Propriétés algébriques et homotopiques des opérades sur une algèbre de Hopf

Olivia Bellier

Université de Nice - Sophia Antipolis – UFR Sciences
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Nice - Sophia Antipolis

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par

Olivia BELLIER

le 16 octobre 2012

Propriétés algébriques et homotopiques des opérades sur une algèbre de Hopf

---

Thèse encadrée par	M Bruno VALLETTE	
Soutenue devant le jury	M Clemens BERGER	Examinateur
	Mme Kathryn HESS	Rapporteur
	Mme Muriel LIVERNET	Examinateur
	M Frédéric PATRAS	Examinateur
	M Bruno VALLETTE	Directeur de thèse
	Mme Nathalie WAHL	Rapporteur

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

Remerciements

Tout au long de ma thèse, je me suis efforcée de ne pas faire les choses dans l'urgence mais cette fois-ci j'ai quand même attendu le dernier moment. Alors, plutôt que d'oublier quelqu'un ou d'écrire un roman pour essayer de ne pas le faire, je vais m'empresser de remercier chaleureusement tous ceux avec qui j'ai passé du temps durant ma thèse, ne serait-ce qu'un peu, et donc qui m'ont influencé, chacun à sa façon, parfois même s'en rendre compte.

Je vais maintenant pouvoir m'attarder un peu plus sur certains d'entre vous l'esprit tranquille.

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement tous les membres du jury pour avoir volontiers lu et commenté mon rapport de thèse mais aussi pour avoir pris le temps de voyager jusqu'à Nice afin d'assister à ma soutenance. Je remercie plus particulièrement Frédéric Patras sans qui je n'aurais même pas eu de bourse de thèse.

Il fait partie du jury, c'est vrai, mais il mérite bien un paragraphe à lui tout seul ! Bruno, te remercier pour tout ce que tu m'as appris durant ces trois années, et pas qu'en mathématiques, n'est certainement pas suffisant. Je suis vraiment contente de t'avoir comme directeur. Tu es passionné, attentif, généreux, à l'écoute, drôle, rassurant, plein d'énergie, disponible et bien d'autres compliments te vont tout aussi bien.

Ils ont égayé mes journées et animé mes soirées, je parle bien sûr des doctorants ! Je vous fais une spéciale dédicace et sachez que nos discussions au ras des pâquerettes me manquent déjà. J'espère vous revoir bientôt à Toulouse ou sur les sentiers de Corse, qui sait...

Il n'était qu'un doctorant et voilà qu'aujourd'hui il est le gardien du sommeil de mes nuits... Ces années n'auraient pas été aussi belles sans toi. Il me faudrait beaucoup de temps pour te dire ce que je veux te dire. Ça tombe bien, on en a pas mal devant nous ! J'en profite pour remercier ta famille qui m'a très bien accueillie et avec qui je passe toujours de très bons moments.

Je voudrais dire merci à mes amis de Nouvelle-Calédonie, à qui je pense souvent. Je remercie également ceux que j'ai rencontré à Nice : en particulier, Bruno avec qui j'ai beaucoup joué à la belote (je sais que tu as cru que le troisième paragraphe était pour toi) et toi, chipette, qui est toujours là quand il le faut. Sans oublier tout le groupe Tamarii Tahiti, grâce à vous c'est comme si je retrouvais mon caillou.

C'est sans aucun doute eux qui ont joué le rôle le plus important dans tout ça. Maman, c'est la deuxième fois que j'aurais besoin de toi alors que tu n'es plus là et la douleur est toujours aussi grande. Tu es dans mon coeur mais tu me manques énormément ! Papa, tu n'as pas pu être là aujourd'hui et ce n'est pas grave puisque je sais que tu es très fier de moi. Je pense énormément à toi en cette période difficile et j'ai hâte de te retrouver pour des moments plus heureux ! Je ne vous remercierai jamais assez pour la belle vie que vous m'avez offerte.

Place aux mathématiques maintenant !

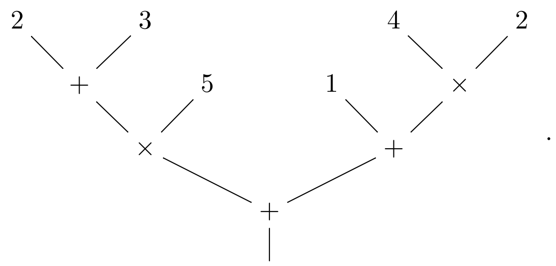
Table des matières

Résumé

Pour appréhender l'idée qui se cache derrière la notion d'opérade, considérons le problème suivant :

$$((2+3)\times 5)+(1+(4\times 2)) = \,?$$

Pour effectuer ce calcul, on représente mentalement ces opérations avec un arbre de la façon suivante :



Ce calcul est donc représenté grâce à un arbre, qui se parcourt de haut en bas, avec des feuilles indicées par les entiers qui interviennent dans notre calcul et des sommets indicés par les opérations $+$ et $\times$. L'ensemble de tels arbres représente toutes les compositions possibles des opérations $+$ et $\times$ qui agissent sur l'algèbre des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Plus généralement, la notion d'opérade a été introduite pour permettre d'étudier la structure algébrique de certains espaces en codant les opérations, et leurs compositions, qui agissent dessus. Par exemple, l'opérade algébrique des algèbres de Gerstenhaber code les opérations qui agissent sur la cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative, l'opérade topologique des petits disques code les opérations qui agissent sur les espaces de lacets doubles, ou encore l'opérade géométrique formée par l'homologie des espaces de modules de courbes stables code les invariants de Gromov–Witten qui agissent sur la cohomologie quantique d'une variété symplectique.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous rappellons les définitions et les résultats de la théorie des opérades. Nous le faisons de façon succincte et sans démonstration, renvoyant à [LV12] pour les détails.

Le deuxième chapitre étudie de nouvelles propriétés algébriques des opérades. Etant donné un type d'algèbres défini par une (ou des) opération génératrice μ, on appelle *scindage* toute structure algébrique définie par plusieurs opérations dont la somme est égale à μ. Par exemple, Jean-Louis Loday [Lod01] a démontré que les algèbres dendriformes, définies par deux produits binaires, constituent un scindage des produits associatifs. En effet, une algèbre dendriforme est un espace vectoriel A muni de deux opérations binaires $\prec$ et $\succ$, satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z + y \succ z),\\ (x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z),\\ (x \prec y + x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z)\ .\end{aligned}$$

Pour toute algèbre dendriforme $(A, \prec, \succ)$, le produit $*$ défini par $* := \prec + \succ$ est associatif.

Plus généralement, la théorie des opérades permet de donner un cadre conceptuel répondant au problème de scindage des opérations. Par exemple, Bruno Vallette [Val08] et Kyousuke Uchino [Uch09] ont établi un lien, au niveau opéradique, entre le scindage en deux des opérations binaires quadratiques et le produit noir de Manin. Par ailleurs, Marcelo Aguiar [Agu04] et Kyousuke Uchino [Uch09] ont démontré une relation entre le scindage en deux et les opérateurs de Rota-Baxter de poids nul, toujours dans le cas binaire quadratique. Or, tous les types d'algèbres ne sont pas nécessairement codés par une opérade binaire quadratique. C'est par exemple le cas des algèbres de Jordan, apparaissant dans l'étude des espaces symétriques et en mécanique quantique, qui sont codées par une opérade binaire non quadratique.

Nous résolvons le problème général du scindage pour toute opération binaire en introduisant la notion de *di-successeur* pour les opérades binaires : il existe un morphisme d'opérades

$$\mathcal{P} \to \mathrm{DSu}(\mathcal{P})\ ,$$

entre une opérade binaire $\mathcal{P}$ et son di-successeur $\mathrm{DSu}(\mathcal{P})$, qui fournit un scindage en deux au niveau des catégories d'algèbres associées. De manière analogue, nous définissons le *tri-successeur* $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ d'une opérade binaire $\mathcal{P}$, ce qui permet de scinder les opérations en trois. Le résultat suivant généralise et explique, au niveau des opérades, les liens susmentionnés entre scindages d'opérations, produit noir de Manin et opérateurs de Rota-Baxter.

Théorème. *Pour toute opérade binaire quadratique $\mathcal{P}$, il existe des isomorphismes d'opérades*

$$\mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{P} \cong \mathrm{DSu}(\mathcal{P}) \quad \textit{et} \quad \mathcal{P}ost\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{P} \cong \mathrm{TSu}(\mathcal{P})\ .$$

Pour toute opérade binaire $\mathcal{P}$, il existe des morphismes d'opérades

$$\mathrm{DSu}(\mathcal{P}) \to RB_0(\mathcal{P}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \to RB_1(\mathcal{P})\ ,$$

qui correspondent au scindage des opérations.

En particulier, ceci nous a permis de répondre à une question posée par Jean-Louis Loday concernant la structure algébrique des matrices carrées à coefficients dans une algèbre Zinbiel, type d'algèbres défini par une opération binaire $\cdot$ vérifiant la relation :

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot (z \cdot y)\ .$$

Théorème. *L'espace des matrices carrées à coefficients dans une algèbre Zinbiel est muni d'une structure canonique d'algèbre dendriforme.*

Ce résultat correspond au cas $k = 1$ du théorème suivant : l'espace des matrices carrées à coefficients dans une algèbre sur le k-ième di-successeur de l'opérade $\mathcal{C}om$ est muni d'une structure canonique d'algèbre sur le k-ième di-successeur de l'opérade $\mathcal{A}ss$.

Dans le dernier chapitre, nous étudions de nouvelles propriétés homotopiques des algèbres sur une opérade. La théorie des opérades est apparue en topologie algébrique comme outil pour reconnaître, à homotopie près, les espaces de lacets itérés, grâce aux travaux de Peter May, Boardman–Vogt et Jim Stasheff. Dans les années 90, période de renaissance des opérades, l'algèbre homotopique (opéradique) a été utilisée par Maxim Kontsevich et Dmitry Tamarkin pour démontrer la quantification par déformation des variétés de Poisson.

Une question simple mais importante dans ce domaine est la suivante :

Comment se comporte une structure algébrique vis-à-vis des équivalences d'homotopie ?

Si l'on se donne une équivalence d'homotopie entre deux complexes de chaînes et un produit associatif sur l'un des deux, le produit transféré sur le second n'est en général pas associatif. Ce défaut d'associativité est alors mesuré par des opérations homotopiques supérieures, de la manière suivante. Grâce à son travail sur les H-espaces et les espaces de lacets, Jim Stasheff [Sta63] a mis au jour la notion d'algèbre associative à homotopie près, aussi appelée A_∞-algèbre. Cette structure est formée d'un produit binaire et d'une infinité d'opérations d'arité supérieure. Tornike Kadeshvili [Kad82] a démontré qu'étant donnés deux complexes de chaînes homotopiquement équivalents, toute structure d'A_∞-algèbre, en particulier d'algèbre associative, sur le premier induit une structure d'A_∞-algèbre sur le second, tel que les deux structures soient homotopiquement équivalentes dans la catégorie des A_∞-algèbres.

Plus généralement, se pose la question du transfert d'une structure algébrique d'un complexe de chaînes vers un autre qui lui est homotopiquement équivalent. La dualité de Koszul, développée par Viktor Ginzburg et Mikhail Kapranov [GK94], et par Ezra Getzler et John Jones [GJ94], fournit un "Théorème de Transfert Homotopique" [LV12], qui répond précisément à cette question dans le cas des algèbres sur une opérade de Koszul. On peut le représenter de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (B, d_B) \arrow[l, shift left, "i"] \\ \mathcal{P} \arrow[u, dotted, "action"] & \mathcal{P}_\infty \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, dotted, "action"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

où les applications h, i et p définissent un rétract homotopique et où $\mathcal{P}_\infty$ est un remplacement cofibrant de l'opérade de Koszul $\mathcal{P}$.

Nous fournissons un théorème de transfert homotopique plus précis lorsque les données algébrique et homotopique partagent certaines propriétés. En effet, lorsque l'homotopie contractante commute avec une opération unaire, cette dernière n'est pas déformée par le transfert, ce qui simplifie de façon conséquente la structure transférée. Pour ne pas déformer ces opérations à homotopie près, notre idée est de les insérer dans la catégorie de base. Afin de modéliser ce phénomène, nous les encodons dans une algèbre de Hopf cocommutative, puis nous considérons des opérades dans la catégorie des modules sur cette algèbre de Hopf. Nous développons la dualité de Koszul pour cette catégorie d'opérades, ce qui nous permet d'affiner le théorème de transfert homotopique et de décrire précisément la structure transférée obtenue dans ce contexte.

Théorème. *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et soit*

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (B, d_B) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

un rétract homotopique dans la catégorie des dg H-modules. Soit $\mathcal{P}$ une H-opérade de Koszul agissant sur A. La structure de $(\mathcal{P} \rtimes H)_\infty$-algèbre transférée sur B par [LV12, Theorem 10.3.2,10.3.6] se réduit à la structure de H-$\mathcal{P}_\infty$-algèbre, fournie par la dualité de Koszul des H-opérades.

La dualité de Koszul classique permet également d'étudier la théorie homotopique des algèbres sur une opérade, en utilisant les propriétés des infini-morphismes. De même, la dualité de Koszul que nous développons dans cette thèse permet de définir une nouvelle notion d'infini-morphismes, à partir de laquelle nous donnons une description simplifiée de la catégorie homotopique des algèbres sur une opérade. Nous obtenons alors une nouvelle direction pour aborder certains résultats reliés à la conjecture de Kontsevich au sujet de la symétrie miroir.

Théorème. *Soit $\mathcal{P}$ une H-opérade de Koszul. La catégorie homotopique des dg H-$\mathcal{P}$-algèbres est équivalente à la catégorie homotopique des H-$\mathcal{P}_\infty$-algèbres avec leurs ∞-morphismes. De plus, pour toutes dg H-$\mathcal{P}$-algèbres A et B, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes de dg H-$\mathcal{P}$-algèbres*

$$A \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\sim} B \quad ,$$

(b) *il existe un ∞-quasi-isomorphisme de dg H-$\mathcal{P}$-algèbres $A \overset{\sim}{\rightsquigarrow} B$.*

On étudie plus particulièrement le cas des algèbres de Batalin–Vilkovisky, encore appelées algèbres BV, qui jouent un rôle important en physique mathématique et en topologie des cordes. Dans [GTV09], les auteurs définissent une notion d'algèbre BV à homotopie près et établissent un théorème de transfert homotopique pour cette structure. Cependant, la structure d'algèbre BV à homotopie près est complexe puisque chaque opération génératrice (le produit, le crochet de Lie et l'opérateur BV) et chaque relation engendrent une infinité d'homotopies supérieures. Lorsque l'homotopie contractante et l'opérateur BV commutent, nous simplifions la structure algébrique obtenue lors du transfert homotopique, en codant l'opérateur BV dans la catégorie de base. Dans ce cas, l'algèbre de Hopf H est l'algèbre des nombres duaux et la catégorie des dg H-modules est la catégorie des complexes mixtes, espaces gradués munis d'une différentielle de degré -1 et d'une différentielle de degré 1 qui anti-commutent. La H-opérade $\mathcal{P}$ est donnée par l'opérade $\mathcal{G}$ des algèbres de Gerstenhaber et l'opérade globale est $\mathcal{G} \rtimes H \cong \mathcal{BV}$.

Théorème. *Soit*

$$\begin{tikzcd} (A, d_A, \Delta_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (B, d_B, \Delta_B) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

une équivalence d'homotopie de complexes mixtes. Toute structure d'algèbre de Batalin–Vilkovisky sur A, telle que l'opérateur Δ_A anti-commute avec l'homotopie contractante, induit une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près sur B compatible avec l'opérateur Δ_B.

Conventions

Dans toute cette thèse, $\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique 0, afin d'assurer certains résultats homologiques. Cependant, le chapitre 1 ne nécessite pas cette restriction et les résultats demeurent vrais lorsque l'on considère un anneau.

Introduction : Opérades, dualité de Koszul et produits de Manin

Une opérade est un objet algébrique qui code la combinatoire des opérations agissant sur les algèbres d'un certain type. Il y a plusieurs moyens de définir une opérade particulière mais la façon la plus concrète est de décrire le type d'algèbres correspondant. Les types d'algèbres tels que les algèbres associatives, commutatives ou les algèbres de Lie fournissent des premiers exemples d'opérades.

L'étude théorique des compositions des opérations a débuté avec les travaux de Lazard sur les analyseurs [Laz55], dans les années 1950. Elle s'est poursuivie dans les années 60-70 grâce aux opérades, qui apparaissent alors comme un bon outil en topologie algébrique dans les travaux de Boardman–Vogt, May, MacLane, ou encore Stasheff. C'est May qui inventera le mot "opérade", formé à partir des mots "opération" et "monade". Dans les années 1990, les travaux de Ginzburg–Kapranov, Getzler–Jones, Kontsevich et Manin (pour ne citer qu'eux), en théorie de la déformation et en théorie des champs quantiques, relanceront l'intérêt porté aux opérades, notamment aux opérades algébriques.

0.1 Opérades

Dans cette section, nous rappelons une des définitions de la notion d'opérade. Les algèbres associatives sont définies comme des monoïdes dans la catégorie des espaces vectoriels $(\mathsf{Vect}, \otimes, \mathbb{K})$. Les opérades sont elles définies comme les monoïdes dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules. De même, la notion d'algèbre sur une opérade est analogue à celle de module sur une algèbre associative. Pour une étude plus complète des opérades, nous référons à [LV12, Chapitre 5].

0.1.1 La catégorie des $\mathbb{S}$-modules

Définition 0.1.1. Un $\mathbb{S}$-*module* est une collection $M = (M(0), M(1), \ldots, M(n), \ldots)$ de $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-modules à droite $M(n)$.
Un *morphisme de* $\mathbb{S}$-*modules* $f : M \to N$ est la donnée d'une collection de morphismes de $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-modules $f_n : M(n) \to N(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules, on définit la somme directe, le produit tensoriel et la composition. Étant donnés deux $\mathbb{S}$-modules M et N, leur *somme directe* est le $\mathbb{S}$-module défini par

$$(M \oplus N)(n) := M(n) \oplus N(n) \ .$$

Le *produit tensoriel* de M et N est le $\mathbb{S}$-module $M \otimes N$ défini par

$$\begin{aligned}
(M \otimes N)(n) &:= \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_i \times \mathbb{S}_j}^{\mathbb{S}_n} M(i) \otimes N(j) \\
&= \bigoplus_{i+j=n} M(i) \otimes N(j) \otimes_{\mathbb{S}_i \times \mathbb{S}_j} \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] \\
&\cong \bigoplus_{i+j=n} M(i) \otimes N(j) \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_i \times \mathbb{S}_j \backslash \mathbb{S}_n] \\
&\cong \bigoplus_{i+j=n} M(i) \otimes N(j) \otimes \mathbb{K}[Sh(i,j)] \ ,
\end{aligned}$$

où $Sh(i,j)$ est le sous-ensemble des (i,j)-shuffles de $\mathbb{S}_n$, c'est-à-dire les permutations σ de $\mathbb{S}_n$ telles que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(i) \quad \text{et} \quad \sigma(i+1) < \cdots < \sigma(i+j) \ ,$$

ce qui constitue un choix de représentants du quotient $\mathbb{S}_i \times \mathbb{S}_j \backslash \mathbb{S}_n$.
Leur *composée* est le $\mathbb{S}$-module $M \circ N$ défini par

$$M \circ N := \bigoplus_{k \geq 0} M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} N^{\otimes k} \ ,$$

où $N^{\otimes k}$ désigne k copies du $\mathbb{S}$-module N.

En particulier, on a

$$(M \circ N)(n) := \bigoplus_{k \geq 0} M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1 + \cdots + i_k = n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} N(i_1) \otimes \cdots \otimes N(i_k) \right) \ .$$

Puisque l'on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} N(i_1) \otimes \ldots \otimes N(i_k) &:= N(i_1) \otimes \ldots \otimes N(i_k) \otimes_{\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k}} \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] \\
&\cong N(i_1) \otimes \ldots \otimes N(i_k) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k} \backslash \mathbb{S}_n] \ ,
\end{aligned}$$

un élément de $(M \circ N)(n)$ est noté

$$(\mu; \nu_1, \ldots \nu_k; \overline{\sigma}), \ \ \mu \in M(k), \nu_1 \in N(i_1), \ldots, \nu_k \in N(i_k), \ \overline{\sigma} \in \mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k} \backslash \mathbb{S}_n \ .$$

Quand $\overline{\sigma} = \overline{\mathrm{id}}$, on le note $(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k)$.

À tout couple de morphismes de $\mathbb{S}$-modules $f : M \to N$ et $g : M' \to N'$, on associe un morphisme pour chaque objet défini ci-dessus de la façon suivante :

- $\begin{array}{cccc} f \oplus g : & M \oplus N & \to & M' \oplus N' \\ & (\mu, \nu) & \mapsto & (f(\mu), g(\nu)) \end{array} \ ,$
- $\begin{array}{cccc} f \otimes g : & M \otimes N & \to & M' \otimes N' \\ & \mu \otimes \nu & \mapsto & f(\mu) \otimes g(\nu) \end{array} \ ,$
- $\begin{array}{cccc} f \circ g : & M \circ N & \to & M' \circ N' \\ & (\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k) & \mapsto & (f(\mu); g(\nu_1), \ldots, g(\nu_k)) \end{array} \ .$

Définition 0.1.2. Le *foncteur de Schur* d'un $\mathbb{S}$-module M est l'endofoncteur $\widetilde{M} : \mathsf{Vect} \to \mathsf{Vect}$ défini par

$$\widetilde{M}(V) := \bigoplus_{n \geq 0} M(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} V^{\otimes n},$$

où $V^{\otimes n}$ est un $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-module à gauche via l'action suivante

$$\sigma \cdot (v_1, \ldots, v_n) := (v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}) \ .$$

Étant donnés deux $\mathbb{S}$-modules M et N, la somme $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N}$, le produit tensoriel $\widetilde{M} \otimes \widetilde{N}$ et la composée $\widetilde{M} \circ \widetilde{N}$ des foncteurs de Schur associés sont encore des foncteurs de Schur. Plus précisément, on a

$$\widetilde{M \oplus N} = \widetilde{M} \oplus \widetilde{N} \ , \ \widetilde{M \otimes N} = \widetilde{M} \otimes \widetilde{N} \quad \text{et} \quad \widetilde{M \circ N} = \widetilde{M} \circ \widetilde{N} \ .$$

Proposition 0.1.3. *La catégorie des* $\mathbb{S}$*-modules* $(\mathbb{S}-\mathsf{Mod}, \circ, I)$ *est une catégorie monoïdale, où le* $\mathbb{S}$*-module* $I = (0, \mathbb{K}, 0, \ldots)$ *concentré en arité* 1*, appelé* $\mathbb{S}$*-module identité , est l'identité.*

Definition 0.1.4. Le *produit de Hadamard* $M \underset{\mathrm{H}}{\otimes} N$ de deux $\mathbb{S}$-modules M et N est le $\mathbb{S}$-module défini par

$$(M \underset{\mathrm{H}}{\otimes} N)(n) := M(n) \otimes N(n) \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

0.1.2 Définition monoïdale d'une opérade

Définition 0.1.5. Une *opérade* est un monoïde $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-modules.

Explicitement, $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{S}$-module muni de deux morphismes de $\mathbb{S}$-modules $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et $\eta : \mathrm{I} \to \mathcal{P}$, appelés respectivement la *composition* et l'*unité* , qui satisfont

- l'axiome d'associativité

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{P} \circ (\mathcal{P} \circ \mathcal{P}) \arrow[r, "\mathcal{P}\circ\gamma"] & \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[dd, "\gamma"] \\
(\mathcal{P} \circ \mathcal{P}) \circ \mathcal{P} \arrow[ur, "\cong"] \arrow[d, "\gamma\circ\mathcal{P}"'] & & \\
\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[rr, "\gamma"'] & & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

- et l'axiome d'unité

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \circ \mathcal{P} \arrow[r, "\eta\circ\mathcal{P}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{P} \circ \mathrm{I} \arrow[l, "\mathcal{P}\circ\eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& \mathcal{P} \ . &
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme d'opérades* $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme entre les $\mathbb{S}$-modules sous-jacents, compatible avec les structures respectives de monoïde. On note Op la catégorie des opérades.

L'unité $\eta : \mathrm{I} \to \mathcal{P}$ définit un élément $\mathrm{id} := \eta(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{P}(1)$ appleé l'*opération identité.*

Remarque. Cette définition est celle d'opérade dans la catégorie des espaces vectoriels, ou encore d'*opérade algébrique.* Il existe également des opérades topologiques, des opérades dans la catégorie des complexes de chaînes, et, plus généralement, la notion d'opérade peut être définie dans toute catégorie monoïdale symétrique.

Exemple. À tout espace vectoriel V, on associe le $\mathbb{S}$-module suivant

$$\mathrm{End}_V(n) := \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V) \ ,$$

où l'action à droite de $\mathbb{S}_n$ sur $\mathrm{End}_V(n)$ est induite par la structure de $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-module à gauche de $V^{\otimes n}$. On définit une composition sur End_V par la composition classique des fonctions

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{\mathrm{End}_V} : & \mathrm{End}_V \circ \mathrm{End}_V & \to & \mathrm{End}_V \\ & (f; f_1, \ldots, f_k) & \mapsto & f(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k) \end{array} \ .$$

Lemme 0.1.6. *Le triplet* $(\mathrm{End}_V, \gamma_{\mathrm{End}_V}, \eta_{\mathrm{End}_V} : 1_{\mathbb{K}} \mapsto \mathrm{Id}_V)$ *est une opérade.*

Définition 0.1.7. Un *idéal* $\mathcal{I}$ d'une opérade $\mathcal{P}$ est un sous-$\mathbb{S}$-module de $\mathcal{P}$, tel que l'image par la composition $\gamma_{\mathcal{P}}(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k)$ est dans $\mathcal{I}$ dès qu'au moins un élément parmi $\mu, \nu_1, \ldots, \nu_k$ est dans $\mathcal{I}$. Le *quotient d'une opérade* $\mathcal{P}$ *par un idéal* $\mathcal{I}$ est l'opérade $\mathcal{P}/\mathcal{I}$ définie par

$$(\mathcal{P}/\mathcal{I})(n) := \mathcal{P}(n)/\mathcal{I}(n) \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

où la composition $\gamma_{\mathcal{P}/\mathcal{I}}$ est induite par la composition $\gamma_{\mathcal{P}}$.

0.1.3 Algèbre sur une opérade

Définition 0.1.8. Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Une *algèbre sur* $\mathcal{P}$, ou encore $\mathcal{P}$*-algèbre*, est un espace vectoriel A muni d'une application $\gamma_A : \mathcal{P}(A) \to A$, compatible avec la structure de monoïde de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \arrow[r, "\mathcal{P}(\gamma_A)"] & \mathcal{P}(A) \arrow[dd, "\gamma_A"] \\
(\mathcal{P}\circ\mathcal{P})(A) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[d, "\gamma(A)"'] & & \\
\mathcal{P}(A) \arrow[rr, "\gamma_A"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \cong \mathrm{I}(A) \arrow[r, "\eta(A)"] \arrow[dr, "="'] & \mathcal{P}(A) \arrow[d, "\gamma_A"] \\
& A \ .
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme de* $\mathcal{P}$*-algèbres* est une application linéaire $f : A \to A'$ telle que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(A) \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{P}(A') \arrow[r, "\gamma_{A'}"] & A' \ .
\end{tikzcd}$$

On note $\mathcal{P}$-alg la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres.

Proposition 0.1.9. *Soit* $\mathcal{P}$ *une opérade. Une structure de* $\mathcal{P}$*-algèbre sur un espace vectoriel* A *est équivalente à un morphisme d'opérades* $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$.

Ceci implique que, s'il existe un morphisme d'opérades $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, toute $\mathcal{Q}$-algèbre A est munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre via la composée $\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \to \mathrm{End}_A$.

On dit qu'une $\mathcal{P}$-algèbre $\mathcal{F}(V)$ munie d'une application $\eta_V : V \to \mathcal{F}(V)$ est libre sur l'espace vectoriel V si elle satisfait la propriété universelle ci-dessous :

$$\forall A \in \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}, \forall f : V \to A \text{ dans } \mathsf{Vect}, \exists! \widetilde{f} : \mathcal{F}(V) \to A \text{ dans } \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg},$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\
& A \ .
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est une foncteur $\mathcal{F} : \mathsf{Vect} \to \mathcal{P}\text{-}\mathsf{Alg}$ adjoint à gauche du foncteur oubli $\sqcup : \mathcal{P}\text{-}\mathsf{Alg} \to \mathsf{Vect}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}\text{-}\mathsf{Alg}}(\mathcal{F}(V), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Vect}}(V, \sqcup A) \ .$$

Proposition 0.1.10. *Soit* V *un espace vectoriel. L'application* $\gamma_{\mathcal{P}(V)} := \gamma(V) : \mathcal{P}(\mathcal{P}(V)) \to \mathcal{P}(V)$ *munit* $\mathcal{P}(V)$ *d'une structure de* $\mathcal{P}$*-algèbre. De plus,* $(\mathcal{P}(V), \gamma_{\mathcal{P}(V)}, \eta_V)$*, où* $\eta_V : V \to \mathcal{P}(V)$ *est l'inclusion, est la* $\mathcal{P}$*-algèbre libre sur* V.

0.1.4 Produit de Hadamard d'opérades

Soient $(\mathcal{P}, \gamma_{\mathcal{P}}, \eta_{\mathcal{P}})$ et $(\mathcal{Q}, \gamma_{\mathcal{Q}}, \eta_{\mathcal{Q}})$ deux opérades. La composée

$$
\begin{array}{l}
(\mathcal{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{Q})(k) \otimes (\mathcal{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{Q})(n_1) \otimes \cdots \otimes (\mathcal{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{Q})(n_k) \\
\\
\begin{array}{rcl}
\qquad\qquad & = & \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{Q}(k) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \mathcal{Q}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(n_k) \otimes \mathcal{Q}(n_k) \\
 & \cong & \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(n_k) \otimes \mathcal{Q}(k) \otimes \mathcal{Q}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{Q}(n_k) \\
 & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{P}} \otimes \gamma_{\mathcal{Q}}} & \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{Q}(n) = (\mathcal{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{Q})(n)
\end{array}
\end{array}
$$

fournit, de manière naturelle, une structure d'opérade sur le produit de Hadamard $\mathcal{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{Q}$ des $\mathbb{S}$-modules sous-jacents à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$. Cette opérade est le *produit de Hadamard* des opérades $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

0.1.5 L'opérade libre

Définition 0.1.11. L' *opérade libre* sur le $\mathbb{S}$-module M est une opérade $\mathcal{F}(M)$ munie d'un morphisme de $\mathbb{S}$-modules $i_M : M \to \mathcal{F}(M)$, qui satisfait la propriété universelle suivante

$$\forall \mathcal{P} \in \mathsf{Op}, \forall f : M \to \mathcal{P} \text{ dans } \mathbb{S}{-}\mathsf{Mod}, \exists ! \tilde{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{P} \text{ dans } \mathsf{Op},$$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}(M) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
 & \mathcal{P}
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Autrement dit, le foncteur $\mathcal{F} : \mathbb{S}{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Op}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\sqcup : \mathsf{Op} \to \mathbb{S}{-}\mathsf{Mod}$.

Remarque. L'opérade libre sur un $\mathbb{S}$-module est unique à isomorphisme d'opérades près.

L'opérade libre sur un $\mathbb{S}$-module M existe. Une des constructions repose sur la linéarité à gauche de la composition des $\mathbb{S}$-modules. Par induction, on définit les foncteurs $\mathcal{T}_n M : \mathsf{Vect} \to \mathsf{Vect}$ de la façon suivante :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{T}_0 M & := & \mathrm{I} \ , \\
\mathcal{T}_1 M & := & \mathrm{I} \oplus M \ , \\
\mathcal{T}_2 M & := & \mathrm{I} \oplus (M \circ (I \oplus M)) \ , \\
\cdots & & \\
\mathcal{T}_n M & := & \mathrm{I} \oplus (M \circ \mathcal{T}_{n-1} M) \ , \\
\cdots & &
\end{array}
$$

On considère alors le *module arboricole* $\mathcal{T} M$ sur le $\mathbb{S}$-module M défini par

$$\mathcal{T} M := colim_n \mathcal{T}_n M \ .$$

Théorème 0.1.12. *Il y a une structure d'opérade donnée par γ et η sur $\mathcal{T} M$ telle que $\mathcal{T}(M) := (\mathcal{T} M, \gamma, \eta)$ est l'opérade libre sur M, et donc $\mathcal{T}(M) \cong \mathcal{F}(M)$.*

On réfère à [LV12, Section 5.5.1] pour la construction de γ et de η.

Remarque. L'opérade libre $\mathcal{T}(M)$ code l'ensemble de compositions possibles que l'on peut faire à partir des opérations de M.

On définit un *poids* sur $\mathcal{T}M$ qui correspond au nombre d'opérations de M dont on a besoin pour construire une opération donnée de $\mathcal{T}(M)$. Plus précisément, le poids $w(\mu)$ d'une opération μ de $\mathcal{T}M$ est défini de la façon suivante :

$$w(\mathrm{id}) = 0 \ ,$$

$$w(\mu) = 1 \ , \ \forall \mu \in M \ ,$$

$$\text{et} \quad w(\nu; \nu_1, \ldots, \nu_k) = w(\nu) + w(\nu_1) + \cdots + w(\nu_k) \ .$$

On note $\mathcal{T}M^{(r)}$ le $\mathbb{S}$-module des opérations de $\mathcal{T}(M)$ de poids r.

Par ailleurs, nous donnons ci-dessous une autre construction de l'opérade libre, à partir de la définition combinatoire d'une opérade. En effet, une opérade est aussi une algèbre sur la monade des arbres $\mathbb{T}$.

Soit X un ensemble fini. On note $RT(X)$ l'ensemble des arbres non planaires, enracinés et réduits, *i.e.* chaque sommet a au moins une entrée, avec les feuilles décorées par des éléments de X. Pour tout arbre $t \in RT(X)$, on note $\mathrm{vert}(t)$ l'ensemble des sommets de t et on note $\mathrm{in}(v)$ l'ensemble des entrées du sommet $v \in \mathrm{vert}(t)$.

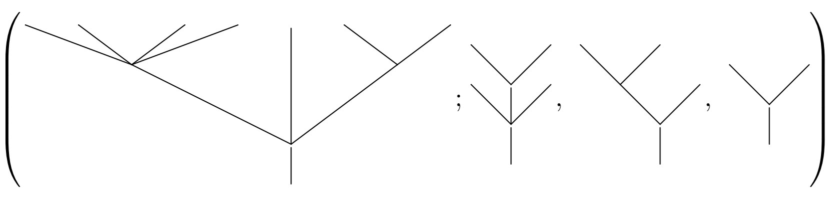
Soit M un $\mathbb{S}$-module tel que $M(0) = 0$. Le *produit tensoriel arboricole* $M(t)$ est défini par

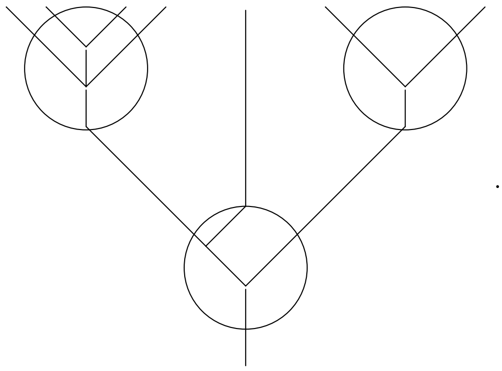
$$M(t) := \bigotimes_{v \in \mathrm{vert}(t)} M(\mathrm{in}(v)) \ .$$

On définit alors un foncteur $\mathbb{T} : \mathbb{S}{-}\mathsf{Mod} \to \mathbb{S}{-}\mathsf{Mod}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{T}(M)(n) := \bigoplus_{t \in RT(\underline{n})} M(t) \ ,$$

où $\underline{n} := \{1, \ldots, n\}$. Un élément de $\mathbb{T}(M)$ représente une somme d'arbres enracinés et réduits, dont chaque sommet v est indicé par un élément de $M(\mathrm{in}(v))$ et dont les feuilles sont décorées par des éléments distincts de $\underline{n}$. On construit deux transformations naturelles de foncteurs $\iota : \mathrm{Id}_{\mathbb{S}-\mathsf{Mod}} \to \mathbb{T}$ et $\alpha : \mathbb{T} \circ \mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Pour cela, étant donné un $\mathbb{S}$-module M tel que $M(0) = 0$, on doit définir des morphismes de $\mathbb{S}$-modules $M(n) \to \mathbb{T}(M)(n)$ et $\mathbb{T} \circ \mathbb{T}(M)(n) \to \mathbb{T}(M)(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Dans $RT(\underline{n})$, il y a un arbre particulier qui est la corolle t_{cor}, c'est-à-dire l'arbre enraciné réduit à un sommet et n entrée(s). Par définition, on a alors $M(t_{cor}) = M(n)$ et ainsi $M(n)$ est une partie de la somme directe $\mathbb{T}(M)(n)$. On définit donc ι comme l'inclusion de $M(n)$ dans $\mathbb{T}(M)(n)$. L'application α correspond à la substitution des arbres, qui consiste à remplacer les sommets d'un arbre par des arbres donnés en faisant concorder le nombre de feuilles de chaque arbre avec le nombre d'entrées du sommet où il est inséré :

α  :=



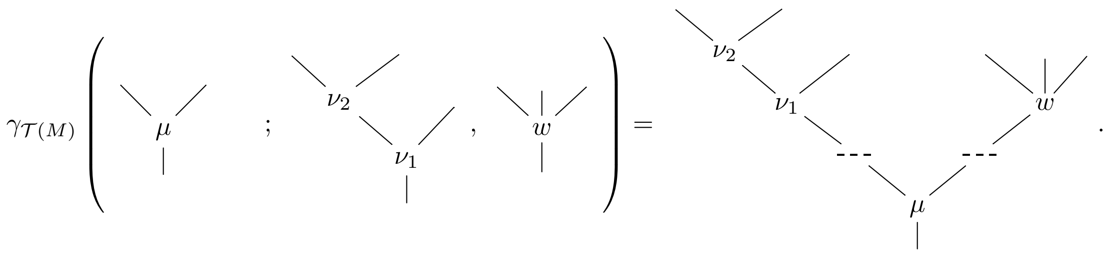
Lemme 0.1.13. *La substitution des arbres définit une transformation de foncteurs* $\alpha : \mathbb{T} \circ \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *qui est associative, et qui admet* ι *pour unité. Ainsi,* $(\mathbb{T}, \alpha, \iota)$ *forme une monade.*

Définition 0.1.14. Une opérade est une algèbre sur la monade $(\mathbb{T}, \alpha, \iota)$.

C'est la définition combinatoire d'une opérade. Notons que cette définition est équivalente à la définition monoïdale.

Proposition 0.1.15. *Pour tout* $\mathbb{S}$*-module* M*, la composition donnée par la greffe des arbres donne à* $\mathbb{T}(M)$ *une structure d'opérade. Plus précisément,* $\mathbb{T}(M)$ *est l'opérade libre sur* M*, et donc* $\mathbb{T}(M) \cong \mathcal{T}(M)$*.*

Remarque. Via cet isomorphisme, $\mathcal{T}_n M$ est l'ensemble des arbres à au plus n niveaux dont les sommets sont indicés par des éléments de I ou de M. La composition sur $\mathcal{T}(M)$ correspond alors à la greffe des arbres :



De plus, avec cette représentation de l'opérade libre, le poids d'un élément de $\mathbb{T}(M)$ est égal au nombre de sommet de l'arbre sous-jacent.

0.1.6 Types d'algèbres et opérades

Soit P-alg une catégorie d'algèbres qui est présentée comme suit. Un élément de P-alg est un espace vectoriel A, muni d'opérations n-aires $\mu_i : A^{\otimes n} \to A$ (où n peut varier), appelées *opérations génératrices.* Ces opérations vérifient des relations multilinéaires qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{\phi} \phi(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ , \ \forall a_1, \ldots, a_n \in A \ ,$$

où ϕ est une composée d'opérations génératrices. Un élément $r = \sum_{\phi} \phi$ est appelé *relation.* On dit encore que A est une *algèbre de type* P.

On considère alors le $\mathbb{S}$-module M qui, en arité n, est égal au $\mathbb{S}_n$-module engendré par les opérations génératrices n-aires, l'action de $\mathbb{S}_n$ étant déterminée par la symétrie de ces opérations.

Chaque relation détermine un élément de l'opérade libre sur M. Soit R le sous-$\mathbb{S}$-module de $\mathcal{T}M$ engendré par toutes les relations et (R) l'idéal opéradique de $\mathcal{T}(M)$ engendré par R. On obtient donc l'opérade $\mathcal{P}_{\mathsf{P}} := \mathcal{T}(M)/(R)$, associée au type d'algèbres P.

Proposition 0.1.16. *En caractériqtique nulle, un type d'algèbres dont les relations sont multilinéaires détermine une opérade de la façon ci-dessus. De plus, la catégorie des $\mathcal{P}_{\mathsf{P}}$-algèbres est équivalente à la catégorie des algèbres de type* P.

0.1.7 Coopérades

Définition 0.1.17. Une *coopérade* est un comonoïde $(\mathcal{C}, \Delta, \eta)$ dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-modules $(\mathbb{S}-\mathsf{Mod}, \circ, I)$. De manière explicite, $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{S}$-module muni de deux morphismes de $\mathbb{S}$-modules $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ et $\eta : \mathcal{C} \to I$, appelés respectivement la *décomposition* et la *counité* , qui satisfont

- l'axiome de coassociativité

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dd, "\Delta"'] & & \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \arrow[d, "\mathcal{C}\circ\Delta"] \\
& & \mathcal{C} \circ (\mathcal{C} \circ \mathcal{C}) \arrow[dl, "\cong"'] \\
\mathcal{C} \circ \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta\circ\mathcal{C}"'] & (\mathcal{C} \circ \mathcal{C}) \circ \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

- et l'axiome d'unité

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"] & \\
\mathrm{I} \circ \mathcal{C} & \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \arrow[l, "\eta\circ\mathcal{C}"] \arrow[r, "\mathcal{C}\circ\eta"'] & \mathcal{C} \circ \mathrm{I}\ .
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme de coopérades* $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un morphisme entre les $\mathbb{S}$-modules sous-jacents, compatibles avec les structures respectives de comonoïde. On note Coop la catégorie des coopérades.

Une coopérade $\mathcal{C}$ est dite *coaugmentée* s'il existe un morphisme de coopérades $\upsilon : \mathrm{I} \to \mathcal{C}$ tel que $\eta\upsilon = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$. Il y a un élément particulier $\mathrm{id} \in \mathcal{C}(1)$ tel que $\eta(\mathrm{id}) = 1_{\mathbb{K}}$ appelé la *coopération identité.*

La notion de coopérade est duale de celle d'opérade. À partir de la description explicite de la composée de deux $\mathbb{S}$-modules, on déduit que Δ est la donnée de morphismes de $\mathbb{S}_n$-modules

$$\Delta(n) : \mathcal{C}(n) \to (\mathcal{C} \circ \mathcal{C})(n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{C}(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} \mathcal{C}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(i_k) \right) .$$

On adoptera alors la notation suivante pour la décomposition

$$\Delta(\mu) = \sum (\nu; \nu_1, \ldots, \nu_k) ,$$

où $\nu \in \mathcal{C}(k)$ et $\nu_i \in \mathcal{C}(i_j)$. D'après l'axiome de counité, les termes de $\Delta(n)(\mu)$ sont respectivement $(\mathrm{id}; \mu)$ and $(\mu; \mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id})$, pour $k = 1$ et $k = n$. On peut donc écrire la décomposition Δ comme

$$\Delta(\mu) = (\mathrm{id}; \mu) + (\mu; \mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}) + \overline{\Delta}(\mu) ,$$

et $\overline{\Delta}$ est appelée la *décomposition réduite* .

Coopérade conilpotente

Soit $(\mathcal{C}, \Delta, \eta, v)$ une coopérade coaugmentée, et $\overline{\mathcal{C}} := \operatorname{coker} v$ son coidéal de coaugmentation. Le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{C}$ se décompose de façon naturelle en $\mathcal{C} = \mathrm{I} \oplus \overline{\mathcal{C}}$. On considère l'application $\widetilde{\Delta} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{I} & \to & \mathrm{I} \circ \mathrm{I} \\ \mathrm{id} & \mapsto & \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{\mathcal{C}} & \to & \overline{\mathcal{C}} \circ \mathcal{C} \\ \mu & \mapsto & \widetilde{\Delta}(\mu) := \overline{\Delta}(\mu) + (\mu; \mathrm{id}^{\otimes n}) \end{array} \right. .$$

Ensuite, on itère $\widetilde{\Delta}$ par la droite pour obtenir les applications suivantes, définies par récurrence :

$$\widetilde{\Delta}^0 := \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \ \widetilde{\Delta}^1 := \widetilde{\Delta}, \quad \text{et} \quad \widetilde{\Delta}^n := (\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ \widetilde{\Delta}) \widetilde{\Delta}^{n-1} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\circ(n+1)} .$$

La composée $\mathcal{C} \xrightarrow{\widetilde{\Delta}^{n-1}} \mathcal{C}^{\circ n} \cong \mathcal{C}^{\circ n} \circ \mathrm{I} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ \eta} \mathcal{C}^{\circ(n+1)}$ correspond à ajouter un niveau fait uniquement d'identités aux arbres produits par $\widetilde{\Delta}^{n-1}$. Ainsi, la différence

$$\widehat{\Delta}^n := \widetilde{\Delta}^n - (\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ \eta) \widetilde{\Delta}^{n-1}$$

contient seulement les arbres qui apparaissent à partir de la n-ième itération de $\widetilde{\Delta}$. Par abus de notation, on a $\widetilde{\Delta}^n = \sum_{k=0}^{n} \widehat{\Delta}^k$.

Définition 0.1.18. On dit qu'une coopérade coaugmentée $(\mathcal{C}, \Delta, \eta, v)$ est *conilpotente* si, pour tout élément c de $\mathcal{C}$, l'itération de $\widehat{\Delta}$ sur c se stabilise à partir d'un certain rang.

Des coopérades aux opérades et vice versa

Le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{C}^* := \{\mathcal{C}(n)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(n), \mathbb{K})\}_{n \in \mathbb{N}}$, associé à une coopérade $\mathcal{C}$, a une structure d'opérade. L'unité est donnée par l'application duale de la counité $\eta_{\mathcal{C}}$ et la composition est donnée par la duale de la décomposition $\Delta_{\mathcal{C}}$. Inversement, si $\mathcal{P}$ est une opérade, telle que chaque $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie et $\mathcal{P}(0) = 0$, alors sa duale linéaire a une structure de coopérade obtenue en dualisant la composition et l'unité.

Cogèbre sur une coopérade

Définition 0.1.19. Une *cogèbre sur une coopérade* $(\mathcal{C}, \Delta, \eta)$, ou encore une $\mathcal{C}$*-cogèbre*, est un espace vectoriel C, muni d'une application linéaire $\Delta_C : C \to \mathcal{C}(C)$, tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & \mathcal{C}(C) \arrow[d, "\mathcal{C}(\Delta_C)"] \\ \mathcal{C}(C) \arrow[r, "\Delta(C)"] & \mathcal{C}(\mathcal{C}(C)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[d, "\Delta_C"'] \arrow[dr, "="] & \\ \mathcal{C}(C) \arrow[r, "\eta(C)"'] & C \end{tikzcd} .$$

La coopérade colibre

Définition 0.1.20. Soit M un $\mathbb{S}$-module. La *coopérade colibre sur* M est la coopérade, notée $\mathcal{F}^c(M)$, qui est colibre dans la catégorie des coopérades conilpotentes. C'est-à-dire que $\mathcal{F}^c(M)$ satisfait la propriété universelle suivante :

$$\forall \Phi : \mathcal{C} \to M \text{ dans } \mathbb{S}{-}\mathsf{Mod}, \Phi(\mathrm{id}) = 0, \exists! \widetilde{\Phi} : \mathcal{C} \to \mathcal{F}^c(M) \text{ dans } \mathsf{Coop},$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "\widetilde{\Phi}"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ \mathcal{F}^c(M) \arrow[r, two heads] & M \end{tikzcd} .$$

En dualisant les résultats concernant l'opérade libre $\mathcal{T}(M)$, on obtient que la coopérade colibre existe et on peut en donner une construction explicite, notée $\mathcal{T}^c(M)$, qui se fait également par récurrence. Le $\mathbb{S}$-module sous-jacent à la coopérade colibre $\mathcal{T}^c(M)$ est le module arboricole $\mathcal{T}M$.

De même que pour l'opérade libre, il y a une construction de la coopérade colibre à partir de la monade des arbres $\mathbb{T}$.

On dit qu'un découpage d'arbre est *admissible* si lorsqu'on greffe les morceaux on retrouve l'arbre d'origine. La *dégreffe* $\Delta(t)$ d'un arbre t est égale à la somme de tous les découpages admissibles $(r; s_1, \ldots, s_k)$ de t, où r est le morceau contenant la racine et k est le nombre de feuilles de r, et tel que chaque sommet conserve son indiçage. On définit de plus la counité η comme la projection sur l'arbre trivial.

Proposition 0.1.21. *Pour tout $\mathbb{S}$-module M tel que $M(0) = 0$, $\mathbb{T}^c(M) := (\mathbb{T}(M), \Delta, \eta)$ est la coopérade colibre sur M.*

On peut également donner une définition combinatoire de la notion de coopérade, en tant que cogèbre sur la comonade $\mathbb{T}^c$, qui est équivalente à la définition monoïdale. En tant qu'endofoncteur de la catégorie des $\mathbb{S}$-modules, $\mathbb{T}^c$ est égal à $\mathbb{T}$. Cependant, on munit $\mathbb{T}^c$ d'une structure de comonade grâce au coproduit $\Delta : \mathbb{T}^c \circ \mathbb{T}^c \to \mathbb{T}^c$ et à la counité $\varepsilon : \mathbb{T}^c \to \mathrm{Id}_{\mathbb{S}-\mathsf{Mod}}$. Étant donné un $\mathbb{S}$-module M tel que $M(0) = 0$, $\mathbb{T}^c \circ \mathbb{T}^c(M)$ est composé d'arbres d'arbres dont les sommets sont indicés par M ou, de manière équivalente, d'arbres dont les sommets sont indicés par M et munis d'une partition en sous-arbres. On définit alors $\Delta(t)$ d'un arbre t de $\mathbb{T}^c(M)$ comme étant la somme de tous les arbres munis de partitions obtenus à partir de t. L'application $\varepsilon : \mathbb{T}^c(M) \to M$ correspond à la projection sur les corolles.

De façon similaire, on considère la comonade $\overline{\mathbb{T}}^c$ constituée des arbres de $\mathbb{T}^c$ sans l'arbre trivial.

Proposition 0.1.22. *Soit $\overline{\mathcal{C}}$ un $\mathbb{S}$-module tel que $\overline{\mathcal{C}}(0) = 0$.*

Une structure de cogèbre sur la comonade $\mathbb{T}^c$ sur $\overline{\mathcal{C}}$ équivaut à une structure de coopérade conilpotente sur $\mathcal{C} := \overline{\mathcal{C}} \oplus I$.

On note $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{T}^c(\overline{\mathcal{C}})$ le morphisme de coopérades $\Delta_{\mathcal{C}} := \mathrm{Id}_{\mathrm{I}} \oplus \Delta_{\overline{\mathcal{C}}}$, où $\Delta_{\overline{\mathcal{C}}}$ est défini par la structure de cogèbre sur $\mathbb{T}^c$ de $\overline{\mathcal{C}}$.

0.1.8 Exemples

L'opérade $\mathcal{A}ss$

Soit $\mathcal{A}ss : \mathsf{Vect} \to \mathsf{Vect}$ le foncteur de Schur donné par

$$\mathcal{A}ss(V) := \overline{T}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n} \ ,$$

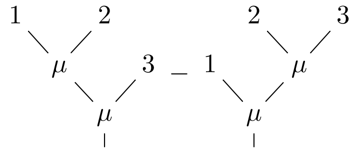
où $\overline{T}(V)$ désigne le module tensoriel réduit sur V. Le $\mathbb{S}$-module associé est alors $\mathcal{A}ss(n) = \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$, la représentation régulière de $\mathbb{S}_n$. La composition est donnée par la "composition des polynômes non-commutatifs". Les $\mathcal{A}ss$-algèbres sont données par les algèbres associatives. Ainsi, la $\mathcal{A}ss$-algèbre libre sur un espace vectoriel V est l'algèbre tensorielle réduite $\overline{T}(V)$.

Par ailleurs, rappelons qu'une algèbre associative est un espace vectoriel A muni d'une opération binaire $\mu : V \otimes V \to V$ qui vérifie

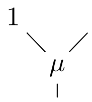
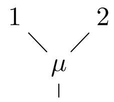
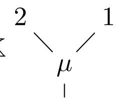
$$\mu(\mu(-,-),-) = \mu(-,\mu(-,-)) \ .$$

Soit $M_{\mathrm{Ass}} = M(2)$ le $\mathbb{S}_2$-module engendré par $\begin{array}{c} 1 \quad\quad 2 \\ \diagdown \ \ \diagup \\ \mu \\ | \end{array}$ et soit R_{Ass} le sous-$\mathbb{S}_3$-module de $\mathcal{T}(M_{\mathrm{Ass}})$

engendré par la relation

$r_{\mathrm{Ass}} :=$  .

On a alors

$M_{\mathrm{Ass}} = M(2) = \mathbb{K}$  $\otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_2] = \mathbb{K}$  $\oplus \mathbb{K}$  ,

et une base de R_{Ass} en tant qu'espace vectoriel est donnée par $r_{\mathrm{Ass}} \times \mathbb{S}_3$.

Lemme 0.1.23. *On a l'isomorphisme d'opérades*

$$\mathcal{A}ss \cong \mathcal{T}(M_{\mathrm{Ass}})/(R_{\mathrm{Ass}}) \ .$$

L'opérade $\mathcal{C}om$

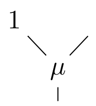
Soit $\mathcal{C}om : \mathsf{Vect} \to \mathsf{Vect}$ le foncteur de Schur donné par

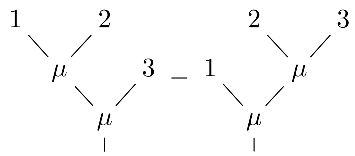
$$\mathcal{C}om(V) := \overline{S}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} (V^{\otimes n})_{\mathbb{S}_n} \ ,$$

où $\overline{S}(V)$ désigne le module tensoriel symétrique réduit sur V et où $(V^{\otimes n})_{\mathbb{S}_n}$ désigne l'espace des invariants de $V^{\otimes n}$ sous l'action de $\mathbb{S}_n$. Le $\mathbb{S}$-module associé est alors $\mathcal{C}om(n) = \mathbb{K}$, la représentation triviale de $\mathbb{S}_n$. La composition est donnée par la "composition des polynômes". Les $\mathcal{C}om$-algèbres sont données par les algèbres commutatives (et associatives). Ainsi, la $\mathcal{C}om$-algèbre libre sur un espace vectoriel V est l'algèbre symétrique réduite $\overline{S}(V)$.

Rappelons qu'une algèbre commutative est un espace vectoriel A muni d'une opération binaire symétrique $\mu : V \otimes V \to V$ qui vérifie

$$\mu(\mu(-,-),-) = \mu(-,\mu(-,-)) \ .$$

Soit $M_{\mathrm{Com}} = M(2) = \mathbb{K}$  , où l'action de $\mathbb{S}_2$ est triviale, et soit R_{Com} le sous-$\mathbb{S}_3$-module de $\mathcal{T}(M_{\mathrm{Com}})$ engendré par la relation

$r_{\mathrm{Com}} :=$  .

Par contre, dans ce cas, une base de R_{Com} est donnée par $\{r_{\mathrm{Com}}, r_{\mathrm{Com}} \cdot (12)\}$.

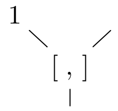
Lemme 0.1.24. *On a l'isomorphisme d'opérades*

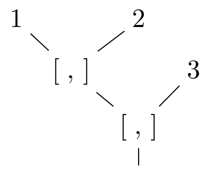
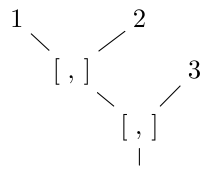
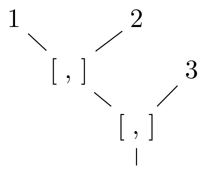
$$\mathcal{C}om \cong \mathcal{T}(M_{\mathrm{Com}})/(R_{\mathrm{Com}}) \ .$$

L'opérade $\mathcal{L}ie$

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel V muni d'une opération binaire antisymétrique $[\ ,\ ] : V \otimes V \to V$, appelée *crochet de Lie*, qui vérifie la relation

$$[[-;-];-] + [[-;-];-]\cdot(123) + [[-;-];-]\cdot(132) = 0\ .$$

Soit $M_{\mathrm{Lie}} = M(2) = \mathbb{K}$  , où l'action de $\mathbb{S}_2$ est la représentation signature, et soit R_{Lie} le sous-$\mathbb{S}_3$-module de $\mathcal{T}(M_{\mathrm{Lie}})$ engendré par la relation

$r_{\mathrm{Lie}} :=$  $+$  $\cdot\,(123)\,+$  $\cdot\,(132)$.

On associe l'opérade

$$\mathcal{L}ie := \mathcal{T}(M_{\mathrm{Lie}})/(R_{\mathrm{Lie}})\ .$$

En fait, $\mathcal{L}ie(V)$ est la sous-algèbre de $\overline{T}(V)$ engendrée par le crochet défini par $[x;y] := xy - yx$.

0.1.9 Opérades non symétriques

En remplaçant, dans la définition d'une opérade, la catégorie des $\mathbb{S}$-modules par celle des modules $\mathbb{N}$-gradués, on obtient la notion d'opérade non-symétrique. On traduit les différentes notions relatives à une opérade dans ce nouveau cadre, en insistant sur les différences dues à l'absence d'action du groupe symétrique.

Définition monïdale

Un $\mathbb{N}$-*module* est un espace vectoriel gradué $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod}$ la catégorie des $\mathbb{N}$-modules, munis des applications linéaires de degré 0.

Le foncteur de Schur $M : \mathsf{Vect} \to \mathsf{Vect}$ associé à un $\mathbb{N}$-module M est défini par

$$M(V) := \bigoplus_{n\geq 0} M_n \otimes_{\mathbb{K}} V^{\otimes n}\ .$$

Notons qu'ici le produit tensoriel se fait au-dessus de $\mathbb{K}$, et pas $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$.

La somme, le produit tensoriel et la composée de deux $\mathbb{N}$-modules M et N sont définis respectivement par

$$(M\oplus N)_n := M_n \oplus N_n\ ,$$

$$(M\otimes N)(n) := \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes N_j\ ,$$

$$(M\circ N)(n) := \bigoplus_{k\geq 0} M_k \otimes \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} N_{i_1}\otimes\cdots\otimes N_{i_k} \right)\ .$$

Proposition 0.1.25. *La catégorie* $(\mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod}, \circ, I)$ *des* $\mathbb{N}$*-modules est une catégorie monoïdale.*

Définition 0.1.26. Une *opérade non-symétrique*, ou encore une *opérade ns*, est un monoïde $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{N}$-modules. En particulier, la composition $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est donnée par des applications

$$\gamma_{i_1,\ldots,i_k} : \mathcal{P}_k \otimes \mathcal{P}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{i_k} \to \mathcal{P}_{i_1+\cdots+i_k} \ .$$

Un morphisme d'opérades non-symétriques $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme entre les $\mathbb{N}$-modules sous-jacents, compatible avec les structures de monoïde respectives.

On note $\mathsf{ns\,Op}$ la catégorie des opérades non-symétriques.

Pour tout espace vectoriel A, $\mathrm{End}_A := \{\mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)\}_{n\geq 0}$ est un $\mathbb{N}$-module qui, muni de la composition classique des applications, forme une opérade non-symétrique.

Définition 0.1.27. Une *algèbre sur une opérade non-symétrique* $\mathcal{P}$, ou encore une $\mathcal{P}$*-algèbre*, est un espace vectoriel A muni d'un morphisme d'opérades non-symétriques $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$. De manière équivalente, c'est la donnée d'une famille d'applications $\gamma_n : \mathcal{P}_n \otimes A^{\otimes n} \to A$ compatibles avec la structure d'opérade non-symétrique de $\mathcal{P}$.

L'opérade non-symétrique libre

Définition 0.1.28. L'*opérade ns libre* sur le $\mathbb{N}$-module M est une opérade ns $\mathcal{F}_{ns}(M)$ munie d'un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $i_M : M \to \mathcal{F}(M)$, qui satisfait la propriété universelle suivante

$$\forall \mathcal{P} \in \mathsf{ns\,Op}, \forall f : M \to \mathcal{P} \text{ dans } \mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod}, \exists! \tilde{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{P} \text{ dans } \mathsf{ns\,Op},$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}(M) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathcal{P} \end{tikzcd} \ .$$

Autrement dit, le foncteur $\mathcal{F} : \mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{ns\,Op}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\sqcup : \mathsf{ns\,Op} \to \mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod}$.

La construction monoïdale décrite dans la section 0.1.5 s'applique aux $\mathbb{N}$-modules pour donner une réalisation de l'opérade ns libre, notée $\mathcal{T}_{ns}(M)$. Il y a, dans ce cas aussi, une autre construction de l'opérade ns libre obtenue à partir de la définition combinatoire d'une opérade ns, que nous décrivons maintenant.

Cette fois-ci, on considère $PRT(X)$ l'ensemble des arbres planaires, enracinés et réduits, *i.e.* chaque sommet a au moins une entrée, avec les feuilles décorées par des éléments d'un ensemble X. Pour tout arbre $t \in PRT(X)$, on note $\mathrm{vert}(t)$ l'ensemble des sommets de t et on note $\mathrm{in}(v)$ l'ensemble des entrées du sommet $v \in \mathrm{vert}(t)$.

Soit M un $\mathbb{N}$-module tel que $M_0 = 0$. Le *produit tensoriel arboricole* $M(t)$ est défini par

$$M(t) := \bigotimes_{v\in \mathrm{vert}(t)} M_{\mathrm{in}(v)} \ .$$

On définit alors un foncteur $P\mathbb{T} : \mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod}$ de la façon suivante :

$$\mathrm{P}\mathbb{T}(M)(n) := \bigoplus_{t\in PRT(\underline{n})} M(t) \ ,$$

où $\underline{n} := \{1, \ldots, n\}$.

Les transformations naturelles de foncteurs $\iota : \mathrm{Id}_{\mathbb{N}\text{-}\mathsf{Mod}} \to \mathrm{P}\mathbb{T}$, telle que $\iota(M)$ envoie un élément μ de M_n sur la corolle à n feuilles et dont le sommet est indicé par μ, et $\alpha : \mathrm{P}\mathbb{T} \circ \mathrm{P}\mathbb{T} \to \mathrm{P}\mathbb{T}$, qui correspond à la substitution des arbres aux sommets, munissent $\mathrm{P}\mathbb{T}$ d'une structure de monade.

Définition 0.1.29. Une opérade non-symétrique est une algèbre sur la monade $(\mathrm{P}\mathbb{T}, \alpha, \iota)$.

Proposition 0.1.30. *Pour tout $\mathbb{N}$-module M, la composition donnée par la greffe des arbres donne à $\mathrm{P}\mathbb{T}(M)$ une structure d'opérade. Plus précisément, $\mathrm{P}\mathbb{T}(M)$ est l'opérade ns libre sur M.*

Opérades non-symétriques et opérades symétriques

On peut coder fidèlement dans une opérade non-symétrique tout type d'algèbres qui vérifie les conditions suivantes :

– les opérations génératrices ne possèdent pas de symétries,

– les relations sont multilinéaires et les variables y apparaissent toujours dans le même ordre.

Cependant, étant donné une opérade ns $\mathcal{P}$, on peut également coder la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres grâce à l'opérade symétrique

$$\mathrm{Reg}(\mathcal{P})(n) := \mathcal{P}_n \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] \ ,$$

où l'action du groupe symétrique sur $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})(n)$ est donnée par la représentation régulière $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$. Ainsi, les foncteurs de Schur associés sont égaux, puisque $(\mathcal{P}_n \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]) \otimes_{\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]} V^{\otimes n} = \mathcal{P}_n \otimes V^{\otimes n}$. La composition de l'opérade $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})$ est égale, à permutation des facteurs près, au produit tensoriel de la composition de l'opérade ns $\mathcal{P}$ avec la composition de l'opérade symétrique $\mathcal{A}ss$. L'opérade $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})$ est dite *régulière.*

Cette construction induit un foncteur $\mathrm{Reg} : \mathsf{ns\,Op} \to \mathsf{Op}$. Ce foncteur admet un adjoint à droite qui est donné par l'oubli de la structure de $\mathbb{S}$-module.

0.2 Algèbre homologique opéradique

Afin de faire de l'algèbre homologique avec les opérades, il est nécessaire de se placer dans le cadre différentiel gradué mais aussi de linéariser les objets définis précédemment. Une fois le cadre posé, on rappelle les définitions et les propriétés des morphismes tordants et des constructions bar et cobar, pour aboutir à la dualité de Koszul des opérades à la section suivante.

0.2.1 Composition infinitésimale

La composée $\circ$ dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules n'est pas linéaire à droite. Cependant, on définit une composée infinitésimale $\circ_{(1)}$, qui elle est linéaire à droite.

Pour tout $\mathbb{S}$-module P, P_1 et P_2, on note $P \circ (P_1; P_2)$ le $\mathbb{S}$-module donné par

$$(P \circ (P_1; P_2))(n) := \bigoplus_{k=1}^{n} P(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} P_1(i_1) \otimes \ldots \otimes \underbrace{P_2(i_j)}_{j^{th} \text{ position}} \otimes \ldots \otimes P_1(i_k) \right) .$$

Définition 0.2.1. Soient M et N deux $\mathbb{S}$-modules. La *composée infinitésimale* $M \circ_{(1)} N$ de M et N est le $\mathbb{S}$-module défini par

$$M \circ_{(1)} N := M \circ (\mathrm{I}; N) \ .$$

Proposition 0.2.2. *Pour tout $\mathbb{S}$-module M, M', N et N', on a*

$$(M \oplus M') \circ_{(1)} N = M \circ_{(1)} N \oplus M' \circ_{(1)} N \ ,$$

$$M \circ_{(1)} (N \oplus N') = M \circ_{(1)} N \oplus M \circ_{(1)} N' \ ,$$

$$M \circ_{(1)} I = M \quad \textit{et} \quad I \circ_{(1)} N = N \ .$$

Il y a alors deux façons de définir la composition de deux morphismes de $\mathbb{S}$-modules $f : M_1 \to M_2$ et $g : N_1 \to N_2$, associée à la notion de composée infinitésimale.

La première possibilité est de linéariser la composée des $\mathbb{S}$-modules. On définit alors le morphisme $f \circ_{(1)} g : M_1 \circ_{(1)} N_1 \to M_2 \circ_{(1)} N_2$ par la formule

$$(f \circ_{(1)} g)(\mu; \mathrm{id}, \ldots, \nu, \ldots, \mathrm{id}) := (f(\mu); \mathrm{id}, \ldots, g(\nu), \ldots, \mathrm{id}) \ .$$

L'autre possibilité est de linéariser la composition des morphismes. Dans ce cas, la *composée infinitésimale des morphismes* f et g est le morphisme de $\mathbb{S}$-modules $f \circ' g : M_1 \circ N_1 \to M_2 \circ (N_1; N_2)$ défini par

$$f \circ' g := \sum_i f \otimes (\mathrm{Id}_{N_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{N_1} \otimes g \otimes \mathrm{Id}_{N_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{N_1}) \ .$$

Proposition 0.2.3. *Pour tout morphisme de $\mathbb{S}$-modules $f : M_1 \to M_2$ et $g, h : N_1 \to N_2$, on a*

$$f \circ' (g + h) = f \circ' g + f \circ' h \quad \textit{dans} \quad \mathrm{Hom}(M_1 \circ N_1, M_2 \circ (N_1; N_2)) \ .$$

Définition 0.2.4. Soient $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ une opérade et $(\mathcal{C}, \Delta, \eta)$ une coopérade.

La *composition infinitésimale* $\gamma_{(1)} : \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ est définie par

$$\gamma_{(1)} : \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\mathrm{I}; \mathcal{P}) \rightarrowtail \mathcal{P} \circ (\mathrm{I} \oplus \mathcal{P}) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \circ (\eta + \mathrm{Id}_{\mathcal{P}})} \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P} \ .$$

La *décomposition infinitésimale* $\Delta_{(1)} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ est définie par

$$\Delta_{(1)} : \mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ' \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \circ (\mathcal{C}; \mathcal{C}) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ (\eta; \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})} \mathcal{C} \circ (\mathrm{I}; \mathcal{C}) = \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C} \ .$$

Remarque. La composition infinitésimale $\gamma_{(1)}$ de $\mathcal{P}$ correspond à la partie de la composition γ dans laquelle on ne compose que deux opérations de $\mathcal{P}$, tandis que la décomposition infinitésimale de $\mathcal{C}$ correspond à la décomposition d'un élément de $\mathcal{C}$ en deux parties.

0.2.2 Dans le cadre différentiel gradué

Les $\mathbb{S}$-modules

Définition 0.2.5. Un $\mathbb{S}$-*module gradué* est un $\mathbb{S}$-module $M = \{M(n)\}_{n \geq 0}$, tel que, en chaque arité, $M(n) = \{M_p(n)\}_{p \in \mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{S}_n$-module gradué.

Un *morphisme de $\mathbb{S}$-modules gradués de degré r $f : M \to N$* est une famille $\{f(n)\}_{n \geq 0}$ de morphismes de $\mathbb{S}_n$-modules gradués $f(n) : M(n) \to N(n)$ de degré r, c'est-à-dire que chaque $f(n)$ est lui-même une famille $\{f_p(n)\}_{p \in \mathbb{Z}}$ de morphisme de $\mathbb{S}_n$-modules $f_p(n) : M_p(n) \to N_{p+r}(n)$.

On note $\mathsf{gr}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}$ la catégorie des $\mathbb{S}$-modules gradués.

On note $|\mu|$ le dégré d'un élément $\mu \in M(n)$ et $|f|$ le degré d'un morphisme de $\mathbb{S}$-modules gradués f.

La somme, le produit tensoriel et la composée de deux $\mathbb{S}$-modules s'étend aux $\mathbb{S}$-modules gradués de la façon suivante :

- $(M \oplus N)_p(n) := M_p(n) \oplus N_p(n)$,
- $(M \otimes N)_p(n) := \displaystyle\bigoplus_{\substack{i+j=n \\ q+r=p}} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_i \times \mathbb{S}_j}^{\mathbb{S}_n} (M_q(i) \otimes N_r(j))$,
- et $(M \circ N)_p(n) := \displaystyle\bigoplus_{\substack{q+r_1+\cdots+r_k=p \\ k \geq 0}} M_q(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} N_{r_1}(i_1) \otimes \cdots \otimes N_{r_k}(i_k) \right)$.

Proposition 0.2.6. *La catégorie des $\mathbb{S}$-modules gradués $(\mathsf{gr}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}, \circ, I)$ est une catégorie monoïdale, où I est considéré comme $\mathbb{S}$-module gradué concentré en degré 0.*

Exemple. On considère les $\mathbb{S}$-modules gradués $\mathbb{K}s := (\mathbb{K}s, 0, 0, \ldots)$ et $\mathbb{K}s^{-1} := (\mathbb{K}s^{-1}, 0, 0, \ldots)$ concentrés en arité 0 et en degré $+1$ et -1, respectivement. Étant donné un $\mathbb{S}$-module gradué M, on définit alors :

– la *suspension* sM de M par $sM := \mathbb{K}s \otimes M$, *i.e.* $sM_p(n) := M_{p-1}(n)$,

– la *désuspension* $s^{-1}M$ de M par $s^{-1}M := \mathbb{K}s^{-1} \otimes M$, *i.e.* $s^{-1}M_p(n) := M_{p+1}(n)$.

On note respectivement les tenseurs $s \otimes m \in sM$ et $s^{-1} \otimes m \in s^{-1}M$ par sm et $s^{-1}m$.

Définition 0.2.7. Un $\mathbb{S}_n$-*module différentiel gradué* $(M(n), d)$ est $\mathbb{S}_n$-module gradué $M(n)$ muni d'une *différentielle* d, c'est-à-dire un morphisme de $\mathbb{S}_n$-modules gradués $d : M(n) \to M(n)$ de degré -1

$$\cdots \xleftarrow{d} M_0(n) \xleftarrow{d} M_1(n) \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} M_p(n) \xleftarrow{d} \cdots$$

tel que $d^2 = 0$.

Un $\mathbb{S}$-*module différentiel gradué*, ou encore un *dg* $\mathbb{S}$-*module*, est une famille $\{M(n)\}_{n\geq 0}$ de $\mathbb{S}_n$-modules différentiels gradués. Un *morphisme de dg* $\mathbb{S}$-*modules* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ est un morphisme $f : M \to N$ de degré 0 entre les $\mathbb{S}$-modules gradués sous-jacents, tel que $f \circ d_M = d_N \circ f$.

On note $\mathsf{dg}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}$ la catégorie des dg $\mathbb{S}$-modules.

Remarque. Les notions de composées infinitésimales, définies dans la section précédente, s'étendent au cadre différentiel gradué. Notons que des signes interviennent désormais dans leur définition.

De même, la somme, le produit tensoriel et la composée s'étendent aux dg $\mathbb{S}$-modules et, pour cela, il suffit de définir une différentielle sur chacun de ces objets. Étant donnés deux dg $\mathbb{S}$-modules (M, d_M) et (N, d_N), on considère :
- $d_{M\oplus N} := d_M + d_N$,
- $d_{M\otimes N} := d_M \otimes d_N$,
- et $d_{M\circ N} := d_M \circ \mathrm{Id}_N + \mathrm{Id}_M \circ' d_N$.

Proposition 0.2.8. *La catégorie* $(\mathsf{dg}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}, \circ, I)$ *est une catégorie monoïdale, où I est muni de la différentielle $d = 0$.*

On peut considérer les groupes d'homologie $H_*(M)$ d'un dg $\mathbb{S}$-module M. Ceux-ci forment un $\mathbb{S}$-module gradué.

Proposition 0.2.9 (Formule de Künneth opéradique)**.** *Soit M et N deux dg $\mathbb{S}$-modules. En caractéristique 0, on a l'isomorphisme de $\mathbb{S}$-modules gradués*

$$H_*(M \circ N) \cong H_*(M) \circ H_*(N) \ .$$

Les opérades

Une opérade graduée est un monoïde $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ dans la catégorie monoïdale $\mathsf{gr}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}$. La composition $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et l'unité $\eta : \mathrm{I} \to \mathcal{P}$ sont supposées de degré 0. Ainsi, si M est un $\mathbb{S}$-module gradué, l'opérade libre $\mathcal{T}(M)$ est une opérade graduée.

Définition 0.2.10. Une *opérade différentielle graduée*, ou encore une *dg opérade*, est un monoïde $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ dans la catégorie monoïdale $(\mathsf{dg}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}, \circ, \mathrm{I})$. Plus précisément, $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ est une structure d'opérade sur le dg $\mathbb{S}$-module $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ telle que les applications $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et $\eta : \mathrm{I} \to \mathcal{P}$ sont des morphismes de dg $\mathbb{S}$-modules. Un morphisme de dg opérades $f : (\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}}) \to (\mathcal{Q}, d_{\mathcal{Q}})$ est un morphisme de dg $\mathbb{S}$-modules tel que $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme d'opérades.

On note $\mathsf{dg}\,\mathsf{Op}$ la catégorie des dg opérades.

Une *dg opérade augmentée* est une dg opérade $\mathcal{P}$ munie d'un morphisme de dg opérades $\varepsilon : \mathcal{P} \to \mathrm{I}$, appelé *morphisme d'augmentation.*

Remarque. La composition $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est un morphisme de dg opérades implique

$$d_{\mathcal{P}}(\gamma) = \gamma(d_{\mathcal{P}\circ\mathcal{P}}) = \gamma(d_{\mathcal{P}} \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}) + \gamma(\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \circ' \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}) \ ,$$

ce qui signifie que $d_{\mathcal{P}}$ est une *dérivation* de l'opérade $\mathcal{P}$.

Exemple. Soit (A, d_A) un complexe de chaînes. On définit une différentielle sur $\mathrm{End}_A(n)$ de la façon suivante :

$$\partial_A(f) := d_A \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_{A^{\otimes n}} \ .$$

Alors $(\mathrm{End}_A, \partial_A)$ devient une dg opérade.

Proposition 0.2.11. *En caractéristique* 0*, les groupes d'homologie* $H_*(\mathcal{P})$ *d'une dg opérade* $\mathcal{P}$ *sont natuellement munis d'une structure d'opérade.*

Les algèbres sur une opérade

Définition 0.2.12. Une *dg* $\mathcal{P}$*-algèbre* est un complexe de chaînes (A, d_A) muni d'un morphisme de dg opérades $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$, ou de manière équivalente, d'un morphisme de complexes de chaînes $\gamma_A : \mathcal{P}(A) \to A$ qui fournit à A une structure de $\mathcal{P}$-algèbre.

L'homologie du complexe de chaînes sous-jacent à une dg $\mathcal{P}$-algèbre (A, d_A) est appelée l'*homotopie* de A.

Proposition 0.2.13. *Soit* $\mathcal{P}$ *une dg opérade. L'homotopie* $H(A)$ *d'une dg* $\mathcal{P}$*-algèbre* A *est naturellement munie d'une structure de* $\mathcal{P}$*-algèbre.*

Définition 0.2.14. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre. On dit qu'une application $d_A : A \to A$ est une *dérivation de la* $\mathcal{P}$*-algèbre* A si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(A) = \mathcal{P} \circ A \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[d, "d_{\mathcal{P}} \circ \mathrm{Id}_A + \mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \circ' d_A"'] & A \arrow[d, "d_A"] \\ \mathcal{P} \circ A \arrow[r, "\gamma_A"] & A\ . \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Der}(A)$ l'ensemble des dérivations d'une $\mathcal{P}$-algèbre A.

Remarque. Via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathsf{dg}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}}(\mathcal{P}, \mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{dg}\,\mathsf{Mod}}(\mathcal{P}(A), A)$, une dg $\mathcal{P}$-algèbre est en fait une $\mathcal{P}$-algèbre munie d'une dérivation de carré nul.

Proposition 0.2.15. *Toute dérivation sur une* $\mathcal{P}$*-algèbre libre* $\mathcal{P}(V)$ *est complètement caractérisée par sa restriction aux générateurs* $V \to \mathcal{P}(V)$ *:*

$$\mathrm{Der}(\mathcal{P}(V)) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathcal{P}(V))\ .$$

Plus précisément, l'unique dérivation de $\mathcal{P}(V)$*, qui étend l'application* $\varphi : V \to \mathcal{P}(V)$*, est donnée par*

$$d_\varphi = d_{\mathcal{P}} \circ \mathrm{Id}_V + (\gamma_{(1)} \circ \mathrm{Id}_V)(\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \circ' \varphi)\ ,$$

où le dernier terme est égal à la composée

$$\mathcal{P}(V) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \circ' \varphi} \mathcal{P}(V; \mathcal{P}(V)) \cong \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}(V) \xrightarrow{\gamma_{(1)} \circ \mathrm{Id}_V} \mathcal{P}(V)\quad .$$

Les coopérades

De façon duale, une coopérade graduée est un comonoïde dans la catégorie monoïdale $\mathsf{gr}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}$ et la décomposition et la counité sont supposées de degré 0. De même, la coopérade colibre $\mathcal{T}^c(M)$ sur un $\mathbb{S}$-module gradué M est une coopérade graduée.

Définition 0.2.16. Une *coopérade différentielle graduée*, ou encore *dg coopérade*, est un comonoïde $(\mathcal{C}, \gamma, \eta)$ dans la catégorie monoïdale $(\mathsf{dg}\,\mathbb{S}\text{-}\mathsf{Mod}, \circ, \mathrm{I})$. Plus précisément, $(\mathcal{C}, \Delta, \eta)$ est une structure de coopérade sur le dg $\mathbb{S}$-module $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ telle que les applications $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ et $\eta : \mathcal{C} \to \mathrm{I}$ sont des morphismes de dg $\mathbb{S}$-modules. Un morphisme de dg coopérades $f : (\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{D}, d_{\mathcal{D}})$ est un morphisme de dg $\mathbb{S}$-modules tel que $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un morphisme de coopérades.

On note $\mathsf{dg}\,\mathsf{Coop}$ la catégorie des dg coopérades.

Une *dg coopérade coaugmentée* est une dg coopérade $\mathcal{C}$ munie d'un morphisme de dg coopérades $\upsilon : \mathrm{I} \to \mathcal{C}$. Une dg coopérade coaugmentée est *conilpotente* si la coopérade sous-jacente est conilpotente.

Remarque. La décomposition $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ est un morphisme de dg coopérades implique

$$\Delta(d_{\mathcal{C}}) = d_{\mathcal{C} \circ \mathcal{C}}(\Delta) = d_{\mathcal{C}} \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(\Delta) + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ' d_{\mathcal{C}}(\Delta)\ ,$$

ce qui signifie que $d_{\mathcal{C}}$ est une *codérivation* de la coopérade $\mathcal{C}$.

Les cogèbres sur une coopérade

Définition 0.2.17. Une *dg $\mathcal{C}$-cogèbre* est un complexe de chaînes (C, d_C) muni d'un morphisme de complexes de chaînes $\Delta_C : C \to \mathcal{C}(C)$ qui fournit à C une structure de $\mathcal{C}$-cogèbre.

Définition 0.2.18. Soit (C, d_C) une $\mathcal{C}$-cogèbre. On dit qu'une application $d_C : C \to C$ est une *codérivation de la $\mathcal{C}$-cogèbre C* si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "d_C"'] & \mathcal{C}(C) \arrow[d, "d_{\mathcal{C}} \circ \mathrm{Id}_C + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ' d_C"] \\ C \arrow[r, "\Delta_C"] & \mathcal{C}(C) \ . \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Coder}(C)$ l'ensemble des codérivations d'une $\mathcal{C}$-cogèbre C.

Remarque. Ainsi, une dg $\mathcal{C}$-cogèbre est en fait une $\mathcal{C}$-cogèbre munie d'une codérivation de carré nul.

Proposition 0.2.19. *Toute codérivation d sur une $\mathcal{C}$-cogèbre colibre $\mathcal{C}(V)$ est complètement caractérisée par sa projection sur les cogénérateurs* $\mathrm{proj}_V \circ d : \mathcal{C}(V) \to V$ *:*

$$\mathrm{Coder}(\mathcal{C}(V)) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(V), V) \ .$$

Plus précisément, l'unique codérivation de $\mathcal{C}(V)$, qui étend l'application $\varphi : \mathcal{C}(V) \to V$, est donnée par

$$d_\varphi = d_{\mathcal{C}} \circ \mathrm{Id}_V + (\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ (\mathrm{Id}_V; \varphi))(\Delta_{(1)} \circ \mathrm{Id}_V) \ ,$$

où le dernier terme est égal à la composée

$$\mathcal{C}(V) \xrightarrow{\Delta_{(1)} \circ \mathrm{Id}_V} \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C}(V) \cong \mathcal{C}(V; \mathcal{C}(V)) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ (\mathrm{Id}_V; \varphi)} \mathcal{C}(V) \ .$$

Les modules sur une opérade

Définition 0.2.20. Un *dg module à gauche (resp. à droite)* sur une dg opérade $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ est un dg $\mathbb{S}$-module (M, d_M) muni d'une action à gauche $\lambda : \mathcal{P} \circ M \to M$, (resp. d'une action à droite $\rho : M \circ \mathcal{P} \to M$) qui commute avec les différentielles respectives. Dans ce cas, d_M est aussi appelé *dérivation.*

Le *dg $\mathcal{P}$-module libre à gauche (resp. a droite)* sur un dg $\mathbb{S}$-module N est donné par $(\mathcal{P} \circ N, d_{\mathcal{P} \circ N})$ (resp. $(N \circ \mathcal{P}, d_{N \circ \mathcal{P}})$).

Proposition 0.2.21. *Soit $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ une dg opérade et N un $\mathbb{S}$-module gradué. Les dérivations sur le dg $\mathcal{P}$-module libre $\mathcal{P} \circ N$ ou $N \circ \mathcal{P}$ sont complètement caractérisées par leur restriction aux générateurs. Plus précisément,*

- *l'unique dérivation de $\mathcal{P} \circ N$, qui étend $\varphi : N \to \mathcal{P} \circ N$, est donnée par la composée*

$$d_\varphi = d_{\mathcal{P}} \circ \mathrm{Id}_N + (\gamma_{(1)} \circ \mathrm{Id}_N)(\mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \circ' \varphi) \ ,$$

- *et l'unique dérivation de $N \circ \mathcal{P}$, qui étend $\psi : N \to N \circ \mathcal{P}$, est donnée par la composée*

$$d_\psi = \mathrm{Id}_N \circ' d_{\mathcal{P}} + (\mathrm{Id}_N \circ \gamma)(\psi \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}) \ .$$

Suspension opéradique

Soit $\mathcal{S} := \mathrm{End}_{s\mathbb{K}}$ l'opérade des endomorphismes de $s\mathbb{K}$, l'espace vectoriel de dimension 1 concentré en degré 1. On considère de même $\mathcal{S}^c := \mathrm{End}^c_{s\mathbb{K}}$ la coopérade des endomorphismes de $s\mathbb{K}$. Étant donnée une opérade (resp. une coopérade), la suspension du $\mathbb{S}$-module sous-jacent n'est pas une opérade (resp. une coopérade), en général. La *suspension d'une opérade $\mathcal{P}$* est alors définie par l'opérade $\mathcal{S} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{P}$ et la *suspension d'une coopérade $\mathcal{C}$* par la coopérade $\mathcal{S}^c \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{C}$. On peut également considérer $\mathcal{S}^{-1} := \mathrm{End}_{s^{-1}\mathbb{K}}$, où $s^{-1}\mathbb{K}$ est l'espace vectoriel de dimension 1 concentré en degré -1. Le produit de Hadamard avec $\mathcal{S}^{-1}$ est appelé *désuspension* .

Le poids

Dans la prochaine section, on va considérer des dg $\mathbb{S}$-modules qui ont une graduation supplémentaire, appelée le *poids*. C'est-à-dire que tout dg $\mathbb{S}$-module s'écrit comme la somme directe de sous-dg $\mathbb{S}$-modules, indexés par ce poids. Étant donné un dg $\mathbb{S}$-module gradué par le poids M, on note $M_p^{(\omega)}$ le sous-dg $\mathbb{S}$-module de degré p et de poids ω de M. Ainsi, tout dg $\mathbb{S}$-module gradué par le poids M se décompose de la façon suivante :

$$M = M^{(0)} \oplus M^{(1)} \oplus \cdots \oplus M^{(\omega)} \oplus \cdots \ .$$

Par exemple, une *dg opérade graduée par le poids* (resp. une *dg coopérade graduée par le poids*) est une structure d'opérade (resp. de dg coopérade) sur un dg $\mathbb{S}$-module gradué par le poids. Dans ce cas, on demande que la composition et l'unité (resp. la décomposition et la counité) préserve ce poids. On dit qu'une dg opérade (resp. une dg coopérade) graduée par le poids $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{C}$) est *connexe* si $\mathcal{P}^{(0)} = \mathbb{K}\mathrm{id}$ (resp. $\mathcal{C}^{(0)} = \mathbb{K}\mathrm{id}$) est concentré en degré 0.

0.2.3 (Co)opérades quasi-(co)libres

On considère le bifoncteur $\overline{\mathcal{T}}$ de la catégorie $\mathbb{S}-\mathsf{Mod}$ qui, à deux $\mathbb{S}$-modules M et N, associe la partie linéaire en N du module arboricole $\mathcal{T}(M \oplus N)$.

Définition 0.2.22. Le *module arboricole infinitésimal* $\mathcal{T}(M;N)$ est défini par

$$\mathcal{T}(M;N) := \mathrm{I} \oplus \overline{\mathcal{T}}(M;N) = \mathrm{I} \oplus N \oplus (M \circ_{(1)} N \oplus N \circ_{(1)} M) \oplus \cdots \ .$$

Remarque. Un élément de $\mathcal{T}(M;N)$ est une somme d'arbres dont les sommets sont indicés par M, sauf un seul sommet qui lui est indicé par N.

Proposition 0.2.23. *Pour tout $\mathbb{S}$-module gradué M, N et N', on a*

$$I \oplus \mathcal{T}(M; N \oplus N') = \mathcal{T}(M;N) \oplus \mathcal{T}(M;N') \ .$$

La diagonale $D : E \to E \oplus E$ d'un $\mathbb{S}$-module E induit le morphisme

$$\Delta^E : \ \mathcal{T}(E) \xrightarrow{\mathcal{T}(D)} \mathcal{T}(E \oplus E) \twoheadrightarrow \mathcal{T}(E;E) \ \ ,$$

qui consiste à distinguer chaque sommet avec son indice.

Proposition 0.2.24. *Soit E un $\mathbb{S}$-module gradué. Toute dérivation de l'opérade libre $\mathcal{T}(E)$ est caractérisée par l'image des générateurs $E \to \mathcal{T}(E)$. Plus précisément, l'unique dérivation de $\mathcal{T}(E)$, qui étend un morphisme $\varphi : E \to \mathcal{T}(E)$, est donnée par la composée*

$$d_\varphi : \ \mathcal{T}(E) \xrightarrow{\ \Delta^E\ } \mathcal{T}(E;E) \xrightarrow{\mathcal{T}(\mathrm{Id}_E;\varphi)} \mathcal{T}(E;\mathcal{T}(E)) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{T}(E)) \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{T}(E)}} \mathcal{T}(E) \ \ .$$

Définition 0.2.25. Une *opérade quasi-libre* est une dg opérade $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ telle que $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E)$ est l'opérade libre sur un $\mathbb{S}$-module gradué E.

Rappelons que le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{T}^c(\overline{\mathcal{T}^c}(E))$ est composé des sommes d'arbres d'arbres non triviaux dont les sommets sont indicés par E et que l'application

$$\Delta_E : \mathcal{T}^c(E) \to \mathcal{T}^c(\overline{\mathcal{T}^c}(E))$$

associe, à un arbre t dont les sommets sont indicés par E, la somme de tous les arbres munis d'une partition obtenus à partir de t.

Proposition 0.2.26. *Toute codérivation d de la coopérade colibre $\mathcal{T}^c(E)$, sur un $\mathbb{S}$-module gradué E, est complètement caractérisée par sa projection sur les cogénérateurs*

$$\mathcal{T}^c(E) \xrightarrow{d} \mathcal{T}^c(E) \xrightarrow{\mathrm{proj}_E} E \ .$$

Plus précisément, l'unique codérivation de $\mathcal{T}^c(E)$, qui étend un morphisme $\varphi : \mathcal{T}^c(E) \to E$, est donnée par la composée

$$\mathcal{T}^c(E) \xrightarrow{\Delta_E} \mathcal{T}^c(\overline{\mathcal{T}^c}(E)) \xrightarrow{\Delta^{\overline{\mathcal{T}^c}(E)}} \mathcal{T}^c(\overline{\mathcal{T}^c}(E); \overline{\mathcal{T}^c}(E))$$

$$\xrightarrow{\mathcal{T}^c(\mathrm{proj}_E;\varphi)} \mathcal{T}^c(E; E) \longrightarrow \mathcal{T}^c(E) \quad .$$

Définition 0.2.27. Une *coopérade quasi-colibre* est une dg coopérade $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ telle que $\mathcal{C} = \mathcal{T}^c(E)$ est la coopérade colibre sur un $\mathbb{S}$-module gradué E.

0.2.4 Morphismes tordants

Soient $(\mathcal{P}, \gamma, \eta, d_{\mathcal{P}})$ une dg opérade et $(\mathcal{C}, \Delta, \eta, d_{\mathcal{C}})$ une dg coopérade.

On considère le dg $\mathbb{S}$-module suivant

$$(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) := \{\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(n), \mathcal{P}(n))\}_{n\geq 0}, \partial) \ ,$$

où $\mathbb{S}_n$ agit par conjugaison, c'est-à-dire

$$f^\sigma(x) := (f(x^{\sigma^{-1}}))^\sigma, \ , \forall f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(n), \mathcal{P}(n)), \ , \forall \sigma \in \mathbb{S}_n, \ , \forall x \in \mathcal{C}(n) \ ,$$

et où $\partial(f) := d_{\mathcal{P}} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_{\mathcal{C}}$.

Proposition 0.2.28. *Le dg $\mathbb{S}$-module $(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), \partial)$, muni de la composition définie par*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{P})} : & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) \circ \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) \\ & (f; g_1, \ldots, g_k) & \mapsto & \gamma \circ (f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) \circ \Delta \end{array}$$

est une dg opérade, appelée opérade de convolution.

Cette construction est due à Berger et Moerdijk [BM03], et généralise aux opérades l'algèbre de convolution $\mathrm{Hom}(C, A)$ associée à un couple (C, A) formé d'une cogèbre C et d'une algèbre A.

La composée

$$f \star g := \ \mathcal{C} \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C} \xrightarrow{f \circ_{(1)} g} \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \xrightarrow{\gamma_{(1)}} \mathcal{P}$$

définit un *produit pre-Lie* sur $\prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P})(n)$. Ce produit s'étend à l'espace des morphismes de $\mathbb{S}$-modules

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) := \prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(\mathcal{C}(n), \mathcal{P}(n)) \ .$$

Proposition 0.2.29. *Le triplet $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), \star, \partial)$ est une dg algèbre pre-Lie. Le crochet de Lie associé induit une structure de dg algèbre de Lie $(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), [\ ,\ ], \partial)$, appelée* dg algèbre de Lie de convolution.

On considère l'*équation de Maurer–Cartan* dans la dg algèbre pre-Lie $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), \star, \partial)$:

$$\partial(\alpha) + \alpha \star \alpha = 0 \ .$$

Remarque. Puisque nous travaillons sur un corps de caractéristique 0, si α est de degré impair, on a $\alpha \star \alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$ et, ainsi, l'équation ci-dessus est équivalente à l'équation de Maurer-Cartan classique

$$\partial(\alpha) + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0 \ .$$

Définition 0.2.30. Une solution $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ de degré -1 de l'équation de Maurer–Cartan est appelée *morphisme tordant.* On note $\mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ l'ensemble des morphismes tordants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{P}$.

D'après la Proposition 0.2.21, les dérivations sur $\mathcal{C} \circ \mathcal{P}$ et sur $\mathcal{P} \circ \mathcal{C}$ sont caractérisées par leur restriction à $\mathcal{C}$. Ainsi, étant donné $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ de degré -1, on considère les dérivations définies ci-dessous :

- sur $\mathcal{C} \circ \mathcal{P}$: Soit d_α^r l'unique dérivation qui étend la composée

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ_{(1)} \alpha} \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C} \circ \mathcal{P} \ .$$

  On définit alors la dérivation de $\mathcal{C} \circ \mathcal{P}$ suivante

$$d_\alpha := d_{\mathcal{C} \circ \mathcal{P}} + d_\alpha^r \ .$$

- sur $\mathcal{P} \circ \mathcal{C}$: Soit d_α^l l'unique dérivation qui étend la composée

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}} \mathcal{P} \circ \mathcal{C} \ .$$

  On définit alors la dérivation de $\mathcal{P} \circ \mathcal{C}$ suivante

$$d_\alpha := d_{\mathcal{P} \circ \mathcal{C}} + d_\alpha^l \ .$$

Lemme 0.2.31. *Dans les deux cas, la dérivation d_α vérifie*

$$(d_\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) \ .$$

Définition 0.2.32. Soit $\alpha \in \mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ un morphisme tordant. On définit les deux complexes de chaînes suivants :

$$\mathcal{C} \circ_\alpha \mathcal{P} := (\mathcal{C} \circ \mathcal{P}, d_\alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} \circ_\alpha \mathcal{C} := (\mathcal{P} \circ \mathcal{C}, d_\alpha) \ .$$

Remarque. Ces deux complexes sont très différents. En effet, comme la composition des $\mathbb{S}$-modules n'est pas symétrique, leurs $\mathbb{S}$-modules sous-jacents ne sont même pas isomorphes.

Lemme 0.2.33. *Soit $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ un morphisme de dg opérades connexes, graduées par un poids, et soit $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un morphisme de dg coopérades connexes, graduées par un poids. Soient $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ et $\alpha' : \mathcal{C}' \to \mathcal{P}'$ deux morphismes tordants tels que $\alpha' \circ f = g \circ \alpha$.*

Si deux morphismes parmi f, g et $f \circ g : \mathcal{C} \circ_\alpha \mathcal{P} \to \mathcal{C}' \circ_{\alpha'} \mathcal{P}'$ (resp. et $g \circ f : \mathcal{P} \circ_\alpha \mathcal{C} \to \mathcal{P}' \circ_{\alpha'} \mathcal{C}'$) sont des quasi-isomorphismes alors le troisième est aussi un quasi-isomorphisme.

Remarque. Lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ sont graduées par un poids, on exige que le morphisme tordant α préserve ce poids. Par ailleurs, la condition de compatibilité $\alpha' \circ f = g \circ \alpha$ implique que les morphismes $f \circ g : \mathcal{C} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{C}' \circ \mathcal{P}'$ et $g \circ f : \mathcal{P} \circ \mathcal{C} \to \mathcal{P}' \circ \mathcal{C}'$ commutent avec les différentielles. Ils induisent ainsi les morphismes $f \circ g : \mathcal{C} \circ_\alpha \mathcal{P} \to \mathcal{C}' \circ_\alpha \mathcal{P}'$ et $g \circ f : \mathcal{P} \circ_\alpha \mathcal{C} \to \mathcal{P}' \circ_\alpha \mathcal{C}'$.

0.2.5 Les constructions bar et cobar

Dans cette section, nous répondons à la question suivante :

Les foncteurs $\mathrm{Tw}(\mathcal{C}, -)$ et $\mathrm{Tw}(-, \mathcal{P})$ sont-ils représentables ?

La construction bar

On définit un foncteur

$$\mathrm{B} : \{\text{dg opérades augmentées}\} \to \{\text{dg coopérades conilpotentes}\} \ .$$

Soit $(\mathcal{P}, \gamma, \eta, \epsilon)$ une opérade augmentée, et $\overline{\mathcal{P}} := \ker \epsilon$ son idéal d'augmentation. Le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{P}$ se décompose de façon naturelle en $\mathcal{P} = \mathrm{I} \oplus \overline{\mathcal{P}}$.

La *construction bar* $\mathrm{B}\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ est une dg coopérade dont la coopérade sous-jacente est $\mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}})$. De plus, il existe une unique codérivation $d_2 : \mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}}) \to \mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}})$ qui étend la composée suivante

$$\mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}}) \twoheadrightarrow \mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}})^{(2)} \cong (\mathbb{K}s \otimes \overline{\mathcal{P}}) \circ_{(1)} (\mathbb{K}s \otimes \overline{\mathcal{P}})$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}} (\mathbb{K}s \otimes \mathbb{K}s) \otimes (\overline{\mathcal{P}} \circ_{(1)} \overline{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\gamma_s \otimes \gamma_{(1)}} (\mathbb{K}s \otimes \overline{\mathcal{P}}) \ ,$$

où $\gamma_s : \mathbb{K}s \otimes \mathbb{K}s \to \mathbb{K}s$ est l'application de degré -1 définie par $\gamma_s(s \otimes s) := s$. Enfin, si on considère une dg opérade $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$, la différentielle $d_{\mathcal{P}}$ induit une différentielle d_1 sur $\mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}})$.

Proposition 0.2.34. *L'application d_2 est une différentielle, i.e. $(d_2)^2 = 0$, et $d_1 \circ d_2 + d_2 \circ d_1 = 0$.*

Définition 0.2.35. La *construction bar* d'une dg opérade augmentée $\mathcal{P}$ est la dg coopérade conilpotente

$$\mathrm{B}\mathcal{P} := \big(\mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}}), d_{\mathrm{B}\mathcal{P}} := d_1 + d_2\big) \ .$$

Proposition 0.2.36. *Avec la représentation de la coopérade colibre en termes d'arbres, la différentielle d_2 correspond à la somme, sur les arêtes internes, des arbres obtenus en appliquant $\gamma_{(1)}$ aux couples de sommets d'une arête interne.*

La construction cobar

On définit un foncteur

$$\Omega : \{\text{dg coopérades coaugmentées}\} \to \{\text{dg opérades augmentées}\} \ .$$

Soit $(\mathcal{C}, \Delta, \eta, \upsilon)$ une coopérade coaugmentée, et $\overline{\mathcal{C}} := \operatorname{coker} \upsilon$ son coidéal de coaugmentation. Le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{C}$ se décompose de façon naturelle en $\mathcal{C} = \mathrm{I} \oplus \overline{\mathcal{C}}$.

La *construction cobar* $\Omega\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ est une dg opérade dont l'opérade sous-jacente est $\mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})$. De plus, il existe une unique dérivation $d_2 : \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}) \to \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})$ qui étend la composée suivante

$$(\mathbb{K}s^{-1} \otimes \overline{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\Delta_s \otimes \Delta_{(1)}} (\mathbb{K}s^{-1} \otimes \mathbb{K}s^{-1}) \otimes (\overline{\mathcal{C}} \circ_{(1)} \overline{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}}$$

$$(\mathbb{K}s^{-1} \otimes \overline{\mathcal{C}}) \circ_{(1)} (\mathbb{K}s^{-1} \otimes \overline{\mathcal{C}}) \cong \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})^{(2)} \rightarrowtail \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}) \ ,$$

où $\Delta_s : \mathbb{K}s^{-1} \to \mathbb{K}s^{-1} \otimes \mathbb{K}s^{-1}$ est la diagonale définie par $\Delta_s(s^{-1}) := -s^{-1} \otimes s^{-1}$. Enfin, si on considère une dg coopérade $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, la différentielle $d_{\mathcal{C}}$ induit une différentielle d_1 sur $\mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})$.

Proposition 0.2.37. *L'application d_2 est une différentielle, i.e. $(d_2)^2 = 0$, et $d_1 \circ d_2 + d_2 \circ d_1 = 0$.*

Définition 0.2.38. La *construction cobar* d'une dg coopérade coaugmentée $\mathcal{C}$ est la dg opérade

$$\Omega\mathcal{C} := \big(\mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}), d_{\Omega\mathcal{C}} := d_1 + d_2\big) \ .$$

Proposition 0.2.39. *Avec la représentation de l'opérade libre en termes d'arbres, la différentielle d_2 correspond à la somme, sur les sommets de l'arbre, des arbres obtenus en appliquant $\Delta_{(1)}$ à l'élément qui indice ce sommet.*

Théorème 0.2.40. *Les constructions bar et cobar forment une paire de foncteurs adjoints*

$$\Omega : \{ \textit{ dg coopérades conilpotentes } \} \rightleftharpoons \{\textit{dg opérades augmentées } \} : \mathrm{B} \ ,$$

telle que l'adjonction est représentée par l'ensemble des morphismes tordants. C'est-à-dire que pour toute dg opérade augmentée $\mathcal{P}$ et pour toute dg coopérade conilpotente $\mathcal{C}$, il existe des bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{dg\ Op}}(\Omega\mathcal{C}, \mathcal{P}) \cong \mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{dg\ Coop}}(\mathcal{C}, \mathrm{B}\mathcal{P}) \ .$$

On note $\iota_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \Omega\mathcal{C}$ et $\pi_{\mathcal{P}} : \mathrm{B}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ les morphismes tordants qui correspondent respectivement à l'unité $\upsilon : \mathcal{C} \to \mathrm{B}\Omega\mathcal{C}$ et à la counité $\epsilon : \Omega\mathrm{B}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ d'adjonction.

Proposition 0.2.41. *Tout morphisme tordant $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ se factorise de manière unique à travers les morphismes tordants $\pi_{\mathcal{P}}$ et $\iota_{\mathcal{C}}$ de la façon suivante*

$$\begin{tikzcd} & \Omega\mathcal{C} \arrow[dr, dashed, "g_\alpha"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\iota_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "f_\alpha"'] & & \mathcal{P} \ , \\ & \mathrm{B}\mathcal{P} \arrow[ur, "\pi_{\mathcal{P}}"'] & \end{tikzcd}$$

où g_α est un morphisme de dg opérades et f_α est un morphisme de dg coopérades.

Remarque. La proposition ci-dessus implique que $\pi_{\mathcal{P}}$ et $\iota_{\mathcal{C}}$ sont universels parmi les morphismes tordants. Ainsi, ils sont appelés *morphismes tordants universels*.

Les morphismes $\pi_{\mathcal{P}}$ et $\iota_{\mathcal{C}}$ sont donnés respectivement par les composées

$$\mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}}) \twoheadrightarrow s\overline{\mathcal{P}} \xrightarrow{s^{-1}} \overline{\mathcal{P}} \rightarrowtail \mathcal{P} \quad ,$$

et

$$\mathcal{C} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{C}} \xrightarrow{s^{-1}} s^{-1}\overline{\mathcal{C}} \rightarrowtail \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}) \quad .$$

Lemme 0.2.42. *Les complexes de chaînes sous-jacents à $(\mathrm{B}\mathcal{P} \circ_\pi \mathcal{P}, d_\pi)$ et à $(\mathcal{C} \circ_\iota \Omega\mathcal{C}, d_\iota)$ sont acycliques.*

0.2.6 Morphismes de Koszul opéradiques

Définition 0.2.43. Un morphisme tordant $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ est appelé *morphisme de Koszul* si $\mathcal{C} \circ_\alpha \mathcal{P}$ ou $\mathcal{P} \circ_\alpha \mathcal{C}$ est acyclique. On note $\mathrm{Kos}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ l'ensemble des morphismes de Koszul de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{P}$.

D'après le Lemme 0.2.42, les morphismes tordants universels sont des morphismes de Koszul.

Théorème 0.2.44. *Soit $\mathcal{P}$ une dg opérade connexe, graduée par le poids, et $\mathcal{C}$ dg coopérade connexe, graduée par le poids. Soit $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ un morphisme tordant. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le complexe de chaînes $\mathcal{C} \circ_\alpha \mathcal{P}$ est acyclique,*

(2) *le complexe de chaînes $\mathcal{P} \circ_\alpha \mathcal{C}$ est acyclique,*

(3) *le morphisme de dg coopérades $f_\alpha : \mathcal{C} \to \mathrm{B}\mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme,*

(4) *le morphisme de dg opérades $g_\alpha : \Omega\mathcal{C} \to \mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme.*

Théorème 0.2.45. *La counité $\upsilon : \Omega\mathrm{B}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et l'unité $\epsilon : \mathcal{C} \to \mathrm{B}\Omega\mathcal{C}$ d'adjonction sont des quasi-isomorphismes de dg opérades et de dg coopérades respectivement.*

Remarque. Ainsi, la counité d'adjonction fournit, de manière fonctorielle, une résolution quasi-libre des dg opérades. Cette résolution est appelée *résolution bar-cobar*.

0.3 Dualité de Koszul

La dualité de Koszul a été introduite par Priddy dans les années 1970 au niveau des algèbres associatives. Elle a ensuite été étendue aux opérades par Ginzburg–Kapranov et Getzler–Jones dans les années 1990. Etant donnée une opérade quadratique, la dualité de Koszul fournit une résolution quasi-libre, appelée résolution de Koszul, qui s'avère être le modèle minimal de cette opérade. Ceci permet alors d'étudier les propriétés homotopiques des algèbres sur cette opérade.

0.3.1 (Co)opérade associée à une donnée quadratique

Définition 0.3.1. Une *donnée quadratique* est un couple (E, R) composé d'un $\mathbb{S}$-module gradué E et d'un sous-$\mathbb{S}$-module gradué R de $\mathcal{T}(E)^{(2)}$, appelés respectivement *module des opérations génératrices* et *module des relations*, voir section 7.1.1 de [LV12].
L'*opérade quadratique* $\mathcal{P}(E, R)$, associée à une donnée quadratique (E, R), est l'opérade qui est universelle parmi les opérades $\mathcal{P}$, quotients de $\mathcal{T}(E)$, telles que la composée

$$R \rightarrowtail \mathcal{T}(E) \twoheadrightarrow \mathcal{P}$$

est nulle. On dit que (E, R) est une *présentation* de $\mathcal{P}(E, R)$.

De façon duale, on définit la *coopérade quadratique* $\mathcal{C}(E, R)$ associée à une donnée quadratique (E, R) : c'est la coopérade universelle parmi les sous-coopérades de la coopérade colibre $\mathcal{T}^c(E)$ telles que la composée

$$\mathcal{C} \rightarrowtail \mathcal{T}^c(E) \twoheadrightarrow \mathcal{T}^c(E)^{(2)}/(R)$$

est nulle. Les éléments de E sont alors appelés *coopérations génératrices*, et ceux de R sont appelés *corelations*.

Plus précisément, il existe un unique morphisme d'opérades $\mathcal{P}(E, R) \to \mathcal{P}$ tel que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail] & \mathcal{T}(E) \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & \mathcal{P} \\ & & \mathcal{P}(E,R) \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

De la même façon, il existe un unique morphisme de coopérades $\mathcal{C} \to \mathcal{C}(E, R)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathcal{T}^c(E) \arrow[r, two heads] & \mathcal{T}^c(E)^{(2)}/(R) \\ \mathcal{C}(E,R) \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd} .$$

Remarque. Le poids de $\mathcal{T}E$ induit un poids sur $\mathcal{P}(E, R)$ et sur $\mathcal{C}(E, R)$.

Définition 0.3.2. La *coopérade duale de Koszul* de l'opérade quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ est la coopérade quadratique $\mathcal{P}^{¡}$ définie par

$$\mathcal{P}^{¡} := \mathcal{C}(sE, s^2R) .$$

L'*opérade duale de Koszul* de $\mathcal{P}$ est l'opérade quadratique

$$\mathcal{P}^! := (\mathcal{S}^c \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{P}^{¡})^* .$$

Proposition 0.3.3. *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ opérade quadratique telle que E est de dimension finie. L'opérade duale de Koszul $\mathcal{P}^!$, associée à $\mathcal{P}$, admet une présentation quadratique donnée par*

$$\mathcal{P}^! \cong \mathcal{P}(s^{-1}\mathcal{S}^{-1} \underset{H}{\otimes} E^*, R^\perp) ,$$

où $R^\perp$ est un sous-$\mathbb{S}$-module de $\mathcal{T}(s^{-1}\mathcal{S}^{-1} \underset{H}{\otimes} E^*)$, défini dans [LV12, Section 7.2.3].

Exemple. On a $\mathcal{A}ss^! = \mathcal{A}ss$, $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$ et $\mathcal{C}om^! = \mathcal{L}ie$.

0.3.2 Constructions bar et cobar associées à une donnée quadratique

Soient $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ l'opérade quadratique et $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E, R)$ la coopérade quadratique associées à une donnée quadratique (E, R).

Le poids défini sur l'opérade libre induit un degré, appelé *degré syzygique*, sur la construction bar $\mathrm{B}\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ et sur la construction cobar $\Omega\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$. Le degré syzygique d'un élément $(\nu; \nu_1, \ldots, \nu_k)$ de $\mathrm{B}\mathcal{P}$, avec $\nu, \nu_1, \ldots, \nu_k$ dans $\mathcal{P}$, est égal à $w(\nu) + w(\nu_1) + \cdots + w(\nu_k) - (k+1)$.

La différentielle $d_{\mathrm{B}\mathcal{P}}$ est égale à d_2 car $\mathcal{P}$ n'a pas de différentielle interne. Elle augmente le degré syzygique de 1 et préserve le poids. Ainsi, $(\mathrm{B}\mathcal{P}, d_2)$ est un complexe de cochaînes vis-à-vis du degré syzygique, compatible avec le poids défini sur l'opérade libre.

De même, $(\Omega\mathcal{C}, d_{\Omega\mathcal{C}} = d_2)$ est un complexe de chaînes par rapport au degré syzygique défini par d_2, compatible avec le poids.

Proposition 0.3.4. *Soit $\mathcal{P}^{¡}$ la coopérade duale de Koszul de $\mathcal{P}$ et soit $\mathcal{C}^{¡} = \mathcal{P}(s^{-1}E, s^{-2}R)$ l'opérade duale de Koszul associée à $\mathcal{C}$.*

L'inclusion naturelle de coopérades $i : \mathcal{P}^{¡} \rightarrowtail \mathrm{B}\mathcal{P}$ induit un isomorphisme de coopérades graduées

$$i : \mathcal{P}^{¡} \xrightarrow{\cong} H^0(\mathrm{B}\mathcal{P}, d_2) .$$

La projection naturelle d'opérades $p : \Omega\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{¡}$ induit un ismorphisme d'opérades graduées

$$p : H_0(\Omega\mathcal{C}, d_2) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^{¡} .$$

0.3.3 Opérades de Koszul

Lemma 0.3.5. *Soit (E, R) une donnée quadratique et soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ l'opérade quadratique associée. La composée*

$$\kappa : \mathcal{P}^{¡} = \mathcal{C}(sE, s^2R) \twoheadrightarrow sE \xrightarrow{s^{-1}} E \hookrightarrow \mathcal{P}(E, R) = \mathcal{P} ,$$

associée à (E, R), est un morphisme tordant.

Définition 0.3.6. Le complexe associé au morphisme tordant κ

$$\mathcal{P}^{¡} \circ_\kappa \mathcal{P} := (\mathcal{P}^{¡} \circ \mathcal{P}, d_\kappa) ,$$

est appelé *complexe de Koszul* de l'opérade $\mathcal{P}$.

On dit qu'une opérade quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ est une *opérade de Koszul* si le complexe de Koszul de $\mathcal{P}$ est acyclique.

Le théorème suivant est une version du Théorème 0.2.44, appliqué aux constructions précédentes.

Théorème 0.3.7 (Critère de Koszul)**.** *Soit (E, R) une donnée quadratique. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le complexe de Koszul* $\mathcal{P}^{¡} \circ_\kappa \mathcal{P}$ *est acyclique,*

(2) *le complexe de Koszul* $\mathcal{P} \circ_\kappa \mathcal{P}^{¡}$ *est acyclique,*

(3) *l'inclusion* $i : \mathcal{P}^{¡} \rightarrowtail \mathrm{B}\mathcal{P}$ *est un quasi-isomorphisme de dg coopérades,*

(4) *la projection* $p : \Omega\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{¡}$ *est un quasi-isomorphisme de dg opérades.*

Corollaire 0.3.8. *Si $\mathcal{P}$ est une opérade de Koszul alors $\Omega\mathcal{P}^{¡} \to \mathcal{P}$ est une résolution quasi-libre de $\mathcal{P}$, appelée* résolution de Koszul *de $\mathcal{P}$.*

Exemple. Les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{C}om$ sont des opérades de Koszul.

0.4 Algèbres à homotopie près et théorème de transfert

Lorsqu'un complexe de chaînes est muni d'une structure d'algèbre compatible avec la différentielle, son homologie hérite de ce type de structure. Mais ce faisant, on perd de l'information algébro-homotopique. Cependant, il existe une structure algébrique plus riche sur l'homologie, qui code fidèlement le type d'homotopie de l'algèbre de départ.

De façon plus générale se pose la question du comportement de la structure algébrique vis-à-vis du type d'homotopie. Plus précisément, étant donnés deux complexes de chaînes homotopiquement équivalents, si l'un d'eux est muni d'une structure d'algèbre, peut-on la transférer sur l'autre ? En général, la structure transférée naïvement est d'un type différent de celle de départ : les relations ne sont plus vérifiées strictement mais à homotopie près grâce à de nouvelles opérations supérieures. Dans le cas des algèbres associatives, la structure supérieure est donnée par la notion d'algèbre associative à homotopie près, telle que définie par Stasheff.

La théorie des opérades, et notamment la dualité de Koszul, permet de décrire de manière explicite la structure transférée comme une algèbre sur la résolution de Koszul d'une opérade.

Dans cette section, $\mathcal{P}$ désigne une opérade de Koszul.

0.4.1 La catégorie des algèbres à homotopie près

Définition 0.4.1. Une *$\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près*, ou encore une *p-algèbre@$\mathcal{P}_\infty$-algèbre* , est une algèbre sur la résolution de Koszul $\mathcal{P}_\infty := \Omega\mathcal{P}^{¡}$ de $\mathcal{P}$. De manière équivalente, une structure de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près sur un complexe de chaînes (A, d_A) est la donnée d'un morphisme de dg opérades

$$\mathcal{P}_\infty \ := \ \Omega\, \mathcal{P}^{¡} \ \to \ \mathrm{End}_A \ .$$

Proposition 0.4.2 (Pierre de Rosette opéradique)**.** *L'ensemble des structures de $\mathcal{P}$-algèbre est donnée, de façon équivalente, par*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{dg\,Op}}(\Omega\mathcal{P}^{¡}, \mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Tw}(\mathcal{P}^{¡}, \mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{dg\,Coop}}(\mathcal{P}^{¡}, \mathrm{BEnd}_A) \cong \mathrm{Codiff}(\mathcal{P}^{¡}(A)) \ ,$$

où $\mathrm{Codiff}(\mathcal{P}^{¡}(A))$ *est l'ensemble des codifférentielles sur $\mathcal{P}^{¡}(A)$, la $\mathcal{P}^{¡}$-cogèbre colibre sur A.*

Remarque. On a quatre définitions équivalentes d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près. On peut ainsi utiliser l'une ou l'autre de ces définitions suivant le problème qui nous intéresse.

Une $\mathcal{P}$-algèbre A est une $\mathcal{P}_\infty$-algèbre telle que le morphisme $\mathcal{P}_\infty \to \mathrm{End}_A$ se factorise via $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}_\infty = \Omega\mathcal{P}^{¡} \twoheadrightarrow \mathcal{P} \to \mathrm{End}_A \ .$$

Proposition 0.4.3. *L'homotopie d'une $\mathcal{P}_\infty$-algèbre A, c'est-à-dire l'homologie $H(A)$ du complexe de chaînes sous-jacent, possède naturellement une structure de $\mathcal{P}$-algèbre.*

Concernant les morphismes, on peut bien sûr considérer les morphismes de $\mathcal{P}_\infty$-algèbres, définis dans la Section 0.1.3. Cependant, cette notion n'est pas bien adaptée à l'étude de la théorie homotopique des $\mathcal{P}_\infty$-algèbres. Pour cela, on définit une autre classe, plus grosse, de morphismes.

Définition 0.4.4. Un ∞-*morphisme* de $\mathcal{P}_\infty$-algèbres $f : A \rightsquigarrow B$ est un morphisme entre les dg $\mathcal{P}^{¡}$-cogèbres associées

$$f : (\mathcal{P}^{¡}(A), d_\varphi) \to (\mathcal{P}^{¡}(B), d_\psi) \ ,$$

où φ et ψ sont les morphismes tordants définissant la structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbres sur A et sur B respectivement.

On dit qu'un ∞-morphisme f de $\mathcal{P}_\infty$-algèbres est un ∞-*isomorphime* (resp. ∞-*quasi-isomorphisme*) si sa première composante $f_{(0)} : A \to B$ est un isomorphisme (resp. un quasi-isomorphisme).

On note ∞-$\mathcal{P}_\infty$-alg la catégorie des $\mathcal{P}_\infty$-algèbres avec les ∞-morphismes.

Proposition 0.4.5. *Un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres est un ∞-morphisme dont les composantes, autres que la première, sont nulles.*

0.4.2 Théorème de transfert homotopique

La structure naturelle de $\mathcal{P}$-algèbre sur l'homotopie $H(A)$ d'une $\mathcal{P}$-algèbre A ne contient pas toute l'information homotopique de A. Puisque l'on travaille sur un corps de caractéristique 0, il est possible d'écrire $H(A)$ comme un rétract par déformation de A. Ceci permet de transférer la structure de $\mathcal{P}$-algèbre, et plus généralement toute structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre, sur A en une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur $H(A)$, et qui contient toute l'information homotopique de A.

Soit (B, d_B) un rétract homotopique du complexe de chaînes (A, d_A), c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (B, d_B) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} \ ,$$

avec

$$\mathrm{Id}_A - ip = d_A h + h d_A \ .$$

On suppose que i est un quasi-isomorphisme.

Théorème 0.4.6 (TTH)**.** *Soit (B, d_B) un rétract homotopique de (A, d_A).*

Toute structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur A, définie par des opérations génératrices $\{m_{i_k} : A^{\otimes n_{i_k}} \to A\}$, peut être transférée en une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur B, qui étend les opérations transférées $p\, m_{j_k}\, i^{\otimes n_{j_k}} : B^{\otimes n_{j_k}} \to B$, et tel que i s'étend en un ∞-quasi-isomorphisme.

Démonstration. La démonstration de ce résultat s'articule de la façon suivante :

- d'après la Proposition 0.4.2, une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur A est donnée par un morphisme de dg coopérades $\mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{BEnd}_A$,
- le rétract homotopique entre A et B induit un morphisme de dg coopérades $\Psi : \mathrm{BEnd}_A \to \mathrm{BEnd}_B$ [VdL03],
- et donc la composée

$$\mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{BEnd}_A \to \mathrm{BEnd}_B$$

  définit une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur B.

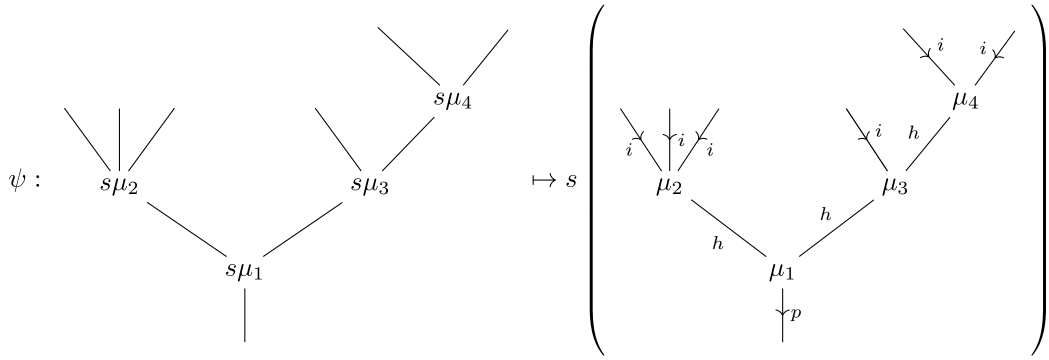
Par définition, on a $\mathrm{BEnd}_V = \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_V)$, pour tout complexe de chaînes (V, d_V). Le morphisme de coopérades $\Psi : \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_A) \to \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_B)$ est caractérisé par sa restriction aux cogénérateurs

$$\psi : \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_A) \to s\mathrm{End}_B \ ,$$

puisque $\mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_B)$ est une coopérade colibre. Une base de $\mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_A)$ est donnée par les arbres non-planaires dont les sommets sont indicés par des éléments de $s\mathrm{End}_A$. Soit $t = t(s\mu_1, \ldots, s\mu_k)$ un tel élément. On définit

$$\psi(t) = st'(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in s\mathrm{End}_B \ ,$$

où t' est l'arbre obtenu à partir de t en indiçant chaque feuille par i, chaque arête interne par h et la racine par p.



Proposition 0.4.7. *Soit (B, d_B) un rétract homotopique de (A, d_A). L'unique morphisme de coopérades $\Psi : \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_A) \to \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_B)$, qui étend $\psi : \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_A) \to s\mathrm{End}_B$ défini ci-dessus, est un morphisme de coopérades différentielles graduées $\Psi : \mathrm{BEnd}_A \to \mathrm{BEnd}_B$.*

La structure transférée sur B est alors donnée par des formules explicites. Soit $\varphi \in \mathrm{Tw}(\mathcal{P}^{¡}, \mathrm{End}_A)$ une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur A, et soit $f_\varphi : \mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{BEnd}_A$ le morphisme de dg coopérades associé. La structure transférée de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur B est donnée par la composée $f_\Phi := \Psi f_\varphi : \mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{BEnd}_B$. On note $\Phi : \mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{End}_B$ le morphisme tordant associé à f_Φ.

Proposition 0.4.8. *Soit (B, d_B) un rétract homotopique de (A, d_A) et soit $\varphi : \mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{End}_A$ une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur A. La structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre $\Phi : \mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{End}_B$ sur B, définie ci-dessus, est donnée par la composée*

$$\mathcal{P}^{¡} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{P}^{¡}}} \mathcal{T}^c(\overline{\mathcal{P}}^{¡}) \xrightarrow{\mathcal{T}^c(s\varphi)} \mathcal{T}^c(s\mathrm{End}_A) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{End}_B \quad .$$

Remarque. La structure transférée se décompose donc en trois morphismes :
- le premier qui ne dépend que du type de la structure d'algèbre que l'on veut transférer,
- le deuxième qui ne dépend que de la structure d'algèbre de A,
- et le dernier qui ne dépend que du rétract homotopique.

0.4.3 Théorie homotopique des algèbres sur une opérade

Theorem 0.4.9. *(Rectification) Pour toute $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près A, il existe une dg $\mathcal{P}$-algèbre $\mathrm{Rect}(A)$ telle que*

$$A \overset{\sim}{\rightsquigarrow} \mathrm{Rect}(A) \ .$$

Theorem 0.4.10. *(Équivalence entre catégories homotopiques) La catégorie homotopique des dg $\mathcal{P}$-algèbres est équivalente à la catégorie homotopique des $\mathcal{P}_\infty$-algèbres avec les ∞-morphismes :*

$$\mathrm{Ho}(\mathsf{dg}\,\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}) = \mathsf{dg}\,\mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg}[qi^{-1}] \cong \mathrm{Ho}(\mathcal{P}_\infty\text{-}\mathsf{alg}) = \mathcal{P}_\infty\text{-}\mathsf{alg}[(\infty\text{-}qi)^{-1}] \ .$$

Theorem 0.4.11. *(Quasi-iso vs ∞-quasi-iso) Soient A et B deux dg $\mathcal{P}$-algèbres. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes de dg $\mathcal{P}$-algèbres*

$$A \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\sim} B \quad ,$$

(2) *il existe un ∞-quasi-isomorphisme de dg $\mathcal{P}$-algèbres $A \overset{\sim}{\rightsquigarrow} B$.*

0.5 Produits de Manin

Dans son travail sur les groupes quantiques, Yuri I. Manin a défini deux produits, un blanc et un noir, dans la catégorie des algèbres associatives quadratiques. Ces produits ont de bonnes propriétés : ils sont duaux l'un de l'autre pour la dualité de Koszul et sont reliés par une adjonction. Grâce à ces résultats, Yuri I. Manin a décrit certains groupes quantiques bien connus comme le produit noir d'une algèbre avec sa duale de Koszul.

Après avoir étendu la dualité de Koszul des algèbres associatives quadratiques aux opérades binaires quadratiques, Ginzburg et Kapranov ont défini, dans [GK95], un produit noir et un produit blanc dans la catégorie des opérades binaires quadratiques. Ces produits opéradiques partagent les mêmes propriétés par rapport à la dualité de Koszul que les produit définis au niveau des algèbres.

Dans [Val08], l'auteur étend les produits de Manin à toute paire d'opérades non-symétriques, d'opérades, d'opérades colorées et de propérades, présentées par générateurs et relations. Cet article fournit aussi une méthode pour calculer des produits de Manin.

0.5.1 Produit blanc de Manin

Soient E et F deux $\mathbb{S}$-modules. On note $i_E : E \rightarrowtail \mathcal{T}(E)$ l'inclusion canonique de E dans l'opérade libre $\mathcal{T}(E)$ sur E. D'après la propriété universelle définissant l'opérade libre, il existe un unique morphisme d'opérades $\Phi : \mathcal{T}(E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F) \to \mathcal{T}(E) \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{T}(F)$, qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F \arrow[r, "i_{E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F}"] \arrow[dr, "i_E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} i_F"'] & \mathcal{T}(E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F) \arrow[d, "\exists ! \Phi"] \\
 & \mathcal{T}(E) \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{T}(F) \ .
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E)/(R)$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{T}(F)/(S)$ deux opérades, pas nécessairement quadratiques. On note respectivement $\pi_{\mathcal{P}} : \mathcal{T}(E) \twoheadrightarrow \mathcal{P}$ et $\pi_{\mathcal{Q}} : \mathcal{T}(F) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ les projections canoniques. Le noyau du morphisme d'opérades $(\pi_{\mathcal{P}} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \pi_{\mathcal{Q}}) \circ \Phi$ est un idéal opéradique qui induit la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, two heads] & \mathcal{T}(E) \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{T}(F) \arrow[r, two heads, "\pi_{\mathcal{P}} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \pi_{\mathcal{Q}}"] & \mathcal{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{Q} \ . \\
 & \mathcal{T}(E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F)/\mathrm{Ker}\left((\pi_{\mathcal{P}} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \pi_{\mathcal{Q}}) \circ \Phi\right) \arrow[ur, tail, "\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lemme 0.5.1. *Le noyau du morphisme d'opérades* $(\pi_{\mathcal{P}} \underset{H}{\otimes} \pi_{\mathcal{Q}}) \circ \Phi$ *est l'idéal opéradique de* $\mathcal{T}(E \underset{H}{\otimes} F)$ *engendré par*

$$\Phi^{-1}(R \underset{H}{\otimes} \mathcal{T}(E) + \mathcal{T}(F) \underset{H}{\otimes} S) \ .$$

Définition 0.5.2. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E)/(R)$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{T}(F)/(S)$ deux opérades définies par générateurs et relations. Le *produit blanc de Manin* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est l'opérade quotient définie par

$$\mathcal{P} \bigcirc \mathcal{Q} := \mathcal{T}(E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F)/(\Phi^{-1}(R \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{T}(E) + \mathcal{T}(F) \underset{\mathrm{H}}{\otimes} S)) \ .$$

Proposition 0.5.3. *La catégorie des opérades binaires quadratiques, munie du produit blanc de Manin et de l'opérade* $\mathcal{C}om$ *en tant qu'unité, forme une catégorie monoïdale symétrique.*

0.5.2 Produit noir de Manin

En dualisant les arguments précédents et en travaillant dans la catégorie opposée, on peut définir une notion de *produit noir de Manin pour les coopérades*, voir [Val08]. Comme il est plus facile de travailler avec les opérades plutôt qu'avec les coopérades, le dual linéaire du produit noir de Manin pour les coopérades fournit un *produit noir de Manin pour les opérades.*

On consière la catégorie des opérades binaires quadratiques (concentrées en degré 0) engendrées par un $\mathbb{S}_2$-module de dimension finie. On note $E^\vee$ le $\mathbb{S}_2$-module défini par

$$E^\vee := E^* \otimes \mathrm{sgn}_2 \ ,$$

où sgn_2 désigne la représentation signature.

Après avoir introduit une base de $\mathcal{T}(E)(3)$ et un produit scalaire induisant un isomorphisme $\theta_E : \mathcal{T}(E)(3) \to^{\cong} (\mathcal{T}(E^\vee)(3))^*$, on peut définir un morphisme $\widetilde{\Psi}$ comme étant la composée suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(E)(3) \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{T}(F)(3) \arrow[r, "\widetilde{\Psi}"] \arrow[d, "\theta_E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \theta_F"] & \mathcal{T}(E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathrm{sgn}_2)(3) \\
\mathcal{T}(E^\vee)(3)^* \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{T}(F^\vee)(3)^* \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{T}((E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathrm{sgn}_2)^\vee)(3)^* \arrow[u, "\theta^{-1}_{E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F}"'] \\
(\mathcal{T}(E^\vee)(3) \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{T}(F^\vee)(3))^* \arrow[r, "{}^t\Phi"] & \mathcal{T}(E^\vee \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F^\vee)(3)^* \arrow[u, "\cong"'] \ ,
\end{tikzcd}$$

où $\cong$ désigne l'isomorphisme naturel entre le dual d'un produit tensoriel et le produit tensoriel des duaux, et où Φ correspond au morphisme, défini dans la section précédente, appliqué à $E^\vee$ et $F^\vee$.

Définition 0.5.4. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E)/(R)$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{T}(F)/(S)$ deux opérades binaires quadratiques engendrées par des $\mathbb{S}_2$-modules de dimension finie. Le *produit noir de Manin* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est l'opérade quotient définie par

$$\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q} := \mathcal{T}(E \underset{\mathrm{H}}{\otimes} F \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathrm{sgn}_2)/(\widetilde{\Psi}(R \underset{\mathrm{H}}{\otimes} S)) \ .$$

Théorème 0.5.5. *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E)/(R)$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{T}(F)/(S)$ deux opérades binaires quadratiques engendrées par des $\mathbb{S}_2$-modules de dimension finie. Leur produit noir et leur produit blanc de Manin sont duaux l'un de l'autre par la dualité de Koszul via l'isomorphisme*

$$(\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q})^{\,i} \cong \mathcal{P}^{\,i} \bigcirc \mathcal{Q}^{\,i} \ .$$

Proposition 0.5.6. *La catégorie des opérades binaires quadratiques engendrées par un $\mathbb{S}_2$-module de dimension finie, munie du produit noir de Manin et de l'opérade $\mathcal{L}ie$ en tant qu'unité, est une catégorie symétrique monoïdale.*

Remarque. Les mêmes arguments définissent une notion analogue aux produits noir et blanc de Manin pour les opérades non-symétriques.

0.6 Scindage des opérations

Dans cette section, on commence par définir la notion de "scindage des opérations". Nous présentons ensuite les différents résultats connus pour cette notion, au niveau des algèbres comme au niveau des opérades.

0.6.1 Au niveau des algèbres

La notion de scindage d'opérations est apparue pour la première fois dans le cadre des algèbres associatives.

Définition 0.6.1 ([Lod04])**.** Soit $(A, *)$ une algèbre associative, c'est-à-dire un espace vectoriel A muni d'un produit binaire $* : A \otimes A \to A$ qui satisfait la relation d'associativité suivante

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in A \ .$$

On dit qu'il y a *scindage de l'associativité* quand l'opération $*$ peut s'écrire comme la somme de deux opérations binaires, c'est-à-dire

$$a * b = a \prec b + a \succ b, \quad \forall a, b \in A \ .$$

Le premier exemple de scindage de l'associativité a été décrit dans [Lod01].

Définition 0.6.2 ([Lod01])**.** Une *algèbre dendriforme* est un espace vectoriel muni de deux opérations binaires $\prec$ et $\succ$, qui satisfont les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z + y \succ z), \\
(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z), \\
(x \prec y + x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).
\end{aligned}$$

Lemme 0.6.3 ([Lod01])**.** *Pour toute algèbre dendriforme $(A, \prec, \succ)$, le produit $*$ défini par*

$$* := \prec + \succ$$

vérifie la relation d'associativité.

On peut étendre la définition de scindage de l'associativité de la manière suivante : on dit qu'il y a scindage de l'associativité quand un produit associatif $*$ peut s'écrire comme la somme d'une nombre fini d'opérations binaires

$$* = \star_1 + \cdots + \star_k \ .$$

Les algèbres tridendriformes, définies dans [LR04], induisent un scindage de l'associativité en trois opérations. Un scindage de l'associativité est donné par les quadrigèbres ([AL04]) pour $k = 4$, par les octogèbres ([Ler]) pour $k = 8$, et par les ennea algèbres ([Ler04]) pour $k = 9$.

En généralisant encore, on peut considérer le scindage d'opérations définissant d'autres structures. Par exemple, considérons la structure d'algèbre de Lie. Elle est définie par un crochet anti-symétrique $[\ ,\ ]$ satisfaisant la relation de Jacobi. La structure d'algèbre pre-Lie fournit un scindage du crochet de Lie en deux opérations.

Définition 0.6.4. Une *algèbre pre-Lie* est un espace vectoriel muni d'une opération binaire $\{\ ,\ \}$ satisfaisant la relation suivante :

$$\{\{x, y\}, z\} - \{x, \{y, z\}\} = \{\{x, z\}, y\} - \{x, \{z, y\}\} \ .$$

Lemme 0.6.5 ([Ger63])**.** *Soit $(A, \{\ ,\ \})$ une algèbre pre-Lie. L'antisymétrisation $[\ ,\ ]$ de $\{\ ,\ \}$, définie par*

$$[x, y] := \{x, y\} - \{y, x\} \ ,$$

munit A d'une structure d'algèbre de Lie.

Notons que des analogues des quadrigèbres, des octogèbres, et des algèbres tridendriformes ont été définis pour les structures d'algèbre de Lie, d'algèbre de Poisson ou encore d'algèbre de Jordan [Agu00, BH12, BLN10, BLN11].

Par ailleurs, la notion d'opérateur de Rota-Baxter permet aussi de scinder les opérations. Cette notion est apparue dans les travaux de Baxter [Bax60], dans le domaine des probabilités. Plus tard, les algèbres de Rota-Baxter ont été étudiées dans différents domaines des mathématiques, que ce soit par Rota en lien avec les systèmes intégrables [Rot69], ou par Cartier de façon plus algébrique [Car72]. Plus récemment, des applications à la renormalisation et en théorie quantique des champs ont été découvertes, voir [EFG07].

Définition 0.6.6. Soit $(A, \cdot)$ une algèbre associative et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que A est une *algèbre de Rota-Baxter* si elle est munie d'une application linéaire $P : A \to A$, appelée *opérateur de Rota-Baxter*, vérifiant

$$P(a) \cdot P(b) = P(P(a) \cdot b) + P(a \cdot P(b)) + \lambda P(a \cdot b) \ , \ \forall a, b \in A \ .$$

Dans ce cas, on dit que P est de *poids* λ.

Cette définition s'étend à d'autres structures algèbres, qui peuvent être définies par plusieurs opérations génératrices.

Exemple. Un exemple d'opérateur de Rota-Baxter est donné par l'intégration des applications continues.
Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'algèbre associative des applications continues de $\mathbb{R}$. On définit l'opérateur d'intégration suivant :

$$\begin{array}{cccc} I : & \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & I(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt \end{array} .$$

La formule d'intégration par parties implique que I est un opérateur de Rota-Baxter de poids 0.

Dans [Agu04], Aguiar a établi un lien entre les opérateurs de Rota-Baxter et le scindage des opérations.

Proposition 0.6.7 ([Agu04])**.** *Soit $(A, \circ)$ une algèbre associative et $P : A \to A$ un opérateur de Rota-Baxter de poids 0. Les opérations binaires $\prec$ et $\succ$ définies par*

$$x \prec y := x \circ P(y), \quad x \succ y := P(x) \circ y, \quad x, y \in A \ ,$$

munissent A d'une structure d'algèbre dendriforme.

Aguiar a également mis en relation les opérateurs de Rota-Baxter et le scinadage des opérations pour la structure d'algèbre de Poisson dans [Agu00], puis, des résultats similaires ont été démontrés pour diverses structures algébriques [AL04, EF02, Ler]. Nous résumons ces résultats dans le tableau 1.

Dans ce tableau, le symbole

* $S2$ ou $S3$ signifient respectivement que la structure algébrique "but" de la flèche est un scindage en deux ou en trois de la structure algébrique "source",
* et $+RB$ signifie que la structure "but" est induite par un opérateur de Rota-Baxter sur la structure "source" via des opérations définies de la même façon que dans la Proposition 0.6.7.

Notons que les algèbres de Jordan fournissent un exemple d'une structure d'algèbre non-quadratique.

0.6.2 Au niveau des opérades

Comme les résultats précédents sont des foncteurs entre catégories d'algèbres, ils proviennent peut-être de morphismes entre les opérades associées.

Concernant le scindage d'opérations, les premiers résultats d'ordre général apparaissent dans [Val08], où l'auteur fait le lien avec la notion de produit de Manin pour les opérades. En particulier,

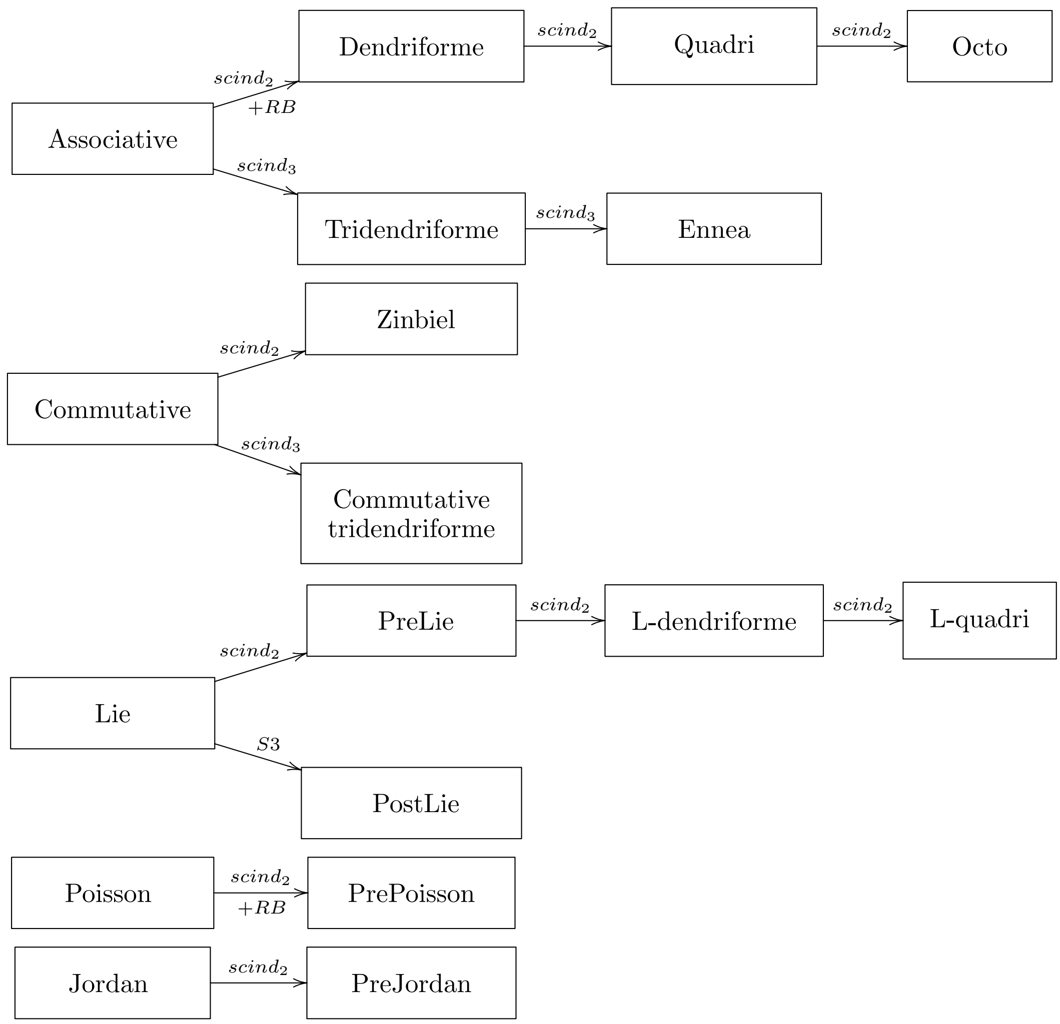


Tableau 1 – Au niveau des algèbres

on peut ainsi calculer le produit noir de Manin de différentes opérades pour obtenir, par exemple, les isomorphismes suivants :

$$\mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{A}ss \cong \mathcal{D}end \quad \text{et} \quad \mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{C}om \cong \mathcal{Z}inb \; .$$

En considérant les structures d'algèbre associées à ces opérades, le tableau 1 nous permet de conjecturer un lien entre le scindage des opérations au niveau opéradique et le produit noir de Manin avec l'opérade $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$.
Voici un autre résultat qui va dans ce sens.

Proposition 0.6.8 ([Val08])**.** *Soit $(A, \succ, \prec)$ une $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{P}erm$-algèbre.*
Alors $(A, \succ + \prec)$ a une structure de $\mathcal{P}erm$-algèbre.

Pour ce qui est du lien entre le scindage d'opérations et les opérateurs de Rota-Baxter au niveau des opérades, commençons par définir le foncteur RB_λ qui, à une opérade binaire $\mathcal{P} = \mathcal{T}(E(2))/(R)$ définie par générateurs et relations, associe l'opérade suivante :

$$RB_\lambda(\mathcal{P}) := \mathcal{T}(E_P)/(R, R_\lambda) \; ,$$

où E_P est le $\mathbb{S}$-module défini par $E_P(1) = \mathbb{K}.P$ et $E_P(2) = E(2)$ et où R_λ est l'ensemble

$$R_\lambda(\mathcal{P}) := \{ \omega \circ (P \otimes P) - P \circ \omega \circ (P \otimes \mathrm{id}) - P \circ \omega \circ (\mathrm{id} \otimes P) - \lambda P \circ \omega \;\; , \omega \in E(2) \}.$$

Ainsi, la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres munies d'un opérateur de Rota-Baxter de poids λ est isomorphe à la catégorie des $RB_\lambda(\mathcal{P})$-algèbres.

Théorème 0.6.9 ([Uch09])**.** *Soit $\mathcal{P}$ une opérade binaire quadratique. Il existe deux foncteurs définis par :*

$$\begin{array}{ccccc} RB_0(\mathcal{P})\text{-}\mathsf{Alg} & \to & (\mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{P})\text{-}\mathsf{Alg} & \to & \mathcal{P}\text{-}\mathsf{Alg} \\ (A, P, *_i) & \mapsto & (A, \succ_i := *_i \circ (P \otimes \mathrm{id}), \prec_i := *_i \circ (\mathrm{id} \otimes P)) & \mapsto & (A, \star_i := \succ_i + \prec_i) \end{array} \quad ,$$

où $\{*_i\}_i$ forme une base de $\mathcal{P}(2)$.

Ce théorème provient d'un morphisme au niveau des opérades :

$$\mathcal{P} \to \mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{P} \to RB_0(\mathcal{P}) \; ,$$

où le morphisme de gauche correspond précisément au scindage des opérations. Ainsi, ce résultat relie le produit noir de Manin avec $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$, les opérateurs de Rota-Baxter et le scindage d'opérations pour les structures algébriques codées par une opérade binaire quadratique.

Tous ces résultats sont récapitulés dans le tableau 2. Les quatres premières lignes sont une conséquence du Théorème 0.6.9. Le scindage des opérations d'une structure d'algèbre sur une opérade binaire quadratique, telle que $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ ou encore $\mathcal{P}oisson$, est donc assuré par le produit noir de Manin avec l'opérade $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$. Cependant, on peut définir un morphisme

$$\mathcal{J}ordan \to \mathcal{P}re\mathcal{J}ordan$$

qui code le scindage des opérations au niveau des algèbres associées alors que $\mathcal{J}ordan$ n'est pas quadratique, mais seulement binaire.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \xrightarrow{scind_2} & & \text{produit noir de Manin} & & \xrightarrow{RB_0} & \\
\mathcal{A}ss & \longrightarrow & \mathcal{D}end & \cong & \mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{A}ss & \longrightarrow & RB_0(\mathcal{A}ss) \\
\mathcal{C}om & \longrightarrow & \mathcal{Z}inb & \cong & \mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{C}om & \longrightarrow & RB_0(\mathcal{C}om) \\
\mathcal{L}ie & \longrightarrow & \mathcal{P}re\mathcal{L}ie & \cong & \mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{L}ie & \longrightarrow & RB_0(\mathcal{L}ie) \\
\mathcal{P}oisson & \longrightarrow & \mathcal{P}re\mathcal{P}oisson & \cong & \mathcal{P}re\mathcal{L}ie \bullet \mathcal{P}oisson & \longrightarrow & RB_0(\mathcal{P}oisson) \\
\mathcal{J}ordan & \longrightarrow & \mathcal{P}re\mathcal{J}ordan & \cong & \text{pas encore défini} & &
\end{array}
$$

Tableau 2 – Au niveau des opérades

Questions.

– *Existe-t-il un foncteur de la catégorie des opérades binaires qui code le scindage en deux des opérations au niveau des algèbres ?*
– *Si oui, comment est-il relié au produit noir de Manin avec $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ sur la catégorie des opérades binaires quadratique et aux opérateurs de Rota-Baxter ?*
– *Est-il plus simple à calculer que le produit noir de Manin avec $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$?*
– *De la même façon que pour le scindage en deux, existe-t-il un foncteur qui code le scindage des opérations en trois ?*
– *Si oui, est-il relié au produit noir de Manin ou aux opérateurs de Rota-Baxter et comment ?*

Chapitre 1

Splitting of operations, Manin products and Rota-Baxter operators

To Jean-Louis

This chapter is made up of the article [BBGN12], published in *International Mathematics Research Notices* (IMRN), which is a result of a joint work with Chengming Bai, Li Guo and Xiang Ni. We met at the conference “Operads and Universal algebra”, which took place at Nankai University in Tianjin, China, and we started to work together there.

International Mathematics Research Notices Advance Access published January 22, 2012
C. Bai et al. (2012) "Splitting of Operations, Manin Products, and Rota–Baxter Operators,"
International Mathematics Research Notices, rnr266, 40 pages.
doi:10.1093/imrn/rnr266

Splitting of Operations, Manin Products, and Rota–Baxter Operators

Chengming Bai[1], Olivia Bellier[2], Li Guo[3], and Xiang Ni[4]

[1]Chern Institute of Mathematics & LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R. China, [2]Laboratoire J. A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France, [3]Department of Mathematics and Computer Science, Rutgers University, Newark, NJ 07102, USA, and [4]Department of Mathematics, Caltech, Pasadena, CA 91125, USA

Correspondence to be sent to: e-mail: liguo@rutgers.edu

This paper provides a general operadic definition for the notion of splitting the operations of algebraic structures. This construction is proved to be equivalent to some Manin products of operads in the case of quadratic operads and it is shown to be closely related to Rota–Baxter operators. Hence, it gives a new effective way to compute Manin black products. Finally, this allows us to describe the algebraic structure of square matrices with coefficients in algebras of certain types. Many examples illustrate this text, including an example of nonquadratic algebras with Jordan algebras.

1 Introduction

Since the late 1990s, several algebraic structures with multiple binary operations have emerged: first the dendriform algebra of Loday [27] and then the tridendriform algebra of Loday and Ronco [30], discovered in the study of algebraic K-theory, operads and algebraic topology. These were followed by quite a few other related structures, such as the quadri-algebra [3], the ennea-algebra, the NS-algebra, the dendriform-Nijenhuis

Received December 6, 2011; Accepted December 12, 2011
Communicated by Prof. Andrei Zelevinsky

algebra, and the octo-algebra [23–25]. All these algebraic structures have a common property of "splitting the associativity", that is, expressing the product of an associative algebra as the sum of a string of binary operations. For example, a dendriform algebra has a string of two binary operations satisfying three relations, and it can be seen as an associative algebra whose product can be decomposed into two operations "in a coherent way". The constructions found later have an increasing number of generating operations. For example, the quadri-algebra [3] has a string of four binary operations satisfying nine relations. As shown in [13], these constructions can be put into the framework of (black square) products of nonsymmetric operads [13, 28, 39]. By doing so, it was proved that these newer algebraic structures can be obtained from the known ones by the black square product.

It has been observed that a crucial role in the splitting of associativity is also played by the Rota–Baxter operator. The operator was introduced in the probability study of Baxter [7], promoted by the combinatorial study of Rota [34] and, then, found many applications during the last decade in mathematics and physics [2, 4, 5, 14, 17, 18, 36], especially in the Connes–Kreimer approach of renormalization in quantum field theory [9, 15, 19, 32]. The first instance of such a role is that a Rota–Baxter operator of weight zero on an associative algebra gives rise to a dendriform algebra structure [1, 2]. Further instances were discovered later [3, 12, 23–25]. It was then shown that a Rota–Baxter operator on an algebra over an operad of a certain type induces a structure of an algebra over the black square product of the dendriform operad with this operad [13].

More recently, analogues of the dendriform algebra, quadri-algebra and octo-algebra for the Lie algebra, Jordan algebra, alternative algebra, and Poisson algebra have been obtained [1, 6, 21, 26, 33]. They can be regarded as "splitting" of the operations in these latter algebras. On the level of operads, the author defined in [39] two products, which are the analogues of the Manin products for algebras, and he gave an explicit way to compute them. Some computations he did illustrate that taking the Manin black product with the operad *PreLie* of preLie algebras also plays a role in splitting the operations of an operad. For example, the Manin black product of *PreLie* with the operad *Ass* of associative algebras (resp. *Com* of commutative algebras) gives the operad *Dend* of dendriform algebras (resp. *Zinb* of Zinbiel algebras), that is,

$$\mathit{PreLie} \bullet \mathit{Ass} \cong \mathit{Dend} \quad \text{and} \quad \mathit{PreLie} \bullet \mathit{Com} \cong \mathit{Zinb}.$$

But the Manin black product is defined for binary quadratic operads only. In particular, the "splitting" of the operations of the nonquadratic operad of Jordan algebras cannot be related to the Manin black product of operads.

Our goal in this paper is to set up a general framework to make precise the notion of "splitting" of any binary operad, and to generalize the aforementioned relationship of "splitting" of an operad with the Manin black product and the Rota–Baxter operator. We achieve this through defining and studying the **successors**, namely the **disuccessor** and **trisuccessor**, of a binary algebraic operad defined by generating operations and relations. Thus we can go far beyond the scope of binary quadratic (nonsymmetric) operads and can apply the construction to the operads of Lie algebras, Poisson algebras, and Jordan (nonquadratic) algebras. This gives a quite general way to relate known operads and to produce new operads from the known ones.

We then explain the relationship between the three constructions applied to a binary quadratic operad: take its disuccessor (resp. trisuccessor) is equivalent to take its Manin black product with the operad *PreLie* (resp. *PostLie*). Both constructions can be obtained from a Rota–Baxter operator of weight zero (resp. nonzero). This is summed up in the following morphisms of operads:

$$\mathit{PreLie} \bullet \mathcal{P} \cong \mathrm{DSu}(\mathcal{P}) \to \mathrm{RB}_0(\mathcal{P}) \quad \text{and} \quad \mathit{PostLie} \bullet \mathcal{P} \cong \mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \to \mathrm{RB}_1(\mathcal{P}).$$

Notice that the left-hand side isomorphisms provide an effective way of computing the Manin products using the successors.

The space of square matrices with coefficients in a commutative algebra carries a canonical associative algebra structure. We generalize such a result using the disuccessor: we describe a canonical algebraic structure carried by square matrices with coefficients in algebras over an operad of a given type.

The following is a layout of this paper. In Section 2, the concepts of *disuccessor* and *trisuccessor* are introduced, together with examples and basic properties. The relationship between the successors and the Manin black product is studied in Section 3, establishing the connection indicated by the left link in the above diagram. The relationship between the successors and the Rota–Baxter operator is studied in Section 4, establishing the connection indicated by the right link in the above diagram. We apply these results to the study of the algebraic structure on square matrices in Section 5.

2 The Successors of a Binary Operad

In this section, we first introduce the concepts of the successors, namely disuccessor and trisuccessor, of a labeled planar binary tree. These concepts are then applied to define similar ones for nonsymmetric binary operads first, and then, for (symmetric) binary operads. A list of examples are provided, followed by a study of the relationship among an operad, its disuccessor and its trisuccessor.

2.1 The successors of a tree

2.1.1 *Labeled trees*

Definition 2.1.

(a) Let $\mathfrak{T}$ denote the set of planar binary reduced rooted trees together with the trivial tree $|$. If $t \in \mathfrak{T}$ has n leaves, we call t an **n-tree**. For each vertex v of t, we let $\mathrm{In}(v)$ denote the set of inputs of v.

(b) Let $\mathcal{X}$ be a set and let t be an n-tree. By a **decorated tree** we mean a tree t together with a decoration on the vertices of t by elements of $\mathcal{X}$ *and* a decoration on the leaves of t by distinct positive integers. Let $t(\mathcal{X})$ denote the set of decorated trees for t and let

$$\mathfrak{T}(\mathcal{X}) = \coprod_{t \in \mathfrak{T}} t(\mathcal{X}).$$

If $\tau \in t(\mathcal{X})$ for a n-tree t, we call τ a **labeled n-tree**.

(c) For $\tau \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$, we let $\mathrm{Vin}(\tau)$ (resp. $\mathrm{Lin}(\tau)$) denote the set of labels of the vertices (resp. leaves) of τ.

(d) Let $\tau_\ell, \tau_r \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$ with disjoint sets of leaf labels. Let $\omega \in \mathcal{X}$. The **grafting of τ_ℓ and τ_r along** ω is denoted by $\tau_\ell \vee_\omega \tau_r$. It gives rise to an element in $\mathfrak{T}(\mathcal{X})$.

(e) For $\tau \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$ with $|\mathrm{Lin}(\tau)| > 1$, we let $\tau = \tau_\ell \vee_\omega \tau_r$ denote the unique decomposition of τ as a grafting of τ_ℓ and τ_r in $\mathfrak{T}(\mathcal{X})$ along $\omega \in \mathcal{X}$. Graphically, it is represented by

$$\tau_\ell \vee_\omega \tau_r = \begin{array}{ccc} \tau_\ell & & \tau_r \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & \omega & \\ & | & \end{array} .$$

□

Let V be a vector space, regarded as an arity-graded vector space concentrated in arity 2: $V = V_2$. Recall that the free nonsymmetric operad $\mathcal{T}_{ns}(V)$ on V is given by the vector space

$$\mathcal{T}_{ns}(V) := \bigoplus_{t \in \mathfrak{T}} t[V],$$

where $t[V]$ is the treewise tensor module associated to t. This module structure is explicitly given by

$$t[V] := \bigotimes_{v \in \mathrm{Vin}(t)} V_{|\mathrm{In}(v)|}.$$

See [31, Section 5.8.5] for more details. A basis $\mathcal{V}$ of V induces a basis $t(\mathcal{V})$ of $t[V]$ and a basis $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$ of $\mathcal{T}_{ns}(V)$. In particular, any element of $t[V]$ can be represented as a sum of elements in $t(\mathcal{V})$.

2.1.2 *Disuccessors*

Definition 2.2. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$.

(a) Define a vector space

$$\tilde{V} = V \otimes (\mathbf{k} \prec \oplus \mathbf{k} \succ), \tag{1}$$

where we denote $(\omega \otimes \prec)$ (resp. $(\omega \otimes \succ)$) by $\left(\begin{smallmatrix}\omega \\ \prec\end{smallmatrix}\right)$ (resp. $\left(\begin{smallmatrix}\omega \\ \succ\end{smallmatrix}\right)$), for $\omega \in V$. Then $\mathcal{V} \times \{\prec, \succ\}$ is a basis of $\tilde{V}$.

(b) For a labeled n-tree τ in $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$, define $\tilde{\tau}$ in $\mathcal{T}_{ns}(\tilde{V})$, where $\tilde{V}$ is seen as an arity-graded module concentrated in arity 2, as follows:

- $\tilde{|} = |$
- when $n \geq 2$, $\tilde{\tau}$ is obtained by replacing each decoration $\omega \in \mathrm{Vin}(\tau)$ by

$$\begin{pmatrix}\omega \\ *\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\omega \\ \prec\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\omega \\ \succ\end{pmatrix}.$$

We extend this definition to $\mathcal{T}_{ns}(V)$ by linearity. □

Definition 2.3. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$. Let τ be a labeled n-tree in $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$. The **disuccessor** $\mathrm{DSu}_x(\tau)$ of τ with respect to a leaf $x \in \mathrm{Lin}(\tau)$ is an element of $\mathcal{T}_{ns}(\tilde{V})$ defined by induction on $n := |\mathrm{Lin}(\tau)|$ as follows:

- $\mathrm{DSu}_x(\,|\,) = |$;
- assume that $\mathrm{DSu}_x(\tau)$ have been defined for τ with $|\mathrm{Lin}(\tau)| \leq k$ for a $k \geq 1$. Then, for a labeled $(k+1)$-tree $\tau \in \mathfrak{T}(\mathcal{V})$ with its decomposition $\tau_\ell \vee_\omega \tau_r$, we define

$$\mathrm{DSu}_x(\tau) = \mathrm{DSu}_x(\tau_\ell \vee_\omega \tau_r) = \begin{cases} \mathrm{DSu}_x(\tau_\ell) \vee_{\left(\begin{smallmatrix}\omega \\ \prec\end{smallmatrix}\right)} \tilde{\tau}_r, & x \in \mathrm{Lin}(\tau_\ell), \\ \tilde{\tau}_\ell \vee_{\left(\begin{smallmatrix}\omega \\ \succ\end{smallmatrix}\right)} \mathrm{DSu}_x(\tau_r), & x \in \mathrm{Lin}(\tau_r). \end{cases}$$

For $m \geq 1$, the mth iteration of DSu is denoted by DSu^m. □

We have the following description of the disuccessor.

Proposition 2.4. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$, τ be in $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ and x be in $\mathrm{Lin}(\tau)$. The disuccessor $\mathrm{DSu}_x(\tau)$ of τ is obtained by relabeling each vertex of τ according to the following rules:

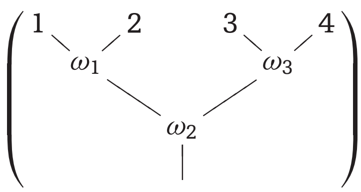
(a) we replace the label ω of each vertex on the path from the root to the leave x of τ by

(i) $\binom{\omega}{\prec}$ if the path turns left at this vertex,

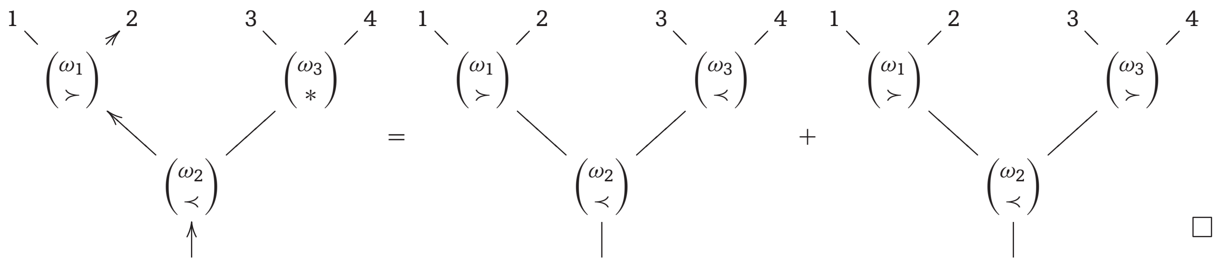
(ii) $\binom{\omega}{\succ}$ if the path turns right at this vertex,

(b) we replace the label ω of each vertex not on the path from the root to the leave x of τ by $\binom{\omega}{\star} := \binom{\omega}{\prec} + \binom{\omega}{\succ}$. □

Proof. By induction on $|\mathrm{Lin}(\tau)| \geq 1$. ■

Example 2.5. Su_2 

=



□

Lemma 2.6. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$, τ be a labeled n-tree in $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ and x be in $\mathrm{Lin}(\tau)$. Then the following relation holds:

$$\mathrm{DSu}_{\sigma^{-1}(x)}(\tau^\sigma) = \mathrm{DSu}_x(\tau)^\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n.$$ □

Proof. By inspection of the action of the symmetric group on a tree. ■

2.1.3 *Trisuccessors*

Definition 2.7. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$.

(a) Define a vector space

$$\hat{V} = V \otimes (\mathbf{k}\prec \oplus \mathbf{k}\succ \oplus \mathbf{k}\cdot), \tag{2}$$

where we denote $(\omega\otimes\prec)$ (resp. $(\omega\otimes\succ)$, resp. $(\omega\otimes\cdot)$) by $\binom{\omega}{\prec}$ (resp. $\binom{\omega}{\succ}$, resp. $\binom{\omega}{\cdot}$), for $\omega\in V$. Then $\mathcal{V}\times\{\prec,\succ,\cdot\}$ is a basis of $\hat{V}$.

(b) For a labeled n-tree τ in $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$, define $\hat{\tau}$ in $\mathcal{T}_{ns}(\hat{V})$, where $\hat{V}$ is regarded as an arity-graded module concentrated in arity 2, as follows:

- $\hat{|} = |$
- when $n\geq 2$, $\hat{\tau}$ is obtained by replacing the label $\omega\in \mathrm{Vin}(\tau)$ of each vertex of τ by

$$\binom{\omega}{\star} := \binom{\omega}{\prec} + \binom{\omega}{\succ} + \binom{\omega}{\cdot}.$$

We extend this definition to $\mathcal{T}_{ns}(\hat{V})$ by linearity. □

Definition 2.8. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$. Let τ be a labeled n-tree in $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$ and let J be a nonempty subset of $\mathrm{Lin}(\tau)$. The **trisuccessor** $\mathrm{TSu}_J(\tau)$ of τ with respect to J is an element of $\mathcal{T}_{ns}(\hat{V})$ defined by induction on $n := |\mathrm{Lin}(\tau)|$ as follows:

- $\mathrm{TSu}_J(\,|\,) = |$;
- assume that $\mathrm{TSu}_J(\tau)$ have been defined for τ with $|\mathrm{Lin}(\tau)|\leq k$ for a $k\geq 1$. Then, for a labeled $(k+1)$-tree $\tau\in\mathfrak{T}(\mathcal{V})$ with its decomposition $\tau_\ell\vee_\omega\tau_r$, we define

$$\mathrm{TSu}_J(\tau) = \mathrm{TSu}_J(\tau_\ell\vee_\omega\tau_r) = \begin{cases} \mathrm{TSu}_J(\tau_\ell)\vee_{\binom{\omega}{\prec}}\hat{\tau}_r, & J\subseteq \mathrm{Lin}(\tau_\ell),\\ \hat{\tau}_\ell\vee_{\binom{\omega}{\succ}}\mathrm{TSu}_J(\tau_r), & J\subseteq\mathrm{Lin}(\tau_r),\\ \mathrm{TSu}_{J\cap\mathrm{Lin}(\tau_\ell)}(\tau_\ell)\vee_{\binom{\omega}{\cdot}}\mathrm{TSu}_{J\cap\mathrm{Lin}(\tau_r)}(\tau_r), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

For $m\geq 1$, the mth iteration of TSu is denoted by TSu^m. □

We have the following description of the trisuccessor.

Proposition 2.9. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$, τ be in $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ and J be a nonempty subset of $\mathrm{Lin}(\tau)$. The trisuccessor $\mathrm{TSu}_J(\tau)$ is obtained by relabeling each vertex of τ according to the following rules:

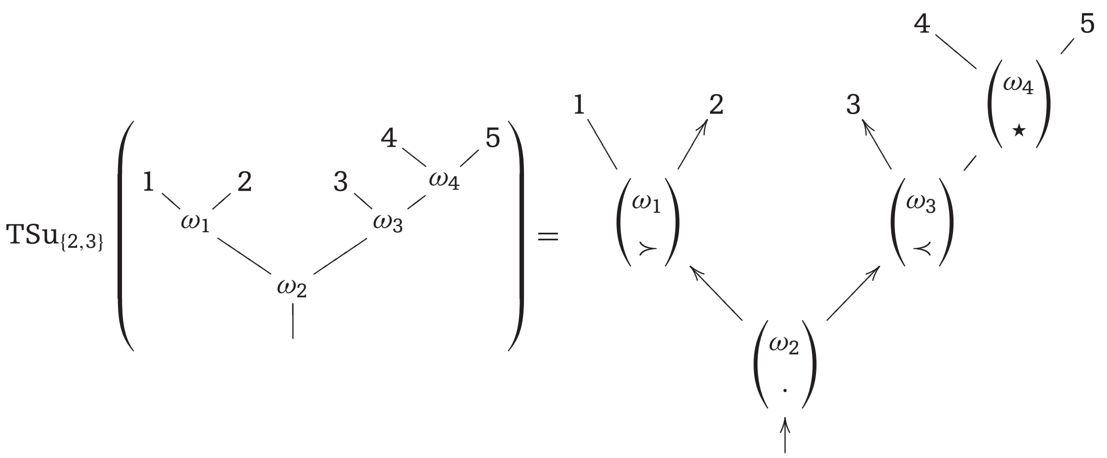
(a) we replace the label ω of each vertex on at least one of the paths from the root to the leaves x in J by

  (i) $\binom{\omega}{\prec}$ if all such paths turn left at this vertex;
  (ii) $\binom{\omega}{\succ}$ if all such paths turn right at this vertex;
  (iii) $\binom{\omega}{\cdot}$ if some of such paths turn left and some of such paths turn right at this vertex;

(b) we replace the label ω of each other vertex by $\binom{\omega}{\star} := \binom{\omega}{\prec} + \binom{\omega}{\succ} + \binom{\omega}{\cdot}$. □

Proof. The proof follows from the same argument as the proof of Proposition 2.4. ■

Example 2.10.



□

Similar to Lemma 2.6, we have the following compatibility of the trisuccessor with permutations.

Lemma 2.11. Let V be a vector space with a basis $\mathcal{V}$, τ be a labeled n-tree in $\mathcal{T}(\mathcal{V})$, and J be a nonempty subset of $\mathrm{Lin}(\tau)$. Then the following relation holds:

$$\mathrm{TSu}_{\sigma^{-1}(J)}(\tau^{\sigma}) = \mathrm{TSu}_J(\tau)^{\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n. \qquad \square$$

2.2 The successors of a binary nonsymmetric operad

Note that the definitions of both the disuccessor and the trisuccessor extend linearly from $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$ to $\mathcal{T}_{ns}(V)$ and to $\mathcal{T}_{ns}(\hat{V})$, respectively, where $\mathcal{V}$ is a linear basis of V.

Definition 2.12. Let V be a vector space and $\mathcal{V}$ be a basis of V.

(a) An element

$$r := \sum_{i=1}^{r} c_i \tau_i, \quad c_i \in \mathbf{k}, \tau_i \in \mathfrak{T}(\mathcal{V}),$$

in $\mathcal{T}_{ns}(V)$ is called **homogeneous** of arity n if $|\mathrm{Lin}(\tau_i)| = n$ for $1 \leq i \leq r$.

(b) A collection of elements

$$r_s := \sum_i c_{s,i} \tau_{s,i}, \quad c_{s,i} \in \mathbf{k}, \tau_{s,i} \in \mathfrak{T}(\mathcal{V}), 1 \leq s \leq k, k \geq 1,$$

in $\mathcal{T}_{ns}(V)$ is called **locally homogenous** if each element r_s, $1 \leq s \leq k$, in the system is homogeneous of a certain arity n_s. □

Definition 2.13. Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}_{ns}(V)/(R)$ be a binary nonsymmetric operad with a basis $\mathcal{V}$ of $V = V_2$. In this case, the space of relations R is the vector space spanned by locally homogeneous elements of the form

$$r_s = \sum_i c_{s,i} \tau_{s,i} \in \mathcal{T}_{ns}(V), \quad c_{s,i} \in \mathbf{k}, \ \tau_{s,i} \in \mathfrak{T}(\mathcal{V}), \ 1 \leq s \leq k, k \geq 1.$$

(a) The **disuccessor** of $\mathcal{P}$ is defined to be the binary nonsymmetric operad

$$\mathrm{DSu}(\mathcal{P}) := \mathcal{T}_{ns}(\tilde{V})/(\mathrm{DSu}(R)),$$

where the space of relations is the vector space spanned by

$$\mathrm{DSu}(R) := \left\{ \mathrm{DSu}_x(r_s) = \sum_i c_{s,i} \mathrm{DSu}_x(\tau_{s,i}) | x \in \mathrm{Lin}(\tau_{s,i}), 1 \leq s \leq k \right\}.$$

Note that, by our assumption, for a fixed s, $\mathrm{Lin}(\tau_{s,i})$ are the same for all i. The Nth **disuccessor** $(N \geq 2)$ of $\mathcal{P}$, which is denoted by $\mathrm{DSu}^N(\mathcal{P})$, is defined as the disuccessor of the $(N-1)$th **disuccessor** of the operad, where the **first disuccessor** of the operad is just the disuccessor of the operad.

(b) The **trisuccessor** of $\mathcal{P}$ is defined to be the binary nonsymmetric operad

$$\mathrm{TSu}(\mathcal{P}) := \mathcal{T}_{ns}(\hat{V})/(\mathrm{TSu}(R)),$$

where the space of relations is the vector space spanned by

$$\mathrm{TSu}(R) := \left\{ \mathrm{TSu}_J(r_s) = \sum_i c_{s,i} \mathrm{TSu}_J(\tau_{s,i}) | \emptyset \neq J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau_{s,i}),\ 1 \leq s \leq k \right\}.$$

The Nth **trisuccessor** $(N \geq 2)$ of $\mathcal{P}$, which is denoted by $\mathrm{TSu}^N(\mathcal{P})$, is defined as the trisuccessor of the $(N-1)$th **trisuccessor** of the operad, where the **first trisuccessor** of the operad is just the trisuccessor of the operad. □

Proposition 2.14. The definition of the disuccessor (resp. the trisuccessor) of a binary nonsymmetric operad does not depend on the choice of a basis of the vector space of generating operations. □

Proof. Let $\mathcal{P} := \mathcal{T}_{ns}(\hat{V})/(R)$ be a binary nonsymmetric operad. This proposition is straightforward from the linearity of the successors and from the treewise tensor module structure on $\mathcal{T}_{ns}(V)$ and on $\mathcal{T}_{ns}(\hat{V})$. ■

We give some examples of successors.

Example 2.15. The **dendriform algebra** of Loday [27] is defined by two bilinear operations $\{\prec, \succ\}$ satisfying the following relations:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \star z),\ (x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),\ (x \star y) \succ z = x \succ (y \succ z),$$

where $\star := \prec + \succ$. It is easy to check that the corresponding nonsymmetric operad *Dend* is the disuccessor of the nonsymmetric operad *As* of associative algebras. Similarly, the operad *Quad* of quadri-algebras of Aguiar and Loday [3] is the disuccessor of *Dend*. Furthermore, the operad *Octo* of octo-algebras of Leroux [25] is the disuccessor of *Quad*. For $N \geq 2$, the Nth power of *Dend* defined in [13] is the Nth disuccessor of *Dend*. □

Example 2.16. Similarly, the trisuccessor of *As* is the nonsymmetric operad *TriDend* of tridendriform algebras defined by Loday and Ronco [30]. The operad *Ennea* of ennea-algebras of Leroux [24] is the trisuccessor of *TriDend*. For $N \geq 2$, the Nth power of *TriDend* defined in [13] is the Nth trisuccessor of *TriDend*. □

2.3 The successors of a binary operad

When $V = V(2)$ is an $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 2, the free operad $\mathcal{T}(V)$ is generated by the binary trees "in space" with vertices labeled by elements in V. So we have to refine our arguments.

More precisely, the free operad $\mathcal{T}(V)$ on an $\mathbb{S}$-module $V = V(2)$ is given by the $\mathbb{S}$-module

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{\mathsf{t}\in\mathbb{T}} \mathsf{t}[V],$$

where $\mathbb{T}$ denotes the set of isomorphism classes of reduced binary trees, see [31, Appendix C], and where $\mathsf{t}[V]$ is the treewise tensor $\mathbb{S}$-module associated to t. This $\mathbb{S}$-module is explicitly given by

$$\mathsf{t}[V] := \bigotimes_{v\in \mathrm{Vin}(\mathsf{t})} V(\mathrm{In}(v)),$$

see [31, Section 5.5.1]. Notice that $\mathrm{In}(v)$ is a set. For any finite set $\mathcal{X}$ of cardinal n, the definition of $V(\mathcal{X})$ is given by the following coinvariant space:

$$V(\mathcal{X}) := \left(\bigoplus_{f:\underline{n}\to\mathcal{X}} V(n)\right)_{\mathbb{S}_n},$$

where the sum is over all the bijections from $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$ to $\mathcal{X}$ and where the symmetric group acts diagonally.

Representing a tree t in $\mathbb{T}$ by a planar tree in $\mathfrak{T}$ consists of choosing a total order on the set of inputs of each vertex of t. We define an equivalence relation $\sim$ on $\mathfrak{T}$ as follows: two planar binary trees in $\mathfrak{T}$ are equivalent if they represent the same tree in $\mathbb{T}$. It induces a bijection $\mathbb{T} \cong \mathfrak{T}/\sim$. Moreover, by Section 2.8 of [20], we have $t[V] \cong \mathsf{t}[V]$, for any planar binary tree t in $\mathfrak{T}$ which represents the binary tree t in $\mathbb{T}$. Therefore, we have

$$\mathcal{T}(V) \cong \bigoplus_{t\in\mathfrak{R}} t[V],$$

where $\mathfrak{R}$ is a set of representatives of $\mathfrak{T}/\sim$.

Example 2.17. For instance, one set of representatives of $\mathfrak{T}/\sim$ is the set of tree monomials defined in [20, Section 2.8]. See also Section 3.1 of [11]. Another example is a generalization of the trees I, II, and III given in [31, Section 7.6.3]. □

Lemma 2.18. Let $\mathfrak{R}$ be a set of representatives of $\mathfrak{T}/\sim$ and $V=V(2)$ be an $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 2, with a linear basis $\mathcal{V}$. Then $\mathfrak{R}(\mathcal{V}):=\{\tau\in t(\mathcal{V})|t\in\mathfrak{R}\}$ is a linear basis of the free operad $\mathcal{T}(V)$. □

Proof. According to Section 2.1, when t is a planar binary tree, $t(\mathcal{V})$ is a basis of $t[V]$. ■

Definition 2.19. Let $\mathcal{P}=\mathcal{T}(V)/(R)$ be a binary operad on the $\mathbb{S}$-module $V=V(2)$, concentrated in arity 2 with a $\mathbf{k}[\mathbb{S}_2]$-basis $\mathcal{V}$, such that R is spanned, as an $\mathbb{S}$-module, by locally homogeneous elements of the form

$$R:=\left\{r_s:=\sum_i c_{s,i}\tau_{s,i}\;\middle|\; c_{s,i}\in\mathbf{k},\ \tau_{s,i}\in\{t(\mathcal{V}),\,t\in\mathfrak{R}\},\ 1\le s\le k,\ k\ge 1\right\}, \tag{3}$$

where $\mathfrak{R}$ is a set of representatives of $\mathfrak{T}/\sim$.

(a) The **disuccessor** of $\mathcal{P}$ is defined to be the binary operad $\mathrm{DSu}(\mathcal{P})=\mathcal{T}(\tilde{V})/(\mathrm{DSu}(R))$, where the $\mathbb{S}_2$-action on $\tilde{V}$ is given by

$$\begin{pmatrix}\omega\\ \prec\end{pmatrix}^{(12)}:=\begin{pmatrix}\omega^{(12)}\\ \succ\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\omega\\ \succ\end{pmatrix}^{(12)}:=\begin{pmatrix}\omega^{(12)}\\ \prec\end{pmatrix},\quad \omega\in V,$$

and the space of relations is generated, as an $\mathbb{S}$-module, by

$$\mathrm{DSu}(R):=\left\{\mathrm{DSu}_x(r_s):=\sum_i c_{s,i}\mathrm{DSu}_x(t_{s,i})\;\middle|\; x\in\mathrm{Lin}(t_{s,i}),\ 1\le s\le k\right\}. \tag{4}$$

Note that, by our assumption, for a fixed s, $\mathrm{Lin}(t_{s,i})$ are the same for all i. The Nth **disuccessor** $(N\ge 2)$ of $\mathcal{P}$, which is denoted by $\mathrm{DSu}^N(\mathcal{P})$, is defined as the disuccessor of the $(N-1)$th **disuccessor** of the operad, where the **first disuccessor** of the operad is just the disuccessor of the operad.

(b) The **trisuccessor** of $\mathcal{P}$ is defined to be the binary operad $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})=\mathcal{T}(\hat{V})/(\mathrm{TSu}(R))$, where the $\mathbb{S}_2$-action on $\hat{V}$ is given by

$$\begin{pmatrix}\omega\\ \prec\end{pmatrix}^{(12)}:=\begin{pmatrix}\omega^{(12)}\\ \succ\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\omega\\ \succ\end{pmatrix}^{(12)}:=\begin{pmatrix}\omega^{(12)}\\ \prec\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\omega\\ \cdot\end{pmatrix}^{(12)}:=\begin{pmatrix}\omega^{(12)}\\ \cdot\end{pmatrix},\quad \omega\in V,$$

and the space of relations is generated, as an $\mathbb{S}$-module, by

$$\mathrm{TSu}(R) := \left\{ \mathrm{TSu}_J(r_s) := \sum_i c_{s,i} \mathrm{TSu}_J(t_{s,i}) \;\middle|\; \emptyset \neq J \subseteq \mathrm{Lin}(t_{s,i}),\, 1 \leq s \leq k \right\}.$$

The Nth **trisuccessor** ($N \geq 2$) of $\mathcal{P}$ is defined similarly to the Nth disuccessor of $\mathcal{P}$. $\square$

Proposition 2.20. The disuccessor (resp. trisuccessor) of a binary operad $\mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R)$ depends neither on the choice of the $\mathbf{k}[\mathbb{S}_2]$-basis $\mathcal{V}$ of V nor on the choice of the set of representatives $\mathfrak{R}$ of $\mathfrak{T}/\sim$. $\square$

Proof. By $\mathbf{k}[\mathbb{S}_2]$-basis, we mean a linear basis stable under the $\mathbb{S}_2$-action.

The independence with respect to the choice of a $\mathbf{k}[\mathbb{S}_2]$-basis of V is a consequence of the linearity of the disuccessor (resp. trisuccessor) and of the treewise tensor module structure.

Next let $\mathcal{V}$ be a $\mathbf{k}[\mathbb{S}_2]$-basis of V. Let $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{R}'$ be two sets of representatives of $\mathfrak{T}/\sim$. Let τ in $t(\mathcal{V})$ and τ' in $t'(\mathcal{V})$, where $t \in \mathfrak{R}$ and $t' \in \mathfrak{R}'$, be two labeled planar binary trees that arise from the same element in $\mathcal{T}(V)$, through the bijections given previously in this section. Then, for any $i \in \mathrm{Lin}(\tau) = \mathrm{Lin}(\tau')$ (resp. for any nonempty subset $J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau) = \mathrm{Lin}(\tau')$), we have $\mathrm{DSu}_i(\tau) = \mathrm{DSu}_i(\tau')$ (resp. $\mathrm{TSu}_J(\tau) = \mathrm{TSu}_J(\tau')$). Finally, we conclude the proof using Lemma 2.18 and the linearity of the disuccessor (resp. trisuccessor). ■

2.4 Relations with the nonsymmetric framework

We denote by Op (resp. by $\mathsf{Ns\ Op}$) the category of operads (resp. of nonsymmetric operads). There is a forgetful functor

$$\mathsf{Op} \to \mathsf{Ns\ Op},$$
$$\mathcal{P} \mapsto \bar{\mathcal{P}},$$

where $\bar{\mathcal{P}}_n := \mathcal{P}(n)$. In other words, we forget the $\mathbb{S}$-module structure.

This functor admits a left adjoint

$$\mathsf{Ns\ Op} \to \mathsf{Op},$$
$$\mathcal{P} \mapsto \mathrm{Reg}(\mathcal{P}),$$

where $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})(n) := \mathcal{P}_n \otimes \mathbf{k}[\mathbb{S}_n]$. Such operads are called *regular operads*, see [31, Section 5.8.12] for more details. Notice that a presentation of the regular operad associated to a binary nonsymmetric operad $\mathcal{P} = \mathcal{T}_{ns}(V)/(R)$, where $\mathcal{T}_{ns}(V)$ is the free nonsymmetric operad on $V = V(2)$ and $R = \{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, is given by

$$\mathrm{Reg}(\mathcal{P}) = \mathcal{T}(V \otimes \mathbf{k}[\mathbb{S}_2])/(R_n \otimes \mathbf{k}[\mathbb{S}_n],\ n \in \mathbb{N}).$$

Proposition 2.21. Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}_{ns}(V)/(R)$ be a binary nonsymmetric operad. We have

$$\mathrm{DSu}(\mathrm{Reg}(\mathcal{P})) \cong \mathrm{Reg}(\mathrm{DSu}(\mathcal{P})).$$ □

Proof. As $\mathbb{S}_2$-modules, the space of generating operations of $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})$ is spanned by V, so the space of generating operations of $\mathrm{DSu}(\mathrm{Reg}(\mathcal{P}))$ is spanned by $\tilde{V}$. As $\mathbb{S}$-modules, the space of relations of $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})$ is spanned by R, so the space of relations of $\mathrm{DSu}(\mathrm{Reg}(\mathcal{P}))$ is spanned by $\mathrm{DSu}(R)$. ■

Except for $\mathrm{Reg}(As)$ denoted by Ass, we still denote $\mathcal{P}$ the regular operad associated to a nonsymmetric operad $\mathcal{P}$.

Corollary 2.22. The successors of the operad Ass are given by

(1) $\mathrm{DSu}(Ass) = Dend$;
(2) $\mathrm{TSu}(Ass) = TriDend$. □

Proof. It is straightforward from Examples 2.15 and 2.16 together with Proposition 2.21. ■

2.5 Examples of successors

We give some examples of successors of binary operads.

Let $V = V(2)$ be an $\mathbb{S}_2$-module of generating operations. Then we have

$$\mathcal{T}(V)(3) = (V \otimes_{\mathbb{S}_2} (V \otimes \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \otimes V)) \otimes_{\mathbb{S}_2} \mathbf{k}[\mathbb{S}_3].$$

$\mathcal{T}(V)(3)$ can be identified with three copies of $V\otimes V$. We denote them by $V\circ_{\mathrm{I}} V$, $V\circ_{\mathrm{II}} V$ and $V\circ_{\mathrm{III}} V$, following the convention in [39]. Then, as a vector space, $\mathcal{T}(V)(3)$ is generated by elements of the form

$$\omega\circ_{\mathrm{I}}\nu(\leftrightarrow(x\omega y)\nu z),\quad \omega\circ_{\mathrm{II}}\nu(\leftrightarrow(y\nu z)\omega x),\quad \omega\circ_{\mathrm{III}}\nu(\leftrightarrow(z\nu x)\omega y),\quad \forall\omega,\nu\in\mathcal{V}. \tag{5}$$

For an operad where the space of generators V is equal to $\mathbf{k}[\mathbb{S}_2]=\mu.\mathbf{k}\oplus\mu'.\mathbf{k}$ with $\mu.(12)=\mu'$, we will adopt the convention in [39, p. 129] and denote the 12 elements of $\mathcal{T}(V)(3)$ by v_i, $1\le i\le 12$, in the following table.

v_1	$\mu\circ_{\mathrm{I}}\mu\leftrightarrow(xy)z$	v_5	$\mu\circ_{\mathrm{III}}\mu\leftrightarrow(zx)y$	v_9	$\mu\circ_{\mathrm{II}}\mu\leftrightarrow(yz)x$
v_2	$\mu'\circ_{\mathrm{II}}\mu\leftrightarrow x(yz)$	v_6	$\mu'\circ_{\mathrm{I}}\mu\leftrightarrow z(xy)$	v_{10}	$\mu'\circ_{\mathrm{III}}\mu\leftrightarrow y(zx)$
v_3	$\mu'\circ_{\mathrm{II}}\mu'\leftrightarrow x(zy)$	v_7	$\mu'\circ_{\mathrm{I}}\mu'\leftrightarrow z(yx)$	v_{11}	$\mu'\circ_{\mathrm{III}}\mu'\leftrightarrow y(xz)$
v_4	$\mu\circ_{\mathrm{III}}\mu'\leftrightarrow(xz)y$	v_8	$\mu\circ_{\mathrm{II}}\mu'\leftrightarrow(zy)x$	v_{12}	$\mu\circ_{\mathrm{I}}\mu'\leftrightarrow(yx)z$

2.5.1 *Examples of disuccessors*

Recall that a **(left) Zinbiel algebra** [27] is defined by a bilinear operation $\cdot$ satisfying the following relation:

$$(x\cdot y+y\cdot x)\cdot z=x\cdot(y\cdot z).$$

Proposition 2.23. The operad *Zinb* is the disuccessor of the operad *Com*, that is,

$$\mathrm{DSu}(\mathit{Com})=\mathit{Zinb}.\qquad\square$$

Proof. Let ω be the generating operation of the operad *Com*. Set $\prec:=\left(\begin{smallmatrix}\omega\\ \prec\end{smallmatrix}\right)$ and $\succ:=\left(\begin{smallmatrix}\omega\\ \succ\end{smallmatrix}\right)$. Since $\left(\begin{smallmatrix}\omega\\ \prec\end{smallmatrix}\right)^{(12)}=\left(\begin{smallmatrix}\omega^{(12)}\\ \succ\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\omega\\ \succ\end{smallmatrix}\right)$, we have $\prec^{(12)}=\succ$. The space of relations of *Com* is generated as an $\mathbb{S}_3$-module by

$$v_1-v_9=\omega\circ_{\mathrm{I}}\omega-\omega\circ_{\mathrm{II}}\omega.$$

Then we have

$$\mathrm{DSu}_x(v_1-v_9)=z\succ(y\succ x)-(y\succ z+z\succ y)\succ x;$$

$$\mathrm{DSu}_y(v_1-v_9)=z\succ(x\succ y)-x\succ(z\succ y);$$

$$\mathrm{DSu}_z(v_1-v_9)=(x\succ y+y\succ x)\succ z-x\succ(y\succ z).$$

Replacing the operation $\succ$ by $\cdot$, we get $\mathrm{DSu}(\mathit{Com}) = \mathit{Zinb}$. ∎

In the same way, we compute the following disuccessors of operads.

Proposition 2.24. We have:

(1) $\mathrm{DSu}(\mathit{Lie}) = \mathit{PreLie}$;
(2) $\mathrm{DSu}(\mathit{PreLie}) = \mathit{LDend}$;
(3) $\mathrm{DSu}(\mathit{LDend}) = \mathit{LQuad}$;
(4) $\mathrm{DSu}(\mathit{Poisson}) = \mathit{PrePoisson}$. □

For a presentation of the operads involved in the previous results, we refer to [40] except for the operad *PrePoisson* for which we refer to [1].

Now comes the computation of the disuccessor of the operad *Jordan*, which is different from the previous ones since this operad is not quadratic as we can see below.

Definition 2.25. Assume that the characteristic of $\mathbf{k}$ is neither two nor three.

(a) A **Jordan algebra** [22] is defined by one bilinear operation $\circ$ and one relation:

$$((x \circ y) \circ u) \circ z + ((y \circ z) \circ u) \circ x + ((z \circ x) \circ u) \circ y$$
$$= (x \circ y) \circ (u \circ z) + (y \circ z) \circ (u \circ x) + (z \circ x) \circ (u \circ y).$$

(b) A **pre-Jordan algebra** [21] is defined by one bilinear operation $\cdot$ and two relations

$$(x \odot y) \cdot (z \cdot u) + (y \odot z) \cdot (x \cdot u) + (z \odot x) \cdot (y \cdot u)$$
$$= z \cdot ((x \odot y) \cdot u) + x \cdot ((y \odot z) \cdot u) + y \cdot ((z \odot x) \cdot u),$$
$$x \cdot (y \cdot (z \cdot u)) + z \cdot (y \cdot (x \cdot u)) + ((x \odot z) \odot y) \cdot u$$
$$= z \cdot ((x \odot y) \cdot u) + x \cdot ((y \odot z) \cdot u) + y \cdot ((z \odot x) \cdot u),$$

where $x \odot y := x \cdot y + y \cdot x$. □

It is easy to obtain the following conclusion:

Proposition 2.26. The disuccessor of the operad *Jordan* is the operad *PreJordan*, that is,

$$\mathrm{DSu}(\mathit{Jordan}) = \mathit{PreJordan}. \qquad \square$$

2.5.2 *Examples of trisuccessors*

We similarly have the following examples of trisuccessors of operads.

Example 2.27. A **commutative tridendriform algebra** [29, 30] is a vector space A equipped with a product $\prec$ and a commutative associative product $\cdot$ satisfying the following relations:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z + z \prec y + y \cdot z),$$

$$(x \cdot y) \prec z = x \cdot (y \prec z). \qquad \square$$

Proposition 2.28. The operad *ComTriDend* is the trisuccessor of the operad *Com*, that is,

$$\mathrm{TSu}(\mathit{ComTriDend}) = \mathit{Com}. \qquad \square$$

A **PostLie algebra** [38] is a vector space A with a product $\circ$ and a skew-symmetric operation $[,]$ satisfying the relations:

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0,$$

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) - (x \circ z) \circ y + x \circ (z \circ y) - x \circ [y, z] = 0,$$

$$[x, y] \circ z - [x \circ z, y] - [x, y \circ z] = 0.$$

It is easy to see that if the operation $[,]$ happens to be trivial, then $(A, \circ)$ becomes a pre-Lie algebra.

Proposition 2.29. The operad *PostLie* is the trisuccessor of the operad *Lie*, that is,

$$\mathrm{TSu}(\mathit{Lie}) = \mathit{PostLie}. \qquad \square$$

Proof. Let μ be the generating operation of the operad *Lie*. Set $\prec := \binom{\mu}{\prec}$, $\succ := \binom{\mu}{\succ}$ and $\cdot := \binom{\mu}{\cdot}$. Since $\binom{\mu}{\prec}^{(12)} = \binom{\mu^{(12)}}{\succ} = -\binom{\mu}{\succ}$ and $\binom{\mu}{\cdot}^{(12)} = \binom{\mu^{(12)}}{\cdot} = -\binom{\mu}{\cdot}$, we have $\prec^{(12)} = -\succ$ and

$\cdot^{(12)} = -\cdot$. The space of relations of *Lie* is generated as an $\mathbb{S}_3$-module by

$$v_1 + v_5 + v_9 = \mu \circ_{\mathrm{I}} \mu + \mu \circ_{\mathrm{II}} \mu + \mu \circ_{\mathrm{III}} \mu.$$

Then we have

$$\mathrm{TSu}_{\{x\}}(v_1 + v_5 + v_9) = (x \prec y) \prec z - (x \prec z) \prec y - x \prec (y \prec z - z \prec y + y \cdot z);$$

$$\mathrm{TSu}_{\{y\}}(v_1 + v_5 + v_9) = -(y \prec x) \prec z - y \prec (-x \prec z + z \prec x + z \cdot x) + (y \prec z) \prec x;$$

$$\mathrm{TSu}_{\{z\}}(v_1 + v_5 + v_9) = -z \prec (-y \prec x + x \prec y + x \cdot y) + (z \prec x) \prec y - (z \prec y) \prec x;$$

$$\mathrm{TSu}_{\{x,y\}}(v_1 + v_5 + v_9) = (x \cdot y) \prec z - (x \prec z) \cdot y - x \cdot (y \prec z);$$

$$\mathrm{TSu}_{\{y,z\}}(v_1 + v_5 + v_9) = -(y \prec x) \cdot z - y \cdot (z \prec x) - (y \cdot z) \prec x;$$

$$\mathrm{TSu}_{\{x,z\}}(v_1 + v_5 + v_9) = -z \cdot (x \prec y) + (z \cdot x) \prec y - (z \prec y) \cdot x;$$

$$\mathrm{TSu}_{\{x,y,z\}}(v_1 + v_5 + v_9) = (x \cdot y) \cdot z + (z \cdot x) \cdot y + (y \cdot z) \cdot x.$$

Replacing the operations $\prec$ by $\circ$ and $\cdot$ by $[,]$, we get $\mathrm{TSu}(\mathit{Lie}) = \mathit{PostLie}$. ■

2.6 Properties

We study the relationship among a binary operad, its disuccessor and its trisuccessor.

2.6.1 *Operads and their successors*

Lemma 2.30. Let V be an $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 2 with a linear basis $\mathcal{V}$. For a labeled planar binary n-tree $\tau \in \mathfrak{T}(\mathcal{V})$, the following equations hold in $\mathcal{T}(\widetilde{V})$ and $\mathcal{T}(\widehat{V})$ respectively:

$$\sum_{x \in \mathrm{Lin}(\tau)} \mathrm{DSu}_x(\tau) = \tilde{\tau}, \tag{6}$$

$$\sum_{J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau)} \mathrm{TSu}_J(\tau) = \hat{\tau}. \tag{7}$$

□

Proof. We prove Equation (6) by induction on $|\mathrm{Lin}(\tau)|$. When $|\mathrm{Lin}(\tau)| = 1$, we have

$$\sum_{x \in \mathrm{Lin}(\tau)} \mathrm{DSu}_x(\tau) = \tau = \tilde{\tau}.$$

Now assume that Equation (6) holds for all $\tau \in \mathfrak{T}(\mathcal{V})$ with $\mathrm{Lin}(\tau) \leq k$ for a $k \geq 1$ and consider a $(k+1)$-tree τ in $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$. Since $\tau = \tau_\ell \vee_\omega \tau_r$ for some $\ell, r \leq k$ and $\omega \in V$, by the definition of the disuccessor of a planar binary tree and the induction hypothesis, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathrm{Lin}(\tau)} \mathrm{DSu}_x(\tau) &= \sum_{x \in \mathrm{Lin}(\tau_\ell)} \mathrm{DSu}_x(\tau_\ell) \vee_{\binom{\omega}{\prec}} \tilde{\tau}_r + \tilde{\tau}_\ell \vee_{\binom{\omega}{\succ}} \sum_{x \in \mathrm{Lin}(\tau_r)} \mathrm{DSu}_x(\tau_r) \\
&= \tilde{\tau}_\ell \vee_{\binom{\omega}{\prec}} \tilde{\tau}_r + \tilde{\tau}_\ell \vee_{\binom{\omega}{\succ}} \tilde{\tau}_r \\
&= \tilde{\tau}_\ell \vee_{\binom{\omega}{*}} \tilde{\tau}_r \\
&= \tilde{\tau}.
\end{aligned}$$

This completes the induction. The proof of Equation (7) is similar. ■

Proposition 2.31. Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R)$ be a binary operad.

(a) There is a morphism of operads from $\mathcal{P}$ to $\mathrm{DSu}(\mathcal{P})$ which extends the linear map from V to $\tilde{V}$ defined by

$$\omega \mapsto \begin{pmatrix} \omega \\ \star \end{pmatrix}, \quad \omega \in V. \tag{8}$$

(b) There is a morphism of operads from $\mathcal{P}$ to $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ which extends the linear map from V to $\hat{V}$ defined by

$$\omega \mapsto \begin{pmatrix} \omega \\ \star \end{pmatrix}, \quad \omega \in V. \tag{9}$$

(c) There is a morphism of operads from $\mathcal{P}$ to $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ which extends the linear map from V to $\hat{V}$ defined by

$$\omega \mapsto \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \omega \in V. \tag{10}$$

□

Proof. We assume that R is given by Equation (3).

(a) It is easy to see that the linear map defined in Equation (8) is $\mathbb{S}_2$-equivariant and hence induces a morphism of operads from $\mathcal{T}(V)$ to $\mathrm{DSu}(\mathcal{P})$. Moreover, by Lemma 2.30, Equation (6) holds. Hence we have

$$\sum_i c_{s,i}\tilde{\tau}_{s,i} = \sum_i \sum_{x\in \mathrm{Lin}(\tau_{s,i})} c_{s,i}\mathrm{DSu}_x(\tau_{s,i}), \quad 1\le s\le k.$$

Since $L_s := \mathrm{Lin}(\tau_{s,i})$ does not depend on i, we have

$$\sum_i c_{s,i}\tilde{\tau}_{s,i} = \sum_{x\in L_s} \mathrm{DSu}_x\left(\sum_i c_{s,i}\tau_{s,i}\right) = 0, \quad 1\le s\le k.$$

This completes the proof.

(b) The proof is similar to the proof of Item (a).

(c) It is easy to see that the linear map defined in Equation (10) is $\mathbb{S}_2$-equivariant. So it induces a morphism of operads from $\mathcal{T}(V)$ to $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$. Moreover, by the definition of a trisuccessor, the following equations hold:

$$\sum_i c_{s,i}\mathrm{TSu}_{\mathrm{Lin}(\tau_{s,i})}(\tau_{s,i}) = 0, \quad 1\le s\le k.$$

Note that the labeled tree $\mathrm{TSu}_{\mathrm{Lin}(\tau_{s,i})}(\tau_{s,i})$ is obtained by replacing the label of each vertex of $\tau_{s,i}$, say ω, by $\binom{\omega}{\cdot}$. Hence the conclusion holds. ■

If we take $\mathcal{P}$ to be the operad of associative algebras, then we obtain the following results of Loday [27] and Loday and Ronco [30]:

Corollary 2.32.

(a) Let $(A, \prec, \succ)$ be a dendriform algebra. Then the operation $* := \prec + \succ$ makes A into an associative algebra.

(b) Let $(A, \prec, \succ, \cdot)$ be a tridendriform algebra. Then the operation $\star := \prec + \succ + \cdot$ makes A into an associative algebra.

(c) Let $(A, \prec, \succ, \cdot)$ be a tridendriform algebra. Then $(A, \cdot)$ carries an associative algebra structure. □

In particular, Proposition 2.31 shows that the disuccessor is precisely, at the level of operads, the analogue of the splitting of operations into two pieces. Notice that this proposition implies also that the trisuccessor of an operad is the operadic interpretation of the splitting of operations into three pieces.

2.6.2 *Relationship between the disuccessor and the trisuccessor of a binary operad*

Lemma 2.33. Let τ be a labeled n-tree in $\mathfrak{T}(\mathcal{V})$. If the operations $\{\binom{\omega}{\cdot} \mid \omega \in V\}$ are trivial, then for any $x \in \mathrm{Lin}(\tau)$, we have

$$\mathrm{TSu}_{\{x\}}(\tau) = \mathrm{DSu}_x(\tau) \text{ in } \mathcal{T}(\hat{V}).$$ □

Proof. There is only one path from the root to the the leafs in $\{x\}$ of τ. So, by Proposition 2.4 and by Proposition 2.9, if the operations $\{\binom{\omega}{\cdot} \mid \omega \in V\}$ are trivial, then the disuccessor and the trisuccessor with respect to x coincide. ■

The following results relate the disuccessor and the trisuccessor of a binary operad.

Proposition 2.34. Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R)$ be a binary operad.

(a) If the operations $\{\binom{\omega}{\cdot} \mid \omega \in V\}$ are trivial, then there is a morphism of operads from $\mathrm{DSu}(\mathcal{P})$ to $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ that extends the inclusion of $\tilde{V}$ in $\hat{V}$.

(b) There is a morphism of operads from $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ to $\mathrm{DSu}(\mathcal{P})$ that extends the linear map defined by

$$\begin{pmatrix}\omega\\ \prec\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\omega\\ \prec\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\omega\\ \succ\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\omega\\ \succ\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\omega\\ \cdot\end{pmatrix} \mapsto 0, \quad \omega \in V. \tag{11}$$ □

Proof. We assume that R is given by Equation (3).

(a) The inclusion $\tilde{V} \hookrightarrow \hat{V}$ is $\mathbb{S}_2$-equivariant. So it induces a morphism of operads from $\mathcal{T}(V)$ to $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ whose kernel is the ideal generated by $\mathrm{DSu}(R)$ following Lemma 2.33.

(b) The linear map defined by Equation (11) is $\mathbb{S}_2$-equivariant. Hence it induces a morphism of operads $\varphi : \mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \to \mathrm{DSu}(\mathcal{P})$, and $\varphi\left(\binom{\omega}{\star}\right) = \binom{\omega}{*}$. Then, we have

$$\varphi(\mathrm{TSu}_{\{x\}}(\tau_{s,i})) = \mathrm{DSu}_x(\tau_{s,i}), \ \forall x \in \mathrm{Lin}(\tau_{s,i})$$

and

$$\varphi(\mathrm{TSu}_{\{J\}}(\tau_{s,i})) = 0, \quad \forall J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau_{s,i}), \, |J| > 1.$$ ■

If we take $\mathcal{P}$ to be the operad of associative algebras, then we obtain the following results of Loday and Ronco [30]:

Corollary 2.35.

(a) Let $(A, \prec, \succ, \cdot)$ be a tridendriform algebra. If the operation $\cdot$ is trivial, then $(A, \prec, \succ)$ becomes a dendriform algebra.

(b) Let $(A, \prec, \succ)$ be a dendriform algebra. Then $(A, \prec, \succ, 0)$ carries a tridendriform algebra structure, where 0 denotes the trivial product. □

3 Disuccessors, Trisuccessors, and Manin Black Product

We now relate the successors of a binary *quadratic* operad $\mathcal{P}$ with the Manin black product of operads.

Definition 3.1 ([16, 39]). Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R)$ and $\mathcal{Q} = \mathcal{T}(W)/(S)$ be two binary quadratic operads with finite-dimensional generating spaces. Define their **Manin black product** by the formula

$$\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q} := \mathcal{T}(V \otimes W \otimes \mathbf{k}.\mathrm{sgn}_{\mathbb{S}_2})/(\Psi(R \otimes S)),$$

where Ψ is defined in Section 4.3 of [39]. □

According to Proposition 25 of [39], the Manin black product is symmetric and associative. Moreover, it is a bifunctor.

3.1 Disuccessor as the Manin black product by *PreLie*

Theorem 3.2. Let $\mathcal{P}$ be a binary quadratic operad. We have the isomorphism of operads

$$\mathrm{DSu}(\mathcal{P}) \cong \textit{PreLie} \bullet \mathcal{P}.$$ □

In other words, the disuccessor coincides with the Manin black product with *PreLie* on the class of binary quadratic operads. It is important to notice that the disuccessor is however defined for a bigger class of operads, namely the binary operads (not necessarily quadratic).

Proof. Denote the generating operation of *PreLie* by μ and continue with the notations v_i, $1 \le i \le 12$, of the table given in Section 2.5 with $\omega = \nu = \mu$. The space of relations of *PreLie* is generated as a vector space by $v_i - v_{i+1} + v_{i+2} - v_{i+3}$, $i = 1, 5, 9$.

We define an isomorphism of $\mathbb{S}_2$-modules by

$$\begin{aligned} \eta : \textit{PreLie}(2) \otimes \mathcal{P}(2) \otimes \mathbf{k}.\mathrm{sgn}_{\mathbb{S}_2} &\to \mathrm{DSu}(\mathcal{P})(2), \\ \mu \otimes \omega \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{12}$$

which induces an isomorphism of $\mathbb{S}_3$-modules:

$$\bar{\eta} : 3(\textit{PreLie}(2) \otimes \mathcal{P}(2) \otimes \mathbf{k}.\mathrm{sgn}_{\mathbb{S}_2})^{\otimes 2} \to 3\mathrm{DSu}(\mathcal{P})^{\otimes 2}.$$

Then we just need to prove that, for every relation γ of R, we have

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\Psi((v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \otimes \gamma)) &= \mathrm{DSu}_x(\gamma), \\ \bar{\eta}(\Psi((v_5 - v_6 + v_7 - v_8) \otimes \gamma)) &= \mathrm{DSu}_z(\gamma), \\ \bar{\eta}(\Psi((v_9 - v_{10} + v_{11} - v_{12}) \otimes \gamma)) &= \mathrm{DSu}_y(\gamma). \end{aligned} \tag{13}$$

If Equation (13) holds, by Lemma 2.6, we have

$$\bar{\eta}(\Psi((v_5 - v_6 + v_7 - v_8) \otimes \gamma)) = \bar{\eta}(\Psi((v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \otimes \gamma^{\sigma_1^{-1}})^{\sigma_1}) = \mathrm{DSu}_z(\gamma)$$

and

$$\bar{\eta}(\Psi((v_9 - v_{10} + v_{11} - v_{12}) \otimes \gamma)) = \bar{\eta}(\Psi((v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \otimes \gamma^{\sigma_2^{-1}})^{\sigma_2}) = \mathrm{DSu}_y(\gamma),$$

for every relation γ of R, where $\sigma_1 = (132), \sigma_2 = (123)$. Thus we only need to prove Equation (13) for every $\gamma \in \mathcal{T}(V)(3)$.

By the remark at the beginning of Section 2.5, we only need to prove Equation (13) for every $\gamma \in \mathcal{T}(V)(3)$ in Equation (5). To do this, we notice that, for all ω and ν in V, we have

$$\mathrm{DSu}_x(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} \nu \\ \prec \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{DSu}_x(\omega \circ_{\mathrm{II}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \succ \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} \nu \\ \star \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{DSu}_x(\omega \circ_{\mathrm{III}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} \nu \\ \succ \end{pmatrix}.$$

Then we obtain

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(\Psi((v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \otimes (\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu))) &= \bar{\eta}(\Psi((\mu \circ_{\mathrm{I}} \mu) \otimes (\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu))) \\ &= \bar{\eta}((\mu \otimes \omega \otimes 1) \circ_{\mathrm{I}} (\mu \otimes \nu \otimes 1)) \\ &= \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} \nu \\ \prec \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{DSu}_x(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu).\end{aligned}$$

In the same way, we prove that Equation (13) holds for the monomials $\omega \circ_{\mathrm{II}} \nu$ and $\omega \circ_{\mathrm{III}} \nu$. So, we conclude with

$$\begin{aligned}&\bar{\eta}(\Psi((v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \otimes \gamma)) \\ &\quad = \bar{\eta}(\Psi((v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \otimes \mu \circ_{\mathrm{I}} \mu - \mu' \circ_{\mathrm{II}} \mu + \mu' \circ_{\mathrm{II}} \mu' - \mu \circ_{\mathrm{III}} \mu')) \\ &\quad = \mathrm{DSu}_x(\gamma).\end{aligned}$$

■

Repeated application of the theorem gives $\mathrm{DSu}^2(\mathcal{P}) \cong \mathit{PreLie} \bullet \mathit{PreLie} \bullet \mathcal{P}$ and, more generally, $\mathrm{DSu}^n(\mathcal{P}) \cong \mathit{PreLie}^{\bullet n} \bullet \mathcal{P}$. Thus we have an action of $\mathbb{S}_2$ on $\mathrm{DSu}^2(\mathcal{P})$ by exchanging the two *PreLie* factors and, more generally, an action of $\mathbb{S}_n$ on $\mathrm{DSu}^n(\mathcal{P})$ by exchanging the n *PreLie* factors.

In the nonsymmetric framework, the analogue of Theorem 3.2 is the following result.

Theorem 3.3. Let $\mathcal{P}$ be a binary quadratic nonsymmetric operad. There is an isomorphism of nonsymmetric operads

$$\mathrm{DSu}(\mathcal{P}) \cong \mathit{Dend} \blacksquare \mathcal{P},$$

where $\blacksquare$ denotes the black square product in [13, 39]. □

Proof. The proof is similar to the proof of Theorem 3.2. ■

Remark 3.4. Note that Theorem 3.2 gives a convenient way to compute the black Manin product of a binary quadratic operad (resp. binary quadratic nonsymmetric operad) with the operad *PreLie* (resp. the nonsymmetric operad *Dend*), as we can see in the following corollary. □

Corollary 3.5.

(a) We recover

- ([39]) $PreLie \bullet Ass = Dend$, $PreLie \bullet Com = Zinb$ and $PreLie \bullet Lie = PreLie$.
- ([37]) $PreLie \bullet Poisson = PrePoisson$.
- ([39]) $Dend \blacksquare As = As$ and $Dend \blacksquare Dend = Quad$.

(b) We have $PreLie \bullet PreLie = LDend$ and $PreLie^{\bullet 3} = LQuad$. □

Proof. All those results follow from Theorem 3.2 or Theorem 3.3, together with Corollary 2.22, with Proposition 2.23, with Proposition 2.24, or with Example 2.15. ■

Remark 3.6. Note that the Manin black product does not commute with the functor of regularization, defined in Section 2.4, whereas the disuccessor does, according to Proposition 2.21. □

3.2 Trisuccessor as the Manin black product by PostLie

Theorem 3.7. Let $\mathcal{P}$ be a binary quadratic operad. We have the isomorphism of operads

$$\mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \cong PostLie \bullet \mathcal{P}.$$ □

Remark 3.8. As in the case of disuccessors, Theorem 3.7 makes it easy to compute the black Manin product of *PostLie* with any binary quadratic operad $\mathcal{P}$. □

Proof. The sketch of this proof is similar to the proof of Theorem 3.2.

Denote the generating operations $[,]$ and $\circ$ of *PostLie* by β and ϵ, respectively. Then $\beta' = -\beta$. The space of relations of *PostLie* is generated as a vector space by

$$\beta \circ_{\mathrm{I}} \beta + \beta \circ_{\mathrm{II}} \beta + \beta \circ_{\mathrm{III}} \beta,$$

$$\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \epsilon - \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \epsilon' - \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \beta - \epsilon \circ_{\mathrm{III}} \epsilon',$$

$$\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \beta - \beta \circ_{\mathrm{III}} \epsilon' + \beta \circ_{\mathrm{II}} \epsilon,$$

$$\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \epsilon' - \epsilon' \circ_{\mathrm{III}} \epsilon' - \epsilon \circ_{\mathrm{II}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{III}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{III}} \beta,$$

$$\epsilon \circ_{\mathrm{II}} \epsilon' - \epsilon' \circ_{\mathrm{I}} \epsilon' - \epsilon \circ_{\mathrm{III}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{I}} \epsilon - \epsilon' \circ_{\mathrm{I}} \beta,$$

$$-\epsilon \circ_{\mathrm{II}} \beta - \beta \circ_{\mathrm{III}} \epsilon + \beta \circ_{\mathrm{I}} \epsilon',$$

and

$$-\epsilon \circ_{\mathrm{III}} \beta - \beta \circ_{\mathrm{I}} \epsilon + \beta \circ_{\mathrm{II}} \epsilon'.$$

We define an isomorphism of $\mathbb{S}_2$-modules by

$$\eta : \mathit{PostLie}(2) \otimes \mathcal{P}(2) \otimes \mathbf{k}.\mathrm{sgn}_{\mathbb{S}_2} \to \mathrm{TSu}(\mathcal{P})(2)$$

$$\begin{aligned} \beta \otimes \omega \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \\ \epsilon \otimes \omega \otimes 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{14}$$

which induces an isomorphism of $\mathbb{S}_3$-modules:

$$\bar{\eta} : 3(\mathit{PostLie}(2) \otimes \mathcal{P}(2) \otimes \mathbf{k}.\mathrm{sgn}_{\mathbb{S}_2})^{\otimes 2} \to 3\mathrm{TSu}(\mathcal{P})^{\otimes 2}.$$

Then we just need to prove that, for every relation γ of $\mathcal{P}$, we have

$$\bar{\eta}(\Psi((\beta \circ_{\mathrm{I}} \beta + \beta \circ_{\mathrm{II}} \beta + \beta \circ_{\mathrm{III}} \beta) \otimes \gamma)) = \mathrm{TSu}_{\{x,y,z\}}(\gamma), \tag{15}$$

$$\bar{\eta}(\Psi((\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \epsilon - \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \epsilon' - \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \beta - \epsilon \circ_{\mathrm{III}} \epsilon') \otimes \gamma)) = \mathrm{TSu}_{\{x\}}(\gamma), \tag{16}$$

$$\bar{\eta}(\Psi((\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \epsilon' - \epsilon' \circ_{\mathrm{III}} \epsilon' - \epsilon \circ_{\mathrm{II}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{III}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{III}} \beta) \otimes \gamma)) = \mathrm{TSu}_{\{y\}}(\gamma),$$

$$\bar{\eta}(\Psi((\epsilon \circ_{\mathrm{II}} \epsilon' - \epsilon' \circ_{\mathrm{I}} \epsilon' - \epsilon \circ_{\mathrm{III}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{I}} \epsilon - \epsilon' \circ_{\mathrm{I}} \beta) \otimes \gamma)) = \mathrm{TSu}_{\{z\}}(\gamma),$$

$$\bar{\eta}(\Psi((\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \beta - \beta \circ_{\mathrm{III}} \epsilon' + \beta \circ_{\mathrm{II}} \epsilon) \otimes \gamma)) = \mathrm{TSu}_{\{x,y\}}(\gamma). \tag{17}$$

$$\bar{\eta}(\Psi((-\epsilon \circ_{\mathrm{II}} \beta - \beta \circ_{\mathrm{III}} \epsilon + \beta \circ_{\mathrm{I}} \epsilon') \otimes \gamma)) = \mathrm{TSu}_{\{y,z\}}(\gamma).$$

$$\bar{\eta}(\Psi((-\epsilon \circ_{\mathrm{III}} \beta - \beta \circ_{\mathrm{I}} \epsilon + \beta \circ_{\mathrm{II}} \epsilon') \otimes \gamma)) = \mathrm{TSu}_{\{x,z\}}(\gamma).$$

By Lemma 2.11, the same argument as in the preLie case implies that we just need to prove Equations (15)–(17).

By Section 2.5, we only need to prove Equation (15)–(17) for every $\gamma \in \mathcal{T}(V)(3)$ in Equation (5). To do this, we notice that, for all ω and ν in V, we have

$$\mathrm{TSu}_{\{x\}}(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} \nu \\ \prec \end{pmatrix}, \quad \mathrm{TSu}_{\{x,y\}}(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} \nu \\ \cdot \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{TSu}_{\{x,y,z\}}(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} \nu \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathrm{TSu}_{\{x\}}(\omega \circ_{\mathrm{II}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \succ \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} \nu \\ \star \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{TSu}_{\{x,y\}}(\omega \circ_{\mathrm{II}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} \nu \\ \prec \end{pmatrix}, \quad \mathrm{TSu}_{\{x,y,z\}}(\omega \circ_{\mathrm{II}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} \nu \\ \cdot \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{TSu}_{\{x\}}(\omega \circ_{\mathrm{III}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} \nu \\ \succ \end{pmatrix}, \quad \mathrm{TSu}_{\{x,y\}}(\omega \circ_{\mathrm{III}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} \nu \\ \succ \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{TSu}_{\{x,y,z\}}(\omega \circ_{\mathrm{III}} \nu) = \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \circ_{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} \nu \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Then, we have

- $\bar{\eta}(\Psi((\beta \circ_{\mathrm{I}} \beta + \beta \circ_{\mathrm{II}} \beta + \beta \circ_{\mathrm{III}} \beta) \otimes (\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu))) = \mathrm{TSu}_{\{x,y,z\}}(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu)$,
- $\bar{\eta}(\Psi((\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \epsilon - \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \epsilon + \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \epsilon' - \epsilon' \circ_{\mathrm{II}} \beta - \epsilon \circ_{\mathrm{III}} \epsilon') \otimes (\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu))) = \mathrm{TSu}_{\{x\}}(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu)$,
- $\bar{\eta}(\Psi((\epsilon \circ_{\mathrm{I}} \beta - \beta \circ_{\mathrm{III}} \epsilon' + \beta \circ_{\mathrm{II}} \epsilon) \otimes (\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu))) = \mathrm{TSu}_{\{x,y\}}(\omega \circ_{\mathrm{I}} \nu)$.

In the same way, we prove that Equations (15)–(17) hold for the monomials $\omega \circ_{\mathrm{II}} \nu$ and $\omega \circ_{\mathrm{III}} \nu$. This completes the proof. ∎

Remark 3.9. Theorem 3.2 can be proved in a different way, from Theorem 3.7, using the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathit{PostLie} \bullet \mathcal{P} \arrow[d] \\ \mathrm{DSu}(\mathcal{P}) \arrow[r] & \mathit{PreLie} \bullet \mathcal{P} \end{tikzcd}.$$

The two vertical morphisms are surjective. And, one can see that the top isomorphism preserves their kernels. Then, the bottom map turns out to be an isomorphism. □

Corollary 3.10. We have $\mathit{PostLie} \bullet \mathit{Ass} = \mathit{TriDend}$. □

The analog of Theorem 3.7 in the nonsymmetric framework is the following result that can be proved by a similar argument.

Theorem 3.11. Let $\mathcal{P}$ be a binary quadratic nonsymmetric operad. There is an isomorphism of nonsymmetric operads

$$\mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \cong \mathit{TriDend} \blacksquare \mathcal{P}.$$ □

4 Successors and Rota–Baxter Operators on Operads

In this section, we establish the relationship between the disuccessor (resp. the trisuccessor) of an operad and the action of the Rota–Baxter operator of weight zero (resp. non-zero weight) on this operad. We work with (symmetric) operads, but all the results hold for nonsymmetric operads as well.

Let us recall first the definition of a Rota–Baxter operator.

Definition 4.1. Let A be a vector space endowed with a binary operation $\star : A \otimes A \to A$. A **Rota–Baxter operator of weight** λ on A is a linear map $P : A \to A$ satisfying the following relation, called the **Rota–Baxter identity**:

$$P(a) \star P(b) = P(P(a) \star b) + P(a \star P(b)) + \lambda P(a \star b), \quad \forall a, b \in A.$$ □

4.1 Disuccessors and Rota–Baxter operators of weight zero

Definition 4.2. Let $V = V(2)$ be an $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 2.

(a) Let V_P be the $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 1 and arity 2, defined by $V_P(1) = \mathrm{span}_{\mathbf{k}}(P)$ and $V_P(2) = V$, where P is a symbol. Then $\mathcal{T}(V_P)$ is the free operad generated by binary operations V and a unary operation $P \neq \mathrm{id}$.

(b) Define $\tilde{V}$ by Equation (1), regarded as an $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 2. Define a morphism of $\mathbb{S}$-modules from $\tilde{V}$ to $\mathcal{T}(V_P)$ by the following correspondence:

$$\xi : \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \mapsto \omega \circ (\mathrm{id} \otimes P), \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \succ \end{pmatrix} \mapsto \omega \circ (P \otimes \mathrm{id}),$$

where $\circ$ is the operadic composition. By universality of the free operad, ξ induces a homomorphism of operads that we still denote by ξ:

$$\xi : \mathcal{T}(\tilde{V}) \to \mathcal{T}(V_P).$$

(c) Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R_{\mathcal{P}})$ be a binary operad defined by generating operations V and relations $R_{\mathcal{P}}$. Then we define the **operad of Rota–Baxter $\mathcal{P}$-algebras of weight zero** by

$$\mathrm{RB}_0(\mathcal{P}) := \mathcal{T}(V_P)/(R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}}),$$

where

$$RB_{\mathcal{P}} := \{\omega \circ (P \otimes P) - P \circ \omega \circ (P \otimes \mathrm{id}) - P \circ \omega \circ (\mathrm{id} \otimes P) \mid \omega \in V\}.$$

We denote by $p_1 : \mathcal{T}(V_P) \to \mathrm{RB}_0(\mathcal{P})$ the operadic projection. □

Some relations between Rota–Baxter operators of weight zero and the Manin black product with *PreLie* have already been studied.

Proposition 4.3 ([37, Theorem 4.2]). Let $\mathcal{P}$ be a binary quadratic operad and A be a $\mathcal{P}$-algebra. Let $P : A \to A$ be a Rota–Baxter operator of weight zero. Then the following operations make A into a $(\mathit{PreLie} \bullet \mathcal{P})$-algebra:

$$x \prec_j y := x \circ_j P(y), \quad x \succ_j y := P(x) \circ_j y, \quad \forall \circ_j \in \mathcal{P}(2), \quad x, y \in A.$$ □

Using Theorem 3.2, this is a particular case of the more general following result.

Theorem 4.4.

(a) Let $\mathcal{P}$ be a binary operad. There is a morphism of operads

$$\mathrm{DSu}(\mathcal{P}) \to \mathrm{RB}_0(\mathcal{P}),$$

which extends the map ξ given in Definition 4.2.

(b) Let A be a $\mathcal{P}$-algebra. Let $P: A \to A$ be a Rota–Baxter operator of weight zero. Then the following operations make A into a $\mathrm{DSu}(\mathcal{P})$-algebra:

$$x \prec_j y := x \circ_j P(y), \quad x \succ_j y := P(x) \circ_j y, \quad \forall \circ_j \in \mathcal{P}(2), \quad x, y \in A. \qquad \square$$

The proof is parallel to the case of trisuccessor in Theorem 4.8 that we will prove in detail.

If we take $\mathcal{P}$ to be the operad of associative algebras or the operad of Poisson algebras, then we obtain the following results of Aguiar [1]:

Corollary 4.5.

(a) Let $(A, \circ)$ be an associative algebra and let $P: A \to A$ be a Rota–Baxter operator of weight zero. Define two bilinear products on A by

$$x \prec y := x \circ P(y), \quad x \succ y := P(x) \circ y, \quad x, y \in A.$$

Then $(A, \prec, \succ)$ becomes a dendriform algebra.

(b) Let $(A, \circ, \{\,,\,\})$ be a Poisson algebra and let $P: A \to A$ be a Rota–Baxter operator of weight zero. Define two bilinear products on A by

$$x \cdot y := P(x) \circ y, \quad x * y := x \circ P(y), \quad x, y \in A.$$

Then $(A, \cdot, *)$ becomes a pre-Poisson algebra. $\square$

4.2 Trisuccessors and Rota–Baxter operators of non-zero weight

In this section, we give a result analog to the one in the previous subsection but for Rota–Baxter operators of weight one.

Definition 4.6. Let $V = V(2)$ be an $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 2.

(a) Define $\hat{V}$ by Equation (2), seen as an $\mathbb{S}$-module concentrated in arity 2. Define a morphism of $\mathbb{S}$-modules from $\hat{V}$ to $\mathcal{T}(V_P)$ by the following correspondence:

$$\eta : \begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \mapsto \omega \circ (\mathrm{id} \otimes P), \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \succ \end{pmatrix} \mapsto \omega \circ (P \otimes \mathrm{id}), \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \mapsto \omega,$$

where $\circ$ is the operadic composition. By universality of the free operad, η induces a homomorphism of operads:

$$\eta : \mathcal{T}(\hat{V}) \to \mathcal{T}(V_P).$$

(b) Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R_{\mathcal{P}})$ be a binary operad defined by generating operations V and relations $R_{\mathcal{P}}$. Then we define the **operad of Rota–Baxter $\mathcal{P}$-algebras of weight one** by

$$\mathrm{RB}_1(\mathcal{P}) := \mathcal{T}(V_P)/(R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}}),$$

where

$$RB_{\mathcal{P}} := \{\omega \circ (P \otimes P) - P \circ \omega \circ (P \otimes \mathrm{id}) - P \circ \omega \circ (\mathrm{id} \otimes P) - P \circ \omega \mid \omega \in V\}.$$

We denote by $p_1 : \mathcal{T}(V_P) \to \mathrm{RB}_1(\mathcal{P})$ the operadic projection. □

We first prove a lemma relating trisuccessors and Rota–Baxter operators.

Lemma 4.7. Let $\mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R_{\mathcal{P}})$ be a binary operad and let $\tau \in \mathfrak{T}(V)$ with $\mathrm{Lin}(\tau) = n$.

(a) We have

$$P \circ \eta(\tilde{\tau}) \equiv \tau \circ P^{\otimes n} \bmod \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}} \rangle. \tag{18}$$

(b) For $\emptyset \neq J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau)$ with $|\mathrm{Lin}(\tau)| = n$, let $P^{\otimes n, J}$ denote the nth tensor power of P but with the component from J replaced by the identity map. So, for example, denoting the two inputs of $P^{\otimes 2}$ by x_1 and x_2, then $P^{\otimes 2, \{x_1\}} = P \otimes \mathrm{id}$ and $P^{\otimes 2, \{x_1, x_2\}} = \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$. Then we have

$$\eta(\mathrm{TSu}_J(\tau)) \equiv \tau \circ (P^{\otimes n, J}) \bmod \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}} \rangle. \tag{19}$$

□

Proof. (a) We prove by induction on $|\mathrm{Lin}(\tau)| \geq 0$. When $|\mathrm{Lin}(\tau)| = 1$, τ is the tree with one leaf standing for the identity map. Then we have $\eta(\tilde{\tau}) = \tau$, $P \circ \eta(\tilde{\tau}) = P = \tau \circ P$. Assume the claim has been proved for τ with $|\mathrm{Lin}(\tau)| = k$ and consider a τ with $|\mathrm{Lin}(\tau)| = k+1$. Then from the decomposition $\tau = \tau_\ell \vee_\omega \tau_r$, we have $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_\ell \vee_{\binom{\omega}{\star}} \tilde{\tau}_r$. Then

$$
\begin{aligned}
P \circ \eta(\tilde{\tau}) &= P \circ \eta(\, \tilde{\tau}_\ell \vee_{\binom{\omega}{\star}} \tilde{\tau}_r) \\
&= P \circ \eta \left(\begin{pmatrix} \omega \\ \prec \end{pmatrix} \circ (\tilde{\tau}_\ell \otimes \tilde{\tau}_r) + \begin{pmatrix} \omega \\ \succ \end{pmatrix} \circ (\tilde{\tau}_\ell \otimes \tilde{\tau}_r) + \begin{pmatrix} \omega \\ \cdot \end{pmatrix} \circ (\tilde{\tau}_\ell \otimes \tilde{\tau}_r) \right) \\
&= P \circ \omega \circ (\eta(\tilde{\tau}_\ell) \otimes (P \circ \eta(\tilde{\tau}_r)) + P \circ \omega \circ ((P \circ \eta(\tilde{\tau}_\ell)) \otimes \eta(\tilde{\tau}_r)) \\
&\quad + P \circ \omega \circ (\eta(\tilde{\tau}_\ell) \otimes \eta(\tilde{\tau}_r)) \\
&\equiv \omega \circ ((P \circ \eta(\, \tilde{\tau}_\ell)) \otimes (P \circ \eta(\, \tilde{\tau}_r))) \bmod \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}} \rangle \\
&\equiv \omega \circ ((\tau_\ell \circ P^{\otimes |\mathrm{Lin}(\tau_\ell)|}) \otimes (\tau_r \circ P^{\otimes |\mathrm{Lin}(\tau_r)|})) \bmod \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}} \rangle \\
&\qquad \text{(by induction hypothesis)} \\
&= \omega \circ (\tau_\ell \otimes \tau_r) \circ P^{\otimes (k+1)} \\
&= (\tau_\ell \vee_\omega \tau_r) \circ P^{\otimes (k+1)} \\
&= \tau \circ P^{\otimes (k+1)}.
\end{aligned}
$$

(b) We again prove by induction on $|\mathrm{Lin}(\tau)|$. When $|\mathrm{Lin}(\tau)| = 1$, then x is the only leaf label of τ. Thus we have

$$\eta(\mathrm{TSu}_x(\tau)) = \eta(x) = x = \tau \circ (P^{\otimes 1, x}).$$

Assume that the claim has been proved for all τ with $|\mathrm{Lin}(\tau)| = k$ and consider τ with $|\mathrm{Lin}(\tau)| = k+1$. Write $\tau = \tau_\ell \vee_\omega \tau_r$. Let J be a non-empty subset of $\mathrm{Lin}(\tau)$. When $J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau_\ell)$, we have

$$
\begin{aligned}
\eta(\mathrm{TSu}_J(\tau)) &= \eta(\mathrm{TSu}_J(\tau_\ell \vee_\omega \tau_r)) \\
&= \eta(\mathrm{TSu}_J(\tau_\ell) \vee_{\binom{\omega}{\prec}} \tilde{\tau}_r) \\
&= \omega \circ (\eta(\mathrm{TSu}_J(\tau_\ell)) \otimes (P \circ \eta(\, \tilde{\tau}_r)))
\end{aligned}
$$

$$\equiv \omega \circ ((\tau_\ell \circ P^{\otimes|\mathrm{Lin}(\tau_\ell)|,J}) \otimes (\tau_r \circ P^{\otimes|\mathrm{Lin}(\tau_r)|})) \bmod \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}}\rangle,$$

(by induction hypothesis and Item (a))

$$= \tau \circ P^{\otimes(k+1),J}.$$

When $J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau_r)$, the proof is the same. When $J \not\subseteq \mathrm{Lin}(\tau_\ell)$ and $J \not\subseteq \mathrm{Lin}(\tau_r)$, we have

$$\begin{aligned}
\eta(\mathrm{TSu}_J(\tau)) &= \eta(\mathrm{TSu}_J(\tau_\ell \vee_\omega \tau_r)) \\
&= \eta(\mathrm{TSu}_{J\cap\mathrm{Lin}(\tau_\ell)}(\tau_\ell) \vee_{\binom{\omega}{\cdot}} \mathrm{TSu}_{J\cap\mathrm{Lin}(\tau_r)}\tau_r) \\
&= \omega \circ (\eta(\mathrm{TSu}_{J\cap\mathrm{Lin}(\tau_\ell)}(\tau_\ell)) \otimes \eta(\mathrm{TSu}_{J\cap\mathrm{Lin}(\tau_r)}(\tau_r))) \\
&\equiv \omega \circ ((\tau_\ell \circ P^{\otimes|\mathrm{Lin}(\tau_\ell)|,J\cap\mathrm{Lin}(\tau_\ell)}) \otimes (\tau_r \circ P^{\otimes|\mathrm{Lin}(\tau_r)|,J\cap\mathrm{Lin}(\tau_r)})) \bmod \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}}\rangle, \\
&\quad \text{(by induction hypothesis and Item (a))} \\
&= \tau \circ P^{\otimes(k+1),J}.
\end{aligned}$$

This completes the induction. ■

Theorem 4.8. Let $\mathcal{P}$ be a binary operad.

(a) There is a morphism of operads

$$\mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \to \mathrm{RB}_1(\mathcal{P}),$$

which extends the map η given in Definition 4.6.

(b) Let A be a $\mathcal{P}$-algebra. Let $P : A \to A$ be a Rota–Baxter operator of weight one. Then the following operations make A into a $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$-algebra:

$$x \prec_j y := x \circ_j P(y), \quad x \succ_j y := P(x) \circ_j y, \quad x \cdot_j y := x \circ_j y, \quad \forall \circ_j \in \mathcal{P}(2),\ x, y \in A.$$

Proof. (a) Let $R_{\mathrm{TSu}(\mathcal{P})}$ be the relation space of $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$. By definition, $R_{\mathrm{TSu}(\mathcal{P})}$ is generated by $\mathrm{TSu}_J(r)$ for locally homogeneous $r = \sum_i c_i\tau_i \in R_{\mathcal{P}}$, where $\emptyset \neq J \subseteq \mathrm{Lin}(\tau_i)$, the latter independent of the choice of i. By Lemma 4.7.(b), we then have

$$\eta\left(\sum_i c_i \mathrm{TSu}_J(\tau_i)\right) = \sum_i c_i \eta(\mathrm{TSu}_J(\tau_i)) = \sum_i c_i\tau_i \circ P^{\otimes n,J} = \left(\sum_i c_i\tau_i\right) \circ P^{\otimes n,J} \bmod \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}}\rangle.$$

Since the latter element is in $\langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}}\rangle$, the above equation is equal to zero. Thus $\eta(R_{\mathrm{TSu}(\mathcal{P})}) \subseteq \langle R_{\mathcal{P}}, RB_{\mathcal{P}}\rangle$. Hence the map η in Definition 4.6 induces a homomorphism of operads $\bar{\eta}$ from $\mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ to $\mathrm{RB}_1(\mathcal{P})$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(\hat{V}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathcal{T}(V_P) \arrow[d, "p_1"] \\
\mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \arrow[r, "\bar{\eta}"] & \mathrm{RB}_1(\mathcal{P})
\end{tikzcd}$$

where $p_2 : \mathcal{T}(\hat{V}) \to \mathrm{TSu}(\mathcal{P})$ is the operadic projection.

(b) This statement is the interpretation of the morphism $\mathrm{TSu}(\mathcal{P}) \to \mathrm{RB}_1(\mathcal{P})$ from Item (a) at the level of algebras. ■

If we take $\mathcal{P}$ to be the operad *Ass*, resp. the operad *Dend*, then we derive the results [12, 24] that a Rota–Baxter operator on an associative algebra (resp. on a dendriform algebra) gives a tridendriform algebra by Corollary 3.10 (resp. an algebra over the operad *PostLie* • *Dend*).

5 Algebraic Structures on Square Matrices

We know that the vector space of square n-matrices, for $n \geq 1$, with coefficients in a commutative algebra carries a structure of an associative algebra. Naturally, one wonders what happens when the space of coefficients is endowed with another algebraic structure. We address this question in this section.

Proposition 5.1. Let $\mathcal{P}$ be an operad and let A be a $\mathcal{P}$-algebra. Then, the vector space $\mathcal{M}_n(A)$, for $n \geq 1$, of $(n \times n)$-matrices with coefficients in A, carries a canonical $\bar{\mathcal{P}}$-algebra structure given by the family of maps $\alpha_m : \bar{\mathcal{P}}_m \to \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_n(A)^{\otimes m}, \mathcal{M}_n(A))$ defined by

$$\alpha_m(\mu)(M^1 \otimes \cdots \otimes M^m)_{i,j} := \sum_{k_1,\ldots,k_{m-1}=1}^{n} \alpha_A(\mu)(M^1_{i,k_1}, \ldots, M^m_{k_{m-1},j}), \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \forall m \geq 0,$$

where $\alpha_A : \mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$ is the structure of $\mathcal{P}$-algebra on A. □

Proof. We denote $\overline{\alpha}_m(\mu)$ by $\overline{\mu}$. Let $\mu \otimes \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_d$ be in $\bar{\mathcal{P}}(d) \otimes \bar{\mathcal{P}}(c_1) \otimes \cdots \otimes \bar{\mathcal{P}}(c_d)$, with $c_1 + \cdots + c_d = m$, and let $M^1, \ldots, M^m$ be in $\mathcal{M}_n(A)$. We have

$$\begin{aligned}
&\overline{\mu}(\overline{\nu_1}(M^1, \ldots, M^{c_1}), \ldots, \overline{\nu_d}(M^{\cdot}, \ldots, M^m))_{i,j} \\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_{d-1}=1}^{n} \sum_{l^1_1,\ldots,l^1_{c_1-1}=1}^{n} \cdots \sum_{l^d_1,\ldots,l^d_{c_d-1}=1}^{n} \alpha_A(\mu)(\alpha_A(\nu_1)(M^1_{i,l^1_1}, \ldots, M^{c_1}_{l^1_{c_1-1},k_1}), \ldots, \\
&\quad \alpha_A(\nu_d)(M^{\cdot}_{k_{d-1},l^d_1}, \ldots, M^m_{l^d_{c_d-1}})) \\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_{d-1}=1}^{n} \sum_{l^1_1,\ldots,l^1_{c_1-1}=1}^{n} \cdots \sum_{l^d_1,\ldots,l^d_{c_d-1}=1}^{n} \\
&\quad \gamma_{\mathcal{P}}(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_d)(M^1_{i,l^1_1}, \ldots, M^{c_1}_{l^1_{c_1-1},k_1}, \ldots, M^{\cdot}_{k_{d-1},l^d_1}, \ldots, M^m_{l^d_{c_d-1}}) \\
&= \gamma_{\bar{\mathcal{P}}}(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_d)(M^1, \ldots, M^d)_{i,j}, \forall 1 \le i, j \le n,
\end{aligned}$$

where $\gamma_{\mathcal{P}} = \gamma_{\bar{\mathcal{P}}}$ denotes the composition maps. So, these maps endow $\mathcal{M}_n(A)$ with a $\bar{\mathcal{P}}$-algebra structure. ■

Now, we have to describe the operad $\bar{\mathcal{P}}$. For instance, since $\overline{Com} = As$, we recover the classical associative structure of the space of matrices with coefficients in a commutative algebra. Moreover, in [35] and in [8], and in [10], the authors prove respectively that the nonsymmetric operads $\overline{Lie}$ and $\overline{PreLie}$ are free. Thus, on the space of matrices with coefficients in a Lie algebra (resp. preLie algebra), there are, in general, no relations among the operations defined in Proposition 5.1.

It is a nontrivial problem to describe the nonsymmetric operad $\bar{\mathcal{P}}$ associated to a symmetric operad $\mathcal{P}$. However, when $\mathcal{P}$ turns out to be the disuccessor of a convenient operad, we have the following result.

Theorem 5.2. Let $\mathcal{P}$ be a nonsymmetric binary operad and $\mathcal{O}$ be a symmetric binary operad. And let A be an algebra over $\mathrm{DSu}^k(\mathcal{O})$, for $k \geq 0$. Any morphism from $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})$ to $\mathcal{O}$ induces a morphism of nonsymmetric operads

$$\mathrm{DSu}^k(\mathcal{P}) \to \overline{\mathrm{DSu}^k(\mathcal{O})},$$

which endows $\mathcal{M}_n(A)$, for $n \geq 1$, with a $\mathrm{DSu}^k(\mathcal{P})$-algebra structure. □

Proof. Let A be an algebra over $\mathrm{DSu}^k(\mathcal{O})$. By Proposition 5.1, $\mathcal{M}_n(A)$ carries a structure of an algebra over $\overline{\mathrm{DSu}^k(\mathcal{O})}$. By functoriality of the disuccessor, a morphism from $\mathrm{Reg}(\mathcal{P})$ to $\mathcal{O}$ gives rise to a morphism from $\mathrm{DSu}^k(\mathrm{Reg}(\mathcal{P}))$ to $\mathrm{DSu}^k(\mathcal{O})$. Then, the following composition induces a $\mathrm{DSu}^k(\mathcal{P})$-algebra structure on $\mathcal{M}_n(A)$:

$$\mathrm{DSu}^k(\mathcal{P}) \to \overline{\mathrm{Reg}(\mathrm{DSu}^k(\mathcal{P}))} \cong \overline{\mathrm{DSu}^k(\mathrm{Reg}(\mathcal{P}))} \to \overline{\mathrm{DSu}^k(\mathcal{O})},$$

where the left-hand side map is given by the unit of the adjunction between the forgetful and the regularization functors and where the isomorphism is a consequence of Proposition 2.21. ■

Corollary 5.3. Let A be an algebra over $\mathrm{DSu}^k(\mathit{Com})$, $k \geq 0$. Then $\mathcal{M}_n(A)$, $n \geq 1$, carries a functorial structure of algebra over $\mathit{Dend}^{\blacksquare k}$.

More precisely, this structure is given by the following generating operations:

$$*_{(i_1,\dots,i_k)} : \mathcal{M}_n(A) \otimes \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(A),$$

with $(i_1, \dots, i_k) \in \{0, 1\}^k$, defined by

$$(M *_{(i_1,\dots,i_k)} N)_{i,j} := \sum_{l=1}^{n} M_{i,l} \star_{(i_1,\dots,i_k)} N_{l,j},$$

where $\{\star_{(i_1,\dots,i_k)}\}_{(i_1,\dots,i_k)\in\{0,1\}^k}$ denotes the set of generating operations of $\mathrm{DSu}^k(\mathit{Com})$.

In particular, these operations satisfy

$${}^t(M *_{(i_1,\dots,i_k)} N) = {}^tN *_{(1-i_1,\dots,1-i_k)} {}^tM, \quad \forall (i_1, \dots, i_k) \in \{0, 1\}^k, \forall M, N \in \mathcal{M}_n(A).$$ □

Proof. Applying Theorem 5.2, since $\overline{\mathit{Com}} = \mathit{As}$, $\mathcal{M}_n(A)$ carries a structure of algebra over $\mathrm{DSu}^k(\mathit{As})$, which is isomorphic to $\mathit{Dend}^{\blacksquare k} \blacksquare \mathit{As} = \mathit{Dend}^{\blacksquare k}$, by Theorem 3.3.

We denote by $\star$ and $*$ the generating operations of the operad Com and As,respectively. Then, the space of generating operations of $\mathrm{DSu}^k(\mathit{Com})$ and of $\mathrm{DSu}^k(\mathit{As})$ are respectively spanned by

$$\star_{(i_1,\dots,i_k)} := \star \otimes \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$$

and by

$$*_{(i_1,\dots,i_k)} := * \otimes \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k,$$

with $i_j = 0$ if $\mu_j = \prec$ and $i_j = 1$ if $\mu_j = \succ$. When we make explicit the composition of the maps given in Proposition 5.1 and in the proof of Theorem 5.2 on the space of generating operations, we have

$$\mathrm{DSu}^k(As)_2 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_n(A)^{\otimes 2}, \mathcal{M}_n(A))$$
$$*_{(i_1,\dots,i_k)} \mapsto *_{(i_1,\dots,i_k)} : M \otimes N \mapsto \left(\sum_{l=1}^{n} M_{i,l} \star_{(i_1,\dots,i_k)} N_{l,j} \right)_{1 \le i,j \le n}.$$

The last result is a consequence of the $\mathbb{S}_2$-action on the space of generating operations of the operad $\mathrm{DSu}^k(Com)$, that is,

$$\star^{(12)}_{(i_1,\dots,i_k)} = \star_{(1-i_1,\dots,1-i_k)}. \qquad \blacksquare$$

Notice that for $k=1$, according to Proposition 2.23, the space of matrices with coefficients in a Zinbiel algebra $(A, \centerdot)$ carries a natural structure of dendriform algebra given by the following operations:

$$M \lhd N = \left(\sum_{l=1}^{n} M_{i,l} \centerdot N_{l,j} \right)_{1 \le i,j \le n}$$

and

$$M \rhd N = \left(\sum_{l=1}^{n} N_{l,j} \centerdot M_{i,l} \right)_{1 \le i,j \le n}.$$

Further, these operations satisfy

$${}^t(M \lhd N) = {}^tN \rhd {}^tM.$$

It would be interesting to add the transpose to the generating operations of $Dend^{\blacksquare k}$ and to study this operad.

Acknowledgements

O.B. is grateful to thank the Max-Planck Institute for Mathematics for the excellent working conditions she enjoyed there. The authors thank Bruno Vallette for his many helps, and the Chern Institute of Mathematics at Nankai University and the CNRS on the occasion of "l'action franco-chinoise de mathématiques" for providing a stimulating environment that fostered this collaboration during the Sino-France Summer Workshop on Operads and Universal Algebra in June–July 2010.

Funding

C.B. acknowledges the support by NSFC (10920161) and SRFDP (200800550015). L.G. thanks NSF grant DMS-1001855 for support.

References

[1] Aguiar, M. "Pre-Poisson algebras." *Letters in Mathematical Physics* 54 (2000): 263–77.

[2] Aguiar, M. "Infinitesimal Bialgebras, Pre-Lie and Dendriform Algebras." In *Hopf Algebras*, 1–33. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 237. New York: Dekker, 2004.

[3] Aguiar, M. and J.-L. Loday. "Quadri-algebras." *Journal of Pure and Applied Algebra* 191 (2004): 205–21.

[4] Bai, C. "A unified algebraic approach to the classical Yang–Baxter equation." *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40 (2007): 11073–82.

[5] Bai, C., L. Guo, and X. Ni. "Nonabelian generalized Lax pairs, the classical Yang–Baxter equation and PostLie algebras." *Communications in Mathematical Physics* 297 (2010): 553–96.

[6] Bai, C., L. Liu, and X. Ni. "Some results on L-dendriform algebras." *Journal of Geometry and Physics* 60 (2010): 940–50.

[7] Baxter, G. "An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity." *Pacific Journal of Mathematics* 10 (1960): 731–42.

[8] Bergeron, N. and M. Livernet. "The non-symmetric operad pre-lie is free." *Journal of Pure and Applied Algebra* 214 (2010): 1165–72.

[9] Connes, A. and D. Kreimer. "Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem." *Communications in Mathematical Physics* 210 (2000): 249–73.

[10] Dotsenko, V. "Freeness theorems for operads via Gröbner bases." *Séminaires et Congrès* 26 (2011): 61–76.

[11] Dotsenko, V. and A. Khoroshkin. "Gröbner bases for operads." *Duke Mathematical Journal* 153 (2010): 363–96.

[12] Ebrahimi-Fard, K. "Loday-type algebras and the Rota–Baxter relation." *Letters in Mathematical Physics* 61 (2002): 139–47.

[13] Ebrahimi-Fard, K. and L. Guo. “On products and duality of binary, quadratic, regular operads.” *Journal of Pure and Applied Algebra* 200 (2005): 293–317.

[14] Ebrahimi-Fard, K. and L. Guo. “Rota–Baxter algebras and dendriform algebras.” *Journal of Pure and Applied Algebra* 212 (2008): 320–39.

[15] Ebrahimi-Fard, K., L. Guo, and D. Kreimer. “Spitzer’s Identity and the Algebraic Birkhoff Decomposition in pQFT.” *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37 (2004): 11037–52.

[16] Ginzburg, V. and M. M. Kapranov. “Koszul duality for operads.” *Duke Mathematical Journal* 76 (1995): 203–72.

[17] Guo, L. “WHAT IS a Rota–Baxter algebra.” *Notices of the American Mathematical Society* 56 (2009): 1436–7.

[18] Guo, L. and W. Keigher. “Baxter algebras and shuffle products.” *Advances in Mathematics* 150 (2000): 117–49.

[19] Guo, L. and B. Zhang. “Renormalization of multiple zeta values.” *Journal of Algebra* 319 (2008): 3770–809.

[20] Hoffbeck, E. “A Poincaré-Birkhoff-Witt criterion for Koszul operads.” *Manuscripta Mathematica* 131 (2010): 87–110.

[21] Hou, D., X. Ni, and C. Bai. “Pre-Jordan algebras.” to appear in *Mathematica Scandinavica*

[22] Jacobson, N. *Structure and Representations of Jordan Algebras*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.

[23] Leroux, P. “Construction of Nijenhuis operators and dendriform trialgebras.” *International Journal of Mathematical Sciences* (2004): 2595–615.

[24] Leroux, P. “Ennea-algebras.” *Journal of Algebra* 281 (2004): 287–302.

[25] Leroux, P. “On some remarkable operads constructed from Baxter operators.” (2003): preprint arXiv:math.QA/0311214.

[26] Liu, L., X. Ni, and C. Bai. “L-quadri-algebras (in Chinese).” *Scientia Sinica Mathematics* 42 (2011): 105–24.

[27] Loday, J.-L. “Dialgebras.” In *Dialgebras and Related Operads*, 7–66. Lecture Notes in Mathematics 1763. Berlin: Springer, 2002.

[28] Loday, J.-L. “Completing the operadic butterfly.” *Georgian Mathematical Journal* 13 (2006) 741–9.

[29] Loday, J.-L. “On the algebra of quasi-shuffles.” *Manuscripta Mathematica* 123 (2007): 79–93.

[30] Loday, J.-L. and M. Ronco. “Trialgebras and Families of Polytopes.” In *Homotopy Theory: Relations with Algebraic Geometry, Group Cohomology, and Algebraic K-theory*, 369–98. Contemporary Mathematics 346. Providence, RI: American Mathematical Society, 2004.

[31] Loday, J.-L. and B. Vallette. “Algebraic operads,” book to appear, http://math.unice.fr/∼brunov/Operads.html.

[32] Manchon, D. and S. Paycha. “Nested sums of symbols and renormalized multiple zeta values.” *International Mathematics Research Notices* (2010): doi: 10.1093/imrn/rnq027.

[33] Ni, X. and C. Bai. “Prealternative algebras and prealternative bialgebras.” *Pacific Journal of Mathematics* 248 (2010): 355–91.

[34] Rota, G.-C. "Baxter algebras and combinatorial identities I, II." *Bulletin of the American Mathematical Society* 75 (1969): 325–329, 330–334.

[35] Salvatore, P. and R. Tauraso. "The operad lie is free." *Journal of Pure and Applied Algebra* 213 (2009): 224–30.

[36] Uchino, K. "Quantum analogy of Poisson geometry, related dendriform algebras and Rota–Baxter operators." *Letters in Mathematical Physics* 85 (2008): 91–109.

[37] Uchino, K. "Derived bracket construction and Manin products." *Letters in Mathematical Physics* 93 (2010): 37–53.

[38] Vallette, B. "Homology of generalized partition posets." *Journal of Pure and Applied Algebra* 208 (2007): 699–725.

[39] Vallette, B. "Manin products, Koszul duality, Loday algebras and Deligne conjecture." *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 620 (2008): 105–64.

[40] Zinbiel, G. W. "Encyclopedia of Types of Algebras." In *Operad and Universal Algebra, Proceedings of the International Summer Institute*. World Scientific Publishing Company. http://www-irma.u-strasbg.fr/∼loday/PAPERS/EncyclopALG2010WS2.pdf.

Chapitre 2

Koszul duality theory for operads over Hopf algebras

In homotopical algebra, one problem is to know how algebraic structures behave under homotopy equivalences. More precisely, given two homotopy equivalent chain complexes such that one is endowed with an algebraic structure, is it possible to transfer this structure onto the second one ? For instance, the product of a differential graded associative algebra induces, on a homotopy equivalent chain complex, a product which is not associative in general. However, Kadeishvili proved in [Kad82] that the homotopy equivalent chain complex carries higher operations, in addition to the transferred product, which endow it with a homotopy associative algebra, also known as A_∞-algebra, structure defined by Stasheff in [Sta63]. This is the first occurence of what is nowadays called the *Homotopy Transfer Theorem* (HTT). An explicit solution to the HTT was also given for Lie algebras, for commutative algebras, and more generally, for other types of algebras using the theory of operads, see [LV12, Section 10.3].

The theory developed in this chapter is motivated by the following example of Batalin–Vilkovisky algebras. These algebras play an important role in geometry, topology and mathematical physics, see for instance [BK98, CS99, Get94a, LZ93]. In brief, a BV-algebra structure is defined by a commutative product, a Lie bracket and a unary square-zero order 2 operator, satisfying some compatibility relations. A solution to the HTT for BV-algebras, introducing homotopy BV-algebra structure, was given by Galvez–Tonks–Vallette in [GTV09], where the authors give an explicit resolution of the operad $\mathcal{BV}$ encoding BV-algebras. But, the higher structure produced by the HTT of [GTV09] is made up of higher homotopies for each of the three generating operations and for each of their relations. Therefore, the homotopy BV-algebra structure is very rich, and at the same time very intricate.

However, when the unary operator commutes with the underlying contracting homotopy, the transferred operation associated to this operator is still a square-zero unary operator. In this case, there are no higher operations arising from the unary operator when we apply the HTT. So, we get a simplified homotopy BV-algebra structure, which immediately raises the following question.

Question. *Given two homotopy equivalent chain complexes, such that one of them is endowed with a BV-algebra structure, what kind of higher structure is obtained by the Homotopy Transfer Theorem if the BV operator commutes with the contracting homotopy ?*

To answer this question, the key idea is to insert the square-zero operator in the underlying category of chain complexes, and to work with operads over this new category. In this context, we use the operad of Gerstenhaber algebras, enriched with an action of a square-zero unary operator, to encode the category of BV-algebras. In general, we work with operads in the category of modules over a cocommutative Hopf algebra. In [SW03], Salvatore and Wahl began the study of such operads. Here, we go further and we extend the classical Koszul duality theory to this framework. At each step of the operadic theory, we show that all the objects can be enriched with a compatible action of a Hopf algebra and we prove that the results still hold in this context. In particular, we extend the bar–cobar constructions, we define a notion of homotopy algebras and their infinity-morphisms in order to prove a new version of the Homotopy Transfer Theorem. We also extend in this context most of the results about the homotopy theory of algebras over an operad, which can be found in [LV12].

In [GK94], the authors already had the idea to put unary operations in the underlying category but not in the same way as we do. Indeed, they put the algebra of all the arity one operations in the underlying category and they keep track of their action by taking the tensor product over this algebra. On the opposite, we consider the category of modules over a Hopf algebra constituted by, maybe some of, the arity one operations. We also remove, from the operad, all the operations made up of these ones. We keep track of the action of the unary operations via structures of module over this algebra and, thus, we can still work with the tensor product over the ground field. So, when we do homological reasoning, all modules are projectives, while, in [GK94], they need their algebra of unary operations to be semi-simple. Moreover, since they remove less operations from the operad, their corresponding up to homotopy structure is much bigger than ours. The price we have to pay for this is that our algebra of unary operations forms a Hopf algebra.

There are two ways of proving the HTT. On the one hand, one can prove it with model category arguments as in [BM03]. This relies on a compatibility between the monoidal and the model structures of the underlying category, called the pushout-product axiom. The point is that we want the weak equivalences to be quasi-isomorphisms, as in the model category structure constructed in the Appendix A. But, to the best of our knowledge, there is no monoidal model category structure on the category of modules over a cocommutative Hopf algebra together with the tensor product over the ground field. Thus, we cannot use model category arguments to prove our version of the HTT. On the other hand, one can prove the HTT with explicit formulae using the Koszul duality theory for operads, see [LV12, Section 10.3]. These explicit formulae allow to prove formality results at the level of algebras : when all the higher transferred operations vanish, the algebra is formal. In the same way, we use the Koszul duality theory for operads over Hopf algebras to prove our version of the HTT.

In the particular case of BV-algebras, the Koszul duality developed in this thesis provides a simpler notion of homotopy BV-algebras and of the associated infinity-morphisms. A *strict homotopy BV-algebra* is a homotopy Gerstenhaber algebra together with a compatible unary square-zero operator. Thus, only the product and the bracket are relaxed up to homotopy in the higher structure and the BV operator strictly squares to zero. In the end, we prove the following HTT, which gives a solution to our problem, and we obtain a new description of the homotopy category of BV-algebras.

Theorem. *Let two homotopy equivalent chain complexes, such that one of them is endowed with a BV-algebra structure. If the BV operator commutes with the contracting homotopy, then the homotopy BV-algebra structure on the second chain complex, provided by [GTV09, Theorem 33], reduces to a strict homotopy BV-algebra structure.*

Theorem. *The homotopy category of BV-algebras is equivalent to the homotopy category of strict homotopy BV-algebras with their ∞-morphisms. Moreover, for any BV-algebras A and B, the following assertions are equivalent :*

(a) *there exists a zig-zag of quasi-isomorphisms of BV-algebras*

$$A \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\sim} B \quad ,$$

(b) *there exists an ∞-quasi-isomorphism of Gerstenhaber algebras $A \overset{\sim}{\rightsquigarrow} B$, commuting with the unary operator provided by the BV-algebra structures.*

2.1 Operad over Hopf algebras

2.1.1 Categorical considerations

We construct the monoidal category of (differential graded) $\mathbb{S}$-H-modules, where H is a cocommutative Hopf algebra, following the example of $\mathbb{S}$-modules given in [LV12, Section 5.1]. We refer to the book [Swe81] for more details on Hopf algebras.

Recollection on the symmetric monoidal closed category of modules over an Hopf algebra

Let $(H, d_H, \mu, \Delta, u, \varepsilon)$ be a cocommutative bialgebra, where (μ, u) and (Δ, ε) are respectively the unital associative algebra structure and the counital cocommutative coalgebra structure. They are related by the *Hopf compatibility relation*

$$\Delta \circ \mu = \underbrace{(\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id})}_{\mu_{H\otimes H}} \circ (\Delta \otimes \Delta) \ ,$$

where $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ is the *switching map* $\tau(g \otimes h) := h \otimes g$. Applying this equation to elements, we get

$$(hh')_{(0)} \otimes (hh')_{(1)} = \Delta(hh') = h_{(0)}h'_{(0)} \otimes h_{(1)}h'_{(1)} \ .$$

We will denote $1_H := u(1_{\mathbb{K}})$. Then, we have $\varepsilon(1_H) = 1_{\mathbb{K}}$ and $H \cong \mathrm{Ker}(\varepsilon : H \to \mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}1_H$.
We define the iterated coproduct $\Delta^n : H \to H^{\otimes n+1}$ by $\Delta^0 = \mathrm{Id}$, $\Delta^1 = \Delta$ and

$$\Delta^n := (\Delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta^{n-1}.$$

Since Δ is coassociative, we have $\Delta^n = (\underbrace{\mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id}}_{i} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta^{n-1}$ for $0 \leq i \leq n-1$.

The category $(H\text{-}\mathsf{Mod}\ , \otimes, \mathbb{K})$ of left-H-modules is a symmetric monoidal category where the structure of H-module on

- $\mathbb{K}$ is defined by the map $H \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathbb{K}} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ where the last map is the scalar multiplication,
- the tensor product of two H-modules M and N is defined by

$$h.(m \otimes n) = h_{(0)}.m \otimes h_{(1)}.n, \forall h \in H, \forall m \in M, \forall n \in N \ ,$$

where $\Delta(h) = h_{(0)} \otimes h_{(1)}$. The Hopf compatibility relation insure the left H-action.

The H-module structure on tensor products of $k+1$ H-modules $M(0) \otimes \ldots \otimes M(k)$ is given by

$$h.(m_0 \otimes \ldots \otimes m_k) = h_{(0)}.m_0 \otimes \ldots \otimes h_{(k)}.m_k \ ,$$

where $\Delta^k(h) = h_{(0)} \otimes \ldots \otimes h_{(k)}$.
The *convolution product* $f \star g : H \to H$ of two linear maps $f, g : H \to H$ is defined by

$$f \star g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

and which can be represented as follows $\begin{tikzcd} H \arrow[r] & {} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & {} \arrow[r] & H \end{tikzcd}$. The composite $u\varepsilon$ is a unit for the convolution product.
We assume moreover that H is a *Hopf algebra*, that is H is equipped with a linear map $S : H \to H$, called *antipode*, which is an inverse of the identity for the convolution product :

$$S \star \mathrm{Id} = u\varepsilon = \mathrm{Id} \star S.$$

Let us recall here some properties of an antipode

(a) $S \circ \mu = \mu \circ (S \otimes S) \circ \tau$ *i.e.* S is an algebra antimorphism,

(b) $\tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S$ *i.e.* S is a coalgebra antimorphism,

(c) $S \circ u = u$,

(d) $\varepsilon \circ S = \varepsilon$,

(e) $S \circ S = \mathrm{Id}$ (as H is cocommutative) so S is invertible.

Then, for any H-modules M and N, the vector space $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)$ has an H-module structure given by

$$\begin{array}{ccc} H \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N) \\ h \otimes f & \mapsto & h.f : m \mapsto h_{(0)}.f(S(h_{(1)}).m) \ . \end{array}$$

Lemma 2.1.1. *The category of H-modules is closed.*

Proof. For any triple (A, B, C) of H-modules, the map

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) & \to & \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \\ f & \mapsto & (a \mapsto f(a \otimes -)) \end{array}$$

is well defined. It is easy to check that it is a natural isomorphism.

$\square$

Remark. It extends to the case of a graded Hopf algebra. Moreover, the previous results extend to the category of differential graded modules to obtain :

Proposition 2.1.2. *The category $(\mathsf{dg}\ H\text{-}\mathsf{Mod}\ , \otimes, I)$ of differential graded left-H-modules is a symmetric monoidal closed category.*

Example. Consider the algebra $D := \mathbb{K}[\delta]/(\delta^2)$ of dual numbers, where δ is of degree $+1$. It is a cocommutative Hopf algebra where the coproduct $\Delta : D \to D \otimes D$ and the antipode $S : D \to D$ are respectively given by

$$\Delta(\delta) := 1 \otimes \delta + \delta \otimes 1$$

and by

$$S(\delta) := -\delta \ .$$

A D-module is simply a vector space endowed with a map of degree $+1$ that squares to zero.

The monoidal category of $\mathbb{S}$-H-modules

The notion of $\mathbb{S}$-modules can be defined in any symmetric monoidal category. We make explicit these objects when the underlying category is equal to the category of H-modules.

Definition 2.1.3. An $\mathbb{S}$-*H-module* M is a $\mathbb{S}$-module $M = \{M(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, such that each $M(n)$ has a left-H-module structure which commutes with the $\mathbb{S}_n$-module structure. For $\mu \in M(n)$, the integer n is called the arity of μ and μ is called an *n-ary operation*.
A *morphism of* $\mathbb{S}$-*H-modules* $f : M \to N$ is a morphism of $\mathbb{S}$-modules such that each $f_n : M(n) \to N(n)$ is H-equivariant.
We denote the associated category by $\mathbb{S}$-H-Mod .

In particular, each $M(n)$ is a $(H, \mathbb{S}_n)$-bimodule and each $f_n : M(n) \to N(n)$ is a morphism of $(H, \mathbb{S}_n)$-bimodules.

Definition 2.1.4. For any $\mathbb{S}$-H-modules M and N, their *tensor product* is the $\mathbb{S}$-H-module $M \otimes N$ defined by

$$(M \otimes N)(n) := \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_i \times \mathbb{S}_j}^{\mathbb{S}_n} M(i) \otimes N(j) \ ,$$

where the action of H is induced by the H-module structure on the tensor product of two H-modules. Notice that the tensor product of H-modules is symmetric.

Proposition 2.1.5. *The tensor product of* $\mathbb{S}$-H*-modules is associative with unit the* $\mathbb{S}$-H*-module* $(\mathbb{K}, 0, 0, \ldots)$.

Proof. By [LV12, Proposition 5.1.5], we have an isomorphism of associativity of the underlying $\mathbb{S}$-modules. It is a morphism of H-modules by coassociativity of the coproduct.

□

Definition 2.1.6. For any $\mathbb{S}$-H-modules M and N, their *composite product* is the $\mathbb{S}$-H-module $M \circ N$ defined by

$$M \circ N := \bigoplus_{k \geq 0} M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} N^{\otimes k} \ .$$

Here $N^{\otimes k}$ stands for the tensor product of k copies of the $\mathbb{S}$-H-module N.
For any couple of morphisms of $\mathbb{S}$-H-modules $f : M \to N$ and $g : M' \to N'$, their *composite product* is the morphism of $\mathbb{S}$-H-modules $f \circ g : M \circ N \to M' \circ N'$ given explicitly by the formula :

$$f \circ g(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k) := (f(\mu); g(\nu_1), \ldots, g(\nu_k)).$$

Explicitly, in arity n, we have

$$(M \circ N)(n) := \bigoplus_{k \geq 0} M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1 + \cdots + i_k = n} \mathrm{Ind}^{\mathbb{S}_n}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k}} N(i_1) \otimes \ldots \otimes N(i_k) \right)$$

where the action of H is induced by the H-module structure on tensor products of H-modules.

Proposition 2.1.7. *The category of* $\mathbb{S}$-H*-modules* ($\mathbb{S}$-H-Mod $, \circ, I)$ *is a monoidal category, where the* $\mathbb{S}$-H*-module* $I = (0, \mathbb{K}, 0, \ldots)$ *concentrated in arity* 1 *is called* identity $\mathbb{S}$-H*-module.*

Proof. By [LV12, Proposition 5.1.14], the category of $\mathbb{S}$-modules ($\mathbb{S}$-$\mathsf{Mod}, \circ, I)$ is monoidal. Since the composite product of $\mathbb{S}$-H-modules is defined as the composite product of the underlying $\mathbb{S}$-modules endowed with the H-action induced by the coproduct, we just have to check that the isomorphisms of associativity and unit of the underlying $\mathbb{S}$-modules are compatible with the H-module structure.

□

As for $\mathbb{S}$-modules, the composite product of two $\mathbb{S}$-H-modules is not linear on the right-hand side. However, the infinitesimal composite product, defined in Section 6.1.1 of [LV12], extends to the category $\mathbb{S}$-H-Mod to produce a product $\circ_{(1)}$ which is linear on the right-hand side. Recall that the infinitesimal product is defined by

$$M \circ_{(1)} N := M \circ (I; N) \ ,$$

where, for any $\mathbb{S}$-modules P, P_1 and P_2, $P \circ (P_1; P_2)$, is the following $\mathbb{S}$-module

$$(P \circ (P_1; P_2))(n) := \bigoplus_{k=1}^{n} P(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1 + \cdots + i_k = n} \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}^{\mathbb{S}_n}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k}} P_1(i_1) \otimes \ldots \otimes \underbrace{P_2(i_j)}_{j^{th} \text{ position}} \otimes \ldots \otimes P_1(i_k) \right) .$$

The infinitesimal objects $f \circ_{(1)} g$, $f \circ' g$, $\gamma_{(1)}$ and $\Delta_{(1)}$, defined in Section 6.1 of [LV12], also extend to the category $\mathbb{S}$-H-Mod .

Differential graded framework

Definition 2.1.8. A *differential graded* $\mathbb{S}$-H*-module*, or dg $\mathbb{S}$-H-module for short, is a dg $\mathbb{S}$-module (M, d) such that each $M(n)$ is an H-$\mathbb{S}_n$-bimodule and the differential d is compatible with the H-action.
A *morphism of differential graded* $\mathbb{S}$-H*-modules* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ is a morphism of the underlying dg $\mathbb{S}$-modules which is H-equivariant. We denote by $\mathsf{dg}\ \mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod}$ the category of dg $\mathbb{S}$-H-modules with their morphisms.

The objects described in the previous section extend to the differential graded framework. However, they now involve signs in their definition. For more details, see [LV12, Section 6.2].
We define the *suspension* and the *desuspension* of a graded $\mathbb{S}$-H-module as the suspension and the desuspension of its underlying graded $\mathbb{S}$-module respectively, where the action of H is given by the counit of H.

Proposition 2.1.9. *The category of* $(\mathsf{dg}\ \mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod}, \circ, I)$ *is a monoidal category.*

Proof. It follows from the combination of Proposition 2.1.7 and [LV12, Proposition 6.2.4].

□

2.1.2 First definitions

In [LV12, Section 5.2], the authors give the monoidal definition of an algebraic operad, that is an operad in the category of vector spaces. More generally, one can define the notion of operad in any monoidal category. Here, we point out the extra structure we get when we consider operads in the category of $\mathbb{S}$-H-modules instead of just $\mathbb{S}$-modules.

Monoidal definition

Definition 2.1.10. An H*-operad* is a monoid $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ in the monoidal category of $\mathbb{S}$-H-modules. The unit map $\eta : I \to \mathcal{P}$ defines an element $\mathrm{id} := \eta(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{P}(1)$ called the *identity operation*.
A *morphism* $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ *of* H*-operads* is a morphism of monoids in the category of $\mathbb{S}$-H-modules, that is a morphism of $\mathbb{S}$-H-modules which is compatible with the monoidal structures. We denote the category of H-operads by Op_H.

Remark. Actually, an H-operad is nothing but an operad $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$, as defined in [LV12, Section 5.2.1], such that each $\mathcal{P}(n)$ has an H-action which makes $\mathcal{P}$ into an $\mathbb{S}$-H-module and such that the maps γ and η commute with the H-action. Furthermore, a morphism of H-operads is a morphism of the underlying operads which commutes with the action of H.

When A is an H-module, the following $\mathbb{S}$-module

$$\mathrm{End}_A(n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, A)$$

is endowed with an H-module structure, according to the previous section, which makes it into an $\mathbb{S}$-H-module. This structure is explicitly given by

$$\begin{array}{rcl} H \otimes \mathrm{End}_A(n) & \to & \mathrm{End}_A(n) \\ h \otimes f & \mapsto & h.f := a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \mapsto h_{(0)}.f(S(h_{(1)}).a_1, \ldots, S(h_{(n)}).a_n) \end{array} .$$

Lemma 2.1.11. *The triple* $(\mathrm{End}_A, \gamma_{\mathrm{End}_A}, \eta_{\mathrm{End}_A} : 1_{\mathbb{K}} \mapsto \mathrm{Id}_A)$*, where* γ_{End_A} *is the usual composition map given by* $\gamma_{\mathrm{End}_A}(f; g_1, \ldots, g_k) := f \circ (g_1 \otimes \ldots \otimes g_k)$*, is an* H*-operad.*

Proof. It is immediate to check that End_A is an operad. So, we just have to prove that γ_{End_A} and η_{End_A} are H-equivariant maps. For $(f; g_1, \ldots, g_k) \in \mathrm{End}_A(n)$, $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$ and $h \in H$,

we have
$\gamma_{\mathrm{End}_A}(h.(f;g_1,\dots,g_k))(a_1\otimes\dots\otimes a_n)$

$$\begin{aligned}
&= h_{(0)}.f\left(\bigotimes_{j=1}^{k}[S(h_{(n+j)(0)})h_{(n+j)(1)}].g_j\left(\bigotimes_{l=1}^{i_j}S(h_{(i_1+\cdots+i_{j-1}+l)}).a_{i_1+\cdots+i_{j-1}+l}\right)\right)\\
&= h_{(0)}.f\left(\bigotimes_{j=1}^{k}u\varepsilon(h_{(n+j)}).g_j\left(\bigotimes_{l=1}^{i_j}S(h_{(i_1+\cdots+i_{j-1}+l)}).a_{i_1+\cdots+i_{j-1}+l}\right)\right)\\
&= h_{(0)}.(f\circ(g_1\otimes\dots\otimes g_k)(S(h_{(1)}).a_1\otimes\dots\otimes S(h_{(n)}).a_n)\\
&= (h.\gamma_{\mathrm{End}_A}(f;g_1,\dots,g_k))(a_1\otimes\dots\otimes a_n)
\end{aligned}$$

We leave it to the reader to check that η_{End_A} is H-equivariant in the same way.

□

Recall that the *Hadamard product* $M \underset{H}{\otimes} N$ of two $\mathbb{S}$-modules M and N is defined to be the following $\mathbb{S}$-module

$$M \underset{\mathrm{H}}{\otimes} N(n) := M(n)\otimes N(n)\ .$$

This carries an internal-hom functor.

Proposition 2.1.12. *The Hadamard product of the underlying $\mathbb{S}$-modules of two H-operads, endowed with the H-module structure on the tensor product of two $\mathbb{S}$-H-modules, is an H-operad.*

Proof. Let $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ be two H-operads. By [LV12, Section 5.3.3], we have to prove that the composition map given there is H-equivariant. It is the case since it is the composite of H-equivariant maps.

□

Definition 2.1.13. An *ideal* $\mathcal{I}$ of an H-operad $\mathcal{P}$ is a sub-$\mathbb{S}$-H-module of $\mathcal{P}$ such that the composition $\gamma_{\mathcal{P}}(\mu;\nu_1,\dots,\nu_k)$ is in $\mathcal{I}$ as soon as one of the $\mu,\nu_1,\dots,\nu_k$ is in $\mathcal{I}$. The *quotient of an H-operad $\mathcal{P}$ by the ideal $\mathcal{I}$* is the H-operad $\mathcal{P}/\mathcal{I}$ given by

$$(\mathcal{P}/\mathcal{I})(n) := \mathcal{P}(n)/\mathcal{I}(n)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

where the composition map $\gamma_{\mathcal{P}/\mathcal{I}}$ is induced by $\gamma_{\mathcal{P}}$.

The free H-operad

Definition 2.1.14. A *free H-operad* over the $\mathbb{S}$-H-module M is an H-operad $\mathcal{F}M$ equipped with a morphism $\eta_M : M\to\mathcal{F}M$ of $\mathbb{S}$-H-modules, which satisfies the following universal property.

Any morphism $f : M\to\mathcal{P}$ of $\mathbb{S}$-H-modules, where $\mathcal{P}$ is an H-operad, extends uniquely into a morphism $\tilde{f} : \mathcal{F}M\to\mathcal{P}$ of H-operads

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}M \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
 & \mathcal{P}
\end{tikzcd} .$$

Notice that the functor $\mathcal{F} : \mathbb{S}$-H-Mod $\to \mathsf{Op}_H$ is left adjoint to the forgetful functor $\sqcup$ from Op_H to $\mathbb{S}$-H-Mod .

Recall that the free operad $\mathcal{T}M$ over an $\mathbb{S}$-module M is given by

$$(\mathcal{T}M)(n) \cong \bigoplus_{\tau \in T'(n)} \tau(M) \ ,$$

where $T'(n)$ denotes a set of representatives of isomorphisms classes of n-trees. For any tree τ, the treewise tensor module $\tau(M)$, defined in Section 2.6 of [Hof10], is given by

$$\tau(M) \cong \bigotimes_{v \in V(\tau)} M(|I_v|) \ ,$$

where $V(\tau)$ denotes the set of vertices of τ and where I_v denotes the set of entries of the vertex v. Then, if M is an $\mathbb{S}$-H-module, we have an H-module structure on the treewise tensor module $\tau(M)$, for any tree τ in $T'(n)$. This action is given by the following map :

$$\begin{array}{ccc} H \otimes \tau(M) & \to & \tau(M) \\ h \otimes m_{i_1} \dots m_{i_{|V(\tau)|}} & \mapsto & h_{(0)}.m_{i_1} \dots h_{(|V(\tau)|-1)}.m_{i_{|V(\tau)|}} \ , \end{array}$$

where $\Delta^{|V(\tau)|-1}(h) := h_{(0)} \otimes \dots \otimes h_{(|V(\tau)|-1)}$. It amounts to act on the labeling of each vertex of τ using the coproduct of H.

Proposition 2.1.15. *Let M be an $\mathbb{S}$-H-module and $\underline{M}$ be its underlying $\mathbb{S}$-module. The free operad $\mathcal{T}\underline{M}$ endowed with the H-action described above is the free H-operad over M.*

Proof. The composition map $\gamma_{\mathcal{T}\underline{M}}$, which corresponds to the grafting of trees, is an H-equivariant map. Moreover, if a morphism $f : M \to \mathcal{P}$ of $\mathbb{S}$-modules is H-equivariant then so is $\widetilde{f} : \mathcal{T}\underline{M} \to \mathcal{P}$.

□

Proposition 2.1.16. *Let M be an $\mathbb{S}$-module and R be a sub-$\mathbb{S}$-module of $\mathcal{T}M$. Then, the operad $\mathcal{T}M/(R)$, where (R) is the ideal of $\mathcal{T}M$ generated by R, is an H-operad if and only if*
- *M is an $\mathbb{S}$-H-module*
- *R is a sub-$\mathbb{S}$-H-module of $\mathcal{T}M$.*

In this case, the H-module structure is induced by the action on each vertex using the coproduct of H.

Proof. Proposition 4.2 of [SW03] extends to our linear context.

□

Algebra over an H-operad

Definition 2.1.17. Let $\mathcal{P}$ be an H-operad. An *algebra over* $\mathcal{P}$, or for short an H-$\mathcal{P}$-algebra, is an H-module A equipped with an H-equivariant map $\gamma_A : \mathcal{P}(A) \to A$, which is compatible with the monoidal structure of $\mathcal{P}$. A *morphism* $f : A \to A'$ *of H-$\mathcal{P}$-algebras* is a morphism of H-modules which commutes with $\gamma_{\mathcal{P}}$. We denote by H-$\mathcal{P}$-Alg the category of H-$\mathcal{P}$-algebras.

If A is an H-$\mathcal{P}$-algebra, then the map γ_A is

$$\gamma_A : \mathcal{P}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} A^{\otimes n} \to A.$$

For $\mu \in \mathcal{P}(n)$ and $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$, we denote $\gamma_A(\mu; a_1, \dots, a_n)$ simply by $\mu(a_1, \dots, a_n)$.

Proposition 2.1.18. *Let $\mathcal{P}$ be an H-operad. An H-$\mathcal{P}$-algebra structure on an H-module A is equivalent to a morphism of H-operads $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$.*

Proof. By Proposition 5.2.10 of [LV12], it remains to prove that $\gamma_A : \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} A^{\otimes n} \to A$ is H-equivariant if and only if $\alpha : \mathcal{P}(n) \to \mathrm{End}_A(n)$ is H-equivariant. This follows from the closed structure of the category H-Mod .

□

Proposition 2.1.19 ([SW03]). *Let $\mathcal{P}$ be a graded H-operad. There exists a graded operad, the semi-direct product $\mathcal{P} \rtimes H$, such that the category of H-$\mathcal{P}$-algebras, that is H-modules with an action of the H-operad $\mathcal{P}$, is isomorphic to the category of $\mathcal{P} \rtimes H$-algebras, that is modules with an action of the operad $\mathcal{P} \rtimes H$.*

The operad $\mathcal{P} \rtimes H$ given by the $\mathbb{S}$-module defined by

$$\mathcal{P} \rtimes H(n) := \mathcal{P}(n) \otimes H^{\otimes n} \ ,$$

together with the composition map defined by

$$\gamma_{\mathcal{P}\rtimes H}((\mu \otimes \mathsf{h}); (\nu_1 \otimes \mathsf{g}_1), \ldots, (n_k \otimes \mathsf{g}_k)) := \gamma_{\mathcal{P}}(\mu; h^1 \cdot \nu_1, \ldots, h^k \cdot \nu_k) \otimes h^1 \cdot \mathsf{g}_1 \otimes \cdots \otimes h^k \cdot \mathsf{g}_k \ ,$$

where $\mathsf{h} = h^1 \otimes \cdots \otimes h^k$, $\mathsf{g}_i = g_i^1 \otimes \cdots \otimes g_i^{n_i}$ and where h^i acts on g_i via the coproduct of H. The unit of $\mathcal{P} \rtimes H$ is given by $\mathrm{id} \otimes 1_H$.

Cooperads

Definition 2.1.20. An *H-cooperad* is a comonoid $(\mathcal{C}, \Delta, \eta)$ in the monoidal category of $\mathbb{S}$-H-modules. A morphism of H-cooperads $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is a morphism of the underlying $\mathbb{S}$-H-modules compatible with the comonoidal structure of $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$. We denote by Coop_H the category of H-cooperads. There is an element $\mathrm{id} \in \mathcal{C}(1)$ such that $\eta(\mathrm{id}) = 1_{\mathbb{K}}$ and which is called the *identity cooperation*.
An H-cooperad $\mathcal{C}$ is said to be *coaugmented* if there is a morphism $\upsilon : I \to \mathcal{C}$ of H-cooperads such that $\eta\upsilon = Id_I$.

The notion of H-cooperad is dual to the one of H-operad. From the explicit description of the composite product of two $\mathbb{S}$-H-modules and the isomorphism between invariants and coinvariants, it follows that Δ is made up of H-$\mathbb{S}_n$-bimodules morphisms

$$\Delta(n) : \mathcal{C}(n) \to (\mathcal{C} \circ \mathcal{C})(n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{C}(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} \mathcal{C}(i_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{C}(i_k) \right) \ .$$

Proposition 2.1.21. *The Hadamard product of two H-cooperads carries an H-cooperad structure.*

Proof. Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be two H-cooperads. By Section 8.3.3 of [LV12], it remains to prove that the decomposition map given there is H-equivariant. It is the case since this decomposition map is the composite of $\Delta_{\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{D}}$ with maps of the type $\mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \tau \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id}$, which are both H-equivariant.

□

Definition 2.1.22. Let M be an $\mathbb{S}$-H-module such that $M(0) = 0$. The *cofree H-cooperad on M* is the H-cooperad, denoted by $\mathcal{T}^c(M)$, which is cofree in the category of conilpotent H-cooperads. It means that $\mathcal{T}^c(M)$ satisfies the following universal property :

For any morphism of $\mathbb{S}$-H-modules $\Phi : \mathcal{C} \to M$, from a conilpotent H-cooperad $\mathcal{C}$, such that $\Phi(\mathrm{id}) = 0$, there exists a unique morphism $\widetilde{\Phi} : \mathcal{C} \to \mathcal{T}^c(M)$ of H-cooperads whose corestriction to M is equal to Φ

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\widetilde{\Phi}"'] & M \\ & \mathcal{T}^c(M) \arrow[u, two heads] \end{tikzcd} .$$

From operads to cooperads and vice-versa

In the classical case, the aritywise linear dual $\mathbb{S}$-module $\mathcal{C}^* = \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(n), \mathbb{K})\}_{n\in\mathbb{N}}$ associated to a cooperad $\mathcal{C}$ carries an operad structure. The unit is obtained by dualization of the counit $\eta_{\mathcal{C}}$ and the composition map is obtained by dualization of $\Delta_{\mathcal{C}}$ composed with the natural map from invariants to coinvariants given in Section 5.1.21 of [LV12]. Since H is an Hopf algebra, if $\mathcal{C}$ is moreover an H-cooperad then its aritywise dual has an H-operad structure. Equally, if $\mathcal{P}$ is an H-operad, such that each $\mathcal{P}(n)$ is finite dimensional, then its linear dual has an H-cooperad structure.

2.1.3 Differential graded framework

As for operads, the notion of H-operad extends to the differential graded framework. In particular, a *differential graded H-operad* is a monoid $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}}, \gamma, \eta)$ in the monoidal category ($\mathsf{dg}\ \mathbb{S}$-H-Mod, $\circ, I$), that is $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ is a dg $\mathbb{S}$-H-module and $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ is an H-operad structure on $\mathcal{P}$, such that γ and η are morphisms of dg $\mathbb{S}$-H-modules. Moreover, the results on dg operads of [LV12, Section 6.3] can be extended to dg H-operads. Let us recall that we denote by $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}^{-1}$) the endomorphism H-operad associated to the graded $\mathbb{S}$-H-module $\mathbb{K}s$ (resp. $\mathbb{K}s^{-1}$), see Lemma 2.1.11.

2.1.4 Examples

Mixed chain complexes and multicomplexes

A *mixed chain complex* is a graded vector space $V = V_\bullet$ endowed with two maps : a degree -1 map d and a degree $+1$ map δ, which both square to zero and anti-commute. One can see any mixed chain complex either as a dg D-algebra, or as a dg D-I-algebra, where I is the identity D-operad.

Remark. A dg D-operad (resp. dg D-cooperad) is a dg operad (resp. dg cooperad) with an extra derivation (resp. coderivation) of the degree $+1$ given by the action of δ.

The Batalin-Vilkovisky operad

Definition. A *Gerstenhaber algebra* is a differential graded vector space (A, d_A) endowed with

◇ a symmetric binary product $\bullet$ of degree 0,

◇ a symmetric bracket $\langle\,;\rangle$ of degree $+1$,

such that d_A is a derivation with respect to each of them and such that

▷ the product $\bullet$ is associative

$$((\text{-} \bullet \text{-}) \bullet \text{-}) = (\text{-} \bullet (\text{-} \bullet \text{-}))\ ,$$

▷ the bracket $\langle\,;\rangle$ satisfies the Jacobi identity

$$\langle\langle\text{-}\,;\text{-}\rangle;\text{-}\rangle + \langle\langle\text{-}\,;\text{-}\rangle;\text{-}\rangle \cdot (123) + \langle\langle\text{-}\,;\text{-}\rangle;\text{-}\rangle \cdot (321) = 0\ ,$$

▷ the product $\bullet$ and the bracket $\langle\ ;\ \rangle$ satisfy the Leibniz relation

$$\langle\text{-}\,;\text{-} \bullet \text{-}\rangle = (\langle\text{-}\,;\text{-}\rangle \bullet \text{-}) + (\text{-} \bullet \langle\text{-}\,;\text{-}\rangle) \cdot (12)\ .$$

A *Batalin-Vilkovisky algebra*, or *BV-algebra* for short, is a Gerstenhaber algebra A endowed, in addition, with

◇ a unary operator Δ of degree $+1$,

such that d_A is a derivation with respect to Δ and such that

► the operator satisfies $\Delta^2 = 0$,

► the bracket is the obstruction of Δ being a derivation with respect to the product $\bullet$

$$\langle\text{-}\,;\text{-}\rangle = \Delta \circ (\text{-} \bullet \text{-}) - (\Delta(\text{-}) \bullet \text{-}) - (\text{-} \bullet \Delta(\text{-}))\ ,$$

▶ the operator Δ is a graded derivation with respect to the bracket $\langle\, ; \rangle$

$$\Delta \circ (\langle \text{-}\, ; \text{-} \rangle) + \langle \Delta(\text{-}) ; \text{-} \rangle + \langle \text{-}\, ; \Delta(\text{-}) \rangle = 0 \ .$$

Let $\mathcal{G}$ be the operad encoding Gerstenhaber algebras. It is defined by generators and relations as follows

$$\mathcal{G} := \mathcal{T}(E)/(R) \ ,$$

where $E = E(2) := \bullet\mathbb{K}_2 \oplus \langle\, ; \rangle \mathbb{K}_2$, with $\mathbb{K}_2$ the trivial representation of the symmetric group $\mathbb{S}_2$. The space of relations R is the sub-$\mathbb{S}$-module of $\mathcal{T}(E)$ generated by the relations $\triangleright$. The operad $\mathcal{BV}$, encoding BV-algebras, is then given by

$$\mathcal{T}(E')/(R') \ ,$$

where $E' := E \oplus \Delta\mathbb{K}$ and where R' is the sub-$\mathbb{S}$-module of $\mathcal{T}(E')$ generated by the relations $\triangleright$ and ▶.

Lemma 2.1.23. *The action of D on the generators $\bullet$ and $\langle\, ; \rangle$ of $\mathcal{G}$ given by*

$$\delta : \begin{array}{ccc} \bullet & \mapsto & \langle\, ; \rangle \\ \langle\, ; \rangle & \mapsto & 0 \end{array}$$

induces a D-operad structure on $\mathcal{G}$.

Proof. Using Proposition 2.1.16, we just check that E is an $\mathbb{S}$-D-module and that R is a sub-$\mathbb{S}$-D-module of $\mathcal{T}(E)$.

□

Remark. The δ-action on the generators of $\mathcal{G}$ corresponds to the effect in homology of the action of the circle group S^1 on the little discs operad given in [Get94b, Section 4]. This structure induced in homology is made explicit in [SW03, Section 5].

As a consequence of [Mar96, Theorem 2.7, Example 4.4], we have $\mathcal{G} \cong \mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie_1$ as operads. This isomorphism gives us a way to make explicit the D-operad structure on $\mathcal{G}$. We denote by $\odot$ the commutative tensor product, that is the quotient of the tensor product under the permutation of terms. In particular, a generic element of $\mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie_1$ is of the form $L_1 \odot \cdots \odot L_t$, with $L_i \in \mathcal{L}ie_1$, for $i = 1, \ldots, t$; the elements of $\mathcal{C}om$ being implicit.

Proposition 2.1.24. *Under the isomorphism of operads $\mathcal{G} \cong \mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie_1$, the structure of D-operad on the right-hand side is given by*

$$\delta \cdot (L_1 \odot \cdots \odot L_t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{\varepsilon_{i,j}} \langle L_i ; L_j \rangle \odot L_1 \odot \cdots \odot \hat{L}_i \odot \cdots \odot \hat{L}_j \odot \cdots \odot L_t \ ,$$

where $\langle L_i ; L_j \rangle := \gamma_{\mathcal{L}ie_1}(\langle\, ; \rangle ; L_i, L_j)$ and where the sign $\varepsilon_{i,j}$, arising from the Koszul sign rule, is given by

$$\varepsilon_{i,j} = (|L_i| + |L_j|)(|L_1| + \cdots + |L_{i-1}|) + |L_j|(|L_{i+1}| + \cdots + |L_{j-1}|) \ .$$

Proof. By induction on $n \geq 2$.

□

Remark. The action of δ on an element $L_1 \odot \cdots \odot L_t$ in $\mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie_1$ is exactly the image of $\delta^* \otimes L_1 \odot \cdots \odot L_t$ under the derivation ${}^t d_\varphi$, which is given in [GTV09, Proof of Lemma 5]. In particular, δ acts as the Chevalley-Eilenberg boundary map defining the homology of Lie algebras.

Proposition 2.1.25. *The category of D-$\mathcal{G}$-algebras is isomorphic to the category of $\mathcal{BV}$-algebras.*

PROOF. It is a straightforward consequence of Proposition 2.1.19 conjugated with the following isomorphism of operads proved by Salvatore and Wahl in [SW03] :

$$\mathcal{BV} \cong \mathcal{G} \rtimes D \ .$$

□

Therefore, the algebraic structure of a Batalin-Vilkovisky algebra can be encoded into two different ways, using the operad $\mathcal{BV}$ or the D-operad $\mathcal{G}$. When using the graded D-operad $\mathcal{G}$, the unary operator Δ is provided by the underlying category of mixed chain complexes and its relations with the product and the Lie bracket are encoded in the action of δ on those generating operations.

The homology of the (framed) little n-discs operad

This section generalizes the previous one in higher dimension, in the sense that the operads $\mathcal{G}$ and $\mathcal{BV}$ are respectively the homology of the little 2-discs operad $\mathcal{D}_2$ and the homology of the framed little 2-discs operad $f\mathcal{D}_2$. Let first recall the definition of these operads.

The little n-discs operad $\mathcal{D}_n$ was defined by Boardman and Vogt in [BV73]. The space $\mathcal{D}_n(k)$ is defined to be the space of embeddings of k copies of the unit n-disc into itself, which restriction to each disc is the composition of a translation and a positive dilatation, and such that the images of the discs are disjoint.

The framed little n-discs operad $f\mathcal{D}_n$, first introduced by Getzler in [Get94a], is defined similarly but the embeddings include moreover rotations of the disc. It is equivalent to give a frame on each one of the discs.

We defined the operad e_n (resp. fe_n) to be the homology of the topological operad $\mathcal{D}_n$ (resp. $f\mathcal{D}_n$). In [SW03, Section 5], the authors prove that e_n is a $H(SO(n))$-operad, the action being explicitly given there, and

$$fe_n \cong e_n \rtimes H(SO(n)) \ .$$

As a consequence, there are two ways to encode the structure of a fe_n-algebra : with the operad fe_n or with the $H(SO(n))$-operad e_n. In the first case, the action of the Hopf algebra $H(SO(n))$ is encoded in the operad itself whereas, in the second case, it is entirely given by the underlying category. But, we can choose to put only a part of the action of $H(SO(n))$ in the underlying category.

Thanks to the study of e_n-algebras done in [CLM76, Theorem 1.2], we can give a presentation of e_n by generators and relations as follows :

$$e_n := \mathcal{T}(E_n)/(R_n) \ ,$$

where $E_n := \bullet\, \mathbb{K}_2 \oplus \langle\, ; \rangle \mathbb{K}_2$, with $\bullet$ a product of degree 0, $\langle\, ; \rangle$ a bracket of degree $n-1$, and where R_n is the sub-$\mathbb{S}$-module of $\mathcal{T}(E_n)$ generated by the aforementioned relations $\rhd$, considering that the bracket has a shift of degree.

In [SW03, Theorem 5.4], Salvotore and Wahl give an explicit description of the fe_n-algebra structure, which leads to a presentation of fe_n by generators and relations (we investigate here only the case of n even) :

$$fe_n := \mathcal{T}(E'_n)/(R'_n) \ ,$$

where

$$E'_n = E'_{2k} := E_n \oplus \mathbb{K}\Delta \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{K}\beta_i \ ,$$

with Δ a unary operator of degree $n-1$, β_i's unary operators of degree $4i-1$, and where R'_n is the sub-$\mathbb{S}$-module of $\mathcal{T}(E'_n)$ spanned by the aforementioned module R_n and the three following spaces

$$T'_n := \langle \beta_i(\text{-} \bullet \text{-}) - (\beta_i(\text{-}) \bullet \text{-}) - (\text{-} \bullet \beta_i(\text{-}))\ ,\ \beta_i\langle \text{-};\text{-}\rangle + \langle \beta_i(\text{-});\text{-}\rangle + \langle \text{-};\beta_i(\text{-})\rangle \rangle_{1\le i\le k-1} \ ;$$

$$T''_n := \langle\ \beta_i^2\ ,\ \beta_i\beta_j + \beta_j\beta_i\ \rangle_{1\leq i\neq j\leq k-1}\ ;$$

and

$$T'''_n := \left\langle \begin{array}{c} \Delta^2\ ,\ \Delta\beta_i + \beta_i\Delta\ ,\ \Delta(\langle\text{-}\,;\text{-}\rangle) + \langle\Delta(\text{-});\text{-}\rangle + \langle\text{-}\,;\Delta(\text{-})\rangle, \\ \langle\text{-}\,;\text{-}\rangle - [\Delta(\text{-}\bullet\text{-}) - (\Delta(\text{-})\bullet\text{-}) - (\text{-}\bullet\Delta(\text{-}))] \end{array} \right\rangle_{1\leq i\leq k-1}\ .$$

In particular, the β_i's are all derivations with respect to both the product and the bracket. Like in the BV-algebra case, we can encode the action of Δ in the underlying category as follows. Let D_n denotes the Hopf algebra $D_n := \mathbb{K}[\delta_n]/(\delta_n^2)$, where δ_n is of degree $n-1$, and $\mathcal{P}_n$ denotes the operad

$$\mathcal{P}_n := \mathcal{T}(E''_n)/(R_n \oplus T'_n \oplus T''_n)\ ,$$

where

$$E''_n := E_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{K}\beta_i\ .$$

Lemma 2.1.26. *The action of D_n on the generators $\bullet$, $\langle\,;\,\rangle$ and $\{\beta_i\}_{1\leq i\leq k-1}$ of $\mathcal{P}_n$ given by*

$$\begin{array}{rccc} \delta_n: & \bullet & \mapsto & \langle\,;\,\rangle \\ & \langle\,;\,\rangle & \mapsto & 0 \\ & \beta_i & \mapsto & 0 \end{array}$$

induces a D_n-operad structure on $\mathcal{P}_n$.

Proof. By Proposition 2.1.16, we just check that E'_n is a $\mathbb{S}$-D_n-module and that R'_n is a sub-$\mathbb{S}$-D_n-module of $\mathcal{T}(E'_n)$.

□

Proposition 2.1.27. *We have the following isomorphism of operads :*

$$fe_n \cong \mathcal{P}_n \rtimes D_n\ .$$

In particular, the category of D_n-$\mathcal{P}_n$-algebras is isomorphic to the category of fe_n-algebras.

But when dealing with fe_n-algebras, we can also choose to encode the action of a subset S of the β_i's in the underlying category by considering fe_n as a trivial D^S-operad, where D^S denotes the Hopf algebra $\mathbb{K}[\beta_i, i\in S]/(\beta_i^2, i\in S)$.

Consider the operad

$$\mathcal{P}_n^S := \mathcal{T}(\widehat{E}_n)/(R_n \oplus \widehat{T}'_n \oplus \widehat{T}''_n \oplus \widehat{T}'''_n)\ ,$$

where

$$\widehat{E}_n^S := E_n \oplus \mathbb{K}\Delta \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\notin S}}^{k-1} \mathbb{K}\beta_i\ ,$$

and where $\widehat{T}'_n$, $\widehat{T}''_n$ and $\widehat{T}'''_n$ are respectively defined in the same way as T'_n, T''_n and T'''_n but for i not in S.

Lemma 2.1.28. *The action of D^S given by the projection on 0 endows $\mathcal{P}_n^S$ with a D^S-operad structure.*

Proposition 2.1.29. *We have the following isomorphism of operads :*

$$fe_n \cong \mathcal{P}_n^S \rtimes D^S\ .$$

In particular, the category of D^S-$\mathcal{P}_n^S$-algebras is isomorphic to the category of fe_n-algebras.

2.2 Relative Koszul duality theory

Let $(\mathcal{P}, \gamma, \eta, d_{\mathcal{P}})$ be a dg operad and $(\mathcal{C}, \Delta, \eta, d_{\mathcal{C}})$ be a dg cooperad.

2.2.1 Twisting morphisms

We consider the following dg $\mathbb{S}$-H-module

$$(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) := \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(n), \mathcal{P}(n))\}_{n\geq 0}, \partial) ,$$

where $\mathbb{S}_n$ acts by conjugation and where $\partial(f) = [d_{\mathcal{P}}, f] := d_{\mathcal{P}} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_{\mathcal{C}}$.

Proposition 2.2.1. *The dg* $\mathbb{S}$-H*-module* $(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), \partial)$ *is a dg* H*-operad, called the* convolution H-operad*.*

Proof. According to [BM03, Section 1], there is a composition map $\gamma_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{P})}$ which makes $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ into an operad, see [LV12, Section 6.4.1] for more details. We just check that ∂ is a derivation and that $\gamma_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{P})}$ and ∂ are H-equivariant maps.

□

Recall that the following composite defines a *pre-Lie product* on $\prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P})(n)$

$$f \star g := \mathcal{C} \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C} \xrightarrow{f \circ_{(1)} g} \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \xrightarrow{\gamma_{(1)}} \mathcal{P} \ .$$

We denote by $\mathrm{Hom}_{H\text{-}\mathbb{S}_n}(\mathcal{C}(n), \mathcal{P}(n))$ the space of H-$\mathbb{S}_n$-bimodules morphisms from $\mathcal{C}(n)$ to $\mathcal{P}(n)$ and we denote the associated product of $\mathbb{S}$-H-equivariant maps by

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\text{-}H}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) := \prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{H\text{-}\mathbb{S}_n}(\mathcal{C}(n), \mathcal{P}(n)) \ .$$

Proposition 2.2.2. *The space* $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\text{-}H}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), \star, \partial)$ *is a dg pre-Lie algebra. The associated Lie bracket induces a dg Lie algebra structure* $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\text{-}H}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), [\ ,\ ], \partial)$.

Proof. By Proposition 6.4.5 and Lemma 6.4.6 of [LV12], it only remains to prove that if f and g are in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\text{-}H}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ then so is $f \star g$. It is the case since the pre-Lie product $\star$ is defined to be the composite of H-equivariant maps.

□

We consider the *Maurer-Cartan equation* in the dg-pre-Lie algebra $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\text{-}H}(\mathcal{C}, \mathcal{P}), \star, \partial)$

$$\partial(\alpha) + \alpha \star \alpha = 0 \ .$$

Definition 2.2.3. A solution $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ of degree -1 to the Maurer-Cartan equation is called a *twisting* H*-morphism.* We denote by $\mathrm{Tw}_H(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ the space of twisting H-morphisms from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{P}$. When $\mathcal{C}$ is a coaugmented dg cooperad and $\mathcal{P}$ is an augmented dg operad, we require that the composition of a twisting morphism with respectively the coaugmentation map or the augmentation map vanishes.

2.2.2 Bar and cobar constructions

Are the two functors $\mathrm{Tw}_H(\mathcal{C},-)$ and $\mathrm{Tw}_H(-,\mathcal{P})$ representable ?

Recall from [LV12, Section 6.5], that the *bar construction* of an augmented dg operad $\mathcal{P}$ is the dg conilpotent cooperad

$$\mathrm{B}\mathcal{P} := (\mathcal{T}^c(s\overline{\mathcal{P}}), d_{\mathrm{B}\mathcal{P}}) \ ,$$

and that the *cobar construction* of a coaugmented dg cooperad $\mathcal{C}$ is the dg augmented operad

$$\Omega\mathcal{C} := (\mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}), d_{\Omega\mathcal{C}}) \ .$$

Proposition 2.2.4. *Let $\mathcal{P}$ be an H-operad and $\mathcal{C}$ be an H-cooperad. Then, the H-module structure of the free operad over an $\mathbb{S}$-H-module makes $\mathrm{B}\mathcal{P}$ and $\Omega\mathcal{C}$ into a dg H-cooperad and a dg H-operad respectively.*

Proof. By Proposition 2.1.15, the free operad $\mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})$ is an H-operad. The differential $d_{\Omega\mathcal{C}}$ is equal to the sum $d_1 + d_2$, where d_1 is the unique derivation which extends

$$\varphi : \ s^{-1}\overline{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes d_{\mathcal{C}}} \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}) \ \ ,$$

and where d_2 is the unique derivation which extends

$$\psi : \ (\mathbb{K}s^{-1}\otimes\overline{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\Delta_s\otimes\Delta_{(1)}} (\mathbb{K}s^{-1}\otimes\mathbb{K}s^{-1})\otimes(\overline{\mathcal{C}}\circ_{(1)}\overline{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id}}$$
$$(\mathbb{K}s^{-1}\otimes\overline{\mathcal{C}})\circ_{(1)}(\mathbb{K}s^{-1}\otimes\overline{\mathcal{C}}) \cong \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})^{(2)} \rightarrowtail \mathcal{T}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}) \ .$$

The Proposition 6.3.15 of [LV12] extends to graded $\mathbb{S}$-H-modules. Indeed, if E is an $\mathbb{S}$-H-module and $\alpha : E \to \mathcal{T}(E)$ is a morphism of $\mathbb{S}$-H-modules, the unique derivation which extends α is a composite of H-equivariant maps. Thus, since φ and ψ are morphisms of $\mathbb{S}$-H-modules, the derivations d_1 and d_2, and hence $d_{\Omega\mathcal{C}}$, are H-equivariant maps.
In the same way, we prove that $\mathrm{B}\mathcal{P}$ is a dg H-cooperad.

□

Proposition 2.2.5. *The bar and cobar constructions form a pair of adjoint functors*

$$\Omega : \{\ \textit{conil. dg } H\textit{-cooperads}\ \} \rightleftharpoons \{\ \textit{aug. dg } H\textit{-operads}\ \} : \mathrm{B} \ ,$$

such that the adjunction is given by the set of twisting H-morphisms, that is for every augmented dg H-operad $\mathcal{P}$ and every conilpotent dg H-cooperad $\mathcal{C}$, there exist natural isomorphisms

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{dg\ Op}_H}(\Omega\mathcal{C},\mathcal{P}) \cong \mathrm{Tw}_H(\mathcal{C},\mathcal{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{dg\ Coop}_H}(\mathcal{C},\mathrm{B}\mathcal{P}) \ .$$

Proof. It is a consequence of [LV12, Theorem 6.5.10] and of the definitions of the free H-operad and the cofree H-cooperad over an $\mathbb{S}$-H-module.

□

We denote by $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \Omega\mathcal{C}$ and $\pi_{\mathcal{P}} : \mathrm{B}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ the twisting H-morphisms corresponding respectively to the unit $\upsilon : \mathcal{C} \to \mathrm{B}\Omega\mathcal{C}$ and to the counit $\epsilon : \Omega\mathrm{B}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ of the adjunction.

Proposition 2.2.6. *Any twisting H-morphism $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ factorizes uniquely through the universal twisting morphisms $\pi_{\mathcal{P}}$ and $\eta_{\mathcal{C}}$ as follows*

$$\begin{tikzcd} & \Omega\mathcal{C} \arrow[dr, dashed, "g_\alpha"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\eta_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "f_\alpha"'] & & \mathcal{P} \ , \\ & \mathrm{B}\mathcal{P} \arrow[ur, "\pi_{\mathcal{P}}"'] & \end{tikzcd}$$

where g_α is a morphism of dg H-operads and f_α is a morphism of dg H-cooperads.

Proof. It is a consequence of the adjunction given in Proposition 2.2.5.

□

When dealing with operads in the monoidal category of dg $\mathbb{S}$-modules, a twisting morphism α in $\mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ is called *Koszul* when a certain chain complex, called the *Koszul complex*, is acyclic, see Section 0.2.6. So, the property for a twisting morphism to be Koszul is a homological property and only depends on the differential structures of $\mathcal{C}$ and $\mathcal{P}$.

Definition 2.2.7. A twisting H-morphism $\alpha \in \mathrm{Tw}_H(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ is said to be *Koszul* when, seen as a morphism of dg $\mathbb{S}$-modules, it is a Koszul morphism.

By the same argument, Theorem 6.6.2 of [LV12] extends to H-operads to give the following result.

Theorem 2.2.8. *Let $\mathcal{P}$ be a connected weight graded dg H-operad and let $\mathcal{C}$ be a connected weight graded dg H-cooperad. Let $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ be a twisting H-morphism. The following assertions are equivalent :*

(a) *α is Koszul,*

(b) *the morphism of dg H-cooperads $f_\alpha : \mathcal{C} \to \mathrm{B}\mathcal{P}$ is a quasi-isomorphism,*

(c) *the morphism of dg H-operads $g_\alpha : \Omega\mathcal{C} \to \mathcal{P}$ is a quasi-isomorphism.*

Theorem 2.2.9. *The counit $\upsilon : \Omega\mathrm{B}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ and the unit $\epsilon : \mathcal{C} \to \mathrm{B}\Omega\mathcal{C}$ of the adjunction are H-quasi-isomorphisms of dg H-operads and dg H-cooperads respectively.*

The resolution $\Omega\mathrm{B}\mathcal{P}$ is called the *bar-cobar resolution* of $\mathcal{P}$.

2.2.3 Koszul duality of H-operads

Definition 2.2.10. A *quadratic data* is a pair (E, R) made up of a graded $\mathbb{S}$-H-module E and a graded sub-$\mathbb{S}$-H-module R of $\mathcal{T}(E)^{(2)}$ called respectively the *generating operations* and the *relations*, see Section 0.3.1.
The *quadratic H-operad* $\mathcal{P}(E, R)$ associated to a quadratic data (E, R) is the quotient H-operad of $\mathcal{T}(E)$, which satisfies the following universal property :

For any H-operad $\mathcal{P}$ of $\mathcal{T}(E)$ such that the following composite of morphisms of $\mathbb{S}$-H-modules is trivial

$$R \rightarrowtail \mathcal{T}(E) \twoheadrightarrow \mathcal{P}\ ,$$

there exists a unique morphism of H-operads which makes the following diagram commutative

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail] & \mathcal{T}(E) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{P} \\ & & \mathcal{P}(E,R)\ . \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dually, we define the *quadratic H-cooperad* $\mathcal{C}(E, R)$ associated to a quadratic data (E, R).

Proposition 2.2.11. *Let (E, R) be a quadratic data. The quadratic H-operad (resp. H-cooperad) associated to (E, R) is given by the quadratic operad (resp. cooperad) associated to (E, R) in the category of $\mathbb{S}$-modules, endowed with the H-module structure induced by the one on the $\mathbb{S}$-H-module $\mathcal{T}(E)$.*

Proof. We only prove this result for the quadratic H-operad. In the category of operads, $\mathcal{P}(E, R)$ is given by the quotient $\mathcal{T}(E)/(R)$ of the free operad on E by the ideal generated by R. By Proposition 2.1.16, $\mathcal{T}(E)/(R)$ is an H-operad and, by assumptions on R and on $\mathcal{P}$, the morphism of operads $\mathcal{P}(E, R) \to \mathcal{P}$ turns out to be an H-equivariant map.

□

At this point, we can extend the definition of the Koszul dual (co)operad, given in [LV12, Section 7.2], to the category of $\mathbb{S}$-H-modules. In the classical case, recall that the *Koszul dual cooperad* of quadratic operad $\mathcal{P}$ is defined by the following cooperad

$$\mathcal{P}^{¡} := \mathcal{C}(sE, s^2R) \ ,$$

and the *Koszul dual operad* of $\mathcal{P}$ by the following operad

$$\mathcal{P}^! := (\mathcal{S}^c \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathcal{P}^{¡})^* \ .$$

Proposition 2.2.12. *If $\mathcal{P}$ is a quadratic H-operad, then the Koszul dual cooperad (resp. operad) of $\mathcal{P}$ is an H-cooperad (resp. H-operad).*

PROOF. By definition, $\mathcal{P}^{¡}$ is an H-cooperad. Since $\Delta_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}s}}$ is H-equivariant, the H-operad structure on $\mathcal{P}^!$ follows from Proposition 2.1.21 and Section 2.1.2.

□

Proposition 2.2.13. *Let (E, R) be a quadratic data such that E is a finite dimensional $\mathbb{S}$-H-module. The Koszul dual operad $\mathcal{P}^!$ of the quadratic operad $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ admits the following quadratic presentation :*

$$\mathcal{P}^! \cong \mathcal{P}(s^{-1}\mathcal{S}^{-1} \underset{H}{\otimes} E^*, R^{\perp}) \ ,$$

where $R^{\perp}$ denotes the sub-$\mathbb{S}$-H-module obtained by proper suspension of the operations indexing the vertices of the trees of the orthogonal module $(s^2R)^{\perp} \subset \mathcal{T}(s^{-1}E^*)^{(2)}$, which is the image of $(s^2R)^*$ under the isomorphism $(\mathcal{T}(E)^{(2)})^* \cong \mathcal{T}(s^{-1}E^*)^{(2)}$.

PROOF. By [LV12, Proposition 7.2.4], this result is true in the category of operads. It is left to prove that the isomorphism is an H-equivariant map : the restriction of this isomorphism to the space of generators $s^{-1}\mathcal{S}^{-1} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} E^*$ is H-equivariant then so is the isomorphism.

□

Proposition 2.2.14. *Let (E, R) be a quadratic data and $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ be its associated quadratic H-operad. The natural H-cooperad inclusion $i : \mathcal{P}^{¡} \hookrightarrow \mathrm{B}\mathcal{P}$ induces an isomorphism of graded H-operads*

$$i : \mathcal{P}^{¡} \xrightarrow{\cong} H^0(\mathrm{B}^{\bullet}\mathcal{P}) \ ,$$

where $H^{\bullet}(\mathrm{B}^{\bullet}\mathcal{P})$ denotes the cohomology groups of the syzygy degree cochain complex associated to $\mathrm{B}\mathcal{P}$, see [LV12, Section 7.3.1].

PROOF. By [LV12, Proposition 7.3.2], we have an isomorphism of operads and the inclusion $\mathcal{P}^{¡} \hookrightarrow \mathrm{B}^0\mathcal{P}$ is exactly the kernel of the differential defining $H^{\bullet}(\mathrm{B}^{\bullet}\mathcal{P})$, that is $H^0(\mathrm{B}^{\bullet}\mathcal{P})$. Since this differential is H-equivariant, this isomorphism is compatible with the H-module structure.

□

Lemma 2.2.15. *Let (E, R) be a quadratic data. Then, the composite*

$$\kappa : \mathcal{C}(sE, s^2R) \twoheadrightarrow sE \xrightarrow{s^{-1}} E \hookrightarrow \mathcal{P}(E, R) \ ,$$

associated to (E, R), is a twisting H-morphism.

PROOF. It is straightforward from Lemma 7.4.2 of [LV12], since κ is a composite of H-equivariant maps.

□

Theorem 2.2.16 (Koszul criterion)**.** *Let (E, R) be a quadratic data. Then, the following propositions are equivalent :*

(1) *the inclusion $i : \mathcal{P}^{¡} \rightarrowtail \mathrm{B}\mathcal{P}$ is a quasi-isomorphism of dg H-cooperads,*

(2) *the projection $p : \Omega\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{¡}$ is a quasi-isomorphism of dg H-operads.*

When these propositions hold, we say that $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ is a Koszul operad.

Proof. It follows from Theorem 2.2.8.

□

2.2.4 Examples

Mixed chain complexes and multicomplexes

The operad I is quadratic, with trivial space of generators and trivial space of relations. The Koszul dual cooperad is given by $I^{¡} = I$. The unit operad I is Koszul, then so is I as a D-operad. Thus, a mixed chain complex is an algebra over the Koszul D-operad I.

The Batalin-Vilkovisky operad

In [GJ94], it was proved that the operad $\mathcal{G}$ is Koszul. Then, by the present definition, so is the D-operad $\mathcal{G}$.

Lemma 2.2.17. *The action of D on $\mathcal{G}^{¡}$ is induced by*

$$\begin{array}{cccc} \delta\cdot : & \mathcal{G}^{¡} & \twoheadrightarrow & \mathbb{K}s\bullet \oplus \mathbb{K}s\langle\,;\,\rangle \\ & s\bullet & \mapsto & -s\langle\,;\,\rangle \\ & s\langle\,;\,\rangle & \mapsto & 0\ . \end{array}$$

Proof. By definition, the action of D is characterized by its value on the cogenerators of $\mathcal{G}^{¡}$, which is deduced from the one on $\mathcal{G}$.

□

Proposition 2.2.18. *Under the isomorphism of cooperads $\mathcal{G}^{¡} \cong \mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}om_1^c \circ \mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c$, the structure of D-cooperad on the right-hand side is given by*

$$\delta \cdot (L_1 \odot \cdots \odot L_t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\varepsilon_k} L_1 \odot \cdots \odot L'_k \odot L''_k \odot \ldots \odot L_t\ ,$$

where $L'_k \odot L''_k$ is the sumless Sweedler's notation for the image of L_k under the binary part of $\Delta_{\mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c}$, that is $\Delta_{\mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c} : \mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c \to \mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c(2) \otimes (\mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c \otimes \mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c)$ and

$$\varepsilon_k = |L_k| + \cdots + |L_t| + 1\ .$$

Proof. To make explicit the action of δ, we use the D-operad structure on $(\mathcal{G}^{¡})^* \cong \mathcal{SC}om_{-1} \circ \mathcal{SL}ie$, which is given by the isomorphism of operads $(\mathcal{G}^{¡})^* \cong \mathcal{S}^2\mathcal{G} \cong \mathcal{S}^2(\mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie_1)$. We have

$$\delta \cdot (L_1 \odot \cdots \odot L_t) = \delta \cdot (L_1^* \odot \cdots \odot L_t^*)^*\ ,$$

with $L_1^* \odot \cdots \odot L_t^* \in \mathcal{SC}om_{-1} \circ \mathcal{SL}ie$. The only elements in $\mathcal{SC}om_{-1} \circ \mathcal{SL}ie$ whose image under $\delta \cdot (L_1^* \odot \cdots \odot L_t^*)^*$ is non-zero are of the form

$$L_1^* \odot \cdots \odot (L'_k)^* \odot (L''_k)^* \odot \cdots \odot L_t^*\ , k \in \{1, \ldots, t\}\ ,$$

where $(L'_k)^*, (L''_k)^*$ are elements of $\mathcal{SL}ie$ such that $L_k^* = \gamma_{\mathcal{SL}ie}(s^{-1}[\,;\,]; (L'_k)^*, (L''_k)^*)$. This image is equal to $(-1)^{\varepsilon_k + 1}$, where $\varepsilon_k = |L_k^*| + \cdots + |L_t^*|$.

$\square$

Remark. Dually to the D-operad structure on $\mathcal{G}$, the D-cooperad structure on $\mathcal{G}^{\text{!`}}$ is equal, up to sign, to the image of an element in $\mathbb{K}[\delta]_1 \circ \mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}om_1^c \circ \mathcal{S}^{-1}\mathcal{L}ie^c$ under the coderivation d_φ, given in [GTV09, Lemma 5].

2.3 Homotopy algebras and transfer theorem

In this section, we extend some definitions and results of [LV12, Section 10] to the category of H-modules, requiring in addition the compatibility with the H-module structure.

2.3.1 The category of homotopy algebras

Let $\mathcal{P}$ be a Koszul H-operad. By definition, a *homotopy H-$\mathcal{P}$-algebra*, or an *H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra*, is an algebra over the Koszul resolution $\mathcal{P}_\infty := \Omega\mathcal{P}^{\text{!`}}$ of $\mathcal{P}$ in the category of $H$-operads. Then, to endow an $H$-module $A$ with a structure of algebra over $\mathcal{P}_\infty$ is to give a morphism of $H$-operads $\mathcal{P}_\infty\ :=\ \Omega\,\mathcal{P}^{\text{!`}}\ \to\ \mathrm{End}_A$. Notice that a H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra is a $\mathcal{P}_\infty$-algebra endowed with a compatible H-module structure.

Example. Any H-$\mathcal{P}$-algebra structure on a H-module is a particular case of a H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra structure.

Proposition 2.3.1. *The set of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra structures is equivalently given by*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{dg}\,H\text{-}\mathsf{Op}}(\Omega\mathcal{P}^{\,i},\mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Tw}_H(\mathcal{P}^{\,i},\mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{dg}\,H\text{-}\mathsf{coOp}}(\mathcal{P}^{\,i},\mathrm{BEnd}_A) \cong \mathrm{Codiff}_H(\mathcal{P}^{\,i}(A))\ ,$$

where $\mathrm{Codiff}_H(\mathcal{P}^{\,i}(A))$ *denotes the set of codifferentials on $\mathcal{P}^{\,i}(A)$, that are H-equivariant coderivations on $\mathcal{P}^{\,i}(A)$ squaring to zero.*

Proof. The first two bijections are given by the adjunction of Proposition 2.2.5. The proof of Proposition 2.1.18 implies that

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod}}\,(\mathcal{P}^{\text{!`}},\mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Hom}_H(\mathcal{P}^{\text{!`}}(A),A)\ .$$

Moreover, [LV12, Proposition 6.3.17] extends to H-modules. So, if $\mathcal{C}$ is a dg H-cooperad, V is an H-module and $\alpha : \mathcal{C}(V) \to V$ is H-equivariant, then the unique coderivation of the cofee $\mathcal{C}$-coalgebra $\mathcal{C}(V)$ which extends α is given by a sum of composites of H-equivariant maps. Thus, we get the following isomorphism :

$$\mathrm{Hom}_H(\mathcal{P}^{\text{!`}}(A),A) \cong \mathrm{Coder}_H(\mathcal{P}^{\text{!`}}(A))\ .$$

We conclude with [LV12, Proposition 10.1.19] stating that an element in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod}}\,(\mathcal{P}^{\text{!`}},\mathrm{End}_V)$ is a solution to the Maurer-Cartan equation if and only if the associated coderivation on $\mathcal{P}^{\text{!`}}(V)$ squares to zero, which does not depend on the H-module structure.

$\square$

We have four equivalent definitions of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra structures. Thus, when dealing with this algebraic structure, we can make an ad hoc choice of one of those definitions.

By extension of the classical definition of [LV12, Section 10.2.2], an *∞-H-morphism* of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebras is morphism $A \rightsquigarrow B$ of dg H-$\mathcal{P}^{\text{!`}}$-coalgebras

$$F : (\mathcal{P}^{\text{!`}}(A), d_\varphi) \to (\mathcal{P}^{\text{!`}}(B), d_\psi)\ ,$$

where φ and ψ are the twisting H-morphisms defining the structure of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra on A and B respectively. We denote by ∞-$\mathcal{P}_\infty$-H-alg the category of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebras and their ∞-H-morphisms, where the composite of two ∞-H-morphisms is defined as the composite of the associated morphisms of dg H-$\mathcal{P}^{\text{!`}}$-coalgebras.
Equivalently, an ∞-H-morphism of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebras is an H-equivariant ∞-morphism of the underlying $\mathcal{P}_\infty$-algebras. A ∞-H-morphism of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebras is called an *∞-H-isomorphism* (resp. *∞-H-quasi-isomorphism*) if so is its first component $A \to B$.

2.3.2 Homotopy transfer theorem

Let (B, d_B) be a homotopy retract of (A, d_A) in the category of H-modules, that is a homotopy retract of chain complexes

$$\begin{tikzcd} h \arrow[loop left] (A, d_A) \arrow[r, shift left, "p"] & (B, d_B) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} \quad ,$$

with

$$\mathrm{Id}_A - ip = d_A h + h d_A,$$

which satisfies moreover that the maps i, p and h are H-equivariant. We assume that i is a quasi-isomorphism.

Theorem 2.3.2. *Let $\mathcal{P}$ be a Koszul H-operad. Let (B, d_B) be an homotopy retract of (A, d_A) in the category of H-modules.*
Any H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra structure on A, defined by generating operations $\{m_\mu : A^{\otimes n} \to A, \mu \in \mathcal{P}_\infty\}$, can be transferred into a H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra structure on B, which extends the transferred operations $p\, m_\mu\, i^{\otimes n} : B^{\otimes n} \to B$, and such that i extends to an ∞-H-quasi-isomorphism.

Proof. We check that each step of the proof of Theorem 10.3.2 in [LV12] extends to H-modules. Since the maps h, i and p are H-equivariant, the map $\Psi : \mathrm{BEnd}_A \to \mathrm{BEnd}_B$, defined in [LV12, Section 10.3.3], is a morphism of H-cooperads. To prove that Ψ is compatible with the differential structure, we do not care about the H-module structure so it follows from [VdL03, Theorem 5.2]. Then, as a consequence of the Bar-Cobar adjunction, the composite $\mathcal{P}^{¡} \to \mathrm{BEnd}_A \to \mathrm{BEnd}_B$ defines an H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra structure on B. Similarly, to be an ∞-H-quasi-isomorphism does not depend on the H-module structure therefore, by [LV12, Theorem 10.3.11], we just have to prove that the map i_∞, defined there, commutes with the H-module structure. And it is the case since it is a composite of such maps.

□

In particular, the transferred structure and the ∞-H-quasi-isomorphism are both given by the explicit tree-wise formulae of [LV12, Section 10.3.10] and of [LV12, Theorem 10.3.6].

Theorem 2.3.3. *Let $\mathcal{P}$ be a Koszul H-operad. Let (A, d_A) be a $\mathcal{P} \rtimes H$-algebra and (B, d_B) be a homotopy retract of (A, d_A) in the category of H-modules. Then, B inherits a structure of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra, which extends the naive transferred operations, and such that i extends to an ∞-quasi-isomorphism of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebras.*

Proof. By Proposition 2.1.19, the $\mathcal{P} \rtimes H$-algebra structure on A is equivalent to an H-$\mathcal{P}$-algebra structure. Then, we apply Theorem 2.3.2.

□

Remark. This result improves the classical HTT of [LV12] in the sense that :

- when the operad $\mathcal{P} \rtimes H$ is Koszul : we can do the HTT for operads but the $\mathcal{P} \rtimes H_\infty$-algebra structure can be very complex. On the other hand, if we do the transfer in the category of H-modules, then the generating operations of $\mathcal{P} \rtimes H$ coming from H are not relaxed up to homotopy. Thus, the transferred structure reduces to a H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra structure, which is much more simpler than the $(\mathcal{P} \rtimes H)_\infty$-algebra one.
- when the operad $\mathcal{P} \rtimes H$ is not Koszul : the method to transfer an algebraic structure must be improved. While, if the H-operad $\mathcal{P}$ is itself Koszul, then we can apply our version of the HTT, assuming that the homotopy retract is compatible with the H-action.

2.3.3 Homotopy theory for algebras over an H-operad

The results of [LV12, Chapter 11] extend to the framework of H-operads. The objects and the maps defined there are compatible with the H-module structure. For the homological considerations, the results still holds because it does not depend on the H-action. In particular, we obtain the following results :

Theorem 2.3.4. *(Rectification) Let $\mathcal{P}$ be a Koszul H-operad. Any H-$\mathcal{P}_\infty$-algebra is naturally ∞-H-quasi-isomorphic to a dg H-$\mathcal{P}$-algebra.*

Theorem 2.3.5. *(Equivalence between homotopy categories) Let $\mathcal{P}$ be a Koszul H-operad. The homotopy category of dg H-$\mathcal{P}$-algebras is equivalent to the homotopy category of H-$\mathcal{P}_\infty$-algebras with ∞-H-morphisms.*

Remark. The main improvement of this result is that the ∞-H-quasi-isomorphisms are "invertible" in the sense that any ∞-H-quasi-isomorphism admits an ∞-H-quasi-isomorphism in the opposite direction, see [LV12, Theorem 10.4.7], while it is not the case of H-quasi-isomorphisms. This enables us to prove the following result.

Theorem 2.3.6. *(H-quasi-iso vs ∞-H-quasi-iso) Let $\mathcal{P}$ be a Koszul H-operad and A, B be two dg H-$\mathcal{P}$-algebras. The following assertions are equivalent :*

(a) *there exists a zig-zag of H-quasi-isomorphisms of dg H-$\mathcal{P}$-algebras*

$$A \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\sim} B \quad ,$$

(b) *there exists an ∞-H-quasi-isomorphism of dg H-$\mathcal{P}$-algebras $A \overset{\sim}{\rightsquigarrow} B$.*

Remark. Since an H-$\mathcal{P}$-algebra structure is equivalent to a $\mathcal{P} \rtimes H$-algebra one, the theorem gives a new and simpler way to prove formality results for $\mathcal{P} \rtimes H$-algebras.

2.3.4 Examples

Mixed chain complexes and multicomplexes

On the one hand, we can see a mixed complex as an algebra over the arity-one operad D. Thus, a homotopy mixed complex is an algebra over the operad D_∞. This is precisely the *multicomplex* structure described in [DSV12]. On the other hand, if we see a mixed complex as an algebra over the unit D-operad I, there are now no higher operations in the transferred structure. A homotopy D-I-algebra is nothing but a bicomplex, following Section 2.2.4.

Recall that a mixed complex structure (A, d_A, Δ_A) induces a multicomplex structure on the homology groups $\mathrm{H}^\bullet(A, d_A)$, which defines actually the first page of the spectral sequence associated to this mixed complex. And, this multicomplex structure allows one to recover the whole spectral sequence of (A, d_A, Δ_A), which converges to the homology of the total complex of A.

Proposition 2.3.7. *Let (B, d_B) be a homotopy retract of (A, d_A) in the category of chain complexes. If (A, d_A, Δ_A) is a mixed complex structure on A such that :*

$$[h, \Delta_A] = 0,$$

then B inherits a mixed complex structure, induced by the one on A.
In particular, if (B, d_B) is taken to be the homology groups of (A, d_A) with trivial differential, the aforementioned spectral sequence degenerates at the second page.

The Batalin-Vilkovisky operad

When we encode BV-algebra structures with the operad $\mathcal{BV}$, the notion of homotopy BV-algebra structure is given in [GTV09]. We describe the homotopy structure when we use the D-operad $\mathcal{G}$ instead, and compare those two.

Proposition 2.3.8. *A homotopy D-$\mathcal{G}$-algebra is a mixed chain complex (A, d_A, Δ_A) endowed with a homotopy Gerstenhaber algebra structure such that*

$$\Delta_A\, m_{p_1,\dots,p_t} - (-1)^{t-2} \sum_{i=1}^{n} m_{p_1,\dots,p_t} \circ_i \Delta_A = \sum_{k=1}^{t} \sum_{p'_k + p''_k = p_k} (-1)^{\varepsilon_k + 1} m_{p_1,\dots,p'_k,p''_k,\dots,p_t} \ ,$$

where $n = p_1 + \cdots + p_t$ and where $\Delta_A : A \to A$ is the unary operator provided by the D-module structure on A.

Proof. By Proposition 2.3.1, a structure of D-$\mathcal{G}_\infty$-algebra on a mixed chain complex A is given by a twisting D-morphism $\mathcal{G}^{¡} \to \mathrm{End}_A$. It is a twisting morphism $\mathcal{G}^{¡} \to \mathrm{End}_A$ between the underlying $\mathbb{S}$-modules, that is a homotopy Gerstenhaber structure as defined in [GTV09, Proposition 16], which commutes with the action of D. This condition is then a consequence of Proposition 2.2.18, according to the study of homotopy Gerstenhaber algebras done in [GTV09, Section 2.1].

□

As conjectured at the end of [GTV09, Section 2.4], we have the following relation with the homotopy BV-algebras.

Proposition 2.3.9. *A homotopy BV-algebra structure (as defined in [GTV09, Theorem 20]), such that all the operations are trivial except the maps $m^0_{p_1,\dots,p_t}$ and the map m^1_1, is equivalent to a D-$\mathcal{G}_\infty$-algebra.*

Proof. Looking at the explicit description of the homotopy BV-algebra structure given in Theorem 20 of [GTV09], all the relations become trivial except the relations $R^0_{p_1,\dots,p_t}$, defining the homotopy Gerstenhaber structure, the relations $R^1_{p_1,\dots,p_t}$, corresponding to those given in Corollary 2.3.8, and the relation R^2_1, which means that m^1_1 squares to zero.

□

In particular, a D-$\mathcal{G}_\infty$-algebra is a homotopy BV-algebra such that the operator Δ strictly squares to zero (*i.e.* not up to homotopy). It is strictly a derivation with respect to the bracket and the bracket is strictly the default for Δ to be a derivation with respect to the product. In that sense, we call a D-$\mathcal{G}_\infty$-algebra by a *strict* homotopy BV-algebra.

Remark. A strict homotopy BV-algebra is a homotopy BV-algebra such that any elements of $\mathcal{BV}^{¡}$ (as defined in [GTV09, Section 1]) containing a vertex decorated by Δ, except Δ itself, acts as zero. If we ask, moreover, that Δ acts as zero, we get the notion of *strongly trivialized homotopy BV-algebras*, defined in [DC12]. In this article, the author proved that any strongly trivialized homotopy BV structure on a chain complex induces a structure of homotopy hypercommutative algebra on that complex. Thus, we get a simpler description of the homotopy hypercommutative structure.

Theorem 2.3.10. *Let (B, d_B, Δ_B) be a homotopy retract of (A, d_A, Δ_A) in the category of mixed chain complexes. If A is endowed with a BV-algebra structure (or with a strict homotopy BV-algebra structure), then B inherits a structure of strict homotopy BV-algebra which extends the naive transferred operations, and such that i extends to an ∞-D-quasi-isomorphism of strict homotopy BV-algebras.*

Proof. By Proposition 2.1.25, A is a D-$\mathcal{G}$-algebra. Then we apply Theorem 2.3.2.

□

Remark. There are two ways of encoding BV-algebra structures : using the operad $\mathcal{BV}$ or the D-operad $\mathcal{G}$. In the case of a homotopy retract in the category of chain complexes, the transferred homotopy BV-algebra structure of [GTV09, Theorem 33] is made up of infinitely many higher homotopies for each generating operation : $\bullet$, $\langle\,;\rangle$ and Δ, and relations between those homotopies. Moreover, if the homotopy retract lives in the category of mixed chain complexes, this theorem shows that the transferred homotopy BV-algebra structure reduces to a strict homotopy BV-algebra, i.e a homotopy structure without higher homotopies arising from Δ and its relations with the product and with the bracket.

Proposition 2.3.11. *Let (B, d_B) be a homotopy retract of (A, d_A), in the category of chain complexes, which satisfies the following* side conditions *:*

$$h^2 = hi = ph = 0 \ .$$

If $(A, d_A, \bullet, \langle\,;\rangle, \Delta)$ is a BV-algebra structure on A such that

$$[\Delta, h] = 0 \ ,$$

then B inherits a strict homotopy BV-algebra structure, induced by the BV-algebra structure on A, and such that i extends to an ∞-D-quasi-isomorphism of strict homotopy BV-algebras.

Proof. We endow the chain complex (B, d_B) with the unary operator $\widetilde{\Delta}$ induced by Δ, and defined by $\widetilde{\Delta} := p\Delta i$. Then, the side conditions imply that we have actually a homotopy retract between (A, d_A, Δ) and $(B, d_B, \widetilde{\Delta})$ in the category of mixed chain complexes. We conclude with Theorem 2.3.10.

□

When B is the homology groups $\mathrm{H}^\bullet(A, d)$ of the complex (A, d), it is always possible to build a homotopy retract which satisfies the side conditions : it is called the *Hodge decomposition*, see [LV12, Lemma 9.4.7]. More precisely, the chain complex (A, d) splits into a direct sum of graded spaces as follows :

$$A = H \oplus B \oplus C \ ,$$

where $B = \mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Im}(d)$, $H \oplus B = \mathrm{Ker}(d)$ and $H \cong \mathrm{H}^\bullet(A, d)$. Then, the homotopy retract is defined as follows :

- i is the inclusion of H in A,
- p is the projection of A onto H,
- and h is equal to 0 on $H \oplus C$ and is equal to d^{-1} on B.

In this case, the homotopy retract satisfies the aforementioned side conditions.

Corollary 2.3.12. *Let $(A, d_A, \bullet, \langle;\rangle, \Delta)$ be a BV-algebra. If there exists H and C two graded spaces such that $A = H \oplus B \oplus C$ is a Hodge decomposition of A which satisfy $\Delta(C) \subset H \oplus C$, then the homology groups of A inherit a strict homotopy BV-algebra structure, induced by the BV-algebra structure of A.*

Proof. Under the hypothesis, the spaces H and B are stable under Δ and $\Delta(C) \subset H \oplus C$. Then, using the explicit definition of the homotopy h in the Hodge decomposition, we obtain :

$$\Delta h = \begin{cases} 0 & \text{on } H \oplus C \\ \Delta d_A^{-1} & \text{on } B \end{cases} , \text{ and } \ h\Delta = \begin{cases} 0 & \text{on } H \oplus C \\ d_A^{-1}\Delta & \text{on } B \end{cases} .$$

Then, the relation $[d_A, \Delta] = 0$ implies that $[d_A^{-1}, \Delta] = 0$ on B.

□

Example. We consider the following non-unital dg commutative algebra A generated by

$$x_3, y_3, t_3, \xi_4, \omega_5, z_7, u_7 \text{ and } v_8 \ ,$$

where the subscript gives the homological degree, such that the product by u, by v, by ξ and by ω is equal to zero. The algebra A is finite dimensional and spanned by the elements x, y, t, ξ, ω, xy, xt, yt, u, z, v, xz, yz, tz, xyz, xyt and $xyzt$. We summarize in the following picture the definition of the differential and of the BV operator on the generators :

$$\begin{tikzcd}
0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 16 \\
 & x & \xi \arrow[r, mapsto, "\Delta"] & \omega & xy \arrow[r, mapsto, "\Delta"] & u & v \arrow[l, mapsto, "d"'] & xyt & xz & xyz & xyzt \\
 & y & & & xt & z \arrow[ul, mapsto, "d"] \arrow[ur, mapsto, "-\Delta"'] & & & yz & & \\
 & t & & & yt & & & & zt & &
\end{tikzcd},$$

where an element is send to 0 if nothing else is specified.

Proposition 2.3.13. *The aforementioned algebra (A, d, Δ) is a dg BV-algebra. Moreover, its homology $H^\bullet(A, d)$ is endowed with a strict homotopy BV-algebra structure, such that the inclusion $H^\bullet(A, d) \hookrightarrow A$ extends to an ∞-quasi-isomorphism of strict homotopy BV-algebras.*

Proof. It is straightforward to prove that A together with d and Δ forms a dg BV-algebra. The Hodge decomposition of A is given by

$$\begin{tikzcd}
n & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 16 \\
H_n & x, y, t & \xi \arrow[r, mapsto, "\Delta"] & \omega & & & xyt & & xz, yz, tz & xyz & xyzt \\
B_n & & & & xy \arrow[r, mapsto, "\Delta"] \arrow[dr, mapsto, "h=d^{-1}"'] & u \arrow[dr, mapsto, "h=d^{-1}"] & & & & & \\
C_n & & & & & z \arrow[r, mapsto, "-\Delta"'] & v & & & &
\end{tikzcd},$$

where an element is send to 0 if nothing else is specified. The contracting homotopy and Δ commute. Then, we apply Proposition 2.3.11.

□

Notice that the product induced in homology is associative, since the differential on $H^\bullet(A, d)$ is 0, but the first homotopy m_3^0 is not equal to 0. Moreover, the BV operator does not vanish in homology.

Remark. Introduced in [DGMS75] to study the differential forms of compact Kähler manifolds and used in [BK98] for the Dolbeault complex of Calabi-Yau manifolds, the dd^c-lemma implies the condition $[\Delta, h] = 0$, but is a strong condition in our setting. Indeed, if the dd^c-lemma is satisfied, then the operator Δ vanishes on the homology groups.

Encoding the BV-algebra structure in the D-operad $\mathcal{G}$ allows us to deal with a notion of homotopy BV-algebra which is simpler than the one given in [GTV09]. The associated notion of ∞-morphism is also simplified.

Proposition 2.3.14. *An ∞-D-morphism of (strict homotopy) BV-algebras is an ∞-morphism of the underlying (homotopy) Gerstenhaber algebras which commutes to the extra action of the unary operator, provided by the (strict homotopy) BV-algebra structures.*

Proof. It is straightforward from the definition of an ∞-morphism in the category of D-$\mathcal{G}_\infty$-algebras.

□

Corollary 2.3.15. *The homotopy category of BV-algebras is equivalent to the homotopy category of strict homotopy BV-algebras with their ∞-morphisms. Moreover, for any BV-algebras A and B, the following assertions are equivalent :*

(a) *there exists a zig-zag of quasi-isomorphisms of BV-algebras*

$$A \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\sim} B \quad ,$$

(b) *there exists an ∞-quasi-isomorphism of Gerstenhaber algebras $A \overset{\sim}{\rightsquigarrow} B$, commuting with the unary operator provided by the BV-algebra structures.*

Proof. Since the operad $\mathcal{G}$ is Koszul, we can apply Theorem 2.3.5 and Theorem 2.3.6, combined with the previous Proposition.

□

Remark. This theorem provides an easier way to prove that a BV-algebra is formal than the one of [GTV09], using the notion of ∞-morphisms of homotopy BV-algebras. Furthermore, it gives a new lead to tackle the conjecture of Cao–Zhou [CZ01], related to the Mirror Symmetry conjecture of Kontsevich [Kon95], and which states that there is a zig-zag of quasi-isomorphisms of dg BV-algebras from the De Rham complex of a Calabi-Yau manifold $\mathcal{M}$ to the Dolbeault complex of a dual Calabi-Yau manifold $\widetilde{\mathcal{M}}$:

$$\left(\Omega^{n-\bullet}(\mathcal{M}), d_{DR}, \wedge, \Delta, \langle\ ;\ \rangle\right) \xrightarrow{\sim} \left(\Gamma(\widetilde{\mathcal{M}}, \wedge^\bullet \overline{T}^*_{\widetilde{\mathcal{M}}} \otimes \wedge^\bullet T_{\widetilde{\mathcal{M}}}), \overline{\partial}, \wedge, \mathrm{div}, \langle\ ;\ \rangle_S\right) \ .$$

Corollary 2.3.15 shows that it is enough to prove that there is an ∞-quasi-isomorphism of the underlying Gerstenhaber algebras, which commutes strictly with the action of the unary operators Δ and div.

Annexe A

Model category on dg operads over Hopf algebras

We transfer the cofibrantly generated model category structure of dg $\mathbb{S}$-H-modules to the category of dg H-operads, via the free H-operad functor. For the definitions and the results about model category, which we will use in this section, we refer to the book [Hov99] of M. Hovey.

A.1 Model category structure of symmetric modules over Hopf algebras

The category of dg $\mathbb{S}$-H-modules is the product over $n \in \mathbb{N}$ of the category of dg H-$\mathbb{S}_n$-bimodules, which is itself the category of dg right modules over the ring $H^{op} \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$.

We denote by D_n^k the acyclic dg $H^{op} \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-bimodule

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow \underset{k-1}{H^{op} \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]} \xleftarrow{\mathrm{Id}} \underset{k}{H^{op} \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]} \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots ,$$

and by S_n^k the dg $H^{op} \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-bimodule

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \underset{k-1}{H^{op} \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]} \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots .$$

Then, mimicking the arguments of [MV09, Appendix A.1], the category of $\mathbb{S}$-H-modules has a cofibrantly generated model category structure. The set $\mathcal{J}$ of generating acyclic cofibrations is given by $\mathcal{J} = \left\{\mathcal{J}_n^k,\ k, n \in \mathbb{N}\right\}$, with $\mathcal{J}_n^k$ the map $0 \to D_n^k$ in arity n and 0 elsewhere, and the set $\mathcal{I}$ of generating fibrations is given by $\mathcal{I} = \left\{\mathcal{I}_n^k,\ k, n \in \mathbb{N}\right\}$, with $\mathcal{I}_n^k$ the inclusion $S_n^k \to D_n^k$ in arity n and 0 elsewhere.

A.2 Transfer theorem

Let us recall the conditions under which we can transfer a cofibrantly generated model structure from a category to another one. The following theorem first appeared in the work of Quillen [Qui67], and is taken up in [Hov99, Proposition 2.1.19].

Theorem A.2.1. *Let $\mathcal{C}$ be a cofibrantly generated model category with $\mathcal{I}$ as the set of generating cofibrations and $\mathcal{J}$ as the set of generating acyclic cofibrations.*
Let $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ be an adjunction, where F is the left adjoint. Assume that :

(a) *$\mathcal{D}$ has finite limits and colimits,*

(b) *the functor U preserves filtered colimits,*

(c) *and the image under U of any $F(\mathcal{J})$-cell is a weak equivalence in $\mathcal{C}$.*

Define a map f in $\mathcal{D}$ to be a weak equivalence (resp. a fibration) if the associated map $U(f)$ is a weak equivalence (resp. a fibration) in $\mathcal{C}$. The class of cofibrations in $\mathcal{D}$ is the class of maps that satisfy the Left Lifting Property, or LLP for short, with respect to acyclic fibrations.

These three classes of maps endow $\mathcal{D}$ with a cofibrantly generated model category structure, with $F(\mathcal{I})$ as the set of generating cofibrations and $F(\mathcal{J})$ as the set of generating acyclic cofibrations.

In Section 2.1.2, we give the following adjunction of functors :

$$\mathcal{T} : \mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod} \rightleftarrows \mathsf{Op}_H : \sqcup \ .$$

Using the matching result of [LV12, Proposition 6.3.6] in the context of dg H-operad, there is a unique differential on the free H-operad over a $\mathbb{S}$-H-module which extends the underlying differential of the $\mathbb{S}$-H-module. So, this adjunction induces the following adjunction :

$$\mathcal{T} : \mathsf{dg}\ \mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod} \rightleftarrows \mathsf{dg}\ \mathsf{Op}_H : \sqcup \ .$$

We apply the previous theorem to this adjunction in order to obtain a cofibrantly generated model structure on $\mathsf{dg}\ \mathsf{Op}_H$.

A.3 Limits and colimits of H-operads

Using the terminology of [GJ94], a dg H-operad is nothing but a monoid in the category $\mathcal{C}(\mathbb{S}$, $\mathsf{dg}\ H\text{-}\mathsf{Mod}$). In this paper, the authors prove that the category of operads in a category $\mathcal{C}$, that is monoids in $\mathcal{C}(\mathbb{S}, \mathcal{C})$, has all limits and colimits, whenever the category $\mathcal{C}$ satisfies the following conditions :

- $\mathcal{C}$ is a symmetric monoidal category with tensor product $\otimes$,
- $\mathcal{C}$ has all small limits and colimits,
- for any object X in $\mathcal{C}$, the functor $X \otimes -$ preserves colimits.

The first condition follows from Proposition 2.1.2. For the second condition, the category of modules over any ring has all small limits and colimits, where the product is the direct product and the coproduct is the direct sum. Concerning the last condition, we apply the following proposition.

Proposition A.3.1 ([ML98])**.** *Any functor which is a left adjoint must preserve colimits.*

Let X be an H-module. In the category of dg vector spaces, the functor $X \otimes -$ is left adjoint to the hom-functor $\mathrm{Hom}_{\mathsf{dg\ Vect}}\,(X, -)$. Actually, thanks to the structure of Hopf algebra on H, this adjunction extends to the category dg H-modules. We conclude that the functor $X \otimes -$ on dg H-Mod preserves colimits.

Proposition A.3.2. *The category $\mathsf{dg}\ \mathsf{Op}_H$ of dg H-operads has all limits and colimits.*

Let us recall, from [GJ94, Section 1.5], the construction of the coproduct and of the pushout in the category of dg H-operads, which will be useful in the sequel.
The coproduct $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ of two H-operads $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ is defined to be, up to isomorphisms, the following H-operad :

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} := \mathcal{T}(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})/(\Gamma) \ ,$$

where Γ corresponds to identify an element in $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} \circ \mathcal{Q} \subset \mathcal{T}(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})$ with its image under the composition map of either $\mathcal{P}$, or $\mathcal{Q}$, and (Γ) is the operadic ideal spanned by Γ.
They also defined the pushout of two morphisms of H-operads $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ and $g : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ to be, up to isomorphisms, the quotient of $\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$ by the H-operadic ideal spanned by $\{f(\mu) - g(\mu), \mu \in \mathcal{P}\}$.

A.4 The model category of H-operads

Using the Transfer Theorem of Section A.2, we provide a cofibrantly generated model category structure on $\mathsf{dg\ Op}_H$.

We have the following adjunction :

$$\mathcal{T} : \mathsf{dg}\ \mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod} \rightleftarrows \mathsf{dg\ Op}_H : \sqcup \ ,$$

where $\mathcal{T}$ is left adjoint. From A.1, the category $\mathsf{dg}\ \mathbb{S}\text{-}H\text{-}\mathsf{Mod}$ has a cofibrantly generated model category structure, given by $\mathcal{I}$ and $\mathcal{J}$ as the sets of cofibrations and of acyclic cofibrations, respectively.

Lemma A.4.1. *A morphism of dg H-operads is a $\mathcal{T}(\mathcal{J})$-cell if and only if is has the form of $\mathcal{P} \to \mathcal{P} \vee \mathcal{T}(D)$, where $D = \bigoplus_{i\geq 1} D_i$ is an acyclic dg $\mathbb{S}$-H-module whose components D_i are free dg $\mathbb{S}$-H-modules equal to a direct sum of some D_n^k.*

A morphism of dg H-operads is a relative $\mathcal{T}(\mathcal{I})$-cell complex if and only if it is a map $\mathcal{P} \to \mathcal{P} \vee \mathcal{T}(S)$, where S is a dg $\mathbb{S}$-H-module, whose components are free $\mathbb{S}$-H-modules, endowed with an exhaustive filtration

$$S_0 = \{0\} \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset \mathrm{colim}_i S_i = S \ ,$$

such that $d : S_i \to \mathcal{T}(S_{i-1})$ and such that $S_{i-1} \rightarrowtail S_i$ are split monomorphisms of dg $\mathbb{S}$-H-modules with cokernels isomorphic to a free $\mathbb{S}$-H-module.

Proof. The arguments of the proof of [MV09, Lemma 35], which is the matching piece of the above lemma for properads, holds in the same way in our context.

□

Theorem A.4.2. *The category of dg H-operads has a cofibrantly generated model category structure, in which the cofibrations are the maps $\mathcal{T}(\mathcal{I}) = \{\mathcal{T}(S_n^k) \to \mathcal{T}(D_n^k)\}$ and the acyclic cofibrations are the maps $\mathcal{T}(\mathcal{J}) = \{I \to \mathcal{T}(D_n^k)\}$.*
In a particular, a map of dg H-operads is :

- *a weak equivalence if and only if it is a quasi-isomorphism of dg $\mathbb{S}$-H-modules, that is a quasi-isomorphism of the underlying chain complexes in any arity,*
- *a fibration if and only if it is a degree-wise surjection in any arity,*
- *a cofibration if and only if it has the left lifting property with respect to the acyclic fibrations.*

Proof. We need to check the three conditions of the Transfer Theorem A.2.1.

(a) By Proposition A.3.2, the category $\mathsf{dg\ Op}_H$ has all small limits and colimits.

(b) Looking at the construction of a filtered colimit of operads in a category $\mathcal{C}$, described in [GJ94, Section 1.5], we see that it is the colimit of the underlying objects in $\mathcal{C}(\mathbb{S}, \mathcal{C})$ endowed with a structure of operad. So, the forgetful functor $\sqcup$ preserves filtered colimits.

(c) By construction, the coproduct of H-operads $\mathcal{P} \vee \mathcal{T}(D)$ admits a basis made up of trees with vertices indexed by elements of $\mathcal{P}$ and D, such that there is no pair of adjacent vertices indexed by two elements of $\mathcal{P}$. So, it is equal to a direct sum $\mathcal{P} \oplus C$, where a basis of C is given by trees with vertices indexed by elements in $\mathcal{P}$ and at least one element in D. Since the map $\mathcal{P} \to \mathcal{P} \vee \mathcal{T}(D) \cong \mathcal{P} \oplus C$ is the inclusion of $\mathcal{P}$ into the first summand, it is enough to prove that C is an acyclic chain complex. When dealing with homological properties, we can totally forgot the H-action. Then, for any tree in the aforementioned basis of C, the associated chain complex is a quotient of tensor products of $\mathcal{P}$ and at least one D by the action of symmetric groups. Now, we consider D as a direct sum of free $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$-modules, which is acyclic, thus it is acyclic and projective over any ring of symmetric subgroup. It implies that the chain complex associated to any tree in the basis of C is acyclic, with concludes the proof of this item.

□

A.5 Cofibrations and cofibrant objects

Here, we give an explicit description of both the cofibrations and the cofibrant objects in the aforementioned model category of dg H-operads.

Proposition A.5.1. *A morphism $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ is a cofibration in the model category of dg H-operads if and only if it is a retract of a map $\mathcal{P} \to \mathcal{P} \vee \mathcal{T}(S)$, with isomorphisms on domains, where S is a dg $\mathbb{S}$-H-module whose components are free $\mathbb{S}$-H-modules, endowed with an exhaustive filtration*

$$S_0 = \{0\} \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset \mathrm{colim}_i S_i = S \ ,$$

such that $d : S_i \to \mathcal{T}(S_{i-1})$ and such that $S_{i-1} \rightarrowtail S_i$ are split monomorphisms of dg $\mathbb{S}$-H-modules with cokernels isomorphic to a free $\mathbb{S}$-H-module.

A morphism $f : \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}$ is an acyclic cofibration in the model category of dg H-operads if and only if it is a retract of a map $\mathcal{P} \to \mathcal{P} \vee \mathcal{T}(D)$, with isomorphisms on domains, where $D = \bigoplus_{i \geq 1} D_i$ is an acyclic dg $\mathbb{S}$-H-module whose components D_i are free dg $\mathbb{S}$-H-modules equal to a direct sum of some D_n^k.

Proof. We apply [Hov99, Proposition 2.1.18] to the aforementioned model category of dg H-operads. This result on cofibrantly generated model categories states that cofibrations (resp. acyclic cofibrations) are retracts of relative $\mathcal{T}(\mathcal{I})$-cell complexes (resp. relative $\mathcal{T}(\mathcal{J})$-cell complexes). Then, we use Lemma A.4.1 to conclude the proof.

□

Corollary A.5.2. *A dg H-operad is cofibrant if and only if it is a retract of a quasi-free H-operad $\mathcal{T}(S)$, where S is a dg $\mathbb{S}$-H-module whose components are free $\mathbb{S}$-H-modules, endowed with an exhaustive filtration*

$$S_0 = \{0\} \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset \mathrm{colim}_i S_i = S \ ,$$

such that $d : S_i \to \mathcal{T}(S_{i-1})$ and such that $S_{i-1} \rightarrowtail S_i$ are split monomorphisms of dg $\mathbb{S}$-H-modules with cokernels isomorphic to a free $\mathbb{S}$-H-module.

Proof. We apply Proposition A.5.1 to the H-operad $\mathcal{P} = \mathrm{I}$.

□

Bibliographie

[Agu00] Marcelo Aguiar. Pre-Poisson algebras. *Lett. Math. Phys.*, 54(4) :263–277, 2000. 38, 39

[Agu04] Marcelo Aguiar. Infinitesimal bialgebras, pre-Lie and dendriform algebras. In *Hopf algebras*, volume 237 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 1–33. Dekker, New York, 2004. 5, 39

[AL04] Marcelo Aguiar and Jean-Louis Loday. Quadri-algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 191(3) :205–221, 2004. 38, 39

[Bax60] Glen Baxter. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. *Pacific J. Math.*, 10 :731–742, 1960. 39

[BBGN12] Chengming Bai, Olivia Bellier, Li Guo, and Xiang Ni. Splitting of operations, manin products, and rota-baxter operators. *International Mathematics Research Notices*, 2012. 43

[BH12] Chengming Bai and Dongping Hou. J-dendriform algebras. *Front. Math. China*, 7(1) :29–49, 2012. 38

[BK98] Sergey Barannikov and Maxim Kontsevich. Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields. *Internat. Math. Res. Notices*, (4) :201–215, 1998. 84, 107

[BLN10] Chengming Bai, Ligong Liu, and Xiang Ni. Some results on l-dendriform algebras. *Journal of Geometry and Physics*, 60 :940–950, 2010. 38

[BLN11] Chengming Bai, Ligong Liu, and Xiang Ni. L-quadri-algebras. *Scientia Sinica : Mathematica*, 41 :105–124, 2011. 38

[BM03] C. Berger and I. Moerdijk. Axiomatic homotopy theory for operads. *Comment. Math. Helv.*, 78(4) :805–831, 2003. 27, 85, 97

[BV73] J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1973. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. 95

[Car72] P. Cartier. On the structure of free Baxter algebras. *Advances in Math.*, 9 :253–265, 1972. 39

[CLM76] F. R. Cohen, T. J. Lada, and J. P. May. *The homology of iterated loop spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 533. 95

[CS99] M. Chas and D. Sullivan. String topology. *`http://arxiv.org/abs/math/9911159` (to appear in Annals of Math.)*, 1999. 84

[CZ01] Huai-Dong Cao and Jian Zhou. DGBV algebras and mirror symmetry. In *First International Congress of Chinese Mathematicians (Beijing, 1998)*, volume 20 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 279–289. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. 108

[DC12] Gabriel C. Drummond-Cole. Formal formality of the hypercommutative algebras of low dimensional calabi-yau varieties. 01 2012. 105

[DGMS75] Pierre Deligne, Phillip Griffiths, John Morgan, and Dennis Sullivan. Real homotopy theory of kï¿½hler manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 29 :245–274, 1975. 10.1007/BF01389853. 107

[DSV12] Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin, and Bruno Vallette. De rham cohomology and homotopy frobenius manifolds. 03 2012. 104

[EF02] K. Ebrahimi-Fard. Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.*, 61(2) :139–147, 2002. 39

[EFG07] Kurusch Ebrahimi-Fard and Li Guo. Rota-Baxter algebras in renormalization of perturbative quantum field theory. In *Universality and renormalization*, volume 50 of *Fields Inst. Commun.*, pages 47–105. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 39

[Ger63] M. Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. *Ann. of Math. (2)*, 78 :267–288, 1963. 38

[Get94a] E. Getzler. Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories. *Comm. Math. Phys.*, 159(2) :265–285, 1994. 84, 95

[Get94b] E. Getzler. Two-dimensional topological gravity and equivariant cohomology. *Commun. Math. Phys.*, 163(3) :473–489, 1994. 94

[GJ94] Ezra Getzler and J. D. S. Jones. Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces. *hep-th/9403055*, 1994. 6, 101, 110, 111

[GK94] Victor Ginzburg and Mikhail Kapranov. Koszul duality for operads. *Duke Math. J.*, 76(1) :203–272, 1994. 6, 85

[GK95] V. Ginzburg and M. Kapranov. Erratum to : "Koszul duality for operads" [Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272 ; MR1301191 (96a :18004)]. *Duke Math. J.*, 80(1) :293, 1995. 36

[GTV09] I. Galvez-Carrillo, A. Tonks, and B. Vallette. Homotopy Batalin-Vilkovisky algebras. *ArXiv e-prints*, July 2009. 7, 84, 85, 94, 102, 104, 105, 107, 108

[Hof10] Eric Hoffbeck. A Poincaré-Birkhoff-Witt criterion for Koszul operads. *Manuscripta Math.*, 131(1-2) :87–110, 2010. 91

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. 109, 112

[Kad82] T. V. Kadeishvili. The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$-algebra. *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 108(2) :249–252 (1983), 1982. 6, 84

[Kon95] Maxim Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139, Basel, 1995. Birkhäuser. 108

[Laz55] Michel Lazard. Lois de groupes et analyseurs. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 3*, pages Exp. No. 109, 77–91. Soc. Math. France, Paris, 1955. 8

[Ler] Philippe Leroux. On some remarkable operads constructed from baxter operators. 38, 39

[Ler04] Philippe Leroux. Ennea-algebras. *J. Algebra*, 281(1) :287–302, 2004. 38

[Lod01] Jean-Louis Loday. Dialgebras. In *Dialgebras and related operads*, volume 1763 of *Lecture Notes in Math.*, pages 7–66. Springer, Berlin, 2001. 4, 38

[Lod04] Jean-Louis Loday. Scindement d'associativité et algèbres de Hopf. In *Actes des Journées Mathématiques à la Mémoire de Jean Leray*, volume 9 of *Sémin. Congr.*, pages 155–172. Soc. Math. France, Paris, 2004. 38

[LR04] J.-L. Loday and M. Ronco. Trialgebras and families of polytopes. In *Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory*, volume 346 of *Contemp. Math.*, pages 369–398. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. 38

[LV12] J.-L. Loday and B. Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren.* 2012. 4, 6, 8, 12, 31, 32, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 92, 93, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 106, 110

[LZ93] Bong H. Lian and Gregg J. Zuckerman. New perspectives on the BRST-algebraic structure of string theory. *Comm. Math. Phys.*, 154(3) :613–646, 1993. 84

[Mar96] M. Markl. Distributive laws and Koszulness. *Ann. Inst. Fourier*, 46(2) :307–323, 1996. 94

[ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. 110

[MV09] Sergei Merkulov and Bruno Vallette. Deformation theory of representations of prop(erad)s. II. *J. Reine Angew. Math.*, 636 :123–174, 2009. 109, 111

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967. 109

[Rot69] Gian-Carlo Rota. Baxter algebras and combinatorial identities. I, II. *Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 325–329 ; ibid.*, 75 :330–334, 1969. 39

[Sta63] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292 ; ibid.*, 108 :293–312, 1963. 6, 84

[SW03] Paolo Salvatore and Nathalie Wahl. Framed discs operads and Batalin-Vilkovisky algebras. *Q. J. Math.*, 54(2) :213–231, 2003. 84, 91, 92, 94, 95

[Swe81] Moss E. Sweedler. Book Review : Hopf algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(3) :349–354, 1981. 86

[Uch09] K. Uchino. Derived bracket construction and manin products. `arXiv.org:0904.1961`, 2009. 5, 41

[Val08] B. Vallette. Manin products, Koszul duality, Loday algebras and Deligne conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 620 :105–164, 2008. 5, 36, 37, 39, 41

[VdL03] P. Van der Laan. Coloured Koszul duality and strongly homotopy operads. `arXiv:math.QA/0312147`, 2003. 34, 103

Index

Propriétés algébriques et homotopiques des opérades sur une algèbre de Hopf

Olivia BELLIER

RÉSUMÉ. Dans cette thèse, nous démontrons de nouvelles propriétés algébriques et homotpiques des opérades : problème du scindage des opérations et dualité de Koszul sur une algèbre de Hopf. Dans une première partie, nous fournissons une construction opéradique qui donne un cadre général répondant au problème du scindage des opérations définissant des structures algébriques. Nous montrons que cette construction est équivalente au produit noir de Manin et qu'elle est reliée aux opérateurs de Rota-Baxter. Nous obtenons ainsi une méthode plus efficace pour calculer des produits noirs de Manin, illustrée par plusieurs exemples. Ceci nous permet de décrire une structure algébrique canonique sur l'espace des matrices carrées à coefficients dans une algèbre sur un certain type d'opérades. Dans une seconde partie, nous étendons la dualité de Koszul classique des opérades aux catégories de modules sur une algèbre de Hopf. Ceci nous permet d'obtenir une nouvelle version optimale du théorème de transfert homotopique. Dans ce cas, nous pouvons décrire la structure d'algèbre de Batalin–Vilkovisky, par exemple, transférée à travers une équivalence d'homotopie lorsqu'il y a compatibilité entre les données homotopique et algébrique.

Mots clés : algèbre homologique, opérade, dualité de Koszul, algèbre à homotopie près, scindage d'opérations.

Algebraic and homotopical properties of operads over an Hopf algebra

Olivia BELLIER

ABSTRACT. In this thesis, we prove new algebraic and homotopical properties of operads : splitting of operations and Koszul duality theory over an Hopf algebra. In the first part, we provide a general operadic definition for the notion of splitting of operations defining algebraic structures. We prove that this construction is equivalent to Manin black products and that it is related to Rota-Baxter operators. Thus, we obtain a new and efficient way to compute Manin black products, illustrated by many examples. This allows us to describe a canonical algebraic structure on the space of square matrices with coefficients in a algebra over a certain type of operads. In the second part, we extend the classical Koszul duality of operads to the categories of modules over an Hopf algebra. This allows us to prove a new and optimal version of the homotopy transfer theorem. In this case, we can describe the BV-algebra structure, for instance, transferred through a homotopy equivalence when there is a compatibility between the algebraic and the homotopic data.

Key words : homological algebra, operad, Koszul duality theory, homotopy algebra, splitting of operations.