	5
1.2.2 Méthodes acoustiques . . . . .	7
1.3 Problématiques spécifiques à la mesure . . . . .	10
1.4 Problématiques liées à l'inversion des matrices . . . . .	11
1.5 Indépendance face aux bruits de mesures ou au champ environnant . . . . .	14
1.6 Présentation du travail de thèse . . . . .	16
1.6.1 Plan et apports des travaux présentés . . . . .	18
<b>2 Principe de la méthode iPTF</b>	<b>21</b>
2.1 Utilisation de la méthode PTF directe pour la résolution d'un problème de rayonnement . . . . .	21
2.1.1 Pose du problème étudié et décomposition en sous-domaines . . . . .	21
2.1.2 Résolution du problème dans le sous-domaine fermé $A$ entourant la source . . . . .	22
2.1.3 Notion d'impédance acoustique . . . . .	27
2.1.4 Résolution du problème dans le sous-domaine $B$ . . . . .	28

2.1.5	Calcul de la pression en un point des domaines couplés . . . . .	30
2.2	Formulation iPTF . . . . .	32
2.2.1	Identification de la vitesse de source . . . . .	32
2.2.2	Identification de la pression et de l'intensité . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Application de la méthode iPTF à un cas numérique simple</b>	<b>37</b>
3.1	Définition du problème étudié . . . . .	38
3.2	Résolution du problème de rayonnement . . . . .	39
3.2.1	Champs de vitesse, pression et intensité pariétales . . . . .	39
3.2.2	Champs de vitesses et de pressions rayonnés . . . . .	39
3.3	Résolution du problème d'identification . . . . .	43
3.3.1	Identification du champ de vitesses de vibrations . . . . .	43
3.3.2	Identification du champ de pressions pariétales . . . . .	48
3.3.3	Identification du champ d'intensités . . . . .	49
3.3.4	Régularisation du problème inverse . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Calcul analytique du rayonnement d'une plaque bafflée</b>	<b>55</b>
4.1	Approche mathématique . . . . .	56
4.1.1	Champs de déplacements normaux et vitesses normales . . . . .	56
4.1.2	Résolution intégrale du problème de rayonnement . . . . .	58
4.2	Validation du code de calcul . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Stabilité de la méthode iPTF</b>	<b>65</b>
5.1	Critère de maillage des surfaces . . . . .	66
5.1.1	Introduction . . . . .	66
5.1.2	Maillage de la surface d'identification . . . . .	68
5.1.3	Limitation de la finesse du maillage d'identification . . . . .	72
5.1.4	Maillage de la surface de mesure . . . . .	73
5.2	Erreur de positionnement des capteurs . . . . .	75
5.2.1	Introduction . . . . .	75
5.2.2	Champ rayonné . . . . .	78
5.2.3	Identification des vitesses de vibration . . . . .	81
5.3	Influence d'un bruit de mesure . . . . .	83
5.3.1	Introduction . . . . .	83
5.3.2	Champ rayonné . . . . .	85
5.3.3	Identification des champs de vitesses . . . . .	88
5.4	Conclusion . . . . .	92
5.4.1	Définition des maillages . . . . .	92
5.4.2	Précision apportée dans le positionnement des capteurs . . . . .	93

5.4.3	Précision des moyens de mesure . . . . .	93
<b>6</b>	<b>De l'importance des ondes évanescentes</b>	<b>97</b>
6.1	Rayonnement d'une plaque . . . . .	98
6.1.1	Pose du problème de rayonnement . . . . .	98
6.1.2	Résolution du problème et calcul du facteur de rayonnement . . . . .	100
6.1.3	Représentation du facteur de rayonnement . . . . .	103
6.2	Définition de la profondeur de pénétration des ondes évanescentes . . . . .	103
6.3	Conséquence de la non prise en compte du champ évanescent . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Expérimentation</b>	<b>111</b>
7.1	Identification du champ de vitesses sur une guitare acoustique . . . . .	111
7.1.1	Présentation générale de la manipulation . . . . .	111
7.1.2	Identification des champs de vibrations de la source . . . . .	117
7.1.3	Limitations de cette étude . . . . .	118
7.1.4	Identification des champs de vibrations de la source en environne- ment perturbé . . . . .	120
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>124</b>
	Conclusion . . . . .	125
	Perspectives . . . . .	127
<b>A</b>	<b>Notations</b>	<b>131</b>
A.1	Grandeurs physiques et mécaniques usuelles . . . . .	131
A.1.1	Variables . . . . .	131
A.1.2	Constantes . . . . .	131
A.2	Notations mathématiques . . . . .	132
A.2.1	Notations matricielles . . . . .	132
A.2.2	Notations complexes . . . . .	132
A.2.3	Opérateurs de moyennage . . . . .	132
A.3	Acronymes . . . . .	133
<b>B</b>	<b>Algorithmes d'inversion</b>	<b>135</b>
B.1	Structures de données . . . . .	135
B.1.1	Structure BaseModale . . . . .	135
B.1.2	Structure Maillages . . . . .	136
B.1.3	Structure Mesures . . . . .	137
B.2	Algorithmes des programmes utilisés . . . . .	137
B.2.1	Programme principal . . . . .	137
B.2.2	Calcul des impédances de rayonnement . . . . .	137



B.2.3	Calcul de la vitesse . . . . .	137
<b>C</b>	<b>Étude du rayonnement acoustique d'une plaque infinie</b>	<b>141</b>
C.1	Ondes de flexion dans une plaque . . . . .	141
C.2	Propagation des ondes acoustiques . . . . .	142
C.3	Couplage des phénomènes vibratoires et acoustiques . . . . .	144
C.4	Impédance et facteur de rayonnement . . . . .	145
<b>D</b>	<b>Publication des travaux de thèse</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>164</b>





## Introduction générale - Contexte scientifique

Afin de poser notre étude dans le contexte scientifique actuel, nous faisons dans ce premier chapitre un état de l'art des différentes méthodes relatives aux problèmes traités dans nos travaux.

Nous présentons ainsi, après une brève description du problème d'identification en vibrations et en acoustique, certaines méthodes parmi les plus répandues permettant de résoudre ce problème d'identification de source. Cette présentation est découpée en deux parties et aborde les méthodes basées sur des mesures vibratoires ainsi que les méthodes basées sur des mesures acoustiques.

La méthode que nous développons dans cette thèse utilise, entre autres, un champ de vitesse pour parvenir à résoudre ce problème inverse. Nous nous sommes donc intéressé aux méthodes de mesures de la vitesse et ce sont ces méthodes que nous expliquons dans un second temps.

Nous étudions ensuite les questions d'inversion matricielle et notre quatrième paragraphe est consacré à la présentation des différentes méthodes d'inversion et de régularisation.

Nous listons dans le cinquième paragraphe quelques méthodes permettant de filtrer les bruits aléatoires nécessairement présents lorsque des mesures sont faites, ce afin de limiter les difficultés rencontrées lors de l'inversion des systèmes traités.

Nous présentons enfin de façon détaillée et en la positionnant par rapport aux autres méthodes équivalentes l'étude que nous avons réalisée lors de ces recherches de doctorat.

### 1.1 L'identification de sources

---

La connaissance du comportement vibratoire des structures qui nous entourent est un axe de recherche important des développements industriels actuels. Les vibrations des structures peuvent être la cause de dommages particulièrement importants rendus possibles à cause des phénomènes de fatigue ou de résonance. Sans nécessairement conduire

à une dégradation de la structure, elles peuvent aussi être la source de désagréments pour l'utilisateur en terme de confort d'utilisation ou de bruit de fonctionnement. L'identification et la caractérisation des sources acoustiques ou vibratoires reste donc encore aujourd'hui un sujet d'importance pour les industriels qui souhaitent pouvoir agir localement sur les structures pour diminuer un comportement vibro-acoustique gênant. Il est par ailleurs souhaitable que cette caractérisation puisse se faire sur des surfaces complexes et dans un environnement acoustique non contrôlé. On parle alors de déconfinement.

Les méthodes d'identification de sources acoustiques, c'est-à-dire de localisation et de caractérisation de ces sources, apparaissent dans de nombreuses applications pratiques très diversifiées. Leur développement a d'abord été initié pour la mise en place de techniques militaires puis des applications civiles ont rapidement été envisagées. Elles servent notamment de bases aux systèmes d'identification. Les appareillages s'appuyant par exemple sur la technique du SONAR (pour **SO**und **N**avigation **A**nd **R**anging) sont aujourd'hui couramment utilisés pour la détection sous-marine [9]. Un système équivalent, le SODAR (pour **SO**nic **D**etection **A**nd **R**anging) permet également la détection de sources dans l'air [6]. On retrouve également de nombreuses applications de ces techniques d'identification dans des domaines très variés comme l'acoustique sous-marine, la localisation animale, la tomographie ou la visio-conférence [12, 83, 10].

Les méthodes d'identification appartiennent plus largement aux problèmes dits inverses. C'est-à-dire qu'à partir des effets que l'on peut mesurer, on souhaite déterminer les causes ainsi que le contexte dans lequel elles s'expriment. Une présentation générale des problèmes inverses peut être trouvée dans les travaux de A. G. RAMM *et al.* [73]. Dans les domaines particuliers des vibrations ou de l'acoustique, le but de ces problèmes inverses est de pouvoir localiser et caractériser des sources de vibration ou de bruit en effectuant, dans le milieu environnant, des mesures du champ de vibrations ou de pression qu'elles engendrent. Pour une étude faite directement sur la structure étudiée, l'accélération est la grandeur généralement utilisée. Pour une étude couplée avec le fluide environnant la structure, les deux informations de pression acoustique et de vitesse des particules d'air peuvent être mesurées.

Nous présentons dans ce premier chapitre les méthodes mises en place pour la résolution des problèmes inverses en vibrations et en acoustique. Nous abordons d'abord les méthodes vibratoires d'identification. Ces méthodes sont basées sur la mesure du comportement vibratoire de la structure pour la recherche de sources de vibrations telles que des efforts ponctuels ou des champs de pression. La méthode que nous présentons dans cette thèse étant basée sur la mesure du champ acoustique généré par la source étudiée, nous nous intéressons dans un second temps aux méthodes acoustiques permettant l'identification des sources. Par rapport aux méthodes précédentes, celles-ci s'appuient sur la mesure des champs acoustiques de pressions et/ou de vitesses rayonnés par la structure.

Un second paragraphe nous permet de détailler les problèmes liés à la mesure des champs acoustiques. Nous y verrons notamment les difficultés récemment relevées dans la mesure des champs de vitesses particulières. Nous traitons dans le troisième paragraphe les difficultés liées à la résolution de problèmes mal conditionnés et pour lesquels l'inversion peut être difficile. Nous présentons ensuite quelques méthodes permettant de filtrer les bruits de mesure qui entachent nécessairement les mesures acoustiques. Nous détaillons enfin le travail effectué lors de la préparation de cette thèse de doctorat et présenté dans ce mémoire.

## 1.2 Méthodes d'identification

---

On distingue dans l'ensemble des techniques d'identification celles qui s'appliquent sur des mesures vibratoires et celles qui s'appuient sur des mesures acoustiques. Nous présentons donc dans ce paragraphe quelques méthodes parmi les plus représentatives dans ces deux familles.

### 1.2.1 Méthodes d'identification de sources sollicitant les structures

L'intensité acoustique permet de caractériser la puissance acoustique traversant une surface. Si l'on s'intéresse aux vibrations de structure, il peut être utile de définir une grandeur équivalente permettant de déterminer l'énergie vibratoire traversant la structure. cette énergie peut alors être utilisée pour localiser la position des sources éventuelles de vibration dans la structure. On trouve ainsi, dans les travaux de D. U. NOISEUX *et al.* [59] ou dans ceux de G. PAVIĆ *et al.* [62] la définition d'une telle grandeur. Pour une onde de vibration se propageant dans la longueur d'un solide, cette grandeur caractérise l'énergie qui traverse, en une unité de temps, la largeur du solide. On trouve également, dans les travaux de A. J. ROMANO *et al.* [76] cette quantité intégrée par élément de surface. Cette nouvelle définition permet alors de quantifier la puissance transmise ou dissipée sur chaque élément de surface. On trouve dans l'article de D. NOISEUX l'expression suivante de l'intensité traversant une section normale à  $\vec{e}_x$  :

$$w_x = \langle Q_x \dot{\xi} \rangle_t + \langle M_x \dot{\theta}_x \rangle_t + \langle M_{xy} \dot{\theta}_y \rangle_t \quad (1.1)$$

Dans l'expression (1.1), On note  $\langle \bullet \rangle_t$  la moyenne temporelle d'une variable  $\bullet$  et  $\dot{\bullet}$  la dérivée par rapport au temps. Cette relation permet de relier l'intensité de structure à la dérivée temporelle du déplacement transversal  $\xi$ , et aux dérivées temporelles des déplacements angulaires  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Ces déplacements angulaires correspondant eux-même aux dérivées spatiales du déplacement transversal, la relation (1.1) a l'avantage de permettre

le calcul de l'intensité vibratoire à partir de la seule connaissance du déplacement transversal. Sa dérivation temporelle peut se faire simplement en utilisant une transformation de FOURIER. On trouve dans les travaux de L. GAVRIĆ et G. PAVIĆ [23, 62] deux méthodes permettant le calcul des dérivées spatiales par projection sur la base modale ou par différences finies. Une troisième méthode par transformation de FOURIER spatiale est également présentée dans les travaux de A. B. SPALDING *et al.* [82].

La difficulté principale rencontrée dans ces trois cas pour calculer des quantités dérivées en espace est posée par la stabilité des méthodes utilisées. Ces problèmes étant basés sur l'inversion de quantités mesurées ou calculées, les erreurs de mesures ou de calcul, aussi petites soient-elles, peuvent être particulièrement amplifiées lors de l'inversion. S. I. HAYEK *et al.* s'intéressent particulièrement à ce problème dans le cas de l'approximation des dérivées spatiales par différences finies [31]. On peut lire dans leurs travaux que si le nombre de points utilisés pour l'approximation de la dérivée spatiale est important, l'approximation est de meilleure qualité mais le calcul de la dérivée spatiale est moins stable. À l'inverse, si le nombre de points est faible, le calcul a une meilleure répétabilité mais donne un résultat plus éloigné de la valeur exacte. Un calcul du second ordre, appuyé sur cinq points de mesure du déplacement transversal est montré par S. I. HAYEK comme étant le meilleur compromis entre répétabilité et précision de la valeur approchée. Lors de la décomposition du déplacement transversal sur la base des modes, L. GAVRIĆ montre que le calcul des modes les plus élevés est complexe et instable et qu'il convient de les négliger. Ceci correspond en fait à un filtrage modal qui permet, en dégradant la précision du calcul, d'améliorer sa stabilité. Dans son calcul par transformation de FOURIER spatiale, A. B. SPALDING introduit un filtrage des nombres d'ondes suivant  $x$  et  $y$  afin d'améliorer la stabilité du calcul de la dérivation spatiale. Le choix de ce filtrage a été précisé dans un article de K. SAIJYOU *et al.* [80]. S'appuyant sur les travaux de E. G. WILLIAMS [97, 98], K. SAIJYOU utilise une technique de régularisation basée sur la méthode de TIKHONOV [87] dont le paramètre de régularisation est réglé au moyen d'une méthode par validation croisée généralisée (ou GCV pour **G**eneralized **C**ross-**V**alidation) [24].

Au delà du calcul direct de l'intensité vibratoire de la structure grâce à la mesure des déplacements transversaux, C. PEZERAT et J.-L. GUYADER présentent la méthode FAT (pour **F**orce **A**nalysis **T**echnique), à l'origine de la méthode RIFF (pour **R**ésolution **I**nverse **F**iltrée **F**enêtrée), et permettant de lier directement le déplacement transversal à la force d'excitation [65, 66, 67, 68]. Les travaux de Y. ZHANG et J. A. MANN [106, 105] font le lien entre les approches développées par A. B. SPALDING et par C. PEZERAT en proposant une méthode s'appuyant sur une transformation de FOURIER des déplacements mesurés.

Les travaux de S. GRANGER et L. PEROTIN proposent également une méthode de

localisation, toujours basée sur la déformée de la structure étudiée, mais en mettant en place une résolution du point de vue modal [26, 64]. À partir d'un modèle modal de la structure et d'une décomposition spatiale de l'excitation, elle permet d'identifier les forces appliquées sur la structure.

La méthode de retournement temporel mise en place par M. FINK *et al.* [22] est à l'origine une méthode permettant de retrouver des sources acoustiques à partir de la connaissance de champ rayonné en tout point d'une surface autour de la source. Cette méthode est basée sur l'utilisation du principe de symétrie de la propagation des ondes. Selon ce principe, lorsqu'une onde est captée en un point quelconque de l'espace, si le signal mesuré est émis, depuis le point de mesure, en étant retourné dans le temps, l'onde alors créée se focalise exactement au point où l'onde initiale a trouvé sa source. Des travaux un peu plus récents ont permis d'adapter cette méthode de retournement temporel au cas des ondes de vibration de structure. Nous citons ainsi l'étude de C. DRAEGER *et al.* [19] présentant une application, dans une structure solide, de cette méthode alors limitée aux très hautes fréquences. Des applications aux fréquences plus basses ont été développées par la suite, notamment par R. K. ING *et al.* pour la conception de surfaces tactiles [37], ou plus récemment dans une de nos précédentes études dans laquelle nous localisons une source impulsionnelle à l'aide de l'accélération normale mesurée en deux points [90].

## 1.2.2 Méthodes acoustiques

Parmi les méthodes acoustiques d'identification, une des plus répandues est très certainement l'holographie acoustique de champ proche (ou NAH pour **N**earfield **A**coustical **H**olography) introduite dans les années 1980 par J. D. MAYNARD et E. G. WILLIAMS [55, 54]. Le principe de la NAH est de rétropropager, par déconvolution spatiale, le champ acoustique mesuré, afin d'obtenir le champ acoustique sur une surface quelconque, appelée hologramme. Cette déconvolution se fait simplement après une transformation de FOURIER spatiale à deux dimensions. Une fois passé en nombre d'onde, la déconvolution correspond à une simple division par la fonction de transfert entre le point de mesure et le point d'identification. L'ensemble des fonctions de transfert est déterminé à partir de l'équation de HELMHOLTZ [11]. À partir du champ de pression calculé sur l'hologramme, il est simple de déterminer la vitesse à partir de l'équation d'EULER, reliant la pression à la vitesse [11]. Si l'hologramme sur lequel le champ acoustique est calculé est suffisamment proche de la source, il est alors possible de considérer, par continuité du champ acoustique, que la vitesse identifiée correspond à la vitesse de la source. Depuis sa mise en place, de nombreux développements ont permis de repousser les limites de son application. On trouve par exemple des travaux permettant l'application de la méthode NAH sur des géométries cylindriques [99] ou bien en fluides lourds [100, 96].

Au début de son élaboration, une limitation importante de la méthode NAH concernait



la géométrie des surfaces sur lesquelles elle était applicable. Pour contrer cette limitation, des méthodes basées sur une résolution par éléments de frontière ont été développées. On trouve ainsi dans les travaux de F. AUGUSTINOVICZ et M. TOURNOUR [5, 88] la définition d'une méthode inverse par éléments de frontière (ou iBEM pour **i**nverse **B**oundary **E**lements **M**ethod). Cette méthode, présentée de façon synthétique par J. LIU *et al.* [50], s'appuie sur la définition de vecteurs de transferts acoustiques sur la surface de mesure. Ces vecteurs de transferts acoustiques correspondent en fait aux fonctions de transfert entre un point de mesure et un des nœuds du maillage par éléments de frontière de la source. Ainsi, en chacun des points de mesure il est possible de définir une matrice de transferts acoustiques reliant directement les vitesses de vibrations sur la surface source à la pression mesurée. Dans la plupart des cas, il existe bien plus de nœuds sur le maillage de la source que de points de mesure de la pression acoustique, de sorte que la méthode iBEM est généralement mal posée et qu'elle est généralement régularisée par la méthode de décomposition sur les valeurs singulières [25]. Par ailleurs, la densité des maillages mis en jeux est généralement très grande et fait de la méthode iBEM une méthode très coûteuse en temps de calculs.

Une troisième méthode, introduite par Z. WANG et S. F. WU [94, 102], exprime la pression acoustique comme un développement de solutions particulières des équations de HELMHOLTZ. La définition des coefficients de ce développement se fait par application d'une méthode des moindres carrés en comparant le champ acoustique mesuré et le champ acoustique créé par une solution supposée du champ source. Cette méthode appelée HELS (pour **H**elmholtz **E**quations **L**east **S**quares) s'appuie donc sur la résolution de l'équation de HELMHOLTZ sous sa formulation directe. Elle est ainsi insensible aux problèmes cités pour les précédentes méthodes inverses et relatifs à la stabilité de la résolution. Toutefois, cette méthode montre des difficultés de convergence, notamment lorsqu'elle est appliquée sur des structures dont la géométrie devient excessivement complexe.

Depuis une dizaine d'année, les avantages de ces trois méthodes sont associées dans une méthode d'holographie acoustique hybride (ou hNAH pour **h**ybrid **N**earfield **A**coustical **H**olography) [103]. Cette méthode s'appuie sur une modification de la méthode HELS vue précédemment afin d'exprimer la pression acoustique rayonnée comme la superposition de fonctions d'ondes sphériques entrantes et sortantes. Cette formulation est alors associée à la formulation intégrale de HELMHOLTZ à la base de la méthode BEM. Une régularisation de TIKHONOV [87] doit alors être utilisée et le choix du paramètre de régularisation se fait par la méthode GCV [24]. Cette formulation hybride permet ainsi de définir une méthode applicable à des sources de géométrie quelconque, en champ diffus ou confiné.

Nous présentons enfin une dernière méthode d'identification à partir de la mesure du champ de pression rayonné. Il s'agit ici d'une méthode mise en place à partir des réponses en fréquence du système étudié. Cette méthode appelée IFRF (pour **I**nverse **F**requency

Response Function method), et présentée par R. VISSER, utilise les réponses en fréquence calculées entre les différents points de la source et les différents points de la surface de mesure [92].

Les méthodes présentées jusqu'ici utilisent la mesure du champ de pression rayonné par la source. À l'exception de la méthode HELS, elles sont sensibles aux erreurs de mesure compte-tenu de l'inversion des équations. Une approche intéressante a été abordée par S.-C. KANG et J.-G. IH pour améliorer la stabilité de ces méthodes [43]. Cette approche utilise la définition partielle du champ de vibration de la source pour diminuer la dimension du système à inverser pour résoudre le problème de localisation. Il a été montré qu'une connaissance *a priori* (même partielle) de la solution est très efficace pour s'affranchir des méthodes de régularisation habituellement utilisées pour ces approches. Cependant, cela ne permet pas de réduire de façon significative l'erreur commise sur l'identification du champ de vitesses pariétales de la source.

D'autres méthodes d'identification n'utilisent pas la mesure du champ de pression rayonné mais la mesure du champ d'intensité rayonné. C'est par exemple le cas de cette méthode d'holographie acoustique large bande (ou BAHIM pour **B**roadband **A**coustic **H**olography from **I**ntensity **M**easurements) mise en place par T. LOYAU *et al.* [52]. Cette méthode permet d'identifier les champs de pression et de vitesse sur une surface plane, à partir de la mesure du champ de pression complexe rayonné sur un plan parallèle au plan source. L'intensité rayonnée est calculée grâce à la mesure de la pression complexe de façon à permettre une représentation vectorielle du rayonnement. En basses fréquences, la résolution de cette méthode est limitée par la prise en compte des ondes évanescentes et est donc directement liée à la distance séparant la surface source de la surface de mesure. Au delà de la reconstruction du comportement de la source, cette méthode permet également de déterminer le champ rayonné dans sa totalité. Cette méthode a l'avantage d'être facile à mettre en place compte-tenu de la simplicité du matériel requis.

On trouve également dans les travaux de R. VISSER [91, 93] des méthodes d'identification basées sur la mesure du champ de vitesses particulières, associée ou non à la mesure du champ de pressions. Les méthodes proposées consistent en une adaptation de la méthode IFRF [92] de façon à pouvoir être utilisées aussi bien avec un champ de pressions qu'un champ de vitesses ou avec l'association de ces deux données. Les travaux de R. VISSER ont pu mettre en évidence une légère amélioration des champs de vibrations reconstruits par cette nouvelle méthode IFRF.

Une autre méthode d'identification de source est une méthode par formation de voies (en anglais *beamforming*). Cette méthode par antennerie acoustique permet la localisation de sources à partir de mesures effectuées en champ lointain. Effectivement, si la distance à la source est suffisamment grande, les ondes reçues par l'antenne sont sphériques. En fonction de la direction de provenance de l'onde, il existe alors un décalage dans les enre-

gistements faits par l'ensemble des capteurs de l'antenne. C'est ce décalage qui permet de déterminer la position de la source. Une présentation détaillée de cette méthode est faite dans un rapport de T. HAYNES *et al.* [33]. Cette méthode d'antennerie a été par la suite améliorée par E. JULLIARD *et al.* pour l'identification de sources en milieux confinés [41, 42, 53].

### 1.3 Problématiques spécifiques à la mesure

---

Les moyens de mesure de pression sont aujourd'hui maîtrisés, et l'on sait adapter le capteur au champ que l'on souhaite mesurer de façon à assurer des mesures d'une bonne précision. De fait, s'il n'existe plus de problèmes particuliers pour la mesure de la pression acoustique, il n'en n'est pas de même pour la mesure de la vitesse d'écoulement d'un fluide. Nous nous intéressons donc dans cette partie à la mesure de la vitesse particulière dans un fluide.

Les premières méthodes de mesure de la vitesse d'un écoulement se basent sur la mesure de la pression et l'on retrouve de telles méthodes depuis le XVIII<sup>e</sup> siècle. On trouve par exemple dans les travaux de H. PITOT [70] un système de mesure de la vitesse des eaux courantes basé sur une mesure différentielle de la pression statique et de la pression dynamique.

Des moyens de mesures plus récents s'appuient sur deux mesures de la pression pour permettre un calcul approché de la vitesse particulière à l'aide de l'équation d'EULER [11]. Cette équation relie en effet la vitesse particulière à la pression acoustique par un opérateur de différentiation :

$$-i\omega\rho_0V(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial n} \quad (1.2)$$

Cette relation indique que la vitesse correspond à la dérivation spatiale de la pression. La mesure de la pression en deux points proches permet de calculer une valeur approchée de la vitesse par différences finies. La vitesse est ainsi calculée au point central entre les deux capteurs de pression. De ce fait, l'association de quatre capteurs de pression permet de déterminer sur les trois dimensions le champ de vitesses particulières [74]. Cette méthode relativement efficace est de mise en place simple mais, au delà des approximations commises par l'opération de différence finie, elle est limitée par les phénomènes de dispersion ou de diffraction ainsi que par les erreurs possibles de déphasage entre les deux signaux de pression mesurés.

D'autres techniques de mesure de la vitesse d'un fluide utilisent la résistance thermique d'un fil ou d'un film [18]. Un capteur de plus en plus répandu actuellement est le capteur *Microflow* présenté par H.-E. DE BREE [17] ou F. J. M. VAN DER EERDEN [89]. Le

capteur ainsi mis en place est constitué de trois résistances placées dans un canal. La résistance centrale est utilisée comme résistance chauffante tandis que les deux résistances extérieures sont utilisées comme capteurs. La présence d'un écoulement dans le milieu environnant entraîne une différence entre la température mesurée par les deux résistances extérieures, et cette différence permet de caractériser la vitesse de l'écoulement. L'évolution des technologies de construction de tels capteurs a permis par la suite de créer des capteurs de vitesse particulière tridimensionnels. On trouve des réalisations de ce type dans les travaux de D. R. YNTEMA *et al.* [104]. On trouve également dans un article de H.-E. DE BREE une revue des technologies *Microflow* de mesure de vitesse basées sur l'utilisation de fils chauds [16].

Un article de F. JACOBSEN *et al.* [39], présente une comparaison des deux méthodes de mesure dans le cadre de la mesure du champ d'intensités. Cet article s'attache particulièrement à l'influence des erreurs de phase dans les mesures de pression ou de vitesse. L'étude met en avant les limitations du capteur pression dans le cas de mesures où le champ proche est fortement réactif, et lorsque la fréquence descend en dessous de 500 Hz.

Nous terminons cette partie par une brève présentation des méthodes optiques de mesure de la vitesse vibratoire du champ rayonné. Les travaux de P. ROUQUIER présentent de façon détaillée l'application de la vélocimétrie laser doppler (ou LDV pour Laser Doppler Velocimetry) à la mesure de vitesses particulières en champ libre [79]. On rappelle ici rapidement le fonctionnement de la vélocimétrie laser doppler : lorsqu'un faisceau laser de fréquence émise  $f_e$  est diffusé par un objet en mouvement par rapport à l'émetteur laser, un observateur fixe par rapport à l'émetteur laser enregistre, après diffusion, un signal avec une fréquence optique  $f_d$  différente de  $f_e$ . L'écart entre les deux fréquences est fonction de la vitesse de l'objet étudié. Des applications de cette méthode à des domaines acoustiques peuvent être trouvées dans les travaux réalisés à l'ONERA [46, 57]. Une autre méthode par image de particules est présentée par G. LE BESNERAIS *et al.* ou G. M. QUÉNOT [47, 72]. Cette méthode permet la mesure à deux dimensions d'un champ de vitesses par comparaison successive de photographies des particules constituant le fluide. Le développement de moyens informatiques puissants a rendu cette méthode particulièrement intéressante car elle permet maintenant de mesurer un champ de vitesses en temps réel.

## 1.4 Problématiques liées à l'inversion des matrices

---

Compte-tenu du milieu environnant et des sollicitations auxquelles sont soumises des structures, une branche de l'acoustique s'intéresse à la prédiction du comportement perçu en terme de vibration de la structure ou de bruit rayonné. La résolution de ce problème par l'utilisation de modèles mathématiques représentatifs constitue l'étude directe des

phénomènes vibroacoustiques. La méthode que nous présentons ici part au contraire de la considération des effets et recherche les causes responsables de ces observations. Elle constitue en cela une méthode inverse. Comme de nombreuses méthodes de résolution inverse, la méthode inverse par fonctions de transfert par *patches* sur laquelle nous travaillons peut être mal posée et la stabilité des résultats obtenus peut s'en trouver dégradée.

A. TIKHONOV présente dans [87] les trois conditions devant nécessairement être vérifiées pour qu'un problème soit dit *bien posé* :

- le problème doit avoir une solution ;
- la solution du problème doit être unique ;
- le problème doit être stable.

Les deux premières conditions sont généralement moins problématiques car elles sont nécessairement vraies ou fausses. La dernière condition en revanche est difficile à évaluer dans la mesure où peu de méthodes sont stables avec certitude et que leur instabilité est plus ou moins importante. Pour le cas étudié dans ces travaux de thèse, nous présentons au chapitre §2 la formulation mathématique de la méthode inverse par fonctions de transfert par *patches* à partir de sa formulation directe. La modélisation retenue impose donc que le problème posé ait une solution unique. Les difficultés que nous pourrions alors rencontrer concernent la troisième des exigences fixée par A. TIKHONOV. Lors de l'inversion du problème en effet, de petites perturbations sur les paramètres d'entrée pourront être amplifiées considérablement et conduiront à une mauvaise identification du champ de vitesses de la source.

Dans tous les domaines de la physique ou des mathématiques, il existe des problèmes mal conditionnés et leur formulation a fait l'objet de nombreux articles ou de nombreuses publications. Sans pouvoir en faire une étude exhaustive, nous présenterons ici quelques unes de ces méthodes parmi les plus significatives.

La plupart des méthodes de régularisation ont pour idée de base l'apport d'une information concernant le résultat recherché ; cette information étant considérée juste *a priori*. Nous avons donné au paragraphe §1.2.2 un premier exemple de méthode où l'on impose une connaissance *a priori* du champ recherché. Dans les travaux de S.-C. KANG et J.-G. IH [43], la mesure, en certains points, du champ recherché permettait de s'affranchir de l'utilisation de techniques de régularisation.

On trouve dans [87] une méthode proposée par A. TIKHONOV pour améliorer la stabilité d'un problème mal conditionné. Dans sa méthode, A. TIKHONOV s'intéresse à l'écart entre la solution mesurée et la solution calculée par le problème direct à partir des données identifiées. L'objectif est alors de réduire l'écart observé entre ces deux éléments et ceci est rendu possible par l'intermédiaire d'un paramètre de régularisation permettant de rendre la résolution du problème stable mais dont l'inconvénient est de dégrader un peu la précision de la solution calculée par rapport à la solution exacte.

En s'appuyant sur les travaux de G. H. GOLUB *et al.* [25] concernant la décomposition en valeurs singulières d'une matrice, P. C. HANSEN propose une autre méthode de régularisation du problème inverse qui s'appuie sur la résolution d'un problème équivalent dont une part des valeurs singulières est négligée [28, 29]. Dans cette méthode, on impose une connaissance *a priori* de la norme de la solution qui doit être petite. En faisant cela, il est possible d'atténuer les divergences engendrées par les erreurs commises sur la mesure. Dans le cas de la méthode TSVD (pour **T**runcated **S**ingular **V**alue **D**ecomposition), imposer à la norme de la solution d'être petite se fait en négligeant les valeurs singulières les plus faibles puisque ce sont elles qui ont l'influence la plus importante sur l'estimation du résultat. Un paramètre permet alors de régler le nombre de valeurs singulières négligées.

Dans la méthode de A. TIKHONOV aussi bien que dans celle de P. C. HANSEN, nous retrouvons l'existence d'un paramètre de régularisation. Pour les premières applications de ces méthodes de régularisation, ce paramètre était choisi de façon arbitraire. Depuis, des méthodes ont été mises en place pour faciliter et automatiser le choix de ces paramètres. Nous présentons maintenant quelques unes de ces méthodes.

G. H. GOLUB *et al.* présentent la méthode GCV [24] (pour **G**eneralized **C**ross-**V**alidation). Cette méthode permet le choix du paramètre de régularisation en minimisant une expression fonction du paramètre de régularisation. Cette fonction est définie comme le rapport entre la norme de l'erreur quadratique moyenne commise lors de l'estimation de la solution et les composantes du filtre mis en place lors de la régularisation. L'erreur quadratique moyenne étant au numérateur de ce rapport, la minimisation de cet indicateur revient à chercher la solution régularisée la plus proche de la solution du problème inverse au sens des moindres carrés.

La méthode de la courbe en  $L$  a été largement étudiée par P. C. HANSEN dans un article de référence [30]. Cette méthode est une méthode graphique de recherche de la valeur optimale du paramètre de régularisation. Elle s'appuie sur le tracé en axes log-log de la norme de la solution régularisée en fonction de la norme de l'erreur d'identification. Cette courbe, dont les points correspondent à différentes valeurs du paramètre de régularisation, a généralement une forme de  $L$  et le point situé dans le coude de la courbe correspond au point de régularisation optimale. La recherche du coude étant délicate à effectuer, elle est généralement associée à un problème de minimisation de la courbure de cette courbe en  $L$ . On trouve également dans les travaux de G. RODRIGUEZ et D. THEIS une méthode de recherche du coude basée sur une approche géométrique couplée à des règles heuristiques de recherche [75].

On trouve dans les travaux de V. A. MOROZOV [58, 71] une méthode plus ancienne de régularisation de problèmes mal posés. Le principe de décalage de MOROZOV consiste à fixer le paramètre de régularisation de façon à ce que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit. Cette méthode nécessite donc la connaissance exacte du



bruit rencontré lors des mesures. Lorsque la variance  $\sigma^2$  du bruit est connue, ce principe de décalage permet de déterminer les paramètres de régularisation d'une façon très simple. La limitation de cette méthode réside dans la difficulté qui peut exister à caractériser les bruits de mesure. Un travail réalisé par E. G. WILLIAMS compare cette méthode à la méthode GCV [98]. Cet article introduit une méthode d'estimation du bruit qui rend l'utilisation de la méthode de MOROZOV particulièrement intéressante car plutôt que de chercher la valeur minimale d'une fonction, comme cela est le cas avec la méthode GCV, elle recherche la racine d'une fonction.

D'autres approches probabilistes existent également pour permettre la régularisation de problèmes mal conditionnés. A. TARANTOLA montre dans [84] que la connaissance *a priori* d'une information représentée par des données statistiques sur les résultats (connaissance *a priori* de la moyenne ou de la covariance) peut aider à régulariser le problème. L'utilisation de ces données statistiques permet alors de diminuer sensiblement l'effet dégradant de l'inversion et d'obtenir, *a posteriori*, une information précise. On trouve, par exemple, dans les travaux de J. ANTONI [3,2,1] la présentation d'une approche bayésienne pour la résolution de problèmes inverses en acoustique. Cette approche permet d'améliorer la stabilité de la résolution en associant aux informations de nature physique (propagation des ondes dans le milieu) des informations probabilistes (connaissance *a priori* de la distribution spatiale de la source).

## 1.5 Indépendance face aux bruits de mesures ou au champ environnant

---

Dans toute application pratique, les mesures sont entachées de bruits qui perturbent les données. La première source de bruit est intrinsèque au moyen de mesure et provient de l'agitation thermique des électrons dans les conducteurs électriques utilisés dans la chaîne de mesure. L'importance de ce phénomène a été mise en évidence par J. B. JOHNSON et H. NYQUIST en 1928 [40,60]. Ce bruit d'origine thermique s'ajoute tout au long de la chaîne de mesure et conduit à un bruit de fond dont l'intensité peut être relativement importante mais reste constante sur la durée de la mesure et est décorrélée du signal étudié. D'autres sources de bruit décorrélées peuvent exister compte-tenu du fait qu'il est question ici de mesure des champs acoustiques. En dehors des salles anéchoïques prévues spécialement pour réduire au minimum la présence de bruits perturbateurs lors de mesures, il est difficile d'assurer un silence absolu dans un local de mesure. De plus, la mesure en champ contrôlé peut parfois être impossible et il peut être nécessaire dans certains cas de faire des mesures dans un environnement bruyant, réverbérant ou confiné. Nous présentons donc dans cette partie certaines méthodes mises en place pour assurer l'indépendance des méthodes de mesure face aux bruits de mesure ou au champ acoustique environnant.

Les méthodes d'analyse en composantes principales ou en composantes indépendantes peuvent être utilisées pour résoudre le problème qui nous intéresse de séparation des données utiles et du bruit dans un signal mesuré. La première méthode d'analyse en composantes principales (ou ACP) a été développée par K. PEARSON au début du XX<sup>e</sup> siècle [63]. Cette méthode consiste à transformer des variables liées entre elles en de nouvelles variables indépendantes. Ces nouvelles variables, appelées composantes principales, permettent de réduire l'information de façon à ce qu'elle contienne moins de variables que l'information initiale. Cette méthode est par exemple à la base d'algorithmes de compression de données. Pour son utilisation en tant que méthode de filtrage du bruit, on considère que le bruit est responsable des composantes les moins importantes. Il convient alors de les supprimer et de procéder à la transformation inverse afin de nettoyer le signal de l'influence du bruit. On trouve des applications de cette méthode pour la réduction du bruit dans différents domaines notamment en optique microscopique [13] ou en imagerie médicale [77, 78]. Alors que l'analyse en composantes principales est limitée aux données statistiques à deux variables, l'analyse en composantes indépendantes (ou ACI) en est une extension pour des variables statistiques d'un ordre supérieur. La méthode ACI est présentée dans les travaux de P. COMON [14, 15] et est plus particulièrement adaptée aux problèmes de séparation de sources. Un des avantages de ces méthodes est qu'elles effectuent une transformation linéaire des variables corrélées en variables décorréelées. Elles permettent donc de réduire l'influence des bruits corrélés aussi bien que celle des bruits décorrélés. Ces deux méthodes sont synthétisées dans un ouvrage de A. HYVÄRINEN, J. KARHUNEN et E. OJA [36].

Le filtrage de WIENER est une autre méthode permettant de séparer un signal du bruit de mesure. Les travaux de N. WEINER sont présentés dans [95]. Le filtrage de WIENER est un problème d'estimation où on dispose d'une connaissance *a priori* sur le paramètre à estimer. Cette connaissance se présente sous la forme de données probabilistes. Dans notre cas, nous souhaitons estimer un signal noyé dans un bruit, et nous estimons *a priori* que le signal est centré, blanc, stationnaire, etc. Compte-tenu de ces hypothèses, on cherche alors un filtre linéaire invariant en temps dont la sortie est la plus proche possible du signal original. Le filtrage de WIENER est donc un cas particulier de la méthode de filtrage par minimisation de l'erreur quadratique moyenne (ou LMS pour **Least Mean Square** [32]) dans le cas où le signal est linéaire et invariant en temps et où le bruit est stationnaire. Cette technique de filtrage concerne donc les bruits décorrélés tels que les bruits de JOHNSON-NYQUIST ou ceux créés par des sources de bruits stationnaires présentes dans le local de mesure. Un article récent de J. BENESTY [8] met en avant les améliorations apportées par B. PICINBONO [69] et concernant la définition de filtres largement linéaires particulièrement adaptés au traitement des signaux complexes. Des applications de ces deux méthodes (filtrage de WIENER et méthode LMS) peuvent



être trouvées par exemple dans les travaux de Y. EPHRAÏM [20, 21] ou dans ceux de P. SCALART [81]

C. LANGRENNE *et al.* proposent, dans [44] et [45], une méthode permettant d'appliquer la méthode iBEM dans un environnement fermé et bruité. La méthode proposée dans cet article s'appuie sur la formulation intégrale de HELMHOLTZ et requiert la connaissance d'un champ de pressions double couche mesuré sur deux surfaces parallèles fermées autour de la source étudiée. La première étape du calcul consiste en la séparation des champs de pressions entrant et sortant à l'aide de la formulation intégrale de HELMHOLTZ. Le champ incident, et diffusé par la source testée, est ensuite soustrait du champ sortant. Cette opération permet alors de retrouver le champ qui aurait normalement été émis par la source dans un champ libre. Pour pouvoir fonctionner, cette méthode suppose toutefois que la source étudiée est un corps rigide.

## 1.6 Présentation du travail de thèse

---

Nous présentons dans ce mémoire de thèse une méthode inverse par fonctions de transfert par *patches* (ou iPTF pour **i**nverse **P**atch **T**ransfert **F**unctions). Elle se pose dans le cadre des problèmes inverses présentés au paragraphe §1.2. Elle permet d'identifier la vitesse particulière et la pression acoustique sur une surface proche de la source. Si la surface d'identification est suffisamment proche de la source, il est alors possible de considérer par continuité des champs de vitesses et de pressions que les grandeurs identifiées correspondent à celles mesurables sur la surface source. C'est donc, précisément, une méthode acoustique qui s'appuie sur la mesure des deux champs de pressions et de vitesses particulières sur une surface fermée entourant la source étudiée. Pour les applications pratiques que nous présenterons au chapitre §7, la mesure de ces deux informations se fait au moyen du capteur de mesure colocalisée de pression et de vitesse. La sonde utilisée est un capteur PU-mini *Microflown Technologies* [86]. Cette sonde associe un capteur de pression omnidirectionnel sensible de 20  $Hz$  à 20  $kHz$  à un capteur directionnel de vitesse particulière par fil chaud sensible de 0.1  $Hz$  à 20  $kHz$ . Parmi les méthodes de régularisation évoquées dans ce chapitre, la méthode de TIKHONOV, associée à la méthode de la courbe en  $L$  pour le choix du paramètre de régularisation, est celle qui a conduit aux meilleurs résultats.

Comme dans les travaux de C. LANGRENNE et M. MELON [44, 45, 56], la méthode iPTF que nous présentons ici est indépendante du champ environnant car comme pour les travaux de C. LANGRENNE, nous effectuons les mesures sur une surface fermée et nous basons nos équations sur la résolution du problème intégral de HELMHOLTZ. Toutefois, nos travaux se différencient des études faites au Conservatoire National des Arts et Métiers en deux points particuliers.

Le premier point concerne le capteur utilisé pour la mesure. Alors que notre méthode s'appuie sur la connaissance des champs de pressions et de vitesses autour de la source, la méthode de C. LANGRENNE n'utilise que des informations de pressions mesurées sur deux surfaces parallèles autour de la source.

De cette première distinction découle la seconde qui concerne la formulation du problème résolu. Nos collègues utilisent les mesures de pression faites pour décomposer le champ mesuré en trois parties

$$p^m(s) = p^f(s) + p^i(s) + p^s(s) \quad (1.3)$$

Cette relation exprime le champ  $p^m$  mesuré en un point  $s$  comme étant la superposition d'un champ  $p^f$  correspondant au rayonnement en champ libre de la source étudiée, d'un champ  $p^i$  correspondant au champ provenant d'éventuelles sources extérieures et d'un champ  $p^s$  correspondant au champ incident diffusé par réflexion sur la source. Une première étape de calcul consiste alors à déterminer le champ sortant  $p^o$  défini comme étant la somme du rayonnement en champ libre  $p^f$  et du champ diffus  $p^s$ . Ce champ peut également être déterminé à partir du champ mesuré uniquement en utilisant la formulation standard intégrale de HELMHOLTZ. Une seconde étape de calcul consiste à déterminer la partie  $p^s$  du champ mesuré correspondant au champ émis par les sources extérieures et diffus par réflexion sur la surface de la source. Il est nécessaires d considérer ici en première approximation que la source est un corps rigide. La connaissance du champ  $p^o$  obtenu à l'étape 1 et du champ  $p^s$  obtenu à l'étape 2 permet enfin d'obtenir une approximation  $\tilde{p}^f$  du champ  $p^f$  par l'utilisation de cette relation simple

$$\tilde{p}^f(s) = p^o(s) - p^s(s) \quad (1.4)$$

Un avantage non négligeable de cette méthode est qu'elle ne s'appuie que sur la résolution de problèmes directs (formulation intégrale de HELMHOLTZ et équation intégrale de FREDHOLM). De ce fait, elle ne nécessite l'utilisation d'aucune méthode de régularisation. C'est là, très certainement, la troisième différence entre nos deux méthodes.

Finalement, notre méthode, qui s'appuie sur la mesure de la pression acoustique et de la vitesse particulaire, différencie les contributions internes ou externes au volume de façon intrinsèque, grâce aux mesures faites ainsi qu'à la formulation retenue. Par ailleurs, elle ne présuppose pas la rigidité de la surface de la source.

## 1.6.1 Plan et apports des travaux présentés

Dans la suite de ce mémoire, nous nous attacherons, à partir de la formulation mathématique retenue pour la résolution d'un problème direct de rayonnement, à déterminer et vérifier la validité d'une méthode — appelée méthode iPTF dans le reste du mémoire — permettant d'identifier les champs de vitesses, pressions et intensités à la surface d'un objet quelconque.

L'extension de la méthode au calcul de l'intensité de surface de l'objet, l'étude de la stabilité de la méthode face à divers perturbations ainsi que l'importance de la prise en compte des ondes évanescentes constituent les principales originalités des travaux présentés ici.

Ainsi, les équations nécessaires à l'obtention d'un champ d'intensité identifié seront présentées et leur résultats seront comparés à des calculs de référence.

Des études détaillées ont aussi été faites pour déterminer la stabilité de notre méthode face à trois paramètres : l'importance du maillage des surfaces de mesure et d'identification, la précision accordée au positionnement des capteurs de mesure ainsi que l'influence d'un bruit perturbateur lors des mesures.

Pour le premier de ces trois paramètres, nous présenterons dans nos travaux des critères permettant de définir les maillages de mesure et d'identification en fonction des données du problème traité, de façon à assurer des résultats exploitables.

Pour les deux autres paramètres, nous présenterons les limites au delà desquelles l'erreur de positionnement ou l'erreur de bruit devient trop importante pour permettre une convergence du résultat.

Nous nous sommes également intéressés à l'influence des ondes évanescentes sur l'identification du champ de vibration de la source. Nous présenterons dans ce mémoire une étude détaillée faite sur le facteur de rayonnement, et nous discuterons de sa pertinence pour la représentation des phénomènes physiques observés lorsqu'une part du champ rayonné par une structure est évanescente.

Ces études nous ont permis de montrer la robustesse de cette méthode de caractérisation de sources applicable en environnement non maîtrisé sur des structures de géométrie complexe.

La suite du mémoire s'articule autour de ces sept chapitres :

- Le chapitre §2 présente le formalisme choisi pour déterminer les champs de vitesses, pressions et intensités sur la surface de la source. Il présente d'abord la formulation directe de la méthode par fonctions de transfert par *patches*. A partir du problème direct, les équations sont inversées de façon à déterminer les champs caractéristiques de la source.
- Le chapitre §3 donne les résultats d'une première application numérique simple d'identification des champs de vitesses, pressions et intensités d'une plaque bafflée

appuyée.

- Le chapitre §4 est consacré à la mise en place d'un code de calcul intégral permettant la résolution du problème direct de rayonnement.
- Le code de calcul mis en place au chapitre §4 trouve son intérêt dans le chapitre §5 où nous nous intéressons à une étude de la stabilité de la méthode iPTF face à différents paramètres tels que le maillage des surfaces, le positionnement des capteurs ou le bruit de mesure.
- Le chapitre §6, introduit par notre participation au 20<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique, s'attache à l'importance des ondes évanescentes pour l'identification des champs caractéristiques de la source.
- Le chapitre §7, introduit par notre participation au 10<sup>e</sup> Congrès Français d'Acoustique, présente les résultats des expérimentations réalisées durant la préparation du Doctorat.
- Le dernier chapitre enfin présente quelques perspectives d'études pouvant, à terme, compléter, étendre ou améliorer les capacités de la méthode iPTF.



## Principe de la méthode iPTF

Nous allons, dans ce chapitre, présenter la méthode iPTF utilisée pour identifier les valeurs de vitesses, pressions et intensités sur la surface d'un objet. Pour cela, nous nous attarderons tout d'abord sur la résolution d'un problème de rayonnement à l'aide de la méthode PTF directe afin de poser le cadre mathématique. Une fois ceci réalisé, nous présenterons la méthode dans sa formulation inverse et expliquerons le moyen d'obtenir, à partir du champ acoustique rayonné, le champ de vibration de la source.

Nous précisons qu'il ne s'agit pas ici de faire une présentation détaillée de la méthode directe cependant il est nécessaire de l'aborder pour expliquer efficacement les équations qui régissent la méthode inverse. Ainsi, nous nous attacherons à la résolution d'un problème particulier clairement posé et nous étudierons la façon dont la méthode PTF prévoit sa décomposition en sous-domaines. Nous verrons alors comment l'étude sur chacun des sous-domaines permet de résoudre le problème de rayonnement des structures. Ceci fait, nous présenterons l'inversion des calculs effectués permettant de résoudre le problème d'identification de sources.

### 2.1 Utilisation de la méthode PTF directe pour la résolution d'un problème de rayonnement

---

#### 2.1.1 Pose du problème étudié et décomposition en sous-domaines

De façon générale, notre problème est de calculer en un point  $P$  quelconque de l'espace, le champ de vitesse ou de pression d'une ou de plusieurs sources, ponctuelles ou continues. Si le champ d'une source se propageait de façon libre, la solution de ce problème serait obtenue simplement en utilisant l'équation de HELMHOLTZ. En réalité, les champs générés par ces sources se propagent dans un environnement acoustique complexe. Elles interagissent avec le milieu, se réfléchissent, diffusent ou sont partiellement absorbées

avant d'arriver au point  $P$ .

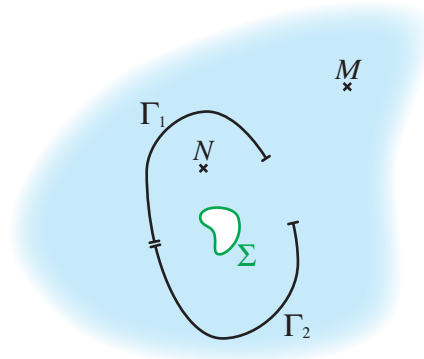
Pour clarifier l'approche d'un tel problème, nous le représentons symboliquement par la figure (2.1(a)) : l'espace est divisé en deux sous-domaines  $A$  et  $B$  séparés par une frontière  $S_1$ . Les sources, toutes situées dans la région  $A$ , sont représentées par une surface  $\Sigma$  soumise à une vitesse de vibration supposée connue. Elles génèrent des champs se propageant vers l'extérieur. La surface  $S_1$ , composée de portions opaques et d'ouvertures, représente la complexité du milieu : ses propriétés peuvent être variables (ces surfaces peuvent notamment être rigides ou absorbantes). Sur la figure (2.1),  $S_1$  est ainsi constitué par la réunion de deux parties rigides  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et d'une ouverture  $\Sigma'$  dans laquelle la vitesse est non nulle mais inconnue. Dans notre cas, le sous-domaine  $A$  est ainsi un volume fini délimité par la surface  $\Sigma$  et l'ensemble des surfaces  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Sigma'$  (2.1(b)). Le sous-domaine  $B$ , représenté sur la figure (2.1(c)), est constitué du milieu infini privé du sous-domaine  $A$ .

L'objectif de l'étude est donc d'obtenir la valeur de la pression en tout point  $M$  ou  $N$  appartenant aux sous-domaines  $A$  ou  $B$ . Pour cela, nous calculerons d'abord la pression dans le domaine  $A$ . L'ouverture  $\Sigma'$  nous servira ensuite de surface de couplage entre les deux sous-domaines pour en déduire le champ de pression dans  $B$ . Notons que dans l'exemple ci-dessous, qui nous permet ici d'expliquer la méthode iPTF, nous avons choisi de faire du sous-domaine  $B$  un domaine infini. Il peut aussi être un milieu comprenant des sources, des surfaces réfléchissantes, etc. Nous verrons par la suite que ce domaine peut être quelconque et ne pas être formellement déterminé dans la mesure où seule l'écriture des équations sur le domaine  $A$ , entourant complètement la source vibratoire, est nécessaire.

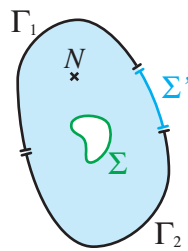
## 2.1.2 Résolution du problème dans le sous-domaine fermé $A$ entourant la source

L'idée générale du calcul est due à HUYGENS. Elle consiste à considérer l'onde au point  $P$  comme provenant de la superposition d'ondes secondaires provenant d'une surface fermée située entre  $P$  et la source. Cette idée a ensuite été développée et mise en forme mathématique par KIRCHHOFF qui a montré que le problème pouvait se ramener à l'utilisation d'un théorème primitivement établi en acoustique par HELMHOLTZ [34] et exprimant la solution d'une équation d'onde homogène en un point arbitraire de l'espace en fonction de la valeur de cette solution et de ses dérivées premières en tous points d'une surface fermée entourant  $P$ .

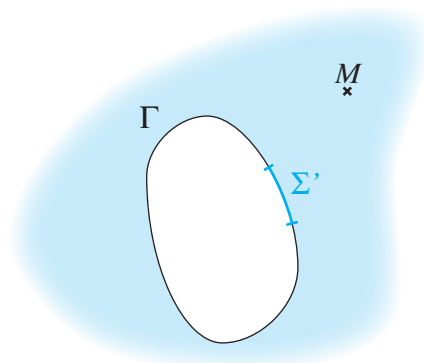
Dans cet esprit, notre démarche sera donc la suivante : le champ en un point  $P \in B$  sera calculé en fonction de ses valeurs et de celles de ses dérivées sur la surface  $S_1$  formée des éléments rigides  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et de l'ouverture  $\Sigma'$ . Pour connaître l'expression du champ



(a) Pose du problème acoustique



(b) Sous-domaine A - Volume fini



(c) Sous-domaine B - milieu infini privé du volume de A

FIGURE 2.1 – Pose du problème et décomposition en sous-domaines



et de ses dérivées sur  $\Sigma'$  nous calculerons d'abord le champ dans le domaine  $A$  délimité par les surfaces  $\Sigma$  (représentant les sources) et  $S_1$

La surface  $\Sigma'$  est une surface pour laquelle les vitesses sont inconnues et non nulles. Il est alors possible de définir dans ce sous-domaine les conditions aux limites sur chacune des surfaces qui seront de type NEUMANN homogène pour les surfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (eq. 2.1) et de type NEUMANN inhomogène sur les surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  (eq. 2.2) :

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial n} = 0 \quad \forall Q \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial n} = -i\omega\rho_0 V(Q) \quad \forall Q \in \Sigma \cup \Sigma' \quad (2.2)$$

où la notation  $\partial/\partial n$  correspond à la dérivée suivant la normale à la surface dirigée vers l'extérieur du domaine.

En l'absence de source à l'intérieur du volume étudié, la pression rayonnée en un point  $N$  de la cavité respecte l'équation de HELMHOLTZ homogène :

$$\Delta p(N) + k^2 p(N) = 0 \quad \forall N \in A \quad (2.3)$$

Pour distinguer les deux cas, nous noterons dans la suite  $N$  (resp.  $Q$ ) les points de l'espace appartenant au volume (resp. à la surface).

Pour résoudre cette équation 2.3, nous décomposons le problème sur la base (orthogonale) des modes propres de la cavité aux parois rigides. La pression  $p(N)$  peut alors s'exprimer comme une combinaison linéaire des modes propres pondérés par l'amplitude de vibration de chacun des modes.

$$p(N) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega_n) \cdot \phi_n(N) \quad (2.4)$$

L'orthogonalité des modes s'exprime par la relation

$$\iiint_A \phi_n(N) \cdot \phi_p^*(N) dN = \Lambda_p \delta_{n,p} \quad (2.5)$$

où  $\Lambda_p$  est le carré de la norme du mode  $p$  et où le symbole de KRONECKER  $\delta_{n,p}$  vaut 0 si  $n \neq p$  et +1 si  $n = p$ .

Dans l'expression (2.4), le terme  $A_n(\omega_n)$  représente l'amplitude du mode  $n$  de pulsation  $\omega$  et  $\phi_n(N)$  est la déformée du mode  $n$  au point  $N$  en terme de pression. Ces modes sont calculés pour la cavité aux parois rigides. De fait ils vérifient eux aussi l'équation de HELMHOLTZ homogène (eq 2.6) et respectent les conditions aux limites présentées à

l'équation (2.7) :

$$\Delta\phi_n(N) + k_n^2\phi_n(N) = 0 \quad \forall N \in A \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\phi_n(Q)}{\partial n} = 0 \quad \forall Q \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Sigma \cup \Sigma' \quad (2.7)$$

Pour la résolution du problème, nous allons multiplier l'équation (2.3) par le complexe conjugué d'un mode  $n$  puis l'intégrer sur le volume :

$$\Delta p(N) + k^2 p(N) = 0 \quad \rightarrow \quad \iiint_A [\Delta p(N) + k^2 p(N)] \cdot \phi_n^*(N) dN = 0 \quad (2.8)$$

Pour transformer cette intégrale, nous écrivons le théorème de GREEN en fonction de la pression  $p(N)$  et du complexe conjugué  $\phi_n^*(N)$  des modes  $\phi_n(N)$

$$\begin{aligned} \iiint_A [\phi_n^*(N)\Delta p(N) - p(N)\Delta\phi_n^*(N)] dV \\ = \iint_S \left[ \phi_n^*(N) \frac{\partial p(N)}{\partial n} - p(N) \frac{\partial \phi_n^*(N)}{\partial n} \right] dS \end{aligned} \quad (2.9)$$

où, comme précisé plus haut, la notation  $\partial/\partial n$  correspond à la dérivée suivant la normale à la surface dirigée de l'intérieur vers l'extérieur du domaine.

En tirant de cette expression la valeur de  $\Delta p(N)\phi_n^*(N)$  et en détaillant les éléments de la surface d'intégration  $S$ , l'équation (2.8) devient

$$\begin{aligned} \iiint_A p(N) [\Delta\phi_n^*(N) + k^2\phi_n^*(N)] dN \\ + \iint_{\Gamma_1} \left[ \phi_n^*(Q_1) \frac{\partial p(Q_1)}{\partial n} - \frac{\partial \phi_n^*(Q_1)}{\partial n} p(Q_1) \right] dQ_1 \\ + \iint_{\Gamma_2} \left[ \phi_n^*(Q_2) \frac{\partial p(Q_2)}{\partial n} - \frac{\partial \phi_n^*(Q_2)}{\partial n} p(Q_2) \right] dQ_2 \\ + \iint_{\Sigma} \left[ \phi_n^*(Q) \frac{\partial p(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi_n^*(Q)}{\partial n} p(Q) \right] dQ \\ + \iint_{\Sigma'} \left[ \phi_n^*(Q') \frac{\partial p(Q')}{\partial n} - \frac{\partial \phi_n^*(Q')}{\partial n} p(Q') \right] dQ' = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

et si l'on prend en considération les conditions aux limites (eq. 2.1, 2.2 et 2.7) nous pouvons

écrire

$$\begin{aligned}
& \iiint_A p(N) [\Delta \phi_n^*(N) + k^2 \phi_n^*(N)] dN \\
& + \iint_{\Gamma_1} \left[ \phi_n^*(Q_1) \underbrace{\frac{\partial p(Q_1)}{\partial n}}_0 - \underbrace{\frac{\partial \phi_n^*(Q_1)}{\partial n}}_0 p(Q_1) \right] dQ_1 \\
& + \iint_{\Gamma_2} \left[ \phi_n^*(Q_2) \underbrace{\frac{\partial p(Q_2)}{\partial n}}_0 - \underbrace{\frac{\partial \phi_n^*(Q_2)}{\partial n}}_0 p(Q_2) \right] dQ_2 \\
& + \iint_{\Sigma} \left[ \phi_n^*(Q) \underbrace{\frac{\partial p(Q)}{\partial n}}_{-\mathrm{i}\omega\rho_0 V(Q)} - \underbrace{\frac{\partial \phi_n^*(Q)}{\partial n}}_0 p(Q) \right] dQ \\
& + \iint_{\Sigma'} \left[ \phi_n^*(Q') \underbrace{\frac{\partial p(Q')}{\partial n}}_{-\mathrm{i}\omega\rho_0 V(Q')} - \underbrace{\frac{\partial \phi_n^*(Q')}{\partial n}}_0 p(Q') \right] dQ' = 0
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
& \iiint_A p(N) [\Delta \phi_n^*(N) + k^2 \phi_n^*(N)] dN \\
& - \iint_{\Sigma} \phi_n^*(Q) \mathrm{i}\omega\rho_0 V(Q) dQ - \iint_{\Sigma'} \phi_n^*(Q') \mathrm{i}\omega\rho_0 V(Q') dQ' = 0 \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque  $\phi_n(N)$  et donc  $\phi_n^*(N)$  vérifient l'équation de HELMHOLTZ (eq. 2.6),  $\Delta \phi_n^* = -k_n^2 \phi_n^*$  et le premier terme de cette dernière expression devient

$$\begin{aligned}
& \iiint_A p(N) \phi_n^*(N) [k^2 - k_n^2] dN \\
& - \mathrm{i}\omega\rho_0 \iint_{\Sigma} \phi_n^*(Q) V(Q) dQ - \mathrm{i}\omega\rho_0 \iint_{\Sigma'} \phi_n^*(Q') V(Q') dQ' = 0 \quad (2.12)
\end{aligned}$$

On décompose maintenant la pression (premier terme de l'équation précédente) sur ses modes propres (eq. 2.4) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{\infty} A_p(\omega) \cdot [k^2 - k_p^2] \iiint_A \phi_p(N) \cdot \phi_n^*(N) dN \\
& - \mathrm{i}\omega\rho_0 \iint_{\Sigma} \phi_n^*(Q) V(Q) dQ - \mathrm{i}\omega\rho_0 \iint_{\Sigma'} \phi_n^*(Q') V(Q') dQ' = 0 \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Les modes  $\phi_n$  étant orthogonaux (eq.2.5), l'intégrale de volume de l'équation (2.13) peut encore se simplifier et permet d'obtenir l'amplitude des modes de vibrations

$$A_p(\omega) = \left[ \mathrm{i}\omega\rho_0 \left[ \iint_{\Sigma} \phi_p^*(Q) V(Q) dQ + \iint_{\Sigma'} \phi_p^*(Q') V(Q') dQ' \right] \right] \frac{1}{\Lambda_p [k^2 - k_p^2]} \quad (2.14)$$

Ce résultat est alors utilisé dans l'expression de la pression décomposée sur la base des modes propres (eq. 2.4)

$$p(N) = i\omega\rho_0 \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \iint_{\Sigma} \phi_p^*(Q)V(Q)dQ + \iint_{\Sigma'} \phi_p^*(Q')V(Q')dQ' \right] \frac{\phi_p^*(N)}{\Lambda_p[k^2 - k_p^2]} \quad (2.15)$$

Il est important de noter ici que les surfaces physiquement rigides  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  n'interviennent pas dans le calcul de la pression en  $N$ , ceci grâce aux conditions aux limites bloquées sur ces surfaces.

Pour pouvoir appliquer cette équation exactement, il est nécessaire de connaître la vitesse vibratoire ainsi que les déformées modales de façon continue. Ceci limite l'application de ce calcul à des cas académiques simples. Pour traiter des problèmes plus complexes, il est possible de discrétiser les surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  en  $N_{\Sigma_e}$  et  $N_{\Sigma'_e}$  surfaces élémentaires appelées *patches*. De cette façon, il est possible de transformer les deux intégrales en deux sommes discrètes. On considère alors que pour un *patch* la valeur de la vitesse correspond à la vitesse moyennée sur tous les points du *patch*. Nous écrivons donc

$$\iint_{\Sigma} \phi_p^*(Q)V(Q)dQ = \sum_{\Sigma_e=1}^{N_{\Sigma_e}} \langle \phi_p^* \rangle_{\Sigma_e} \langle V \rangle_{\Sigma_e} \mathcal{A}_{\Sigma_e} \quad (2.16)$$

où  $\langle V \rangle_{\bullet}$  représente la vitesse moyenne sur un *patch* :

$$\langle V \rangle_{\Sigma_e} = \frac{1}{\mathcal{A}_{\Sigma_e}} \int_{\Sigma_e} V(M)dM \quad (2.17)$$

et où  $\langle \phi_p^* \rangle_{\bullet}$  représente la déformée du conjugué d'un mode  $p$  moyennée sur ce *patch* et  $\mathcal{A}_{\bullet}$  représente l'aire du *patch*.

La pression (2.15) peut alors s'écrire ainsi

$$p(N) = i\omega\rho_0 \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \sum_{\Sigma_e=1}^{N_{\Sigma_e}} \langle \phi_p^* \rangle_{\Sigma_e} \langle V \rangle_{\Sigma_e} \mathcal{A}_{\Sigma_e} + \sum_{\Sigma'_e=1}^{N_{\Sigma'_e}} \langle \phi_p^* \rangle_{\Sigma'_e} \langle V \rangle_{\Sigma'_e} \mathcal{A}_{\Sigma'_e} \right] \frac{\phi_p(N)}{\Lambda_p[k^2 - k_p^2]} \quad (2.18)$$

### 2.1.3 Notion d'impédance acoustique

Nous allons introduire dans ce chapitre la notion d'impédance acoustique, définie comme le rapport de la pression acoustique sur la vitesse normale, ainsi que sa notation  $Z$  que nous utiliserons par la suite. On s'intéresse pour cela à l'équation (2.18) exprimée précédemment et permettant de calculer la pression en un point quelconque du sous-domaine  $A$ . Nous l'écrivons en séparant des autres, les termes exprimant la vitesse moyenne sur

chaque *patch*

$$p(N) = i\omega\rho_0 \sum_{\Sigma_e=1}^{N_{\Sigma_e}} \langle V \rangle_{\Sigma_e} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{\Sigma_e} \phi_p(N) \langle \phi_p^* \rangle_{\Sigma_e}}{\Lambda_p [k^2 - k_p^2]} + i\omega\rho_0 \sum_{\Sigma'_e=1}^{N_{\Sigma'_e}} \langle V \rangle_{\Sigma'_e} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{\Sigma'_e} \phi_p(N) \langle \phi_p^* \rangle_{\Sigma'_e}}{\Lambda_p [k^2 - k_p^2]} \quad (2.19)$$

Nous constatons ici que la pression calculée au point  $N$  est la superposition de deux termes dépendant de la vitesse de vibration des surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Ceci peut être mis en évidence en utilisant une notation adaptée

$$p(N) = \sum_{\Sigma_e=1}^{N_{\Sigma_e}} \langle V \rangle_{\Sigma_e} \cdot Z_{\Sigma_e \rightarrow N}^A + \sum_{\Sigma'_e=1}^{N_{\Sigma'_e}} \langle V \rangle_{\Sigma'_e} \cdot Z_{\Sigma'_e \rightarrow N}^A \quad (2.20)$$

en posant

$$Z_{\Sigma_e \rightarrow N}^A = i\omega\rho_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{\Sigma_e} \phi_p(N) \langle \phi_p^* \rangle_{\Sigma_e}}{\Lambda_p [k^2 - k_p^2]} \quad (2.21)$$

$$Z_{\Sigma'_e \rightarrow N}^A = i\omega\rho_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{\Sigma'_e} \phi_p(N) \langle \phi_p^* \rangle_{\Sigma'_e}}{\Lambda_p [k^2 - k_p^2]} \quad (2.22)$$

Les termes  $Z_{\Sigma_e \rightarrow N}^A$  et  $Z_{\Sigma'_e \rightarrow N}^A$  sont appelés impédances acoustique. Ils permettent de calculer une pression acoustique en un point  $N$  à partir d'une surface vibrante  $\Sigma$ . La notation  $\Sigma_e \rightarrow N$  indique que l'on va du patch  $\Sigma_e$  vers  $N$ . Pour la première de ces deux impédances par exemple (eq. 2.19), on retrouve ainsi en indice du terme  $Z$  le fait qu'il s'agisse du rayonnement de  $\Sigma_e$  vers le point  $N$  et en exposant le fait que cette impédance soit calculée dans le sous-domaine  $A$ . Cette notation en exposant sera également utilisée pour les vitesses et pressions qui pourront elles aussi être calculées soit dans le sous-domaine  $A$  soit dans le sous-domaine  $B$ .

Cette formulation avec utilisation des impédances acoustiques est un des intérêts de la méthode PTF car elle permet de séparer, dans la résolution du problème, les conditions d'excitation des paramètres physiques du système étudié. Les impédances acoustiques sont calculées une fois pour toutes et permettent un gain de temps lorsque l'on souhaite résoudre un problème sans changer sa géométrie mais en étudiant diverses conditions aux limites.

## 2.1.4 Résolution du problème dans le sous-domaine $B$

Pour la résolution du problème dans le sous-domaine  $B$ , nous allons procéder par analogie avec la résolution dans le sous-domaine  $A$ . On rappelle pour cela que nous avons choisi ici un espace infini dont la définition est détaillée sur la figure (2.1(c)). Nous connais-

sons alors les conditions aux limites qui sont de type NEUMANN homogène pour la surface  $\Gamma$  et de type NEUMANN inhomogène pour la surface  $\Sigma'$

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial n} = 0 \quad \forall Q \in \Gamma \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial n} = -i\omega\rho_0 V(Q) \quad \forall Q \in \Sigma' \quad (2.24)$$

Comme pour la résolution dans le sous-domaine  $A$ , nous n'avons pas de source autre que la surface  $\Sigma'$  et la pression acoustique en tout point du milieu respecte l'équation de HELMHOLTZ homogène

$$\Delta p(M') + k^2 p(M') = 0 \quad \forall M' \in B \quad (2.25)$$

Le champ issu de  $\Sigma'$  étant cette fois supposé se propager librement jusqu'au point  $M \in B$ , la fonction de GREEN de l'équation ci-dessus vérifie

$$\Delta G(M') + k^2 G(M') = \delta(M' - M) \quad (2.26)$$

et la condition aux limites adaptées aux conditions de NEUMANN (voir [38], p. 504)

$$\frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} = 0 \quad \forall x' \in \Sigma' \quad (2.27)$$

Pour calculer l'expression du champ de pression en un point  $M \in B$  multiplions l'équation (2.25) par  $G(M')$  et l'équation (2.26) par  $p(M')$  :

$$G(M')\Delta p(M') + k^2 G(M')p(M') = 0 \quad (2.28)$$

$$p(M')\Delta G(M') + k^2 G(M')p(M') = p(M')\delta(M' - M) \quad (2.29)$$

et faisons la différence de ces deux équations

$$p(M')\Delta G(M') - G(M')\Delta p(M') = p(M')\delta(M' - M) \quad (2.30)$$

La pression en un point  $M$  se calcule alors en intégrant ce résultat sur tout le volume  $B$  et en utilisant l'équation intégrale de KIRCHHOFF-HELMHOLTZ utilisée ci-dessus et la

condition aux limites (2.24)

$$\begin{aligned}
p(M) &= \iiint_B p(M') \delta(M' - M) \\
&= \iiint_B [p(M') \Delta G(M') - G(M') \Delta p(M')] dV \\
&= \iint_{\Sigma'} \left[ p(Q) \frac{\partial G(M, Q)}{\partial n} - G(M, Q) \frac{\partial p(M)}{\partial n} \right] dQ \\
&= \iint_{\Sigma'} \left[ p(Q) \frac{\partial G(M, Q)}{\partial n} + i\omega \rho_0 V(M) G(M, Q) \right] dQ
\end{aligned} \tag{2.31}$$

En utilisant (2.27), il reste ainsi

$$p(M) = \iint_{\Sigma'} i\omega \rho_0 V(M) G(M, Q) dQ \tag{2.32}$$

Comme précédemment, cette expression peut être discrétisée et nous pouvons donc exprimer la pression au point  $M$  sous la forme d'une somme de contributions des *patches* de la surface  $\Sigma'_e$

$$p(M) = \sum_{\Sigma'_e=1}^{N_{\Sigma'_e}} \langle V \rangle_{\Sigma'_e}^B \cdot Z_{\Sigma'_e \rightarrow M}^B \tag{2.33}$$

On retrouve ici les notations avec indice et exposant présentées au paragraphe §2.1.3.

Les calculs sont peu détaillés ici car nous verrons par la suite qu'ils ne sont pas utiles pour la méthode iPTF. Une présentation plus approfondie peut être trouvée dans les travaux de M. AUCEJO [4]

## 2.1.5 Calcul de la pression en un point des domaines couplés

Nous cherchons à connaître la pression en tout point du milieu et notamment pour les points situés sur la surface de couplage entre les deux sous-domaines. Pour cela, nous avons besoin de résoudre conjointement les deux équations (2.20) et (2.33).

$$\begin{cases} p(N) = \sum_{\Sigma_e=1}^{N_{\Sigma_e}} \langle V \rangle_{\Sigma_e} \cdot Z_{\Sigma_e \rightarrow N}^A + \sum_{\Sigma'_e=1}^{N_{\Sigma'_e}} \langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A \cdot Z_{\Sigma'_e \rightarrow N}^A \\ p(M) = \sum_{\Sigma'_e=1}^{N_{\Sigma'_e}} \langle V \rangle_{\Sigma'_e}^B \cdot Z_{\Sigma'_e \rightarrow M}^B \end{cases} \tag{2.34}$$

La première équation du système (2.34) étant valable pour tout point du domaine  $A$ , elle l'est particulièrement pour un point situé sur la surface  $\Sigma'$  (nous rappelons que les surfaces limites des domaines sont incluses dans la définition des domaines). Il en est de même pour la seconde équation qui est valable en tout point du domaine  $B$  et donc sur

la surface  $\Sigma'$ . Ainsi, nous pouvons écrire, en utilisant une notation matricielle

$$\{\langle P \rangle_{\Sigma'_e}^A\} = \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e}^A \right] \{\langle V \rangle_{\Sigma_e}\} + \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^A \right] \{\langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A\} \quad (2.35)$$

$$\{\langle P \rangle_{\Sigma'_e}^B\} = \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^B \right] \{\langle V \rangle_{\Sigma'_e}^B\} \quad (2.36)$$

Il faut alors, pour pouvoir résoudre ce système, prendre en compte les conditions de couplage au niveau de la surface  $\Sigma'$ . Ce couplage est défini par l'égalité des pressions (eq.2.37) ainsi que les vitesses des particules d'air opposées (eq. 2.38) :

$$\langle P \rangle_{\Sigma'_e}^A = \langle P \rangle_{\Sigma'_e}^B \quad (2.37)$$

$$\langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A = -\langle V \rangle_{\Sigma'_e}^B \quad (2.38)$$

Ainsi, en utilisant ces deux conditions dans le système constitué des deux équations (2.35) et (2.36), nous pouvons ne conserver qu'une équation.

$$\left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e}^A \right] \{\langle V \rangle_{\Sigma_e}\} + \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^A \right] \{\langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A\} = -\left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^B \right] \{\langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A\} \quad (2.39)$$

Dans cette équation, nous utilisons les impédances acoustiques ainsi que la vitesse sur la surface source. Nous rappelons alors que les impédances acoustiques peuvent être calculées numériquement à partir de la géométrie du problème et que la vitesse de la source est supposée connue. Il est alors possible de calculer la vitesse sur la surface de couplage

$$\{\langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A\} = -\left( \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^A \right] + \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^B \right] \right)^{-1} \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e}^A \right] \{\langle V \rangle_{\Sigma_e}\} \quad (2.40)$$

Finalement, en utilisant (2.20) et (2.40) il est possible de calculer la pression en n'importe quel point des domaines couplés. Un exemple de couplage par PTF pourra être trouvé dans les travaux de M. OUISSE [61].



## 2.2 Formulation iPTF

### 2.2.1 Identification de la vitesse de source

Pour la résolution du problème inverse, seules les équations du sous-domaine  $A$  sont utilisées car l'influence du sous-domaine extérieur est prise en compte de façon intrinsèque dans la mesure du champ de pressions-vitesses sur la surface de couplage. Il est évident que ceci est conforme à la formulation intégrale de GREEN (présentée sur les équations 2.9 et 2.10) qui indique que la pression en n'importe quel point d'un domaine fermé est connue si les conditions de pression et vitesse sur les conditions aux limites sont connues. Dans notre cas, ces conditions aux limites sont soit mesurées soit à identifier.

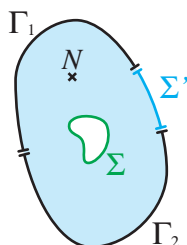


FIGURE 2.2 – Sous-domaine A

La résolution du problème de rayonnement acoustique pas la méthode PTF directe nécessite, comme nous l'avons vu précédemment, la résolution simultanée de deux équations, l'une exprimée dans un volume fini, l'autre dans le milieu extérieur. Ceci nous a alors permis de calculer la vitesse sur la surface de couplage entre les deux domaines et de déterminer la pression en n'importe quel point des domaines couplés. Pour la résolution du problème d'identification, nous nous intéressons à la vitesse sur la surface source et nous cherchons à la déterminer à partir des quantités rayonnées. Pour réaliser cela, seule l'équation du domaine intérieur (eq. 2.35) sera nécessaire. Elle est rappelée ici pour plus de lisibilité.

$$\left\{ \langle P \rangle_{\Sigma'_e}^A \right\} = \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e}^A \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma_e} \right\} + \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^A \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A \right\}$$

L'inversion de cette expression se fait aisément et il suffit de connaître la vitesse et la pression sur la surface de couplage entre les deux domaines pour pouvoir calculer la vitesse sur la surface source :

$$\left\{ \langle V \rangle_{\Sigma_e} \right\} = \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e}^A \right]^{-1} \left( \left\{ \langle P \rangle_{\Sigma'_e} \right\} - \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e}^A \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma'_e} \right\} \right) \quad (2.41)$$

L'étude de cette équation nous permet de constater que l'identification de la vitesse de la source est possible à partir de la seule connaissance de la vitesse et de la pression sur la surface de couplage entre les sous-domaines  $A$  et  $B$ . Contrairement aux équations précédentes, ces deux quantités ne sont pas associées à un domaine en particulier car elles sont mesurées exactement à l'interface entre ces deux domaines. Ainsi, dans leur expression mathématique, nous n'avons pas noté en exposant d'appartenance à l'un ou

l'autre des sous-domaines. Ceci peut paraître surprenant compte-tenu de l'étude qui a été faite précédemment, lors de la présentation de la méthode directe, où la connaissance du milieu  $B$  était indispensable pour parvenir à la prédiction de la pression rayonnée en tout point de l'espace. En réalité, si l'influence du milieu  $B$  n'apparaît pas dans cette équation, ce n'est pas pour autant qu'elle est inexistante. Pour l'application de la méthode dans sa formulation inverse, l'identification s'appuie sur une mesure du champ acoustique rayonné. Ainsi, l'influence du sous-domaine  $B$  intervient par l'intermédiaire des mesures faites, ce quelque soit la définition du sous-domaine  $B$ . Ce domaine peut en effet être réverbérant ou non, infini ou confiné et peut contenir des sources ou non, la caractérisation précise de ce milieu n'est en fait pas importante car son influence est prise en compte de façon intrinsèque par la mesure des champs de pressions et de vitesses sur la surface de couplage entre les deux sous-domaines. Pour une application pratique, il est donc nécessaire de mesurer la vitesse ainsi que la pression sur la surface de couplage entre les deux domaines. Cela peut se faire au moyen d'une sonde permettant la mesure co-localisée de ces deux informations, ou au moyen d'une sonde effectuant deux mesures de pression sur des surfaces parallèles proches. Nous rappelons ici que nous utilisons un découpage arbitraire du milieu et que la surface de couplage n'a pas de signification ni de réalité physique. Elle définit simplement la position des points de mesure. Comme pour le problème direct, la surface de couplage est discrétisée en *patches*, et nous faisons ici l'approximation selon laquelle la vitesse (resp. pression) mesurée au centre d'un *patch* est égale à la vitesse (resp. pression) moyenne sur le *patch*. Il reste dans l'équation (2.39) les termes d'impédance. Ceux-ci sont calculés de la même manière qu'au paragraphe §2.1.3 en utilisant une modélisation du volume formé en éléments finis. Un solveur peut être utilisé pour calculer les modes propres et fréquences propres nécessaires aux calculs des impédances (equations 2.21 et 2.22).

## 2.2.2 Identification de la pression et de l'intensité

La méthode iPTF permet également l'identification de la pression sur la surface source. Ceci est possible en appliquant une seconde fois l'équation (2.35). Celle-ci est valable en tout point du domaine  $A$  et donc particulièrement sur les points appartenant à la surface source. Il suffit alors, pour calculer la pression sur la surface, d'utiliser les vitesses mesurées sur la surface de couplage entre les deux domaines et celles identifiées à l'aide de l'équation (2.41).

$$\left\{ \langle P \rangle_{\Sigma_e} \right\} = \left[ Z_{\Sigma_e \leftarrow \Sigma_e}^A \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma_e} \right\} + \left[ Z_{\Sigma_e \leftarrow \Sigma_e'}^A \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma_e'}^A \right\} \quad (2.42)$$

Il est évident ici que la qualité de l'identification de pression pariétale dépendra de la qualité de l'identification de la vitesse dont elle découle. De même, à partir de la vitesse

et de la pression ainsi identifiées, il est alors simple de déterminer l'intensité.

$$\{\langle I \rangle_{\Sigma_e}\} = \frac{1}{2} \Re \left[ \{\langle P \rangle_{\Sigma_e}\} \otimes \{\langle V \rangle_{\Sigma_e}\}^* \right] \quad (2.43)$$

On utilise ici les symboles  $\otimes$  et  $*$  pour représenter respectivement la multiplication terme à terme entre deux matrices et le complexe conjugué.





## Application de la méthode iPTF à un cas numérique simple

Nous souhaitons réaliser ici une première étude numérique permettant de valider le principe de la méthode iPTF. Nous présenterons donc dans ce chapitre une application sur une plaque appuyée. Les champs de référence sur la surface de la plaque (vitesse, pression et intensité) seront calculés par une méthode éléments finis. Une méthode éléments finis de frontière (BEM) sera ensuite utilisée pour calculer les champs de pression acoustique et de vitesse particulaire rayonnés par la plaque. Enfin, ces champs rayonnés seront rétro-propagés à l'aide de la méthode iPTF et les champs ainsi obtenus seront comparés aux champs précédemment calculés.

A. WIRGIN [101] appelle « crime de résolution inverse » le fait d'utiliser la même méthode pour le calcul direct et le calcul inverse. L'utilisation d'un solveur unique pour les problèmes direct et inverse ne permet effectivement pas de montrer son efficacité. Nous précisons donc ici que l'approche iPTF est bien différente de l'approche BEM. En effet, cette dernière est basée sur un calcul du rayonnement en champ libre tandis que l'approche iPTF est basée sur une décomposition du problème sur les modes d'une cavité aux parois rigides. Les deux solveurs étant différents, nous pourrons bien montrer l'efficacité de la méthode iPTF pour l'identification de la vitesse de vibration d'une source.

Nous nous intéresserons dans cette étude à la comparaison entre les résultats donnés par la méthode éléments finis et ceux donnés par la méthode iPTF obtenus à partir d'un champ rayonné calculé numériquement. Nous étudierons dans un premier temps les spectres quadratiques moyens de pression, de vitesse et d'intensité en fonction de la fréquence. Nous pourrons ainsi avoir une idée quant à la capacité de la méthode iPTF à caractériser globalement ces trois champs pour la source étudiée. Nous isolerons alors quelques fréquences significatives pour lesquelles nous étudierons ensuite les cartographies de vitesse, pression et intensité. Nous pourrons, avec ces nouvelles données, analyser la capacité de la méthode à localiser les sources de vibration dans l'espace.

### 3.1 Définition du problème étudié

Pour cette première étude, nous souhaitons retrouver, grâce à la méthode iPTF, les caractéristiques du champ de vibration (vitesse, pression et intensité) d'une plaque appuyée, excitée par une force ponctuelle harmonique. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette plaque sont données sur la figure (3.1) et dans la table (3.1).

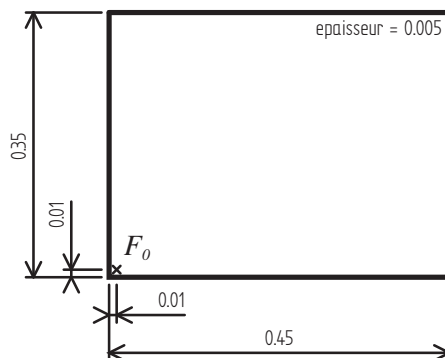


FIGURE 3.1 – Géométrie du problème étudié

Paramètre	Valeur
Dimensions	$0.45 \times 0.35 \times 0.005 \text{ m}^3$
Pas de discrétisation	$\delta x = 0.01 \text{ m}, \delta y = 0.01 \text{ m}$
Matériau	Acier
Module d'Young	$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Amortissement modal	$\eta = 0.02$

TABLE 3.1 – Paramètres physiques de la plaque

On précise également, dans la table (3.2), quelques paramètres concernant l'effort appliqué sur la plaque. On observe notamment dans sa localisation, hors d'éventuelles lignes nodales, la volonté de solliciter tous les modes de la plaque. La table (3.3) présente la bande de fréquences utilisée pour le calcul des modes de plaque ainsi que les points en fréquence utilisés pour le calcul de réponse.

Le calcul analytique des fréquences propres peut se faire à l'aide de la relation

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho h}} \quad (3.1)$$

Paramètre	Valeur
Position du point d'excitation	$x_0 = 0.01 \text{ m}$ $y_0 = 0.01 \text{ m}$
Intensité	$F_0 = 1 \text{ N}$

TABLE 3.2 – Paramètres de l'effort excitateur

Paramètre	Valeur
Calcul des modes de plaque	0 : 4000 $Hz$
Fréquences de calcul	5 : 5 : 4000 $Hz$

TABLE 3.3 – Limitations en fréquence de l'étude

En comparant les fréquences propres calculées numériquement à celles calculées analytiquement par la relation (3.1), on déduit que, pour les 34 modes propres de la plaque entre 0 et 4000  $Hz$ , on atteint un ordre 8 dans la direction  $x$  et un ordre 6 dans la direction  $y$ .

## 3.2 Résolution du problème de rayonnement

### 3.2.1 Champs de vitesse, pression et intensité pariétales

Nous effectuons dans un premier temps le calcul des champs de vitesses pariétales, pressions pariétales et intensités pariétales de la plaque. Les vitesses et intensités étant ici des grandeurs vectorielles, nous nous intéressons à leurs composantes normales à la surface de la plaque. Pour ces premiers calculs, une méthode par éléments finis est utilisée, avec une résolution en fréquence. Elle permet, à partir des modes de vibration de la plaque calculés dans le vide, d'obtenir ces champs de vitesses pressions et intensités dans le cas d'une plaque couplée avec l'air. La figure (3.2) montre le spectre de vitesse quadratique moyenne de la plaque. L'échelle en décibel est calculée en choisissant une référence unitaire. Cette courbe permet de mettre en évidence les fréquences des différents modes de vibration de la plaque ainsi que leur répartition tout au long de la gamme de fréquences étudiée.

Nous précisons enfin que les valeurs calculées ici des champs de vitesses, pressions et intensités serviront par la suite comme base de comparaison pour les valeurs obtenues après rétropropagation des champs rayonnés par la méthode iPTF.

### 3.2.2 Champs de vitesses et de pressions rayonnés

La méthode iPTF s'appuie sur la mesure des champs de pression et de vitesse sur une surface fermée entourant la source. Nous allons donc procéder ici à une simulation numérique de cette mesure en calculant, sur une surface fermée définie numériquement, les champs de vitesses particulières et de pressions acoustiques rayonnés. Encore une fois,



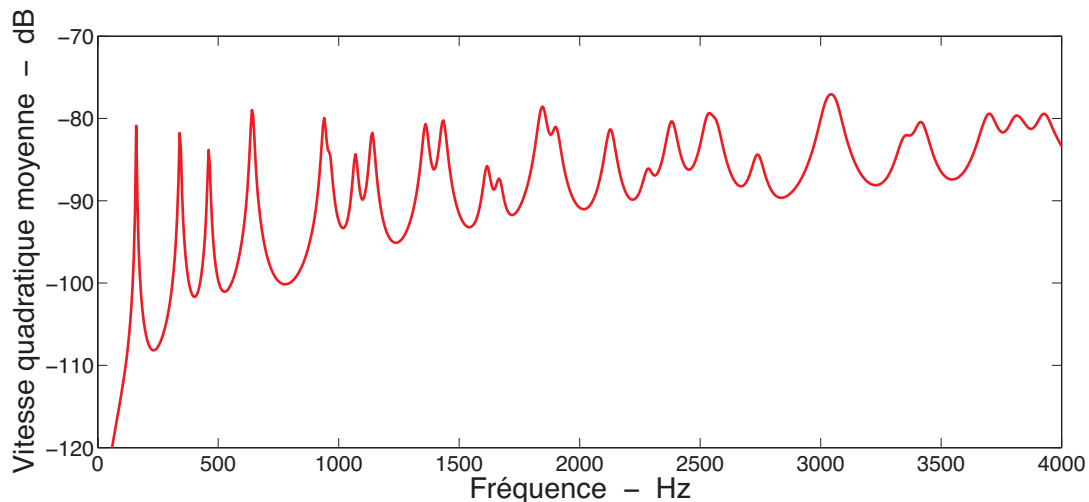


FIGURE 3.2 – vitesse pariétale quadratique moyenne calculée par éléments finis

il s’agit ici de vitesses particulières normales à cette surface dite « de mesure ».

Nous présentons sur la figure (3.3) la surface sur laquelle nous calculons les champs rayonnés. La surface retenue dispose d’une géométrie relativement complexe due à son caractère asymétrique. *Le choix de cette cavité a été fait de façon à s’éloigner d’un problème analytique avec cavité parallélépipédique.* Par ailleurs, cette dissymétrie permet d’améliorer le conditionnement de la matrice à inverser pour le calcul de rétropropagation. En effet, cette géométrie permet de limiter les phénomènes de redondance ou de dépendance linéaire qui peuvent être dus à des symétries dans les champs acoustiques mesurés.

Le calcul du champ rayonné en milieu extérieur s’est fait par éléments finis de frontière, en utilisant une méthode directe par éléments de frontière avec résolution en fréquence, pour le cas d’une plaque bafflée couplée avec le fluide environnant. Nous avons choisi ici d’étudier le rayonnement de la plaque dans l’air et les paramètres utilisés pour la définition du fluide sont donnés dans le tableau (3.4).

Paramètre	Valeur
Fluide	Air
Célérité des ondes	$c = 340 \text{ m.s}^{-1}$
Masse volumique	$\rho = 1.225 \text{ kg.m}^{-3}$

TABLE 3.4 – Paramètres de définition du fluide

Nous présentons ici, parmi les résultats obtenus, la vitesse quadratique moyenne (figure 3.4) ici encore calculée en décibels pour une référence unitaire. Nous superposons à cette courbe, pour comparaison, la vitesse pariétale quadratique moyenne calculée au paragraphe §3.2.1.

Les deux courbes ainsi présentées sont cohérentes. Nous retrouvons effectivement sur la

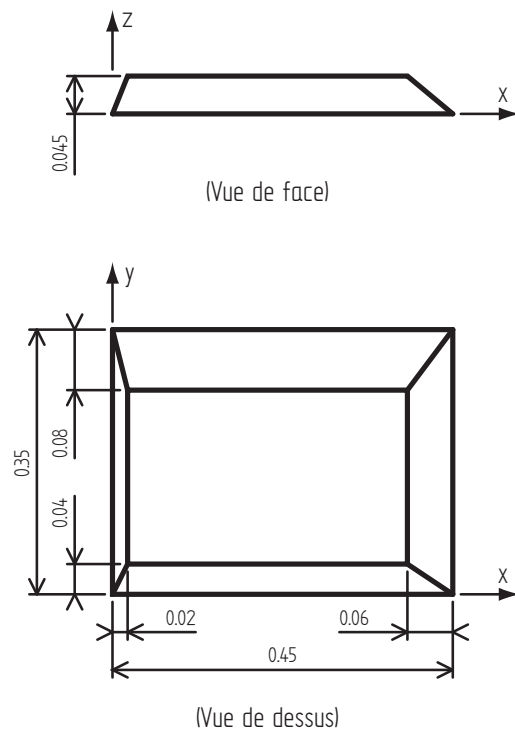


FIGURE 3.3 – Définition de la surface de mesure

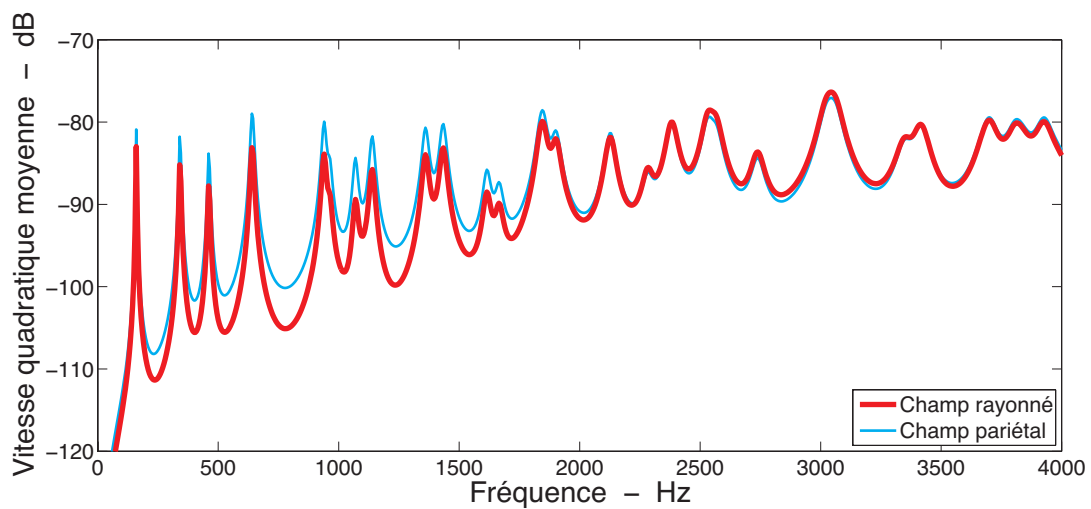


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la vitesse quadratique moyenne pariétale (figure 3.3) et la vitesse quadratique moyenne rayonnée sur la surface de mesure

courbe du champ rayonné les fréquences propres de vibration de la plaque. De plus, en raison de l'éloignement de la surface de mesure, la courbe du champ rayonné reste inférieure à la courbe du champ pariétal. Pour les fréquences inférieures à  $2000\text{ Hz}$ , nous observons une différence importante entre le champ pariétal et le champ rayonné. Ceci est dû au fait qu'à ces fréquences une grande part du champ rayonné par la plaque est évanescent. Cette différence est plus importante vers  $1000\text{ Hz}$  et décroît progressivement quand la fréquence diminue à partir de cette valeur ou se rapproche de  $2000\text{ Hz}$ . La décomposition du champ rayonné en ondes évanescentes et propagatives ainsi que l'explication de ce comportement seront expliqués de façon détaillée au chapitre §6.

Nous présentons également sur la figure (3.5) une cartographie du champ de vitesses rayonnées à  $1900\text{ Hz}$ . Sur cette figure, il est possible de constater quelques discontinuités sur les valeurs du champ de vitesses qui peuvent paraître surprenantes. Pour les expliquer, nous rappelons que nous nous intéressons à la composante de la vitesse qui est normale à la surface. Les discontinuités observées sur cette figure sont donc dues aux discontinuités de la direction de la normale au passage d'une face à l'autre de la « surface de mesure ».

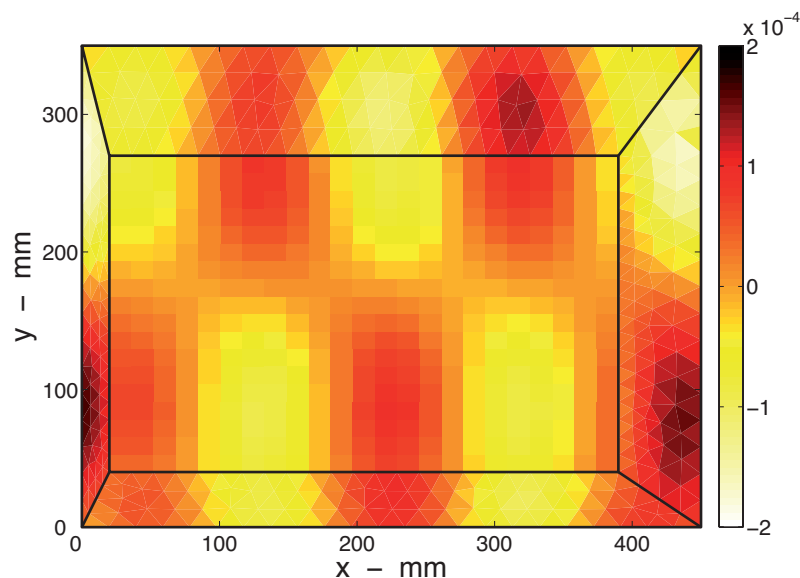


FIGURE 3.5 – Cartographie du champ de vitesses rayonnées à  $1900\text{ Hz}$

Cette connaissance du champ de vitesses rayonnées, associée à la connaissance du champ de pressions rayonnées (non représenté ici), nous permet par la suite de retrouver le comportement de la source de vibrations au moyen de la méthode iPTF. Cette partie de l'étude est présentée au paragraphe suivant.

## 3.3 Résolution du problème d'identification

### 3.3.1 Identification du champ de vitesses de vibrations

Pour l'identification de la vitesse de la source, la méthode iPTF s'appuie sur les mesures des deux informations de vitesses particulières et de pressions acoustiques sur une surface entourant la source. Dans la pratique, il est bien sûr impossible de travailler sur des surfaces de façon continue, aussi bien pour les surfaces de mesures que pour les surfaces d'identification. Ainsi, chaque surface est discrétisée en surfaces élémentaires appelées *patches*. Il est alors nécessaire de connaître les impédances acoustiques entre chacun des *patches* de la surface source et chacun des *patches* où l'information de vitesse et de pression est mesurée. Nous avons calculé, au paragraphe précédent, les champs de vitesses et de pressions rayonnés sur un maillage fermé et ces éléments constituent les paramètres d'entrée pour la résolution du problème inverse. Les impédances, quant à elles, sont calculées numériquement, pour chaque fréquence d'étude, à partir des modes de la cavité acoustique virtuelle rigide selon l'équation suivante :

$$Z_{\Sigma'_e \rightarrow \Sigma_e}^A = i\omega\rho_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{\Sigma'_e} \langle \phi_p \rangle_{\Sigma'_e} \langle \phi_p \rangle_{\Sigma_e}}{\Lambda_p [k^2 - k_p^2]} \quad (3.2)$$

Cette équation est en fait équivalente à l'équation (2.21). Nous calculons ici l'impédance acoustique entre deux *patches* tandis qu'au paragraphe §2.1.3 nous calculons l'impédance acoustique entre un *patch* et un point. Par ailleurs, puisqu'il s'agit ici d'une décomposition sur la base des modes propres de la cavité virtuelle considérée aux parois rigides, il est important de signaler la limite en fréquence à laquelle les modes de la cavité sont calculés. Pour cette étude, les modes de cavité ont été calculés jusqu'à 8000 Hz.

Les valeurs calculées de pressions et de vitesses, associées aux impédances acoustiques, nous permettent alors, à l'aide de l'équation (2.41) rappelée ici, de déterminer la vitesse de vibration de la source.

$$\left\{ \langle V \rangle_{\Sigma_e} \right\} = \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e} \right]^{-1} \left( \left\{ \langle P \rangle_{\Sigma'_e} \right\} - \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e} \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma'_e} \right\} \right)$$

Nous pouvons constater que la résolution de ce système d'équations nécessite l'inversion de la matrice d'impédances  $[Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e}]$ . Une difficulté particulière du calcul vient donc du fait que cette matrice peut être très mal conditionnée et conduire ainsi à une inversion difficile. Pour faciliter l'inversion, nous avons utilisé dans notre étude une méthode de régularisation de TIKHONOV [87] avec utilisation de la courbe en  $L$  pour le choix du paramètre de régularisation [30].

La figure (3.6) superpose différents résultats. Nous y faisons apparaître dans un premier

temps la vitesse quadratique moyenne calculée par la méthode iPTF à partir des champs de vitesses et de pressions obtenus au paragraphe §3.2.2. Nous traçons également, pour rappel et comparaison, la vitesse quadratique moyenne calculée en référence au paragraphe §3.2.1 et déjà présentée sur la figure (3.2). Nous faisons enfin apparaître, pour information, la vitesse quadratique moyenne rayonnée calculée au paragraphe §3.2.2 et présentée sur la figure (3.4).

Nous constatons sur la figure (3.6) que le résultat obtenu par identification est tout à fait cohérent avec le calcul de référence. Effectivement, nous retrouvons sans erreur les fréquences propres de la plaque ainsi qu'une bonne estimation de leur amplitude de vibration. Pour les fréquences inter-modales par contre, la courbe d'identification ne coïncide plus avec la courbe de référence dans une certaine bande de fréquences. Nous pouvons également observer, pour ces fréquences, des irrégularités sur la courbe. Nous remarquons que, concernant la vitesse quadratique moyenne, la méthode d'identification apparaît comme une simple correction de l'amplitude plus ou moins importante en fonction de la fréquence (et donc de la longueur d'onde) et de la distance à la plaque. On remarque aussi que cette correction n'est pas parfaite et que pour certaines fréquences la vitesse quadratique moyenne identifiée sous-estime encore la vitesse réelle. Nous verrons que la méthode iPTF peut avoir certaines difficultés à reconstruire la part du signal perdue lors de la propagation.

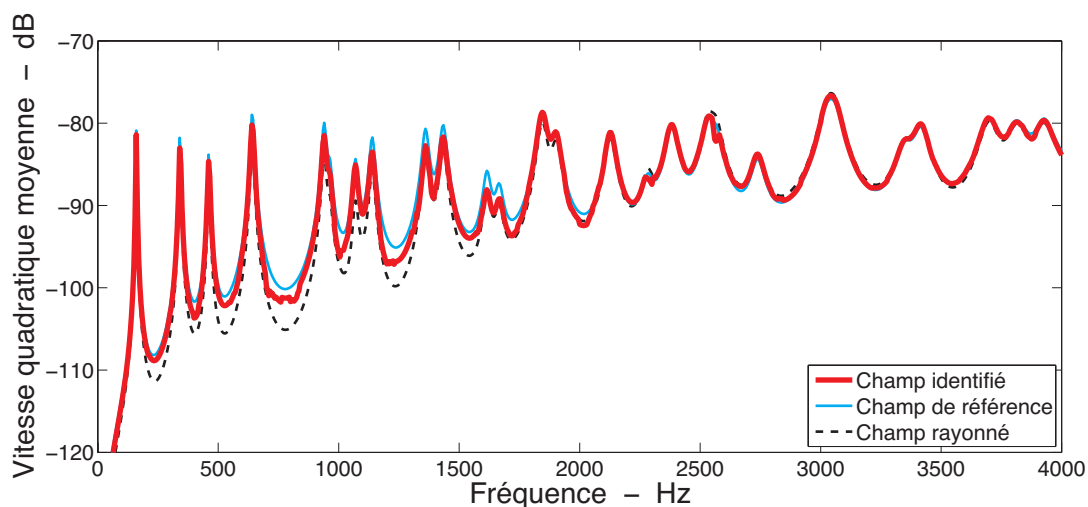


FIGURE 3.6 – Identification de la vitesse pariétale quadratique moyenne

Nous nous intéressons maintenant à l'erreur d'identification de la vitesse quadratique. Il s'agit là de l'erreur de méthode qui est présente quoi qu'il en soit, même si les paramètres d'entrée (champ de pressions et de vitesses) sont donnés très précisément. Cette erreur est due entre autres aux problèmes de conditionnement du système d'équations et à l'inversion des matrices d'impédance. La figure (3.7) montre l'erreur d'identification relevée pour cette première étude. Il s'agit simplement de la différence entre les courbes *Champ identifié* et *Champ de référence* présentées sur la figure (3.6). Pour une comparaison plus aisée des phénomènes fréquentiels, nous y faisons également apparaître sur la partie haute de la figure l'allure de la courbe *Champ de référence*.

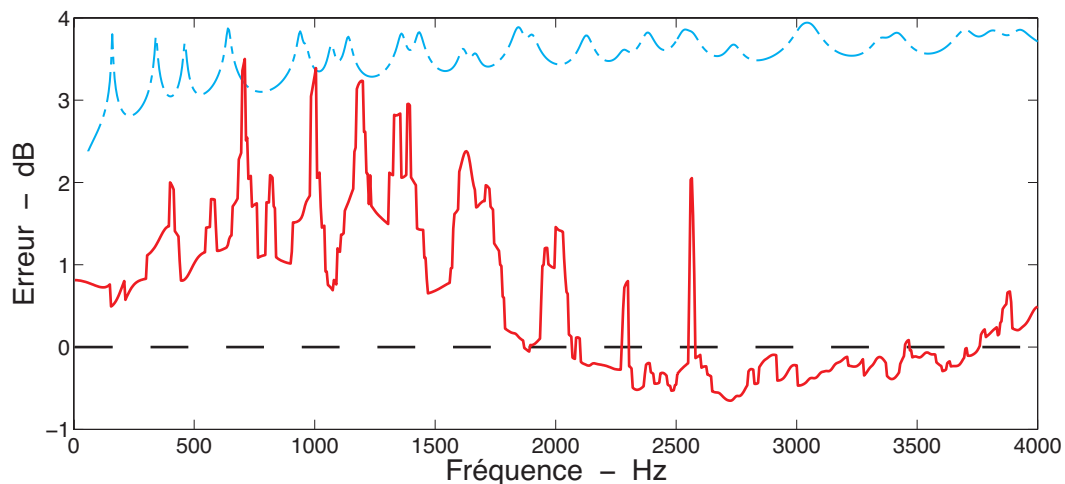


FIGURE 3.7 – Erreur commise sur la vitesse

Nous observons sur cette figure que l'erreur peut avoir des valeurs particulièrement importantes à des fréquences situées majoritairement en dehors des fréquences propres de la plaque. Une information importante peut également être obtenue par l'étude de la tendance générale de la courbe. La figure (3.8) présente l'erreur moyenne par bandes de fréquences de 200  $Hz$  pour essayer de mettre en évidence l'évolution globale de l'erreur en fonction de la fréquence.

Cette nouvelle figure permet de constater que l'erreur moyenne est globalement plus importante pour les fréquences les plus basses, inférieures à 1800  $Hz$  environ. Au delà de cette fréquence, la valeur absolue de l'erreur varie peu et reste inférieure à 0,5  $dB$ . Cette observation a déjà été faite lors de la présentation de la vitesse pariétale quadratique moyenne identifiée (figure 3.6), elle est ici remise en évidence par ce nouveau résultat. Nous présentons de façon détaillée, au chapitre §6, les raisons expliquant ces observations. Nous pouvons toutefois dire dès à présent que le champ rayonné d'une plaque est constitué d'ondes évanescentes et d'ondes propagatives. Il existe une fréquence critique de rayonnement en dessous de laquelle le champ rayonné est essentiellement évanescent. Au delà de cette fréquence par contre, le champ rayonné est intégralement propagatif. Dans

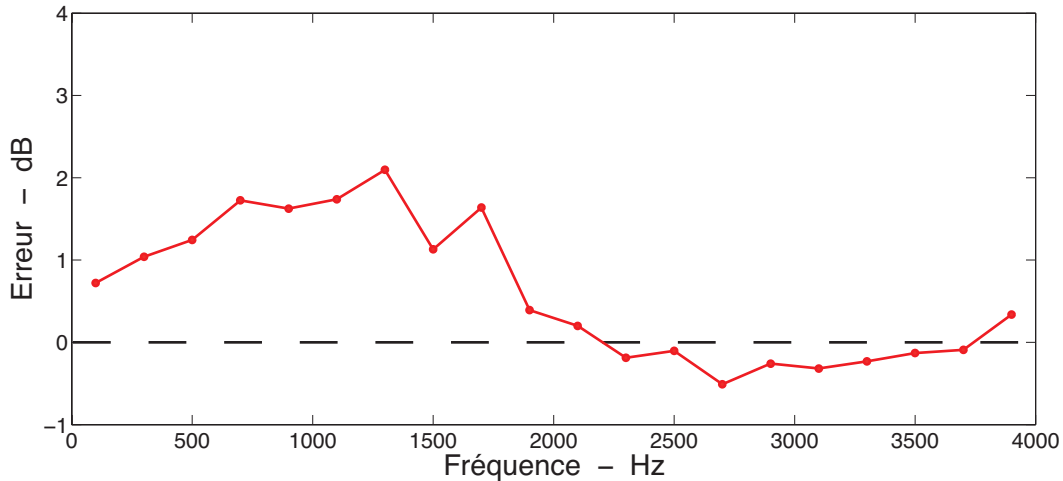


FIGURE 3.8 – Erreur, moyennée par bande de fréquences, commise sur la vitesse

le cas étudié, le calcul donne cette fréquence de coupure à  $2342 \text{ Hz}$ . Si l'on s'intéresse à la figure (3.4) mettant en relation le champ rayonné avec le champ pariétal, on s'aperçoit qu'au delà de cette fréquence, le champ rayonné est confondu avec le champ pariétal. En deçà de cette fréquence par contre, le champ rayonné est bien inférieur au champ pariétal. Ceci est le témoignage de l'existence des ondes évanescentes qui réduisent le rayonnement de la plaque. La méthode iPTF que nous proposons tente de corriger cette absence de rayonnement mais nous pouvons constater sur la figure (3.6) qu'elle ne parvient pas complètement à effectuer cette correction entre 0 et  $2342 \text{ Hz}$ . Pour ce qui est des très basses fréquences, entre 0 et  $200 \text{ Hz}$ , et pour celles qui approchent de la fréquence critique située à  $2342 \text{ Hz}$  on constate que la perte de rayonnement ainsi que l'erreur d'identification sont très faibles. Ceci s'explique par le fait que les ondes émises à ces fréquences ont des longueurs d'ondes très grandes et peuvent donc être captées avec une bonne amplitude, bien qu'elles soient évanescentes, même à des distances importantes. Elles ne manquent donc pas dans la mesure du champ rayonné ni dans l'identification du champ pariétal.

Nous nous intéressons maintenant aux cartographies des champs identifiés par la méthode iPTF. Nous avons montré, au chapitre de présentation mathématique de la méthode, et particulièrement au paragraphe §2.2, que la méthode iPTF permet en premier lieu d'identifier le champ de vitesses de la source étudiée. Ce sont donc les champs de vitesses que nous allons comparer ici. La figure (3.9(a)) présente le champ de vitesses de référence à  $1900 \text{ Hz}$ . Nous rappelons que le calcul de ce champ a été fait en utilisant une méthode par éléments finis dont la définition a été détaillée au paragraphe §3.2.1. La figure (3.9(b)) présente l'image de ce champ par identification à partir des valeurs du champ rayonné.

La comparaison des échelles de valeurs des deux cartographies permet de constater que *la*

méthode que nous proposons est apte à quantifier correctement les vibrations de la plaque. Il faut également préciser que les cartographies que nous présentons ici montrent la partie réelle du champ de vitesses mais que les parties imaginaires sont, elles aussi, correctement identifiées. Ainsi, la phase des phénomènes étudiés est également rendue correctement par notre méthode et ceci sera un point déterminant par la suite pour l'identification de l'intensité pariétale. Notons seulement que la valeur complexe maximale trouvée numériquement pour la vitesse par la méthode iPTF est de  $1.69 \times 10^{-4} - 6.31 \times 10^{-5}i$ , là où la méthode des éléments finis la donne à  $1.79 \times 10^{-4} - 6.33 \times 10^{-5}i$ .

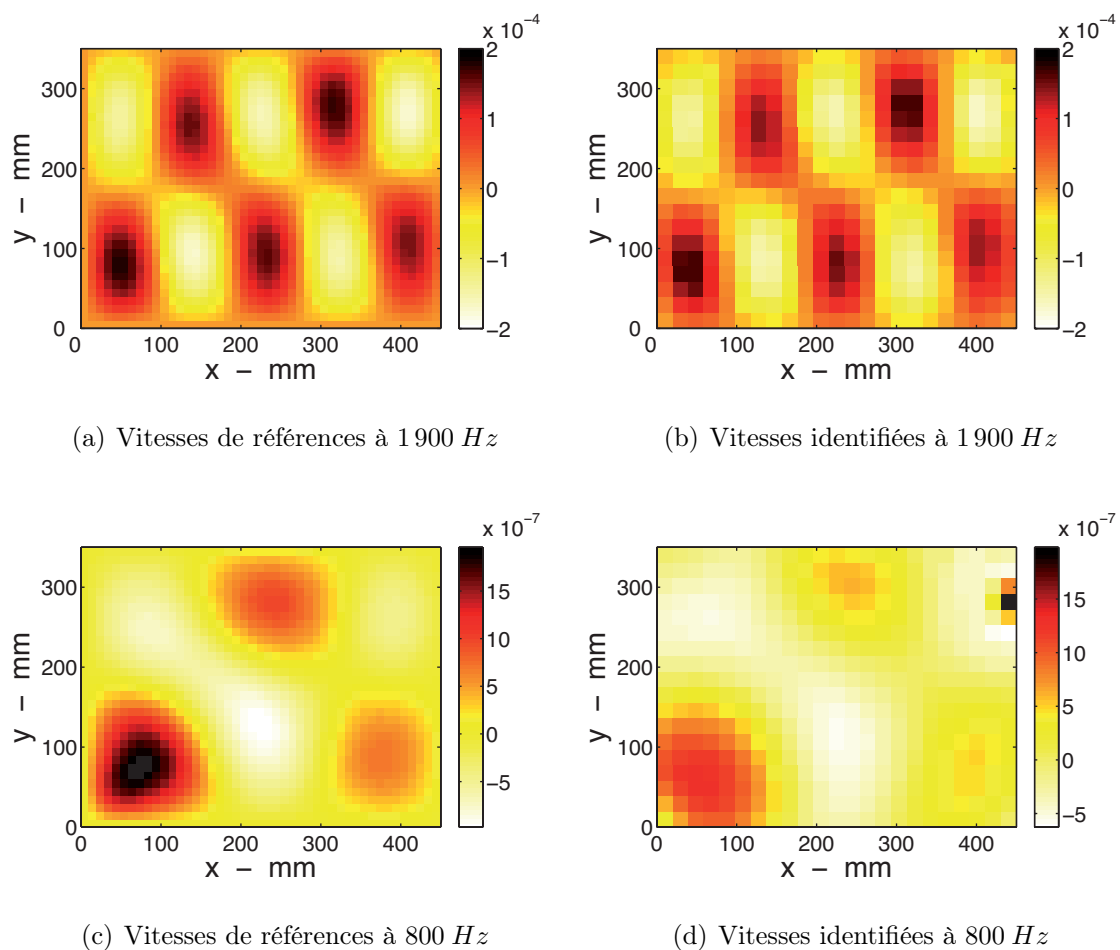


FIGURE 3.9 – Comparaison des cartographies de vitesses à 1900 Hz et 800 Hz

La comparaison des deux cartographies permet enfin de constater que *la localisation des zones de vibrations à 1900 Hz est également correctement faite* par notre méthode. À cette fréquence-là, nous sommes effectivement proches du mode de vibration (5,2) et nous retrouvons bien, sur la cartographie identifiée, les lignes nodales de la plaque conformément à leur positionnement sur la cartographie de référence. La cartographie identifiée présente toutefois entrevoir une approximation qui pourra dans certains cas conduire à



des erreurs importantes. Nous travaillons naturellement sur des surfaces discrétisées, et le maillage retenu pour la surface d'identification sera très certainement une limitation pour la précision des cartographies obtenues. Cette approximation n'est pas significative à la fréquence présentée ici, mais il est logique de penser que pour l'étude de phénomènes à plus hautes fréquences et dont les longueurs d'ondes sont plus réduites, un maillage large ne permettra pas de visualiser de façon correcte les comportements présents. Nous présenterons dans la suite de ces travaux les résultats d'études faites pour déterminer la finesse du maillage d'identification en fonction de la fréquences des phénomènes que l'opérateur souhaite observer, puis la finesse du maillage de mesure permettant d'apporter suffisamment d'informations pour une résolution stable du problème inverse.

Nous avons annoncé précédemment que la méthode iPTF peut fournir des résultats erronés pour des fréquences faibles, compte-tenu de la non prise en compte des ondes évanescentes émises par la structure. si l'identification se fait déjà correctement à 1900 Hz, il peut être intéressant d'étudier les cartographies obtenues à une fréquence plus faible. Nous présentons donc sur les figures (3.9(c)) et (3.9(d)) les cartographies de référence et d'identification obtenues à 800 Hz. Nous observons alors que l'allure générale de la cartographie identifiée reste cohérente avec la cartographie de référence, toutefois, la localisation des ventres et des lignes nodales se fait de façon bien moins précise qu'à 1900 Hz. Les amplitudes de vibrations sont également sous estimées de façon importante. Ceci est en accord avec le résultat présenté sur la figure (3.6) ou l'on pouvait observer qu'à 800 Hz, la vitesse quadratique moyenne identifiée était inférieure à la vitesse quadratique moyenne de référence.

### 3.3.2 Identification du champ de pressions pariétales

Nous avons montré au paragraphe §2.2.2 qu'il est également possible de déterminer la pression sur la surface source. Cela est possible en utilisant les équations de la méthode PTF sous sa formulation directe. La résolution du problème de rayonnement dans le sous-domaine  $A$  avait conduit à l'écriture de l'équation (2.35) que nous adaptons ici de manière à calculer la pression pariétale.

$$\left\{ \langle P \rangle_{\Sigma_e}^A \right\} = \left[ Z_{\Sigma_e \leftarrow \Sigma_e}^A \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma_e} \right\} + \left[ Z_{\Sigma_e \leftarrow \Sigma'_e}^A \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma'_e}^A \right\} \quad (3.3)$$

Cette équation fait intervenir, pour le calcul de la pression pariétale de la source, la vitesse de la source ainsi que la vitesse mesurée sur une surface distante. Ces deux informations sont alors connues, la première ayant été identifiée au paragraphe précédent, la seconde étant simulée au paragraphe §3.2.2

Nous présentons sur les figures (3.10) et (3.11) les résultats de l'identification du champ de pressions pariétales, aussi bien en quantité quadratique moyenne qu'en cartographie. Le

champ de pressions étant déterminé par un calcul linéaire à partir du champ de vitesses, aucune erreur supplémentaire n'est introduite et la comparaison des figures (3.10) et (3.6) montre des erreurs d'importance comparable aux fréquences déjà signalées précédemment. Les cartographies quant à elles sont tout à fait comparables et laissent entrevoir encore une fois la limite du maillage d'identification dont nous avons déjà parlé. Nous retrouvons également, entre les cartographies à 1900 Hz et celles à 800 Hz un comportement similaire à celui observé entre les figures (3.9(b)) et (3.9(d)), dont particulièrement le fait que les niveaux identifiés à 800 Hz sont globalement plus faible que les niveaux de référence. On peut cependant constater que la localisation des zones de vibrations à 800 Hz se fait avec moins d'approximation pour la pression qu'elle ne s'était faite pour la vitesse.

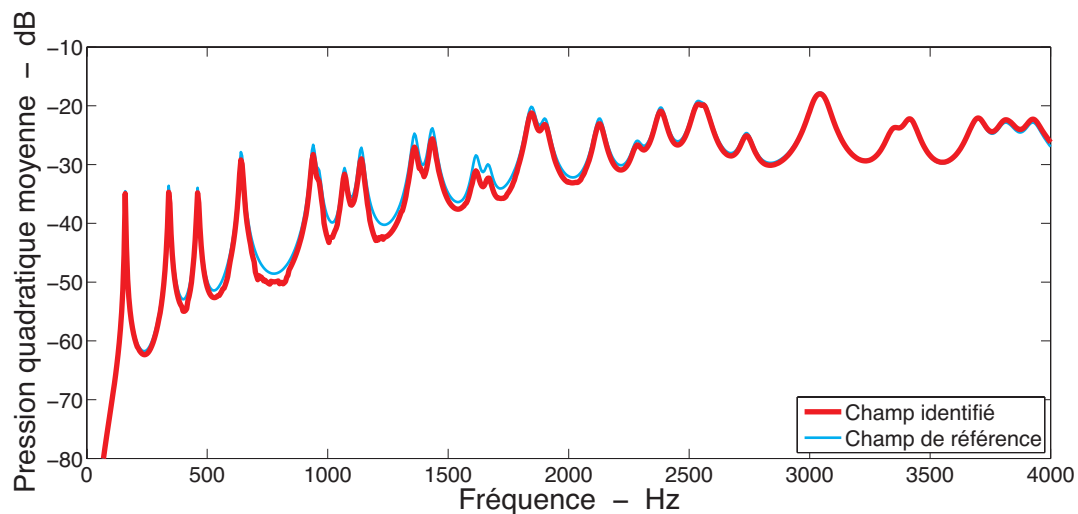


FIGURE 3.10 – Identification de la pression pariétale quadratique moyenne

### 3.3.3 Identification du champ d'intensités

La connaissance des champs de vitesses et de pressions permet enfin très aisément de déterminer le champ pariétal d'intensités. Nous rappelons ici pour cela l'équation (2.43) :

$$\{ \langle I \rangle_{\Sigma_e} \} = \frac{1}{2} \Re \left[ \{ \langle P \rangle_{\Sigma_e} \} \otimes \{ \langle V \rangle_{\Sigma_e} \}^* \right]$$

Nous présentons sur la page suivante les figures (3.12) et (3.13) présentant les résultats de l'identification du champ pariétal d'intensités. La première de ces deux figures montre le spectre identifié tandis que la seconde permet la comparaison entre les cartographies de référence et d'identification à 1900 Hz. Il est possible de constater, d'après ces deux figures, que le champ d'intensités est correctement identifié, aussi bien en spectre qu'en cartographie. Si l'on s'intéresse particulièrement à la figure (3.12), nous retrouvons tou-

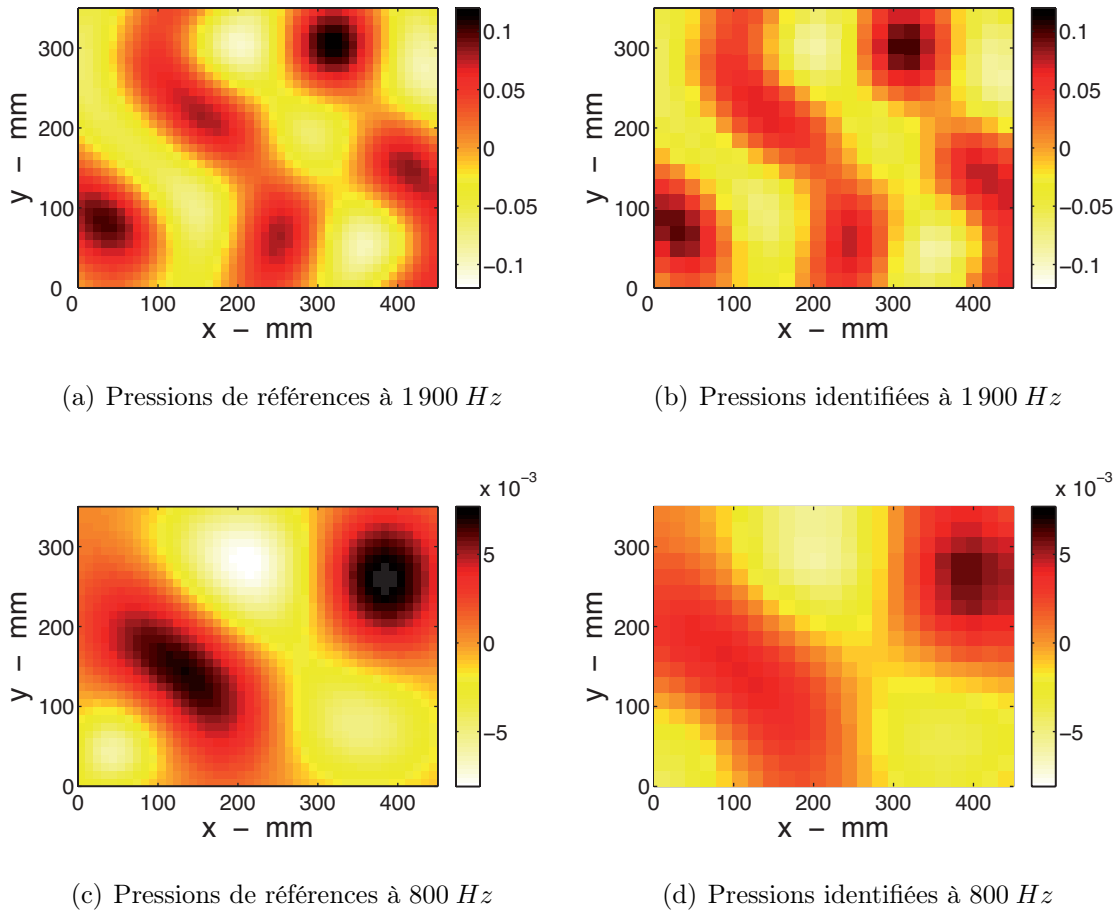


FIGURE 3.11 – Comparaison des cartographie de pressions à 1900 Hz et 800 Hz

jours sur le spectre le défaut d'identification entre 0 et 1800 Hz dont nous avons déjà donné la cause. Pour ce qui est des cartographies présentées sur les figures (3.13(a)) et (3.13(b)), nous retrouvons avec précision la position des zones où l'intensité vibratoire est importante. Pour ces zones il est également possible d'ordonner les variations d'amplitude. Nous retrouvons effectivement le fait que les ventres 1-1 et 4-2 présentent les plus grandes amplitudes de vibrations. La cartographie identifiée permet également de retrouver sur la plaque les lignes nodales, quoique la largeur de celles-ci soit légèrement surestimée. Ces résultats montre que la méthode iPTF mise en place dans ces travaux est effectivement apte à identifier le champ d'intensités pariétales sur la surface de vibration étudiée, avec toutefois la limitation observée en basses fréquences quant à l'identification des niveaux d'intensité. Cette limitation se retrouve une ici encore en comparant les figures (3.13(c)) et (3.13(d)).

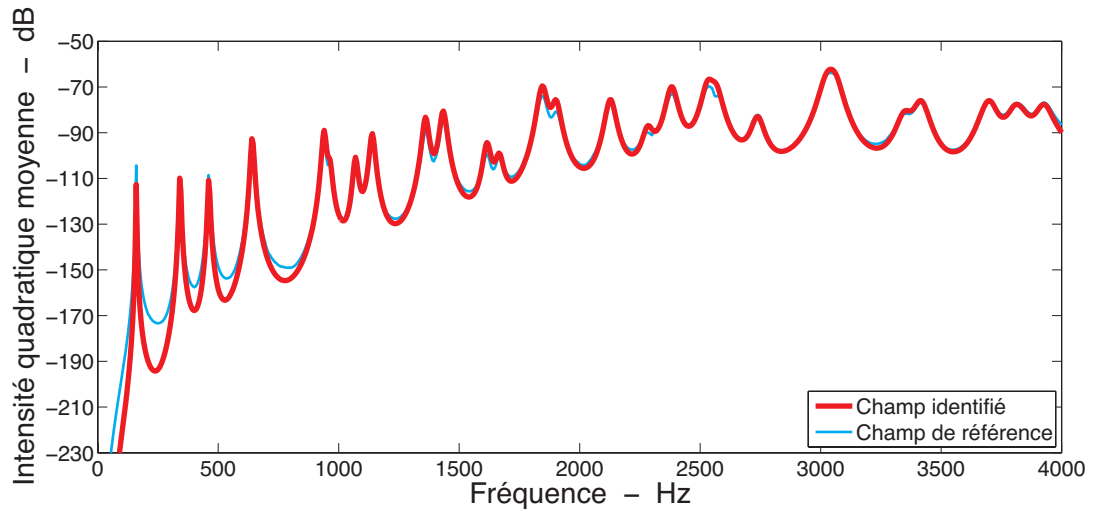


FIGURE 3.12 – Identification de l'intensité pariétale quadratique moyenne

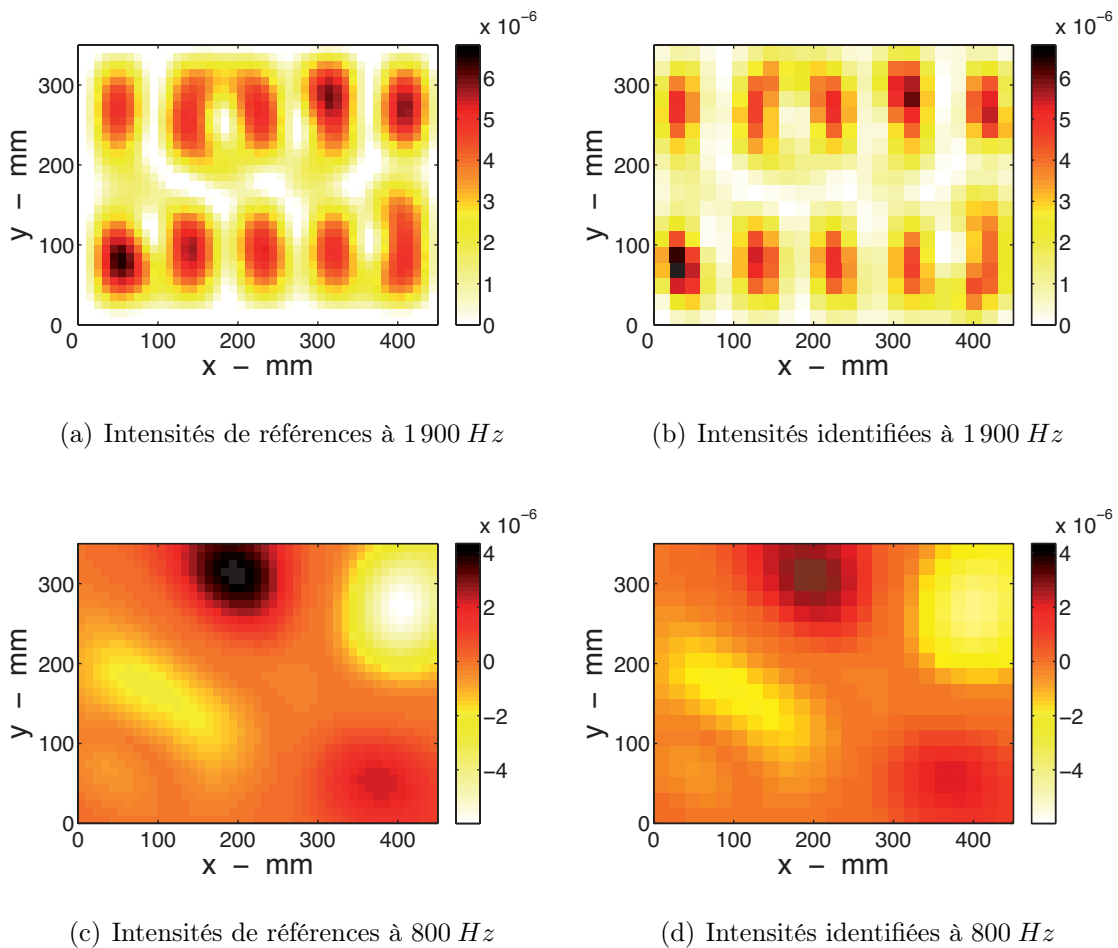


FIGURE 3.13 – Comparaison des cartographies d'intensité à 1900 Hz et 800 Hz

### 3.3.4 Régularisation du problème inverse

Les études réalisées au cours de cette thèse n'ont pas porté sur la définition d'une méthode de régularisation adaptée au problème traité. Toutefois, puisque la régularisation est un élément important de notre méthode iPTF, il semble nécessaire de préciser quelques informations sur la technique que nous avons utilisée pour nos études. Comme indiqué au paragraphe §3.3.1, Nous utilisons ici la méthode de TIKHONOV [87] pour régulariser l'inversion du système résolu. Le choix du paramètre de régularisation est fait à l'aide de la méthode de la courbe en  $L$  dont on peut lire la définition dans les travaux de P. C. HANSEN [30]. On peut également trouver une étude synthétique de ces travaux dans ceux de Q. LECLÈRE [48], aussi nous ne présenterons ici cette méthode que de façon rapide. La courbe en  $L$  correspond au tracer de la norme de la solution, en fonction de la norme du résidu, ce pour toutes les valeurs possibles du paramètre de régularisation. Le choix du paramètre se fait alors en cherchant le point pour lequel le meilleur compromis est fait entre norme de la solution et norme du résidu. Ce point correspond au point pour lequel la courbure de la courbe en  $L$  est la plus grande. Nous présentons sur la figure (3.14) l'allure de la courbe en  $L$  pour le problème traité. Cette courbe est calculée pour chaque fréquence étudiée.

Le paramètre retenu permet d'améliorer la stabilité du système lors de son inversion. Il est possible de constater cette amélioration en étudiant le nombre de conditionnement de la matrice à inverser. Ce nombre de conditionnement est calculé pour chaque fréquence et représenté sur la figure (3.15). Nous présentons sur cette figure les nombres de conditionnement pour la matrice non régularisée ainsi que pour la matrice régularisée.

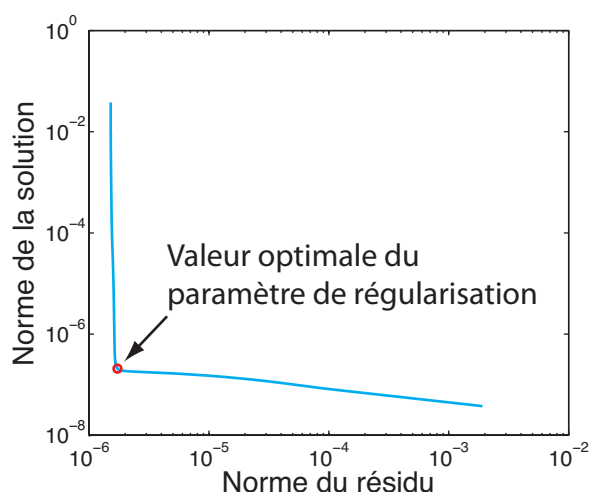


FIGURE 3.14 – Allure de la courbe en  $L$  dans le cas de notre application

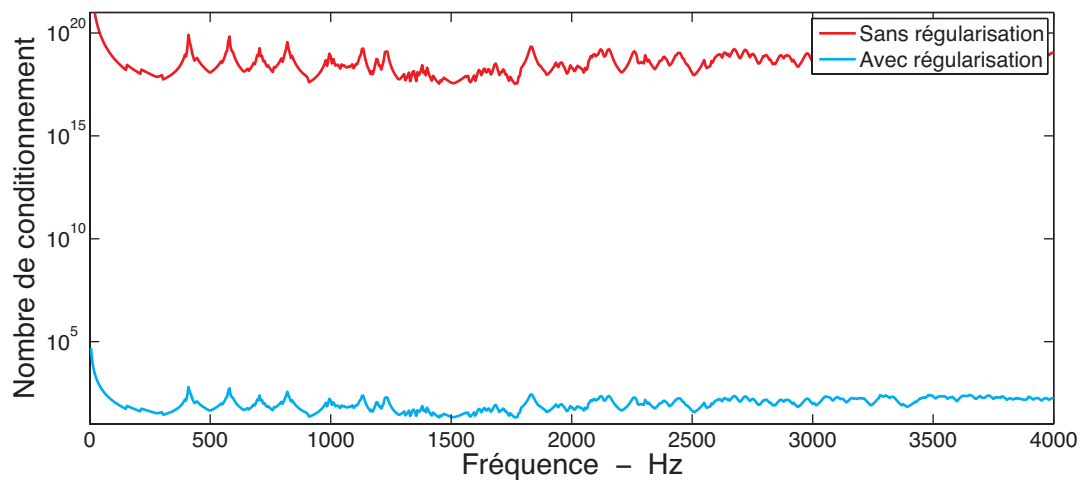


FIGURE 3.15 – Nombre de conditionnement de la matrice à inverser avec et sans régularisation



## Calcul analytique du rayonnement d'une plaque bafflée

Le chapitre précédent nous a permis de montrer, dans le cas d'une première application numérique, l'aptitude de la méthode iPTF à identifier correctement des champs de vitesses, pressions ou intensités. Nous avons, dans cette étude, utilisé un solveur numérique pour simuler la mesure des champs de vitesses et de pressions rayonnés sur une surface entourant la source de vibration. Les valeurs ainsi obtenues des champs de vitesses et de pressions ont alors été utilisées pour l'identification des vibrations de la source à l'aide de la méthode iPTF. Ces données étaient alors exactes or, dans la pratique, l'application de la méthode iPTF se fera à partir de mesures dégradées pour diverses raisons. Nous pouvons notamment citer ici les bruits intrinsèquement liés à la mesure des signaux de vitesses et de pressions ou les erreurs éventuellement liées aux imprécisions de positionnement des capteurs lors du processus de mesure des champs rayonnés. Au delà d'une simple démonstration de l'efficacité de la méthode, nous avons alors souhaité étudier son comportement face à des perturbations de ce type. Le solveur numérique utilisé précédemment a l'inconvénient de s'appuyer sur des calculs relativement coûteux en temps, à partir de maillages parfois difficilement modifiables en fonction des paramètres que l'on souhaite faire varier. Nous présentons donc, en introduction à l'étude paramétrique, un code de calcul que nous avons mis en place pour résoudre le problème de rayonnement. Le code que nous proposons ici s'appuie sur la résolution analytique d'un problème simple de rayonnement de plaque rectangulaire appuyée et bafflée dont on connaît les solutions exactes. L'objectif de ce chapitre n'est pas de démontrer une nouvelle fois la façon dont le calcul analytique du rayonnement d'une plaque se fait. Cette démonstration pourra en effet être trouvée dans les travaux de J.-L. GUYADER [27]. Nous nous intéressons essentiellement dans ce chapitre à leur mise en forme pour la réalisation d'un programme de calcul.



## 4.1 Approche mathématique

Cette première partie nous permettra de présenter les équations mathématiques sur lesquelles nous avons choisi de baser notre code de calcul. Nous rappellerons dans un premier temps les équations de la théorie des plaques minces permettant de trouver la réponse d'une plaque sollicitée en vibration par une force ponctuelle harmonique. Ce premier calcul nous permettra de déterminer la vitesse de vibration de la plaque. Nous chercherons dans un second temps à déterminer le champ rayonné par la plaque en résolvant le problème direct pas une méthode intégrale.

### 4.1.1 Champs de déplacements normaux et vitesses normales

Nous présentons ici le problème de rayonnement d'une plaque mince dans un repère  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tel qu'il est posé sur la figure (4.1) ci-contre. La plaque, de dimensions  $L_x \times L_y$ , est perpendiculaire au vecteur  $\vec{e}_3$ . Elle est appuyée sur ses bords et soumise à un effort ponctuel harmonique normal  $\vec{F}_0$  localisé en un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$ .

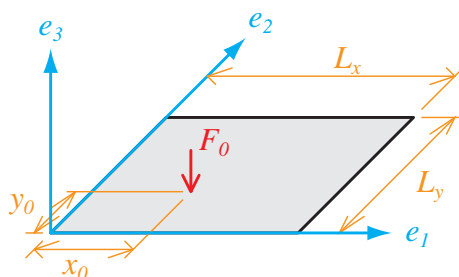


FIGURE 4.1 – Pose du problème

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'étude du comportement vibratoire de la plaque. L'équation du mouvement pour le cas étudié sera utilisée afin de déterminer le champ de vitesses de vibrations de la source. La connaissance de ce champ nous permettra par la suite de résoudre le problème de rayonnement de la plaque. Il sera par ailleurs utilisé comme champ de référence lorsque nous souhaiterons évaluer la qualité du champ de vitesses obtenu après rétropropagation. Nous pourrions également nous intéresser au calcul du champ de pressions pariétales de référence toutefois nous avons montré au paragraphe §3.3.2 que l'information de pression est obtenue à partir de l'information de vitesse de façon linéaire et sans perte de précision. Nous limiterons donc le code de calcul mis en place ici au calcul du champ de vitesses seulement.

Nous considérons ici une plaque mince pour laquelle nous allons étudier le comportement selon la théorie de LOVE-KIRCHHOFF [51]. Selon les hypothèses de déformation faites dans le cadre de cette théorie, le champ de déplacements dans les trois directions

de chacun des points de la plaque est défini par le champ vectoriel suivant :

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où  $w(x, y, t)$  représente le déplacement de la plaque dans la direction  $z$ .

Nous rappelons l'équation du mouvement pour une telle plaque, notée ici sous la forme donnée par C. LESUEUR [49], et nous donnerons ses solutions en vibrations.

$$D \cdot \nabla^4 w(x, y, t) + M \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = F(x, y, t) \quad (4.2)$$

Cette expression fait intervenir la rigidité de flexion  $D$ , la masse surfacique  $M$  ainsi que l'opérateur de dérivation  $\nabla^4$  dont nous rappelons les définitions.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.3)$$

$$M = \rho h \quad (4.4)$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (4.5)$$

Compte-tenu de l'hypothèse de plaque appuyée sur ses bords, on considère les conditions aux limites suivantes, pour ce qui est du déplacement  $w$  et des moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$

$$w(x, y, t) = 0 \quad x = 0, L_x \quad ; \quad y = 0, L_y \quad (4.6)$$

$$M_x = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad x = 0, L_x \quad ; \quad y = 0, L_y \quad (4.7)$$

$$M_y = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad x = 0, L_x \quad ; \quad y = 0, L_y \quad (4.8)$$

La résolution de l'équation (4.2) permet de déterminer les modes propres ainsi que les pulsations propres de la plaque. Les termes  $\Phi_{n_x n_y}$  et  $\omega_{n_x n_y}$  désignant respectivement la forme de la déformée et la pulsation d'un mode  $(n_x, n_y)$ ,  $n_x$  et  $n_y$  étant des entiers naturels, nous avons ainsi :

$$\Phi_{n_x n_y}(x, y) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \quad (4.9)$$

$$\omega_{n_x n_y} = \sqrt{\frac{D}{M} \cdot \left( \left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2 \right)} \quad (4.10)$$

Il nous faut encore prendre en considération l'effort extérieur appliqué sur la plaque et représenté par le second membre de l'équation de mouvement (4.2). On fixe par hypothèse qu'il s'agit là d'un effort ponctuel harmonique. Son expression peut alors être détaillée en séparant les variables de temps et d'espace

$$F(x, y, t) = F_0 \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot e^{i\omega t} \quad (4.11)$$

Les termes  $\delta(x - x_0)$  et  $\delta(y - y_0)$  peuvent être explicités de façon à exprimer la contribution de l'effort excitateur  $F_0$  pour chaque mode  $(n_x, n_y)$ .

$$F_{n_x n_y} = F_0 \cdot \sin\left(\frac{n_x \pi x_0}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi y_0}{L_y}\right) \cdot e^{i\omega t} \quad (4.12)$$

On en déduit alors le déplacement de chacun des points de la plaque

$$w(x, y, \omega) = \frac{4}{ML_x L_y} \sum_{n_x, n_y} \frac{F_{n_x n_y} \cdot \Phi_{n_x n_y}(x, y)}{\omega_{n_x n_y}^2 - \omega^2 + i\eta_{n_x n_y} \omega_{n_x n_y} \omega} \quad (4.13)$$

Cette expression fait apparaître le coefficient  $\eta_{n_x n_y}$  correspondant au coefficient d'amortissement d'un mode  $(n_x, n_y)$ .

Nous pouvons enfin calculer, par dérivation de ce champ de déplacements, le champ de vitesses pariétales normales

$$v(x, y, \omega) = \frac{4i\omega}{ML_x L_y} \sum_{n_x, n_y} \frac{F_{n_x n_y} \cdot \Phi_{n_x n_y}(x, y)}{\omega_{n_x n_y}^2 - \omega^2 + i\eta_{n_x n_y} \omega_{n_x n_y} \omega} \quad (4.14)$$

#### 4.1.2 Résolution intégrale du problème de rayonnement

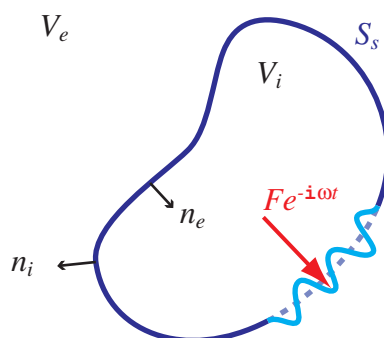


FIGURE 4.2 – Pose du problème de rayonnement

Nous posons le problème d'acoustique externe de cette manière

$$\Delta p(M) + k^2 p(M) = 0 \quad (4.15)$$

et nous introduisons deux fonctions  $p(M)$  et  $G(M_0, M)$ , définies continues et dérivables en tout point du volume extérieur  $V_e$ . La fonction  $G(M_0, M)$ , fonction de Green de l'équation (4.15), vérifie la relation :

$$\Delta G(M_0, M) + k^2 G(M_0, M) = \delta(M_0 - M) \quad (4.16)$$

où  $G(M_0, M)$ , a la forme (approximation de potentiel de simple couche) et décrit des ondes sortantes à l'infini :

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik(M_0-M)}}{(M_0 - M)} \quad (4.17)$$

Dans cette équation,  $M_0$  est le point d'observation et  $M$  est la variable d'intégration. Comme nous l'avons fait dans un paragraphe précédent, multiplions l'équation (4.15) par  $G(M_0, M)$  et l'équation (4.16) par  $p(M)$ . En calculant leur différence, nous obtenons en intégrant sur le volume  $V_e$  et en tenant compte du fait que  $M_0$  se trouve dans ce volume :

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \left[ G(M_0, M) \Delta p(M) - p(M) \Delta G(M_0, M) \right] dV_e \\ = \int_{V_e} p(M) \delta(M_0 - M) dV_e = p(M_0) \end{aligned} \quad (4.18)$$

La seconde formule de GREEN

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \left[ G(M_0, M) \Delta p(M) - p(M) \Delta G(M_0, M) \right] dV_e \\ = \int_{S_T} \left[ G(M_0, M) \frac{\partial p(M)}{\partial n} - p(M) \frac{\partial G(M_0, M)}{\partial n} \right] dS_T \end{aligned} \quad (4.19)$$

permet alors d'écrire

$$p(M_0) = \int_{S_T} \left[ G(M_0, M) \frac{\partial p(M)}{\partial n} - p(M) \frac{\partial G(M_0, M)}{\partial n} \right] dS_T \quad (4.20)$$

Cette expression est valide pour tout point  $M_0$  intérieur à  $V_e$ . Dans les autres cas, son membre de gauche est nul.

L'intégrale sur la surface totale  $S_T$  peut se décomposer en deux intégrales. La première calculée sur la surface de l'objet source  $S_s$ ; la deuxième calculée sur une surface rejetée à l'infini  $S_\infty$ . Ces deux surfaces sont représentées sur la figure (figure 4.3). Les conditions imposées au champ sur la surface rejetée à l'infini montre que si  $r = \|M_0 - M\|$  tend vers l'infini, la contribution de la surface correspondante s'annule au moins comme l'inverse de  $r$ .

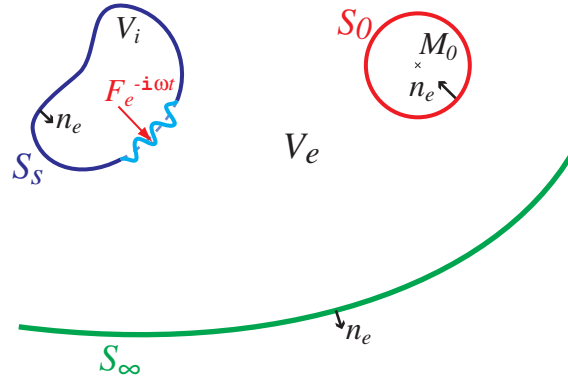


FIGURE 4.3 – Décomposition de la surface totale

En imposant à  $G(M, M_0)$  la condition de NEUMANN [38]

$$\frac{\partial G(M_0, M)}{\partial n} = 0 \quad M \in S_s \quad (4.21)$$

et en utilisant la relation existant entre la pression pariétale et le déplacement normal  $w_n$

$$\frac{\partial p(M)}{\partial n} = \rho_0 \omega^2 w_n(M) \quad (4.22)$$

nous obtenons la pression rayonnée en tout point de l'espace

$$p(M_0) = \int_{S_s} \rho_0 \omega^2 w_n(M) G(M, M_0) dS_s \quad (4.23)$$

## 4.2 Validation du code de calcul

Nous nous intéresserons dans cette seconde partie à la validation du code de calcul détaillé dans ce chapitre. Nous présentons dans un premier temps la vitesse particulière normale quadratique moyenne. La figure (4.4) permet de comparer le résultat obtenu par le calcul intégral mis en place avec le résultat obtenu précédemment en utilisant un solveur numérique et présenté au chapitre §3.2.2. Nous pouvons constater sur cette figure que le calcul intégral mis en place permet de déterminer de façon tout à fait correcte la vitesse quadratique moyenne rayonnée. Le calcul intégral fait cependant apparaître un décalage vers les hautes fréquences des pics de vitesse du champ rayonné. Cela vient du fait que, comme nous l'avons indiqué au paragraphe §3.2.2, nous avons précédemment effectué un calcul couplé avec l'air alors que nous ne prenons pas en compte les phénomènes de couplages dans notre solveur. La modélisation par éléments finis prend donc en considération une masse supplémentaire (la charge fluide) qui attire donc les fréquences de résonances vers les basses fréquences. Une part de ces erreurs peut également être expliquée par des différences dans les conditions aux limites considérées lors du calcul intégral ou par solveur numérique.

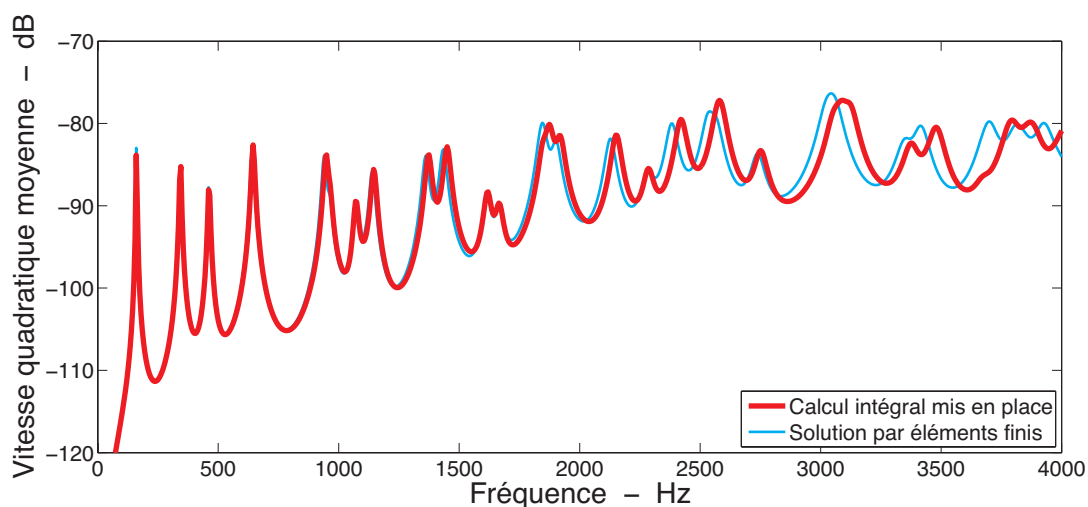


FIGURE 4.4 – Vitesse particulière normale quadratique moyenne

Nous présentons enfin sur la page suivante les cartographies du champ de vitesses rayonnées. Afin de faciliter la comparaison, nous rappelons sur la figure (4.5(a)) le champ de vitesses rayonné calculé par la méthode éléments finis et présenté précédemment. La figure (4.5(b)) présente, en regard, le champ de vitesses rayonné calculé au moyen de notre solveur. Le problème de décalage fréquentiel peut être mis de côté en appliquant une correction de fréquence de manière à comparer des cartographies représentant le même phénomène. Ainsi, la cartographie obtenue par éléments finis est donnée à  $1900\text{ Hz}$  tandis

que la cartographie obtenue par calcul intégrale est donnée à  $1915\text{ Hz}$ . De cette façon, les deux cartographies présentent la vitesses particulaire normale pour le mode  $(5, 2)$ . Nous pouvons alors constater que les deux cartographies présentent des résultats tout à fait similaires tant en niveau qu'en localisation. Cette étude permet donc de valider le code de calcul mis en place et c'est ce nouveau solveur qui sera utilisé par la suite pour l'étude paramétrique.

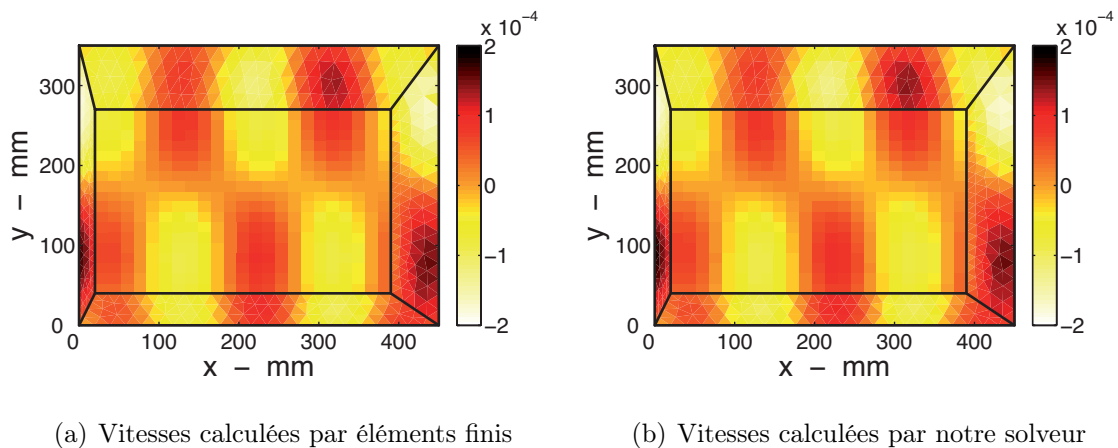


FIGURE 4.5 – Comparaison des cartographie de vitesses pour le mode  $(5, 2)$

Nous avons par ailleurs parlé, lors du premier exemple de validation (p. 37), du « crime de résolution inverse » [101]. Il est important de signaler ici que le calcul mis en place ici n'est pas non plus basé sur la même théorie que la méthode iPTF. Nous rappelons en effet que la méthode iPTF est basée sur la décomposition du problème traité sur les modes d'une cavité aux parois rigides. Le solveur mis en place quant à lui est basé sur la formulation intégrale du problème de rayonnement et sur l'application du théorème de GREEN-OSTROGRADSKI.







## Stabilité de la méthode iPTF

Le calcul du rayonnement effectué de façon intégrale, selon les équations présentées au chapitre §4, a l'avantage d'être plus rapide qu'un calcul numérique du type BEM. Son inconvénient est qu'il est limité à des structures simples. Nous resterons donc, pour cette étude paramétrique, dans le cas du système présenté au chapitre §3. Nous limiterons également notre étude aux seules informations de vitesses identifiées (vitesses quadratiques moyennes ou cartographies de vitesses). Les pressions et intensités étant obtenues par un calcul linéaire à partir des vitesses, si nous pouvons nous assurer que les vitesses sont correctement identifiées, nous pourrons alors être sûrs que les pressions et intensités seront justes également.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à trois paramètres.

- Nous étudierons dans un premier temps l'influence du maillage sur la qualité des résultats obtenus. Pour tout problème décomposé en surfaces élémentaires, la question de la convergence du calcul se pose. Un critère de discrétisation des surfaces de mesures et d'identification face à la longueur d'onde du problème vibro-acoustique sera présenté.
- Nous nous intéresserons ensuite à l'influence d'erreurs de position des capteurs, par rapport aux positions théoriques exactes, pouvant être faites lors de la mesure des champs de pressions et de vitesses rayonnés. Ceci permettra de définir la précision avec laquelle il faudra effectuer la mesure pour ne pas dégrader les résultats de façon trop importante.
- Enfin nous regarderons l'influence d'un bruit de mesure perturbant l'enregistrement des champs de pressions et de vitesses rayonnés. Ceci permettra d'étudier la stabilité de la méthode iPTF face au bruit de fond inhérent à toute mesure.

## 5.1 Critère de maillage des surfaces

---

### 5.1.1 Introduction

Un problème se pose toujours lorsqu'il est question de déterminer la finesse d'un maillage. Celui-ci étant toujours une approximation de la réalité, il doit être suffisamment fin pour permettre une convergence des calculs. Classiquement, la finesse du maillage est déterminée à partir de la longueur d'onde de façon à s'assurer que le maillage soit adapté aux phénomènes physiques observés. En fonction du problème traité, il est alors courant de choisir des maillages dont la taille du côté des éléments est de l'ordre de  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$ ,  $\lambda/6$ , etc. Nous nous sommes donc intéressés ici à ces différents maillages. Par ailleurs, le problème que nous traitons comporte deux approches :

- La première est celle imposée par la mesure de la pression et de la vitesse particulaire. C'est donc une approche acoustique puisqu'elle nécessite de mesurer des données de champs acoustiques.
- La seconde est celle utilisée pour l'identification des vibrations de la plaque. Il s'agit cette fois-ci d'une approche structurale puisque nous souhaitons retrouver les vibrations de flexion de la plaque.

Il convient donc de différencier la longueur d'onde acoustique sur la surface de mesure de la longueur d'onde de la structure sur laquelle on souhaite identifier les vitesses. Les célérités des ondes dans ces deux milieux pouvant être très différentes, il vient alors la question de choisir entre longueur d'onde acoustique, longueur d'onde de structure, ou un compromis entre les deux.

La longueur d'onde est calculée à partir de la célérité des ondes et de la fréquence du phénomène étudié (eq. 5.1). Il pourra alors s'agir soit de la célérité des ondes dans l'air, soit de la célérité des ondes de flexion dans le matériau utilisé.

$$\lambda = \frac{c}{f} \tag{5.1}$$

La célérité des ondes dans l'air est connue ( $c_a = 340 \text{ m.s}^{-1}$ ) et permet de calculer trois critères de maillages acoustiques. Ces dimensions sont données dans le tableau (5.1) pour des phénomènes étudiés allant jusqu'à 4000 Hz.

Critère de maillage	Largeur de l'élément
$\lambda_a/2$	$d = 0.043 \text{ m}$
$\lambda_a/4$	$d = 0.021 \text{ m}$
$\lambda_a/6$	$d = 0.014 \text{ m}$

TABLE 5.1 – Critères de maillage basés sur le comportement acoustique à 4000 Hz

La célérité des ondes de flexion dans une plaque (eq. 5.2) est calculée à partir de la rigidité de flexion de la plaque (eq. 5.3) et de sa masse surfacique (eq. 5.4).

$$c_s = \sqrt[4]{\frac{D}{M}} \sqrt{\omega} \quad (5.2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.3)$$

$$M = \rho h \quad (5.4)$$

L'utilisation de ces trois dernières relations dans l'expression (5.1) permet de calculer la longueur d'onde de flexion.

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho}} \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \quad (5.5)$$

Trois autres critères de maillages, basés sur la longueur d'onde de structure, peuvent alors être définis. Ces nouveaux critères sont eux aussi calculés pour des phénomènes observés allant jusqu'à 4000 Hz et sont présentés dans le tableau (5.3). Pour le calcul de ces valeurs, nous rappelons les paramètres physiques de la plaque dans le tableau (5.2).

Paramètre	Valeur
Module d'Young	$E = 2.1 \times 10^{11} Pa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 7800 kg \cdot m^{-3}$
épaisseur	$h = 0.005 m$

TABLE 5.2 – Paramètres physiques de la plaque

Critère de maillage	Largeur de l'élément
$\lambda_s/2$	$d = 0.056 m$
$\lambda_s/4$	$d = 0.028 m$
$\lambda_s/6$	$d = 0.019 m$

TABLE 5.3 – Critères de maillage basés sur le comportement structurel

## 5.1.2 Maillage de la surface d'identification

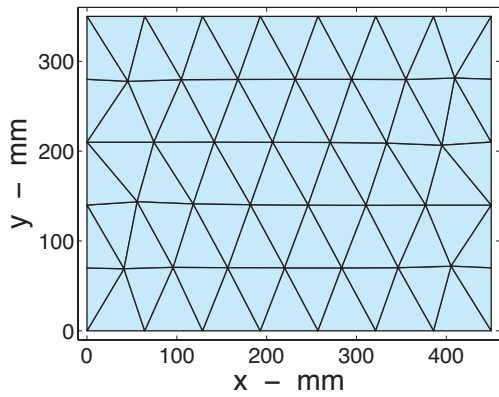
Nous étudions dans un premier temps l'influence du maillage de la surface d'identification. Puisque nous nous intéressons ici à des phénomènes liés à la flexion de la plaque, nous définissons trois maillages à partir des trois critères donnés dans le tableau (5.3). Ces maillages sont présentés sur les figures (5.1(a)), (5.1(b)) et (5.1(c)). La méthode iPTF permet, à partir de la mesure du champ acoustique sur les *patches* de mesure, d'identifier le champ de vibration sur les *patches* de la source. Le système que nous souhaitons alors résoudre dispose d'un nombre d'inconnues égal au nombre de *patches* sur la surface source. Pour déterminer ces inconnues, nous disposons d'un nombre d'équations égal au nombre de *patches* sur la surface de mesure. Pour que le système soit toujours soluble, il faut alors nous assurer que, pour tous les maillages d'identification, nous disposons d'assez d'équations par rapport au nombre d'inconnues. Nous déterminons donc le maillage de mesure par rapport au maillage d'identification en  $\lambda_s/6$  qui est celui pour lequel le nombre d'inconnues est le plus élevé. Nous pouvons alors définir un maillage de mesure unique pour les trois cas. Ce maillage, représenté sur la figure (5.1(d)), est défini en  $\lambda_a/4$ .

Nous présentons sur la figure (5.2) différentes cartographies à 3900 Hz. La première est la cartographie de référence. Celle-ci est obtenue par le calcul, au moyen des équations présentées au paragraphe §4.1.1. Nous présentons ensuite les cartographies identifiées avec les trois maillages présentés dans la figure (5.1). L'identification de ces trois derniers champs de vitesses est réalisée à partir des champs de vitesses et de pressions rayonnés à l'aide du solveur mis en place et présenté au paragraphe §4.1.2.

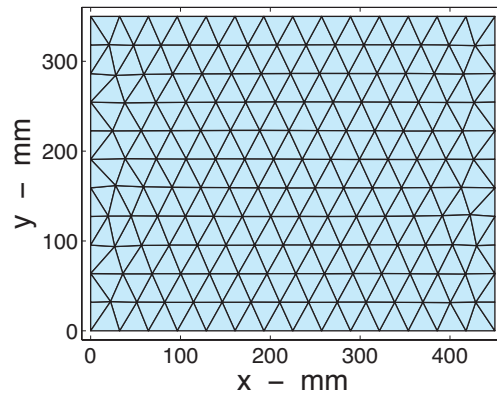
La figure (5.2(b)) montre très clairement que le maillage en  $\lambda_s/2$  est très insuffisant pour rendre compte de la réalité des phénomènes physiques. Au delà de la simple localisation qui aurait pu être imprécise, on constate également que les amplitudes ne sont pas non plus identifiées correctement. La figure (5.3) présentée plus loin permettra d'étudier l'évolution de l'identification des niveaux de vibration en fonction des fréquences.

On constate une bien meilleure corrélation entre la cartographie de référence et la cartographie obtenue pour le maillage en  $\lambda_s/4$ . En effet nous retrouvons plus aisément sur la figure (5.2(c)) les lignes nodales de la plaque. Cette fois-ci, l'ordre de grandeur des vitesses de vibration est correcte comparativement à celui des valeurs de référence. On peut toutefois remarquer que les extremums sont un peu atténués. Ceci est dû au fait que nous moyennons les vitesses sur des surfaces plus grandes.

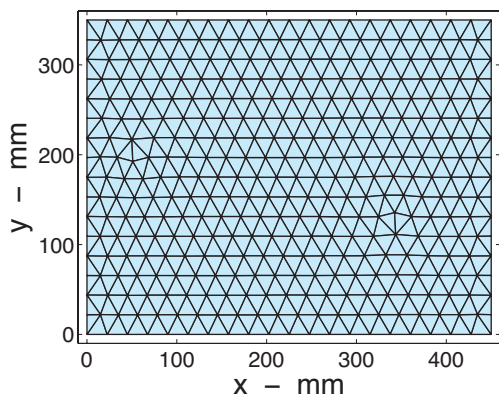
Compte-tenu de la très nette amélioration du résultat lors du passage du maillage en  $\lambda_s/2$  au maillage en  $\lambda_s/4$ , nous pouvions nous attendre au fait qu'un nouvel affinement du maillage conduise à une nouvelle amélioration de la qualité des résultats. Nous constatons malheureusement sur la figure (5.2(d)) que la finesse du maillage semble limitée et qu'au delà d'une certaine finesse, le résultat se trouve complètement déconnecté de la réalité du problème étudié. Par souci d'uniformité les quatre cartographies ont été tracées avec



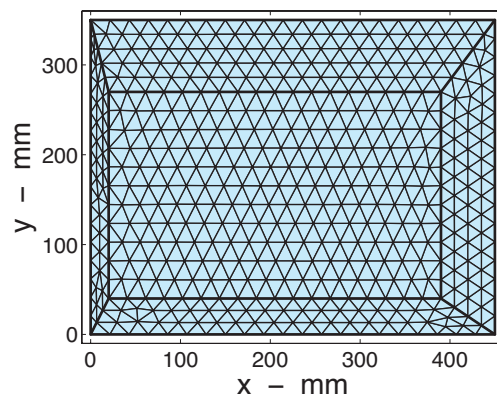
(a) surface d'identification -  $\lambda_s/2$



(b) surface d'identification -  $\lambda_s/4$

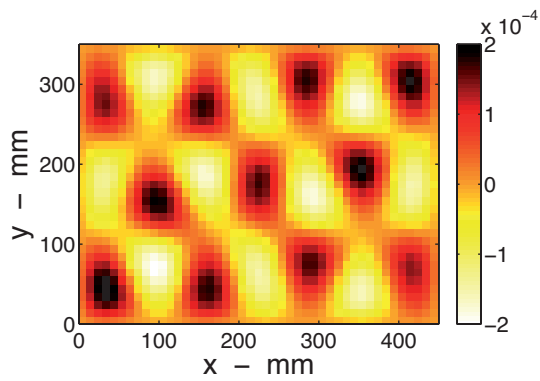


(c) surface d'identification -  $\lambda_s/6$

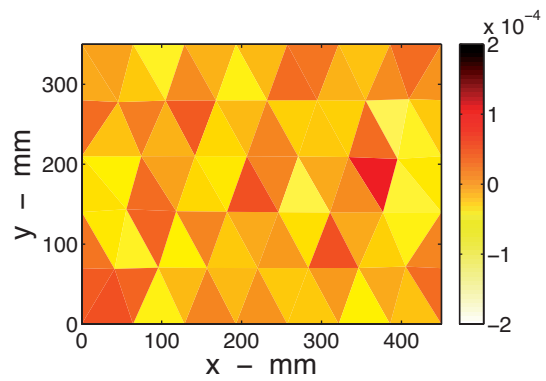


(d) surface de mesure -  $\lambda_a/4$

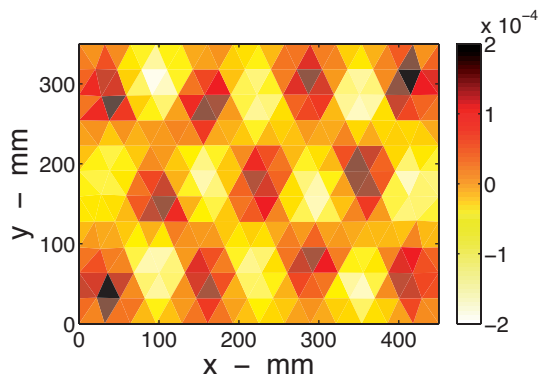
FIGURE 5.1 – Maillages utilisés pour les surfaces d'identification et de mesure



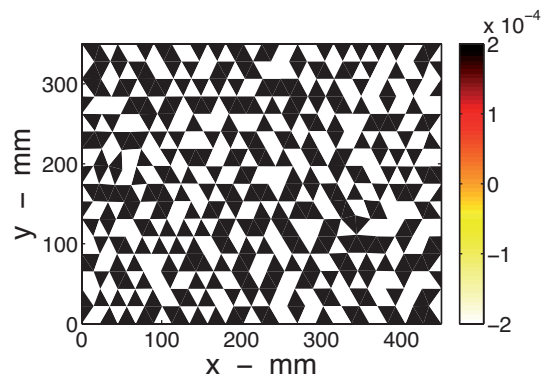
(a) Cartographie de référence



(b) Maillage  $\lambda_s/2$



(c) Maillage  $\lambda_s/4$



(d) Maillage  $\lambda_s/6$

FIGURE 5.2 – Vitesses de références et vitesses identifiées avec les différents maillages d'identification. Cartographies présentées à  $3900\text{ Hz}$

la même échelle de couleur. Les valeurs calculées sur cette quatrième figure sont en fait comprises entre  $-3 \times 10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $3 \times 10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ces valeurs, supérieures à la vitesse de la lumière, montrent bien l'aberration des résultats fournis dans ce dernier cas. Nous expliquons de façon détaillée au paragraphe §5.1.3 la raison pour laquelle de tels résultats sont calculés toutefois nous indiquons dès à présent que le nombre de *patches* d'identification est limité par le nombre de modes pris en compte dans la base modale.

Nous étudions maintenant les spectres quadratiques moyens des vitesses identifiées, et principalement les erreurs commises sur l'identification de ces spectres. Ces erreurs sont calculées à l'aide de la relation (5.6) et sont présentées sur la figure (5.3).

$$\epsilon_{identification} = \left| 10 \times \log_{10} \left( \overline{|V_{retro}|^2} \right) - 10 \times \log_{10} \left( \overline{|V_{ref}|^2} \right) \right| \quad (5.6)$$

Nous retrouvons sur cette figure un comportement similaire à celui déjà observé sur la figure (3.7), avec des pics d'erreur à des fréquences situées en dehors des fréquences propres de la plaque. On constate par ailleurs la présence de deux zones distinctes sur la figure. Dans la première, de 0 jusqu'à 2000 Hz environ, les erreurs commises sont équivalentes pour les deux maillages. On constate par contre que les erreurs commises avec le maillage en  $\lambda/2$  sont significativement supérieures à partir de 2000 Hz, fréquence à laquelle ce maillage présente un critère de discrétisation de type  $\lambda/4$  (puisque à 2000 Hz la longueur d'onde est deux fois plus grande dans l'air qu'à 4000 Hz).

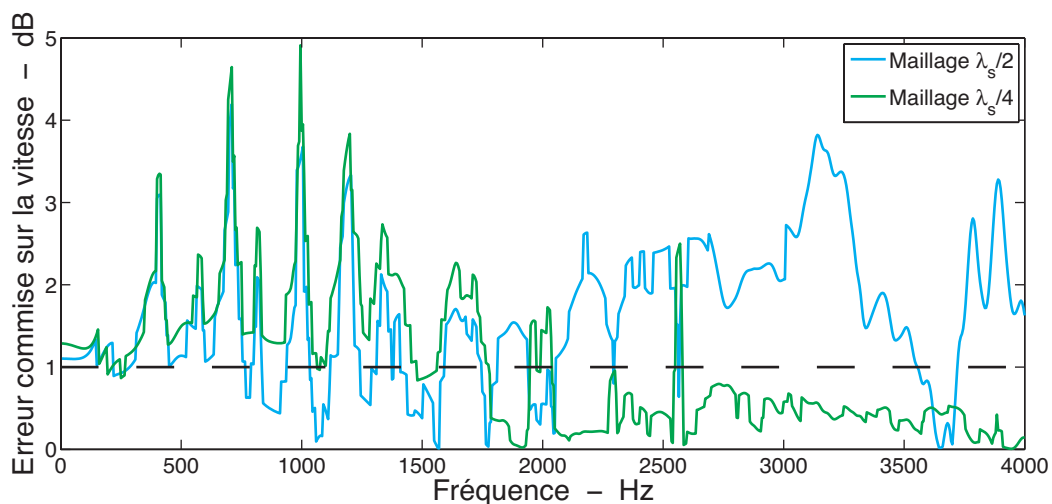


FIGURE 5.3 – Erreurs commises sur les vitesses identifiées en fonction du maillage d'identification



### 5.1.3 Limitation de la finesse du maillage d'identification

La figure (5.2(d)) nous a permis de montrer qu'il existe une limite au delà de laquelle il n'est plus possible d'augmenter la finesse du maillage sans que le résultat de l'identification ne devienne incohérent. Nous avons donc souhaité déterminer la condition à respecter afin de ne pas risquer, pour une étude, de se placer dans ce cas de figure.

Notre méthode propose de déterminer la vitesse en plusieurs points en fonction de données mesurées en d'autres points. Elle consiste donc en la résolution d'un système dont le nombre d'inconnues est égal au nombre de points où l'on souhaite connaître la vitesse, et dont le nombre d'équations est égal au nombre de points pour lesquels les valeurs de la pression et de la vitesse sont mesurées. Pour que ce système d'équations conduise à un résultat unique, il faut nécessairement que :

- le nombre d'équations soit au moins égal au nombre d'inconnues (la sur-définition du système permettant d'améliorer la stabilité du problème lors de l'inversion de la matrice associée) ;
- les équations soient linéairement indépendantes.

Nous savons ici que la première hypothèse est vérifiée car les maillages utilisés pour cette étude (présentés au paragraphe §5.1.2) ont été définis de façon à garder toujours un nombre de points d'identification inférieur au nombre de points de mesure. Ce n'est donc pas cette condition qui fait défaut dans notre étude.

La seconde condition d'indépendance linéaire des équations se vérifie en étudiant le rang du système que l'on souhaite résoudre. Nous présentons donc dans le tableau suivant le rang de chacun des trois systèmes étudiés pour les trois cas traités.

Cas étudié	Nombre d'inconnues	Rang du système
Fig. 5.2(b)	74	74
Fig. 5.2(c)	316	316
Fig. 5.2(d)	664	427

TABLE 5.4 – Rangs des systèmes pour ces trois cas d'identification

Nous constatons alors que les équations des deux premiers systèmes sont linéairement indépendantes tandis que celles du troisième ne le sont pas. Son rang est inférieur au nombre d'inconnues. Comme nous l'avons signalé précédemment, les maillages de mesures ayant été faits de façon à avoir toujours approximativement trois points de mesure pour un point d'identification, le rang du système n'est pas limité par le nombre d'équations disponibles, qui est *a priori* suffisant. Pour cette étude, comme pour l'étude précédente présentée au chapitre §3, le problème est décomposé sur la base modale de la cavité virtuelle délimitée par la surface de mesure et la surface d'identification. Ici encore, les modes de la cavité sont calculés de 0 à 8 *kHz* et, compte-tenu de la géométrie de la

cavité utilisée, il est possible de montrer que 427 modes sont présents sur la gamme de fréquences choisie. On constate alors que le rang du système est directement lié au nombre de modes pris en compte pour la décomposition sur la base des modes propres de la cavité. La finesse du maillage d'identification est donc limitée par le nombre de modes pris en compte dans la cavité virtuelle utilisée. Celui-ci doit être au moins égal au nombre de points d'identification souhaités pour la vitesse.

### 5.1.4 Maillage de la surface de mesure

Nous étudions maintenant l'influence du maillage de mesure sur la qualité du champ de vitesses identifié pour la plaque. Nous avons vu au paragraphe §5.1.2 qu'un maillage de plaque en  $\lambda_s/4$  conduit à un résultat tout à fait acceptable, c'est donc ce maillage qui a été retenu pour cette étude. Nous avons alors maillé la surface de mesure de trois façons différentes de manière à enrichir progressivement le système à résoudre. Les maillages de la surface de mesure ainsi créés ont été définis respectivement en  $\lambda_a/3$ ,  $\lambda_a/4$  et  $\lambda_a/6$ . Les quatre maillages d'identification et de mesure correspondants sont présentés sur la figure suivante.

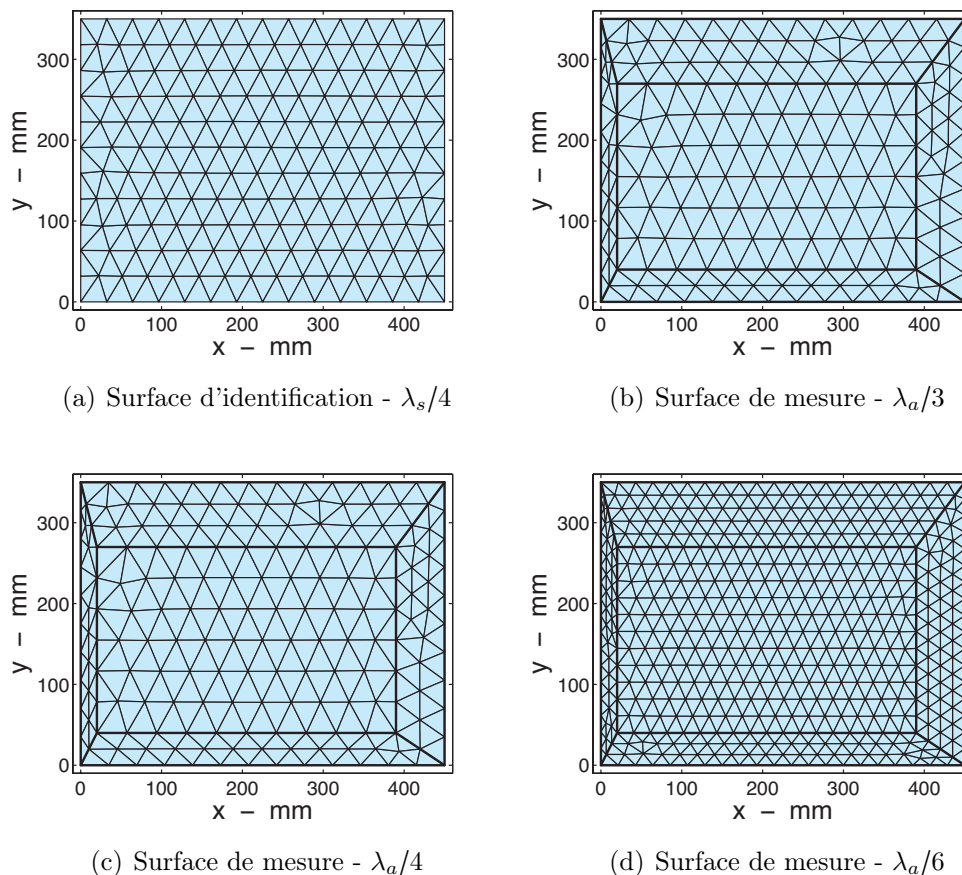


FIGURE 5.4 – Définition des maillages de la surface de mesure

Nous présentons sur la figure (5.5) les cartographies obtenues à 3900 Hz. On rappelle dans un premier temps le résultat de référence calculé à l'aide de l'équation (4.14) puis on présente ensuite les cartographies obtenues par la méthode iPTF, en utilisant les trois maillages de mesure en  $\lambda_a/3$ ,  $\lambda_a/4$  et  $\lambda_a/6$ . On constate que les trois cartographies identifiées permettent de visualiser des résultats tout à fait équivalents, montrant une faible influence du nombre de points de mesure dans la précision disponible pour la localisation des sources de vibrations.

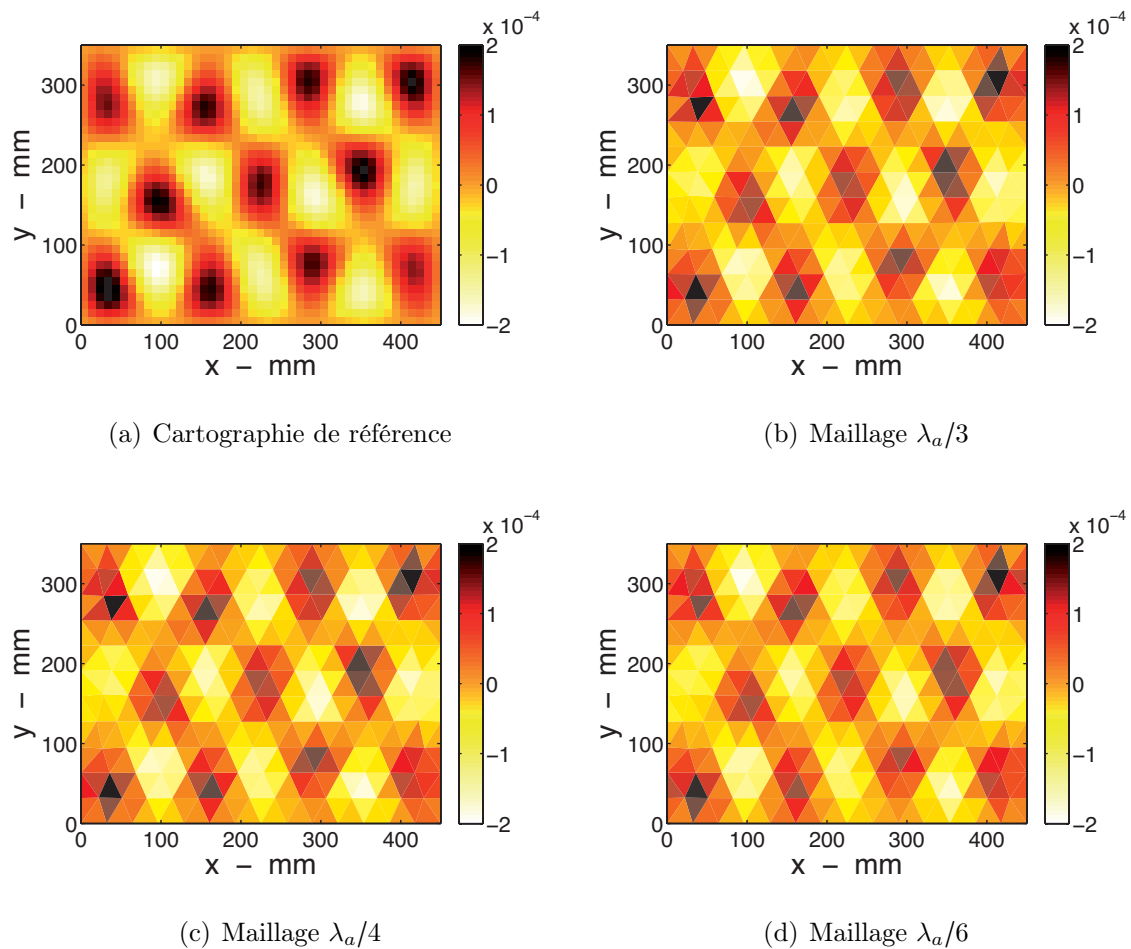


FIGURE 5.5 – Vitesses de références et vitesses identifiées avec les différents maillages de mesure. Cartographies présentées à 3900 Hz

La figure (5.6) ci-contre montre le spectre des erreurs commises sur l'identification des vitesses. Cette erreur est une nouvelle fois calculée au moyen de la relation (5.6). L'étude de ces spectres permet de constater encore une fois que les trois maillages sont équivalents. On observe, lorsque le maillage de mesure s'affine, une légère amélioration de l'identification pour les plus hautes fréquences de notre bande d'étude, cependant la précision apportée par la multiplication du nombre de *patches* ne vaut pas forcément le coût supplémentaire engendré par l'augmentation du nombre de points de mesures.

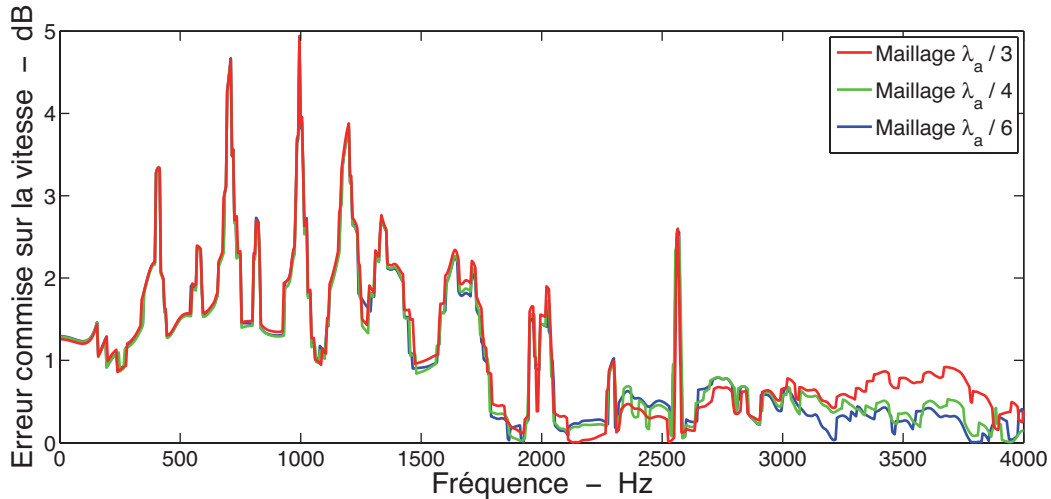


FIGURE 5.6 – Erreurs commises sur les vitesses identifiées en fonction du maillage de mesure

## 5.2 Erreur de positionnement des capteurs

### 5.2.1 Introduction

L'identification de la vitesse de vibration par la méthode iPTF se fait en décomposant le problème sur la base des modes propres de la cavité virtuelle délimitée par l'ensemble des *patches* de mesure et d'identification. Si les *patches* d'identification ont une position déterminée dans l'espace, il n'en est pas autant des *patches* de mesure dont la position est conditionnée par la précision accordée lors de la mesure. Il peut ainsi apparaître une différence entre la cavité virtuelle modélisée et utilisée pour la décomposition et la cavité virtuelle définie par les points de mesures effectifs. Nous avons donc cherché à étudier l'influence que peut avoir cette différence sur le résultat du calcul d'identification.

Nous choisissons de modéliser les erreurs de positions de la façon suivante : pour chacun des points de la surface de mesure, nous définissons trois erreurs de positionnement  $\delta x$ ,  $\delta y$  et  $\delta z$ . Ces trois erreurs sont tirées de façon aléatoire en suivant trois lois normales de moyennes  $\mu = 0$  et dont les écarts types  $\sigma$  peuvent être ajustés de façon indépendante afin de régler la sévérité de l'erreur de positionnement.

$$\delta x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2), \quad \delta y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2), \quad \delta z \sim \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2) \quad (5.7)$$

Ces trois erreurs sont indépendantes entre elles, et chaque triplet  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  est choisi de façon indépendante pour chacun des points de mesure théoriques. Ainsi, nous pouvons modéliser le fait qu'une mesure n'est pas faite exactement à sa position théorique et que l'erreur n'est pas répétée de façon systématique d'une mesure à l'autre : pour chacun des

points  $M_{i_{th}}$  du maillage théorique, nous construisons un point  $M_i$  à partir des erreurs de positionnement dans les trois directions. Le symbole  $\rightsquigarrow$  est utilisé pour exprimer la transformation des coordonnées d'un point lors de la mesure.

$$M_{i_{th}}(x_{i_{th}} ; y_{i_{th}} ; z_{i_{th}}) \rightsquigarrow M_i(x_{i_{th}} + \delta x_i ; y_{i_{th}} + \delta y_i ; z_{i_{th}} + \delta z_i) \quad (5.8)$$

Nous nous intéresserons par la suite à l'erreur absolue entre le point théorique et le point de mesure effectif

$$e = \left\| \overrightarrow{M_{i_{th}} M_i} \right\| = \sqrt{\delta x_i^2 + \delta y_i^2 + \delta z_i^2} \quad (5.9)$$

On suppose enfin que la direction dans laquelle la vitesse est mesurée reste inchangée.

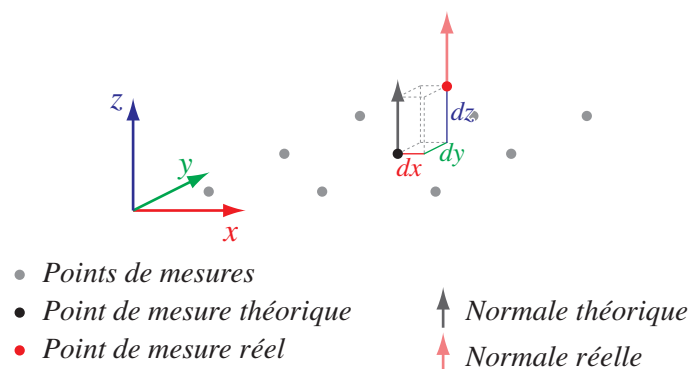


FIGURE 5.7 – Schéma de l'erreur simulée sur la position du capteur pression-vitesse

Nous avons montré au paragraphe §5.1.4 qu'un maillage de la surface de mesure en  $\lambda_a/4$  conduit à un résultat tout à fait acceptable pour l'identification des vitesses de vibrations sur la surface source. C'est donc sur ce maillage que nous nous appuyerons pour étudier l'influence d'erreurs faites dans le positionnement des capteurs pression-vitesse. Nous en modifierons, dans cette étude, les coordonnées des centres de chacun des *patches* qui le constituent de façon plus ou moins importante. Les figures et le tableau présentés sur les deux pages suivantes permettent de présenter et de quantifier la dégradation de la surface de mesure pour les différentes erreurs de positionnement appliquées. La figure (5.8) montre la position théorique dans l'espace de chacun des points de mesure. La figure (5.9) montre quant à elle cette même cavité après la modification la plus importante des coordonnées de chacun de ses points selon l'équation (5.8). Nous constituons également deux autres maillages de mesures à l'instar de celui présenté sur la figure (5.9), avec des erreurs décroissantes qui seront par la suite qualifiées respectivement de *sévères*, *modérées* ou *faibles*. Les histogrammes tracés sur la figure (5.10) dénombrent les points de mesure en fonction de l'erreur  $e$ , présentée dans l'équation (5.9). Ces histogrammes permettent de calculer la valeur moyenne de l'erreur de position dans chacun des trois cas traités. Le

tableau (5.5) résume les caractéristiques de ces trois cas. Il est important de comprendre ici que les erreurs moyennes relevées sont indépendantes de la direction. Ainsi, pour chaque mesure, le capteur est situé dans une sphère centrée sur le point théorique et dont le rayon moyen est égal à l'erreur moyenne indiquée dans le tableau.

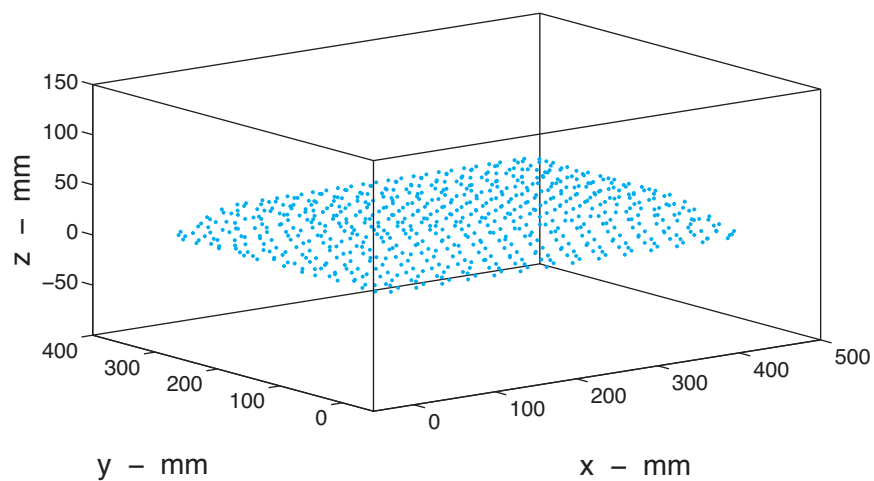


FIGURE 5.8 – Position théorique des points de mesure

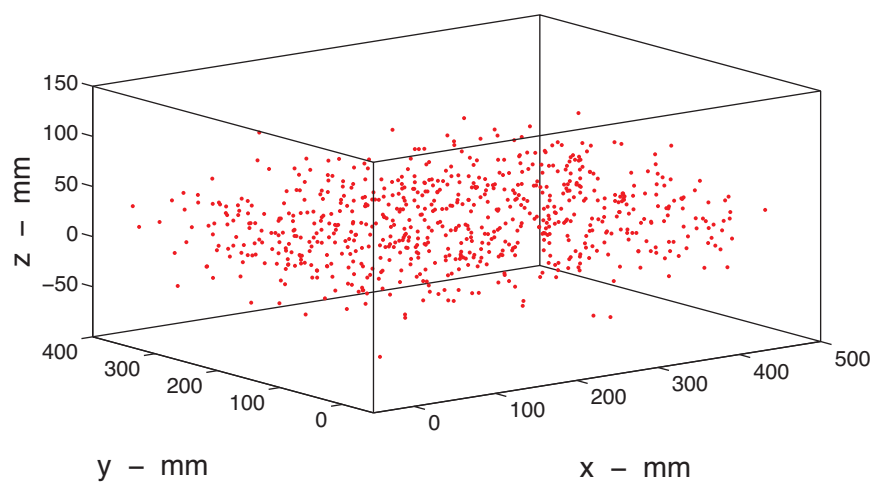


FIGURE 5.9 – Position des points de mesure avec erreur sévère

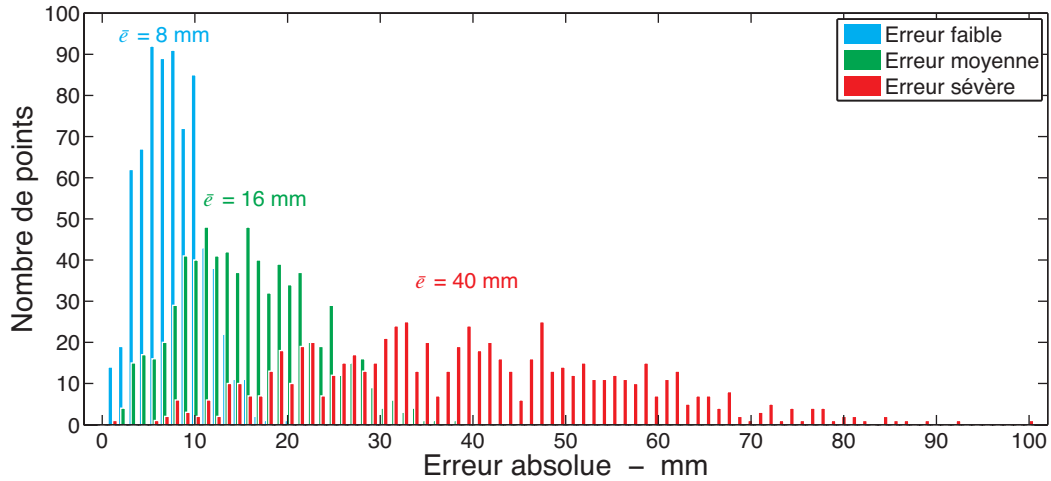


FIGURE 5.10 – Répartition des erreurs de positionnements pour les trois surfaces altérées

Type d'erreur	Paramètres de la loi normale		Erreur moyenne
erreur faible	$\mu = 0$	$\sigma^2 = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$\bar{e} = 8 \text{ mm}$
erreur modérée	$\mu = 0$	$\sigma^2 = 6.25 \cdot 10^{-4}$	$\bar{e} = 16 \text{ mm}$
erreur sévère	$\mu = 0$	$\sigma^2 = 25.00 \cdot 10^{-4}$	$\bar{e} = 40 \text{ mm}$

TABLE 5.5 – Caractéristique des erreurs de positions ajoutées sur les points de la cavité virtuelle de mesure

## 5.2.2 Champ rayonné

Avant de présenter les erreurs commises sur l'identification du champ de vitesses vibratoires, nous nous intéresserons au champ acoustique mesuré et à la comparaison des différentes cartographies du champ rayonné pouvant être obtenues à la suite d'un mauvais positionnement du capteur pression-vitesse. Ce sont en effet ces différents champs qui sont utilisés en paramètres d'entrée de la méthode iPTF pour l'identification de la vitesse de vibration de la source. L'étude de la figure (5.11) permet de constater que l'erreur, en  $dB$ , sur la vitesse quadratique moyenne mesurée reste faible (de l'ordre de  $\pm 1 \text{ dB}$ ) quelle que soit l'erreur commise sur la position des capteurs. Ceci s'explique par le fait que la vitesse quadratique présentée est une moyenne, par fréquence, sur chacun des *patches* constituant la surface. Or, l'erreur de position étant aléatoire, en contre partie de certains *patches* globalement rapprochés de la surface vibrante, il existe d'autres *patches* en proportions équivalentes globalement éloignés de sorte que le niveau global de la vitesse particulière mesurée reste sensiblement constant.

Si l'on s'intéresse maintenant à chacun des *patches* indépendamment par l'intermédiaire des cartographies à  $1900 \text{ Hz}$ , on constate plus aisément l'erreur ajoutée par le mauvais positionnement des capteurs. Afin de faciliter la comparaison de ces champs, nous les rapporterons tous sur la surface théorique mais à l'exception du premier, ils sont

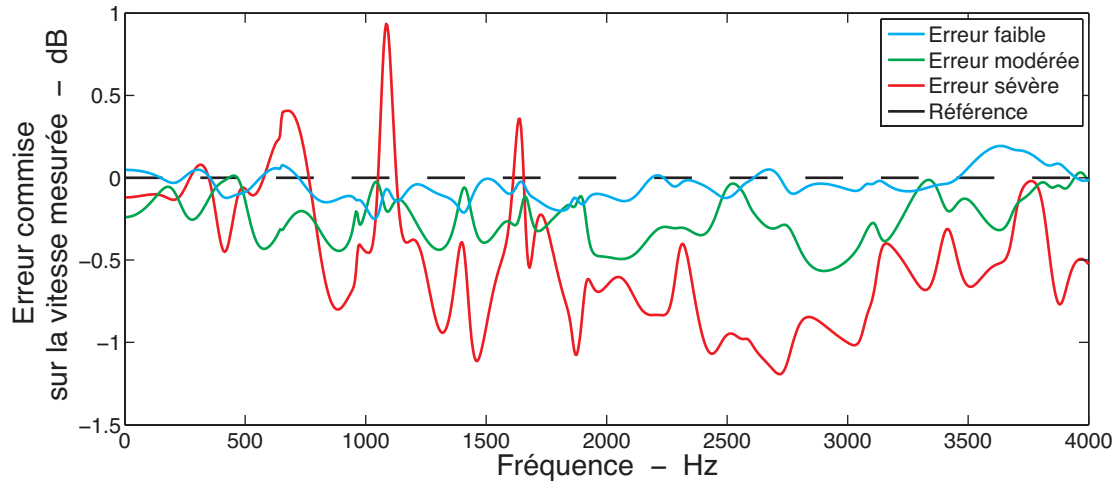
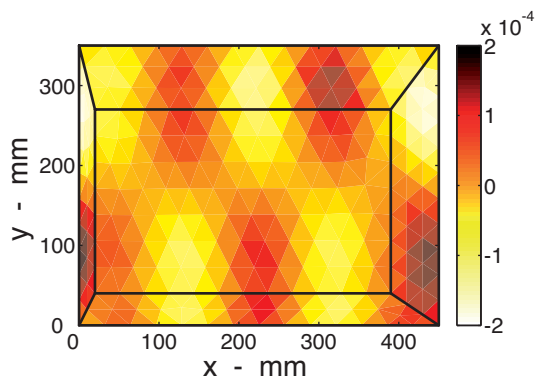


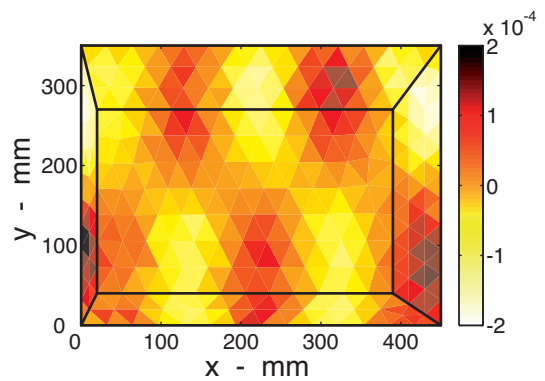
FIGURE 5.11 – Erreurs induites par le mauvais positionnement des capteurs sur la mesure des champs de vitesses rayonnés

en réalité mesurés sur les trois surfaces altérées. Les cartographies de ces quatre champs sont montrées sur la figure suivante. La figure (5.12(a)) représente la cartographie de mesure sans erreur telle que nous l'avons déjà observée. Les figures (5.12(b)), (5.12(c)) et (5.12(d)) montrent les trois cartographies mesurées avec une erreur de plus en plus importante. Conformément à nos attentes, nous pouvons constater que le champ des vitesses mesurées est de plus en plus discontinu et chaotique lorsque l'erreur se fait plus importante.

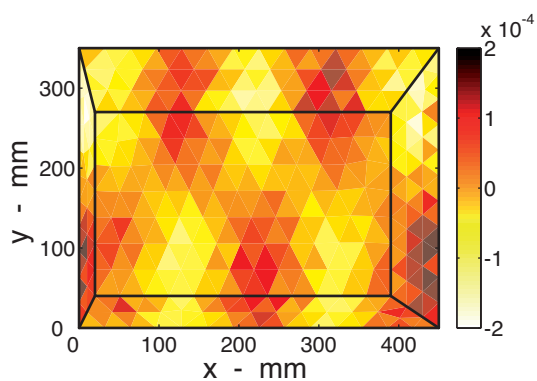




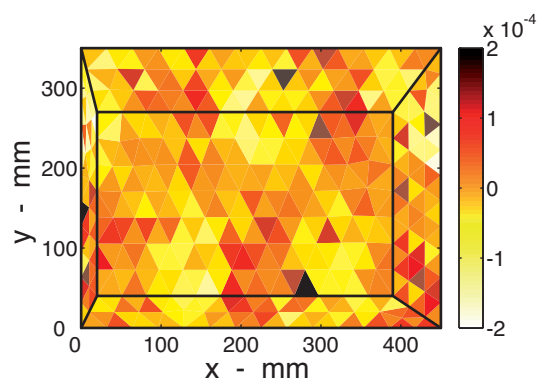
(a) Mesure sans erreur de position



(b) Mesure avec une erreur de position faible



(c) Mesure avec une erreur de position modérée



(d) Mesure avec une erreur de position sévère

FIGURE 5.12 – Mesure du champ de vitesses rayonnées à 1900 Hz

### 5.2.3 Identification des vitesses de vibration

Nous présentons sur la figure suivante les cartographies obtenues par la méthode iPTF pour l'identification des vitesses de vibrations de la plaque. La comparaison des trois figures (5.13(a)), (5.13(b)) et (5.13(c)) permet de constater que l'identification de la vitesse de la source reste très correcte malgré l'erreur de positionnement des capteurs pression-vitesse. On rappelle que l'erreur qualifiée de *modérée* représente un décalage non négligeable de 1.6 cm dans une direction quelconque autour de la position théorique. Ce décalage, bien que très important face aux moyens actuellement disponibles pour assurer le positionnement d'un capteur, ne semble pas préjudiciable pour notre méthode. La figure (5.13(d)) laisse toutefois apparaître l'existence d'une valeur limite pour ce défaut de positionnement. À la fréquence présentée ici, la longueur d'onde des phénomènes acoustiques mesurés par les capteurs pression-vitesse est de 18 cm.

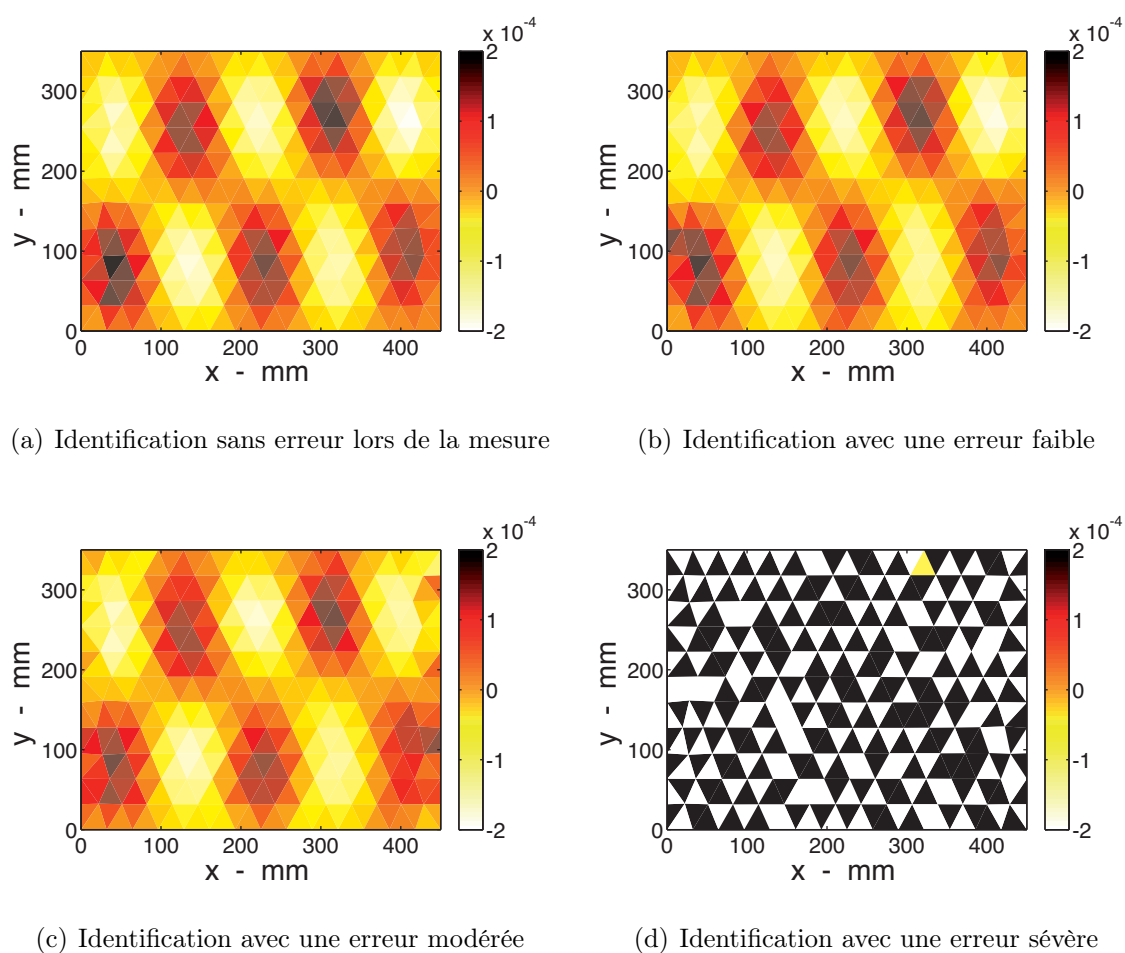


FIGURE 5.13 – Identification du champ de vitesses de la source à 1900 Hz

Ainsi, l'erreur modérée, pour laquelle le décalage est de 1.6 cm conduit à une identification correcte tandis que l'erreur sévère, pour laquelle le décalage de 4.0 cm, conduit à un résul-

tat inexploitable. Il semble donc que le décalage acceptable du capteur lors de la mesure soit limité par la longueur d'onde du phénomène acoustique. Ceci peut se vérifier grâce à la figure suivante sur laquelle nous traçons l'erreur d'identification. On constate alors que

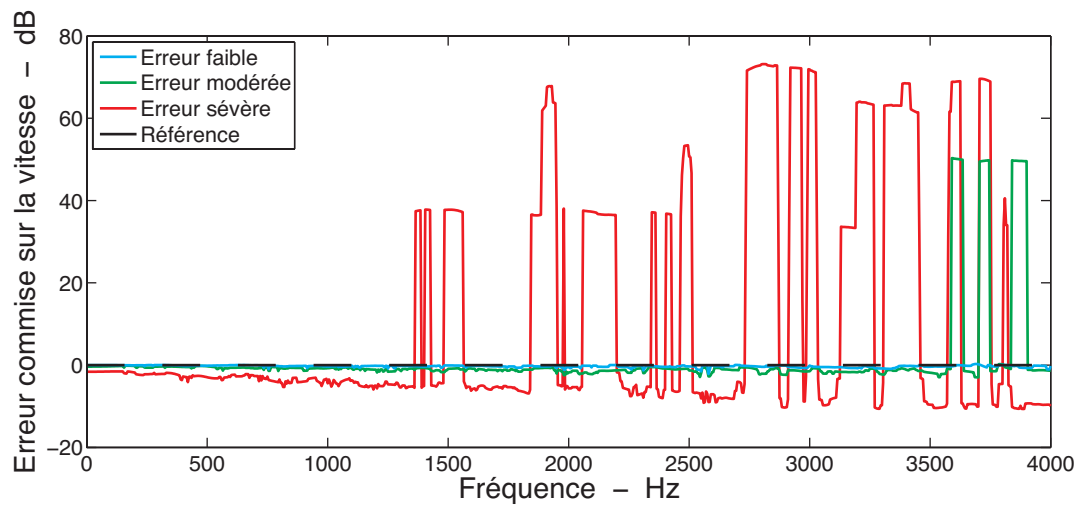


FIGURE 5.14 – Erreur commise sur l'identification de la vitesse de vibration en fonction de l'erreur de positionnement des capteurs

l'identification dans le cas d'une erreur faible est correcte sur toute la bande de fréquence. Si l'on étudie par contre la fréquence à partir de laquelle l'identification devient erronée pour les deux autres cas, on trouve une fréquence de l'ordre de  $1400\text{ Hz}$  pour l'erreur sévère et  $3500\text{ Hz}$  pour l'erreur modérée. Ces fréquences correspondent à des phénomènes acoustiques dont les longueurs d'ondes valent respectivement  $24\text{ cm}$  et  $10\text{ cm}$ . On trouve alors des valeurs qui sont de l'ordre de six fois l'erreur moyenne correspondante.

## 5.3 Influence d'un bruit de mesure

---

### 5.3.1 Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre le comportement de notre méthode face à une autre des difficultés inhérentes à la mesure de champs acoustiques : la présence, lors de toute mesure, de bruit de fond. On regroupe habituellement sous les appellations de *bruit de fond* ou de *bruit de mesure* l'ensemble des bruits ajoutés à un signal et provenant d'origines diverses. Parmi tous ces bruits, le plus important est généralement celui d'origine thermique, provenant de l'agitation des électrons dans les conducteurs électriques [40, 60] et s'ajoutant nécessairement tout au long de la chaîne de mesures dès lors que l'on fait appel à du matériel électronique. On compte également dans le bruit de fond les bruits propres à la mesure d'un champ acoustique. On retrouve, dans cette catégorie de bruit et de façon particulièrement significative, l'influence du champ acoustique environnant qui peut ne pas être maîtrisé parfaitement. On notera par exemple la présence de sources de bruits dans le local de mesure et pouvant prendre une part plus ou moins importante dans les signaux ainsi mesurés. Ces deux erreurs constituent généralement des erreurs décorréélées des phénomènes étudiés qui viennent s'ajouter au signal. D'autres erreurs par contre peuvent être corrélées. Ces erreurs sont plus habituellement des erreurs multiplicatives pouvant par exemple être causées par des erreurs de calibrage des capteurs. Nous précisons par ailleurs que nous travaillons ici avec des signaux complexes. Cette erreur multiplicative peut alors avoir son influence sur l'amplitude du signal comme sur sa phase.

Ainsi, dans ces travaux où nous souhaitons étudier l'influence des différents bruits de mesure dans l'identification des champs de vitesse, de pression et d'intensité à la surface d'un objet, il nous intéresse de pouvoir modéliser de telles erreurs. De la façon la plus générale, et comme cela est suggéré dans les travaux de C. PEZERAT [68], nous pourrions considérer que le bruit de mesure est la distorsion d'un signal exact (noté de façon générale  $\mathcal{X}_{clair}$ ) par deux variables aléatoires gaussiennes, l'une multiplicative, l'autre additive. Ceci est représenté sous forme mathématique dans l'expression (5.10) où l'erreur multiplicative  $\alpha$  ainsi que l'erreur additive  $\eta$  sont deux variables complexes, dont les parties réelle et imaginaire sont tirées aléatoirement en suivant une loi normale.

$$\mathcal{X}_{bruité} = \alpha \cdot \mathcal{X}_{clair} + \eta \quad (5.10)$$

On trouve également dans les travaux de C. PEZERAT [65] l'utilisation d'une erreur de bruit dont seule la part multiplicative est utilisée. Ceci peut se justifier car, comme nous l'avons rappelé en introduction de ce paragraphe, la part additive du bruit est généralement décorrélée du signal mesuré car générée par des phénomènes qui ne sont pas liés au comportement de l'objet étudié. Plusieurs méthodes ont été mises en place pour

supprimer ce type de bruit décorrélé. Parmi les plus importantes, nous citons l'analyse en composantes principales [63, 35] ou le filtrage de WIENER [95].

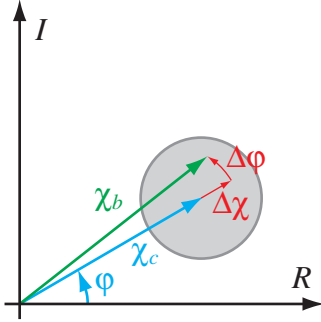


FIGURE 5.15 – Modélisation d'une erreur complexe

Ici, nous utiliserons la part additive ainsi que la part multiplicative mais pour l'explication de la modélisation retenue, nous nous concentrerons uniquement sur la part multiplicative car elle est plus complexe à simuler. C'est donc celle dont nous allons détailler la modélisation. Nous supprimons alors dans l'expression (5.10) le terme  $\eta$  et nous développons chaque variable de façon à l'exprimer en amplitude et phase. Pour cela, l'erreur multiplicative  $\alpha$  est exprimée en fonction du pourcentage  $p$  de la valeur théorique. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{bruité} &= \mathcal{X}_{clair} \cdot (p + 1) \cdot e^{i\Delta\varphi} \\ &= |\mathcal{X}| \cdot e^{i\varphi} \cdot (p + 1) \cdot e^{i\Delta\varphi} \\ &= |\mathcal{X}| \cdot (p + 1) \cdot e^{i(\varphi + \Delta\varphi)}\end{aligned}\quad (5.11)$$

Cette notation permet d'exprimer l'erreur commise en une part de modification d'amplitude et une part d'avance ou de retard de la phase par rapport à la valeur théorique du signal. L'expression (5.11) fait intervenir les deux variables  $p$  et  $\Delta\varphi$  représentant respectivement le pourcentage d'erreur d'amplitude et l'erreur de phase. Ces deux variables sont *a priori* indépendantes mais nous verrons par la suite qu'il est possible de relier  $\Delta\varphi$  à  $p$  compte-tenu de la modélisation retenue pour le bruit que nous souhaitons simuler. Ces deux variables sont des variables aléatoires tirées au hasard en suivant une loi normale

$$\begin{cases} p \sim \mathcal{N}(\mu_p = 0, \sigma_p^2) \\ \Delta\varphi \sim \mathcal{N}(\mu_{\Delta\varphi} = 0, \sigma_{\Delta\varphi}^2) \end{cases}\quad (5.12)$$

Rappelant que  $\Delta\mathcal{X} = \mathcal{X} \cdot p$ , nous pouvons déterminer l'écart-type des mesures

$$\sigma_{\Delta\mathcal{X}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum (|\mathcal{X}| - |\overline{\mathcal{X}}|)^2} = \sqrt{|\mathcal{X}_{clair}|(p + 1) - |\mathcal{X}_{clair}|^2} = |\mathcal{X}_{clair}|p\quad (5.13)$$

Cet écart-type définit un cercle d'erreur dans le plan complexe qui nous permet de représenter  $\sigma_{\Delta\varphi}$  à partir de considérations géométriques (figure 5.16). On obtient ainsi

$$\begin{cases} \sigma_{\Delta\mathcal{X}} = p \cdot |\mathcal{X}_{clair}| \\ \sigma_{\Delta\varphi} = \sin^{-1}(p) \end{cases}\quad (5.14)$$

Tout cela revient alors à considérer que la valeur mesurée est située dans ce cercle

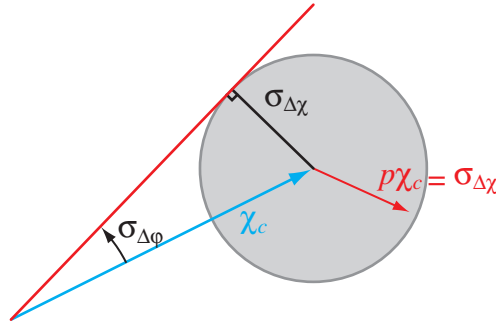


FIGURE 5.16 – Estimation de  $\sigma_{\Delta\chi}$  et  $\sigma_{\Delta\varphi}$

centré sur la valeur théorique, et dont le rayon caractérise la précision du moyen de mesure (figure 5.16). Notons que dans la suite de nos travaux, nous modifierons les valeurs numériques calculées de façon à les détériorer de cette manière.

Les deux paramètres  $\sigma_{\Delta\chi}$  et  $\sigma_{\Delta\varphi}$  permettent de régler la sévérité de l'erreur, c'est-à-dire de régler la précision du capteur simulé. Nous avons choisi de tester trois réglages possibles de l'incertitude de mesure  $p$  allant de 1 % à 3 %. Une erreur de 1 %, soit 0.086 dB, étant communément admise pour un *bon* système de mesure, nous avons souhaité étudier la stabilité de notre méthode au delà d'une *bonne* précision de mesure. Par ailleurs, la méthode iPTF présentée dans cette thèse s'appuie sur les deux informations de pression acoustique et de vitesse particulière pour identifier les champs caractéristiques à la surface de la source. Nous nous sommes donc particulièrement intéressé à déterminer laquelle de ces deux informations est la plus sensible aux bruits. Nous présenterons dans ce chapitre les résultats correspondant aux deux études menées alors que l'erreur a été ajoutée sur la mesure de pression ou sur la mesure de vitesse.

### 5.3.2 Champ rayonné

Nous étudions dans un premier temps l'impact des imprécisions des capteurs sur les mesures faites de pression et de vitesse. La figure (5.17) présente l'erreur faite lors de la mesure des champs de pressions et de vitesses rayonnés dans le cas de l'erreur la plus importante. Nous retrouvons sur cette figure la part additive de l'erreur qui donne à la courbe présentée une valeur moyenne de l'ordre de 0.4 dB. Il est par ailleurs très difficile de mettre en évidence l'influence des erreurs de mesure car les erreurs présentées sont tout à fait négligeables (de l'ordre de  $\pm 0.2$  dB par rapport à la valeur moyenne de l'erreur). Cela peut s'expliquer par le fait que nous présentons ici l'erreur quadratique moyenne. Cette erreur quadratique moyenne est calculée à l'aide de la relation suivante :

$$\epsilon_{mesure} = \left| 10 \times \log_{10} \left( \overline{|\mathcal{X}_{bruité}|^2} \right) - 10 \times \log_{10} \left( \overline{|\mathcal{X}_{clair}|^2} \right) \right| \quad (5.15)$$

dans laquelle le terme  $\mathcal{X}$  peut représenter la pression ou la vitesse. On retrouve donc ici un phénomène équivalent à celui présenté au paragraphe §5.2.2 selon lequel les erreurs étant simulées à l'aide de lois normales, nous retrouvons, sur l'ensemble des points de mesure, une erreur qui peut être négligeable sur l'ensemble du maillage puisqu'elle apporte, pour certains points, une contribution positive tandis que pour d'autres en proportions égales, elle apporte une contribution négative.

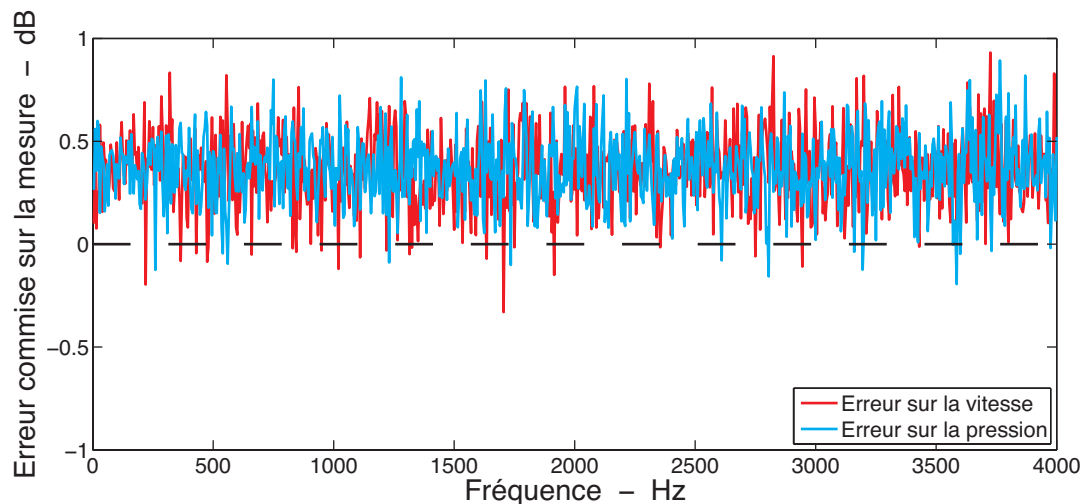
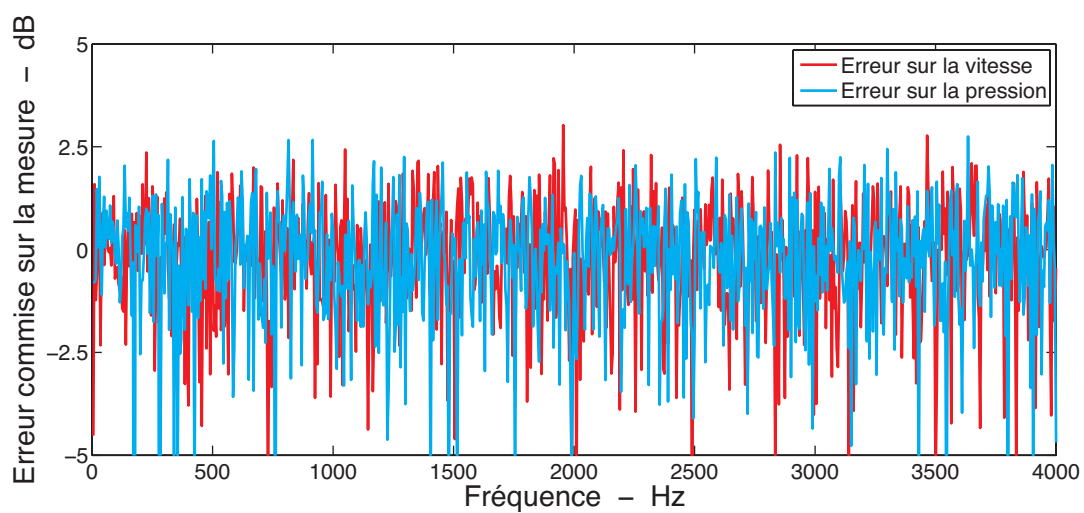


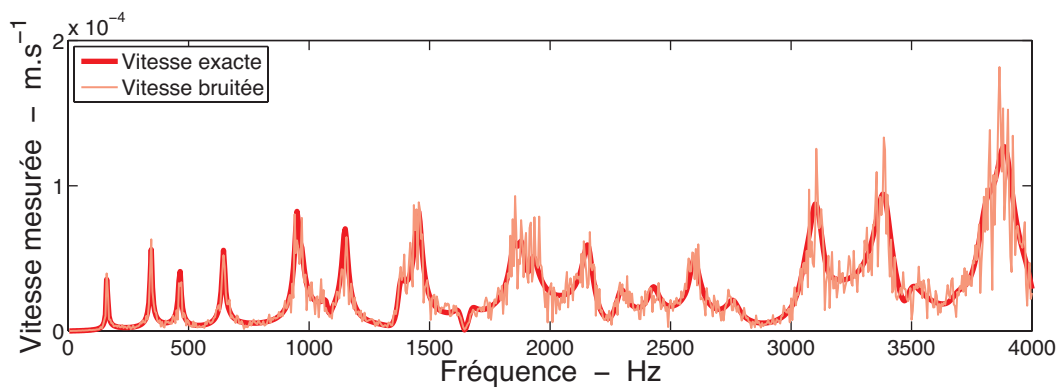
FIGURE 5.17 – Erreur moyenne commise par le système de mesure sur l'estimation de la pression et de la vitesse rayonnées

Nous nous concentrons alors sur la mesure faite en un point particulier choisi aléatoirement parmi tous les points de mesure. L'erreur de mesure en ce point particulier est alors tracée sur la figure (5.18(a)). Cette nouvelle figure permet de constater que l'erreur commise est particulièrement importante ; au delà même des erreurs communément observées pour les moyens de mesures actuels (95 % des fréquences mesurées présentent une erreur de  $\pm 2$  dB par rapport à la valeur théorique). Par ailleurs, nous traçons également sur cette figure les spectres des mesures de pression et de vitesse faites en ce point de mesure. Nous traçons également sur la figure (5.18(b)) la vitesse mesurées exacte et la vitesse mesurées avec bruit. Nous avons choisi ici de les afficher en valeurs brutes plutôt qu'en décibels afin de ne pas fausser l'aperçu que nous pouvons avoir des amplitudes. On constate alors que lorsque la vitesse est faible, l'erreur commise sur la mesure est faible tandis que pour des vitesses importantes, l'erreur commise est plus grande. Ceci montre bien que le bruit modélisé dispose d'une part proportionnelle au signal. L'erreur ainsi modélisée est bien conformes à nos attentes. Nous observerions le même comportement sur les deux courbes de pression.

Si l'on s'intéresse aux cartographies de pressions et de vitesses mesurées, on observe le même phénomène. La valeur de certains *patches* est augmentée tandis que celles d'autres



(a) Erreur commise sur un point par le système de mesure sur l'estimation de la pression et de la vitesse rayonnées



(b) Mesure de la vitesse

FIGURE 5.18 – Étude de la pression et de la vitesse mesurée au point de mesure 257



*patches* est diminuée. Ainsi, à 1900 Hz, nous obtenons, avec les erreurs les plus importantes, les cartographies présentées sur les figures (5.19) et (5.20).

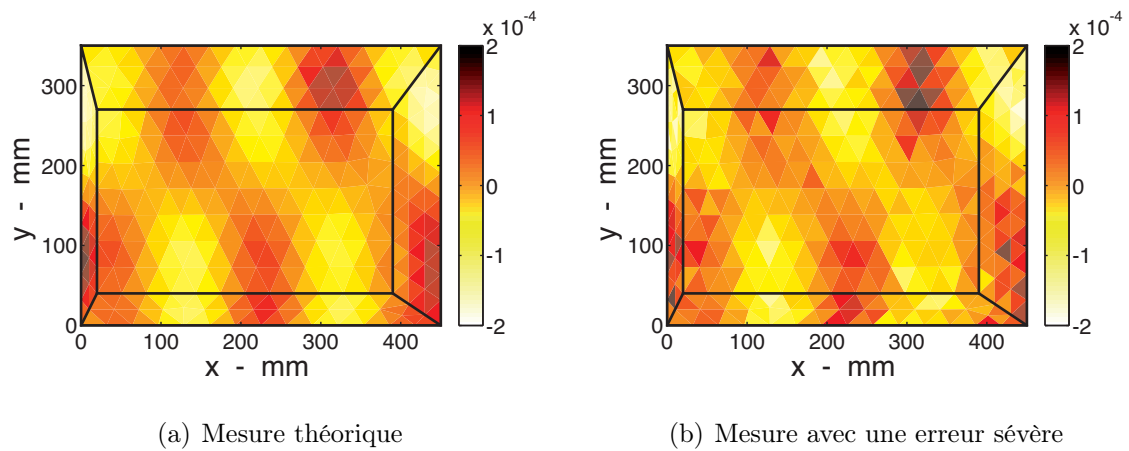


FIGURE 5.19 – Mesure du champ de vitesses rayonnées à 1900 Hz

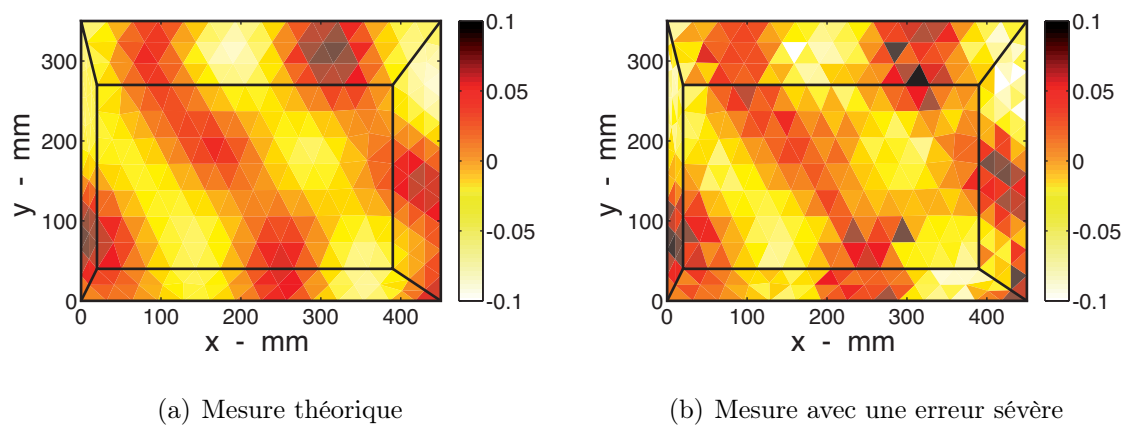


FIGURE 5.20 – Mesure du champ de pressions rayonnées à 1900 Hz

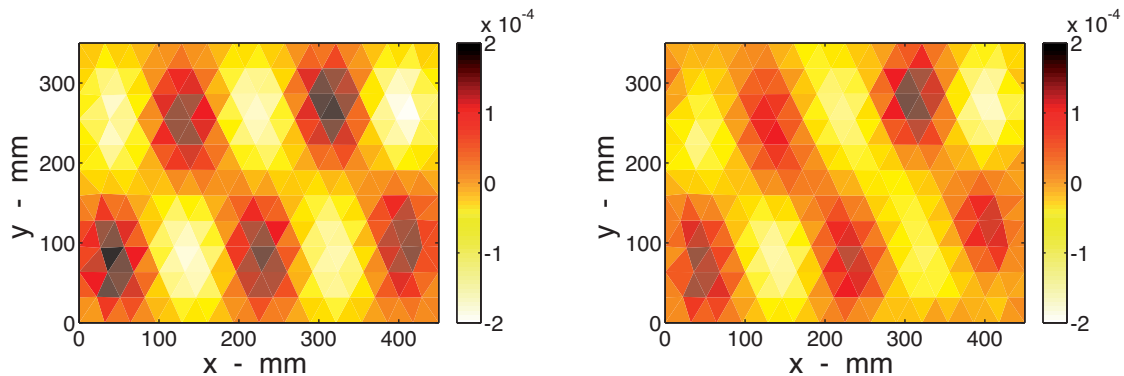
### 5.3.3 Identification des champs de vitesses

Nous nous intéressons maintenant à l'influence que ces erreurs, commises lors de la mesure de la pressions ou de la vitesse, peuvent avoir sur les champs identifiés par la méthode iPTF. Comme précédemment, nous ne présenterons ici que les champs de vitesses identifiés car de ceux-là découlent, par un calcul linéaire, les champs de pressions. Cette identification est possible grâce à la mesure des deux champs de vitesses et de pressions rayonnés par l'objet en vibration. Comme annoncé au paragraphe §5.3.1, nous avons souhaité savoir laquelle de ces deux informations est la plus importante pour une

identification correcte du comportement de la source. Nous présenterons donc dans cette partie les champs de vitesses identifiés d'abord lorsque l'erreur est commise sur la vitesse puis lorsqu'elle est commise sur la pression.

### Erreur sur la mesure de vitesse

Nous étudions dans un premier temps les cartographies des champs identifiés à  $1900\text{ Hz}$ . On constate alors que la localisation des sources se fait aussi bien avec erreur ou sans er-



(a) Identification à partir des vitesses mesurées sans erreur (b) Identification à partir des vitesses mesurées avec une erreur sévère

FIGURE 5.21 – Identification du champ de vitesses de la source à  $1900\text{ Hz}$

reur de mesure. L'amplitude des vibrations est par contre un peu perturbée par l'erreur de mesure de vitesse, ce notamment sur les *patches* situés sur le bord de la plaque. Compte-tenu de la géométrie des maillages de mesure et d'identification, les *patches* de mesure situés sur les bords de la plaque sont très proches de la plaque comparativement à ceux situés sur la surface parallèle à la plaque. Les mesures faites sur ces *patches* ont donc globalement des valeurs plus importantes et sont donc davantage soumis aux erreurs puisque la partie multiplicative de l'erreur y est plus importante. Comme ce sont ces *patches*-là qui contribue à la plupart du champ reconstruit sur la périphérie de la plaque, il est logique que l'erreur d'identification soit plus importante sur les bords.

Nous traçons alors sur la figure (5.22) les spectres de vitesses identifiés avec ou sans erreur commise lors de la mesure de la vitesse. Nous constatons alors que l'erreur commise, bien qu'importante, ne perturbe que très peu l'identification de la vitesse de la source.

### Erreur sur la mesure de pression

Nous étudions maintenant les cartographies des champs identifiés à  $1900\text{ Hz}$  lorsque la mesure de la pression est entachée d'erreur. Comme précédemment, on constate que la localisation des sources se fait très correctement malgré l'erreur de mesure de la pression.

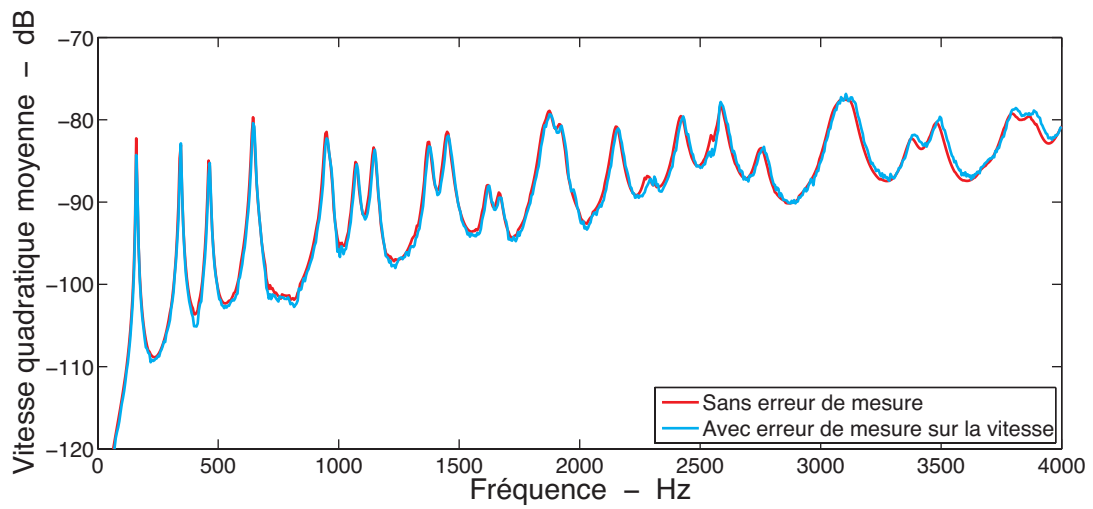
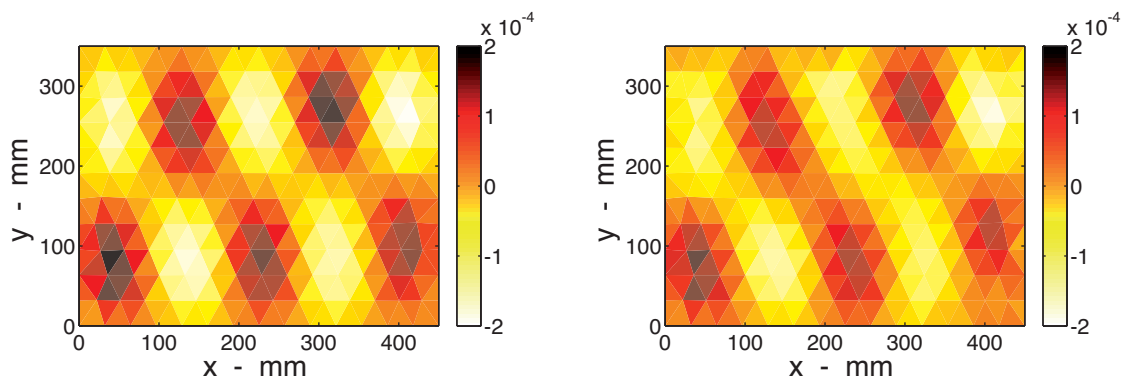


FIGURE 5.22 – Vitesse quadratique moyenne identifiée sur la source, avec ou sans erreur sur la vitesse mesurée



(a) Identification à partir des pressions mesurées sans erreur (b) Identification à partir des pressions mesurées avec une erreur sévère

FIGURE 5.23 – Identification du champ de vitesses de la source à  $1900\text{ Hz}$

L'amplitude des vibrations est également identifiée avec une très légère erreur, notamment, encore une fois, sur les *patches* situés au bord de la plaque pour lesquels l'erreur est a plus importante.

On trace enfin sur la figure (5.24) les spectres de vitesses identifiés avec et sans erreur commise lors de la mesure de la pression. Nous constatons alors qu'au delà de 3000 Hz, la vitesse identifiée n'est plus valide. Ceci semble indiquer une limitation à l'erreur qui peut être commise lors de la mesure de la pression. Cette différence d'importance entre

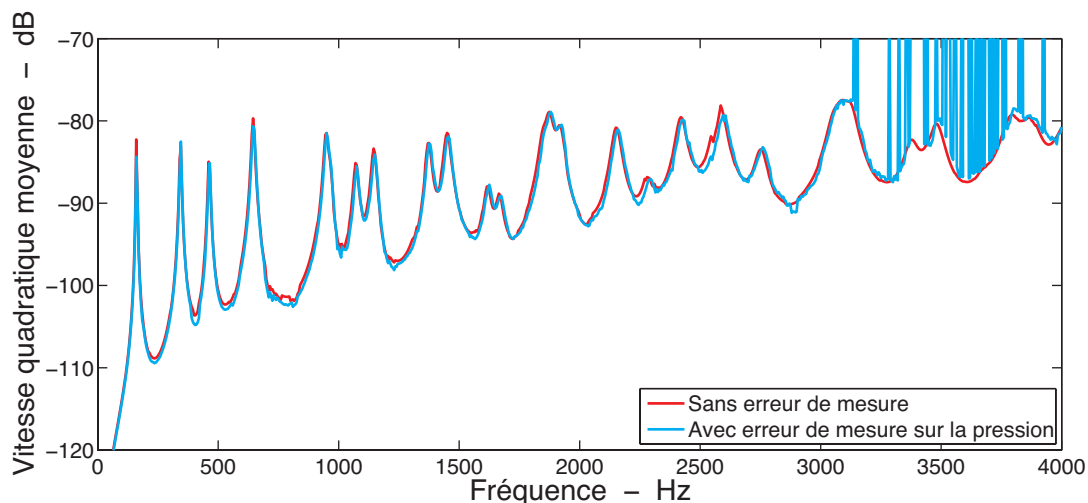
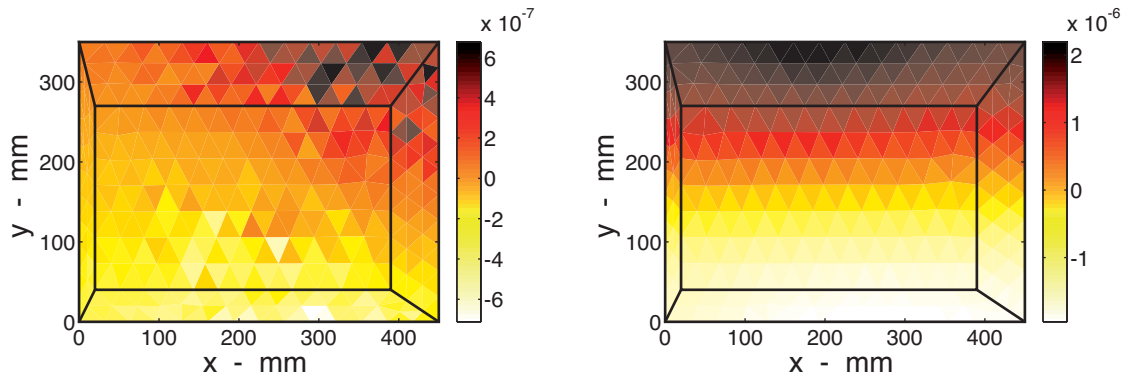


FIGURE 5.24 – Vitesse quadratique moyenne identifiée sur la source, avec ou sans erreur sur la pression mesurée

l'information de pression et l'information de vitesse peut s'expliquer si l'on étudie la contribution de ces deux données dans l'équation de rétropropagation. Nous rappelons ici l'équation (2.41) permettant de calculer la vitesse sur la surface source à partir des mesures de pression et de vitesse.

$$\left\{ \langle V \rangle_{\Sigma_e} \right\} = \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma_e} \right]^{-1} \left( \left\{ \langle P \rangle_{\Sigma'_e} \right\} - \left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e} \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma'_e} \right\} \right) \quad (5.16)$$

Nous pouvons constater dans cette équation qu'il existe un terme de pression  $\left\{ \langle P \rangle_{\Sigma'_e} \right\}$  et un terme de vitesse  $\left[ Z_{\Sigma'_e \leftarrow \Sigma'_e} \right] \left\{ \langle V \rangle_{\Sigma'_e} \right\}$ . On trace donc sur la figure (5.25) la valeur de ces deux termes sur chacun des *patches* de la surface de mesure. Nous pouvons alors constater que la valeur du terme de pression dix fois plus grande que celle du terme de vitesse, de sorte que la vitesse a une influence bien plus faible que la pression. Il semble donc logique qu'une erreur commise lors de la mesure de la vitesse soit peu perceptible sur le résultat tandis qu'une erreur commise lors de la mesure de la pression soit bien plus contraignante. On remarque par ailleurs que le terme de pression est issu directement des mesures (des simulations dans le cas présent) et qu'il est entaché du bruit de mesure.



(a) Valeur du terme de pression

(b) Valeur du terme de vitesse

FIGURE 5.25 – Valeur des termes de pression et de vitesse dans le cas traité, pour l'équation de rétropropagation des champs mesurés

Le terme de vitesse quant à lui est pondéré par la matrice d'impédances acoustiques calculée numériquement. On constate de fait que cette pondération fait disparaître sur la cartographie les discontinuités dues aux erreurs de mesure.

## 5.4 Conclusion

### 5.4.1 Définition des maillages

En conclusion de l'étude faite dans ce chapitre et concernant la finesse des maillages de mesure et d'identification, nous présentons ici une procédure permettant de définir les différents maillages utilisés pour appliquer la méthode iPTF.

Le maillage d'identification est celui sur lequel nous souhaitons obtenir les informations de vitesse, pression ou intensité caractérisant la source. Il est donc important de le choisir par rapport aux phénomènes que l'on souhaite étudier et particulièrement par rapport à leurs fréquences. *La taille des éléments de ce maillage doit nécessairement être plus petite que le quart de la longueur d'onde à la plus haute des fréquences étudiées.* Notre méthode permettant l'identification de données propres à la structure étudiée, *il est nécessaire de considérer ici la longueur d'onde de structure et non la longueur d'onde acoustique* dans le milieu environnant.

La largeur maximale d'un élément permet alors de définir le nombre de *patches* d'identification. C'est à partir de ce nombre de *patches* que la base modale devra être calculée. Nous avons vu que le calcul s'appuie sur une décomposition sur la base des modes propres de la cavité virtuelle constituée par la réunion des surfaces de mesure et d'identification. Cette décomposition limite alors l'indépendance linéaire du système d'équations à

résoudre pour obtenir la vitesse pariétale de la structure. Il est donc primordial d'avoir au moins autant de modes que de points d'identification, soit de *patches* constituant le maillage d'identification. Ceci indique la fréquence minimale jusqu'à laquelle il est donc nécessaire de calculer la base modale de la cavité pour appliquer la méthode correctement.

Le maillage de mesure doit encore être défini mais *sa définition influence peu les résultats calculés*. Il faut alors s'assurer simplement qu'il est composé au moins d'autant de *patches* que la surface d'identification afin de s'assurer que le système d'équations à résoudre dispose d'assez d'équations par rapport au nombre d'inconnues. Par ailleurs, la distance moyenne séparant le maillage de mesure de la surface d'identification limite la précision du calcul en basses et moyennes fréquences. Si la méthode iPTF est appliquée sur une structure très rayonnante, les mesures pourront être faites à une distance relativement importante de la structure. Si, au contraire, l'étude concerne un objet dont le rayonnement est très évanescent, il sera nécessaire de s'approcher davantage de la source afin d'obtenir un résultat correct en dessous de la fréquence de coupure de rayonnement de l'objet étudié. L'influence des ondes évanescents a été abordée rapidement dans ce chapitre ; elle est détaillée au chapitre §6.

#### 5.4.2 Précision apportée dans le positionnement des capteurs

Nous avons montré que l'erreur moyenne commise sur le positionnement des capteurs de pression-vitesse limite la fréquence à laquelle il est possible d'identifier le champ de vitesses de la source sans erreur. La valeur moyenne de cette erreur doit alors rester inférieure au sixième de la longueur d'onde acoustique à la fréquence à laquelle nous souhaitons identifier le comportement de la source. Cette limitation semble peu restrictive compte-tenu des moyens automatiques existant actuellement pour assurer le positionnement d'un capteur. On trouve actuellement des robots capables d'assurer une position avec une précision de l'ordre de quelques micromètres seulement. Si l'on considère même une erreur de positionnement moyenne de l'ordre de  $\pm 5$  mm, il est possible avec la méthode iPTF d'obtenir un résultat valide jusqu'à des fréquences de l'ordre de  $10$  kHz.

#### 5.4.3 Précision des moyens de mesure

L'utilisation d'un *bon* système de mesure permet actuellement de mesurer des grandeurs acoustiques avec une erreur inférieure à 1 %. Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la stabilité de notre méthode pour des erreurs allant jusqu'à 3 %, soit une erreur de  $0.25$  dB sur une mesure. Notre étude n'a pas permis de montrer d'influence significative d'une telle erreur lorsqu'elle est commise sur la vitesse. Si cette erreur est commise sur la pression en revanche, nous avons constaté une fréquence à partir de laquelle l'identification n'est plus correcte. Ce résultat indique qu'une erreur sur la mesure

de la pression est plus pénalisante que la même erreur sur la mesure de la vitesse. Cette observation n'est pas forcément une limitation très gênante pour notre méthode car il est techniquement plus simple d'assurer une mesure de pression qu'une mesure de vitesse. On peut donc considérer que les résultats obtenus ne seront pas perturbés par les erreurs possibles lors des mesures des champs de vitesses et de pressions rayonnées.







## De l'importance des ondes évanescentes

Lorsqu'une surface est soumise à des vibrations, le champ qu'elle rayonne est constitué d'ondes propagatives et d'ondes évanescentes. Le bruit que nous pouvons percevoir est le témoignage de la part propagative du champ émis par la surface considérée. C'est également cette part propagative que nous sommes capables de capter avec un instrument de mesure. La part évanescente du rayonnement, quant à elle, se caractérise par des ondes dont les amplitudes décroissent exponentiellement en fonction de la distance. Ces ondes ne sont alors pas perçues par les instruments de mesure au delà de quelques centimètres, voire, selon leur fréquence, à quelques millimètres seulement de la source.

La méthode iPTF que nous présentons dans cette thèse s'appuie sur la mesure d'un champ acoustique pour déterminer le comportement de la source de vibration. Une estimation précise du comportement de l'objet étudié n'est possible que si le champ qu'il rayonne peut, lui aussi, être mesuré précisément. Or la présence d'ondes évanescentes dans le champ rayonné par l'objet peut conduire à une limitation de notre méthode comme de toutes les méthodes basées sur la mesure d'un champ acoustique. Nous nous sommes donc intéressés de façon détaillée à l'influence des ondes évanescentes sur l'estimation, par la méthode iPTF, du comportement vibratoire d'une structure et nous présentons les résultats de cette étude dans ce chapitre. Cette étude s'appuie sur l'analyse théorique du rayonnement d'une plaque bafflée simplement appuyée.

Nous précisons par ailleurs que, par convention, dans les relations suivantes, un signe positif dans un terme  $e^{+ikx}$  représente une onde se propageant dans la direction des  $x$  croissants.

## 6.1 Rayonnement d'une plaque

---

L'étude faite ici s'appuie sur les notations utilisées dans l'annexe C. Cette annexe rappelle la définition du facteur de rayonnement pour une plaque infinie. Nous nous intéressons ici au détail de l'expression du facteur de rayonnement pour le cas des ondes propagatives ou des ondes évanescentes.

### 6.1.1 Pose du problème de rayonnement

Pour plus de lisibilité, nous rappelons ici les équations établies à l'annexe C. Nous sommes donc en présence de deux équations d'ondes et d'une équation de continuité. Nous rappelons dans ce paragraphe les formulations retenues. Il est important de signaler que nous ne présenterons pas le détail des calculs donnant le rayonnement d'une plaque dans toute leur généralité. Nous nous contenterons en effet de les exprimer avec les simplifications permises dans notre cas.

#### Équation des vibrations mécaniques de la plaque

Les vibrations mécaniques de la plaque vérifient l'équation

$$D \nabla^4 w(x, y) - \omega^2 w(x, y) \rho h = 0 \quad (6.1)$$

qui a pour solution

$$w^+(x, y) = W^+ e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (6.2)$$

Dans ce premier cas, l'équation de dispersion s'écrit

$$k_f^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_0 h}{D}} = k_x^2 + k_y^2 \quad (6.3)$$

#### Équation des vibrations acoustiques dans l'air au voisinage de la plaque

Les vibrations acoustiques sont régies par l'équation de HELMHOLTZ

$$\nabla^2 p(x, y, z) + k^2 p(x, y, z) = 0 \quad (6.4)$$

qui a pour solution

$$p(x, y, z) = p(x, y, z = 0) \cdot e^{i k_z z} \quad (6.5)$$

L'équation de dispersion s'écrit, dans ce second cas

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (6.6)$$

### Condition de continuité des vitesses mécaniques et acoustiques sur la surface

La condition de continuité des vitesses mécaniques et acoustiques impose une relation entre la pression acoustique  $p(x, y, z = 0)$  et la vitesse normale de la plaque  $w(x, y)$

$$\left. \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \omega^2 \rho_0 w(x, y) \quad (6.7)$$

En utilisant la solution de l'équation de HELMHOLTZ (6.4), cette dernière équation donne successivement

$$p(x, y, 0) [ik_z] = \omega^2 \rho_0 w(x, y) \quad (6.8)$$

et

$$p(x, y, z) = p(x, y, 0) \cdot e^{ik_z z} = -i \frac{\omega^2 \rho_0 w(x, y)}{k_z} \cdot e^{ik_z z} \quad (6.9)$$

Dans l'hypothèse des fluides légers, l'équation de dispersion la plus générale peut se simplifier et conduit à deux types de solutions :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_f^2} \quad (6.10a)$$

ou

$$k_z = \sqrt{k^2 + k_f^2} \quad (6.10b)$$

En introduisant ces deux résultats dans l'expression de la pression (C.20) on obtient les deux équations suivantes, régissant la pression :

$$p(x, y, z) = -i \frac{\omega^2 \rho_0 w(x, y)}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} \cdot e^{i\sqrt{k^2 - k_f^2} z} \quad (6.11a)$$

et

$$p(x, y, z) = -i \frac{\omega^2 \rho_0 w(x, y)}{\sqrt{k^2 + k_f^2}} \cdot e^{i\sqrt{k^2 + k_f^2} z} \quad (6.11b)$$

## 6.1.2 Résolution du problème et calcul du facteur de rayonnement

Nous nous attachons maintenant à la résolution des deux équations (6.11a) et (6.11b).

### Premier type de solution : étude de l'équation (6.11a)

**Cas 1 :  $k > k_f$ , ondes propagatives** Si  $k > k_f$ , les ondes ci-dessus sont propagatives. L'onde rayonnée est une onde plane dont la direction est définie par le vecteur d'onde  $\vec{k}$  dont la direction avec l'axe  $\vec{z}$  perpendiculaire à la plaque fait un angle  $\theta$  donné par

$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = \sqrt{k^2 - k_f^2} = k \cos \theta \quad (6.12)$$

soit

$$\theta = \cos^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{k_f^2}{k^2}} \right) \quad (6.13)$$

Le facteur de rayonnement se calcule maintenant à partir de l'équation (C.29) faisant intervenir l'impédance de rayonnement  $Z_r$ . Celle-ci a été calculée précédemment et sa valeur est donnée en (C.25). On obtient ainsi, pour le calcul du facteur de rayonnement

$$\begin{aligned} \sigma &= \Re \left[ \frac{Z_r}{\rho_0 c} \right] = \Re \left[ \frac{\omega \rho_0}{k_z} \frac{1}{\rho_0 c} \right] = \Re \left[ \frac{k}{k_z} \right] \\ &= \Re \left[ \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.14)$$

Nous sommes ici dans le cas où  $k > k_f$  et le terme sous le radical est positif. le facteur de rayonnement est donc un nombre réel et l'écriture précédente peut se simplifier

$$\sigma = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} \quad (6.15)$$

Nous souhaitons maintenant exprimer le facteur de rayonnement en fonction de la pulsation. Nous commençons donc par réorganiser ce dernier résultat

$$\sigma^2 = \frac{k^2}{k^2 - k_f^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{1}{1 - \frac{k_f^2}{k^2}} \quad (6.16)$$

Les relations (6.3) et (6.6) vont maintenant nous permettre d'exprimer le terme  $k_f^2/k^2$  en

fonction de la pulsation

$$\frac{k_f^2}{k^2} = \omega \sqrt{\frac{\rho_0 h}{D}} \cdot \frac{c^2}{\omega^2} = \frac{1}{\omega} \times c^2 \sqrt{\frac{\rho_0 h}{D}} \quad (6.17)$$

On définit alors une pulsation critique

$$\omega_c = c^2 \sqrt{\frac{\rho_0 h}{D}} \quad (6.18)$$

Notons que cette pulsation critique correspond au cas limite où  $k_z = 0$ , donc au cas où l'onde de pression se propage dans le plan de la surface. L'équation (6.17) montre en effet que l'égalité  $\omega = \omega_c$  entraîne  $k = k_f = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . En d'autres termes, la composante perpendiculaire à la surface du vecteur d'onde est nulle et sa composante parallèle à la surface  $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k^2 \sin^2 \theta$  prend sa valeur maximale donnée par  $\sin \theta = 1$  (nous verrons par la suite que les ondes évanescentes correspondent à des valeurs de  $\sin \theta > 1$ )

Nous pouvons alors écrire

$$\frac{k_f^2}{k^2} = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (6.19)$$

et

$$\sigma = \mathcal{R}e \left[ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_f^2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c}{\omega}}} \quad (6.20)$$

Cette nouvelle écriture du facteur de rayonnement nous permet maintenant de mettre en évidence son évolution en fonction de la pulsation. Le cas étudié en ce moment ( $k > k_f$ ) correspond, en terme de pulsation, au cas où  $\omega > \omega_c$ . Cette expression du facteur de rayonnement montre que les ondes progressives n'existent que pour des pulsations  $\omega$  supérieures à la pulsation critique  $\omega_c$ .

**Cas 2 :  $k < k_f$ , ondes évanescentes** Si  $k < k_f$ , le radical présent dans l'exponentielle de l'équation (6.11a) est négatif et s'écrit donc  $i\sqrt{k_f^2 - k^2}$ . En utilisant l'équation (6.13) on voit qu'il n'y a pas dans ce cas de valeur réelle de  $\theta$  et on est ainsi conduit au résultat

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{k_f^2}{k^2}\right)} = \frac{k_f}{k} > 1 \quad (6.21)$$

Ce cas pour lequel  $\sin \theta$  est donc supérieur à 1 correspond aux ondes évanescentes. Nous nous trouvons ainsi en deçà de la pulsation critique  $\omega_c$  et nous avons

$$k_z^2 = k^2 - k_f^2 < 0 \quad (6.22)$$

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_f^2} = \pm i \sqrt{k_f^2 - k^2} \quad (6.23)$$

Le terme de propagation suivant  $\vec{z}$  de l'onde s'écrit alors  $e^{\pm \sqrt{k_f^2 - k^2} z}$  et ne correspond plus à un terme propagatif. L'onde de pression ne peut alors plus se propager que dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Naturellement, dans ce terme exponentiel, seul le signe négatif correspond à une situation physique puisque dans le cas contraire l'amplitude de l'onde de pression croîtrait indéfiniment en s'éloignant de la plaque. Avec le signe négatif, l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement dans la direction  $\vec{z}$ . Ces ondes sont appelées « ondes évanescentes ». Leur décroissance suivant l'axe  $\vec{z}$  est d'autant plus rapide que la valeur de  $\sqrt{k_f^2 - k^2}$  est grande. Pour ces ondes, le terme  $Z_r / \rho_0 c$  devient

$$\frac{Z_r}{\rho_0 c} = \frac{-ik}{k_z} \quad (6.24)$$

Le facteur de rayonnement (eq.C.29) se trouve donc nul puisqu'il ne fait intervenir que la partie réelle de cette valeur.

$$\sigma = \Re \left[ \frac{Z_r}{\rho_0 c} \right] = \Re \left[ \frac{-ik}{k_z} \right] = 0 \quad (6.25)$$

Par analogie avec le cas précédent, les ondes évanescentes existent à des pulsations  $\omega$  inférieures à la pulsation critique  $\omega_c$ .

## Second type de solution : étude de l'équation (6.11b)

Cette solution correspond à des ondes propagatives. Elles sont générées par des ondes de flexion évanescentes dans les directions  $\vec{x}$  ou  $\vec{y}$  qui existent dans le champ des excitations mécaniques. Par analogie avec l'expression (6.20), le facteur de rayonnement des ondes solution de l'équation (6.11b) a la valeur suivante :

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c}{\omega}}} \quad (6.26)$$

### 6.1.3 Représentation du facteur de rayonnement

La figure (6.1) représente le facteur de rayonnement des différentes ondes rayonnées par la plaque.

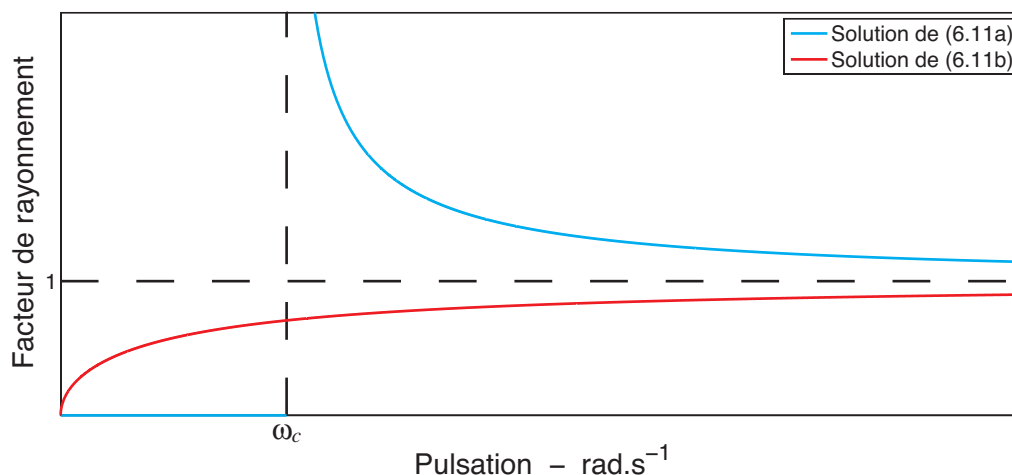


FIGURE 6.1 – Facteur de rayonnement  $\sigma$  pour les ondes de flexion solutions des équations (6.11a) et (6.11b).

La courbe bleue représente le facteur de rayonnement des ondes solutions de l'équation (6.11a). Ces ondes sont créées par une vibration propagative de flexion de la plaque dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Elles sont rayonnantes pour des pulsations supérieures à la pulsation critique  $\omega_c$  et ont alors un facteur de rayonnement (6.20) supérieur à 1. Pour des pulsations inférieures à la pulsation critique  $\omega_c$ , elles sont *non rayonnantes* et ont un facteur de rayonnement (6.25) nul. Ceci peut s'expliquer par la façon dont le facteur de rayonnement est défini. À partir de l'expression (6.14), pour des pulsations inférieures à la pulsation critique, le terme  $k_z$  devient imaginaire pur et la partie réelle du rapport  $k/k_z$  est nulle.

La courbe rouge représente le facteur de rayonnement des ondes solutions de l'équation (6.11b). Ces ondes sont créées par une vibration évanescence de flexion de la plaque dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Elles sont rayonnantes pour toutes les pulsations et ont un facteur de rayonnement (6.26) inférieur à 1.

## 6.2 Définition de la profondeur de pénétration des ondes évanescentes

L'expression (6.11a) nous permet d'exprimer la pression en fonction de la pulsation. Nous pouvons de la même manière exprimer la vitesse particulière obtenue à partir de



(C.17) en fonction de la pulsation.

Nous représentons alors sur la figure (6.2) l'allure des spectres de pressions et de vitesses rayonnées, ce pour toute la gamme de fréquences considérée. Il est important de préciser ici que ces courbes ne représentent que l'allure de la pression et de la vitesse rayonnées. Elles sont affichées à un coefficient multiplicateur près afin de faciliter leur visualisation.

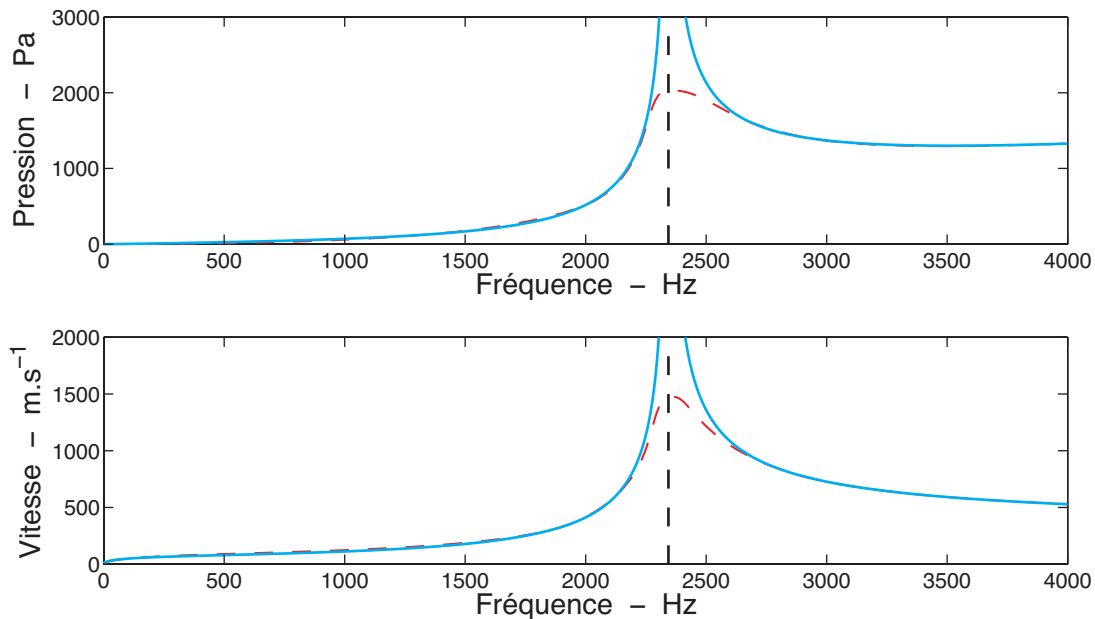


FIGURE 6.2 – Variation de la pression (en haut) et de la vitesse (en bas) en fonction de la fréquence. *trait plein : cas théorique - trait discontinu : cas réel avec simulation d'un amortissement*

Nous avons tracé sur cette figure, en trait plein, les courbes théoriques. Celles-ci ne sont pas définies à la fréquence critique et y présentent une tangente verticale. Dans la pratique, l'amortissement présent dans tout système permet d'éviter cette divergence et nous en avons rendu compte en traçant en pointillé l'allure des courbes obtenues si nous avons considéré un amortissement dans le calcul de la pression et de la vitesse.

Ces courbes montrent bien que dans la partie évanescence du spectre (pour des fréquences inférieures à la fréquence critique  $f_c = 2342 \text{ Hz}$ ) la pression et la vitesse engendrées par les ondes évanescentes ne sont pas nulles et peuvent donc être détectées. Pour étudier le poids de ces ondes dans le signal nous procéderons comme on le fait habituellement en physique lorsque l'on a affaire à des exponentielles (charge ou décharge d'un condensateur, désintégration radioactive, etc.) D'un point de vue mathématique, l'exponentielle n'est jamais nulle aussi loin que l'on soit de la surface. Expérimentalement ce n'est évidemment pas le cas puisqu'un détecteur n'est jamais infiniment sensible à la

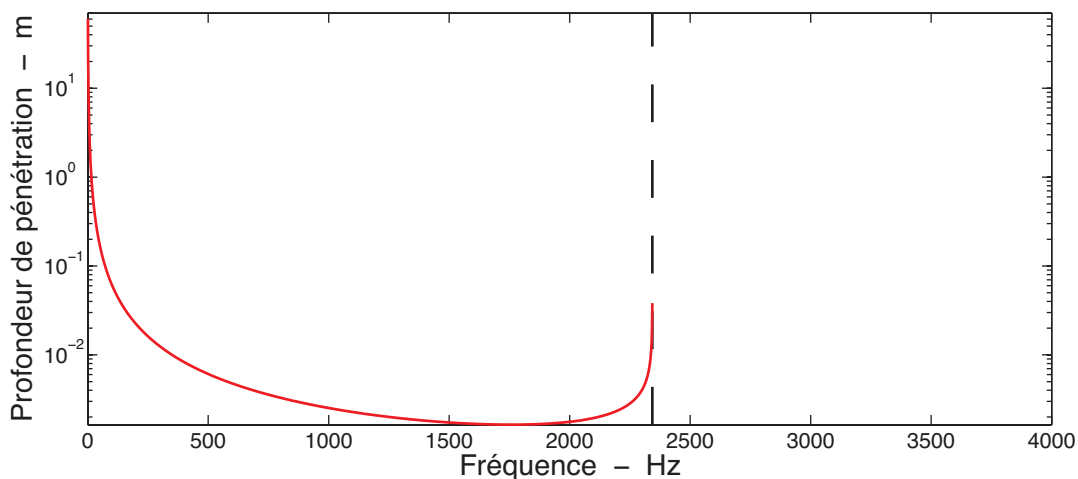


FIGURE 6.3 – Profondeur de pénétration des ondes en basse fréquence

grandeur mesurée. Dans de tels cas, on se fixe une référence correspondant à la détection d'un certain pourcentage de la grandeur mesurée. Nous définissons ainsi une profondeur de pénétration  $dp$  des ondes évanescentes telle que le facteur exponentiel puisse s'écrire  $e^{-z/dp}$ . Nous avons donc

$$dp = \frac{1}{\sqrt{k_f^2 - k^2}} = \frac{1}{\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega} - 1}} \quad (6.27)$$

La profondeur de pénétration  $dp$  correspond ainsi à la distance  $z$  pour laquelle l'amplitude est divisée par  $e = 2.718$ . En d'autres termes, elle représente la distance pour laquelle l'exponentielle prend la valeur  $e^{-1}$ . La figure (6.3) montre ces variations en fonction de la fréquence. Nous voyons que les ondes de très basses fréquences peuvent être captées très loin de la plaque. Par contre, leur possibilité de détection décroît exponentiellement lorsque la fréquence augmente et au delà de quelques centaines de Hertz un éloignement de dix centimètres ne permet déjà plus de prendre en compte les ondes évanescentes rayonnées. À partir de la valeur  $\omega = \omega_c/2$ , toutefois, la profondeur de pénétration se remet à croître pour devenir maximale pour  $\omega_c$ . Dans la zone d'évanescence du spectre, il faut donc s'attendre à ce que les ondes de fréquences basses ainsi que les ondes de fréquences proches de  $\omega_c$  soient mieux captées que les ondes de fréquences moyennes. Ce résultat est bien exprimé par le facteur  $e^{-z/dp}$  qui simule la part captée du champ rayonné. Ce facteur multiplicatif représente cet effet par la courbe de la figure (6.4). Cette figure montre aussi, que, pour des fréquences supérieures à la fréquence critique  $\nu > \nu_c$ , donc pour des ondes propagatives, la totalité du champ rayonné peut théoriquement être détecté.

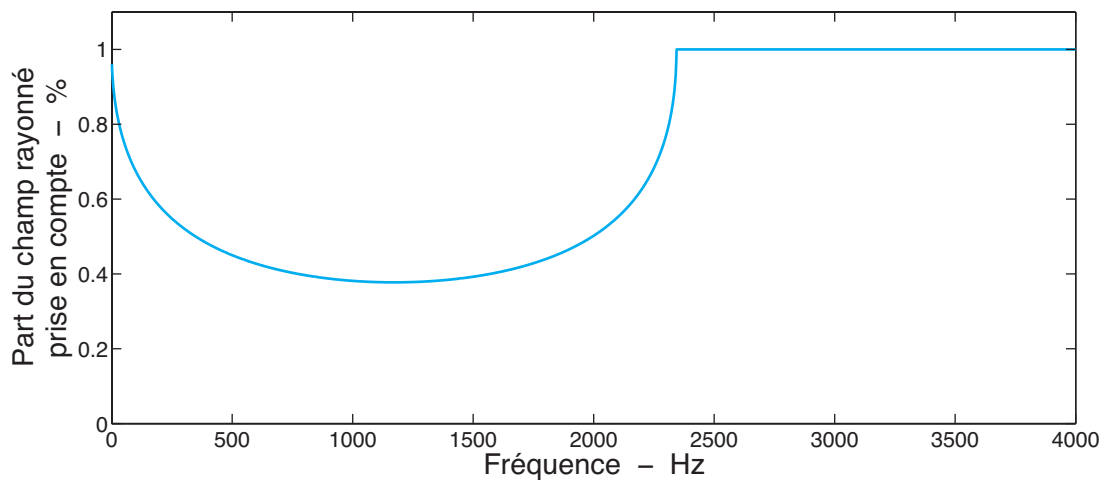


FIGURE 6.4 – effet du facteur exponentiel sur la mesure de pression ou de vitesse en fonction de la fréquence

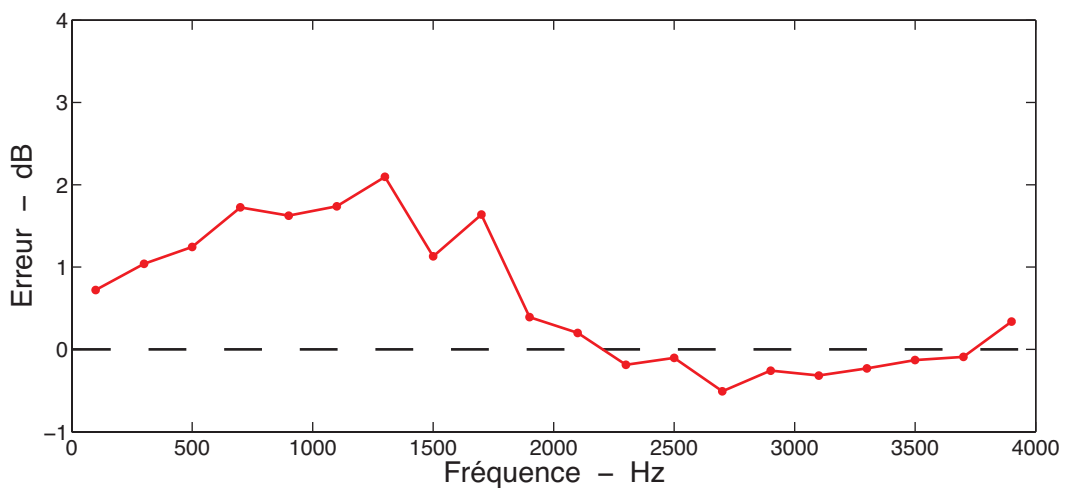


FIGURE 6.5 – Erreur, moyennée par bande de fréquences, commise sur la vitesse

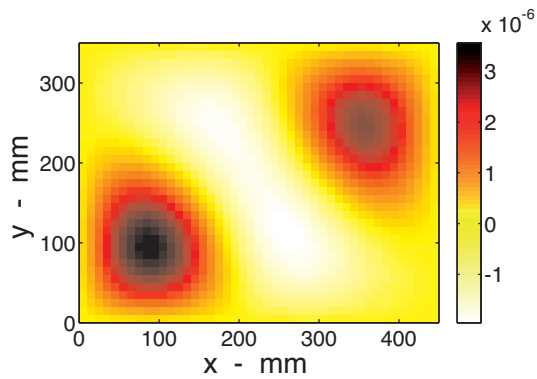
## 6.3 Conséquence de la non prise en compte du champ évanescent

---

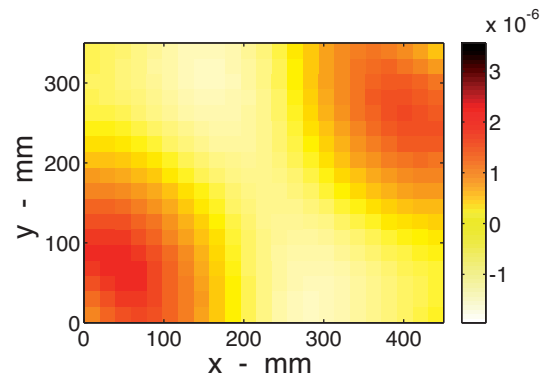
Nous rappellerons dans un premier temps les résultats observés dès le chapitre §3 sur les spectres identifiés de vitesse et de pression. Ainsi, nous avons trouvé, en moyennant par bandes de fréquences de  $200\text{ Hz}$  l'erreur commise sur la vitesse lors de l'identification, la courbe qui est à nouveau représentée ici sur la figure (6.5). On constate que cette erreur est particulièrement importante pour des fréquences situées entre  $f = 0$  et  $f = f_c = 2342\text{ Hz}$ , donc dans la partie évanescente du spectre ; de plus l'erreur décroît quand on s'approche des limites de l'intervalle  $(0, 2342)$  pour lesquels la profondeur de pénétration tend vers l'infini. Si on compare ce résultat à celui présenté sur la figure (6.4) et simulant la part captée du champ rayonné, on constate que l'erreur est d'autant plus grande que la part captée sur champ rayonné est faible. On rappelle qu'au delà de la fréquence critique de  $2342\text{ Hz}$  le champ est intégralement rayonnant. Ceci correspond à une erreur très faible sur la vitesse identifiée (moins de  $0.5\text{ dB}$ ). La méthode iPTF est donc limitée par la mesure dans le sens où la distance moyenne séparant la surface de mesure de la surface source conditionne la part du champ captée dans les fréquences où il est principalement évanescent et où il décroît donc exponentiellement quand on s'éloigne de la plaque. Dans la méthode présentée ici il n'existe pas de correction apportée pour corriger l'influence de la perte d'information engendrée par la non prise en compte des ondes évanescentes.

Au delà de cette seule erreur dans les niveaux de vitesse identifiés, nous avons étudié la différence entre le champ rayonné par les vitesses de référence et le champ rayonné par les vitesses identifiées. On présente donc sur la figure (6.6) les informations suivantes :

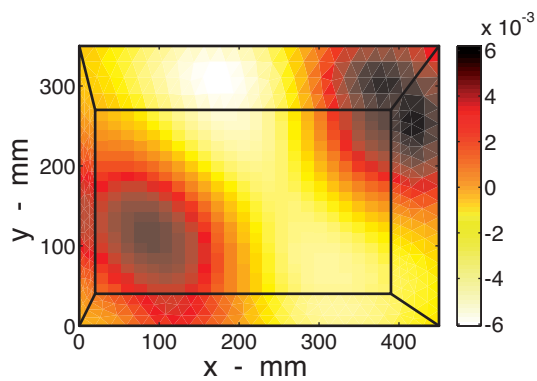
- cartographie du champ de vitesse pariétale de référence ;
- cartographie du champ de vitesse pariétale identifié par la méthode iPTF ;
- cartographie du champ de pression rayonné par le champ de vitesse de référence ;
- cartographie du champ de pression rayonné par le champ de vitesse identifié ;
- cartographie du champ de vitesse rayonné par le champ de vitesse de référence ;
- cartographie du champ de vitesses rayonné par le champ de vitesse identifié.



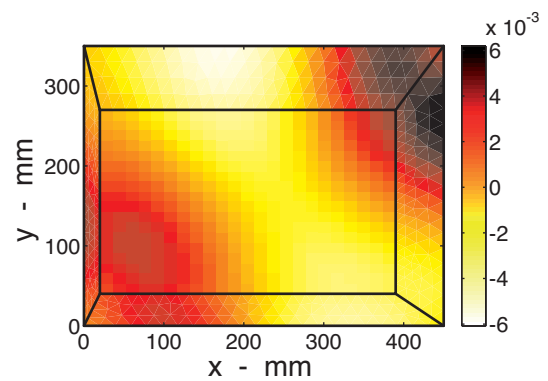
(a) Cartographie du champ de vitesses pariétales de référence



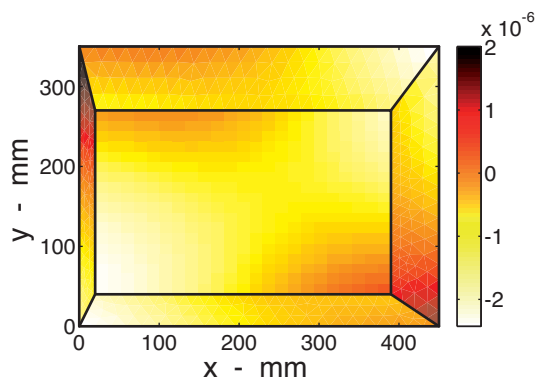
(b) Cartographie du champ de vitesses pariétales identifié par la méthode iPTF



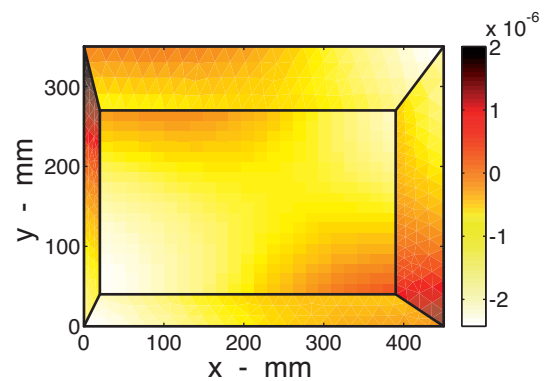
(c) Cartographie du champ de vitesses rayonné par le champ de vitesse de référence ( $z = 4.5cm$ )



(d) Cartographie du champ de vitesses rayonné par le champ de vitesse identifié ( $z = 4.5cm$ )



(e) Cartographie du champ de vitesses rayonné par le champ de vitesse de référence ( $z = 20cm$ )

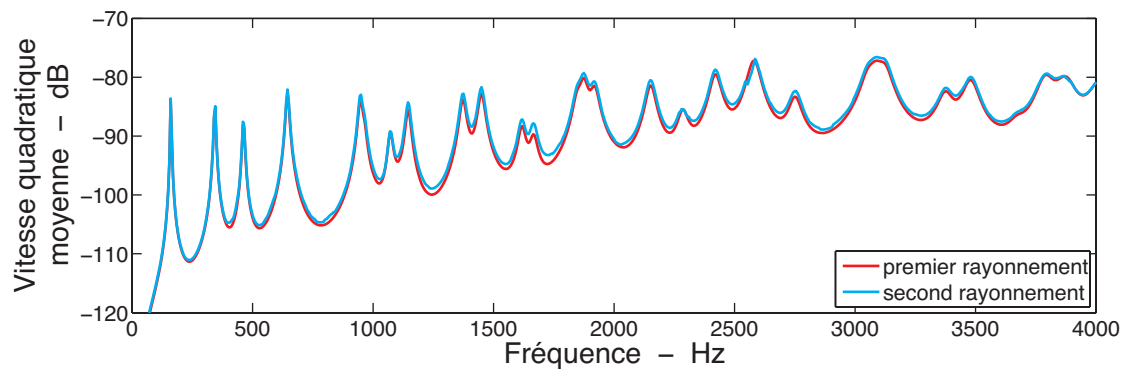


(f) Cartographie du champ de vitesse rayonné par le champ de vitesse identifié ( $z = 20cm$ )

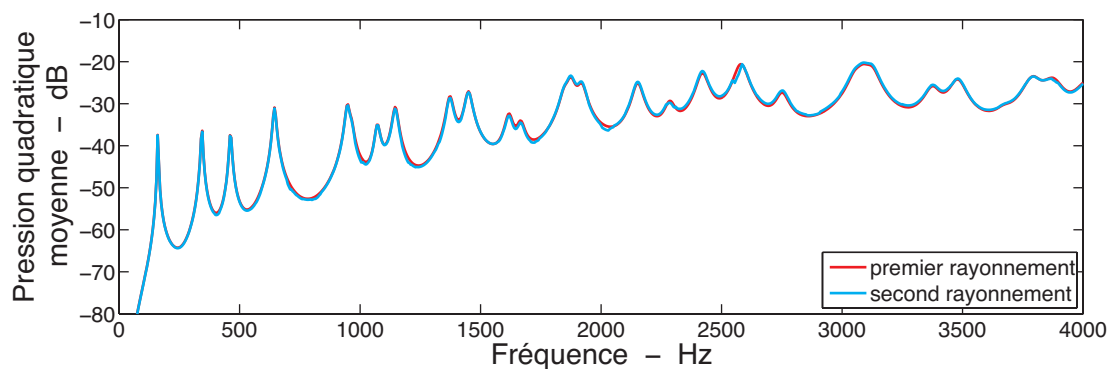
FIGURE 6.6 – Cartographies des champs de vitesses et de pressions identifiés et rayonnés à  $710 Hz$

Nous avons choisi ici d'afficher ces cartographies à  $710\text{ Hz}$  car c'est l'une des fréquences qui présentent la plus grande erreur dans l'identification du champ de vitesse de la source. On constate effectivement que les deux figures (6.6(a)) et (6.6(b)) sont très différentes. Les figures suivantes en revanche sont bien plus semblables. Il existe des erreurs plus importantes sur le champ de vitesse rayonné à partir du champ identifié, notamment pour les *patches* situés proche de la source mais les amplitudes de vitesses et de pressions sont bien respectées. Les localisations sont également tout à fait correctes. Ceci permet de conclure que le champ identifié par la méthode iPTF n'est pas le champ exact de la source mais un champ s'en approchant et représentant la part rayonnante des vibrations de la plaque.

On retrouve d'ailleurs dans l'étude des spectres de vitesses ou de pressions quadratiques moyennes une très bonne correspondance entre le spectre correspondant au rayonnement du champ de référence et celui correspondant au rayonnement du champ identifié (fig. 6.7).



(a) Vitesse quadratique moyenne des champs rayonnés



(b) Pression quadratique moyenne des champs rayonnés

FIGURE 6.7 – Spectres de vitesses et pressions quadratiques moyennes pour le champ rayonné à  $20\text{ cm}$  par le champ de vitesses de référence et le champ de vitesses identifié



Nous présentons dans ce chapitre les résultats d'une étude expérimentale menée sur une guitare acoustique. L'objectif de cette application était de traiter le cas d'une source à *géométrie complexe* et d'évaluer les capacités de la méthode iPTF dans une mise en oeuvre réelle.

L'application présentée ici permet d'évaluer certaines limitations pratiques de la méthode iPTF qui ont été abordées dans les chapitres précédents. Ainsi, les aspects de bruits de mesures et d'erreur de positionnement des capteurs seront évidemment présents puisque l'on traite un cas d'application réel mais les influences du champ acoustique environnant (source perturbatrice) et de la contribution des ondes évanescentes de cette structure seront abordées. Enfin, certaines hypothèses faites dans cette application seront critiquées.

## 7.1 Identification du champ de vitesses sur une guitare acoustique

---

### 7.1.1 Présentation générale de la manipulation

L'objectif de cette étude pratique est de tester la méthode iPTF dans un cas d'identification appliqué à des sources de géométries complexes. Ainsi, dans la présente étude, une guitare acoustique en appui sur trois points est soumise à une excitation solidienne par l'intermédiaire d'un pot vibrant collé sur sa face inférieure comme présenté sur la photographie (7.1). La pression et la vitesse acoustique ont été mesurées très proches du fond de la guitare (surface supérieure sur la photographie (7.1)) pour obtenir des champs de référence qui pourront être comparés aux champs identifiés par la méthode iPTF. Enfin, la pression et la vitesse ont été mesurées sur des surfaces planes entourant la guitare et définissant un volume virtuel ayant la forme d'un pavé. Ces données de pression et de



vitesse sont utilisées pour l'identification des champs de vitesse, pression et intensité sur toute la surface de la guitare discrétisée en *patches* comme le montre la figure (7.2). Nous nous intéresserons dans la suite de l'étude plus particulièrement au fond de la guitare sur lequel nous comparerons les champs d'intensité mesurés et identifiés.

### Présentation de la source de vibrations

Comme annoncé précédemment, nous utilisons ici pour source de vibration une guitare acoustique dont nous présentons, sur la photographie (7.1), le positionnement dans la salle de mesure. Sur cette photographie, on peut aussi apercevoir le robot de déplacement du capteur le long de surfaces planes qui a été utilisé pour faire les cartographies.

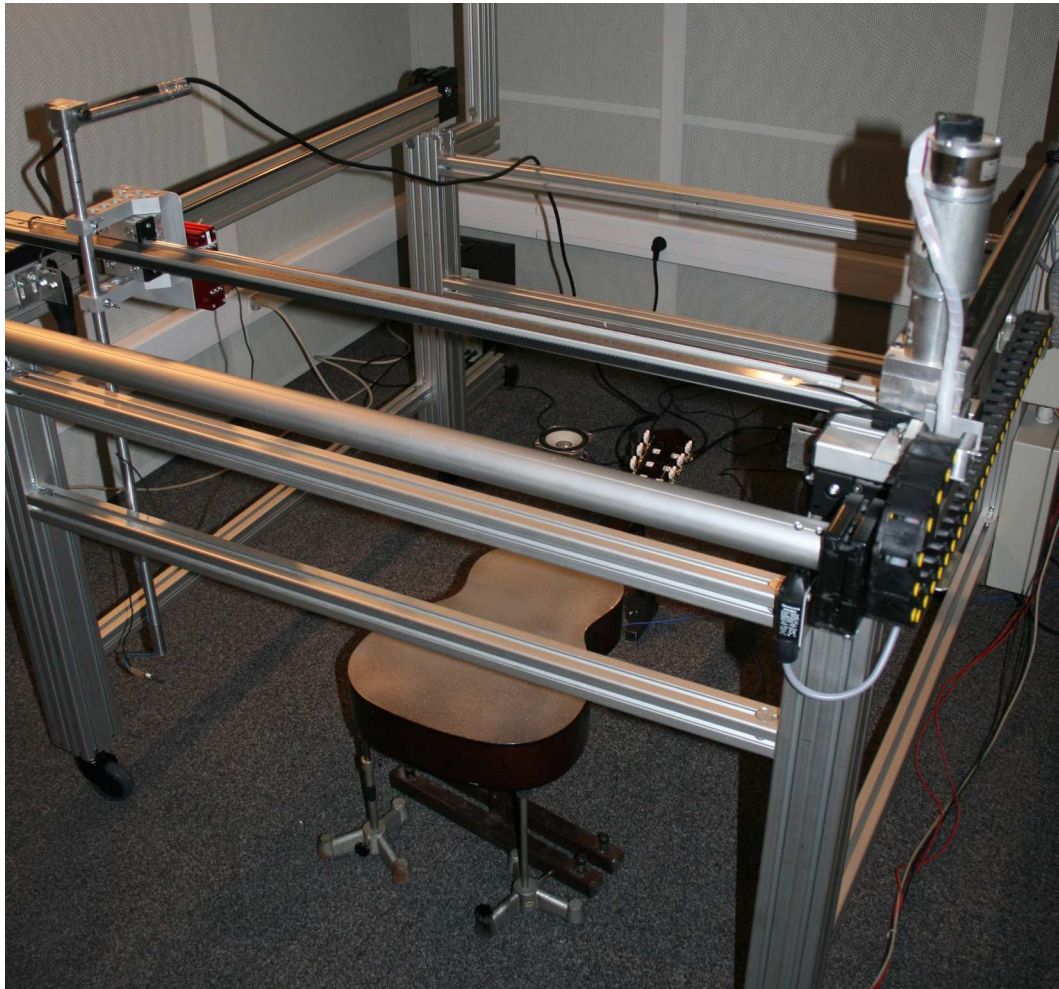


FIGURE 7.1 – Guitare acoustique

Pour l'application de la méthode iPTF, nous discrétisons la surface de la guitare en surfaces élémentaires triangulaires ou quadrangulaires. Ainsi, nous présentons sur la figure (7.2) la géométrie discrétisée de la guitare ainsi que ses dimensions. L'ensemble du domaine représenté sur la figure ( $x \in [0; 1000]$ ,  $y \in [0; 500]$ ,  $z \in [0; 400]$ ) représente exactement le

volume virtuel acoustique utilisé pour l'application de la méthode iPTF. Les surfaces de mesures seront présentées plus en détail au paragraphe *Présentation des surfaces de mesure* p. 115. L'ensemble de la surface de la guitare a été considérée comme surface d'identification pour cette application mais nous nous intéressons plus particulièrement à la surface du fond de la guitare représentée en rouge sur la figure (7.2).

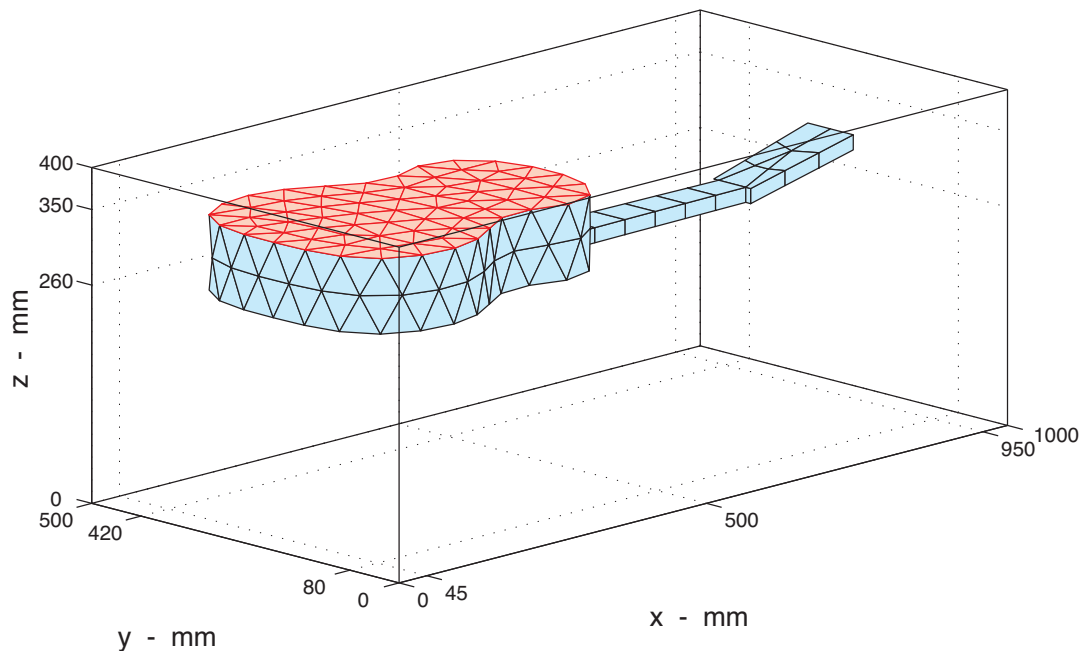


FIGURE 7.2 – Géométrie de la surface source discrétisée en *patches* élémentaires

## Présentation du système de sollicitation

La photographie (7.3) représente le système de fixation de la guitare. On peut y voir qu'elle est en appui sur trois points :

- deux points sur la table d'harmonie, sur le bas de la guitare ;
- un point sur le manche, à proximité de la tête de la guitare.

On peut également voir sur ce schéma le système utilisé pour la sollicitation en vibration de la guitare. La guitare est mise en vibration par un pot vibrant agissant sur sa face avant. Ce pot vibrant est alimenté en tension par un bruit blanc de fréquences comprises entre 0 et 1  $kHz$ . On place de plus, entre le pot vibrant et la guitare, un capteur de force permettant d'enregistrer l'effort appliqué sur la guitare et servant par la suite de référence de phase pour les mesures de pression et de vitesse réalisées.

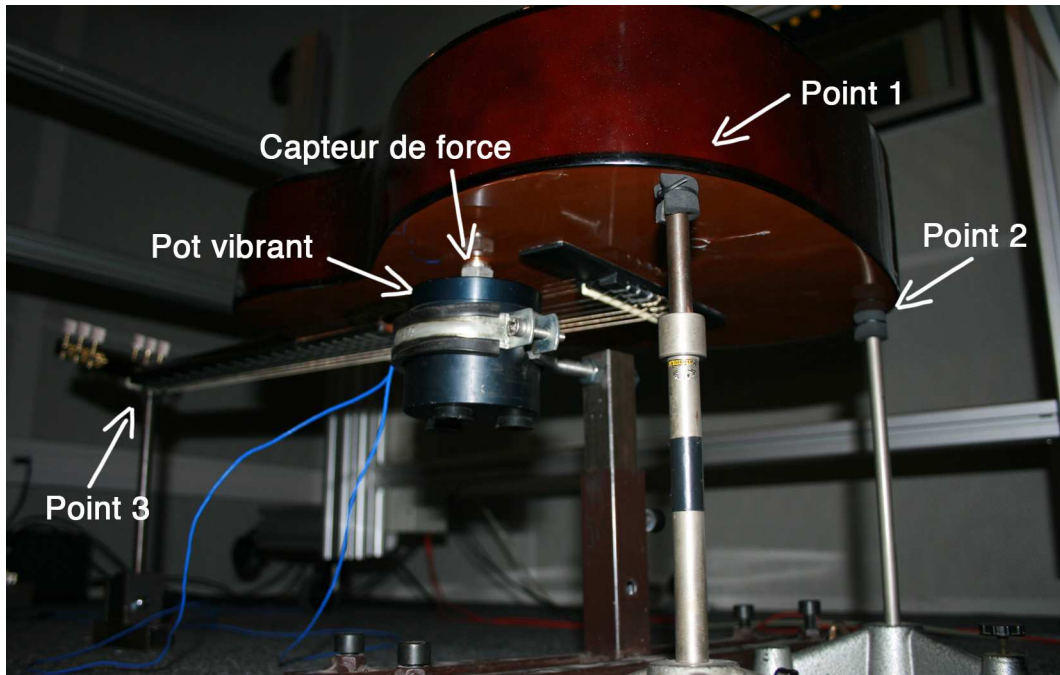


FIGURE 7.3 – Fixation de la guitare et système d'excitation

### Présentation du moyen de mesure

Nous utilisons pour cette première expérimentation un capteur PU-match *Microflown Technologies* [85] présenté sur la photographie (7.4). Cette sonde associe un microphone à un capteur de vitesse particulaire à fil chaud. La mesure de la pression et la mesure de la vitesse se font en des points suffisamment proches pour qu'il soit possible de considérer, à l'échelle de la manipulation, que les deux mesures sont co-localisées.

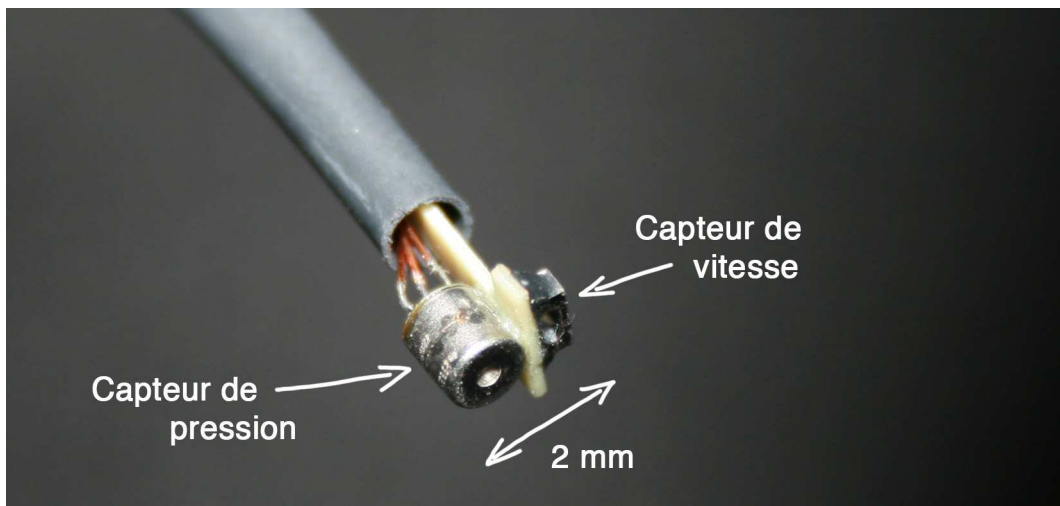


FIGURE 7.4 – Sonde de mesure pression-vitesse *PU-match*

## Présentation des surfaces de mesure

Conformément à la formulation utilisée pour la méthode iPTF, nous définissons tout autour de la guitare une surface l'entourant complètement. Par analogie avec la modélisation faite au chapitre §2, cette surface constitue la frontière entre un sous-domaine  $A$  contenant la guitare et un sous-domaine  $B$  quelconque. Dans le cas de cette mesure, nous choisissons de donner à cette surface de mesure une forme parallélépipédique dont la face inférieure, considérée rigide, est matérialisée par le sol de la salle de mesure. Les cinq autres faces du parallélépipède sont des surfaces ouvertes sur lesquelles les mesures des champs de pressions et de vitesses seront effectuées. La figure (7.5) présente les cinq faces de mesures mises à plat.

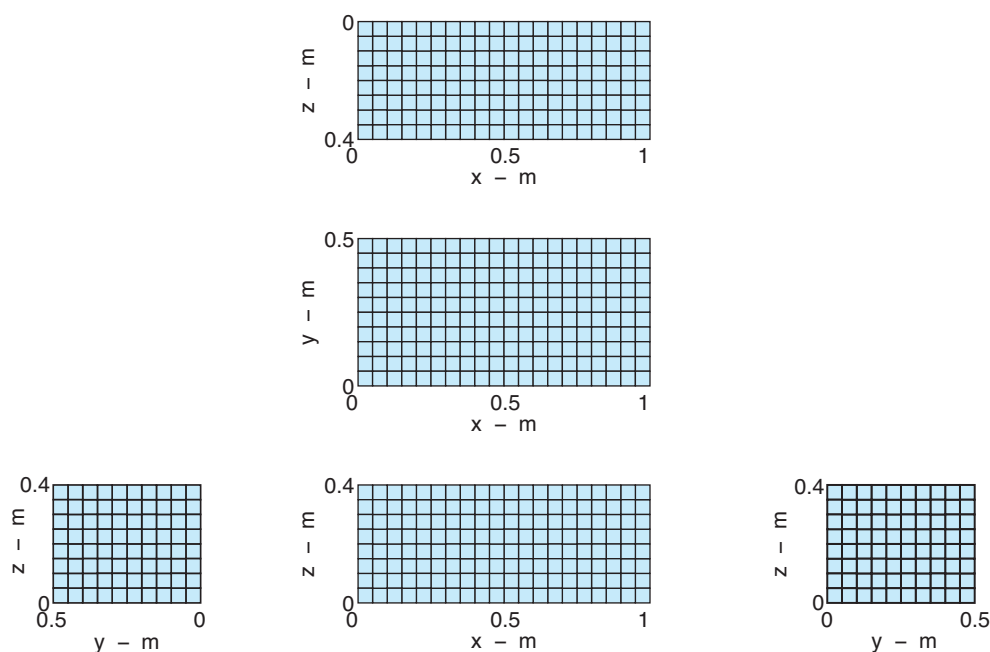


FIGURE 7.5 – Définition des surfaces de mesures autour de la guitare

## Présentation du volume acoustique

Pour l'application de la méthode iPTF, les impédances acoustiques sont calculées de façon numérique sur un maillage par éléments finis du volume acoustique. Il est important de préciser que le volume acoustique considéré est bien le volume délimité par la surface de l'objet étudié, la surface de mesure, la surface du sol et la surface des objets présents dans le volume de mesure (moyen de fixation ou d'excitation de la guitare). Pour l'étude réalisée, une coupe du volume acoustique modélisé est présentée sur la figure (7.6). Elle permet de visualiser acoustique privé de la guitare et du pot vibrant.

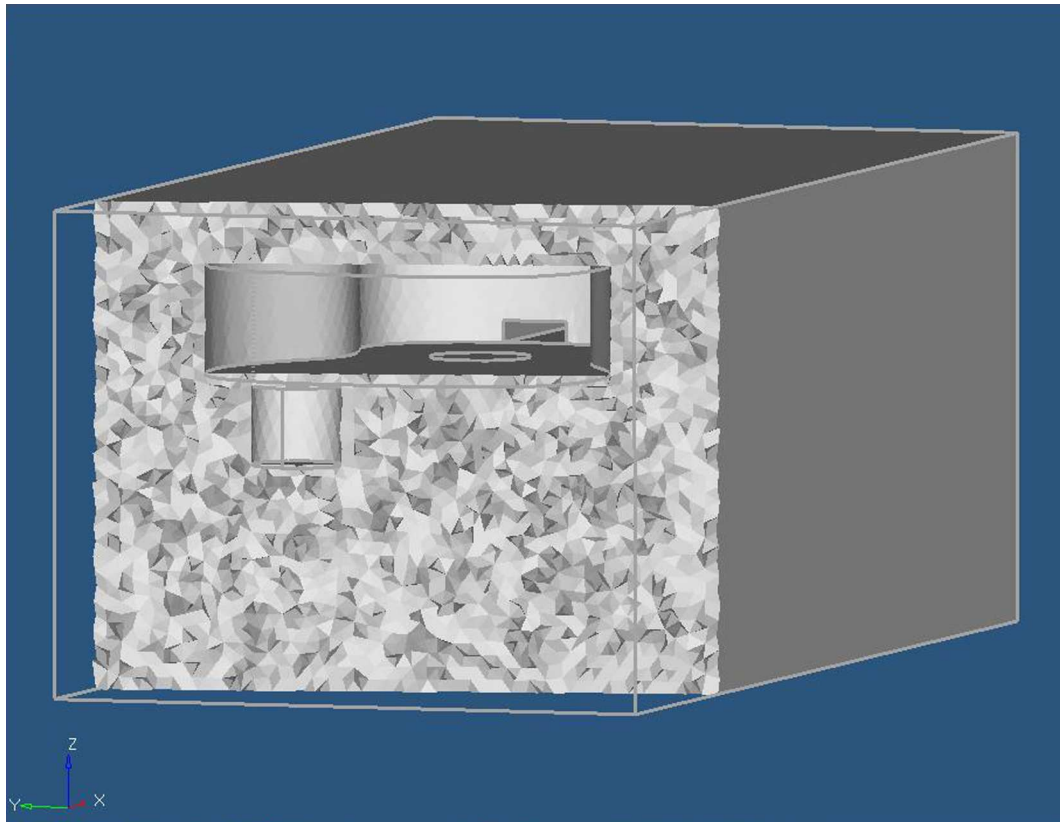


FIGURE 7.6 – Coupe du maillage par éléments finis du volume acoustique mettant en évidence l'exclusion du sous-domaine  $A$  de la guitare et du pot vibrant — Capture d'écran du logiciel de maillage



## 7.1.2 Identification des champs de vibrations de la source

Nous présentons dans ce paragraphe les différents résultats obtenus lors de cette manipulation. Nous nous intéressons dans un premier temps aux champs d'intensités, de vitesses et de pressions mesurés sur la surface définie précédemment. Nous verrons ensuite les résultats obtenus pour la reconstruction des champs d'intensités, de vitesses et de pressions à partir de ces mesures.

### Champs mesurés

La figure (7.7) donne les mesures de pression, de vitesse et d'intensité effectuées à  $350\text{ Hz}$ . Comme nous pouvions nous y attendre, ces mesures nous permettent de constater que les sources de rayonnement sont essentiellement situées du côté du corps de la guitare.

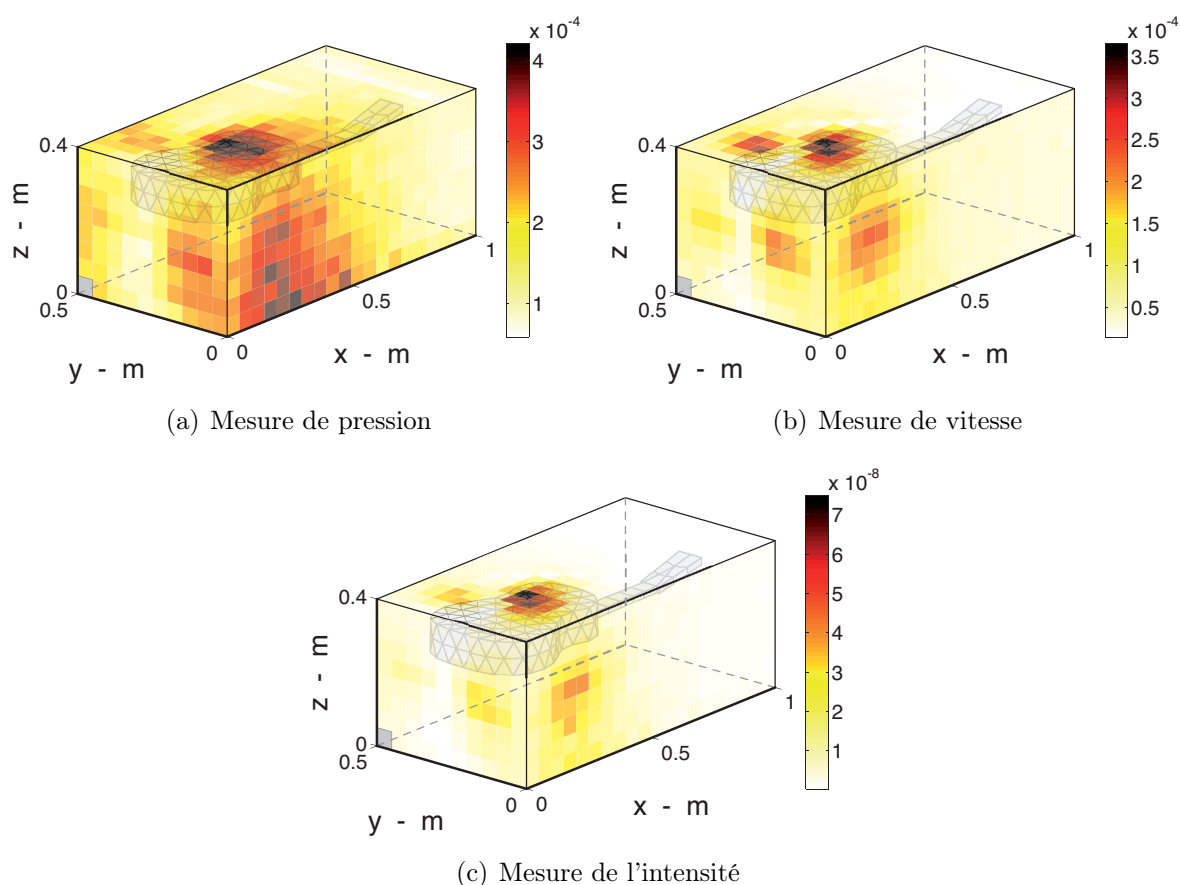


FIGURE 7.7 – mesure des champs rayonnés par la guitare à  $350\text{ Hz}$

## Champs identifiés

La figure (7.8) présente les résultats de l'identification du champ de pressions, de vitesses et d'intensités à 350  $Hz$  comparés à ceux directement mesurés. On constate des similitudes entre les champs identifiés et les champs mesurés même s'il est difficile d'affirmer à cette fréquence-là que l'identification est un succès.

### 7.1.3 Limitations de cette étude

Les résultats présentés sur la figure (7.8) ne présentent que des similitudes par rapport aux champs directement mesurés et nous souhaitons proposer ici quelques raisons pour lesquelles cette mesure n'a pas conduit aux résultats escomptés.

#### Limites de la mesure

Nous avons indiqué au chapitre §6 l'importance des ondes évanescentes. Pour le cas traité dans cette application, nous effectuons nos mesures à une grande distance de la surface de la guitare. De fait, la partie évanescente du champ rayonné n'est absolument pas captée par la sonde de pression-vitesse et ne peut donc pas être reconstruite. Ainsi, le champ identifié sur la surface de la guitare n'est pas le champ de vibration complet : il s'agit uniquement de la partie des vibrations de structure dont le rayonnement est propagatif. Lors de notre étude numérique, la distance de mesure était suffisamment faible pour qu'une certaine part du champ évanescent soit tout de même mesurée (figures ?? et ??) et les différences entre le champ de référence et le champ identifié étaient peu marquées. Pour cette application pratique où le champ évanescent n'est pas du tout mesuré, il est normal d'observer des différences entre le champ identifié et le champ de référence. Si nous étudions le champ de vitesses identifié à une fréquence plus faible telle que 100  $Hz$ , nous pouvons constater que ces différences sont beaucoup moins marquées. En effet, à cette fréquence, le champ rayonné est essentiellement évanescent mais les ondes évanescentes possèdent une profondeur de pénétration bien plus importante, ce qui permet de les mesurer malgré la distance. Nous voyons ainsi sur la figure (7.9) que l'identification est faite avec beaucoup moins d'erreur.

#### Limites de la modélisation du problème

Une autre source d'erreur probable dans cette application concerne les conditions aux limites considérées du problème modélisé. Nous indiquons au paragraphe *Présentation des surfaces de mesure* (p. 115) que la surface du sol est considérée rigide. Dans la réalité, le sol de notre local de mesure n'était pas exactement rigide comme pourrait l'être du béton mais il était recouvert d'une moquette dont il aurait fallu, pour être tout à fait

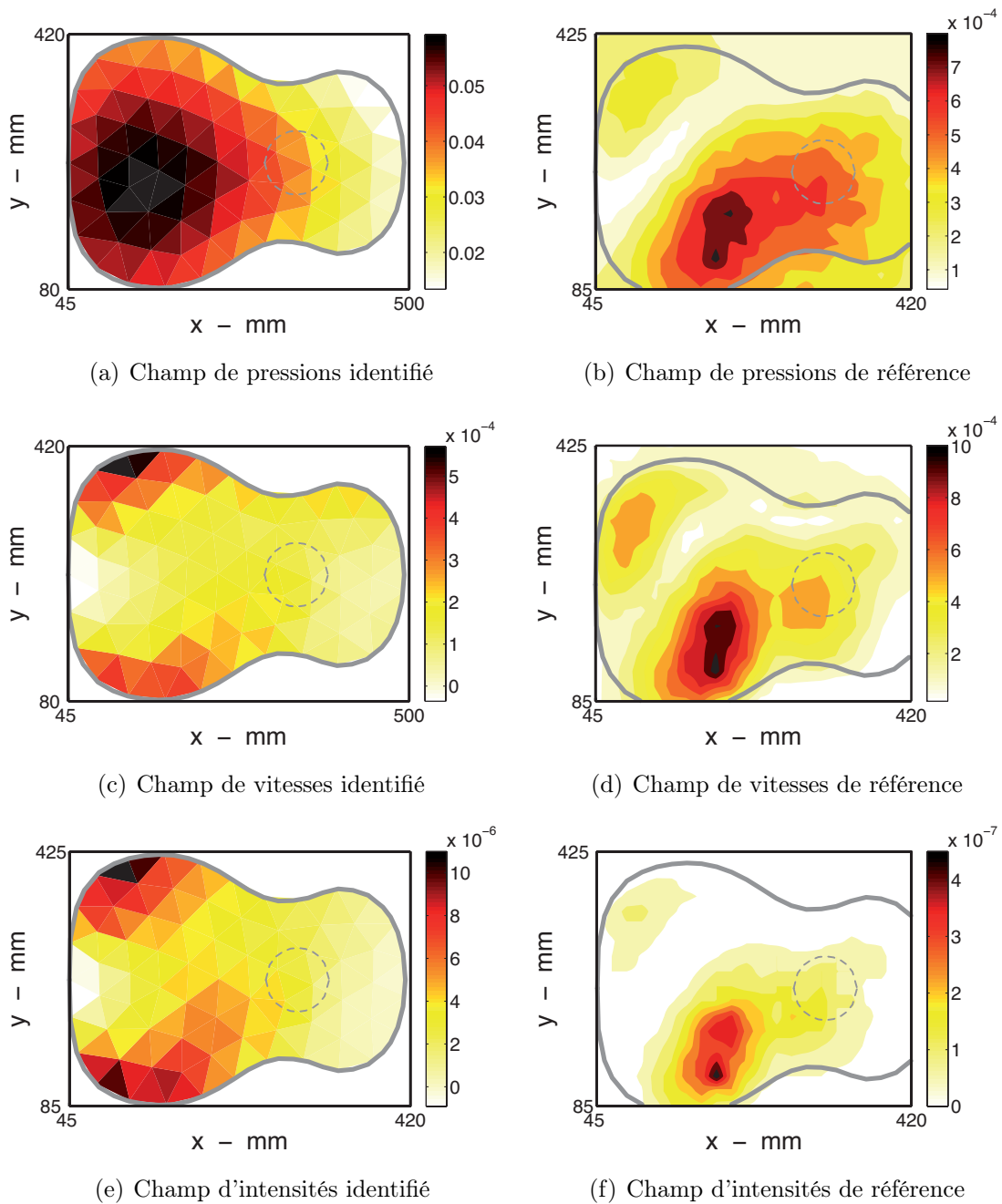


FIGURE 7.8 – Champs identifiés à 350 Hz



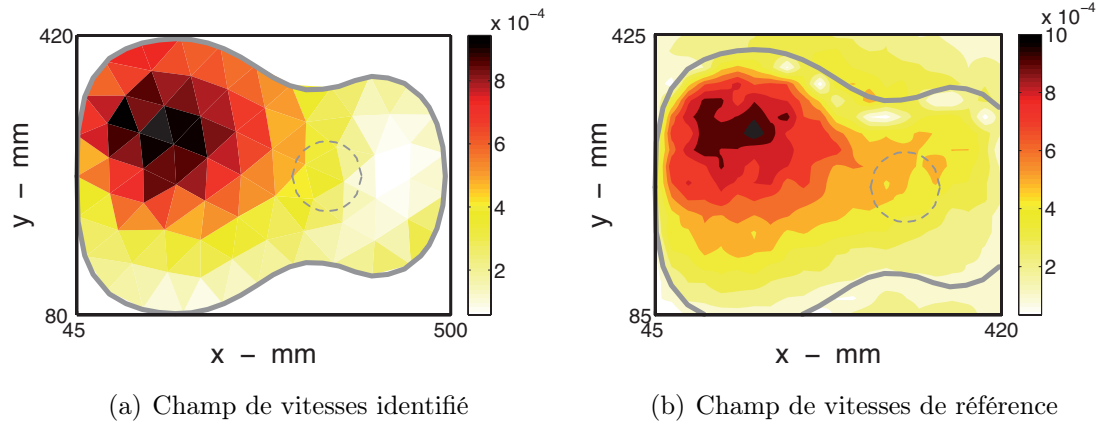


FIGURE 7.9 – Champs identifiés à  $100\text{ Hz}$

rigoureux, caractériser l'impédance ou l'absorption. Cette mesure délicate toutefois n'a pas été possible et nous avons fait l'approximation de surface rigide. Une autre possibilité aurait pu être de considérer la surface du sol comme surface d'identification de la vitesse de vibration, mais nous avons supposé que le niveau de vitesse de la moquette aurait été négligeable devant la contribution de la vitesse vibratoire de la guitare sur le bruit rayonné.

#### 7.1.4 Identification des champs de vibrations de la source en environnement perturbé

Cette manipulation a finalement été l'occasion d'étudier la capacité de notre méthode à séparer les sources contenues dans le volume d'identification de sources perturbatrices situées à l'extérieur du domaine. Nous présentons sur la photographie (7.10) la guitare ainsi que la surface de mesure.

Nous faisons apparaître sur cette photographie la position d'un haut-parleur situé à l'extérieur du domaine de mesure et émettant un bruit décorrélé. Avant de nous intéresser à l'identification du champ de vitesse de la guitare, nous étudions les champs de pressions et de vitesses mesurés avec ou sans la source de bruit perturbatrice. Ces champs sont présentés sur la figure (7.11). On peut y remarquer que l'influence de la source de bruit est non négligeable et qu'elle perturbe localement le champ mesuré de façon importante.

Puisque nous avons montré précédemment que l'identification du champ de vibration de la guitare ne correspond pas forcément à la vitesse réelle de l'objet compte-tenu du fait qu'une grande part du rayonnement de la guitare est évanescent dans les conditions de notre étude, nous ne nous intéresserons pas, ici, à l'identification du champ de vitesse à proprement parler mais plutôt à l'écart d'identification en fonction de la présence ou non de la source de bruit perturbateur. Nous présentons donc sur la figure (7.12) le spectre de

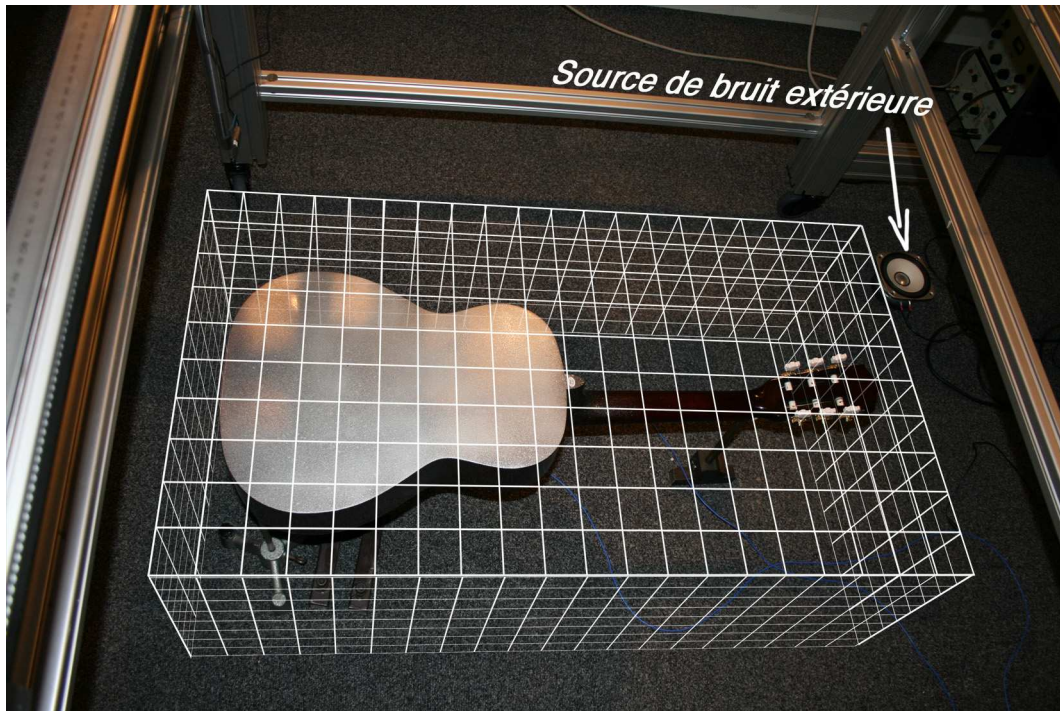


FIGURE 7.10 – Positionnement de la source de bruit par rapport à la cavité acoustique étudiée

vitesse quadratique moyenne identifié sur la guitare avec ou sans source extérieure. Nous y faisons également apparaître, pour information, le spectre de vitesse quadratique moyenne de référence. Sur cette figure, outre les écarts entre les deux courbes d'identification et la courbe de référence dont nous connaissons les raisons, nous pouvons constater qu'il n'existe qu'une différence négligeable entre le spectre de vitesse identifié lorsque la source perturbatrice est active et celui identifié lorsqu'elle est coupée.

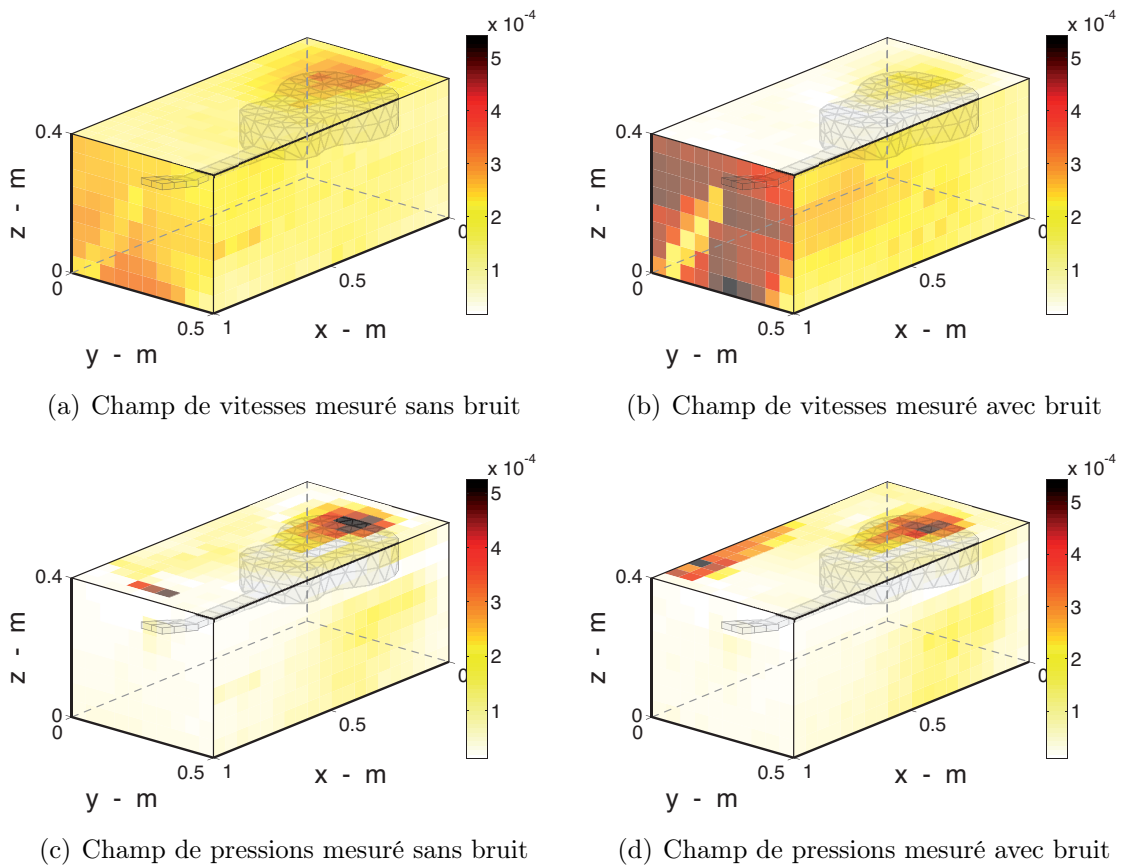


FIGURE 7.11 – Champs mesurés à 100  $Hz$

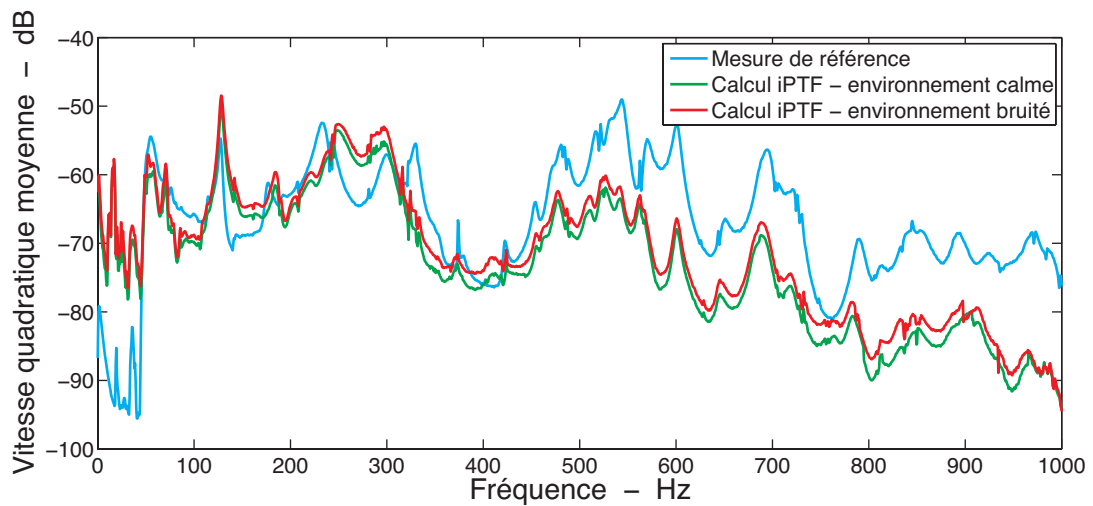


FIGURE 7.12 – Vitesse quadratique moyenne identifiée avec ou sans source de bruit extérieure





## Conclusion générale et perspectives

### Conclusion

---

Ce travail de recherche s'est posé dans le cadre de la résolution du problème inverse en acoustique. Dans ce contexte-là, nous avons travaillé sur la méthode iPTF qui est une des méthodes permettant, à partir de l'observation des conséquences d'un phénomène, de retrouver les sources responsables du phénomène étudié. Une des forces de cette méthode est qu'elle permet la caractérisation complète du champ vibratoire de la source par l'identification de ses champs de vitesses et de pressions, et donc par la connaissance de l'intensité pariétale. Le premier objectif de nos travaux était donc de tester la possibilité offerte par la méthode iPTF de reconstruire le champ d'intensité d'une source. Au delà de ce premier point, nos recherches ont également eu pour but d'étudier les paramètres les plus significatifs pour assurer le bon fonctionnement de cette méthode. Nous avons alors identifié comme paramètres particulièrement importants *la définition des maillages d'identification et de mesure, la position des capteurs, les bruits de mesure* ainsi que *la prise en compte du champ évanescent* rayonné par la structure. Nous avons donc centré notre étude sur ces quatre aspects particuliers afin de déterminer le comportement de la méthode face aux choix faits où imposés par la structure. Nous avons également déterminé, le cas échéant, des critères permettant une aide dans le choix des paramètres. Nous nous sommes finalement intéressé à la mise en pratique de cette méthode par l'intermédiaire de deux expérimentations.

Jusqu'à présent, la méthode iPTF a essentiellement été utilisée pour l'identification du champ de vitesses sur la surface d'une structure. Nous nous sommes donc appuyés sur la formulation mathématique retenue pour son application à la résolution du problème direct aussi bien que celle du problème indirect afin de déterminer la façon de procéder pour permettre également l'identification du champ de pressions. La connaissance de ces deux

informations nous a alors permis de calculer simplement le champ d'intensités pariétales de la source. Une première étude numérique faite pour le cas d'une plaque appuyée soumise à une charge ponctuelle harmonique nous a alors permis de vérifier, dans un cas simple, qu'il est effectivement possible de parvenir à l'identification sans erreur significative de ces trois informations.

Pour les besoins de notre étude paramétrique, *nous proposons dans ces travaux une méthode de calcul intégral* du rayonnement d'une structure plane appuyée et bafflée que nous avons pris pour base d'un code de calcul performant mis en place et permettant de réaliser rapidement de nombreuses simulations de champs rayonnés en faisant varier les différents paramètres du calcul.

Notre première étude a porté sur le choix des maillages d'identification et de mesure utilisés. Si le maillage d'identification doit être suffisamment fin pour permettre une identification des phénomènes en jeu, nous avons pu montrer qu'il ne peut pas être défini aussi finement que souhaité sans contrepartie. La taille des éléments d'un maillage est généralement déterminée en fonction de la longueur d'onde des phénomènes étudiés de façon à permettre une représentation correcte des champs et il est communément admis, dans les travaux utilisant des champs acoustiques, qu'un critère basé sur le quart de la longueur d'onde conduit à des résultats cohérents. Ce critère est également convenable pour l'application de la méthode iPTF. Pour ce qui est de la taille minimale du maillage d'identification, celle-ci est limitée par la décomposition retenue du problème. Dans la formulation proposée, nous décomposons la résolution du problème inverse sur la base des modes propres de la cavité acoustique considérée rigide. De ce fait, pour que le système inversé reste linéairement indépendant, il est nécessaire d'avoir, dans la base modale retenue, plus de modes propres que nous n'avons d'équations dans le système, c'est-à-dire de points d'identification. Le choix d'un maillage de mesure peut alors se faire en s'assurant qu'il soit suffisamment fin pour qu'il y ait davantage de points de mesure que de points d'identification. Là encore, le respect de ce critère permet d'assurer l'indépendance linéaire du système à résoudre. Par ailleurs, il ne doit pas être trop fin de façon à s'assurer que le champ capté est différent en chaque point de mesure.

Une seconde étude a été faite à propos de l'influence d'un mauvais positionnement des capteurs lors de la mesure des champs acoustiques rayonnés. De telles erreurs de positionnement peuvent en effet entraîner des perturbations importantes sur les champs mesurés ; erreurs susceptible de se propager voire de s'amplifier lors de l'identification du comportement de la source. Nous avons pu montrer toutefois qu'une erreur était possible sans dégrader de façon trop importante les résultats tant que le capteur ne se trouve pas au delà du sixième de la longueur d'onde du champ acoustique mesuré. Compte-tenu des

systèmes de mise en position qu'il est possible de trouver actuellement dans le commerce et de la précision qu'ils permettent dans le repérage et la localisation dans l'espace d'un capteur, nous avons pu calculer que le positionnement du capteur ne constituait une limitation pour notre méthode qu'au delà d'une haute fréquence estimée à  $55\text{ kHz}$ .

Dans un troisième temps nous nous sommes intéressés à la robustesse de la méthode face à des erreurs de mesure générées par la présence de bruit de fond dans la chaîne de mesure. Nous avons constaté que certaines erreurs commises sur la pression ont une influence plus importante que des erreurs équivalentes sur la vitesse. Puisque la mesure de la pression se fait plus simplement que la mesure de vitesse, il est actuellement plus simple d'assurer une mesure précise de la pression plutôt que de la vitesse. Ceci est donc un avantage pour notre méthode qui ne semble pas perturbée par des erreurs, mêmes importantes, sur le champ de vitesses mesuré.

Enfin, une part importante de notre travail a été de déterminer de façon précise, dans le champ rayonné par un objet, la part évanescente et la part propagative du rayonnement. En effet, la part évanescente, par définition, ne peut pas être captée à une grande distance de l'objet étudié, et elle fait donc défaut lors de l'identification du comportement de la source. Nous avons cependant remarqué que pour des fréquences très basses, l'identification était possible sans erreur malgré le fait que le champ rayonné soit alors essentiellement évanescent. Le facteur de rayonnement, habituellement utilisé pour caractériser le rayonnement d'une structure, n'est pas défini en dessous de la fréquence critique de rayonnement et nous avons trouvé de fait qu'il n'était pas adapté pour représenter le phénomène que nous avons observé. Nous nous sommes donc intéressés à un concept qui s'utilise plus souvent en optique ou en radioactivité et qui est la profondeur de pénétration des ondes. Ce nouveau critère appliqué à l'acoustique dans notre étude nous a alors permis d'expliquer la raison pour laquelle il est tout de même possible d'identifier correctement le champ de vibration de la source pour des fréquences très basses.

Finalement, nous avons souhaité tester la méthode iPTF sur deux applications pratiques concrètes en la repoussant dans ses retranchements les plus importants tels que d'identifier des sources de vibrations décorréées, d'être appliquée sur des surfaces complexes où d'être utilisée dans un champ fortement confiné. Les deux applications présentées nous ont alors permis d'évaluer les difficultés qui peuvent exister lors de la mise en pratique de la méthode proposée. Nous avons ainsi pu constater que des études sont encore nécessaire afin d'assurer une application sans difficulté de la méthode iPTF à des cas réels.



## Perspectives

---

Comme nous l'avons déjà annoncé, la méthode iPTF se place au rang des méthodes d'identification de sources. De fait, elle est particulièrement indiquée pour toutes les applications où il est nécessaire de connaître la position des sources de vibrations sur un objet. Les avantages qu'elle apporte sont qu'elle est applicable sans restriction particulière de la géométrie étudiée, et dans un champ acoustique qui peut être quelconque. Ceci en fait donc une méthode intéressante dans les cas où il est nécessaire de réaliser des mesures *in-situ* pour caractériser le comportement d'un objet dans son fonctionnement général, ainsi que par rapport aux objets l'entourant dans un local. Bien que sa formulation mathématique en fasse une méthode robuste, nous avons pu constater que son application à des cas concrets est encore délicate et nous proposons ici, parmi d'autres pistes, trois voies de poursuite de nos travaux.

Une des suites que nous souhaiterions donner à notre étude concernerait la façon dont le problème est posé pour être résolu. Nous décomposons la pression dans le volume virtuel sur la base de modes propres de la cavité à parois rigides. Cette formulation est théoriquement admissible et permet d'obtenir l'équation simple de la méthode iPTF qui relie vitesse à identifier aux pressions et vitesses mesurées sur les bords de la cavité. Toutefois, si l'on peut représenter le champ de pression réel sur la surface de mesure (rayonnement en champ libre) à partir des modes de cavités à parois rigides, il n'en est pas de même pour la vitesse. En effet, sur la surface de la cavité, les modes en vitesse sont nuls. Ainsi le modèle théorique utilisé est peut-être trop loin du système réel, ce qui rend une inversion et régularisation difficiles. Pour palier à ce problème, il serait possible de calculer les impédances *patch* à *patch* en utilisant une cavité numérique à conditions aux limites d'impédance de type  $\rho c$  ou perfectly-matched-layer [7]. Dans ce cas, le développement théorique mènerait à la même formulation pour peu que les impédances soient calculées par éléments finis avec une méthode directe.

Dans le travail de thèse qui a été présenté ici, la matrice d'impédance à inverser est préalablement régularisée par une méthode de type TIKHONOV. Ce type de régularisation présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre mais a l'inconvénient de dépendre d'un paramètre de régularisation qu'il n'est pas toujours aisé d'obtenir de manière optimale. Pour trouver ce paramètre optimal, la courbe en  $L$  (par la recherche d'un maximum de courbure) a été utilisée. De nouvelles méthodes de régularisation basées sur des approches bayésiennes s'appuient sur une connaissance *a priori* des bruits sur chaque quantité mesurée. On obtient une fonctionnelle à minimiser pour déterminer le maximum *a posteriori* des vitesses à identifier. La difficulté d'appliquer cette méthode à la formulation iPTF vient du fait que les quantités mesurées sont très différentes et que cela nécessite de dé-

terminer un couple de paramètres pour chaque fréquence. Les premières applications de la méthode dans un cas traditionnel  $P = ZV$  montrent des résultats bien meilleurs que ceux obtenus par la régularisation de TIKHONOV. Il serait intéressant de voir si cette amélioration se retrouve dans une formulation de type iPTF sans pour autant nécessiter des temps de calculs trop importants.

Compte-tenu du fait qu'il est impossible, dans la pratique, d'effectuer des mesures continues sur une surface fermée englobant un objet, la méthode iPTF s'appuie sur grandeurs mesurées sur des facettes élémentaires. De la même manière, les champs identifiés sont donnés sur des facettes et non de façon continue. De fait, il existe, dans les champs mesurés aussi bien que dans les champs identifiés des sauts parfois importants dans les valeurs affichés. Ces variations discontinues peuvent éventuellement être la cause d'une part des problèmes rencontrés lors de l'inversion de la matrice d'impédance. On peut penser qu'il est possible d'atténuer ce problème grâce à l'utilisation de fonctions d'interpolation. De telles fonctions permettraient de transcrire de façon continue les valeurs discrètes mesurées. À partir d'une connaissance exhaustive des champs de vitesses et de pressions rayonnés, il pourrait alors être possible d'identifier avec une meilleure résolution les champs de vitesses, pressions et intensités sur la surface de la source.



## A.1 Grandeurs physiques et mécaniques usuelles

### A.1.1 Variables

Notation	Désignation
$A_n(\omega)$	Amplitude d'un mode $n$ à une pulsation $\omega$
$I(Q)$	Intensité acoustique en un point $Q$
$p(Q)$	Pression acoustique en un point $Q$
$V(Q)$	Vitesse particulaire en un point $Q$
$\mathcal{X}(Q)$	Variable quelconque exprimée en un point $Q$
$Z_{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2}, Z_{\Gamma \rightarrow Q}$	Impédance acoustique mesurée entre deux surfaces $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ ou entre une surface $\Gamma$ et un point $Q$
$\phi_n(Q)$	Déformée modale d'un mode $n$ en un point $Q$

TABLE A.1 – Définition des variables usuelles

### A.1.2 Constantes

Notation	Désignation
$\mathcal{A}_\Gamma$	Aire d'une surface $\Gamma$
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	Module de rigidité de flexion
$\eta$	Amortissement modal
$\Lambda_n$	Norme d'un mode $n$
$E, \nu, \rho$	Module de Young, Coefficient de Poisson, Masse volumique

TABLE A.2 – Définition des constantes usuelles

## A.2 Notations mathématiques

---

### A.2.1 Notations matricielles

Notation	Désignation
$\langle \bullet \rangle$	Matrice ligne
$\{ \bullet \}$	Matrice colonne
$[ \bullet ]$	Matrice rectangulaire
$\otimes$	Produit matriciel terme à terme

TABLE A.3 – Définition des notations matricielles

### A.2.2 Notations complexes

Notation	Désignation
$Im(z)$	Partie imaginaire d'un nombre $z$
$Re(z)$	Partie réelle d'un nombre $z$
$z^*$	Conjugaison d'un nombre $z$

TABLE A.4 – Définition des notations complexes

### A.2.3 Opérateurs de moyennage

Notation	Désignation
$\bar{\mathcal{X}} = \frac{1}{N_{\mathcal{X}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{X}}} \mathcal{X}_i$	Moyenne d'une variable $\mathcal{X}$
$\langle \mathcal{X} \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{\mathcal{A}_{\Gamma}} \int_{\Gamma} \mathcal{X}(M) dM$	Moyenne spatiale d'une variable $\mathcal{X}$ calculée sur une surface $\Gamma$
$\langle \mathcal{X} \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{X}(t) dt$	Moyenne temporelle d'une variable $\mathcal{X}$ calculée sur une période de temps $T$

TABLE A.5 – Définition des opérateurs de moyennage

## A.3 Acronymes

---

Acronyme	Présentation	Définition
ACI	voir p.14	Analyse en Composantes Indépendantes
ACP	voir p.14	Analyse en Composantes Principales
BAHIM	voir p.9	Broadband Acoustic Holography from Intensity Measurements
BEM		Boundary Element Method
FAT	voir p.6	Force Analysis Technique
GCV	voir p.13	Generalized Cross-Validation
HELS	voir p.8	Helmholtz Equations Least Squares
hNAH	voir p.8	hybrid Nearfield Acoustical Holography
iBEM	voir p.7	inverse Boundary Element Method
IFRF	voir p.8	Inverse Frequency Response Function
iPTF	voir p.16	inverse Patch Transfer Functions
LDV	voir p.11	Laser Doppler Velocimetry
LMS	voir p.15	Least Mean Squares
NAH	voir p.7	Nearfield Acoustical Holography
PTF		Patch Transfer Functions
RIFF	voir p.6	Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée
TSVD	voir p.12	Truncated Singular Value Decomposition

TABLE A.6 – Acronymes utilisés



## Algorithmes d'inversion

Nous présentons dans cette annexe les algorithmes utilisés pour le calcul, à partir des champs de pressions et de vitesses mesurés, les champs de vitesse et de pression sur la surface d'identification. Nous présentons dans un premier temps les structures de données utilisées pour stocker les données puis nous donnons le détail des programmes permettant le calcul inverse.

### B.1 Structures de données

#### B.1.1 Structure BaseModale

Cette structure `BaseModale` contient les valeurs de la base modale en terme de pression pour chacun des points du maillage éléments finis défini pour la cavité acoustique modélisée.

---

#### Algorithm 1: définition de la structure `BaseModale`

---

```

1 Structure BaseModale :
2   noeuds
   {Matrice rectangulaire [nbNoeuds, 4]
   noeuds(.., 1) - Numéro du noeud
   noeuds(.., 2 à 4) - Coordonnée suivant x, y et z}
3   frequencesPropres
   {Matrice ligne <1, nbFrequencesPropres>
   Liste des fréquences propres de la cavité}
4   modes
   {Matrice rectangulaire [nbFrequencesPropres, nbNoeuds]
   modes (i, j) - Valeur de la base modale au point j pour la fréquence i}
5 Fin structure

```

---



## B.1.2 Structure Maillages

Cette structure **Maillages** contient les informations concernant le maillage de la cavité acoustique modélisée. Ces informations concernent aussi bien la définition volumique de la cavité que la définition des surfaces de mesures et d'identification.

---

**Algorithm 2:** définition de la structure **Maillages**

---

```
1 Structure Maillages :
2   Structure Volume :
   {Sous-structure concernant le maillage volumique}
3   noeuds
   {Matrice rectangulaire [nbNoeuds,4]
   {noeuds (., 1) - Numéro du noeud
   {noeuds (., 2 à 4) - Coordonnée suivant x, y et z}
4   Fin structure

5   Structure Surfaces :
   {Sous-structure concernant le maillages des surfaces d'identification ou de
   {mesure}
6   noeuds
   {Matrice rectangulaire [nbNoeuds,4]
   {noeuds (., 1) - Numéro du noeud
   {noeuds (., 2 à 4) - Coordonnée suivant x, y et z}
7   éléments
   {Matrice rectangulaire [nbElements,6]
   {elements (., 1) - Numéro de l'élément
   {elements (., 2) - Entier quelconque distinguant l'appartenance à une
   {surfaces (identification ou mesure)
   {elements (., 3 à 6) - Numéro des noeuds constituant les sommets de
   {l'élément}
8   surfaces
   {Matrice ligne <1,nbElements>
   {Surface de chacun des éléments}
9   Fin structure
10 Fin structure
```

---

### B.1.3 Structure Mesures

Cette structure **Mesures** contient les résultats des mesures des champs de pressions et de vitesses rayonnés.

---

**Algorithm 3:** Définition de la structure **Mesures**

---

```
1 Structure Mesures :
2   vitesses
   {Matrice rectangulaire [nbFrquences, nbPatchesMesures]
   vitesses (i, j) - vitesse mesurée à la fréquence i sur le patch j}
3   pressions
   {Matrice rectangulaire [nbFrquences, nbPatchesMesures]
   pressions (i, j) - pression mesurée à la fréquence i sur le patch j}
4   fréquences
   {Matrice ligne <1, nbFrquences>
   Liste des fréquences de mesure}
5 Fin structure
```

---

## B.2 Algorithmes des programmes utilisés

---

Nous présentons sur les pages suivantes les algorithmes utilisés pour résoudre le problème d'identification de sources.

### B.2.1 Programme principal

La fonction `iPTF` est le programme principal permettant de résoudre le problème inverser d'identification de source

### B.2.2 Calcul des impédances de rayonnement

La fonction `calculImpédances` permet de calculer les impédances de rayonnement.

### B.2.3 Calcul de la vitesse

La fonction `PTFInverse` effectue le calcul de l'équation (2.41).

---

**Function** iPTF

---

**Entrées:** BaseModale, Maillages, Mesures, idPatchesMesure, idPatchesIdentification

**Sorties:** vitessesIdentifiées, pressionsIdentifiées

**1 début**

*{Calculer les valeurs moyennes de la base modale sur les patches de surface}*

**2** BaseModaleMoyenne  $\leftarrow$  moyenneBaseModale(BaseModale)

*{Boucle de calcul}*

**3 pour** idFréquence  $\leftarrow$  1 **a** taille(Mesures.frequencies) **faire**

*{Calculer les impédances de rayonnement}*

**4** impédances  $\leftarrow$  calculImpédances(BaseModaleMoyenne, Mesures.frequencies (idFréquence))

*{Calcul de la vitesse}*

**5** vitessesIdentifiées (idFréquence, ..)  $\leftarrow$  PTFInverse(impédances, Mesures, Maillages, idPatchesMesure, idPatchesIdentification, idFréquence)

*{Calcul de la pression}*

**6** pressionsIdentifiées (idFréquence, ..)  $\leftarrow$  impédances (idPatchesIdentification, ..) \* i \* 2 \* pi \* Mesures.frequencies (idFréquence) \* [vitessesIdentifiées (idFréquence, ..); Mesures.vitesses (idFréquence, ..)]

**7 fin pour**

**8 fin**

---

---

**Function** calculImpédances

---

**Entrées:** BaseModaleMoyenne, fréquence

**Sorties:** impédances

**1 début**

*{Calcul des pulsations propres de la cavité}*

**2** pulsationsPropres  $\leftarrow$  BaseModaleMoyenne.frequenciesPropres \* 2 \* pi ;

*{Calcul de la pulsation de travail}*

**3** pulsation  $\leftarrow$  fréquence \* 2 \* pi ;

*{Calcul de la fonction de transfert}*

**4** fonctionsDeTransferts  $\leftarrow$  1 / (pulsation ^ 2 - pulsationsPropres ^ 2 - i \* amortissementCavité \* pulsation \* pulsationsPropres)

*{Calcul des impédances}*

**5** impédances  $\leftarrow$  (fonctionsDeTransferts \* transpose(BaseModaleMoyenne)) \* BaseModaleMoyenne

**6 retourner** impédances

**7 fin**

---

---

**Function** PTFInverse

---

**Entrées:** impédances, Mesures, Maillages, idPatchesMesure, idPatchesIdentification, fréquence

**Sorties:** vitessesIdentifiees

**1 début**

*{Calcul des impédances entre les patches d'identification et les patches de mesure}*

**2** `impedancesIdentificationMesure` ← `impédances` (`idPatchesIdentification`, `idPatchesMesure`)

*{Calcul des impédances entre les patches de mesure entre eux}*

**3** `impedancesMesureMesure` ← `impédances` (`idPatchesMesure`, `idPatchesMesure`)

*{Calcul du vecteur second membre}*

**4** `secondMembre` ← `Mesures.pressions` (`fréquence`, ..) - `impedancesMesureMesure` \* `Mesures.vitesses` (`fréquence`, ..)

*{Résolution du problème inverse}*

**5** `vitessesIdentifiees` ← `inversion`(`impedancesIdentificationMesure`, `secondMembre`)

**6 retourner** `vitessesIdentifiees`

**7 fin**

---



## Étude du rayonnement acoustique d'une plaque infinie

Cette annexe rappelle de façon détaillée le calcul du facteur de rayonnement. Nous nous appuyons pour cette démonstration sur l'étude d'une plaque infinie. Les relations mises en place dans cette annexe sont utilisées au chapitre §6 portant sur l'importance des ondes évanescentes dans l'identification des champs de vitesses, pressions et intensités sur la surface source.

### C.1 Ondes de flexion dans une plaque

---

En considérant que son déplacement est transversal et harmonique, le déplacement transversal d'une plaque mince est décrit par l'équation suivante :

$$w(x, y, t) = w(x, y) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{C.1})$$

On déduit de cette équation l'accélération normale de la plaque :

$$\ddot{w}(x, y, t) = -\omega^2 w(x, y) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{C.2})$$

L'équation d'onde des vibrations libres de flexion de la plaque (considérée de plus isotrope) s'écrit

$$D \nabla^4 w(x, y) - \omega^2 w(x, y) \rho h = 0 \quad (\text{C.3})$$

où  $\rho$  représente la masse volumique de la plaque,  $h$  son épaisseur et  $D$  sa rigidité de flexion.

En posant

$$D = \omega^2 \frac{\rho h}{k_f^4} \quad (\text{C.4})$$

l'équation (C.3) peut s'écrire sous la forme

$$\nabla^4 w(x, y) - k_f^4 w(x, y) = 0 \quad (\text{C.5})$$

qui présente l'avantage de pouvoir être factorisée :

$$(\nabla^4 - k_f^4) w(x, y) = (\nabla^2 - k_f^2) (\nabla^2 + k_f^2) w(x, y) = 0 \quad (\text{C.6})$$

La solution générale de (C.6) est la somme  $w(x, y) = w^-(x, y) + w^+(x, y)$  des solutions du système d'équations ci-dessous

$$\begin{cases} (\nabla^2 - k_f^2) w^-(x, y) = 0 \\ (\nabla^2 + k_f^2) w^+(x, y) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

soit

$$\begin{cases} w^-(x, y) = W^- e^{-(k_x x + k_y y)} \\ w^+(x, y) = W^+ e^{i(k_x x + k_y y)} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

La première de ces deux solutions correspond à des ondes de flexion évanescentes tandis que la seconde correspond à des ondes de flexion propagatives.

Dans ces équations, les composantes du vecteur d'onde doivent satisfaire l'équation dite de dispersion

$$k_f^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = k_x^2 + k_y^2 \quad (\text{C.9})$$

Ainsi, une onde se propageant dans une direction  $\phi$  peut se représenter sur le disque de rayon  $k_f$  (figure C.1)

## C.2 Propagation des ondes acoustiques

---

Les ondes acoustiques harmoniques se propageant dans le demi espace situé au dessus de la plaque sont solutions de l'équation de HELMHOLTZ

$$\nabla^2 p(x, y, z) + k^2 p(x, y, z) = 0 \quad (\text{C.10})$$

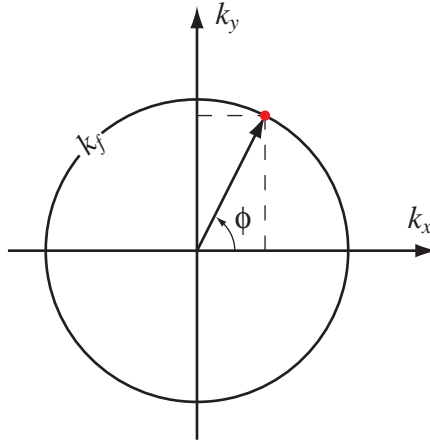


FIGURE C.1 – Représentation dans le plan  $k_x, k_y$  d'une onde de flexion se propageant dans la direction  $\phi$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde. La forme générale des solutions de (C.10) est l'onde plane élémentaire de vecteur d'onde  $\vec{k}$

$$p(x, y, z) = (A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x}) (A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y}) (A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}) \quad (\text{C.11})$$

Les composantes  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  du vecteur d'onde doivent bien sûr satisfaire l'équation de dispersion des ondes acoustiques dans l'air

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (\text{C.12})$$

Compte-tenu de notre convention de signe, le terme  $B_z e^{-ik_z z}$  correspond à une onde se propageant dans la direction  $-\vec{z}$ . La pression au dessus de la plaque (demi espace  $z \geq 0$ ) étant due au rayonnement de la plaque située en  $z = 0$ , ce terme n'a donc pas de réalité physique dans le cadre de notre étude et on prendra donc  $B_z = 0$ . Ce choix permet de simplifier la solution (C.11) qui peut s'écrire sous la forme

$$p(x, y, z) = p(x, y, z = 0) \cdot e^{ik_z z} \quad (\text{C.13})$$

Cette dernière relation représente le rayonnement dans la direction  $z > 0$  du champ de pression  $p(x, y, z)$ . L'expression  $p(x, y, 0)$  représente la pression en  $z = 0$ .

Les composantes  $k_x$  et  $k_y$  du vecteur d'onde sont incluses dans le terme  $p(x, y, 0)$  qui représente la pression sur la plaque et sont donc imposées par celle-ci. La valeur de la composante  $k_z$  du vecteur d'onde n'est donc pas quelconque. Elle peut être obtenue en



utilisant la relation de dispersion

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} \quad (\text{C.14})$$

Notons que par la suite, nous utiliserons la notation abrégée usuelle  $k = \omega/c$

### C.3 Couplage des phénomènes vibratoires et acoustiques

---

Les ondes de flexion de la plaque et les ondes acoustiques sont couplées par les conditions de continuité à la limite de séparation des deux milieux. On impose ainsi une condition de continuité des vitesses qui s'écrit

$$\dot{w}(x, y) = u_z(x, y, z = 0) \quad (\text{C.15})$$

Du coté de la plaque, nous pouvons écrire

$$\dot{w}(x, y) = -i\omega w(x, y) \quad (\text{C.16})$$

Du coté acoustique, la relation d'EULER permet d'écrire

$$\rho_0 \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_z(x, y, z) = \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{-i}{\omega \rho_0} \quad (\text{C.17})$$

Les trois équations ci-dessus permettent alors d'écrire

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} &= i\omega \rho_0 u_z(x, y, z = 0) \\ &= i\omega \rho_0 \dot{w}(x, y) \\ &= \omega^2 \rho_0 w(x, y) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Cette relation (C.18) entre la pression rayonnée et la vitesse pariétale de la plaque nous donne, lorsqu'elle est appliquée à l'expression générale de la pression (C.13)

$$ik_z p(x, y, 0) = \omega^2 \rho_0 w(x, y) \quad (\text{C.19})$$

Ce dernier résultat introduit dans (C.13) nous permet enfin d'expliciter la valeur de la pression rayonnée en tout point de l'espace

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= p(x, y, 0) \cdot e^{ik_z z} \\ &= -\frac{i\omega^2 \rho_0 w(x, y)}{k_z} \cdot e^{ik_z z} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

La condition de continuité entre la plaque et le milieu acoustique impose également une égalité des nombres d'ondes suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , soit une égalité des termes  $k_x$  entre eux, ainsi que des termes  $k_y$  entre eux, dans les deux relations (C.9) et (C.14). Ceci nous permet de détailler encore l'expression de la pression rayonnée

$$p(x, y, z) = -\frac{i\omega^2 \rho_0 w(x, y)}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} \cdot e^{i\sqrt{k^2 - k_f^2} z} \quad (\text{C.21})$$

Pour être tout à fait pris en compte, le couplage des phénomènes vibratoires et acoustiques devrait prendre en compte les interactions fluide-structure toutefois ces interactions peuvent être négligées dans notre cas puisque notre étude se fait en fluide léger.

## C.4 Impédance et facteur de rayonnement

---

On définit l'impédance de rayonnement comme le rapport entre la pression mesurée sur la surface de la plaque et la vitesse pariétale normale soit

$$Z_r = \frac{p(x, y, 0)}{u_z(x, y, 0)} \quad (\text{C.22})$$

Cette définition fait intervenir la pression acoustique  $p$  et la vitesse pariétale normale  $u_z$ . La pression acoustique nous est donnée par la relation (C.20). La vitesse pariétale quant à elle peut être calculée en utilisant les relations (C.15) et (C.16). Nous pouvons donc écrire

$$p(x, y, 0) = -i \frac{\omega^2 \rho_0}{k_z} w(x, y) \quad (\text{C.23})$$

$$u_z(x, y, 0) = -i\omega w(x, y) \quad (\text{C.24})$$

et

$$Z_r = \frac{-i\omega^2 \rho_0}{k_z} \cdot \frac{i}{\omega} = \frac{\omega \rho_0}{k_z} \quad (\text{C.25})$$

Par ailleurs, nous notons  $I$  l'intensité acoustique rayonnée. Cette grandeur est calculée à l'aide de la formule

$$I = \frac{1}{2} \Re\left[p(x, y, z) u_z(x, y, z)^*\right] \quad (\text{C.26})$$

En utilisant les valeurs de  $p$  et  $u_z$  rappelées en (C.23) et (C.24), nous obtenons l'intensité

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \Re\left[\frac{\omega^3 \rho_0}{k_z} w(x, y)^* \cdot e^{ik_z z - ik_z z}\right] \\ &= \frac{\omega^2}{2} \Re\left[\frac{\omega \rho_0}{k_z}\right] |w(x, y)|^2 \\ &= \frac{\omega^2}{2} \Re[Z_r] |w(x, y)|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

En intégrant sur une surface fermée, on définit la puissance acoustique correspondante

$$\mathcal{P} = \frac{\omega^2}{2} \int_S |w(x, y)|^2 \Re[Z_r] dS \quad (\text{C.28})$$

On définit alors le facteur de rayonnement comme le rapport de la puissance acoustique obtenue sur la puissance acoustique qui serait rayonnée par une source de référence pour laquelle l'impédance aurait la valeur  $\rho_0 c$ . Cette valeur particulière, appelée impédance caractéristique, correspond dans l'équation (C.25) au cas où  $k_z = \omega/c$ . La source de référence correspond ainsi à une source rayonnant dans la seule direction perpendiculaire à la plaque. On peut alors calculer le facteur de rayonnement  $\sigma$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\mathcal{P}_{\text{réel}}}{\mathcal{P}_{\text{référence}}} = \frac{\frac{\omega^2}{2} \int_S |w(x, y)|^2 \Re[Z_r] dS}{\frac{\omega^2}{2} \int_S |w(x, y)|^2 \rho_0 c dS} \\ &= \frac{\Re[Z_r] \int_S |w(x, y)|^2 dS}{\rho_0 c \int_S |w(x, y)|^2 dS} \\ &= \Re\left[\frac{Z_r}{\rho_0 c}\right] \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$







## Publication des travaux de thèse

Nous présentons dans cette annexe les articles rédigés pour la présentation de nos travaux à l'occasion de congrès de mécanique et d'acoustique.

Le premier article a été rédigé à l'occasion de notre communication au 10<sup>e</sup> Congrès Français d'Acoustique. Il s'intitule : *Mesure de vitesses vibratoires par la méthode iPTF : simulation et expérimentation*.

Après un rappel des méthodes les plus répandues pour la résolution du problème inverse en acoustique, nous donnons dans cet article les équations relatives aux différentes étapes du calcul : calcul intégral du rayonnement d'une plaque excitée en flexion, puis identification par la méthode iPTF de ce champ de vibration à partir des champs calculés de pression et de vitesse. Nous introduisons ensuite une modélisation des bruits pouvant avoir lieu lors de la mesure des champs de pressions et de vitesses. À la différence de l'étude détaillée dans notre rapport au paragraphe §5.3, où l'erreur était décomposée en une erreur de phase et une erreur d'amplitude, nous avons modélisé dans cet article une erreur décomposée sur les parties réelle et imaginaire du signal mesuré. Une première estimation de l'influence du maillage de *patches* est faite ensuite.

Enfin nous présentons les résultats d'une première expérimentation réalisée afin de retrouver le comportement vibratoire d'une guitare acoustique. Les limitations de cette expérimentation réalisée en 2010 ont été étudiées en détail dans le chapitre §7.

Le second article a été rédigé à l'occasion de notre communication au 20<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique. Il s'intitule *Identification de champs de vitesse, pression et intensité à l'aide de la méthode PTF*.

Il rappelle, dans une première partie, la théorie mathématique sur laquelle s'appuie la méthode iPTF. L'application numérique présentée ensuite montre l'identification des champs caractéristiques de la source. Ces champs sont décrits en vitesse, pression ou intensité quadratique moyenne, puis en cartographie à 2000 Hz. Le paragraphe §2.4 enfin introduit le problème des ondes évanescentes pour l'identification de ces champs.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Mesure de vitesse vibratoire par la méthode iPTF : simulation et expérimentation

Dorian Vigoureux<sup>1</sup>, Nicolas Totaro<sup>1</sup>, Jean-Louis Guyader<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Vibrations Acoustique, INSA Lyon

25 bis avenue Jean Capelle, F-69621 Villeurbanne Cedex

{dorian.vigoureux, nicolas.totaro, jean-louis.guyader}@insa-lyon.fr

Le but de cette étude est de valider une méthode d'identification des vitesses vibratoires d'une structure complexe à partir de mesures acoustiques. Elle s'appuie sur la formulation inverse de la méthode PTF (Patch Transfer Functions) et sur la mesure de la pression et de la vitesse particulière du champ acoustique rayonné. Pour valider cette méthode, deux approches ont été mises en place : une approche paramétrique basée sur des calculs numériques et une approche expérimentale pour vérifier la validité de la méthode en conditions réelles.

La simulation numérique suit les étapes suivantes : (i) calcul du champ de vitesse vibratoire d'une plaque excitée par une force ponctuelle harmonique; (ii) calcul de la pression et de la vitesse particulière du champ acoustique rayonné; (iii) identification de la vitesse vibratoire de la plaque à partir du champ acoustique et comparaison par rapport aux données initiales. Cette étude a permis de simuler des erreurs de mesure de manière à tester la sensibilité de la méthode par rapport à certains paramètres (bruit de mesure, erreurs de positionnement, etc.)

Dans un second temps, une expérimentation a été mise en place sur une guitare. Cette structure complexe a été excitée par bruit blanc et la vitesse de référence de la face arrière de la guitare a été mesurée au moyen d'un vibromètre laser à balayage. Les mesures des champs de pression et de vitesse ont été réalisées au moyen d'un capteur pression-vitesse. À partir de ces dernières mesures, les éléments suivants ont été identifiés : vitesse quadratique moyenne de la surface, cartographie de la vitesse vibratoire.

## 1 Introduction

### 1.1 Présentation

Plusieurs méthodes ont été développées dans le domaine audible pour la recherche de sources de bruit. Ces méthodes sont notamment utilisées lorsqu'il est impossible d'effectuer des mesures directes sur l'objet étudié (géométrie complexe) ou lorsque l'on souhaite prédire le bruit rayonné par l'objet. Parmi les principales méthodes de résolution du problème inverse en acoustique, on peut citer l'holographie acoustique en champ proche ou la méthode inverse par éléments de frontières.

La méthode d'holographie acoustique en champ proche (Nearfield Acoustical Holography, ou NAH), développée par J. D. Maynard [4] identifie le champ de vitesse vibratoire tridimensionnel de la source de vibrations à partir de la pression mesurée sur un hologramme proche de la source de vibrations. Cette méthode a néanmoins l'inconvénient de n'être applicable que sur des géométries simples (planes, cylindriques ou sphériques) et les phénomènes d'effets de bords imposent d'effectuer les mesures dans le champ proche de la source. La méthode inverse par éléments de frontières (inverse Boundary Elements Method, ou iBEM) est quant à elle basée sur l'évaluation numérique et l'inversion de matrices de transfert. Cette évaluation présente l'inconvénient de nécessiter des moyens de calculs numériques importants lorsque la complexité de

la structure et du volume acoustique augmente. Une méthode hybride [8] à été créée à partir des éléments des méthodes NAH et iBEM afin de repousser les limites de ces deux méthodes.

On présente dans cet article la méthode inverse par fonctions de transferts par patches (inverse Patch Transfer Functions, ou iPTF) introduite pour identifier la vitesse de vibration sur des surfaces complexes. Cette formulation inverse est basée sur la méthode directe PTF développée par M. Ouisse et N. Totaro [5, 7].

La méthode directe s'appuie sur le calcul d'impédances acoustiques pour prédire la pression acoustique à l'intérieur et à l'extérieur d'une cavité contenant des sources et des ouvertures et délimitée par des surfaces de différentes natures (figure 1). La méthode PTF introduit une sous-structuration du problème afin de limiter l'étendue des calculs numériques. Les sous-domaines acoustiques sont alors couplés par leurs surfaces communes divisées en surfaces élémentaires appelées *patches* servant au calcul des impédances.

Alors que la formulation directe permet de calculer la pression rayonnée à partir de la pression et de la vitesse, la méthode inverse s'appuie sur ces deux éléments. De fait, il convient de procéder à leur mesure sur une surface quelconque entourant la structure. Ceci permet alors de rendre utilisable la méthode iPTF lorsque les mesures classiques de vibration sont impossibles pour

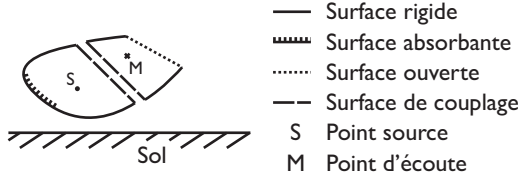


FIGURE 1 – Pose du problème acoustique direct

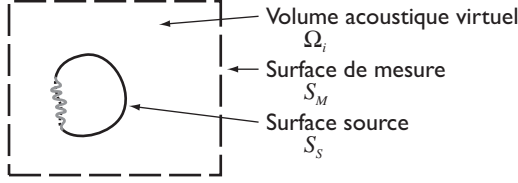


FIGURE 2 – Pose du problème acoustique inverse

des raisons d'accès à la surface de la structure. Par ailleurs, la méthode iPTF utilise la décomposition en éléments finis des volumes considérés. La base modale du domaine intérieur, utilisée pour le calcul des matrices d'impédances, est déterminée sur le maillage élément fini.

Le but de l'étude présentée dans cet article est de tester numériquement, dans un cas simple, la robustesse de la méthode (convergence des résultats, stabilité par rapport aux bruits de mesure, etc.) Dans un second temps, la mise en place d'une expérimentation a permis de tester la méthode dans un cas réel, sur une structure complexe.

## 1.2 Approche théorique

On rappellera dans cette section les équations fondamentales présentées par M. Aucejo [1, 2].

Dans l'application de la méthode iPTF, on considère une source de vibrations entourée par une surface de mesure. Le volume virtuel  $\Omega_i$ , délimité par la réunion de la surface source  $S_S$  et des surfaces de mesures  $S_M$ , est utilisé comme base des calculs effectués (figure 2). Il faut bien comprendre que ce volume virtuel n'a aucune réalité physique mais constitue uniquement une base de calcul. Il faut alors résoudre dans ce volume virtuel le problème de Helmholtz respectant la condition aux limites inhomogène de Neumann. On peut alors écrire la formulation suivante :

$$\begin{cases} \Delta p(M) + k^2 p(M) = 0 & \forall M \in \Omega_i \\ \frac{\partial p}{\partial n}(M) = -i\omega\rho V_S \vec{n} & \forall M \in S_S \cup S_M \end{cases} \quad (1)$$

La méthode PTF permet de calculer la pression acoustique moyenne sur un patch  $j$  comme étant la superposition de la pression due aux vibrations des  $N_S$  patches de la surface source  $S_S$  et de l'influence des  $N_M$  patches de la surface virtuelle  $S_M$ .

$$\langle p_j \rangle = \sum_{k=1}^{N_S} Z_{jk} \langle v_k \rangle + \sum_{i=1}^{N_M} Z_{ji} \langle v_i \rangle \quad (2)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\{p_j\} = [Z_{jk}] \{v_k\} + [Z_{ji}] \{v_i\} \quad (3)$$

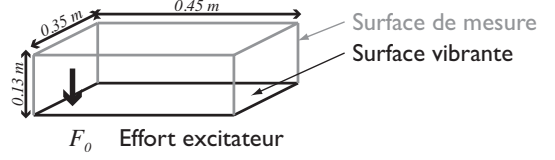


FIGURE 3 – Cas d'application numérique

où  $\{p_j\}$  est la pression acoustique moyenne sur le patch  $j$ ,  $[Z_{jk}]$  est la matrice d'impédance entre un patch source  $k$  et le patch d'écoute  $j$ ,  $\{v_k\}$  est la vitesse normale moyenne sur le patch source  $k$ ,  $[Z_{ji}]$  est la matrice d'impédance entre un patch excité  $i$  et le patch d'écoute  $j$ ,  $\{v_i\}$  est la vitesse moyenne de couplage sur le patch  $i$ . Les matrices d'impédances sont obtenues par le calcul de la base modale d'une cavité rigide de forme identique au volume virtuel généré par  $S_S \cup S_M$ . Elles sont obtenues à l'aide des relations suivantes :

$$Z_{ji} = \sum_n \frac{i\omega\rho c^2 S_i}{\Lambda_n (\omega_n^2 - \omega^2 + i\eta_n \omega_n \omega)} \langle \phi_n \rangle_i \langle \phi_n \rangle_j \quad (4)$$

$$Z_{jk} = \sum_n \frac{i\omega\rho c^2 S_k}{\Lambda_n (\omega_n^2 - \omega^2 + i\eta_n \omega_n \omega)} \langle \phi_n \rangle_k \langle \phi_n \rangle_j \quad (5)$$

La formulation iPTF est obtenue par l'inversion de l'équation (3) :

$$\{v_k\} = [Z_{jk}]^{-1} (\{p_j\} - [Z_{ji}] \{v_i\}) \quad (6)$$

Dans cette formulation, seule la vitesse de la source  $\{v_k\}$  est inconnue. En effet, les matrices d'impédances  $[Z_{jk}]$  et  $[Z_{ji}]$  sont calculées numériquement et les pression et vitesse de couplage  $\{p_j\}$  et  $\{v_i\}$  sont mesurées à l'aide d'une sonde pression-vitesse.

## 2 Simulation numérique

On étudie, dans cette partie, le comportement d'une plaque rectangulaire excitée par un effort harmonique ponctuel (figure 3). Un logiciel de simulation a été programmé afin de calculer les éléments suivants : (i) calcul du champ de vitesse vibratoire de la plaque ; (ii) calcul du champ de pression rayonné et du champ de vitesse particulière sur une surface fermée englobant la plaque ; (iii) identification de la vitesse vibratoire de la plaque à partir du champ acoustique calculé et comparaison par rapport au champ de vitesse vibratoire calculé à l'étape i.

Cette section détaille dans un premier temps les calculs effectués par le programme et montre leur validité par la comparaison avec un logiciel du commerce. Dans un second temps cet outil a été utilisé pour étudier la stabilité de la méthode iPTF à diverses perturbations telles que bruit de mesure, erreur de positionnement des capteurs, etc.

### 2.1 Rayonnement d'une plaque

Le calcul de rayonnement effectué par le programme s'appuie sur la formulation intégrale du problème de rayonnement de plaque. On calcule dans un premier temps la vitesse normale de la plaque (équation 7).



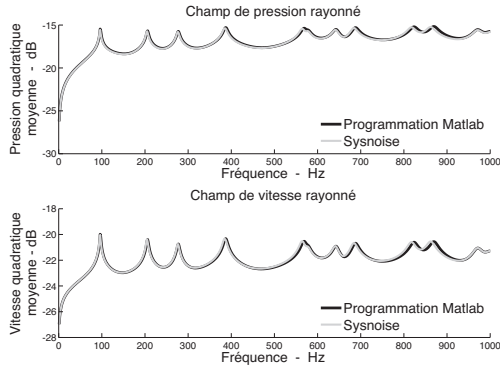


FIGURE 4 – Spectres des pression et vitesse rayonnées par la plaque

Cette vitesse normale est ensuite utilisée pour calculer le champ acoustique de pression (équation 8) et de vitesse particulière (équation 9).

On donne l'équation (7) pour un patch source  $P_S$  en fonction des dimensions de la plaque  $L_x$  et  $L_y$ , de l'effort appliqué  $F_0$ , de l'amplitude modale  $A_{n_x n_y}$  et de la déformée modale  $\phi_{n_x n_y}$ . Les équations (8) et (9) sont données pour un patch de mesure  $P_M$  excité par l'ensemble des patches sources  $P_S$  en fonction de la fonction de Green  $G$  et de la distance entre le patch de mesure et le patch source  $r$

$$V_S = \sum_{n_x, n_y} \frac{4i\omega_0}{L_x L_y \rho h} \cdot \frac{-F_0 A_{n_x n_y} \Phi_{n_x n_y}}{\omega_{n_x n_y}^2 - \omega_0^2 + i\eta \omega_{n_x n_y} \omega_0} \quad (7)$$

$$P_M = i\omega_0 \rho \sum_S V_S \cdot G \cdot S_S \quad (8)$$

$$V_M = \sum_S V_S \cdot \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial x} x_M + \frac{\partial r}{\partial y} y_M + \frac{\partial r}{\partial z} z_M \right) \cdot S_S \quad (9)$$

## 2.2 Validation du calcul

Les résultats calculés par le programme réalisé ont été comparés avec ceux obtenus par un solveur commercial permettant de résoudre le problème direct. Les cartographies de pression et de vitesse ont été comparées, ainsi que les courbes de pression et vitesse quadratiques moyennées sur la surface de mesure. On ne présente sur la figure (4) que les pression et vitesse quadratiques moyennées. Ces résultats démontrent la validité du calcul direct effectué.

## 2.3 Rétropropagation

Le calcul de rétropropagation est effectué selon l'équation (6) à partir des valeurs de pression et de vitesse calculées. On compare alors la vitesse quadratique moyenne rétropropagée à la vitesse quadratique moyenne calculée selon l'équation (7) (figure 5) ainsi que les champs de vitesse rétropropagés et référence (figure 6).

La résolution du problème inverse nécessite l'inversion de la matrice d'impédances  $[Z_{jk}]$  (équation 6). Cette matrice est parfois mal conditionnée et il est nécessaire de faire appel à des techniques de

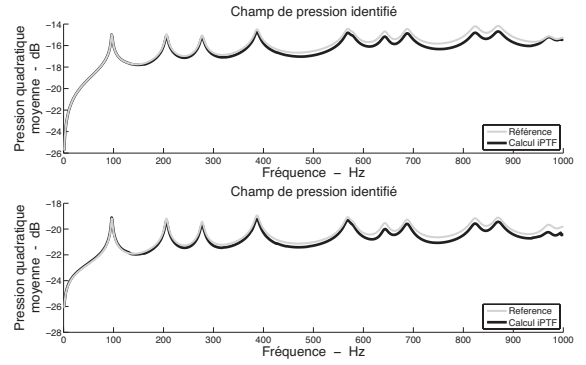


FIGURE 5 – Comparaison des spectres des pression et vitesse simulées et identifiées sur la plaque

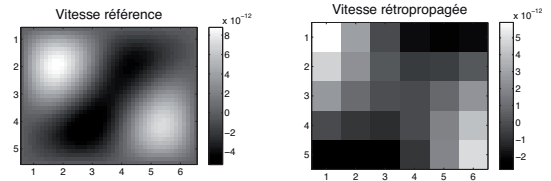


FIGURE 6 – Cartographie du champ de vitesse simulé (à gauche) et rétropropagé (à droite) sur la plaque à 312 Hz

régularisation pour améliorer l'inversion. Dans cet article, une régularisation par troncature des valeurs singulières a été utilisée. Le paramètre de régularisation a été ajusté à l'aide de la courbe en L présentée par Q. Leclère [3].

## 2.4 Simulation d'erreurs de mesure

Il est fait état, dans ce paragraphe, de la stabilité de la méthode iPTF face à des erreurs de mesure telles que bruit de fond ou mauvais positionnement des capteurs. L'influence de ces erreurs a été étudiée tant sur les valeurs quadratiques moyennes que sur leur répartition spatiale.

L'erreur est modélisée en suivant la relation (10) présentée dans les travaux de C. Pezerat [6].

$$X_b = \alpha X_c + \eta \quad (10)$$

Dans cette relation, le signal original  $X_c$  est modifié par une erreur multiplicative  $\alpha$  et une erreur additive  $\eta$ . Ces deux valeurs complexes sont tirées de manière aléatoire en suivant une loi normale dont les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  peuvent être ajustés.

Puisque nous utilisons ici les deux informations de pression et de vitesse, le premier test réalisé a été de constater la prédominance de l'une de ces deux données dans la précision du calcul iPTF. Ainsi, les mêmes paramètres d'erreur ont été ajoutés successivement à la pression puis à la vitesse et ont conduit au résultat présenté en figure (7) sur laquelle on peut constater qu'une erreur sur la pression pénalise l'estimation de la pression tandis qu'une erreur sur la vitesse pénalise l'estimation de la vitesse. On précise par ailleurs (équation 11) les paramètres utilisés pour ajouter l'erreur.

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= 1 & \sigma_\alpha &= 1 \\ \mu_\eta &= 0 & \sigma_\eta &= 5 \end{aligned} \quad (11)$$

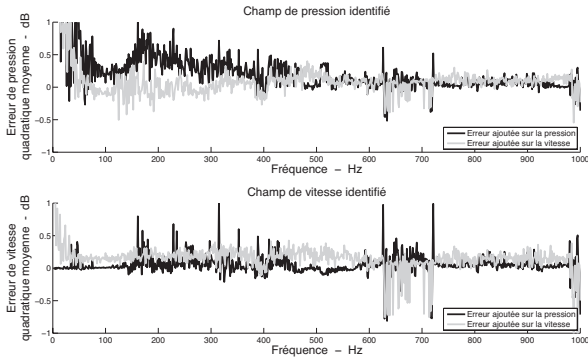


FIGURE 7 – Erreur sur l'estimation des spectres des pression et vitesse identifiées avec des mesures bruitées de la pression ou de la vitesse

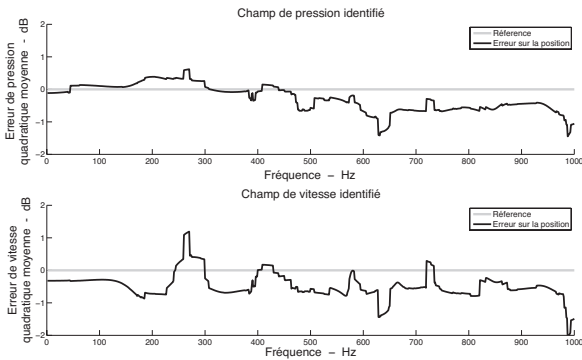


FIGURE 8 – Erreur sur l'estimation des spectres des pression et vitesse identifiées avec des mesures de pression et de vitesse mal localisées

Compte-tenu de ces paramètres exagérément forts par rapport à ce que l'on pourrait observer dans la pratique, l'on peut conclure que la méthode iPTF dispose d'une grande stabilité par rapport aux erreurs de bruit de mesure.

Dans un second temps, il a été question de savoir quelle pouvait être l'influence d'une erreur dans le positionnement du capteur de pression-vitesse lors de la mesure du champ rayonné. Pour ce faire, une erreur, telle que modélisée dans l'équation (10) a été ajoutée aux positions utilisées pour la calcul direct lors de l'étape *ii* de la simulation. On a ici utilisé les paramètres indiqués à l'équation (12) qui ont conduit aux résultats présentés à la figure (8).

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= 1 & \sigma_\alpha &= 0.1 \\ \mu_\eta &= 0 & \sigma_\eta &= 0.5 \end{aligned} \quad (12)$$

Compte-tenu des dimensions de la cavité, les paramètres utilisés ici correspondent à une variation de plusieurs centimètres sur la position du capteur. Un tel déplacement n'engendrant qu'une erreur de 2 dB, nous pouvons conclure que la méthode iPTF dispose d'une grande stabilité face aux erreurs de positionnement des capteurs.

En utilisant toujours les mêmes erreurs que précédemment (équations 11 et 12), on s'intéresse maintenant à la cartographie du champ de vitesse de vibration de la plaque. L'étude des quatre cartographies

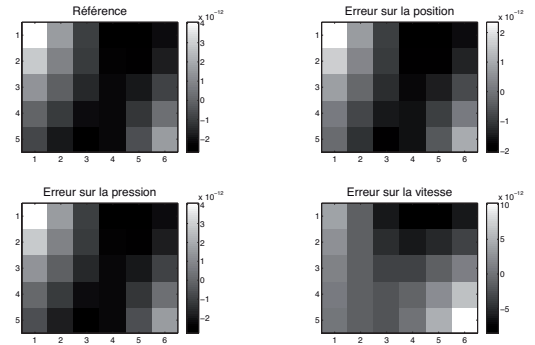


FIGURE 9 – Cartographies des champs de vitesse sur la plaque à 312 Hz lors d'erreur de mesures

présentées sur la figure (9) permet de constater qu'une erreur sur la position des capteurs ou une erreur sur la mesure de la pression acoustique n'est pas trop restrictive pour la localisation de vitesses de vibrations. En revanche, une erreur sur la mesure de la vitesse particulière modifie un peu la cartographie du champ de vitesses.

On met ici en avant l'un des atouts de la méthode iPTF dû au fait qu'elle utilise la double information de pression et de vitesse. Outre le fait qu'elle soit indépendante du champ acoustique environnant [2], l'utilisation en parallèle de l'information de pression et de vitesse agit comme un contrôle de la qualité de ces deux données et contribue à la robustesse de la méthode.

## 2.5 Influence du maillage de patches

La célérité des ondes de flexion dans une plaque peut être exprimée par la relation (13).

$$c_f = \sqrt[4]{\frac{D}{\rho h}} \sqrt{\omega} \quad (13)$$

où  $D$  est la rigidité de la plaque,  $\rho$  sa masse volumique,  $h$  son épaisseur et  $\omega$  la pulsation. Ainsi, à 1 kHz, pour trois plaques d'épaisseur différentes (1, 3 et 10 mm), nous calculons la célérité de flexion

$$c_{f1} = 313m/s \quad c_{f3} = 171m/s \quad c_{f10} = 99m/s$$

qui nous permet de calculer la longueur d'onde de structure à 1 kHz

$$\lambda_{s1} = 0.313m \quad \lambda_{s3} = 0.171m \quad \lambda_{s10} = 0.099m/s$$

Dans la simulation effectuée, le maillage a été défini de façon à ce que le côté du patch soit de 0.05 m. On constate ainsi que le maillage respecte un critère en  $\lambda_s/6$  pour la plaque de 10 mm d'épaisseur,  $\lambda_s/3$  pour la plaque de 3 mm d'épaisseur et  $\lambda_s/2$  pour la plaque de 1 mm d'épaisseur.

Les résultats de l'identification pour les trois plaques sont présentés sur la figure (10). Le critère  $\lambda_s/6$  conduit au meilleur résultat sur toute la gamme de fréquences étudiée. Le critère  $\lambda_s/2$  est le plus dégradé. Les résultats obtenus ne sont correctes que jusqu'au tier de la bande de fréquences. Pour des raisons de simplification du calcul, un critère en  $\lambda_s/4$  pourra être utilisé afin de réduire le volume de données sans pour autant dégrader de façon trop important la qualité des résultats.

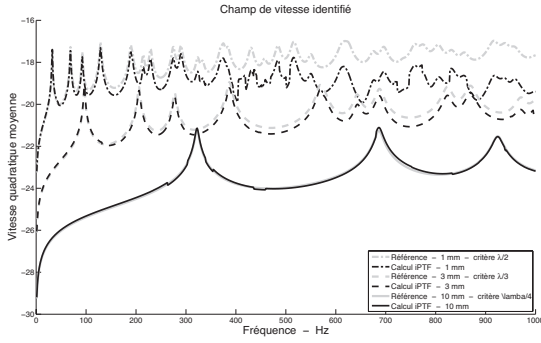


FIGURE 10 – Spectres des pression et vitesse identifiées en fonction de l'épaisseur de la plaque

### 3 Expérimentation

Une expérimentation a été mise en place afin de retrouver pratiquement les résultats obtenus par l'étude numérique présentée dans la section précédente. On présentera dans un premier temps le protocole expérimental utilisé. Ensuite de quoi nous nous attachons à montrer les résultats obtenus pour l'identification du champ de vitesse de vibration de la structure, aussi bien en terme de vitesse quadratique moyenne qu'en localisation.

#### 3.1 Protocole expérimental

L'idée de cette manipulation est de procéder à l'excitation solidienne d'une guitare acoustique. Celle-ci est donc appuyée en trois points et mise en vibration au moyen d'un pot vibrant collé à sa face inférieure. On mesure dans un premier temps la pression acoustique et la vitesse particulière aux environs directs de la surface supérieure de la guitare. Cette première mesure est par la suite utilisée comme mesure de référence pour les cartographies tracées. On effectue ensuite une mesure sur une surface fermée virtuelle englobant la guitare et le pot vibrant. Les mesures effectuées sur cette surface fermée sont alors utilisées comme paramètres d'entrée pour le calcul iPTF. À l'issue du calcul iPTF, nous obtenons les spectres de pression et de vitesse quadratique moyenne ainsi que les cartographies sur toutes les surfaces de la guitare, y compris celles qui nous étaient inaccessibles à la mesure (surface inférieure notamment).

#### 3.2 Résultats

Les premiers résultats pour la vitesse quadratique moyenne de vibration de la surface supérieure de la caisse de la guitare sont présentés en figure (11) et les cartographies du champ de vitesse de surface sont représentées en figure (12).

On constate, sur le spectre de vitesse, que les résultats obtenus sont un peu moins bons que ceux obtenus lors de la simulation numérique. Plusieurs raisons peuvent justifier cet écart, notamment celle présentée au paragraphe 2.5. La célérité des ondes de flexion dans la guitare étant difficile à estimer, il a été difficile de spécifier le maillage de manière à ce qu'il respecte un critère par rapport à la longueur d'onde de structure. De fait, le maillage a été choisi de façon à ce que ses

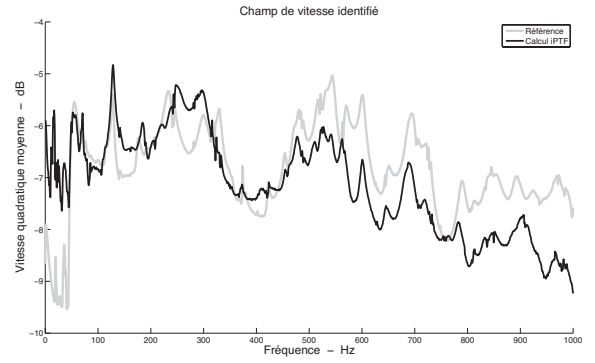


FIGURE 11 – Spectre de la vitesse identifiée sur la guitare

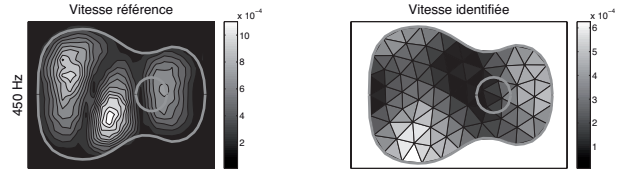


FIGURE 12 – Cartographie des champs de vitesse sur la surface supérieure de la guitare

éléments aient un côté de 0.05 m. En se basant sur les cartographies obtenues, nous pouvons, à partir de la distance séparant les ventres de vibration, estimer la célérité des ondes de flexion dans le bois (relation 14). Nous retrouvons alors le critère utilisé pour le maillage en utilisant la taille du patch  $d$  (relation 15).

$$c_f = \lambda_s f \quad (14)$$

$$\kappa = \frac{\lambda_s}{c/df} \quad (15)$$

Sur la totalité de la bande de fréquence étudiée, nous trouvons, à 1 kHz, le critère

$$\kappa_{1000Hz} = \lambda_s/3$$

Ainsi, comparativement aux résultats présentés au paragraphe 2.5, il est logique que les résultats obtenus par la méthode iPTF décrochent de la réalité à partir de la moitié de la bande de fréquence étudiée.

On peut par ailleurs supposer que, compte-tenu de la finesse des parois de la guitare, celle-ci doit être très peu rayonnante et qu'une certaine part du champ émis est constitué d'ondes évanescentes non perçues à la distance de mesure. Ce qui peut avoir introduit une erreur dans l'identification du champ de vitesse. Malgré ces éléments le résultat est donné avec une erreur de 1 dB seulement et permet toujours de donner l'information des fréquences propres de la structure. De la même manière, on constate sur les cartographies que la localisation est parfois moins précise. L'ordre de grandeur de l'amplitude de vibration est toutefois respecté. Une meilleure connaissance des paramètres évoqués précédemment permettra d'améliorer encore la précision de la méthode iPTF.

### Références

- [1] Aucejo M., Totaro N., Guyader J.-L., "Identification of source velocities with Inverse Patch Trans-

- fer Functions method", *Acoustics'08 : Journal of the Acoustical Society of America*, 123 (5), (2008)
- [2] Aucejo M., Totaro N., Guyader J.-L., "Identification of source velocities in presence of external correlated sources with the inverse patch transfer functions (IPTF) method", *Novem 2009*, (2009)
- [3] Leclere Q., "Étude et développement de la mesure indirecte d'efforts - application à l'identification des sources internes d'un moteur diesel", *Rapport de Thèse*, INSA de Lyon, Lyon, (2003)
- [4] Maynard J. D., Williams E. G., Lee Y., "Nearfield Acoustical Holography : I. Theory of generalized holography and the development of NAH", *Journal of the Acoustical Society of America*, 78 (4), 1395-1413, (1985)
- [5] Ouisse M., Maxit L., Cacciolati C., Guyader J.-L., "Patch Transfert Function as a tool to couple linear acoustic problems", *Journal of Vibration and Acoustics*, 127 (5), 458-466, (2005)
- [6] Pezerat C., Guyader J.-L., "Force Analysis Technique : Reconstruction of Force Distribution on Plates", *Acte Acustica*, 86, 322 - 332, (2000)
- [7] Totaro N., Andro B., Péteul C., Guyader J.-L., "Extension of the Patch Transfert Functions method (PTF method) to high frequency domain (sub-cavities decomposition)", *Inter-Noise*, Istanbul, Turquie, (2007)
- [8] Wu S. F., "Hybrid near-field acoustic holography", *Journal of the Acoustical Society of America*, 115 (1), 207-217, (2004)

# Identification de champs de vitesse, pression et intensité à l'aide de la méthode PTF

D. VIGOUREUX<sup>a</sup>, N. TOTARO<sup>a</sup>, J.-L. GUYADER<sup>a</sup>

*a. Laboratoire Vibrations Acoustique, INSA Lyon,  
25 bis avenue Jean Capelle, F-69621 Villeurbanne cedex*

## Résumé :

*Nous souhaitons présenter dans cette étude une récente extension de la méthode PTF permettant d'identifier, au delà d'un champ de vitesse, des champs de pression et d'intensité. Nous rappellerons donc dans un premier temps les équations à la base de la méthode ainsi que les quelques étapes supplémentaires permettant l'obtention des nouvelles données. Ensuite de cela, nous présenterons les spectres et cartographies obtenues pour une application numérique.*

## Abstract :

*We wish to present, in this document, a recent extension to the PTF method allowing, beyond the identification of a velocity field, identifying pressure and intensity fields. We will then firstly remind you the basic equations of this method as well as the few added steps used to calculate the new data. We will then present the spectra and cartographies obtained for a numerical analysis.*

**Mots clefs :** mesure intensimétrique ; méthode PTF.

## 1 Introduction

### 1.1 Présentation

L'identification et la caractérisation des sources acoustiques reste encore aujourd'hui un sujet d'importance pour les industriels qui ont besoin de techniques permettant d'identifier des sources (acoustiques ou vibratoires) sur des surfaces complexes dans un environnement acoustique non contrôlé. Dans cette optique, la méthode inverse appelée iPTF (inverse Patch Transfer Functions), dont les bases théoriques ont déjà été présentées [1], permet d'identifier un champ de vitesse sur une surface complexe dans un environnement non anéchoïque.

L'objectif de cet article est de démontrer que la méthode iPTF permet d'obtenir plus d'informations sur la source que la simple identification de vitesse. En effet, par l'utilisation de cette méthode, le champ de pression de la source peut être identifié, permettant ainsi d'identifier l'intensité normale et de localiser ainsi les sources de bruit. Cette avancée permet de placer la méthode iPTF en avant de quelques autres méthodes d'identifications ne permettant l'obtention que de l'une de ces deux informations. Pour mémoire, le lecteur pourra par exemple se reporter aux articles [2, 3, 4]

De plus, lors de précédentes communications sur les premières applications expérimentales de la méthode iPTF (voir entre autre [5]), des écarts entre mesure de référence et résultats d'identification étaient observés. Pour cerner les limites de la méthode, nous démontrerons ici l'influence des ondes évanescentes sur la qualité des résultats obtenus.

### 1.2 Approche théorique

Nous rappellerons dans cette section les équations fondamentales de la méthode PTF dans sa formulation directe (rayonnement d'une source dans un système vibro-acoustique complexe) ainsi que dans sa

formulation indirecte (identification de source à partir de mesures du champ acoustique). Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux travaux de M. Aucejo [1] ainsi qu'aux premières applications expérimentales [5]. Nous verrons alors comment l'association de la méthode directe et de la méthode indirecte peut conduire au calcul d'un champ d'intensité.

### 1.2.1 Rayonnement d'une surface vibrante dans une cavité acoustique

Pour calculer le problème de rayonnement présenté sur la figure (1(a)), on isole une partie  $V$  du domaine global  $\Omega$  (figure 1(b)). On peut alors calculer la pression sur la surface  $\Sigma$  en résolvant le problème dans le sous-domaine  $V$ . On obtient dans ce cas cette première relation.

$$\langle p(M) \rangle_{\Sigma_e}^V = \sum_{\Gamma_e=1}^{N_{\Gamma_e}} Z_{\Gamma_e \rightarrow \Sigma_e}^V \langle V \rangle_{\Gamma_e}^V + \sum_{\Sigma_{e'}=1}^{N_{\Sigma_e}} Z_{\Sigma_{e'} \rightarrow \Sigma_e}^V \langle V \rangle_{\Sigma_{e'}}^V \quad (1)$$

La résolution du problème dans le volume  $\Omega \setminus V$  conduit à cette seconde relation.

$$\langle p(M) \rangle_{\Sigma_e}^{\Omega \setminus V} = \sum_{\Sigma_{e'}=1}^{N_{\Sigma_{e'}}} Z_{\Sigma_{e'} \rightarrow \Sigma_e}^{\Omega \setminus V} \langle V \rangle_{\Sigma_{e'}}^{\Omega \setminus V} \quad (2)$$

On connaît par ailleurs les conditions de continuité au niveau de la surface de couplage. On rappelle ici que domaine  $V$  est un sous-domaine de type *cavité* alors que le domaine  $\Omega \setminus V$  est un sous-domaine de type *milieu infini*

$$\begin{cases} \langle p(M) \rangle_{\Sigma_e}^V = \langle p(M) \rangle_{\Sigma_e}^{\Omega \setminus V} \\ \langle V \rangle_{\Sigma_e}^V = -\langle V \rangle_{\Sigma_e}^{\Omega \setminus V} \end{cases} \quad (3)$$

### 1.2.2 Identification des champs de vitesse, pression et intensité

$\langle p(M) \rangle_{\Sigma_e}$  et  $\langle V \rangle_{\Sigma_e}$  constituent les inconnues pour le problème de rayonnement traité par la méthode PTF. Pour la méthode inverse présentée ici, ils sont mesurés et  $\langle V \rangle_{\Gamma_e}$  devient l'inconnue. L'équation (1) permet alors à elle seule de déterminer la vitesse de la source. Ainsi, et présentée avec une notation matricielle pour alléger l'écriture :

$$\begin{aligned} \{ \langle P \rangle_{\Sigma_e} \} &= [Z_{\Gamma_e \rightarrow \Sigma_e}] \cdot \{ \langle V \rangle_{\Gamma_e} \} + [Z_{\Sigma_e \rightarrow \Sigma_{e'}}] \cdot \{ \langle V \rangle_{\Sigma_{e'}} \} \\ \Rightarrow \{ \langle V \rangle_{\Gamma_e} \} &= [Z_{\Gamma_e \rightarrow \Sigma_e}]^{-1} \cdot \{ \langle P \rangle_{\Sigma_e} \} - [Z_{\Sigma_e \rightarrow \Sigma_{e'}}] \cdot \{ \langle V \rangle_{\Sigma_{e'}} \} \end{aligned} \quad (4)$$

Les impédances sont calculées par une méthode adaptée. Pour l'application de la méthode iPTF, seules les impédances du sous-domaine de type cavité sont nécessaires. Un solveur éléments finis est alors utilisé pour calculer les impédances sur la base des modes de cavité aux parois rigides. Il faut bien remarquer ici que l'utilisation des modes de cavité aux parois rigides est un choix arbitraire (d'autres types de conditions aux limites auraient pu être utilisées) et n'a aucune réalité physique. Cette vision des choses, déjà argumentée dans [1], est ici étendue à l'identification de la pression de la source et de son intensité.

Il est alors possible, à partir des données calculées à l'aide de l'équation (4) pour  $\{ \langle V \rangle_{\Gamma_e} \}$ , de calculer, grâce à l'équation (2), la pression  $\{ \langle P \rangle_{\Gamma_e} \}$  pour chacune des surfaces d'identification

$$\{ \langle P \rangle_{\Gamma_e} \} = [Z_{\Gamma_{e'} \rightarrow \Gamma_e}] \cdot \{ \langle V \rangle_{\Gamma_{e'}} \} \quad (5)$$

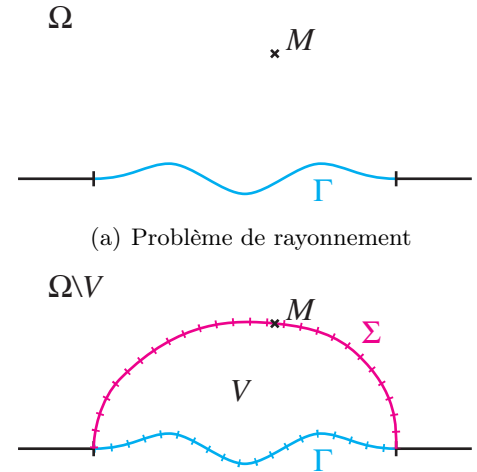


FIGURE 1 – Pose du problème

L'identification du champ d'intensité pariétale se fait alors aisément

$$\langle I \rangle_{\Gamma_e} = \frac{1}{2} \Re \left[ \langle P \rangle_{\Gamma_e} \cdot \langle V \rangle_{\Gamma_e}^* \right] \quad (6)$$

Il est important de signaler ici que le méthode PTF permet de calculer les valeurs vectorielles dans la direction normales aux surfaces constituées. Ainsi, nous ne pouvons identifier avec cette méthode que les champs de vitesse et d'intensité normaux.

## 2 Application numérique

### 2.1 système étudié

On étudie, dans cette partie, le comportement d'une plaque rectangulaire excitée par un effort harmonique ponctuel (figure 1(a)). Un solveur numérique basé sur une méthode par éléments finis de frontière est utilisé pour la résolution du problème de rayonnement. Ce calcul de référence est utilisé à la fois pour obtenir les champs de vitesse, de pression et d'intensité que l'on cherche à identifier par la méthode iPTF d'une part mais également les champs de pression et de vitesse rayonnés par la plaque sur une surface l'entourant complètement. Ces deux derniers champs servant à alimenter la méthode iPTF. La géométrie de cette surface entourant la plaque, détaillée sur la figure (1(b)), a été choisie de façon à limiter les problèmes de symétrie et à introduire une complexité dans le volume acoustique considéré.

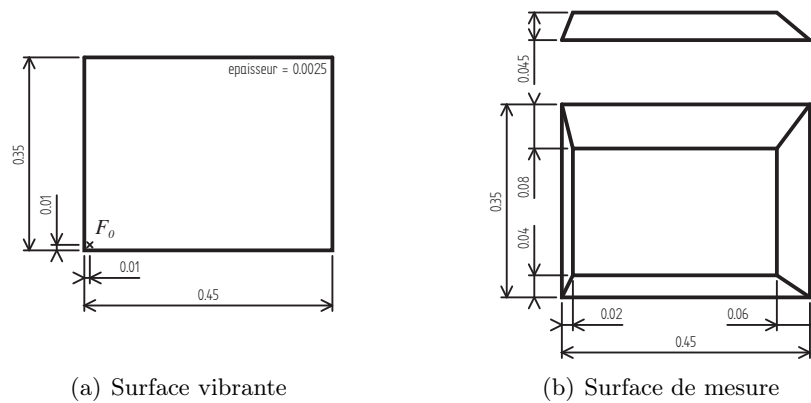


FIGURE 2 – Cas d'application numérique

Il est important de noter ici que la méthode utilisée pour le calcul du rayonnement (BEM dans un milieu infini) est complètement différente de celle utilisée pour l'identification (FEM en cavité parois rigides). Comme suggéré par A. Wirgin [6], Les deux solveurs étant basés sur des théories différentes, cette expérience numérique permet bien de valider notre approche.

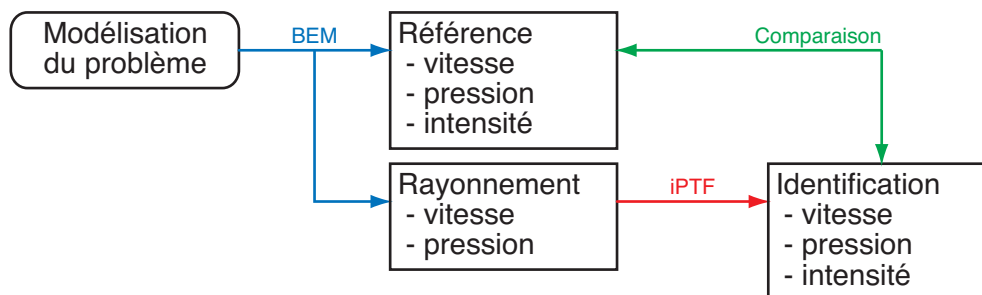


FIGURE 3 – Protocole de simulation



## 2.2 Identification des spectres de vitesse, pression et intensité moyennes de la source

On s'intéresse aux quantités quadratiques moyennes identifiées sur la surface source en choisissant à chaque fois une référence unité pour l'échelle de dB. La figure (4) présente les résultats obtenus pour la vitesse, la pression ainsi que l'intensité.

Pour l'application de la méthode iPTF, le volume acoustique virtuel défini par l'union de la surface vibrante  $\Gamma$  et de la surface de mesure  $\Sigma$  est modélisé par éléments finis. Les modes de la cavité virtuelle à parois rigides sont calculés jusqu'à 8 kHz et sont utilisés pour calculer les impédances entre patches.

En appliquant l'équation (4) sur les pressions et vitesses rayonnées, la vitesse normale de la plaque est identifiée et comparée à la vitesse de référence (figure 4(a)). En utilisant l'équation (5) et la vitesse identifiée précédemment on obtient la pression pariétale de la plaque (figure 4(b)). Finalement, l'équation (6) appliquée aux données de pression et vitesse identifiées permet d'accéder à l'intensité normale (figure 4(c)).

Les spectres ainsi identifiés montrent une très bonne concordance avec les résultats de référence démontrant ainsi que la méthode iPTF permet non seulement d'identifier la vitesse de source mais également la pression pariétale et l'intensité avec une bonne précision. Ces résultats encourageants devront toutefois être soumis à des tests de sensibilité aux erreurs de mesure.

On peut par ailleurs remarquer sur les spectres moyens que les résultats semblent moins entachés d'erreurs en hautes fréquences qu'en basses fréquences. Comme toute méthode de discrétisation, la méthode iPTF comporte des limitations en hautes fréquences liées à la taille des surfaces de discrétisation et au nombre de modes calculés pour la base modale. Ces limites en haute fréquence ne sont pas atteintes ici. Toutefois, on observe une limite en basses fréquences qui peut expliquer certains résultats mitigés comme ceux de l'expérience menée sur la guitare [5]. Cette limite en basses fréquences sera étudiée dans le paragraphe 2.4.

## 2.3 Cartographies

On s'intéresse maintenant aux trois cartographies de pression pariétale, vitesse normale et intensité normale. La figure (5) présente les résultats obtenus pour la localisation en valeur absolue des amplitudes de chacun des champs à 2000 Hz.

La cartographie d'intensité donne une information importante sur la localisation et la quantification des sources acoustiques. Cette validation permet aussi de démontrer que la méthode iPTF est capable de rendre compte du déphasage entre vitesse et pression identifiées.

## 2.4 Influence des ondes évanescentes sur la qualité des résultats

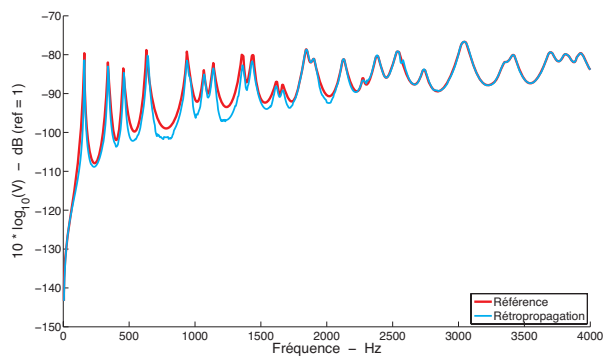
Nous avons observé, dans le paragraphe 2.2, une limite en basse fréquence de l'utilisation de la méthode iPTF. Cette zone fréquentielle pour laquelle les résultats identifiés sont entachés d'erreur est liée au taux d'ondes évanescentes captées sur la surface de mesure. Dans notre calcul, la distance à la surface de la plaque est d'environ 0.045 m. Le taux d'ondes évanescentes pouvant être pris en compte à cette distance est présenté en fonction de la fréquence sur la figure (6).

On constate, grâce à cette figure, qu'au dessus de la fréquence de coupure du rayonnement, la méthode iPTF reconstitue parfaitement la source et qu'en dessous de cette fréquence, les résultats sont entachés d'une erreur plus ou moins importante en fonction du taux d'ondes évanescentes captées sur la surface de mesure. Ainsi, plus l'objet que l'on souhaite identifier à un comportement évanescent (plaque fine par exemple) plus il faudra que la surface de mesure soit proche de l'objet.

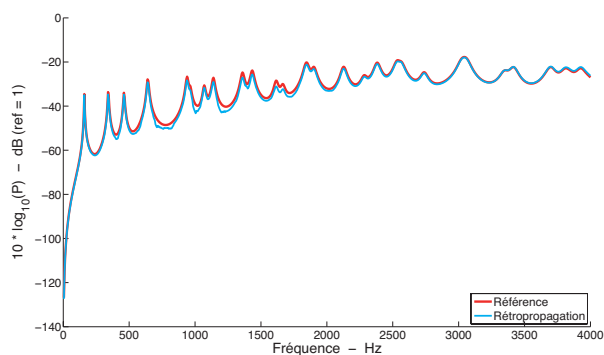
## 3 Conclusions

Les figures (4) et (5) montrent que la méthode PTF est tout à fait apte à donner une information précise quant aux spectres de pression, vitesse et intensité normale d'une source ainsi qu'à la localisation des sources vibratoires. La limitation en haute fréquence de la méthode déjà évoquée dans de précédentes

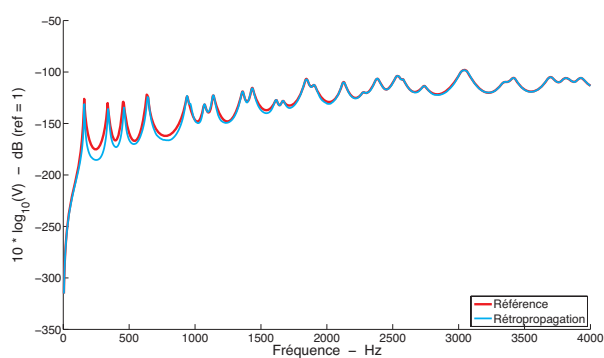




(a) Vitesse



(b) Pression



(c) Intensité

FIGURE 4 – spectres rétropropagés

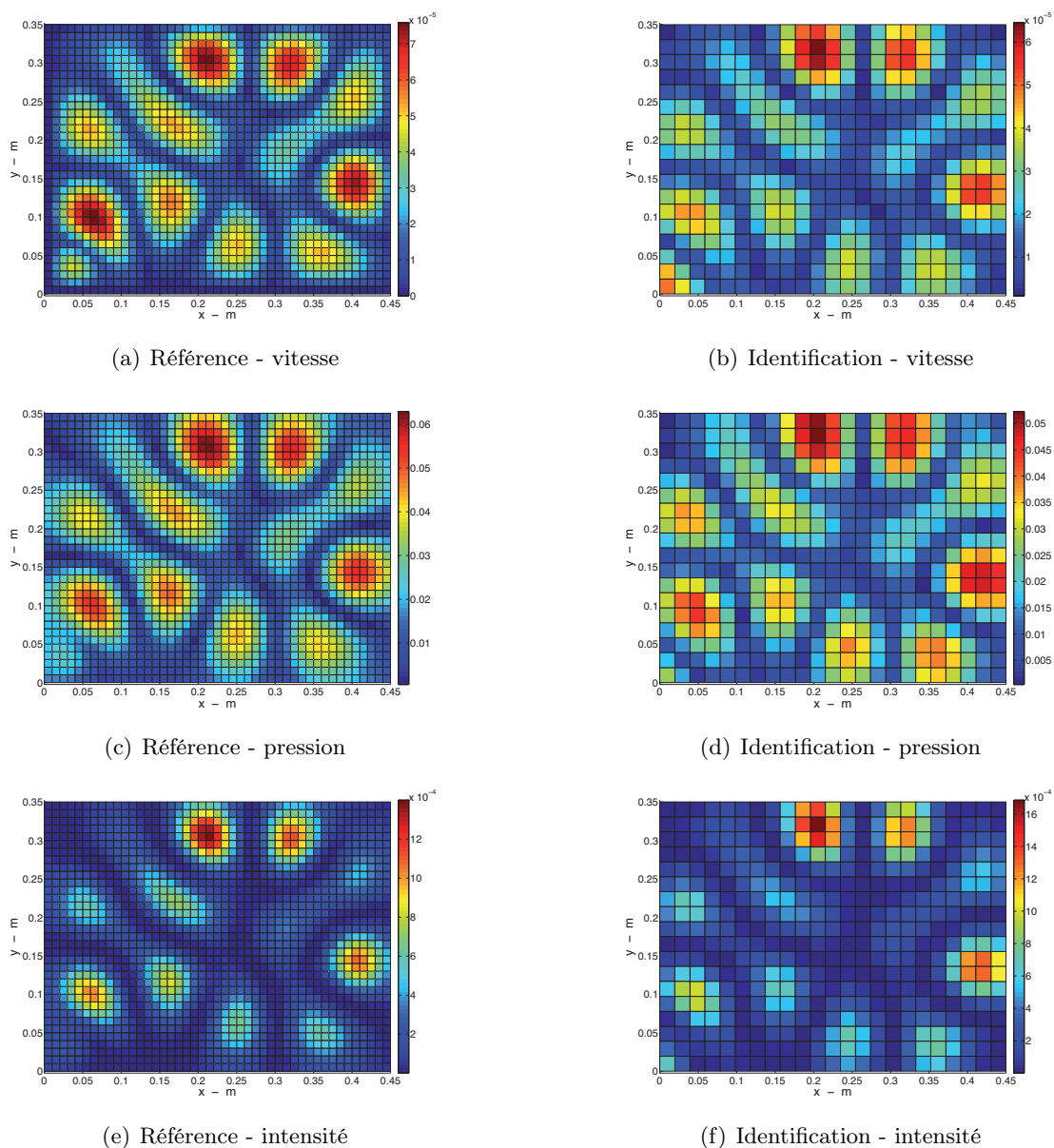


FIGURE 5 – Cartographies rétropropagées

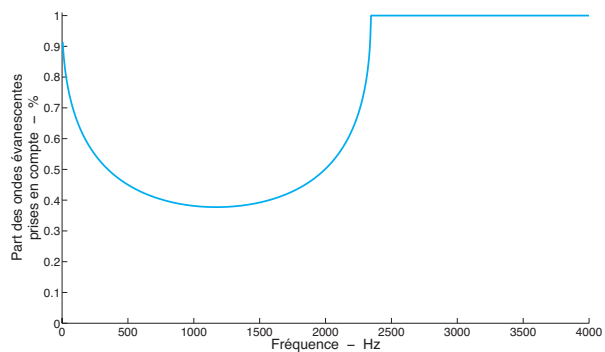


FIGURE 6 – Part des ondes évanescentes prise en compte dans le calcul

communications [1, 5] ont été rappelées pour cette étude. Par ailleurs, une limite en basse fréquence, liée au taux d'ondes évanescentes pris en compte a été relevée.

## Références

- [1] Aucejo M., Totaro N., Guyader J.-L., "Identification of source velocities on 3D structures in non-anechoic environments : Theoretical background and experimental validation of the inverse patch transfer functions method", *Journal of Sound and Vibration*, 329 (18), 3691-3708, (2010)
- [2] Langrenne C., Melon M., Garcia A., "Measurement of confined acoustic sources using near-field acoustic holography", *Journal of the Acoustical Society of America*, 126 (3), 1250-1256, (1009)
- [3] Maynard J. D., Williams E. G., Lee Y., "Nearfield Acoustical Holography : I. Theory of generalized holography and the development of NAH", *Journal of the Acoustical Society of America*, 78 (4), 1395-1413, (1985)
- [4] Pezerat C., Guyader J.-L., "Force Analysis Technique : Reconstruction of Force Distribution on Plates", *Acta Acustica*, 86, 322 - 332, (2000)
- [5] Vigoureux D., Totaro N., Guyader J.-L., "Mesure de vitesse vibratoire par la méthode iPTF : simulation et expérimentation", *20<sup>e</sup> Congrès Français d'Acoustique*, Lyon, (2010)
- [6] Wirgin A., "The inverse crime" (2004)





## Bibliographie

- [1] J. ANTONI : A bayesian approach to sound source reconstruction : optimal basis, regularization, and focusing. *Journal of the Acoustical Society of America*, In Press.
- [2] J. ANTONI : Bayesian focusing - a unified approach to inverse acoustic radiation. *In Proceedings of ISMA 2010*, 2010.
- [3] J. ANTONI : Focalisation bayesienne - une approche unifiée du problème inverse en acoustique. *In 10<sup>e</sup> Congrès Français d'Acoustique*, 04 2010.
- [4] M. AUCEJO, N. TOTARO et J.-L. GUYADER : Identification of source velocities on 3d structures in non-anechoic environments : Theoretical background and experimental validation of the inverse patch transfer functions method. *Journal of Sound and Vibration*, 329:3691–3708, 03 2010.
- [5] F. AUGUSZTINOVICZ et M. TOURNOUR : *Boundary Elements in Acoustics*, chapitre Reconstruction of source strength distribution by inverting the boundary element method. WIT Press, Southhampton, 2000.
- [6] D. T. BAILEY : Meteorological monitoring guidance for regulatory modeling applications. Rapport technique, Environmental Protection Agency, 02 2000.
- [7] E. BECACHE, A.-S. BONNET-BEN DHIA et G. LEGENDRE : Perfectly matched layers for the convected helmholtz equation. *SIAM, Journal on Numerical Analysis*, 42(1):409–433, 03 2004.
- [8] J. BENESTY, J. CHEN et Y. A. HUANG : On widely linear wiener and tradeoff filters for noise reduction. *Speech Communication*, 52:427–439, 2010.
- [9] M. BOUVET : *Traitement des signaux pour les systèmes sonar*. Masson, 1991.
- [10] M. S. BRANDSTEN : *A framework for speech source localisation using sensor arrays*. Thèse de doctorat, Division of Engineering at Brown University, 05 1995.
- [11] M. BRUNEAU : *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans, France, 1983.

- [12] H. P. BUCKER : Use of calculated sound fields and matched-field detection to locate sound sources in shallow water. *Journal of the Acoustical Society of America*, 59(2):368–373, 09 1976.
- [13] D. CHARRAUT, D. COURJON, C. BAINIER et L. MOULINIER : Analysis of optical near-field images by karhunen-loève transformation. *Applied Optics*, 35(20):3853–3861, 1996.
- [14] P. COMON : Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle. *Traitement du Signal*, 7(5):435–450, 1990.
- [15] P. COMON : Independent component analysis, a new concept? *Signal Processing*, 36:287–314, 1994.
- [16] H.-E. DE BREE : An overview of microflown technologies. *Acta Acustica United with Acustica*, 89(1):163–172, 01 2003.
- [17] H.-E. DE BREE, P. LEUSSINK, T. KORTHORST, H. JANSEN et T. S. J. LAMMERINK : The  $\mu$ -flown : a novel device for measuring acoustic flow. *Sensors and Actuators A*, 54:552–557, 1996.
- [18] E. O. DOEBELIN : *Measurement Systems, application and design*, chapitre Hot-Wire and Hot-Film anemometers, pages 596–610. University of Wisconsin-Madison, 2004.
- [19] C. DRAEGER, D. CASSERAU et M. FINK : Time reversal of ultrasonic waves in solids. *In 130th Meeting of the Acoustical Society of America*, Saint Louis, Missouri, United States, 1995.
- [20] Y. EPHRAIM et D. MALAH : Speech enhancement using a minimum mean-square error short-time spectral amplitude estimator. *IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing*, ASSP-32(6):1109–1121, 12 1984.
- [21] Y. EPHRAIM et D. MALAH : Speech enhancement using a minimum mean-square error log-spectral amplitude estimator. *IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing*, ASSP-33(2):443–445, 04 1985.
- [22] M. FINK, C. PRADA et F. WU : Self focusing on inhomogeneous media with time reversal acoustic mirrors. *In Proceedings of IEEE ultrasonics symposium*, volume 2, pages 681–686, Montreal, Canada, 1989.
- [23] L. GAVRIĆ et G. PAVIĆ : A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):29–43, 1993.
- [24] G. H. GOLUB, M. HEATH et G. WAHBA : Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2):215–223, 1979.

- [25] G. H. GOLUB et C. REINSCH : Singular value decomposition and least square solutions. *Numerische Mathematik*, 14(5):403–420, 1970.
- [26] S. GRANGER et L. PEROTIN : An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure. part 1 : theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(1):53–65, 1999.
- [27] J.-L. GUYADER : *Vibration des milieux continus*. Hermes Science, 2002.
- [28] P. C. HANSEN : The truncated svd as a method for regularization. Rapport technique, Stanford University, Computer Science Department, Stanford, California, United States, 1986.
- [29] P. C. HANSEN : Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank. *SIAM, Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11:503–518, 1990.
- [30] P. C. HANSEN : The l-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, ed. P. Johnston, *Advances in Computational Bioengineering*, pages 119–142. WIT Press, 2000.
- [31] S. I. HAYEK, M. J. PERCHESKY et B. C. SUEN : Measurement and analysis of near and far field structural intensity by scanning laser vibrometry. In *Intensité vibratoire dans les structures, 31<sup>e</sup> congrès international sur l'intensimétrie, Senlis, 27-29 août 1990*, pages 281–288, Senlis, France, 1990. CETIM.
- [32] S. HAYKIN et B. WIDROW : *Least-Mean-Square adaptive filters*. John Wiley and Sons, New York, United States, 2003.
- [33] T. HAYNES : A primer on digital beamforming. Rapport technique, Spectrum Signal Processing, 03 1998.
- [34] H. L. F. von HELMHOLTZ : *J. f. Math*, 57(7), 1859.
- [35] H. HOTELLING : Analysis of a complex of statistical variables with principal components. *Journal of Educational Psychology*, 1933.
- [36] A. HYVÄRINEN, J. KARHUNEN et E. OJA : *Independent component analysis*. John Wiley and Sons, New York, United States, 2001.
- [37] R. K. ING, N. QUIEFFIN, S. CATHELIN et M. FINK : In solid localization of finger impacts using acoustic time-reversal process. *Applied Physics Letters*, 87, 2005.
- [38] J. D. JACKSON : *Électrodynamique classique*. Dunod, 2001.
- [39] F. JACOBSEN et H.-E. DE BREE : A comparison of two different sound intensity measurement principles. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118(3):1510–1517, 09 2005.
- [40] J. B. JOHNSON : Thermal agitation of electricity in conductors. *Physical review*, 32:97–109, 1928.



- [41] E. JULLIARD, S. PAUZIN, F. SIMON et D. BIRON : Acoustic sources' localization in presence of reverberation. *In Proceedings of Noise-Con 2005*, Minneapolis, États-Unis, 09 2005.
- [42] E. JULLIARD, F. SIMON, S. PAUZIN et D. BIRON : Acoustic localization into a generic helicopter cabin. *In Proceedings of Euronoise 2006*, Tampere, Finlande, 05 2006.
- [43] S.-C. KANG et J.-G. IH : The use of partially measured sources data in nearfield acoustical holography based on the bem. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(5):2472–2479, 05 2000.
- [44] C. LANGRENNE, M. MELON et A. GARCIA : Boundary element method for the acoustic characterization of a machine in bounded noisy environment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(5):2750–2757, 05 2007.
- [45] C. LANGRENNE, M. MELON et A. GARCIA : Measurement of confined acoustic sources using near-field acoustic holography. *Journal of the Acoustical Society of America*, 126(3):1250–1256, 09 2009.
- [46] M. LAVIEILLE, F. SIMON et F. MICHELI : Measurement of liner acoustic impedance in a shear layer of a subsonic flow by laser doppler velocimetry. *In Proceedings of SAPEM 2005*, Lyon, France, 12 2005.
- [47] G. LE BESNERAIS, F. CHAMPAGNAT, A. PLYER, R. FEZZANI, B. LECLAIRE et Y. LE SANT : Advanced processing methods for image-based displacement field measurement. *AerospaceLab, The Onera Journal*, 1, 2009.
- [48] Q. LECLÈRE : *Étude et développement de la mesure indirecte d'efforts - Application à l'identification des sources internes d'un moteur Diesel*. Thèse de doctorat, INSA, 2003.
- [49] C. LESUEUR : *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles, 1988.
- [50] J. LIU, J. HAN et D. W. HERRIN : Sound field reconstruction using inverse boundary element method. *In Proceedings of the 27th International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, United States, 02 2009.
- [51] A. E. H. LOVE : On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *In Philosophical transactions of the Royal Society (London)*, numéro 17 de série A, pages 491–549, 1888.
- [52] T. LOYAU, J.-C. PASCAL et P. GAILLARD : Broadband acoustic holography reconstruction from acoustic intensity measurements. i : principle of the method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 84(5):1744–1750, 11 1988.
- [53] G. MARTIN, F. SIMON et D. BIRON : Detection of acoustic radiating areas of a generic helicopter cabin by beamforming. *In acoustic'08 - Euronoise*, Paris, France, 06 2008.

- [54] J. D. MAYNARD et E. G. WILLIAMS : Nearfield acoustic holography (nah) : Ii. holographic reconstruction algorithms and computer implementation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 81(5):1307–1322, 1987.
- [55] J. D. MAYNARD, E. G. WILLIAMS et Y. LEE : Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and the development of nah. *Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4):1395–1413, 1985.
- [56] M. MELON, C. LANGRENNE, P. HERZOG et A. GARCIA : Evaluation of a method for the measurement of subwoofers in usual rooms. *Journal of the Acoustical Society of America*, 127(1):256–263, 01 2010.
- [57] A. MINOTTI, F. SIMON et F. GANTIE : Characterization of an acoustic liner by mean of laser doppler velocimetry in a subsonic flow. In *40<sup>e</sup> Colloque Aérodynamique Appliquée*, Toulouse, France, 03 2005.
- [58] V. A. MOROZOV : On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Mathematics Doklady*, 7:414–417, 1966.
- [59] D.U. NOISEUX : Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47(1):238–247, 1970.
- [60] H. NYQUIST : Thermal agitation of electric charge in conductors. *Physical review*, 32:110–113, 1928.
- [61] M. OUISSE, L. MAXIT, C. CACCIOLATI et J.-L. GUYADER : Patch transfer functions as a tool to couple linear acoustic problems. In *Transactions of the ASME*, volume 127, pages 458–466, 2005.
- [62] G. PAVIĆ : Measurement of structure borne wave intensity, part i : formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2):221–230, 1976.
- [63] K. PEARSON : On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Phylosophical magazine*, 2(6):559–572, 1901.
- [64] L. PEROTIN et S. GRANGER : An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure. part 2 : Flow-induced vibration application. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(1):67–81, 1999.
- [65] C. PEZERAT : *Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse*. Thèse de doctorat, INSA, 1996.
- [66] C. PEZERAT et J.-L. GUYADER : Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. *Acta Acustica*, 3:1–10, 1995.
- [67] C. PEZERAT et J.-L. GUYADER : Localisation d'efforts appliqués sur des structures minces : régularisation du problème inverse. *Revue française de mécanique*, 1:49–55, 1996.

- [68] C. PEZERAT et J.-L. GUYADER : Force analysis technique : reconstruction of force distribution on plates. *Acta Acustica*, 86:322–332, 2000.
- [69] B. PICINBONO et P. CHEVALIER : Widely linear estimation with complex data. *In IEEE transactions on Signal Processing*, volume 43, page 8, 08 1995.
- [70] H. PITOT : *Histoire de l'Académie Royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés de cette Académie*, chapitre Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes, et e sillage des vaisseaux, pages 363–376. Académie des sciences, Paris, France, 1732.
- [71] O. PROT : *Méthode de régularisation entropique et application au calcul de la fonction de distribution des ondes*. Thèse de doctorat, Université d'Orléans, Orléans, France, 07 2005.
- [72] G. M. QUÉNOT, J. PAKLEZA et T. A. KOWALEWSKI : Particle image velocimetry with optical flow. *Experiments in Fluids*, 25:177–189, 1998.
- [73] A. G. RAMM : *Inverse problems : mathematical and analytical techniques with applications to engineering*. Springer, 2004.
- [74] G. RASMUSSEN et M. BROCK : Acoustic intensity measurement probe. *In Proceedings of Recent developments in acoustic intensity measurement*, pages 81–88, Senlis, France, 1981.
- [75] G. RODRIGUEZ et D. THEIS : An algorithm for estimating the optimal regularization parameter by the l-curve. *In Rendiconti di Matematica*, volume 25 de VII, pages 69–84, Roma, Italie, 2005.
- [76] A. J. ROMANO, P. B. ABRAHAM et E. G. WILLIAMS : A poynting voector formulation for thin shells and plates, and its application to structural intensity analysis and source localization. part i : theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(3):1166–1175, 1990.
- [77] I. ROMERO : Pca-based noise reduction in ambulatory ecg. *In Proceedings of Computing in Cardiology*, Hangzhou, China, 09 2010.
- [78] I. ROMERO : Pca and ica applied to noise reduction in multi-lead ecg. *In Proceedings of Computing in Cardiology*, Krakow, Poland, 09 2011.
- [79] P. ROUQUIER : *Mesure de vitesses particulières acoustiques en champ libre par Vélocimétrie Laser Doppler : développement du banc de mesure et évaluation des performances*. Thèse de doctorat, École Doctorale de l'Université du Maine, Le Mans, France, 09 2004.
- [80] K. SAIJYOU et C. OKAWARA : Regularization method for measurement of structural intensity using nearfiels acoustical holography. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(4):2039–2045, 2005.

- [81] P. SCALART : Wiener filter for noise reduction and speech enhancement. The MathWork Inc., MATLAB 7.6, 2009.
- [82] A. B. SPALDING et J. A. MANN : Placing small constrained layer damping patches on a plate to attain global or local velocity changes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(6):3617–3624, 1995.
- [83] J. L. SPIESBERGER : Locating animals from their sounds and tomography of the atmosphere : experimental demonstration. *Journal of the Acoustical Society of America*, 106(2):837–846, 1999.
- [84] A. TARANTOLA : *Inverse problem theory*. SIAM, Philadelphia, Pensilvania, United States, 2005.
- [85] MICROFLOWN TECHNOLOGIES : Pu match - products - microflown. [en ligne]. disponible sur : <<http://www.microflown.com/products/standard-probes/pu-match.html>> (consulté le 12.03.2012).
- [86] MICROFLOWN TECHNOLOGIES : Pu mini - products - microflown. [en ligne]. disponible sur : <<http://www.microflown.com/products/standard-probes/pu-mini.html>> (consulté le 12.03.2012).
- [87] A. TIKHONOV et V. ARSENINE : *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Mir, 1976.
- [88] M. TOURNOUR, L. CREMERS, P. GUISET, F. AUGUSZTINOVICZ et F. MÁRKI : Inverse numerical acoustics based on acoustic transfer vectors. *In 7th international congress on sound and vibration*, Garmisch-Partenkirchen, Germany, 07 2000.
- [89] F. J. M. van der EERDEN, H.-E. de BREE et H. TIJDEMAN : Experiments with a new acoustic particle velocity sensor in an impedance tube. *Sensors and Actuators A*, 69:126–133, 1998.
- [90] D. VIGOUREUX et J.-L. GUYADER : A simplified time reversal method used to localize vibrations sources in a complex structure. *Applied Acoustics*, 73(5):491–496, 2012.
- [91] R. VISSER : Inverse source identification based on acoustic particle velocity measurements. *In The 2002 International Congress and Exposition on Noise Control Engineering (internoise)*, Dearborn, Michigan, United States, 08 2002.
- [92] R. VISSER : Source identification in structural acoustics with an inverse frequency response function technique. *In Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, Melbourne, Florida, United States, 05 2002.
- [93] R. VISSER : Acoustic source localization based on pressure and particle velocity measurements. *In The 32nd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering (Internoise)*, Seogwipo, Korea, 08 2003.

- [94] Z. WANG et S. F. WU : Helmholtz equation least squares method for reconstructing the acoustic pressure field. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4): 2020–2032, 10 1997.
- [95] N. WIENER : *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series : with engineering applications*. John Wiley and Sons, New York, United States, 1949.
- [96] E. G. WILLIAMS : The nearfield acoustical holography (nah) experimental method applied to vibration and radiation in light and heavy fluids. *Computers and Structures*, 65(3):323, 11 1997.
- [97] E. G. WILLIAMS : *Fourier acoustics : sound radiation and nearfield acoustical holography*. Academic, London, UK, 1999.
- [98] E. G. WILLIAMS : Regularization methods for near-field acoustical holography. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110(4):1976–1988, 2001.
- [99] E. G. WILLIAMS et H. D. DARDY : Generalized nearfield acoustical holography for cylindrical geometry : Theory and experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 81(2):389–407, 1987.
- [100] E. G. WILLIAMS, H. D. DARDY et R. G. FINK : Nearfield acoustical holography using an underwater, automated scanner. *Journal of the Acoustical Society of America*, 78(2):789–798, 1985.
- [101] A. WIRGIN : *The inverse crime*. LMA/CNRS, 2004.
- [102] S. F. WU : On reconstruction of acoustic pressure fields using the helmholtz equation least squares method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(5):2511–2522, 05 2000.
- [103] S. F. WU : Hybrid nearfield acoustic holography. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(1):207–217, 01 2004.
- [104] D. R. YNTEMA, J. W. van HONSCHOTEN et R. J. WIEGERINK : Integrated 3d sound intensity sensor with four-wire particle velocity sensors. *In Proceedings of Design, Test, Integration and Packaging of MEMS and MOEMS*, Nice, France, 04 2008.
- [105] Y. ZHANG et J. A. MANN : Example of using structural intensity and force distribution to study vibrating plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(1):354–361, 1996.
- [106] Y. ZHANG et J. A. MANN : Measuring the structural intensity and force distribution in plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(1):345–353, 1996.