



HAL
open science

Équation de Monge-Ampère complexe, métriques kählériennes de type Poincaré et instantons gravitationnels ALF

Hugues Auvray

► **To cite this version:**

Hugues Auvray. Équation de Monge-Ampère complexe, métriques kählériennes de type Poincaré et instantons gravitationnels ALF. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT: . tel-00750891

HAL Id: tel-00750891

<https://theses.hal.science/tel-00750891>

Submitted on 13 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS 6)
ÉCOLE DOCTORALE PARIS CENTRE

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Hugues AUVRAY

Équation de Monge-Ampère complexe, métriques kählériennes de type Poincaré et instantons gravitationnels ALF

dirigée par Olivier BIQUARD

Soutenue le 21 juin 2012 devant le jury composé de :

M. Olivier BIQUARD	École Normale Supérieure	directeur
M. Tien Cuong DINH	Université Paris VI	examineur
M. Philippe EYSSIDIEUX	Université Grenoble 1	rapporteur
M. Vincent GUEDJ	Université Toulouse III	examineur
M. Michael SINGER	University of Edinburgh	rapporteur

Département des Mathématiques et
Applications (UMR 8553)
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris cedex 05

École doctorale Paris centre
Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

*Il faut donc dire que l'universel advient
comme singularité, et que nous n'avons au
départ que la précarité d'un supplément,
dont l'unique force est qu'aucun prédicat
disponible ne le plie à la soumission
savante.*

A. BADIOU

Remerciements

J'adresserai en premier lieu mes sincères remerciements à mon directeur de thèse Olivier Biquard, auprès de qui j'ai eu la chance de travailler depuis cinq ans. Faire des mathématiques avec Olivier est une source constante d'enrichissement personnel et intellectuel ; les sujets de recherche qu'il m'a proposés, ardues au premier abord, sont pour moi un gage de sa confiance, de même que l'exigence à laquelle il m'a habitué. Cette confiance s'est aussi manifestée à travers la liberté qu'il m'a laissée de traiter certains problèmes apparus au fil de mes travaux, ainsi qu'au travers de l'attention témoignée à mes réponses. Je me souviens, enfin, que son cours de Master 2 fut un élément décisif quant à mon orientation, à la fois vers la recherche, et vers la géométrie différentielle.

C'est ensuite pour moi un honneur que Philippe Eyssidieux et Michael Singer aient accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, en dépit de la longueur – et des longueurs – du manuscrit. Je remercie plus particulièrement Philippe pour l'intérêt qu'il porte à mes travaux depuis notre rencontre à Pékin en 2009, et pour les conseils qu'ils m'a régulièrement donnés lors de nos discussions ; je remercie également Michael pour son chaleureux accueil à Édimbourg au printemps, et pour ses précieuses recommandations. Merci encore à Tien Cuong Dinh, qui alors que je préparais l'agrégation a été un de mes premiers maîtres en géométrie complexe, et à Vincent Guedj, spécialiste de l'équation éponyme de ce recueil, de faire partie du jury.

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans l'intérêt et l'attrait pour les mathématiques que m'ont transmis certains de mes enseignants ; que M. Étienne et Mme J. Le Page, du lycée Saint-Martin, et M. Louboutin du lycée Chateaubriand, à Rennes, soient ici remerciés. Et ce fut, plus récemment, un grand plaisir que de suivre les cours de Paul Gauduchon, avec qui j'ai également pu échanger tout au long de cette thèse.

Je me dois également de citer les mathématiciens qui m'ont aidé par des conseils ou des remarques ces dernières années, sans lesquels je serais passé à côté de nombreuses choses : merci donc à Sébastien Boucksom, Vestislav Apostolov, Xiaonan Ma, George Marinescu, Julien Keller, Henri Guenancia. Je n'oublie pas Toshiki Mabuchi, qui m'a accueilli durant une année à Ōsaka, et à qui je soumetts régulièrement et avec joie mes idées.

De Toyonaka au James Clerk Maxwell building, *via* Chevaleret, Jussieu et l'ENS, ces quatre dernières années n'ont pas été pas un modèle de sédentarité ; je remercie donc Kōtarō, Olivier, Jean-François, Van-Hoang, Vincent D., Vincent J., Quentin, Cécile, Laure D., Thomas, Kamran, Laure G., Laurent, Han, Yoshinori et Supreede d'avoir été de si bonne compagnie, et d'avoir supporté les raisonnements marmonnés dont j'ai hanté les lieux où cette thèse m'a mené. J'y ai pu travailler dans de très bonnes conditions ; qu'en

soient vivement remerciées tout particulièrement les équipes de la Graduate School of Science de Handai, de Chevaleret, et du DMA.

J'en viens à présent à mes amis, de longue date ou rencontrés pendant les années de thèse, auxquels je suis reconnaissant de m'avoir fait faire autre chose que des mathématiques, mais aussi de m'avoir redonné confiance dans les moments de doute ou de découragement. Merci donc à vous les potes de Rennes, qui de plus avez presque tous fini par me rejoindre à Paris ; merci aux amis du Japon, qui avez su me faire rompre la solitude – quoi que l'on en dise – de l'activité mathématique ; merci encore aux camarades d'École, Vincent, *alter ego* à mon sens dans l'approche de la discipline, et Jean-Philippe, qui bien des fois m'a aidé à combattre la monotonie et la morosité d'une journée sans solution.

Merci à ma famille, tout spécialement à mes parents et à mon frère, qui m'avez toujours supporté dans mon travail, épaulé dans les difficultés, et conforté dans mes décisions. Ma dernière pensée, naturellement, va à Cécile, dont le courage est pour moi une constante source de fierté, pour avoir été et pour être à mes côtés, et pour me rappeler qu'amour comme science est procédure de vérité.

À tous, merci !

Résumé

Résumé

Ce travail de thèse s'intéresse à la résolution d'équations de Monge-Ampère complexes et à ses applications sur certains types de variétés non compactes. Ce mémoire décrit plus précisément deux situations distinctes dans lesquelles on résout des équations de Monge-Ampère, avant de tirer les conséquences de ces résolutions.

Dans une première partie, on travaille sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans une variété kählérienne compacte. On fixe sur le complémentaire du diviseur une classe de métriques kählériennes à singularités *cusp* le long du diviseur. Pour construire des géodésiques entre métriques de cette classe, on résout une équation de Monge-Ampère homogène, sur le produit de notre ouvert de Zariski par une surface de Riemann à bord. On applique cette construction à un résultat d'unicité de métriques à courbure scalaire constante dans la classe considérée ; on résout encore pour cela une équation de Monge-Ampère avec second membre sur le complémentaire du diviseur. On exhibe enfin des obstructions topologiques à l'existence de métriques à courbure scalaire constante au sein des classes de métriques kählériennes singulières envisagées.

La seconde partie du mémoire traite d'une construction analytique d'instantons gravitationnels ALF, ou variétés complètes de dimension 4, hyperkähleriennes, à croissance cubique du volume. On donne la construction d'instantons diédraux ; on considère plus exactement des résolutions de singularités kleiniennes diédrales. Le traitement d'une équation de Monge-Ampère, donné pour des variétés kählériennes ALF assez générales, nous permet sur nos exemples de corriger un prototype simple pour obtenir la métrique hyperkählienne recherchée.

Mots-clés : Équation de Monge-Ampère complexe, variétés non compactes, métriques à singularités *cusp* le long d'un diviseur, métriques kählériennes à courbure scalaire constante, métriques hyperkähleriennes, instantons gravitationnels ALF diédraux.

Complex Monge-Ampère equation, Kähler metrics of Poincaré type and ALF gravitational instantons

Abstract

The topic of this thesis is the resolution of Monge-Ampère equations and its application on certain types of non-compact manifolds. This dissertation describes more precisely two distinct situations in which we solve Monge-Ampère equations, and draw conclusions of these resolutions.

We work in a first part on the complement of a divisor with normal crossings in a compact Kähler manifold. We fix on the complement of the divisor a class of Kähler metrics with cusp singularities along the divisor. In order to construct geodesics joining metrics of this class, we solve a homogeneous Monge-Ampère equation on the product of our Zariski open set with some Riemann surface with boundary. This construction is then applied to a uniqueness results for constant scalar curvature metrics in the considered class; for this, we also solve a Monge-Ampère equation with right-hand-side member on the complement of the divisor. We finally prove topological obstructions to the existence of constant scalar curvature metrics among the classes of singular metrics we are interested in.

The second part of the dissertation is devoted to an analytic construction of ALF gravitational instantons, that is complete hyperkähler 4-manifolds, with cubic growth of the volume. We give the construction of some dihedral instantons ; more specifically, we consider resolutions of kleinian singularities. The treatment of a Monge-Ampère equation, given for quite general ALF manifolds, allows us to correct on our examples a simple prototype to get the sought hyperkähler metric.

Keywords: Complex Monge-Ampère equation, non-compact manifolds, metrics with cusp singularities along a divisor, constant scalar curvature Kähler metrics, hyperkähler metrics, dihedral gravitational instantons.

Sommaire

Introduction	13
0.1 Le théorème de Calabi-Yau	13
0.1.1 Conjecture de Calabi	13
0.1.2 Résolution analytique, travaux de Yau	14
0.1.3 Variations	16
0.2 Résultats	17
0.2.1 Métriques kählériennes de type Poincaré sur le complémentaire d'un diviseur	17
0.2.2 Instantons gravitationnels ALF	21
0.2.3 Limites des résultats	23
0.2.4 Organisation du mémoire	24
I Métriques kählériennes de type Poincaré sur le complémentaire d'un diviseur	27
1 L'espace des métriques	29
1.1 Métrique modèle	29
1.1.1 Construction	29
1.1.2 Comportement asymptotique	30
1.2 Métriques kählériennes de type Poincaré	32
1.3 Géométrie de l'espace des métriques et de l'espace des potentiels	34
1.4 Compléments d'analyse en métrique de type Poincaré	36
1.4.1 Inégalités de Poincaré	36
1.4.2 Résolution de $\Delta v = f$ et un lemme $\partial\bar{\partial}$	39
1.4.3 Contrôle sur la croissance des potentiels	40
1.4.4 Preuve de la proposition 1.9	42
2 Résolution de l'équation de Monge-Ampère homogène	47
2.1 Énoncé du théorème et interprétation en termes de géodésiques	47
2.2 La méthode de continuité	48
2.3 Unicité et estimation C^0 des solutions intermédiaires	49
2.4 Estimées d'ordre 2	51
2.5 Estimées C^2 et $C^{2,\beta}$	54

2.5.1	Estimée C^2	54
2.5.2	Estimée $C^{2,\beta}$	56
2.6	Démonstration de la proposition 2.3 et du théorème 2.1	58
2.6.1	Démonstration de la proposition 2.3	58
2.6.2	Démonstration du théorème 2.1	60
3	Théorème de Calabi-Yau et formes de Ricci négatives	61
3.1	Énoncé et motivation	61
3.2	Preuve du théorème 3.3	62
3.2.1	Cas d'un diviseur lisse	63
3.2.2	Cas général	66
3.3	Le lemme $\partial\bar{\partial}$ à poids	67
3.4	Théorie du pluri-potentiel	71
4	Preuve du théorème de Calabi-Yau sur $X \setminus D$	73
4.1	Bornes uniformes	73
4.1.1	Estimée d'ordre 0	73
4.1.2	Estimée d'ordre deux	77
4.1.3	Estimées d'ordre trois et d'ordre supérieur	78
4.2	Les solutions approchées sont dans des espaces à poids	79
4.2.1	Un contrôle C^0 à poids entraîne un contrôle à poids à tout ordre	79
4.2.2	Contrôle C^0 à poids	80
5	Unicité des métriques à courbure scalaire constante	83
5.1	Énoncé du résultat	83
5.2	Démonstration du théorème d'unicité	84
5.2.1	Une inégalité cruciale	84
5.2.2	Bornes L^p , limites faibles, et conclusion	85
6	Contrainte topologique	87
6.1	Énoncé du résultat	87
6.1.1	Courbures scalaires moyennes	87
6.1.2	Obstruction topologique	88
6.2	Liens avec les suggestions de Székelyhidi	89
6.2.1	K-stabilité d'un triplet (X, D, L)	89
6.2.2	Métriques kähleriennes asymptotiquement hyperboliques	90
6.3	Fibration près du diviseur : rappel	92
6.4	Deux propositions-clé	93
6.4.1	Énoncés des propositions, et preuve du théorème 6.1 (diviseur lisse)	93
6.4.2	Démonstrations des propositions 6.4 et 6.5	94
6.5	Généralisation : cas où D est à croisements normaux	97
	Appendice	101
A	Théorème de Calabi-Yau logarithmique, diviseur lisse	103
A.1	Énoncé du théorème et stratégie de preuve	103
A.2	Estimations a priori	105
A.2.1	Estimation C^0 non pondérée	105
A.2.2	Estimations d'ordre 2 et 3 non pondérées	106
A.2.3	Estimation C^0 pondérée	107

A.3	L'ensemble S est fermé	115
II	From ALE to ALF gravitational instantons	117
7	Prelude: ALE gravitational instantons	119
7.1	Basic material	119
7.2	Minimal resolutions	121
8	Taub-NUT metric on \mathbb{C}^2	123
8.1	A potential for the Taub-NUT metric on \mathbb{C}^2	123
8.2	Comparison of the Euclidean and the Taub-NUT metrics	127
8.2.1	Mutual control	127
8.2.2	Expressing euclidean objects in Taub-NUT vocabulary	128
8.2.3	Derivatives	130
9	Application to \mathcal{D}_k ALE spaces (minimal resolutions)	133
9.1	Description of the program	133
9.2	Gluing the Kähler metrics	135
9.3	Making the metric Ricci-flat near infinity	139
9.4	Improvement of the asymptotics	141
9.4.1	The diffeomorphisms	141
9.4.2	The gauge and its consequences	142
9.5	Making the metric Ricci-flat on the whole X	145
10	Proof of Theorem 9.12	149
10.1	The continuity method.	149
10.2	Closedness of S : a priori estimates.	150
10.2.1	C^0 estimates.	150
10.2.2	Unweighted second order and third order estimates.	154
10.2.3	C_δ^0 estimates.	155
10.2.4	$C^{k,\alpha}$ and $C_\delta^{k,\alpha}$ estimates.	158
10.2.5	Closedness of S	160
10.3	Openness of S	161
	Bibliographie	163

Introduction

CETTE introduction se divise en deux parties. On dresse dans la première partie un rapide historique du fil directeur de cette thèse : le théorème de Calabi-Yau pour les variétés kählériennes compactes. Nous rappelons l'origine du problème de Calabi et évoquons sa résolution par Yau ; nous mentionnons également quelques problématiques liées à ce sujet.

La seconde partie fait état des résultats obtenus dans cette thèse. En tant que telle, elle se divise elle-même principalement en deux sous-parties, correspondant aux deux cadres géométriques dans lesquels s'inscrivent nos résultats. Ces deux cadres sont essentiellement distincts ; nous tâcherons néanmoins de les faire dialoguer au long des paragraphes qui leur sont respectivement consacrés, et plus généralement au fil des différents chapitres de cette thèse.

Cette partie introductive ne se voulant pas exhaustive, la discussion qui suit pourra s'avérer vague par endroits ; les détails nécessaires figureront dans le corps du texte lui-même.

0.1 Le théorème de Calabi-Yau

0.1.1 Conjecture de Calabi

Soit (X, g, J, ω) une variété kählérienne compacte, de dimension complexe m . Un fait standard est le suivant : si l'on définit la forme de Ricci ϱ de g par $\varrho = \text{Ric}^g(J \cdot, \cdot)$, où Ric^g est le tenseur de Ricci attaché à g , alors ϱ est une $(1,1)$ -forme réelle fermée, et a pour classe de de Rham $2\pi c_1(X)$, qui ne dépend donc pas de g . Il est à cet égard naturel de se poser la question de la réciproque, sous la forme suivante : étant donnée une $(1,1)$ -forme α réelle, fermée, de classe $2\pi c_1(X)$, existe-t-il sur X une métrique kählérienne g_α telle que α soit la forme de Ricci de g_α ? On peut préciser cette question, en demandant à ce que la forme de Kähler d'une telle métrique soit cohomologue à la forme de Kähler ω initiale.

La conjecture d'E. Calabi [Cal56, Cal57] consiste alors en une réponse affirmative à la question posée, et précise l'unicité de la solution :

Conjecture 1 (Calabi). *On fixe une classe de Kähler $[\omega]$ sur X . Alors pour toute $(1,1)$ -forme α réelle, fermée, de classe $2\pi c_1(X)$, il existe une unique métrique kählérienne g_α sur X , de forme de Kähler dans $[\omega]$.*

Motivation. Avant de donner des éléments de réponse à ce problème, précisons certaines conséquences d'un tel énoncé. Supposons par exemple que $c_1(X) = 0$; la conjecture de Calabi nous donne alors dans toute classe de Kähler une métrique h d'Einstein à tenseur de Ricci nul, ou *Ricci-plate*. Si une telle métrique est de plus irréductible, alors (X, h) est soit *hyperkählérienne*, soit une *variété de Calabi-Yau*; on obtient dans tous les cas une variété tout à fait spécifique parmi les variétés kählériennes. On a ici identifié 2-formes symétriques hermitiennes et (1,1)-formes correspondantes *via* la structure complexe; nous ferons souvent cette identification, classique, par la suite.

Si maintenant $c_1(X)$ a un signe, disons $c_1(X) > 0$, au sens où il existe $\alpha \in c_1(X)$ telle que $\alpha(\cdot, J\cdot) > 0$, on trouve grâce à la conjecture une métrique h à Ricci strictement positif, et par la technique de Bochner, X est simplement connexe. Si l'on a $c_1(X) < 0$, un argument analogue nous dit que le groupe des automorphismes de X est discret.

Reformulation du problème. Soit $\tilde{\omega}$ une forme de Kähler dans $[\omega]$. Une égalité classique en géométrie kählérienne relie alors sa forme de Ricci $\tilde{\rho}$ à la forme de Ricci ρ de la forme de Kähler initiale ω ; on a : $\tilde{\rho} = \rho - i\partial\bar{\partial} \log \left(\frac{\omega^m}{\tilde{\omega}^m} \right)$. Par ailleurs, un autre résultat fondamental de la géométrie kählérienne, le *lemme $\partial\bar{\partial}$* , nous dit que $\alpha = \rho - i\partial\bar{\partial}f$ pour une certaine fonction réelle f lisse sur X . La conjecture de Calabi se ramène donc au problème suivant : trouver une forme de Kähler $\tilde{\omega}$ dans $[\omega]$ telle que $(\tilde{\omega})^m = e^f \omega^m$. Notons qu'une telle égalité suppose, par le théorème de Stokes, que l'on ait $\int_X e^f \omega^m = \int_X \omega^m$; puisque l'on peut néanmoins ajouter n'importe quelle constante à f sans changer α , on suppose désormais f fixée de sorte que l'égalité intégrale ci-dessus ait lieu.

Finalement, une nouvelle application du lemme $\partial\bar{\partial}$ nous dit que la forme $\tilde{\omega}$ recherchée s'écrit $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$, avec φ réelle lisse. En tenant compte de la condition de Kähler sur $\tilde{\omega}$, on peut donc reformuler une dernière fois la conjecture de Calabi pour parvenir au problème consistant à trouver φ lisse sur X telle que :

$$\begin{cases} (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f \omega^m, \\ \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi > 0. \end{cases} \quad (1)$$

0.1.2 Résolution analytique, travaux de Yau

Équation de Monge-Ampère complexe. La condition de positivité, c'est-à-dire la deuxième ligne, du problème (1), étant presque automatique, les efforts en vue de résoudre ce problème ont été concentrés sur la construction d'une fonction φ vérifiant la première ligne de (1). Une telle équation est appelée *équation de Monge-Ampère complexe*, en référence à son analogue réelle consistant à trouver, sur un ouvert de \mathbb{R}^n disons, une fonction u vérifiant la relation

$$\det \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right] = F,$$

avec $F > 0$ donnée. En effet, en coordonnées holomorphes locales (z^α) , si l'on écrit $\omega = g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ (convention de sommation d'Einstein), l'équation sur φ considérée ci-dessus devient

$$\det \left[\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq m} \right] = e^f \det [(g_{\alpha\bar{\beta}})_{1 \leq \alpha, \beta \leq m}].$$

On doit donc résoudre une *équation aux dérivées partielles d'ordre 2 non linéaire*; une des difficultés de cette résolution tient à ce que la non-linéarité de l'équation s'exprime en les dérivées secondes de la fonction inconnue, qui illustre le caractère non-trivial de la conjecture de Calabi.

Méthode de continuité. Pour entreprendre la résolution de (1), Calabi suggère de non plus voir l'équation en jeu individuellement, mais de regarder plutôt une *famille continue d'équations*, allant d'une équation triviale à l'équation à résoudre. Plus explicitement, on regarde pour $t \in [0, 1]$ les équations

$$\begin{cases} (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^m = c_t e^{t f} \omega^m, \\ \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t > 0, \end{cases}$$

avec $c_t = \frac{1}{\int_X e^{t f} \omega^m} \int_X e^{t f} \omega^m$ pour que $\int_X c_t e^{t f} \omega^m = \int_X \omega^m$, et l'on considère l'ensemble S des t pour lesquels l'équation de paramètre t admet une solution. On montre en outre facilement que de telles solutions sont uniques aux constantes près ; rajouter une condition de normalisation telle que $\int_X \varphi_t \omega^m = 0$ au problème permet donc de demander que pour les $t \in S$, φ_t soit unique.

Cette démarche est motivée par l'observation suivante ; l'équation de paramètre $t = 0$ a pour solution évidente $\varphi_0 = 0$, et l'on montre grâce aux identités kählériennes que la linéarisation de l'opérateur $\varphi \mapsto (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m$ en ce point est donnée par $\psi \mapsto -\frac{1}{2}(\Delta_\omega \psi)\omega^m$. Le laplacien Δ_ω associé à ω étant un isomorphisme entre espaces de Banach $C^{5,\alpha} \rightarrow C^{3,\alpha}$ en se restreignant des deux côtés aux fonctions à moyenne nulle contre ω^m , le théorème des fonctions implicites nous donne des φ_t de régularité $C^{5,\alpha}$ solutions de l'équation de paramètre t pour t proche de 0. Si l'on démontre que ces solutions sont lisses – ce qui n'est nullement évident –, on a donc que S contient un voisinage de 0.

Un tel raisonnement peut être transposé en tout $t \in S$, l'opérateur linéarisé n'étant à peu de choses près autre que le laplacien associé à la métrique $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$; sous réserve que l'on sache démontrer qu'une solution $C^{5,\alpha}$ de l'une de nos équations est lisse, on sait donc que S est *ouvert*. On aimerait alors un énoncé de compacité sur les solutions associées à ses éléments pour en déduire qu'il est également *fermé*, donc égal à $[0, 1]$; prendre $\varphi = \varphi_1$ résoudre le problème de départ.

Travaux de Yau. Deux décennies après les suggestions de Calabi, S. T. Yau mène ce programme à terme dans l'article fondateur [Yau78]. Plus précisément, il démontre :

1. que si l'on prend une suite de solutions φ_{t_j} avec les $t_j \in S$ tendant vers t_∞ , on a sur $\|\varphi_{t_j}\|_{C^{5,\alpha}}$ un contrôle indépendant de j (« estimations *a priori* »), ce qui permet de passer à la limite et d'obtenir une solution φ_{t_∞} de classe $C^{5,\alpha}$ de l'équation de paramètre t_∞ ;
2. qu'une solution $C^{5,\alpha}$ de l'une de nos équations est lisse.

Le second point permet d'établir clairement que S est ouvert ; le premier, combiné au second, nous dit que S est fermé : le problème est résolu. Remarquons que le point 1. est le plus délicat à établir, le point 2. découlant plus aisément d'une formule utilisée dans la démonstration du premier point.

Nous ne décrivons naturellement pas entièrement la preuve de Yau, assez longue et technique, dans cette introduction ; nous renvoyons le lecteur à l'article original [Yau78], ou au traitement qui en est fait par D. Joyce [Joy00, ch. 5]. Nous dirons simplement que cette preuve nécessite des ingrédients tels qu'une inégalité de Sobolev (estimée *a priori* C^0 sur les φ_t , voir cependant l'article de S. Kołodziej [Kol98] pour une approche différente), et des bornes sur la courbure riemannienne de la métrique de départ g et sur ses dérivées à différents ordres (estimées *a priori* d'ordres 2, 3, et supérieurs), combinées à certaines formules, locales, dérivant de l'équation vérifiée par les φ_t . Ceci suggère que l'on peut remplacer la variété compacte X par des espaces dans lesquels on dispose d'une inégalité

de Sobolev et d'un contrôle sur la courbure analogues au cas compact, ou bien que l'on peut s'intéresser au problème de Dirichlet analogue à (1) sur une variété à bord ; ce sont entre autres ces idées générales qui sont développées au paragraphe suivant.

Notons néanmoins à ce point que dès l'article [Yau78], Yau s'intéresse déjà à la généralisation de son résultat et de ses méthodes à des cas où (X, g) est toujours compacte et lisse, mais où $F = e^f$ peut s'annuler, ou admettre des singularités, à la manière d'une fraction rationnelle, le long d'hypersurfaces (complexes) de X , voir [Yau78, Theorem 8].

0.1.3 Variations

Variétés non compactes. Un exemple immédiat de variété kählérienne non compacte est, partant d'une variété kählérienne compacte admettant un diviseur, le complémentaire de ce diviseur ; dans le cas projectif, on parle de *variété quasi-projective*. G. Tian et Yau donnent dans [TY90] le résultat suivant :

Théorème 1. *Si (X, g) est complète, à croissance au plus quadratique du volume, si le volume de ses boules de rayon 1 « ne décroît pas trop vite », sous certaines conditions de décroissance de f vérifiant $\int_X (e^f - 1) \text{vol}^g = 0$, et sous l'hypothèse d'un contrôle d'ordre 2 de cette fonction, le problème (1) admet une solution ([TY90, Theorem 1.1]).*

Nous renvoyons à l'article cité pour un énoncé précis. Cet théorème est motivé par la construction de métriques complètes Ricci-plates sur des variétés quasi-projectives, et des applications en géométrie algébrique ; il permet en effet, dans le cas où D est lisse et est un diviseur anticanonique d'une variété M , de construire une métrique kählérienne Ricci-plate sur $X = M \setminus D$. Cette construction est généralisée dans le cas où M admet des singularités de type *orbifold* dans [TY91].

Les hypothèses géométriques du théorème ci-dessus permettent d'avoir les contrôles suffisants sur la courbure ; elles permettent également de démontrer une inégalité de Sobolev adéquate à la résolution du problème.

Pour le cas où D n'est plus anticanonique, mais vérifie l'hypothèse d'amplitude $K_M \otimes [D] > 0$, voir le paragraphe 0.2.1.

Problème de Dirichlet, équation de Monge-Ampère complexe homogène. L'étude d'un problème de Dirichlet analogue à (1) sur une variété kählérienne à bord apparaît naturellement dans le cadre suivant. Si l'on revient à la donnée d'une variété kählérienne (X, ω) compacte, on peut considérer l'espace $\mathcal{M}_{[\omega]}$ des formes de Kähler cohomologues à ω . Cet espace, de dimension infinie, est muni par T. Mabuchi [Mab87] d'une métrique canonique, admettant une connexion de Levi-Civita ; on peut donc regarder les *géodésiques entre formes de Kähler* tracées dans $\mathcal{M}_{[\omega]}$. S. Semmes fait alors l'observation suivante [Sem92] : la donnée d'une géodésique $(\omega_t)_{t \in [0,1]}$ entre deux points ω_0 et ω_1 dans $\mathcal{M}_{[\omega]}$ est équivalente à la donnée d'une fonction lisse Φ sur le produit $X \times \Sigma$ vérifiant certaines conditions de bord, et telle que

$$\begin{cases} (\text{pr}^* \omega + i\partial\bar{\partial}\Phi)^{m+1} = 0 \\ (\text{pr}^* \omega + i\partial\bar{\partial}\Phi)|_{X \times \{w\}} > 0 \quad \text{pour tout } w \in \Sigma, \end{cases} \quad (2)$$

où Σ est une surface de Riemann à bord, $\text{pr} : X \times \Sigma \rightarrow X$ est la projection évidente, et l'opérateur $\partial\bar{\partial}$ est celui du produit.

Une des motivations à la résolution de cette équation des géodésiques est la suivante : il existe sur $\mathcal{M}_{[\omega]}$ une fonctionnelle, dite *K-énergie de Mabuchi*, dont les points critiques sont les *métriques à courbure scalaire constante* dans $\mathcal{M}_{[\omega]}$, et qui est convexe le long

des géodésiques, cf. [Mab87]. Précisons que la condition de courbure scalaire constante généralise la condition d'Einstein, et que l'existence de telles métriques a des conséquences sur la structure du groupe d'automorphismes de la variété, voir par exemple [Lic58].

Disposer de géodésiques (lisses) permet de parvenir à un résultat d'unicité des métriques à courbure scalaire constante dans $\mathcal{M}_{[\omega]}$ (modulo certains automorphismes de X , seuls autorisés par l'annulation de la dérivée seconde de la K-énergie le long d'une géodésique entre points critiques).

X. X. Chen résout (2) en un sens faible [Che00], grâce notamment à une formule de Yau, et les géodésiques qui en résultent, non lisses *a priori*, n'ont pas la régularité nécessaires à l'application du programme ci-dessus tel quel : l'homogénéité de l'équation est synonyme d'une dégénérescence problématique pour gagner en régularité sur les solutions. Chen parvient toutefois au résultat d'unicité escompté sous l'hypothèse supplémentaire $c_1(X) > 0$ ou $= 0$. La régularité des géodésiques est améliorée avec Tian [CT08], et permet finalement d'avoir l'unicité des métriques à courbure scalaire constante au sein d'une classe de Kähler modulo les automorphismes homotopes à l'identité en toute généralité. On sait toutefois que les géodésiques ne peuvent pas être lisses, ni même C^3 , en général, voir [LV11].

Métriques de Kähler-Einstein. Faisons la remarque suivante sur un problème différent du problème de Calabi, mais lié étroitement à ce dernier. Si $c_1(X) = 0$, on a vu que le théorème de Calabi-Yau nous donne des métriques de Kähler-Einstein dans n'importe quelle classe de Kähler. Qu'en est-il des cas où $c_1(X) > 0$ et $c_1(X) < 0$? Une condition nécessaire est que la métrique de Kähler-Einstein recherchée doit être dans $\mu c_1(X)$, avec $\mu > 0$ (*resp.* < 0) si $c_1(X) > 0$ (*resp.* $c_1(X) < 0$); en fixant $|\mu| = 2\pi$, on se ramène alors par des manipulations analogues à celles du paragraphe 0.1.1, à la résolution de l'équation $(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^{f+\varepsilon\varphi}\omega^m$, avec $\varepsilon = -\frac{\mu}{2\pi} \in \{-1, +1\}$. Le signe de ε s'avère ici crucial : si $\varepsilon = 1$, *i.e.* si $c_1(X) < 0$, on a très facilement une borne sur $\sup_X |\varphi|$; on peut alors reprendre les arguments de Yau pour les estimations d'ordre supérieur, et construire la métrique désirée. Si en revanche on est dans le cas $c_1(X) > 0$ (on dit que X est une *variété de Fano*), alors $\varepsilon = -1$, et l'argument précédent ne fonctionne plus. Le problème de l'existence de métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano est en réalité toujours ouvert ; nous revenons plus bas sur ce point, voir la conjecture 2 au paragraphe 0.2.1.

0.2 Résultats

0.2.1 Métriques kählériennes de type Poincaré sur le complémentaire d'un diviseur

Métriques kählériennes à courbure scalaire constante, le cas logarithmique. Dans [TY87], Tian et Yau se donnent un diviseur D à *croisement normaux simples* dans X . Sous l'hypothèse d'amplitude de $K_X[D]$ disons, ils démontrent l'existence sur $X \setminus D$ d'une métrique de Kähler-Einstein complète, à volume fini, et à singularités *cusps* le long de D ; comme dans le cas compact, la démonstration passe par la résolution d'une équation du type $(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^{f+\varphi}\omega^m$ (le cas « favorable »), où cette fois ω est construite au préalable avec les singularités évoquées, et φ ainsi que ses dérivées à tout ordre sont bornées par rapport à ω .

À cet égard, notre premier travail a consisté à généraliser les résultats de Chen sur les géodésiques entre métriques à des métriques à singularités similaires à la métrique de Kähler-Einstein de Tian-Yau, indépendamment de l'hypothèse $K_X[D] > 0$. La classe de métriques que nous regardons est définie de la manière suivante. On écrit la décomposition

du diviseur en composantes irréductibles $D = \sum_{j=1}^N D_j$; l'hypothèse de croisements normaux simples signifie que les D_j sont lisses, et que l'on peut se donner un recouvrement fini $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{U}_m$ de X par des polydisques ouverts $\Delta_{1/2}^m$ de coordonnées holomorphes de rayon $\frac{1}{2}$, tel que pour tout k , $U \in \mathcal{U}$ est dans \mathcal{U}_k ssi U est le voisinage d'un point d'un croisement à exactement k composantes de D , D_1, \dots, D_k , et $D_j \cap U = \{z^j = 0\}$ pour $j = 1, \dots, k$; on note la carte correspondante φ_U .

On généralise alors le comportement de la métrique de Tian-Yau par la définition suivante :

Définition 0.1. Soit $\tilde{\omega}$ une $(1,1)$ -forme réelle fermée strictement positive sur $X \setminus D$. On dit que $\tilde{\omega}$ est de type Poincaré si pour tout $k = 0, \dots, m$ et tout $U \in \mathcal{U}_k$,

- $(\varphi_U)_* \tilde{\omega}$ est mutuellement bornée sur $(\Delta_{1/2}^*)^k \times \Delta_{1/2}^{m-k}$ avec le produit de métriques de Poincaré sur les k premiers facteurs et de métriques euclidiennes sur les derniers facteurs;
- $(\varphi_U)_* \tilde{\omega}$ a ses dérivées bornées à tout ordre par rapport à cette métrique modèle.

Soit de plus une forme de Kähler ω_0 lisse sur X . On dit que $\tilde{\omega}$ est de classe $[\omega_0]$ si l'on peut écrire $\tilde{\omega} = \omega_0 + i\partial\bar{\partial}\psi$ avec ψ une fonction lisse sur $X \setminus D$, telle que $\psi = O(\sum_{j=1}^k \log(-\log|z^j|))$ dans chaque $U \in \mathcal{U}_k$ pour tout k , et que $|\nabla_{\tilde{\omega}}^\ell \psi|_{\tilde{\omega}} = O(1)$ pour tout $\ell \geq 1$. On pose alors $\tilde{\omega} \in \mathcal{PM}_{[\omega_0]}$.

On entend par métrique de Poincaré la métrique $\frac{idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|)}$ sur le disque épointé de rayon $\frac{1}{2}$. Les choix de cette définition sont motivés ci-dessous (p. 20); remarquons cependant que des métriques kählériennes de type Poincaré de classe $[\omega]$ existent pour toute métrique kählérienne ω sur X , et que dans le cas $K_X[D] > 0$ et $[\omega] = \mu c_1(K_X[D])$, $\mu > 0$, la métrique de Tian et Yau est bien un représentant de la classe définie.

Le premier théorème que nous énonçons est un théorème d'unicité pour des métriques kählériennes de type Poincaré à courbure scalaire constante, généralisant le résultat de Chen :

Théorème 2. Si $K_X[D]$ est ample sur X , alors pour toute forme de Kähler ω_0 lisse sur X , toute métrique de type Poincaré de classe $[\omega_0]$ à courbure scalaire constante est unique (théorème 5.1).

On ne se restreint donc pas, dans cet énoncé, au cas où $[\omega_0]$ est proportionnelle à $c_1(K_X[D])$; dans ce cas en effet l'unicité énoncée revient à l'unicité de métriques de Kähler-Einstein de type Poincaré, déjà prouvée dans [TY87].

Généralisation de la construction de Chen, et du théorème de Calabi-Yau. Comme dans le cas compact (où la condition d'amplitude est supposée sur K_X), la démonstration du théorème 2 passe par la construction de géodésiques entre métriques de la classe que l'on considère, qui s'énonce comme suit :

Théorème 3. On considère l'espace des métriques de type Poincaré sur $X \setminus D$ par rapport à une classe de Kähler sur X , équipé de la métrique de Mabuchi. Deux potentiels de métriques de cet espace peuvent être joints par une géodésique continue, qui de plus peut être approchée par des déformations C^∞ du segment joignant ces potentiels. Il existe un contrôle uniforme sur ces déformations, vues comme déformations de chemins entre potentiels : elles sont bornées, ainsi que leurs dérivées d'ordre 1 (en temps et en espace), et leurs dérivées d'ordre 2 en temps, mixtes, ou certaines de leurs dérivées en espace, à savoir leur hessien complexe (corollaire 2.2).

On notera que ce résultat est indépendant de l'amplitude de $K_X[D]$. La métrique de Mabuchi de l'énoncé est l'analogie de celle du cas compact. La construction des géodésiques est encore liée à la résolution d'une équation de Monge-Ampère homogène, sur le produit de $X \setminus D$ avec la surface de Riemann à bord Σ mentionnée au paragraphe 0.1.3; une difficulté dans le traitement d'une telle équation est ainsi la présence simultanée d'un infini et d'un bord, qui de plus se croisent à l'infini.

Un autre ingrédient crucial dans la preuve du théorème 2 est le résultat suivant :

Théorème 4. *Si $K_X[D]$ est ample sur X , alors pour toute forme de Kähler ω_0 lisse sur X , il existe $\tilde{\omega}$ de type Poincaré et de classe $[\omega_0]$ dont la forme de Ricci est majorée par $-\tilde{c}\tilde{\omega}$ pour une certaine constante $c > 0$ (théorème 3.3).*

Ce dernier énoncé requiert la résolution d'une équation de Monge-Ampère, pour métriques de type Poincaré, théorème obtenu *indépendamment de l'amplitude de $K_X[D]$* :

Théorème 5. *Soit $\tilde{\omega}$ une métrique kählérienne de type Poincaré, et f une fonction lisse sur $X \setminus D$, à décroissance rapide vers D à tout ordre, et telle que $\int_{X \setminus D} (e^f - 1) \text{vol}^{\tilde{\omega}} = 0$. Alors il existe une fonction ψ lisse sur $X \setminus D$ et bornée à tout ordre pour $\tilde{\omega}$, telle que : $(\tilde{\omega} + dd^c \psi)^m = e^f \tilde{\omega}^m$ sur $X \setminus D$. Un tel potentiel est unique aux constantes près (théorème 3.2).*

Par « décroissance rapide vers D à tout ordre » pour f , on entend : il existe $\nu > 0$ tel que pour tout k et tout $U \in \mathcal{U}_k$, $(\varphi_U)_* f$ et ses dérivées à tout ordre sont des $O(|\log |z^1| \cdots \log |z^k| |^{-\nu})$ près de $\{z^1 \cdots z^k = 0\}$.

Dans le théorème 5, l'équation en jeu est encore une équation de Monge-Ampère; de manière quelque peu surprenante, nous n'avons pas trouvé sa résolution dans la littérature. Par ailleurs, les situations dans les théorèmes 3 et 5 sont assez différentes, et pour cette raison, les démonstrations le sont aussi : preuve basée sur le travail de Chen [Che00] dans le premier cas, preuve plus proche de l'article de Tian et Yau [TY90] dans le second cas.

Contraintes topologiques. On s'éloigne ici momentanément du problème général de la résolution d'équations de Monge-Ampère singulières, pour se concentrer sur les métriques de type Poincaré à courbure scalaire constante. Nous avons donné ci-dessus un résultat d'unicité de telles métriques; énonçons à présent une obstruction générale à leur existence :

Théorème 6. *On suppose qu'il existe sur $X \setminus D$ une métrique de type Poincaré, de classe $[\omega_0]$ (avec ω_0 lisse sur X). Alors pour tout $j = 1, \dots, N$ indexant une composante irréductible D_j de D , on a l'inégalité suivante :*

$$m \frac{c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-1}}{[\omega_0]^m} < (m-1) \frac{c_1(K_X[D])c_1([D_j])[\omega_0]^{m-2}}{c_1([D_j])[\omega_0]^{m-1}}$$

(théorème 6.1).

L'inégalité s'interprète en disant que la courbure scalaire hors du diviseur doit être strictement inférieure à la courbure scalaire moyenne associée à la classe de Kähler induite sur chaque composante du diviseur. Quand les métriques sont asymptotiquement produits, la démonstration du théorème 6 est assez intuitive (les métriques à comportement Poincaré sur les disques normaux à D apportent une contribution négative à la courbure scalaire), et montre que le diviseur lui-même admet une métrique à courbure scalaire constante. Notre travail a donc été de généraliser cette intuition à une classe de métrique plus large : ne pas demander un comportement asymptotique précis sur les métriques de Poincaré nous

permet alors d'économiser une hypothèse d'existence de métrique kählérienne à courbure scalaire constante sur le diviseur.

Choix de la classe de métriques. La classe de métriques que nous fixons dans la définition 0.1 appelle deux types de commentaires. Premièrement, des métriques à singularités telles que nous les envisageons peuvent apparaître naturellement comme limites de métriques lisses. Citons la conjecture de Yau-Tian-Donaldson [Yau93, Tia97, Don02] :

Conjecture 2. *Une variété polarisée compacte admet une métrique kählérienne à courbure scalaire constante dans la classe de polarisation si, et seulement si, elle est K-stable.*

La « K-stabilité » est une notion algébro-géométrique proche de la Théorie Géométrique des Invariants, cf. [Don02] ; un des buts de cette conjecture est de résoudre en le généralisant le problème de l'existence de métriques de Kähler-Einstein dans le cas Fano. À présent, sans entrer dans les détails, mentionnons qu'un angle d'attaque à la résolution de cette conjecture est la construction d'une suite de métriques kählériennes, dites *métriques équilibrées*, et un point crucial est la compréhension de leur convergence et de leur éventuelle limite ; il est tout à fait possible que des métriques de type Poincaré apparaissent comme de telles limites.

Par ailleurs, Donaldson envisage dans un travail récent [Don11] ce problème des métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano *via* des métriques à *singularités coniques* ; le but est de mieux comprendre les métriques lisses en étudiant ces métriques singulières, et en faisant tendre l'angle des singularités vers 2π , voir aussi [RT11, CGP11, JMR11]. Symétriquement, une compréhension globale des métriques à singularités coniques pourrait exiger une analyse du cas limite où l'angle tend vers 0, c'est-à-dire lorsque les cônes deviennent des *cusps*.

Signalons de plus que l'inégalité du théorème 6 a été suggérée dans [Szé06, §3.2], dans une conjecture plus large étendant la conjecture 2 aux variétés quasi-projectives, voir la conjecture 3 du paragraphe suivant.

D'autre part, de manière plus concrète, le contrôle que nous demandons sur nos métriques de types Poincaré peut sembler assez faible ; considérer des métriques avec un comportement plus précis près du diviseur comme dans [Szé06, §3.2] aurait sûrement permis des considérations analytiques plus fines. Les contrôles requis autorisent néanmoins l'analyse suffisante des métriques concernées (par exemple, l'utilisation d'estimées de Schauder dans des revêtements locaux), et donnent un résultat d'unicité (théorème 2) assez général ; la construction de géodésiques, même approchées, dans une classe restreinte, s'avère en revanche un problème assez délicat. On ne sait pas en outre si l'on peut demander un comportement asymptotique précis des métriques kählériennes de type Poincaré à courbure scalaire constante près du diviseur – comme c'est le cas pour la métrique Kähler-Einstein de Tian-Yau [Sch02] – et le théorème d'unicité que nous donnons pourrait être utile sur ce point. Notons enfin qu'en ne demandant pas un comportement asymptotique pour les métriques de type Poincaré, nous évitons de contraindre l'existence d'une métrique kählérienne à singularités *cusp* et à courbure scalaire constante hors du diviseur, à celle d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante sur le diviseur.

Donnons finalement quelques précisions sur les conditions sur les potentiels de la définition 0.1. Cette condition peut apparaître quelque peu artificielle, et on pourrait vouloir la remplacer par l'énoncé suivant, plus naturel :

$$- \text{ « } \tilde{\omega} = \omega_0 + d\eta \text{ pour une 1-forme } \eta \in L^2(X \setminus D, \tilde{\omega}) \text{ » ,}$$

puis déduire l'existence d'un potentiel ψ comme décrit dans la définition *a posteriori*. Ceci est en réalité faisable, voir la section 1.4, au moins dans le cas où le diviseur est lisse ;

nous avons toutefois gardé notre condition sur les potentiels sous cette forme dans notre définition car ce point n'est pas trivial ; de plus l'énoncé de la définition 0.1 s'avère plus utile au cours de notre travail. La question principale est en fait celle d'un *contrôle* L^∞ sur la différentielle des potentiels, qui s'avère crucial dans la preuve du théorème 2, voir la section 2.2.

0.2.2 Instantons gravitationnels ALF

Instantons gravitationnels. Une seconde partie de nos travaux, plus proche de la direction impulsée par Tian et Yau dans [TY90, TY91], suivie également par Joyce [Joy00, ch. 8] et H. J. Hein [Hei10], a trait aux *instantons gravitationnels*, c'est-à-dire aux variétés de dimension (réelle) 4 complètes et hyperkähleriennes (et donc Ricci-plates). Un premier intérêt à considérer de tels objets vient de la physique théorique ; les instantons gravitationnels sont présents par exemple en gravité quantique et en théorie des cordes. Une seconde motivation provient d'un point de vue interne à la géométrie différentielle ; les instantons gravitationnels peuvent en effet apparaître comme limites de processus d'éclatements de métriques d'Einstein sur des variétés de dimension 4. Quand la limite ne s'effondre pas, on a affaire à des espaces ALE (*Asymptotically Locally Euclidian*), tandis que quand il y a effondrement, on obtient un espace ALF (*Asymptotically Locally Flat*), ALG ou ALH (G et H, suivant E et F, n'ont pas de sens propre).

La première famille, consistant en des variétés asymptotiques à un quotient de \mathbb{R}^4 par un sous-groupe fini de $SO(4)$, est totalement classifiée par P.B. Kronheimer [Kro89b]. De plus, toutes les métriques ALE possibles sont construites par quotient hyperkählierien [Kro89a]. Une classification des familles ALG et ALH a été entreprise récemment par Hein.

Quant à la famille ALF, elle consiste en des variétés asymptotiques à une fibration en cercles au-dessus de \mathbb{R}^3 ou de $\mathbb{R}^3/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, voir [Min07] ; le prototype de ce type d'espaces est donné par \mathbb{C}^2 muni de la métrique de Taub-NUT, introduite par Hawking [Haw77]. Elle se scinde principalement en deux sous-familles : les variétés de type cyclique, ou « instantons ALF de type \mathcal{A}_k », et celles de type diédral, ou « instantons ALF de type \mathcal{D}_k ». Les premières sont très bien comprises ; elles ont été en effet récemment totalement classifiées par V. Minerbe [Min11], et leur construction est totalement explicite, ainsi qu'il apparaît dans [GH76]. De manière plus précise, les instantons ALF de type \mathcal{A}_k s'identifient comme variétés aux instantons ALE de même type de la classification de Kronheimer, et la métrique hyperkählienne ALF dépend des mêmes paramètres que son homologue ALE, auxquels il faut ajouter un « paramètre de masse » m (le terme de « masse » étant utilisé par analogie avec la métrique de Schwarzschild, le paramètre supplémentaire s'interprétant plutôt comme l'inverse d'une aire).

Les ALF de type diédral sont en revanche moins bien connus. D'une part, il n'existe pas de classification des instantons ALF de type diédral comparable à celle des instantons ALF de type cyclique. Un tel résultat, sous une forme tout à fait similaire, est toutefois conjecturé : on s'attend à ce qu'un instanton ALF de type \mathcal{D}_k ($k \geq 2$) s'identifie en tant que variété à un instanton ALE du même type, et que la métrique ALF dépende des mêmes paramètres que la métrique ALE, plus le paramètre de masse (voir la conjecture 5 du paragraphe suivante). D'autre part, la construction des exemples connus, comme dans [CH05] ou [CK98], est assez peu explicite, ce qui est une source de motivation pour une construction plus explicite de tels espaces.

Construction d'instantons ALF. Une première étape vers la classification des instantons ALF de type \mathcal{D}_k évoquée ci-dessus consiste en la construction des instantons ALF figurant

dans la classification espérée ; nous avons donc entrepris une telle construction, sous une forme analytique et assez explicite. Cette construction, appropriée pour voir le lien entre instantons ALE et ALF de même type, repose sur la classification des instantons ALE de type \mathcal{D}_k par Kronheimer, ainsi que par une description originale de la métrique de Taub-NUT, ou plus exactement d'une famille de métriques de Taub-NUT $(\mathbf{f}_m)_{m>0}$, suggérée dans [LeB91]. Résumons notre construction dans l'énoncé suivant :

Théorème 7. *Soit $k \geq 2$. Pour toute structure hyperkählérienne sur un instanton gravitationnel ALE (X, g_0, I_j^X) de type \mathcal{D}_k qui est une résolution minimale de $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ pour I_1^X , il existe une famille $(g_m)_{m>0}$ de métriques complètes hyperkählériennes ALF indexée par un paramètre de « masse » $m \in]0, +\infty[$. Ces métriques sont kählériennes pour I_1^X , et $g_m(I_1^X, \cdot)$ et $g_0(I_1^X, \cdot)$ sont cohomologues. Par conséquent, de telles métriques ALF sont paramétrées par les mêmes paramètres que les métriques ALE correspondantes, soit trois classes dans $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$, plus le paramètre de masse. On a de plus, à m fixé, l'estimation $(g_m - \tilde{\mathbf{f}}_m), \nabla^{\tilde{\mathbf{f}}_m}(g_m - \tilde{\mathbf{f}}_m) \in O(\tilde{R}^{-2-\delta})$ pour tout $\delta \in (0, 1)$ (théorème 9.1).*

Nous renvoyons au paragraphe suivant, conjecture 4, pour un énoncé analogue dans le cas général où l'espace X est une déformation de $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$, établi suivant une méthode similaire. Dans l'énoncé ci-dessus, $\tilde{\mathbf{f}}_m$ est sur X une extension lisse de la poussée-en-avant de la métrique de Taub-NUT \mathbf{f}_m de \mathbb{C}^2 , \mathcal{D}_k -invariante, via un biholomorphisme entre voisinages de l'infini de $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ et X ; \tilde{R} joue le rôle d'une distance pour $\tilde{\mathbf{f}}_m$ à un point fixé dans X .

Ce résultat est lié au problème général de la résolution d'équations de Monge-Ampère sur des variétés non compactes de la manière suivante. Le théorème 7 est établi en fixant m et en partant d'une métrique I_1^X -kählérienne proche de $\tilde{\mathbf{f}}_m$, dans la classe $[g_0(I_1^X, \cdot)]$. Il s'agit ensuite de rendre cette métrique Ricci-plate, en rendant sa forme volume égale à celle de g_0 ; cette étape cruciale de notre construction se traduit à nouveau par la résolution d'une équation de type Monge-Ampère, adaptée à la géométrie ALF.

Notons ici que l'on construit une famille de métriques dont les formes de Kähler sont cohomologues, et qui ont toutes même forme volume. Or les modèles sur \mathbb{C}^2 auxquels se comparent ces métriques ne sont pas asymptotiquement proches : on peut par exemple voir $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ comme une fibration en cercles au-dessus de $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ (indépendamment de m) ; la métrique de Taub-NUT \mathbf{f}_m de paramètre m confère alors aux fibres une longueur tendant vers $\pi\sqrt{2/m}$ à l'infini. La construction des métriques du théorème 7 contraste donc avec le théorème de Calabi-Yau classique, ainsi qu'avec notre version logarithmique (théorème 5), dans lesquels la forme de Kähler obtenue est unique au sein de sa classe de Rham.

Version ALF du théorème de Calabi-Yau. L'équation de Monge-Ampère en question dans la construction du théorème 7, comme celle du théorème 5, a un membre de droite strictement positif avec des asymptotiques précises. Néanmoins, la situation géométrique ALF est radicalement différente de celle des métriques de type Poincaré de la section précédente ; par exemple, le volume est infini, et le rayon d'injectivité est minoré près de l'infini. Elle est plus proche du cadre ALE : en ne considérant par exemple que des objets invariants sous l'action de cercle associée à la fibration pour un espace ALF, on est ramenés à une situation asymptotiquement euclidienne (de dimension 3). C'est pourquoi la résolution de notre équation de Monge-Ampère est, dans une certaine mesure, plutôt inspirée par la résolution de Joyce [Joy00] sur les espaces ALE. On établit et démontre le résultat suivant, à comparer aux théorèmes 1 et 5 :

Théorème 8. *Soit (Y, g_Y, J^Y, ω_Y) une variété kählérienne ALF de dimension 4 de type diédral; on note ρ la distance à un point fixe de Y . Étant donnée une fonction f lisse, telle qu'il existe $\gamma \in (0, 1)$ tel que $(\nabla^{g_Y})^\ell f = O(\rho^{-2-\ell-\gamma})$ pour tout $\ell \geq 0$, il existe sur Y une unique fonction lisse $\varphi \in C_{loc}^\infty$ telle que $(\nabla^{g_Y})^\ell \varphi = O(\rho^{-\ell-\gamma})$ pour tout $\ell \geq 0$, et*

$$(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f \omega_Y^2$$

(théorème 9.12).

D'après l'unicité sur le potentiel de ce théorème, on devine en écho au commentaire ci-dessus que la métrique de référence (ou métrique à corriger si l'on se place du point de vue de la construction entreprise) doit varier avec le paramètre m . Ceci explique la généralité dans laquelle nous écrivons ce dernier énoncé.

Si l'on compare en outre le potentiel φ obtenu dans cet énoncé à celui du théorème 5, on remarque que les asymptotiques dans le cas présent sont plus fines que dans le cas logarithmique, où les potentiels sont essentiellement bornés à tout ordre, en dépit d'un comportement précis du membre de droite. Nous verrons aux chapitres 4 et 10, ainsi que dans l'appendice A, que ces problèmes sont liés à des considérations d'*analyse à poids*.

Concluons en remarquant que Hein donne un résultat semblable au nôtre; voir [Hei10, Theorem 4.1], avec le paramètre β pris égal à 3. Ce résultat, plus général quoique plus abstrait, ne fournit néanmoins pas d'asymptotiques sur le potentiel solution, asymptotiques nécessaires pour la construction énoncée par le théorème 7; ceci justifie notre choix d'énoncer et de démontrer le théorème 8 sous cette forme.

0.2.3 Limites des résultats

Au vu de nos résultats du paragraphe 0.2.1, une étude à mener serait la généralisation des difficiles résultats de [CT08] pour se passer de l'amplitude de $K_X[D]$ dans le théorème 2, et obtenir un résultat d'unicité des métriques de type Poincaré à courbure scalaire constante modulo l'action d'automorphismes homotopes à l'identité et tangents au diviseur.

On peut également vouloir préciser les obstructions à l'existence de ces métriques. Dans cette direction, une conjecture a déjà été posée par Székelyhidi [Szé06], qui étend au cadre des métriques de type Poincaré la conjecture 2 :

Conjecture 3. *Une variété polarisée compacte (X, L) admet une métrique Kählérienne asymptotiquement hyperbolique hors d'un diviseur lisse D et à courbure scalaire constante dans la classe de polarisation si, et seulement si, le triplet (X, D, L) est K -stable.*

Les « métriques asymptotiquement hyperboliques » de cet énoncé constituent une sous-classe de nos métriques de type Poincaré. Nous revenons sur la notion de K -stabilité pour un triplet (variété, diviseur, fibré en droites), ainsi que sur l'intérêt qu'il existe à travailler dans la classe plus large des métriques de type Poincaré, dans la section 6.2 du mémoire.

On peut aussi se poser la question plus concrète de la construction d'exemples originaux de telles métriques. Plusieurs pistes semblent envisageables pour ce type de construction. On pourrait tout d'abord exploiter la résolution par Donaldson de la conjecture 2 sur les surfaces toriques (cf. [Don02, Don09]), et transposer sa construction de métriques kählériennes à courbure scalaire constante sur le complémentaire d'un diviseur dans une surface torique, en supposant le diviseur globalement invariant sous l'action de tore. On peut d'autre part s'inspirer des techniques de C. Arezzo et F. Pacard (voir par exemple [AP09]), en partant de la métrique de Kähler-Einstein de Tian-Yau, et en éclatant des points hors du diviseur.

Nous nous restreignons, au paragraphe 0.2.2, à des résolutions de singularités kleinennes \mathbb{C}^2/Γ , avec Γ un groupe binaire diédral. Une première question serait donc de donner un théorème similaire au théorème 7 dans le cas général des déformations de ces résolutions, sur lesquelles vivent également des métriques hyperkählériennes ALE ([Kro89a]). Cette question semble consister essentiellement en une compréhension fine de ces instantons ALE, dont on tire un modèle grossier (les $\tilde{\mathbf{f}}_m^p$ ci-dessous) adéquat ; la contrepartie d'une généralisation de notre construction de métriques hyperkählériennes ALF sur de pareils espaces semble être une moins bonne coïncidence entre le modèle, assez explicite, et la métrique de l'instanton, ce pourquoi l'on suggère :

Conjecture 4. *Soit $k \geq 2$. Pour toute structure hyperkählérienne sur un instanton gravitationnel ALE (X, g_0, I_j^X) de type \mathcal{D}_k , il existe une famille $(g_m)_{m>0}$ de métriques complètes hyperkählériennes ALF indexée par un paramètre de « masse » $m \in]0, +\infty[$. Ces métriques sont kählériennes pour I_1^X , et $g_m(I_1^X \cdot, \cdot)$ et $g_0(I_1^X \cdot, \cdot)$ sont cohomologues. Par conséquent, de telles métriques ALF sont paramétrées par les mêmes paramètres que les métriques ALE correspondantes, soit trois classes dans $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$, plus le paramètre de masse. On a de plus, à m fixé, l'estimation $(g_m - \tilde{\mathbf{f}}_m^p) \in O(\tilde{R}^{-1-\delta})$ pour tout $\delta \in (0, 1)$ (théorème 9.1).*

Les métriques $\tilde{\mathbf{f}}_m^p$ sont les extensions aux instantons X de métriques \mathbf{f}_m^p définies hors d'un compact de \mathbb{C}^2 , assez proches des métriques de Taub-NUT \mathbf{f}_m ; en particulier, leur tenseur de Ricci tend vers 0 à l'infini.

Cette construction établie, il serait tentant de vouloir revenir au problème de classification évoqué au paragraphe 0.2.2, et d'émettre une dernière conjecture :

Conjecture 5. *Tout instanton gravitationnel ALF de type \mathcal{D}_k est isométrique à l'un des exemples de la conjecture 4, et l'isométrie en jeu respecte les structures hyperkählériennes.*

Ceci nous dirait en particulier que les métriques que nous construisons coïncident avec celles de [CH05] ou de [CK98], ce qui reste obscur jusqu'à présent.

Un angle d'attaque possible pour démontrer la conjecture 5 serait une démarche en quelque sorte réciproque à celle de notre construction, qui consisterait en la construction d'une métrique hyperkählérienne ALE sur un instanton gravitationnel ALF de type \mathcal{D}_k donné. Il est clair, sur le modèle $(\mathbb{C}^2, (\mathbf{f}_m)_{m>0})$, que \mathbf{f}_m tend vers la métrique euclidienne quand m tend vers 0 en topologie C_{loc}^∞ ; on peut donc vouloir étendre la métrique de l'instanton gravitationnel ALF de départ en une famille à un paramètre $m \in (0, \infty)$, et faire tendre m vers 0 pour récupérer la métrique ALE.

On souhaite toutefois, avant d'entreprendre ce programme, bien comprendre le comportement des métriques g_m du théorème 7 lorsque m tend vers 0.

0.2.4 Organisation du mémoire

Nous respectons dans le texte qui suit, scindé en deux parties, le plan d'exposition esquissé ci-dessus.

La première partie du mémoire est consacrée aux métriques kählériennes de type Poincaré sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux simples dans une variété compacte. Cette partie est organisée en six chapitres, et un appendice. Le premier chapitre traite d'exemples et de préliminaires analytiques dans le cadre des métriques kählériennes de type Poincaré. On rappelle un modèle simple, dont on regarde plus en détail le comportement près du diviseur (section 1.1), puis on étend succinctement quelques notions

utiles dans la compréhension de la géométrie d'un espace de métriques kählériennes et dans l'étude des métriques à courbure scalaire constante ; parmi ces notions figurent la métrique et la K-énergie de Mabuchi. Ceci nous conduit à l'équation des géodésiques dans notre espace de métriques $\mathcal{PM}_{[\omega_0]}$; il est équivalent de la considérer comme équation des géodésiques dans l'espace des potentiels, et elle s'écrit alors, étant donné un chemin $(v_t)_{t \in [0,1]}$ reliant v_0 et v_1 , correspondant à un chemin de métriques (ω_t) :

$$\ddot{v}_t - |\partial v_t|_{\omega_t}^2 = 0,$$

comme dans le cas compact. Précisons que nous concluons ce chapitre 1 par une section complémentaire 1.4, où l'on généralise des résultats comme l'inégalité de Poincaré, et où l'on discute du contrôle que l'on peut obtenir sur les potentiels en élargissant la définition des métriques de type Poincaré, comme évoqué plus haut.

On résout formellement l'équation des géodésiques dans le chapitre 2 (théorème 2.1), en adaptant les techniques utilisées par Chen et Błocki [Che00, Bł0] à notre contexte ; on utilise en particulier une *méthode de continuité*, analogue à celle de Chen, pour une équation de de Monge-Ampère homogène sur le produit $(X \setminus D) \times [0, 1] \times S^1$ dérivée de l'équation (1.3) (section 2.2). À ce point, la difficulté liée au bord à l'infini D s'ajoute à celle provenant du bord à distance finie de $[0, 1] \times S^1$. On contourne néanmoins ces problèmes grâce au cadre Poincaré ; plus précisément, on remplace les boules de coordonnées locales utiles à l'analyse par des boules de coordonnées d'un revêtement local (on parle de « quasi-coordonnées ») dans le sens $X \setminus D$, cette manipulation permettant de se ramener à une métrique de référence fixe. On utilise en outre pour des raisonnements plus globaux un principe du maximum adéquat (lemme 2.8), dans lequel le bord sur lequel on demande usuellement la négativité de la fonction considérée est remplacé par $(X \setminus D) \times \{0, 1\} \times S^1$.

Dans les deux chapitres centraux 3 et 4 nous revenons sur $X \setminus D$. Dans le premier de ces chapitres, nous énonçons notre théorème de Calabi-Yau logarithmique (section 3.1). Nous l'utilisons dans la section à suivre pour construire des métriques de type Poincaré à forme de Ricci strictement négatives, sous réserve de l'amplitude de $K_X[D]$. Quant au chapitre 4, nous le consacrons à la preuve du théorème de Calabi-Yau logarithmique, en suivant une progression assez classique pour ce qui est d'un contrôle uniforme (estimées C^0 , puis estimées d'ordre 2, 3, et d'ordre supérieur, sur les potentiels, à la section 4.1), et nous établissons les propriétés de décroissance rapide de potentiels intermédiaires en section 4.2.

Dans la chapitre 5, nous appliquons les constructions de géodésiques approchées et de métriques à forme de Ricci strictement négative au résultat d'unicité des métriques kählériennes à courbure scalaire constante, sous l'hypothèse d'amplitude de $K_X[D]$ (théorème 5.1). On n'a pas besoin d'énoncer cette unicité modulo l'action d'automorphismes parallèles à D , puisqu'un de champ de vecteurs holomorphe L^2 pour une métrique de type Poincaré est nécessairement nul, ainsi que l'explique le lemme 5.2, lorsque $K_X[D]$ est ample.

On traite dans le chapitre 6 la contrainte topologique énoncée par le théorème 6. Après avoir éclairé les liens existant entre cet énoncé et les suggestions de Székelyhidi [Szé06, §3.2] dans la section 6.2, on énonce dans le cas où le diviseur est lisse deux propositions dont le théorème 6 est un corollaire. On démontre ces propositions, en supposant toujours le diviseur lisse, dans la section 6.4. On conclut le chapitre par une généralisation au cas où le diviseur est à croisements normaux simples.

En appendice, nous donnons une version plus fine du théorème 5 dans le cas où le diviseur est lisse (théorème A.1).

Dans la seconde partie du mémoire, rédigée en anglais et organisée selon quatre chapitres, on étudie une construction analytique nouvelle d'instantons gravitationnels ALF de type diédral, en partant d'instantons gravitationnels ALE de même type.

Un premier chapitre (chapitre 7 du mémoire), succinct, consiste ainsi en une présentation rudimentaire des instantons gravitationnels ALE de type diédral, et s'attache plus particulièrement à quelques propriétés d'une certaine sous-classe de tels espaces, à savoir les *résolutions minimales*, ou *crépantes*, de \mathbb{C}^2/Γ , avec Γ sous-groupe fini de $SU(2)$ (de type binaire diédral).

On donne dans le second chapitre (chapitre 8) une description originale d'une famille à un paramètre de métriques de Taub-NUT, et de leurs potentiels, sur \mathbb{C}^2 muni de sa structure complexe usuelle. Cette description est suggérée sous forme d'exercice par LeBrun [LeB91] ; nous résolvons cet exercice, et exploitons le caractère explicite de la solution obtenue en vue d'une comparaison des métriques de Taub-NUT avec la métrique euclidienne, comparaison utile dans les calculs du chapitre suivant.

Nous appliquons dans le troisième chapitre de cette seconde partie (chapitre 9) la description du chapitre précédent à la construction énoncée dans le théorème 7. Le programme de cette construction, dont la première étape est immédiate, est décrit en section 9.1 ; la seconde étape, un recollement du potentiel approprié sur l'instanton ALE considéré, est effectué en section 9.2. La troisième étape, consistant à corriger la forme volume de la métrique « brute » obtenue, nécessite toutefois, telle que nous l'exposons, plus de travail : ceci est l'objet des sections 9.3 à 9.5.

La conclusion du programme du chapitre 9 se fonde sur une application du théorème 8, que nous prouvons dans le quatrième chapitre de cette seconde partie (soit le chapitre 10). La preuve est basée sur une méthode de continuité, rappelée en section 10.1. Les *estimations a priori* nécessaires à son fonctionnement sont obtenues en section 10.2, et on conclut la preuve dans la section 10.3.

Première partie

**Métriques kählériennes de type
Poincaré sur le complémentaire
d'un diviseur**

Six chapitres et un appendice

L'espace des métriques

L'OBJET de ce premier chapitre est de donner la définition, ainsi que quelques propriétés basiques, des métriques kählériennes de type Poincaré, en référence à un modèle simple.

1.1 Métrique modèle

1.1.1 Construction

On commence par construire une métrique ω sur le complémentaire d'un diviseur dans une variété kählérienne compacte ; nous utilisons ω comme prototype des métriques kählériennes de type Poincaré. Soit (X, ω_0, J) une variété kählérienne compacte de dimension complexe m , dans laquelle on considère un diviseur D à croisements normaux simples, dont nous écrivons la décomposition en composantes irréductibles $D = \sum_{j=1}^N D_j$. Par *croisements normaux simples* nous entendons que :

1. les D_j sont lisses, et en particulier ne s'auto-intersectent pas ;
2. l'on a autour de chaque point d'un croisement à k composantes, $D_1 \cap \dots \cap D_k$ disons, un ouvert U de coordonnées holomorphes $(z^1, \dots, z^k, z^{k+1}, \dots, z^m) \in \Delta^m$ tel que $D_j \cap U = \{z^j = 0\}$ pour $j = 1, \dots, k$; ici, Δ est le disque unité ouvert de \mathbb{C} .

Soit $\sigma_j \in (\mathcal{O}([D_j]), |\cdot|_j)$ une section holomorphe définissant D_j , *i.e.* donnant l'équation globale $D_j = \{\sigma_j = 0\}$, $j = 1, \dots, N$. On peut supposer que

$$\rho_j := -\log(|\sigma_j|_j^2)$$

est minoré par 1 hors de D_j ; on notera également que $i\partial\bar{\partial}\rho_j$ s'étend en une forme réelle de type (1,1) lisse à X tout entière, de classe $2\pi c_1([D_j])$.

Soit à présent λ un paramètre réel positif. Si l'on pose $u_j := \log(\lambda + \rho_j) = \log(\lambda - \log(|\sigma_j|_j^2))$, on obtient :

Lemme 1.1. *Soit $A > 0$. Dès que λ est assez grand (ceci dépendant de A et ω_0), la (1,1)-forme fermée*

$$\omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u_j \tag{1.1}$$

définit une forme de Kähler sur $X \setminus D_j$.

Démonstration. Il est clair que $\omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u_j$ est de type (1,1) et fermée. Le lemme découle alors d'un calcul simple ; en effet,

$$-Ai\partial\bar{\partial}u_j = \frac{Ai\partial\rho_j \wedge \bar{\partial}\rho_j}{(\lambda + \rho_j)^2} - \frac{Ai\partial\bar{\partial}\rho_j}{\lambda + \rho_j}.$$

Le premier terme est une (1,1)-forme positive, tandis que $\pm \frac{Ai\partial\bar{\partial}\rho_j}{\lambda+\rho_j} \leq \frac{CA}{\lambda+\rho_j}\omega_0$ au sens des (1,1)-formes, où C est choisie telle que $\pm i\partial\bar{\partial}\rho_j \leq C\omega_0$ sur X . Comme ρ_j tend vers $+\infty$ près de D_j , on a $\omega_0 - \frac{Ai\partial\bar{\partial}\rho_j}{\lambda+\rho_j} > 0$ sur $X \setminus D_j$ dès que λ est assez grand. \square

Choisissons $A_1, \dots, A_N > 0$. En remplaçant ω_0 par $\frac{1}{N}\omega_0$, et en augmentant λ si nécessaire, on a $\frac{1}{N}\omega_0 - A_j i\partial\bar{\partial}u_j > 0$ sur $X \setminus D_j$ pour $j = 1, \dots, N$, donc

$$\omega := \omega_0 - i\partial\bar{\partial}u = \omega_0 - \sum_{j=1}^N A_j i\partial\bar{\partial}u_j = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{N}\omega_0 - A_j i\partial\bar{\partial}u_j \right), \quad \text{où } u = \sum_{j=1}^N A_j u_j, \quad (1.2)$$

définit bien une forme de Kähler sur $X \setminus D$. Ce point étant vérifié, nous allons aussi voir en quel sens ω peut être comparée à un produit (métriques *cusp* autour du diviseur) \times (métrique lisse sur le diviseur), et même donner une description précise de son comportement asymptotique.

1.1.2 Comportement asymptotique

On rappelle que l'on peut donner localement des équations des D_j à l'aide de coordonnées complexes indépendantes. On a alors :

Proposition 1.2. *On se donne autour d'un point de $D_{j_1} \cap \dots \cap D_{j_k}$ un voisinage de coordonnées complexes $(z^1, \dots, z^k, z^{k+1}, \dots, z^m)$ telles que z^ℓ soit une équation de D_{j_ℓ} , $\ell \in \{1, \dots, k\}$. On pose*

$$\omega_{U,A} = \sum_{j=1}^k \frac{A_j i dz^j \wedge d\bar{z}^j}{|z^j|^2 \log^2(|z^j|^2)} + \left(\omega_0 - \sum_{j=k+1}^N A_j i\partial\bar{\partial}u_j \right) |_{D_1 \cap \dots \cap D_k},$$

où le dernier terme du membre de droite est la métrique $\omega_0 - \sum_{k=j+1}^N A_j i\partial\bar{\partial}u_j$ restreinte à $\Lambda_{D_1 \cap \dots \cap D_k}^{1,1}$. Alors $\|\nabla_{\omega_{U,A}}^p(\omega - \omega_{U,A})\|_{\omega_{U,A}} = O(\rho_1^{-1} + \dots + \rho_k^{-1})$ pour tout $p \geq 0$.

Démonstration. On fait le cas où $k = 1$ et $p = 0$. Remarquons que l'on peut écrire $|\sigma_1|_1^2 = e^f |z^1|^2$ pour une certaine fonction f lisse à travers D . Ainsi, $\rho_1 = f + \log(|z^1|^2) \sim \log(|z^1|^2)$, $\partial\rho_1 = \frac{dz^1}{z^1} + \partial f$ et $i\partial\bar{\partial}\rho_1 = i\partial\bar{\partial}f$, et en conséquence,

$$-i\partial\bar{\partial}u_1 = \frac{idz^1 \wedge d\bar{z}^1 + i(z^1 dz^1 \wedge \bar{\partial}f + \bar{z}^1 \partial f \wedge d\bar{z}^1) + |z^1|^2 i\partial f \wedge \bar{\partial}f}{|z^1|^2 \rho_1^2 (1 + (\lambda + f)/\rho_1)^2} - \frac{i\partial\bar{\partial}f}{\rho_1 + \lambda}.$$

Comme $\omega_{U,A}$ domine ω_0 et que $i\partial\bar{\partial}f$ est lisse, $i\partial\bar{\partial}f$ est borné i.e. $-\frac{i\partial\bar{\partial}f}{\rho_1 + \lambda}$ est un $O(\rho_1^{-1})$ pour $\omega_{U,A}$. De même, df est bornée pour ω_0 et donc pour $\omega_{U,A}$, d'où $|i(z^1 dz^1 \wedge \bar{\partial}f + \bar{z}^1 \partial f \wedge d\bar{z}^1)| \leq C|dz^1|_{\omega_{U,A}} = CA_1^{-1/2}|z^1| \log(|z^1|^2)|$, ce qui donne un $O(\rho_1^{-1})$ après division par $|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)$. On a encore $|z^1|^2 i\partial f \wedge \bar{\partial}f = O(|z^1|^2)$, ce qui donne un $O(\rho_1^{-2})$ après division par $|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)$, d'où, par rapport à $\omega_{U,A}$, $-i\partial\bar{\partial}u_1 = \frac{A_1 idz^1 \wedge d\bar{z}^1}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)}$ à un $O(\rho_1^{-1})$ près.

Par ailleurs, $\omega' = \omega_0 - \sum_{j \geq 2} A_j i\partial\bar{\partial}u_j$ étant lisse sur U , on a

$$(\omega'_{j\bar{k}} - (\omega'|_{D_1})_{j\bar{k}}) idz^j \wedge d\bar{z}^k = O(z^1)$$

pour $j, k \geq 2$, ce qui est largement un $O(\rho_1^{-1})$. Enfin, $\omega'_{1\bar{k}} idz^1 \wedge d\bar{z}^k$ et $\omega'_{1\bar{1}} idz^1 \wedge d\bar{z}^1$ sont respectivement un $O(|dz^1|_{\omega_{U,A}})$ et un $O(|dz^1|_{\omega_{U,A}}^2)$, donc à nouveau largement des $O(\rho_1^{-1})$, puisque $|dz^1|_{\omega_{U,A}} = A_1^{-1/2}|z^1| \log(|z^1|^2)|$. On procède de même lorsque $p \geq 1$.

Lorsque le nombre de composantes augmente, on ajoute simplement les développements. \square

Métrique induite. Dans le cas où $k = 1$, c'est-à-dire loin des croisements, ces asymptotiques donnent une notion claire de ce qu'est la *métrique induite* par ω sur D_j loin de $\bigcup_{j' \neq j} D_{j'}$, et même sur $D_j \setminus \bigcup_{j' \neq j} D_{j'}$, en regardant de plus en plus près mais jamais à travers $\bigcup_{j' \neq j} D_{j'}$; il sera alors pratique de noter $\omega|_{D_j \setminus \bigcup_{j' \neq j} D_{j'}}$ une telle métrique induite. On peut alors en réalité donner des asymptotiques plus précises pour ω en utilisant cette notion. Par exemple, dans le cas où $k = 2$, avec D_1 (resp. D_2) donné par $z^1 = 0$ (resp. $z^2 = 0$), on peut montrer, en utilisant les mêmes techniques que pour la proposition 1.2, que

$$\omega = (\omega|_{D_2 \setminus D_1})_{1\bar{1}} idz^1 \wedge d\bar{z}^1 + (\omega|_{D_1 \setminus D_2})_{2\bar{2}} idz^2 \wedge d\bar{z}^2 + \omega'|_{D_1 \cap D_2} + O(\rho_1^{-1} \rho_2^{-1})$$

avec $\omega' = \omega_0 - \sum_{j>2} A_j i \partial \bar{\partial} u_j$, et $O(\rho_1^{-1} \rho_2^{-1})$ compris à tout ordre, ce qui est plus fin que l'asymptotique donnée par la proposition.

On en déduit, par récurrence sur le codimension des croisements, une notion récursive de métrique induite par ω sur un croisement d'une codimension donnée, en dehors des croisements de codimension plus grande.

Ainsi, près du diviseur, ω est asymptotiquement un produit de métriques *cusps* sur le disque époiné, les $\frac{idz^j \wedge d\bar{z}^j}{|z^j|^2 \log^2(|z^j|^2)}$, connues également comme *métriques de Poincaré du disque époiné*, avec une métrique lisse sur le diviseur, et l'on récupère donc certaines propriétés telles que : ω est complète, son volume est fini (et égal au volume associé à la classe de de Rham de ω_0 , voir section 1.3), et son rayon d'injectivité tend vers 0 vers D . On remarque aussi que les métriques induites sur les croisements successifs de D par ω ont un comportement analogue.

Métrique de Poincaré sur le disque époiné. On notera le fait suivant sur la métrique *cusps* standard du disque unité époiné, ou métrique de Poincaré, qui est dû à l'homogénéité du demi-plan de Poincaré. Soit $\omega_{cusp} = \frac{idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)}$ sur le disque, et pour $\delta \in (0, 1)$, on pose $\varphi_\delta : \frac{3}{4}\Delta \rightarrow \Delta^*$, $\zeta \mapsto \exp\left(-\frac{1+\delta}{1-\delta} \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$. Alors pour *tout* $\delta \in (0, 1)$, on a

$$\varphi_\delta^* \omega_{cusp} = \frac{id\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(1-|\zeta|^2)^2} \quad \text{sur} \quad \frac{3}{4}\Delta.$$

Autrement dit, $\varphi_\delta^* \omega_{cusp}$ ne dépend pas de δ ; elle est de plus mutuellement bornée avec la métrique euclidienne, et ses dérivées à tout ordre par rapport à cette métrique sont bornées.

En outre, $c\Delta^* = \bigcup_{\delta \in (0,1)} \varphi_\delta\left(\frac{3}{4}\Delta\right)$ avec $c > 0$ assez petit ($0 < c \leq e^{-25/7}$). Ceci nous dit par exemple dans le cas $k = 1$ de la proposition précédente avec une composante D_1 donnée localement par z^1 sur le voisinage U considéré, qu'il existe pour tout $p \in \mathbb{N}$ une constante C_p telle que

$$\sup_{\delta \in (0,1)} \frac{1}{1-\delta} \left\| \nabla_{euc}^p \left(\Phi_\delta^* (\omega - A_1 \omega_{cusp}) - (\omega_0 - \sum_{j=2}^N A_j i \partial \bar{\partial} u_j)|_{D_1} \right) \right\|_{euc} \leq C_p$$

où $\Phi_\delta : \frac{3}{4}\Delta \times \Delta^{m-1} \rightarrow \Delta^* \times \Delta^{m-1}$, $(\zeta^1, z^2, \dots, z^m) \mapsto (\varphi_\delta(\zeta^1), z^2, \dots, z^m)$. Concluons en remarquant qu'une telle Φ_δ n'est pas injective, mais que sa différentielle est en tout point de rang maximal.

1.2 Métriques kählériennes de type Poincaré

Espaces fonctionnels, espaces de tenseurs. Le point de vue des « quasi-coordonnées » – les Φ_δ ne sont en général que des immersions holomorphes, pas des cartes ; voir [TY87], p.580 – est commode pour définir des espaces de Hölder pour ω , espaces qu'il serait délicat de décrire de la manière usuelle, à cause du rayon d'injectivité tendant vers 0 près du diviseur. Ainsi, si l'on pose

$$\begin{aligned} \Phi_\delta : \quad \left(\frac{3}{4}\Delta\right)^k \times \Delta^{m-k} =: \mathcal{P} &\longrightarrow (\Delta^*)^k \times \Delta^{m-k} \\ (\zeta^1, \dots, \zeta^k, z^{k+1}, \dots, z^m) &\longmapsto (\varphi_{\delta_1}(\zeta^1), \dots, \varphi_{\delta_k}(\zeta^k), z^{k+1}, \dots, z^m) \end{aligned}$$

pour $\delta \in (0, 1)^k$ et si U est un polydisque voisinage d'un point d'un croisement $D_1 \cap \dots \cap D_k$ avec comme précédemment $U \cap D_j$ donné par $\{z^j = 0\}$, on définit pour $f \in C_{loc}^{p,\alpha}(U \setminus D)$, $(p, \alpha) \in \mathbb{N} \times [0, 1)$,

$$\|f\|_{C^{p,\alpha}(U \setminus D)} = \sup_{\delta \in]0,1[^k} \|\Phi_\delta^* f\|_{C^{p,\alpha}(\mathcal{P})}.$$

Étant donnés ensuite de tels ouverts $U \in \mathcal{U}$ recouvrant D et V tels que $X = V \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ et une partition de l'unité $\{\chi_V, \chi_U, U \in \mathcal{U}\}$, on définit l'espace de Hölder

$$C^{p,\alpha}(X \setminus D) = \left\{ f \in C_{loc}^{p,\alpha}(X \setminus D) \mid \|\chi_V f\|_{C^{p,\alpha}(V)} + \sup_{U \in \mathcal{U}} \|\chi_U f\|_{C^{p,\alpha}(U \setminus D)} < +\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme évidente. On pose de même

$$C^\infty(X \setminus D) = \bigcap_{(p,\alpha) \in \mathbb{N} \times [0,1)} C^{p,\alpha}(X \setminus D).$$

On vérifie facilement que ces espaces ne dépendent pas du recouvrement choisi (changer de recouvrement a pour seul effet de produire des normes équivalentes). Pour éviter des ambiguïtés, précisons que les espaces obtenus pour $\alpha = 0$ sont les mêmes que les espaces C^k définis à l'aide de la connexion de Levi-Civita de ω , et que ces espaces contiennent strictement les espaces de fonctions C_{loc}^k sur $X \setminus D$ dont les dérivées d'ordre inférieur à k par rapport à une métrique lisse sur toute X sont bornées.

On procède de même pour les tenseurs ; par exemple, pour U comme ci-dessus, $\varpi \in C_{loc}^{p,\alpha}(\Lambda^{1,1}, U \setminus D)$, on pose

$$\|\varpi\|_{C^{p,\alpha}(\Lambda^{1,1}, U \setminus D)} = \sup_{\delta \in]0,1[^k} \|\Phi_\delta^* \varpi\|_{C^{p,\alpha}(\Lambda^{1,1}, \mathcal{P})},$$

puis on définit $C^{p,\alpha}(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$ et $C^\infty(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$ à l'aide de la même partition de l'unité que ci-dessus. Un exemple est immédiatement donné par ω , élément de $C^\infty(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$.

Définition de l'espace des métriques. On peut à présent donner une définition précise de la classe de métriques à laquelle nous nous intéressons dans ce travail :

Définition 1.3. *On dit qu'une (1,1)-forme réelle fermée localement lisse ω' sur $X \setminus D$ est une métrique kählérienne de type Poincaré de classe $\Omega := [\omega]_{dR}$, si :*

1. ω' est C^∞ -quasi-isométrique à ω , soit $c\omega \leq \omega' \leq c^{-1}\omega$ sur $X \setminus D$ pour une certaine $c > 0$, et les dérivées à tout ordre de ω' dans les quasi-coordonnées utilisées ci-dessus sont bornées (ou encore : ω' est quasi-isométrique à ω et $\omega' \in C^\infty(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$) ;
2. $\omega' = \omega_0 + i\partial\bar{\partial}v$ pour une fonction v localement lisse sur $X \setminus D$ telle que $v = O(\mathbf{u})$ près de D , et les dérivées à tout ordre ≥ 0 de dv dans les quasi-coordonnées utilisées ci-dessus sont bornées (ou : $dv \in C^\infty(\Lambda^1, X \setminus D)$).

On note alors $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$ et $v \in \widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$.

Remarque 1.4. La notation $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ ne prend pas en compte le fait que dans la définition ci-dessus, v est calculé par rapport au point-base ω_0 . En réalité, il est important d'avoir une certaine souplesse sur le point-base ; on aura même besoin plus bas de le prendre dans \mathcal{PM}_Ω . Changer de point-base n'affecte pas qualitativement les contrôles sur les potentiels, et l'on s'attachera à spécifier le point-base choisi en cas d'ambiguïté.

Remarque 1.5. En supposant la condition 1. ci-dessus, on peut considérer une classe de métriques a priori plus large, en relâchant la condition 2. en :

$$2'. \omega' = \omega + d\psi \text{ pour une 1-forme réelle } \psi \in L^2(X \setminus D, \omega).$$

Nous discutons ce point en section 1.4.

Nous reprendrons le point de vue des quasi-coordonnées plus loin, au moment de définir des espaces de Hölder à poids, voir la section 3.1.

Nous avons défini une variété de dimension infinie $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$, qui est un ouvert convexe de l'espace de Fréchet \mathcal{E} des fonctions C_{loc}^∞ sur $X \setminus D$ qui sont des $O(\mathbf{u})$ et à différentielle dans $C^\infty(\Lambda^1, X \setminus D)$. En effet, si l'on garde ω_0 comme point-base, et que $v \in \mathcal{E}$, alors il est clair que $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}(v - \mathbf{u}) \in \mathcal{PM}_\Omega$ dès que $\|(\nabla^\omega)^2 v\|_{C^0}$ est assez petit, l'assertion $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}(v - \mathbf{u}) \in C^\infty(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$ venant de $dv \in C^\infty(\Lambda^1, X \setminus D)$. Les potentiels sont de plus uniques à l'addition près d'une constante (ce fait résulte aisément de ce que les potentiels et leurs dérivées sont L^2 pour ω) ; on prend la normalisation $\int_{X \setminus D} f \text{vol}^{\omega'} = 0$ pour fixer l'espace tangent \mathcal{E}/\mathbb{R} à \mathcal{PM}_Ω en un point $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$.

Forme de Ricci. Avant d'aller plus loin dans l'étude de la géométrie des espaces \mathcal{PM}_Ω et $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$, observons le fait suivant, qui contraste avec le cas compact, et donne un premier exemple de contribution du diviseur, ici un saut de cohomologie pour la forme de Ricci, lors du passage de métriques lisses à métriques de type Poincaré :

Proposition 1.6. Soit ω' une métrique de type Poincaré. Alors sa forme de Riccie $\varrho_{\omega'}$ est dans $C^\infty(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$, et est $L^2(X \setminus D, \omega)$ -cohomologue à une (toute) (1,1)-forme réelle lisse de $-2\pi c_1(K_X[D])$.

On a utilisé ici des notations classiques ; K_X désigne le fibré en droites canonique $\Lambda^{m,m} T_{\mathbb{C}}^* X$ de X , et $K_X[D]$ le fibré $K_X \otimes [D_1] \otimes \cdots \otimes [D_N]$

Démonstration. Par définition, et d'après la proposition 1.2, on peut écrire

$$(\omega')^m = \frac{f}{\prod_{j=1}^N |\sigma_j|_j^2 \log^2(|\sigma_j|_j^2)} \omega_0^m$$

avec $f \in C^\infty(X \setminus D)$ et minorée par une constante $c > 0$, soit : $\log f \in C^\infty(X \setminus D)$. Ainsi, sur $X \setminus D$,

$$\varrho_{\omega'} = \varrho_{\omega_0} + \sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial} \log(|\sigma_j|_j^2) + 2 \sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial} \log(\log(|\sigma_j|_j^2)) - i\partial\bar{\partial} \log f.$$

Or pour $j = 1, \dots, N$, $i\partial\bar{\partial} \log(|\sigma_j|_j^2)$ s'étend à travers D en une forme lisse de classe $-2\pi c_1([D_j])$, de sorte que $\varrho_{\omega_0} + \sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial} \log(|\sigma_j|_j^2)$ s'étende en une forme lisse dans $-2\pi c_1(K_X[D])$. En outre, $\frac{1}{2} d^c(2 \sum_{j=1}^N \log(\log(|\sigma_j|_j^2)) + \log f)$ est bornée donc L^2 pour ω , et sa différentielle est $C^\infty(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$, d'où : $\varrho_{\omega'} \in C^\infty(\Lambda^{1,1}, X \setminus D)$, et est cohomologue L^2 à une (toute) (1,1)-forme lisse réelle de $-2\pi c_1(K_X[D])$. \square

1.3 Géométrie de l'espace des métriques et de l'espace des potentiels

Extension d'outils standards au cadre Poincaré. Donnons à présent une courte liste d'objets définis sur \mathcal{PM}_Ω et $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ nécessaires à notre étude, qui jouissent de propriétés similaires à leurs analogues définis dans le cas compact, voir [Gau, ch.4] pour un exposé de ce sujet. On fixe un point-base $\omega_{pb} \in \mathcal{PM}_\Omega$.

- *Le volume.* Nous savons déjà que les métriques $\omega_v = \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}v \in \mathcal{PM}_\Omega$ ont un volume fini; en fait, ainsi que nous l'évoquons plus haut, elles ont toutes *même* volume, Vol disons, qui de plus est celui associé à Ω sur X . En effet,

$$\omega_v^m = \omega_{pb}^m + d\Theta_v, \quad \text{avec} \quad \Theta_v = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} d^c v \wedge (i\partial\bar{\partial}v)^{j-1} \wedge \omega_{pb}^{m-j}.$$

La forme Θ_v et sa différentielle étant bornées donc L^1 pour ω_{pb} , on en déduit *via* le théorème de Gaffney-Stokes [Gaf54] pour les variétés complètes que $\int_{X \setminus D} d\Theta_v = 0$, soit $\int_{X \setminus D} \omega_v^m = \int_{X \setminus D} \omega_{pb}^m$. Comme on peut aussi écrire $\omega_{pb} = \omega_0 + v_{pb}$, soit $\omega_0 = \omega_{pb} - i\partial\bar{\partial}v_{pb}$, avec $v_{pb} \in \mathcal{E}$, on en déduit de même que $\int_X \omega_0^m = \int_{X \setminus D} \omega_0^m = \int_{X \setminus D} \omega_{pb}^m$.

- *La fonctionnelle de Donaldson \mathcal{J} .* Pour les mêmes raisons que pour le volume, liées à des intégrations par parties sans termes de bord importuns, la 1-forme

$$\widetilde{\text{vol}} : v \longmapsto \left\{ f \mapsto \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} f \text{vol}^{\omega_v} \right\}$$

définie sur $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ est fermée. On appelle \mathcal{J} la fonctionnelle telle que $d\mathcal{J} = \widetilde{\text{vol}}$ et $\mathcal{J}(0) = 0$. Il est de plus facile de voir que \mathcal{J} est \mathbb{R} -équivariante en calculant $\mathcal{J}(v)$ à l'aide du chemin $(tv)_{t \in [0,1]}$, ce qui nous permet d'identifier \mathcal{PM}_Ω à $\mathcal{J}^{-1}(0)$ dans $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$.

- *La métrique de Mabuchi.* On confère à $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ et \mathcal{PM}_Ω une structure riemannienne naturelle en posant

$$\langle f_1, f_2 \rangle_v = \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} f_1 f_2 \text{vol}^{\omega_v} \quad \text{ou} \quad \langle f_1, f_2 \rangle_{\omega'} = \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} f_1 f_2 \text{vol}^{\omega'}$$

avec $\int_{X \setminus D} f_j \text{vol}^{\omega'} = 0$, $j = 1, 2$, dans le second cas. Ces métriques donnent une isométrie $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega \ni v \mapsto (v - \mathcal{J}(v), \mathcal{J}(v)) \in \mathcal{PM}_\Omega \times \mathbb{R}$; on peut donc indifféremment regarder la structure riemannienne de \mathcal{PM}_Ω ou celle de $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$.

- *L'équation des géodésiques.* On note $v \in \mathcal{E}((X \setminus D) \times [0, 1])$ pour une fonction v sur $(X \setminus D) \times [0, 1]$ telle que pour tout t , v_t , \dot{v}_t et $\ddot{v}_t \in \mathcal{E}$, ou même $|\frac{d^k v}{dt^k}| \leq C_k u$ et $|\frac{d^k (\nabla^{pb})^j v}{dt^k}| \leq C_{k,j}$ pour tous $k \geq 0$, $j \geq 1$; un segment dans $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ vérifie clairement ces conditions. On regarde alors une telle fonction v comme un *chemin* dans $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ dès que $\omega_{v_t} = \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}v_t \in \mathcal{PM}_\Omega$ pour tout t , et ce chemin est une *géodésique* pour la métrique de Mabuchi *ssi* pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\ddot{v}_t - |\partial\dot{v}_t|_{\omega_{v_t}}^2 = 0. \tag{1.3}$$

- *La courbure scalaire moyenne.* Une fois encore les intégrations par parties se font sans termes de bord, et nous disent que la *courbure scalaire moyenne* $\frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} \mathbf{s}(\omega') \text{vol}^{\omega'}$ est la même pour toute $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$; \mathbf{s} désigne ici et dans la suite la *courbure scalaire*, soit la trace du tenseur de Ricci de la métrique considérée. Si l'on note la courbure scalaire moyenne $\bar{\mathbf{s}}$, alors par la proposition 1.6 et les identités kähleriennes classiques, on a :

$$\bar{\mathbf{s}} = -4\pi m \frac{c_1(K_X[D]) \cdot [\omega_0]^{m-1}}{[\omega_0]^m}.$$

- *K-énergie de Mabuchi.* La 1-forme

$$\tilde{\mathbf{s}} : v \longmapsto \left\{ \tilde{\mathbf{s}}_v : f \mapsto - \int_{X \setminus D} f(\mathbf{s}(\omega_v) - \bar{\mathbf{s}}) \text{vol}^{\omega_v} \right\}$$

est elle aussi fermée sur $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$. On note $\tilde{\mathbf{E}}$ sa primitive s'annulant en 0, qui descend en une fonctionnelle \mathbf{E} sur \mathcal{PM}_Ω . Ces fonctionnelles sont appelées *K-énergies*. Leurs points critiques sont les (potentiels de) métriques à courbure scalaire constante. De plus, si l'on considère un chemin de potentiels $(v_t)_{t \in [0,1]} \in \mathcal{E}((X \setminus D) \times [0,1])$ et que l'on pose $E : t \mapsto \tilde{\mathbf{E}}(t)$, on peut alors démontrer :

Proposition 1.7. *Pour tout $t \in [0,1]$,*

$$\ddot{E}(t) = 2 \left\| (\nabla^{v_t})^- d\dot{v}_t \right\|_{L^2_{\omega_{v_t}}}^2 - \int_{X \setminus D} (\ddot{v}_t - |\partial \dot{v}_t|_{v_t}^2) (\mathbf{s}_{v_t} - \bar{\mathbf{s}}) \text{vol}^{\omega_{v_t}}. \quad (1.4)$$

où $(\nabla^{v_t})^-$ est la partie *J-anti-invariante* de la connexion Levi-Civita de ω_{v_t} agissant sur les 1-formes.

La formule (1.4) illustre l'importance des géodésiques, puisque le long de tels chemins la K-énergie serait convexe. Dans le but de construire ces chemins, c'est-à-dire de résoudre (1.3), nous effectuons à présent un changement de point de vue nous ramenant à une équation d'aspect plus familier en géométrie kählienne.

De l'équation des géodésiques à l'équation de Monge-Ampère complexe homogène. Soit un chemin $(v_t) \in \mathcal{E}((X \setminus D) \times [0,1])$, que l'on voit plutôt comme un élément de $\mathcal{E}((X \setminus D) \times [0,1] \times S^1)$ (définition analogue pour cet espace), indépendant de la dernière variable, disons s . On pose $\Phi(z, t, s) = v_t(z)$ pour tout $(z, t, s) \in (X \setminus D) \times [0,1] \times S^1$. On donne à $\Sigma := [0,1] \times S^1$ sa structure complexe naturelle. Un calcul facile, et parfaitement local, voir [Sem92], ou [Che00, p.197], donne :

Proposition 1.8. *Le chemin $(v_t)_{t \in [0,1]}$ est une géodésique dans $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ ssi*

$$(\text{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}\Phi)^{m+1} \equiv 0, \quad (1.5)$$

où les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ sont ceux de $(X \setminus D) \times \Sigma$. En d'autres termes, la donnée d'une géodésique dans $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ avec extrémités v_0 et v_1 équivaut à celle d'une fonction Φ dans $\mathcal{E}((X \setminus D) \times \Sigma)$ qui est S^1 -invariante, vérifie l'équation (1.5) et les conditions de bord $\Phi(\cdot, \tau, \cdot) = v_\tau$, $\tau = 0, 1$, et telle que pour tout (t, s) , $\Phi(\cdot, t, s) \in \widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$.

Les solutions que l'on peut obtenir pour l'équation (1.5), et par suite les « géodésiques » que l'on construit sur \mathcal{PM}_Ω sont l'objet du chapitre suivant, auquel le lecteur peut passer directement, la section à venir étant consacrée à des considérations complémentaires sur une classe de métriques *a priori* plus générale.

1.4 Compléments d'analyse en métrique de type Poincaré

Le but de cette section légèrement digressive est de prouver que les métriques C^∞ -quasi-isométriques à ω et dans la même classe de cohomologie L^2 (au sens de la condition 2' de la remarque 1.5) sont en réalité exactement celles de \mathcal{PM}_Ω , dans le cas où le diviseur est lisse. Nous développons pour ce faire quelques outils basiques d'analyse en métrique de type Poincaré, que nous réutilisons en partie au chapitre 4.

Pour $k \geq 1$, $\alpha \in [0, 1]$, on pose

$$\mathcal{E}^{k,\alpha} = \{v \in C_{loc}^{k,\alpha} \mid v = O(u), dv \in C^{k-1,\alpha}(\Lambda^1)\}, \quad (1.6)$$

et on se propose de démontrer :

Proposition 1.9. *On suppose D lisse. Soit $\eta \in C^{k,\alpha}(\Lambda^{1,1})$, $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$, une $(1, 1)$ -forme exacte s'écrivant $d\psi$ avec $\psi \in L^2(X \setminus D, \omega)$. Alors il existe $v \in \mathcal{E}^{k+2,\alpha}$ telle que $\eta = i\partial\bar{\partial}v$.*

Un corollaire immédiat s'énonce :

Proposition 1.10. *On suppose D lisse. Si ω' est C^∞ -quasi-isométrique à ω et dans la même classe de cohomologie L^2 , alors ω' s'écrit $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$, avec $\varphi \in \bigcap_{k,\alpha} \mathcal{E}^{k,\alpha}$, c'est-à-dire : $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$.*

On résout tout d'abord l'équation $\Delta_\omega v = f$ avec $f \in L^2$ et $\int_{X \setminus D} f \operatorname{vol}^\omega = 0$, grâce à une inégalité de Poincaré pour (les métriques quasi-isométriques à) ω que nous établissons au paragraphe 1.4.1. On prend ensuite $f = -2 \operatorname{tr}^\omega(\eta)$, et l'on montre que $i\partial\bar{\partial}v = \eta$; on obtient aussi le contrôle $v = O(u)$, et de la théorie elliptique classique nous tirons $v \in \mathcal{u}C^{k+2,\alpha}(X \setminus D)$ aux paragraphes 1.4.2 et 1.4.3. On peut se passer jusqu'ici de l'hypothèse D lisse. Celle-ci est cependant nécessaire pour conclure notre propos en améliorant le contrôle sur dv , c'est-à-dire en prouvant que $v \in \mathcal{E}^{k+2,\alpha}$, au paragraphe 1.4.4.

1.4.1 Inégalités de Poincaré

On ne suppose pas D lisse. On considère une métrique g quasi-isométrique au modèle ω de la section 1.1, non nécessairement kählérienne. Pour résoudre dans $H^1 = H^1(X \setminus D, g)$ l'équation $\Delta_g v = f$, avec f dans L^2 de moyenne nulle, on utilise la méthode variationnelle classique consistant à minimiser la fonctionnelle

$$v \longmapsto \frac{1}{2} \int_{X \setminus D} |dv|_g^2 \operatorname{vol}^g - \int_{X \setminus D} v f \operatorname{vol}^g$$

sur les v dans H^1 à moyenne nulle; l'ingrédient-clé est une inégalité de Poincaré pour g , que l'on énonce :

Lemme 1.11. *On suppose $X \setminus D$ muni d'une métrique g quasi-isométrique à ω définie par (1.2). Alors il existe une constante $C_P > 0$ telle que pour toute $v \in H^1(X \setminus D, g)$ vérifiant $\int_{X \setminus D} v \operatorname{vol}^g = 0$, on ait*

$$\int_{X \setminus D} |v|^2 \operatorname{vol}^g \leq C_P \int_{X \setminus D} |dv|_g^2 \operatorname{vol}^g. \quad (\text{IP})$$

Démonstration. On commence par le cas où D est lisse. On le recouvre dans X par des ouverts de coordonnées U_j , $j = 1, \dots, M$, de la forme $\{|z| < a\} \times \Delta^{m-1}$, de sorte que

$D \cap U_j = \{|z| = 0\}$. On considère encore un voisinage U de D tel que $U \subset \bigcup_{j=1}^M U_j$. Soit $v \in C_c^\infty(\overline{U} \setminus D)$ telle que $v|_{\partial U} \equiv 0$. On observe d'abord qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout j , $\int_{U_j \setminus D} |v|^2 \text{vol}^g \leq c \int_{U_j \setminus D} |dv|_g^2 \text{vol}^g$. On peut supposer, quitte à modifier c , que $g|_{U_j \setminus D}$ s'écrit

$$g|_{U_j \setminus D} = \frac{4|dz|^2}{|z|^2 \log^2(|z|^2)} + ds^2,$$

où ds^2 est la métrique euclidienne sur Δ^{m-1} . On effectue alors le changement de coordonnées $t = \log(\log^2(|z|^2)) \in (A, \infty)$ et $\theta = \arg z \in S^1$; g devient $dt^2 + e^{-2t} d\theta^2 + ds^2$, de forme volume $e^{-t} dt d\theta ds$.

Ainsi, $\int_{U_j} V^2 \text{vol}^g = \int_{S^1 \times \Delta^{m-1}} d\theta ds \int_A^{+\infty} V^2 e^{-t} dt$ pour $V = |v|, |dv_g|$; une inégalité $\int_A^{+\infty} |v|^2 e^{-t} dt \leq c \int_A^{+\infty} |dv|_g^2 e^{-t} dt$ pour tout (θ, s) suffit donc pour conclure. De plus, comme $|dv|_g^2 = (\partial_t v)^2 + e^{2t} (\partial_\theta v)^2 + |d_{\Delta^{m-1}} v|_{ds^2}^2 \geq (\partial_t v)^2$, une inégalité $\int_A^{+\infty} v^2 e^{-t} dt \leq c \int_A^{+\infty} (\partial_t v)^2 e^{-t} dt$ pour tout (θ, s) sera encore suffisante.

Posons $w(t) = e^{-t}$; si $'$ désigne la dérivation ∂_t , on a $(v^2 w)' = 2v v' w + v^2 w' = 2v v' w - v^2 w$. Une intégration par parties à θ, s fixés donne $0 = 2 \int_A^{+\infty} v v' e^{-t} dt - \int_A^{+\infty} v^2 e^{-t} dt$, car $v \equiv 0$ sur $\{t = A\}$, et pour t tendant vers $+\infty$. Nous tirons de la dernière égalité :

$$\int_A^{+\infty} v^2 e^{-t} dt = 2 \int_A^{+\infty} v v' e^{-t} dt \leq 2 \left(\int_A^{+\infty} v^2 e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A^{+\infty} v'^2 e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

par Cauchy-Schwarz, d'où $\int_A^{+\infty} v^2 e^{-t} dt \leq 4 \int_A^{+\infty} v'^2 e^{-t} dt$, ce qui achève le premier point de démonstration.

Nous avons alors :

$$\int_{U \setminus D} |v|^2 \text{vol}^g \leq \sum_{j=1}^M \int_{U_j \setminus D} |v|^2 \text{vol}^g \leq c \sum_{j=1}^M \int_{U_j \setminus D} |dv|_g^2 \text{vol}^g \leq M c \int_{U \setminus D} |dv|_g^2 \text{vol}^g, \quad (1.7)$$

dès que $v \in C_c^\infty(\overline{U} \setminus D)$.

Supposons qu'il existe une suite de fonctions $f_j \in C_c^\infty(X \setminus D)$ infirmant le lemme; on peut considérer que

- pour tout j , $\int_{X \setminus D} f_j \text{vol}^g = 0$ et $\int_{X \setminus D} f_j^2 \text{vol}^g = 1$;
- $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \setminus D} |df_j|_g^2 \text{vol}^g = 0$.

Notons que (f_j) est bornée dans $H^1(X \setminus D, g)$, et est donc faiblement convergente dans $H^1(X \setminus D, g)$, à extraction près, vers une fonction $f \in H^1(X \setminus D, g)$. En particulier, on a $\|df\|_{L^2(X \setminus D, g)} = 0$, puisque les df_j tendent vers 0 dans L^2 ; f est donc constante. Finalement, $\int_{X \setminus D} f \text{vol}^g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \setminus D} f_j \text{vol}^g = 0$ par convergence faible L^2 , et donc $f \equiv 0$.

Soient $\varepsilon > 0$ petit, disons $3\varepsilon^2 < (Mc)^{-1}$, et un domaine $V \subset\subset X \setminus D$ assez large pour que $U^c \subset\subset V$ et pour qu'il existe une fonction de coupure χ égale à 1 sur U^c , 0 sur V^c , et telle que $0 \leq \chi \leq 1$ et $|d\chi|_g \leq \varepsilon$. Pour tout j on pose $u_j = (1 - \chi)f_j$ et $v_j = \chi f_j$ de sorte que $u_j \in C_c^\infty(\overline{U} \setminus D)$, $(u_j)|_{\partial U} \equiv 0$, $v_j \in C_c^\infty(V)$ et $f_j = u_j + v_j$. Ainsi, pour tout j ,

$$\int_{X \setminus D} f_j^2 \text{vol}^g \leq 2 \left(\int_{X \setminus D} u_j^2 \text{vol}^g + \int_{X \setminus D} v_j^2 \text{vol}^g \right) = 2 \left(\int_{U \setminus D} u_j^2 \text{vol}^g + \int_V v_j^2 \text{vol}^g \right).$$

Or d'une part, (v_j) converge faiblement vers 0 dans $H^1(\overline{V}, g)$ – il s'agit seulement de voir que pour toute fonction test φ (resp. toute 1-forme test α) sur V , $\chi\varphi$ est encore une fonction test (resp. $\chi\alpha$ une 1-forme test et $(d\chi, \alpha)_g$ une fonction test) – et comme \overline{V} est compact à bord, on peut supposer (en oubliant une extraction) que (v_j) converge fortement vers 0 dans L^2 .

D'autre part, d'après le début de la démonstration, nous avons pour tout j

$$\begin{aligned} \int_{U \setminus D} u_j^2 \operatorname{vol}^g &\leq Mc \int_{U \setminus D} |du_j|_g^2 \operatorname{vol}^g \\ &= Mc \left(\int_{U \setminus D} \chi^2 |df_j|_g^2 \operatorname{vol}^g + \int_{U \setminus D} f_j^2 |d\chi|_g^2 \operatorname{vol}^g + 2 \int_{U \setminus D} f_j \chi (df_j, d\chi)_g \operatorname{vol}^g \right). \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, la première intégrale est majorée par $\int_{X \setminus D} |df_j|_g^2 \operatorname{vol}^g$, qui tend vers 0 ; la deuxième par $\varepsilon^2 \int_{X \setminus D} f_j^2 \operatorname{vol}^g = \varepsilon^2$, et la troisième par la racine carrée du produit des deux premières.

Il s'ensuit que $\int_{X \setminus D} f_j^2 \operatorname{vol}^g \leq 2Mc\varepsilon^2 < 1$ quand j est grand, ce qui est absurde. Le lemme est donc établi pour les fonctions de $C_c^\infty(X \setminus D)$, et donc pour $H^1(X \setminus D, g)$ par densité.

Cas où D admet des croisements. Si l'on a encore une inégalité pour les fonctions lisses à support compact près de D analogue à (1.7), alors on peut appliquer tel quel le reste de l'argument pour conclure. Pour obtenir une telle inégalité, on recouvre D de polydisques de coordonnées $\mathcal{P}_k = \{|z| < a_k\}^k \times \Delta^{m-k}$ (avec les $a_k < 1$ à ajuster), de sorte que D y soit donné par $\{z^1 \cdots z^k = 0\}$. Notons le point suivant : pour obtenir l'inégalité désirée sur un ouvert U relativement compact dans l'union de nos polydisques, il suffit de démontrer une telle inégalité pour les fonctions $v \in C_c^\infty(\overline{\mathcal{P}_k} \setminus D)$ vérifiant $v \equiv 0$ sur $\{|z^1| = a_k\} \cap \cdots \cap \{|z^k| = a_k\}$. On parvient à de telles inégalités en supposant que $g|_{U_j}$ est la métrique produit

$$\frac{4|dz^1|^2}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)} + \cdots + \frac{4|dz^k|^2}{|z^k|^2 \log^2(|z^k|^2)} + ds^2$$

soit

$$g|_{U_j} = (dt^1)^2 + \cdots + (dt^k)^2 + e^{-2t^1} (d\theta^1)^2 + \cdots + e^{-2t^k} (d\theta^k)^2 + ds^2$$

après changement de coordonnées $t^\ell = \log(\log^2(|z^\ell|^2)) \in (A_k, \infty)$, $\theta^\ell = \arg z^\ell \in S^1$, $1 \leq \ell \leq k$. Enfin, on exprime (t^1, \dots, t^k) en coordonnées polaires $(r, \varphi^1, \dots, \varphi^{k-1})$, $\varphi^1, \dots, \varphi^{k-1} \in (0, \pi/2)$, $r \in (r_0(\varphi^1, \dots, \varphi^{k-1}), \infty)$, et on procède aux mêmes intégrations par parties que ci-dessus pour conclure. \square

Inégalités de Poincaré à poids. On rappelle que pour j indexant une composante D_j de D ($1 \leq j \leq N$), $\rho_j = -\log(|\sigma_j|_j^2)$, qui est ≥ 1 d'après notre choix pour $|\cdot|_j$; posons $\rho := \prod_{j=1}^N \rho_j$. Des arguments tout à fait similaires à ceux que nous venons de développer (prendre par exemple $w(t) = e^{(\delta-1)t}$ dans le cas où D est lisse) nous donnent des inégalités de Poincaré pour la mesure $\rho^\delta \operatorname{vol}^g$, $\delta < 1$, que nous énonçons rapidement sous la forme :

Lemme 1.12. *Soit g une métrique isométrique à la métrique ω de la section 1.1. Alors pour tout $\delta < 1$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour toute fonction $v \in H_{loc}^1$ qui est L^2 pour la mesure $\rho^\delta \operatorname{vol}^g$ et de moyenne nulle pour cette mesure,*

$$\int_{X \setminus D} |v|^2 \rho^\delta \operatorname{vol}^g \leq C_\delta \int_{X \setminus D} |dv|_g^2 \rho^\delta \operatorname{vol}^g.$$

1.4.2 Résolution de $\Delta v = f$ et un lemme $\partial\bar{\partial}$

Le diviseur n'est toujours pas supposé lisse. On continue avec une métrique g quasi-isométrique au modèle ω de (1.2). En corollaire du lemme 1.11, toute f dans $L^2(X \setminus D, g)$ de moyenne nulle pour vol^g admet pour Δ_g un antécédent v dans $H^1(X \setminus D, g)$, et v est unique dès que l'on fixe sa moyenne contre vol^g ; on fera par exemple couramment le choix $\int_{X \setminus D} v \text{vol}^g = 0$. De plus, v est H_{loc}^2 par ellipticité de Δ_g si l'on suppose un peu plus de régularité sur g . En fait, on a :

Lemme 1.13 (Estimée de Sobolev sur $X \setminus D$). *Soit g une métrique C^∞ -quasi-isométrique à ω . Soient $v \in H^1(X \setminus D, g)$, $f \in H^k(X \setminus D, g)$, $k \geq 0$ telles que $\Delta_g v = f$ et $\int_{X \setminus D} f \text{vol}^g = 0$, alors v est dans $H^{k+2}(X \setminus D, g)$. Si on fixe de plus $\int_{X \setminus D} v \text{vol}^g = 0$ alors $\|v\|_{H^{k+2}} \leq C_k \|f\|_{H^k}$ pour une constante C_k ne dépendant que de g et de k .*

Démonstration. Même s'il n'est pas aisé d'écrire la preuve de manière brève, l'idée en reste assez simple. Soient tout d'abord v et f comme dans l'énoncé; par intégration par parties, $\|dv\|_{L_g^2}^2 = \int_{X \setminus D} v f \text{vol}^g \leq \|v\|_{L_g^2} \|f\|_{L_g^2}$, de sorte que si v est de moyenne nulle, l'inégalité de Poincaré (IP) pour g donne : $\|v\|_{L_g^2} \leq C_P \|f\|_{L_g^2}$. Ensuite, comme Δ_g est elliptique sur tout domaine relativement compact V dans $X \setminus D$, les estimées de Sobolev standard sur les boules nous disent que $v \in H^{k+2}(V, g)$, qu'il existe une constante $C_{V,k}$ telle que

$$\|v\|_{H^{k+2}(V, g)} \leq C_{V,k} (\|f\|_{H^k(X \setminus D, g)} + \|v\|_{L_g^2}),$$

ce qui est inférieur à $(C_{V,k} + C_P) \|f\|_{H^k(X \setminus D, g)}$ quand v est de moyenne nulle.

Il reste donc à estimer la norme L^2 de v sur un voisinage de D . On suppose pour simplifier que $k = 0$ et que D est lisse; on le recouvre de la manière usuelle par des polydisques de coordonnées $U = (c\Delta) \times \Delta^{m-1}$ avec $c > 0$ une constante petite, et où D est donné par $z^1 = 0$. Comme g est C^∞ -quasi-isométrique à ω , il ne nuit en rien au raisonnement de la remplacer par $g_{cusp} + ds^2$ sur $U \setminus D$. Or puisque les tirées-en-arrière de cette métrique produit par les immersions Φ_δ introduites au §1.1.1 sont toutes identiques, égales à g_0 disons, le jeu consiste maintenant à exprimer les normes H_g^l sur $U \setminus D$ à l'aide de normes $H^{l'}$ des tirés-en-arrière sur les revêtements.

On peut pour cela trouver une suite (δ_ℓ) croissant vers 1 et deux constantes c_1, c_2 telles que pour toute fonction w de régularité H_{loc}^2 sur les ensembles considérés,

$$\|\nabla_g^j w\|_{L_g^2(c'U \setminus D)} \leq c_1 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \|\Phi_{\delta_\ell}^*(\nabla_g^j w)\|_{L_{g_0}^2(\frac{1}{2}\mathcal{P})} = c_1 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \|\nabla_{g_0}^j(\Phi_{\delta_\ell}^* w)\|_{L_{g_0}^2(\frac{1}{2}\mathcal{P})},$$

$j = 0, 1, 2$, en désignant par \mathcal{P} le polydisque fixe $\frac{3}{4}\Delta \times \Delta^{m-1}$. Autrement dit, $\|w\|_{H_g^j(c'U \setminus D)}$ est contrôlée par $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \|\Phi_{\delta_\ell}^* w\|_{H_{g_0}^j(\frac{1}{2}\mathcal{P})}$ (avec constante de contrôle indépendante de w), et réciproquement

$$\|w\|_{L_g^2(U \setminus D)} \geq c_2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \|\Phi_{\delta_\ell}^* w\|_{L_{g_0}^2(\mathcal{P})} \quad ;$$

ces estimations sont obtenues en contrôlant le nombre de feuillet des revêtements Φ_{δ_ℓ} ; ce nombre est mutuellement borné avec 2^ℓ dans notre situation, ce qui s'obtient avec le choix $\delta_\ell = \frac{\kappa 2^\ell - 1}{\kappa 2^\ell + 1}$, $\kappa > 0$ bien choisie.

On termine en appliquant l'estimée de Sobolev sur \mathcal{P} pour g_0 ; on obtient une constante C (indépendante de v, f et ℓ) telle que pour tout ℓ ,

$$\begin{aligned} & \|\Phi_{\delta_\ell}^* v\|_{H_{g_0}^2(\frac{1}{2}\mathcal{P})} \\ & \leq C (\|\Delta_{g_0}(\Phi_{\delta_\ell}^* v)\|_{L_{g_0}^2(\mathcal{P})} + \|\Phi_{\delta_\ell}^* v\|_{L_{g_0}^2(\mathcal{P})}) = C (\|\Phi_{\delta_\ell}^* f\|_{L_{g_0}^2(\mathcal{P})} + \|\Phi_{\delta_\ell}^* v\|_{L_{g_0}^2(\mathcal{P})}). \end{aligned}$$

On conclure en sommant ces inégalités, pondérés par le facteur $\frac{1}{2^\ell}$, que $\|v\|_{H^2_g(c'U \setminus D)} \leq c_1 c_2^{-1} C (\|f\|_{L^2_g(U \setminus D)} + \|v\|_{L^2_g(U \setminus D)})$, et enfin en collectant ces dernières inégalités sur les U utilisés pour couvrir D . \square

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer un lemme $\partial\bar{\partial}$ adapté aux métriques « grossièrement » de type Poincaré.

Proposition 1.14 (Lemme $\partial\bar{\partial}$ sur $X \setminus D$). *Toute $(1, 1)$ -forme réelle exacte η telle que $\eta = d\psi$ avec ψ une 1-forme réelle C^∞_{loc} et de carré intégrable s'écrit $i\partial\bar{\partial}v$, avec v dans $H^2 \cap C^\infty_{loc}$, unique aux constantes près.*

Démonstration. On emploie ici une technique classique. On prend v comme l'unique candidat de moyenne nulle possible, c'est-à-dire : v est la solution de moyenne nulle de $\Delta_\omega v = -2 \operatorname{tr}^\omega(d\psi)$. On considère alors la 1-forme $\xi := \frac{1}{2} d^c v - \psi$. Par construction, $\operatorname{tr}^\omega(d\xi) = 0$; on a donc en tout point l'identité $d\xi \wedge d\xi \wedge \omega^{m-2} = -\frac{|d\xi|_\omega^2}{m(m-1)} \omega^m$. Le membre de gauche peut toutefois s'écrire $d(\xi \wedge d\xi \wedge \omega^{m-2})$; il vient ainsi

$$-(m-2)! \|d\xi\|_{L^2} = \int_{X \setminus D} d(\xi \wedge d\xi \wedge \omega^{m-2}) = 0$$

par le théorème de Stokes pour les variétés complètes [Gaf54], applicable ici puisque ξ et $d\xi$ sont H^1 (car v est H^2 en vertu du lemme 1.13).

Le seul point éventuel à vérifier serait l'égalité $\int_{X \setminus D} \operatorname{tr}^\omega \eta \operatorname{vol}^\omega = 0$ pour pouvoir écrire $\operatorname{tr}^\omega \eta$ comme un laplacien; ceci est néanmoins automatique d'après la formule $\operatorname{tr}^\omega(d\psi) \operatorname{vol}^\omega = d\psi \wedge \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!}$, et une nouvelle intégration par parties. La régularité C^∞ locale de v est due à l'ellipticité locale de Δ_ω , et c'est en réalité un fait standard que l'existence, pour tous $(p, \alpha) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$ et domaines $V \subset\subset W \subset\subset X \setminus D$, d'une constante $C = C(p, \alpha, V, W)$ telle que $\|v\|_{C^{p+2, \alpha}(V)} \leq C(\|\eta\|_{L^2} + \|\eta\|_{C^{p, \alpha}(W)})$. \square

1.4.3 Contrôle sur la croissance des potentiels

Notre lemme $\partial\bar{\partial}$ nous fournit des potentiels pour des métriques de type Poincaré grossières, avec un contrôle $H^2 \cap C^\infty_{loc}$; il s'agit d'améliorer ce contrôle provisoire pour identifier ces métriques à d'authentiques métriques de type Poincaré. De tels potentiels ne sont bien sûr pas bornés en général – considérer l'exemple simple de αu , u défini en (1.2), qui est un potentiel par rapport à ω dès que $|\alpha|$ est assez petit –; il est néanmoins possible de parvenir à un contrôle sur leur croissance près du diviseur.

Lemme 1.15. *Soit $f \in C^\infty(X \setminus D)$ de moyenne nulle $\operatorname{vol}^\omega$ – par exemple, $f = -2 \operatorname{tr}^\omega(\omega' - \omega)$ avec ω' une métrique vérifiant les conditions 1. et 2'. de la section 1.2. Soit $v \in C^\infty_{loc} \cap H^2$ une $\Delta_\omega v = f$ – dans l'exemple, $i\partial\bar{\partial}v = \omega' - \omega$. Il existe C telle que $|v| \leq Cu$. De plus, si v est aussi de moyenne nulle, alors on peut prendre $C = C' \|f\|_{C^0(X \setminus D)}$ avec C' ne dépendant que de ω .*

Démonstration. Il ne nuit pas à la généralité de supposer que $A_1 = \dots = A_N = 2$ dans la formule de définition (1.2). Pour $j = 1, \dots, N$, on prend $\tilde{\lambda} \geq 0$ et l'on pose $\tilde{u}_j = \log(\tilde{\lambda} + \rho_j)$ de sorte que

$$i\partial\bar{\partial}\tilde{u}_j = -\frac{i\partial\rho_j \wedge \bar{\partial}\rho_j}{(\tilde{\lambda} + \rho_j)^2} + \frac{i\partial\bar{\partial}\rho_j}{\tilde{\lambda} + \rho_j}.$$

On se donne $\varepsilon > 0$. Au regard de la proposition 1.2, et puisque $i\partial\bar{\partial}\rho_j$ est lisse à travers D_j , il est clair que $\Delta_\omega \tilde{u}_j \geq -\varepsilon$ on $X \setminus D_j$, et $\Delta_\omega \tilde{u}_j = 1 + O(\rho_j^{-1})$ près de D_j , pourvu que

λ soit assez grand. En supposant ε assez petit, on est sûr de trouver un voisinage U de D dans X et une constante $c > 0$ telle que $\Delta_\omega \tilde{u} \geq c$ sur U , où l'on a posé $\tilde{u} = \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j$; noter que c peut être prise arbitrairement proche de 1, après ajustement de ε , $\tilde{\lambda}$ et U . On peut aussi remarquer que $\tilde{u} \sim u$ près de D .

On pose alors $V_0 := X \setminus U$, et on se donne des domaines V_p , $p \geq 1$, telle que $(V_p)_{p \geq 0}$ est une suite exhaustive croissante de domaines compacts de $X \setminus D$; on pose encore $U_p = U \cap \mathring{V}_p$ pour tout $p \geq 0$. Par ailleurs, on pose

$$\varphi := \pm v - C\tilde{u} - A$$

où :

- C est choisie telle que $\Delta_\omega \varphi = \pm f - C\Delta_\omega \tilde{u} \leq 0$ sur $U \setminus D$ (et donc C ne dépend que de $\|f\|_{C^0}$);
- A est choisie telle que $\varphi \leq 0$ sur ∂U (et donc A ne dépend que de $\|f\|_{C^0}$ et de $\|v\|_{C^0(U)}$, ce qui est contrôlé par $\|f\|_{C^0}$ si v est de moyenne nulle).

On considère pour $p \geq 0$ la solution φ_p du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_\omega \varphi_p = \Delta_\omega \varphi & \text{sur } U_p, \\ \varphi_p = \varphi & \text{sur } \partial U, \\ \varphi_p = 0 & \text{sur } \partial V_p. \end{cases}$$

D'après le principe du maximum usuel, ces φ_p sont négatives sur leur domaine U_p . On suppose que $(\varphi_p)_{p \geq 0}$ converge (à extraction près) presque partout vers φ ; alors $\varphi \leq 0$, soit $\pm v \leq C\tilde{u} + A$, et on a terminé. On veut donc contrôler les φ_p dans un espace de Sobolev pour obtenir une convergence dans un espace plus petit.

Posons $\theta_p = \varphi$ sur ∂U et 0 sur ∂V_p . Les techniques utilisées pour démontrer le lemme 1.13 se généralisent pour démontrer que φ_p est H^2 , et qu'il existe une constante C ne dépendant pas de p telle que :

$$\|\varphi_p\|_{H^2(U_p)} \leq C \left(\|\Delta_\omega \varphi_p\|_{L^2(U_p)} + \|\varphi_p\|_{L^2(U_p)} + \|\theta_p\|_{L^2(\partial U_p)} \right).$$

Or $\|\Delta_\omega \varphi_p\|_{L^2(U_p)} = \|f\|_{L^2(U_p)} \leq \|f\|_{L^2(X \setminus D)}$, et $\|\theta_p\|_{L^2(\partial U_p)} = \|\varphi\|_{L^2(\partial U)}$, ce qui ne dépend pas de p (et est contrôlé par $\|f\|_{C^0}$); il ne reste donc qu'à estimer $\|\varphi_p\|_{L^2(U_p)}$. Pour cela décomposons φ_p en $\psi_p + \chi_p$, où $\psi_p \equiv 0$ sur ∂U_p et χ_p est harmonique sur U_p . Alors χ_p est négative, et atteint son minimum sur ∂U_p , d'où : $\|\chi_p\|_{L^2(U_p)} \leq |\inf_{\partial U} \varphi| \cdot \text{Vol}(U)^{1/2}$.

Enfin, $\int_{U_p} |d\psi_p|_\omega^2 \text{vol}^\omega = \int_{U_p} \psi_p \Delta_\omega \psi_p \text{vol}^\omega = \int_{U_p} \psi_p f \text{vol}^\omega$. Or ψ_p s'étend en une fonction H^1 sur $X \setminus D$ si l'on déclare qu'elle est nulle sur $(X \setminus D) \setminus U_p$. En notant a_p sa moyenne sur $X \setminus D$,

$$\int_{X \setminus D} (\psi_p - a_p)^2 \text{vol}^\omega \leq C_P \int_{X \setminus D} |d\psi_p|_\omega^2 \text{vol}^\omega = C_P \int_{U_p} |d\psi_p|_\omega^2 \text{vol}^\omega.$$

Comme $\int_{X \setminus D} (\psi_p - a_p)^2 \text{vol}^\omega = \int_{U_p} \psi_p^2 \text{vol}^\omega - a_p^2 \text{Vol}(X \setminus D)$ et que $|a_p|$ est majorée par $\frac{\text{Vol}(U_p)^{1/2}}{\text{Vol}(X \setminus D)} \|\psi_p\|_{L^2(U_p)}$, on obtient, en remontant les dernières inégalités,

$$\|\psi_p\|_{L^2(U_p)} \leq C_P \left(1 - \frac{\text{Vol}(U_p)}{\text{Vol}(X \setminus D)}\right)^{-1} \|f\|_{L^2(U_p)} \leq C_P \left(1 - \frac{\text{Vol}(U)}{\text{Vol}(X \setminus D)}\right)^{-1} \|f\|_{L^2(X \setminus D)},$$

ce qui ne dépend pas de p . En résumé, les $\varphi_p = \psi_p + \chi_p$ sont H^2 sur leur domaine, et on a une borne H^2 , C disons, indépendante de p .

Une extraction donne la convergence faible dans tous les $H^2(U_p)$ d'une sous-suite de (φ_p) , et sa convergence forte dans les $H^1(U_p)$, vers une fonction $\varphi' \in \bigcap_{p \geq 0} H^2(U_p)$. En

outre, $\|\varphi'\|_{H^2(U \setminus D)} = \sup_p \|\varphi'\|_{H^2(U_p)}$, et chaque $\|\varphi'\|_{H^2(U_p)}$ est majorée par la lim inf des $\|\varphi_q\|_{H^2(U_p)}$ pour $q \rightarrow +\infty$. Il est aisé de voir que $\varphi'|_{\partial U} = \varphi|_{\partial U}$ et $\Delta_\omega \varphi' = \Delta_\omega \varphi$ sur U , ceci car l'inégalité $\varphi_p|_{\partial U} = \varphi|_{\partial U}$ (resp. $\Delta_\omega \varphi_p = \Delta_\omega \varphi$ sur U_q) a lieu pour tout p (resp. pour tout $p \geq q$). Par conséquent, φ et φ' sont deux fonctions de $H^2(U)$ solutions du même problème de Dirichlet, et coïncident donc, en vertu de l'unicité dans $H^1(U)$ d'une telle solution. Autrement dit, φ est la limite L^2 d'une sous-suite de (φ_p) sur chaque U_q , et donc, à une dernière extraction près, φ est presque-partout dans U la limite ponctuelle de la suite négative (φ_p) . \square

1.4.4 Preuve de la proposition 1.9

On suppose dans cette section que le diviseur D est lisse.

Une fibration près du diviseur. Le problème étant local près de chaque composante de D supposé lisse dans ce paragraphe, on peut supposer sans nuire à la généralité que ce dernier se réduit à une composante, donnée par l'équation $\sigma = 0$. On considère un voisinage tubulaire \mathcal{N}_A de D (avec A un paramètre réel à ajuster), avec projection p , obtenu grâce à l'exponentielle riemannienne d'une métrique lisse sur X , par exemple ω_0 . Une action de S^1 sur \mathcal{N}_A provient de l'identification de \mathcal{N}_A avec un voisinage \mathcal{V} de la section nulle du fibré holomorphe normal $N_D = \frac{T^{1,0}X|_D}{T^{1,0}D}$; la projection $p : \mathcal{N}_A \simeq \mathcal{V} \subset N_D \rightarrow D$ est invariante pour cette action. On complète p en rendant la fonction u , réduite à $\log(-\log(|\sigma|^2))$, invariante sous l'action de cercle. On pose :

$$t := \log \left[-\log \left(\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \Phi_\vartheta^*(|\sigma|^2) d\vartheta \right) \right]$$

près de D , et on prolonge t en une fonction lisse loin du diviseur. Si l'on désigne le couple (p, t) par q , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & \mathcal{N}_A \setminus D \\ & & \downarrow q=(t,p) \\ & & [A, +\infty) \times D \end{array} \quad (1.8)$$

On voit aisément que $t = u$ à une perturbation qui est un $O(e^{-t})$ près, ainsi que ses dérivées à tout ordre (en métrique de type Poincaré). Finalement, on ajuste A et \mathcal{N}_A pour avoir $\mathcal{N}_A \setminus D = \{t \geq A\} \subset X \setminus D$.

On associe à l'action de cercle sur \mathcal{N}_A une 1-forme de connexion η , comme suit : si g est la métrique associée à ω et si T est le générateur infinitésimal de l'action, de flot Φ_s , on pose en tout point x de \mathcal{N}_A

$$\hat{\eta}_x = \int_0^{2\pi} \Phi_s^* \left(\frac{g_x(\cdot, T)}{g_x(T, T)} \right) ds \quad \text{et} \quad \eta_x = 2\pi \left(\int_{S^1} \hat{\eta} \right)^{-1} \hat{\eta}_x,$$

où le S^1 de la dernière intégrale est la fibre $q^{-1}(x)$. De cette manière, $x \in \mathcal{N}_A$, $\int_{q^{-1}(x)} \eta = 2\pi$.

Si de plus on considère autour d'un point de D un voisinage de coordonnées holomorphes (z^1, \dots, z^m) telles que D est donné par $z^1 = 0$, on a $\eta = d\theta$ à un $O(1)$ près, à tout ordre pour ω . On a alors :

$$g = dt^2 + e^{-2t} \eta^2 + p^* g_D + O(e^{-t}) \quad (1.9)$$

avec g_D la métrique associée à $\omega_0|_D$, et la perturbation $O(e^{-t})$ comprise à tout ordre par rapport à ω . Cela signifie par exemple que $Jdt = 2e^{-t}\eta + O(e^{-t})$, le $O(e^{-t})$ compris de même.

On peut encore utiliser la fibration (1.8) comme suit. Soit $f \in C^{k,\alpha}(X \setminus D)$; on écrit les décompositions

$$f = (\Pi_0 f)(t, z) + \Pi_\perp f = f_0(t) + f_1(t, z) + \Pi_\perp f \quad (1.10)$$

où $z = p(x)$, avec :

$$(\Pi_0 f)(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{q^{-1}(x)} f \eta \quad \text{et} \quad f_0(t) = \frac{1}{\text{Vol}(D)} \int_D f(t, z) \text{vol}^{g_D},$$

et $\text{Vol}(D)$ calculé pour g_D , donc égal à $\frac{[\omega_0|_D]^{m-1}}{(m-1)!}$, soit $\frac{c_1([D]) \cdot [\omega_0]^{m-1}}{(m-1)!}$.

En utilisant (1.10) et la définition de $C^{k,\alpha}(X \setminus D)$, puisque les fibres S^1 sont de longueur équivalente à e^{-t} pour g , il n'est pas difficile de voir que sur un ouvert de coordonnées comme ci-dessus et pour tout $j \leq k$,

$$\mathcal{D}_{\ell, j-\ell}(\Pi_\perp f) = O(e^{-(k-\ell+\alpha)t})$$

dès que $\mathcal{D}_{\ell, j-\ell}$ désigne un produit dont $(j - \ell)$ facteurs sont égaux à $e^t \partial_\theta$, et dont les ℓ autres facteurs sont pris dans $\{r | \log r | \partial_r, \partial_{z\beta}, \bar{\partial}_{z\beta}, \beta \geq 2\}$, où $r = |z_1|$.

Preuve de la proposition 1.9. Ayant fixé la fibration, on en vient à la preuve proprement dite. Or d'après les §§1.4.1 à 1.4.3, nous savons que $v \in H^{k+2}$ et $v \in tC^{k,\alpha}$ – on sait que $v = O(t)$; on obtient $v \in tC^{k,\alpha}$ en invoquant des estimées de Schauder dans des revêtements locaux, ce qui est plus simple que ce que nous avons déjà fait avec les estimées de Sobolev.

Pour voir que $v \in \mathcal{E}^{k+2,\alpha}$, on considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_\omega w = g & \text{dans } \mathcal{N}_A \setminus D, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{N}_A = \{t = A\}, \end{cases}$$

avec $g \in C^{k,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D)$ et $w \in tC^{k+2,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D)$ (obtenues par exhaustion). En effet si γ est une fonction de coupure lisse égale à 1 sur $\{t \leq A\}$ et identiquement nulle sur \mathcal{N}_{A+1} , on obtient v comme la somme $v_{int} + v_{ext}$, avec :

$$\begin{cases} \Delta_\omega v_{int} = (\Delta_\omega \gamma)v_{int} + \gamma f - 2(d\gamma, dv_{int})_\omega & \text{dans } X \setminus \mathcal{N}_{A+1}, \\ v_{int} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{N}_{A+1} = \{t = A + 1\}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta_\omega v_{ext} = (-\Delta_\omega \gamma)v_{ext} + (1 - \gamma)f + 2(d\gamma, dv_{ext})_\omega & \text{dans } \mathcal{N}_A \setminus D, \\ v_{ext} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{N}_A = \{t = A\} \end{cases}$$

(les membres de droite étant contrôlés par $\|f\|_{C^{k,\alpha}}$, puisque pour tout C il existe $K = K(C)$ tel que $\|v\|_{C^{k+2,\alpha}(\mathcal{N}_C)} \leq K\|f\|_{C^{k,\alpha}}$, et v_{int}, v_{ext} sont prolongés par 0. Le rôle de v_{ext} va être joué par w , tandis que g jouera celui de $(-\Delta_\omega \gamma)v_{ext} + (1 - \gamma)f + 2(d\gamma, dv_{ext})_\omega$.

On introduit le sous-espace

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{k+2,\alpha} = \{ & v \in C_{loc}^{k,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D) \mid v_0 = O(t), \partial_t v_0 \in C^{k+1,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D); \\ & v_1, \Pi_\perp v \in C^{k+2,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D); v|_{t=A} \equiv 0\}, \end{aligned}$$

de $tC^{k,\alpha}$, muni de la norme évidente, et l'on suppose A assez grand pour que $\Delta_h - \Delta_\omega : \mathcal{F}^{k+2,\alpha} \rightarrow C^{k,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D)$ soit de norme petite, où h est la métrique

$$h = dt^2 + e^{-2t}\eta^2 + p^*g_D$$

(comparer cette formule de définition avec les l'asymptotique (1.9)).

Si l'on démontre que $\Delta_h : \mathcal{F}^{k+2,\alpha} \rightarrow C^{k,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D)$ est inversible d'inverse G_h , avec $\|G_h\|$ restant borné si A croît, un argument perturbatif nous assurera que Δ_ω est lui aussi inversible. On écrit en effet $\Delta_\omega = \Delta_h(1 - G_h(\Delta_h - \Delta_\omega))$. En dernière analyse, il reste donc à voir que la solution de

$$\begin{cases} \Delta_h w = g & \text{dans } \mathcal{N}_A \setminus D, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{N}_A = \{t = A\} \end{cases}$$

qui est dans $tC^{k+2,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D)$, est en réalité dans $\mathcal{F}^{k+2,\alpha}$. On observe que Δ_h respecte la décomposition (1.10), de sorte que $\Delta_h w_0 = g_0$, $\Delta_h w_1 = g_1$ et $\Delta_h(\Pi_\perp w) = \Pi_\perp g$. On en déduit que la composante w_0 est à dérivée bornée, et que les deux autres composantes sont bornées à dérivées bornées :

- w_0 : la condition $w_0(A) = 0$, ainsi que l'égalité $\Delta_h w_0 = -(\partial_t^2 - \partial_t)w_0$, donnent

$$\partial_t w_0(t) = e^t \int_t^{+\infty} e^{-s} g_0(s) ds = O(1)$$

et

$$w_0(t) = \int_A^t e^s ds \int_s^{+\infty} e^{-u} g_0(u) du = O(t).$$

Ces formules disent clairement que w_0 et $\partial_t w_0$ sont contrôlées par $\|g\|_{C^{k,\alpha}}$, indépendamment de A .

- w_1 : on pose $a(t) = \int_D w_1(t, \cdot)^2 \text{vol}^{g_D}$; si l'on démontre que $a(t)$ est bornée, alors la théorie classique nous dira que w_1 est bornée (avec une borne effective provenant de celle sur $a(t)$). Or

$$\partial_t a(t) = 2 \int_D w_1(t, \cdot) \partial_t w_1(t, \cdot) \text{vol}^{g_D}$$

et

$$\partial_t^2 a(t) = 2 \int_D w_1(t, \cdot) \partial_t^2 w_1(t, \cdot) \text{vol}^{g_D} + 2 \int_D (\partial_t w_1(t, \cdot))^2 \text{vol}^{g_D}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_t)a(t) &\geq 2 \int_D w_1(t, \cdot) (\partial_t^2 w_1(t, \cdot) - \partial_t w_1(t, \cdot)) \text{vol}^{g_D} \\ &= 2 \int_D w_1(t, \cdot) (\Delta_D w_1(t, \cdot) - g_1(t, \cdot)) \text{vol}^{g_D} \\ &= 2 \int_D |d_D w_1(t, \cdot)|_{g_D}^2 \text{vol}^{g_D} - 2 \int_D w_1(t, \cdot) g_1(t, \cdot) \text{vol}^{g_D} \\ &\geq ca(t) - C(g)a(t)^{1/2}, \end{aligned}$$

où l'on passe de la première à la seconde ligne en remarquant que $\Delta_h w_1 = -(\partial_t^2 - \partial_t)w_1 + \Delta_{g_D} w_1$, avec c venant de l'inégalité de Poincaré pour g_D (chaque $w_1(t, \cdot)$ est de moyenne nulle pour g_D), et $C(g)$ est la borne supérieure des $(\int_D g_1(t, \cdot)^2 \text{vol}^{g_D})^{1/2}$. Selon le lemme 1.16 suivant cette preuve, cette inégalité oblige a à être bornée, et donne $a(t) \leq (\frac{C(g)}{c})^2$. En d'autres termes, la borne L^2 de w_1 sur chaque $\{t\} \times D$ reste bornée, et est majorée par $\frac{C(g)}{c} \leq C'\|g\|_{C^{k,\alpha/2}}$, C' indépendante de A . On en déduit une estimation analogue sur $\|w_1\|_{C^1}$.

- $\Pi_{\perp} w$: comme $\Pi_{\perp} g \in e^{-(\alpha/2)t} C^{k,\alpha/2}$, d'après l'analyse à poids développée dans [Biq97], $\Pi_{\perp} v$ est un $e^{-\beta t} C^{k+2,\alpha/2}$ pour un $\beta > 0$, et est en particulier borné, ainsi que sa différentielle. On a aussi que $\|\Pi_{\perp} w\|_{C^1}$ est contrôlée par $\|g\|_{C^{k,\alpha}}$, indépendamment de A .

La théorie elliptique classique nous dit que $w \in \mathcal{F}^{k+2,\alpha}$, avec $\|w\|_{\mathcal{F}^{k+2,\alpha}} \leq C\|g\|_{C^{k,\alpha}(\mathcal{N}_A \setminus D)}$, C indépendante de A (on applique les estimées de Schauder sur des boules B de quasi-coordonnées à w à laquelle on a retranché sa moyenne sur B ; ceci donne une famille uniformément bornée dans C^0 , comme w est à dérivées bornées). Ceci termine la preuve. \square

Il nous reste à énoncer et démontrer le résultat suivant :

Lemme 1.16. *Soit b une fonction C_{loc}^2 positive sur $[A, +\infty)$, s'annulant en A . On suppose que $b = O(t^\beta)$ pour un $\beta > 0$, que b , $\partial_t b$ et $\partial_t^2 b$ sont L^1 pour $e^{-t} dt$, et que*

$$(\partial_t^2 - \partial_t - c)b \geq -Cb^{1/2}, \quad (1.11)$$

avec $c > 0$, $C \geq 0$. Alors b est majoré, et $\sup b \leq (\frac{C}{c})^2$.

Démonstration. On suppose que b n'est pas identiquement nulle, et que $\beta < 1$, de sorte que $b = o(t)$. Alors $b_\varepsilon : t \mapsto b - \varepsilon(t - A)$ tend vers $-\infty$ après avoir atteint son maximum en un point $t_\varepsilon \in (A, +\infty)$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. En un tel point, $\partial_t^2 b(t_\varepsilon) = \partial_t^2 b_\varepsilon(t_\varepsilon) \leq 0$ et $\partial_t b(t_\varepsilon) = \partial_t b_\varepsilon(t_\varepsilon) + \varepsilon = \varepsilon$. De (1.11) nous tirons que $cb(t_\varepsilon) \leq Cb(t_\varepsilon)^{1/2} - \varepsilon \leq Cb(t_\varepsilon)^{1/2}$, c'est-à-dire $b(t_\varepsilon) \leq (\frac{C}{c})^2$.

À présent, à t fixé, $b(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon(t)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, $b_\varepsilon(t) \leq b_\varepsilon(t_\varepsilon) \leq b(t_\varepsilon) \leq (\frac{C}{c})^2$, d'où $b(t) \leq (\frac{C}{c})^2$. Ceci étant vrai pour tout t , on a que b est majorée, avec la borne annoncée.

Reste à voir qu'il est légitime de prendre $\beta < 1$. Posons $B(t) = -(\partial_t^2 - \partial_t - c)b(t)$ sur $[A, +\infty)$. Ceci peut être intégré en :

$$b = e^{\nu t} \int_A^t e^{(\mu-\nu)s} ds \int_s^{+\infty} e^{-\mu u} B(u) du,$$

avec $\mu > \nu$ les racines de $X^2 - X - c$ ($\mu > 1$, $\nu < 0$). Or par (1.11), $B(t) \leq Ct^{\beta/2}$, d'où $\int_t^{+\infty} e^{-\mu u} B(u) du \leq C't^{\beta/2}e^{-\mu t}$, etc., d'où $b = O(t^{\beta/2})$ (car $b \geq 0$). On conclut par une récurrence immédiate. \square

La question restant en suspens est :

Question : La proposition 1.10 reste-t-elle vraie si D est à croisements normaux simples ?

En utilisant en réalité des formules intégrales comme (3.3) ci-dessous, et le fait que les composantes orthogonales aux fibres S^1 autour du diviseur ont un bon comportement, il est assez aisé de voir que la différentielle d'un potentiel comme dans la proposition 1.10 a ses composantes dans la direction normale au diviseur bornées. Toutefois, il semble délicat d'adapter directement la preuve de cette proposition dans le cas de croisements; voir néanmoins la section 6.5 pour la construction d'une fibration dans ce cas.

Résolution de l'équation de Monge-Ampère homogène sur le produit $(X \setminus D) \times \Sigma$

ON résout dans ce chapitre l'équation (1.5) mise en évidence au chapitre précédent. Cette équation étant équivalente à la donnée d'une géodésique sur $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ muni de la métrique de Mabuchi, nous précisons également en quelle mesure notre solution correspond à une géodésique entre potentiels de métriques kählériennes de type Poincaré.

2.1 Énoncé du théorème et interprétation en termes de géodésiques

Le résultat que nous obtenons dans ce chapitre est le suivant ; on suppose un point-base ω_{pb} fixé dans \mathcal{PM}_Ω pour le calcul des potentiels de $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$:

Théorème 2.1. *L'équation (1.5) avec conditions de bord et invariance sous S^1 admet une solution au sens des courants. Plus précisément, cette solution est la limite croissante de déformations $C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$ et S^1 -invariantes Φ_r du segment $\Xi := ((1-t)v_0 + tv_1)_{t \in [0,1]}$, vérifiant les équations*

$$(\mathrm{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}\Phi_r)^{m+1} \equiv cr \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} \wedge (\mathrm{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb})^m \quad (2.1)$$

avec $r > 0$ arbitrairement petit, où $dw = dt + ids$ et $c > 0$ est une constante, et avec $\mathrm{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}\Phi_r$ strictement positive et C^∞ -quasi-isométrique à $\frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} + \mathrm{pr}_{X \setminus D}^* \omega$. Enfin, il existe des bornes uniformes C^0 et C^1 sur $\Phi_r - \Xi$, ainsi que sur $i\partial\bar{\partial}(\Phi_r - \Xi)$.

La preuve, qui s'inspire de celle que donne Chen [Che00] dans le cas compact, elle-même dans la lignée de travaux tels que [CKNS85, Gua98], repose sur une *méthode de continuité* qui requiert plusieurs étapes. La méthode est exprimée dans la prochaine section, et les estimées dont on a besoin pour la mener à bien sont obtenues dans les sections 2.3, 2.4 et 2.5 ; on conclut la preuve en section 2.6.

Pour le moment, nous retraduisons le théorème 2.1 dans le langage des chemins sur $\widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$ entre points v_0 et v_1 , puisque c'est ce dont nous avons besoin pour la démonstration du théorème 5.1 de la partie 5 :

Corollaire 2.2. *Pour tous $v_0, v_1 \in \widehat{\mathcal{PM}}_\Omega$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe un chemin (v_t^ε) reliant v_0 à v_1 qui est une déformation C^∞ du segment $((1-t)v_0 + tv_1)$, vérifiant l'équation $(\ddot{v}_t^\varepsilon - |\partial v_t^\varepsilon|_{\omega_t^\varepsilon}^2)(\omega_t^\varepsilon)^m = \varepsilon \omega_{pb}^m$, où $\omega_t^\varepsilon = \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}v_t^\varepsilon$. Il existe de plus une constante $C > 0$ telle que pour tout ε , $|v_t^\varepsilon - ((1-t)v_0 + tv_1)|$, $|dv_t^\varepsilon|_{\omega_{pb}}$, $|v_t^\varepsilon|$, $|\ddot{v}_t^\varepsilon|$, $|dv_t^\varepsilon|_{\omega_{pb}}$, $|i\partial\bar{\partial}v_t^\varepsilon|_{\omega_{pb}} \leq C$ où les opérateurs d , ∂ et $\bar{\partial}$ sont ceux de $X \setminus D$, et ∂_t désigne ∂_t .*

Démonstration. On prend $\varepsilon > 0$ petit, et pour tout $t \in [0, 1]$ on note v_t^ε la fonction $\Phi_\varepsilon(\cdot, t, \cdot)$, avec Φ_ε comme dans le théorème 2.1 (et où ε joue le rôle de r); ceci a bien un sens, car chaque terme est invariant selon S^1 . De plus, $v_\tau^\varepsilon = v_\tau$, $\tau = 0, 1$, car $(\Phi_\varepsilon - \Xi)|_{(X \setminus D) \times \partial\Sigma} \equiv 0$, et $(v_t^\varepsilon)_{t \in [0, 1]} \in \mathcal{E}((X \setminus D) \times [0, 1])$. Pour affirmer que (v_t^ε) est un *chemin* allant de v_0 à v_1 , il nous suffit donc de vérifier que $\omega_t^\varepsilon = \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}v_t^\varepsilon$ est quasi-isométrique à ω pour tout $t \in [0, 1]$, où ∂ et $\bar{\partial}$ sont ceux de $X \setminus D$; ceci provient de simplement de ce que pour tout $t \in [0, 1]$, ω_t^ε est la restriction de $\text{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}\Phi_\varepsilon$ (∂ et $\bar{\partial}$ de $(X \setminus D) \times \Sigma$) au sous-fibré $\Lambda_{(X \setminus D) \times \{t\}}^{1,1}$ de $\Lambda_{(X \setminus D) \times \Sigma}^{1,1}$, et de la borne mutuelle entre $\text{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + i\partial\bar{\partial}\Phi_\varepsilon$ et $\text{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$ demandée dans (2.1).

On a de plus d'après le théorème 2.1 une borne sur $i\partial\bar{\partial}\Phi_\varepsilon$, indépendante de ε , ∂ et $\bar{\partial}$ étant ceux du produit $(X \setminus D) \times \Sigma$.

Ceci nous dit qu'il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon > 0$ proche de 0,

$$|\ddot{v}_t^\varepsilon|, |dv_t^\varepsilon|_{\omega_{pb}}, |i\partial\bar{\partial}v_t^\varepsilon|_{\omega_{pb}} \leq C \quad (2.2)$$

(la partie linéaire $(1-t)v_0 + tv_1$ de (v_t^ε) est tuée par ∂_t^2 , et $dv_0, dv_1, i\partial\bar{\partial}v_0$ et $i\partial\bar{\partial}v_1$ sont bornés).

Finalement, en écrivant (2.1) sur $X \setminus D$ et en oubliant les tirés-en-arrière,

$$(\ddot{v}_t^\varepsilon - |\partial v_t^\varepsilon|_{\omega_t^\varepsilon}^2)(\omega_t^\varepsilon)^m \wedge \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w} = 4c\varepsilon \omega_{pb}^m \wedge \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w};$$

puisque seuls les petits ε nous intéressent, on peut supposer après homothétie que $4c = 1$, et par conséquent $(\ddot{v}_t^\varepsilon - |\partial v_t^\varepsilon|_{\omega_t^\varepsilon}^2)(\omega_t^\varepsilon)^m = \varepsilon \omega_{pb}^m$. \square

2.2 La méthode de continuité

Préliminaires. On observe que l'équation (1.5) peut se réécrire

$$((\text{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}) + i\partial\bar{\partial}(\Phi + t(1-t)))^{m+1} \equiv 0,$$

car $\frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w} = dt \wedge ds = -i\partial\bar{\partial}(t(1-t))$ (w est une coordonnée holomorphe locale sur Σ telle que $dw = dt + ids$). Cette réécriture tient compte de ce que $\hat{\omega} := \text{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb} + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$ est une forme de Kähler sur $(X \setminus D) \times \Sigma$, alors que $\text{pr}_{X \setminus D}^* \omega_{pb}$ est dégénérée dans la direction de Σ . Cela dit, on étudie en fin de compte l'équation

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\phi)^{m+1} \equiv 0$$

sur $(X \setminus D) \times \Sigma$ avec ω désignant désormais $\hat{\omega}$, qui en tant que produit de métriques de référence sera notre métrique de référence sur le produit $(X \setminus D) \times \Sigma$. Pour généraliser facilement les définitions des espaces de Hölder de fonctions ou de tenseurs sur $(X \setminus D) \times \Sigma$ on utilise des quasi-coordonnées, en remplaçant les polydisques dont on s'est servi sur $X \setminus D$ par leur produit avec des (demi-)boules de coordonnées de diamètre homogène formant

un atlas de Σ . Dans cette partie, $C^{k,\alpha}$, C^∞ , *etc.* désignent de tels espaces sur $(X \setminus D) \times \Sigma$, sauf mention contraire explicite. Une dernière remarque concerne l'invariance selon S^1 de notre nouvelle métrique ω , ainsi que celle de ϕ , si ceci désigne un $\Phi + t(1-t)$.

Une famille d'équations. Donnons-nous à présent une fonction S^1 -invariante $\theta : [0, 1] \times (X \setminus D) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante en $r \in [0, 1]$ en tout point, telle que $\theta(0, \cdot) \equiv 0$, $\theta(1, \cdot) \equiv 1$, minorée par cr pour une constante $c > 0$ et à dérivées contrôlées à tout ordre, à savoir telles que θ soit dans l'espace que nous désignerions par $C^\infty([0, 1] \times (X \setminus D) \times \Sigma)$. La *méthode de continuité* que nous proposons consiste à résoudre pour $r \in (0, 1]$ la famille d'équations

$$\begin{cases} (\omega + i\partial\bar{\partial}\phi)^{m+1} = \theta(r)(\omega + i\partial\bar{\partial}\phi_1)^{m+1}, \\ \phi|_{(X \setminus D) \times \{\tau\} \times S^1} = v_\tau, \tau = 0, 1 & \text{(conditions de bord),} \\ c\omega \leq \omega + i\partial\bar{\partial}\phi \leq c^{-1}\omega & \text{pour une constante } c = c(r) > 0, \\ \phi - \phi_1 \in C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma), \end{cases} \quad (E_r)$$

avec ϕ_1 qui est elle-même solution de (E_1) , ce qui signifie que $\omega + i\partial\bar{\partial}\phi_1$ est C^∞ -quasi-isométrique à ω sur $(X \setminus D) \times \Sigma$ et $\phi_1|_{(X \setminus D) \times \{\tau\} \times S^1} = v_\tau$, $\tau = 0, 1$.

La première étape est de s'assurer qu'une telle solution de départ ϕ_1 existe. En réalité, un calcul facile nous la fournit comme déformation $C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$ du segment Ξ reliant v_0 à v_1 . Pour être plus précis, soit une constante $C > 0$ à ajuster; en posant $\phi_1 := (1-t)v_0(z) + tv_1(z) - Ct(1-t)$ (c'est bien S^1 -invariant), on a :

$$\omega + i\partial\bar{\partial}\phi_1 = (1-t)\omega_{v_0} + t\omega_{v_1} + 2\Re(i\partial(v_1 - v_0) \wedge d\bar{w}) + (C+1)\frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w},$$

ce qui est clairement C^∞ -quasi-isométrique à ω pour C assez grand, car dv_0 et dv_1 sont dans $C^\infty(\Lambda^1, X \setminus D)$ (et en particulier sont bornées pour une métrique de type Poincaré sur la base $X \setminus D$).

Ayant réglé cette question, notre stratégie est maintenant de montrer le résultat suivant :

Proposition 2.3. *Soit r_0 la borne inférieure des r tels que $(E_{r'})$ admette une unique solution pour tout $r' \in (r, 1]$. Alors $r_0 = 0$.*

La preuve est donnée en section 2.6, mais requiert un important travail préparatoire, consistant en particulier à obtenir des estimées *a priori* sur les solutions des équations intermédiaires (E_r) . On traite pour commencer le problème de l'unicité de ces solutions, ainsi que les estimées C^0 .

2.3 Unicité et estimation C^0 des solutions intermédiaires

Proposition 2.4 (Unicité et estimation C^0). *Pour tout $r \in (0, 1]$, la solution ϕ de (E_r) est unique si elle existe; en particulier, elle est S^1 -invariante. De plus, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 + h$ pour une certaine fonction bornée $h \in C^\infty$ s'annulant identiquement sur $(X \setminus D) \times \partial\Sigma$, et si ϕ' est la solution de $(E_{r'})$, $r' \in (0, 1]$, alors $r' \leq r$ implique $\phi \leq \phi'$.*

Démonstration. L'idée qui sous-tend la technique que nous utilisons consiste à faire apparaître des fonctions sur/sous-harmoniques *ad hoc*, par rapport à des métriques bien choisies, s'annulant sur $(X \setminus D) \times \partial\Sigma$, puis à appliquer un principe du maximum approprié (lemme 2.8 ci-dessous). Une forme faible de ce dernier s'énonce comme suit :

Lemme 2.5. *Soit v une fonction C_{loc}^2 majorée sur $(X \setminus D) \times \Sigma$, telle que*

$$\sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} v > \sup_{(X \setminus D) \times \partial \Sigma} v.$$

On suppose que $(X \setminus D) \times \Sigma$ est muni d'une métrique kählérienne ω' quasi-isométrique à ω . Alors il existe une suite $(x_j)_{j \geq 0}$ de points de $(X \setminus D) \times \overset{\circ}{\Sigma}$ tels que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v(x_j) = \sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} v, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} |dv(x_j)|_{\omega'} = 0, \quad \text{et} \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} \Delta_{\omega'} v(x_j) \geq 0.$$

Démonstration du lemme 2.5. La preuve est tout à fait semblable à celle du principe du maximum de D. Wu [Wu08, p. 406], modulo une adaptation à notre contexte à bord. Voyons les détails pour $\omega' = \omega$. Pour $\varepsilon > 0$ on pose $v_\varepsilon = v - \varepsilon \text{pr}_{X \setminus D}^* \mathbf{u}$, de sorte que v_ε tende vers $-\infty$ près de $D \times \Sigma$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, v_ε atteint son maximum en un point $x_\varepsilon \in (X \setminus D) \times \partial \Sigma$. Il est aisé de voir que pour tout $x \in (X \setminus D) \times \Sigma$ fixé, $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x_\varepsilon) \geq v(x)$, d'où une contradiction avec l'hypothèse $\sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} v > \sup_{(X \setminus D) \times \partial \Sigma} v$, car bien sûr $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x_\varepsilon) \leq \sup_{(X \setminus D) \times \partial \Sigma} v$.

Cela dit, on sait qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que v_{ε_0} atteigne son maximum en un point $x_{\varepsilon_0} \in (X \setminus D) \times \overset{\circ}{\Sigma}$. En appliquant le raisonnement qui précède aux $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, on obtient un ε_1 tel que v_{ε_1} atteigne son maximum en un point $x_{\varepsilon_1} \in (X \setminus D) \times \overset{\circ}{\Sigma}$, et ainsi de suite. On pose $x_j = x_{\varepsilon_j}$; une lecture de la preuve de Wu suffit pour voir que (x_j) vérifie les assertions de l'énoncé. \blacksquare

Le résultat suivant se révèle utile pour renforcer notre principe du maximum :

Lemme 2.6. *On suppose $(X \setminus D) \times \Sigma$ muni d'une métrique kählérienne ω' C^∞ -quasi-isométrique à ω . Alors il existe une solution $\alpha \in C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$ au problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} \Delta_{\omega'} \alpha = 1 \\ \alpha|_{(X \setminus D) \times \partial \Sigma} = 0. \end{cases}$$

De plus, $0 \leq \alpha \leq Ct(1-t)$ pour un $C = C(\omega') > 0$.

Démonstration du lemme 2.6. Le résultat provient d'un argument d'exhaustion, à savoir : α est obtenue comme limite C^2 sur tout compact de $(X \setminus D) \times \Sigma$ d'une sous-suite de la suite (α_p) des solutions $C^{2,\beta}$ ($\beta \in (0, 1)$) du problème de Dirichlet analogue sur une suite exhaustive croissante de domaines compacts (V_p) de $(X \setminus D) \times \Sigma$. La positivité des α_p , et par conséquent celle de α , est claire. En outre, $\Delta_{\omega'}(t(1-t)) = 2 \text{tr}^{\omega'}(\text{idt} \wedge ds) = |dt|_{\omega'}^2 \geq c|dt|_{\omega'}^2 = c$ où $c = c(\omega') > 0$ est telle que $\omega' \geq c\omega$. Enfin, $\Delta_{\omega'}(c^{-1}t(1-t) - \alpha_p) \geq 0$ sur V_p et $(c^{-1}t(1-t) - \alpha_p) \geq 0$ sur ∂V_p d'où $c^{-1}t(1-t) - \alpha_p \geq 0$ i.e. $\alpha_p \leq c^{-1}t(1-t)$ pour tout p , d'où l'estimée C^0 recherchée. Cette estimée se transmet à α , qui est alors dans $C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$, toujours par ellipticité uniforme de $\Delta_{\omega'}$ sur des (demi-)boules de quasi-coordonnées, et grâce à l'assertion triviale $1 \in C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$. \blacksquare

Remarque 2.7. *Des arguments analogues donnent des isomorphismes pour le laplacien $\Delta_{\omega'} : C_0^{k+2,\beta} \rightarrow C^{k,\beta}$ pour tout $(k, \beta) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$ et toute ω' C^∞ -quasi-isométrique à ω , l'indice 0 de l'espace de départ signifiant l'annulation le long de $(X \setminus D) \times \partial \Sigma$.*

En combinant les deux derniers lemmes, on obtient :

Lemme 2.8. *Soit v une fonction C_{loc}^2 majorée sur $(X \setminus D) \times \Sigma$, négative sur le bord $(X \setminus D) \times \partial \Sigma$. On suppose que $(X \setminus D) \times \Sigma$ est muni d'une métrique kählérienne ω' C^∞ -quasi-isométrique à ω , et que $\Delta_{\omega'} v \leq 0$. Alors $v \leq 0$.*

Démonstration du lemme 2.8. Par l'absurde. On suppose qu'il existe un point $x \in (X \setminus D) \times \Sigma$ tel que $v(x) > 0$. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit $(v - \varepsilon\alpha)(x) > 0$ donc $\sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} (v - \varepsilon\alpha) > 0 \geq \sup_{(X \setminus D) \times \partial \Sigma} (v - \varepsilon\alpha)$. On prend une suite (x_j) comme dans le lemme 2.5 pour $v - \varepsilon\alpha$; en particulier, $\liminf_{j \rightarrow \infty} \Delta_{\omega'}(v - \varepsilon\alpha)(x_j) \geq 0$, alors que cette limite vaut $-\varepsilon + \liminf_{j \rightarrow \infty} \Delta_{\omega'} v(x_j) \leq -\varepsilon$, ce qui est absurde. ■

On revient à la preuve de la proposition 2.4. On désigne par ψ la différence $(\phi - \phi_1)$, de sorte que $\psi \in C_0^\infty$. On déclare que ψ est sur-harmonique par rapport à $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\phi$ (qui est C^∞ -quasi-isométrique à ω); on peut le voir en tout point x en prenant des coordonnées (z^1, \dots, z^{m+1}) telles que

$$\omega' = \sum_{j=1}^{m+1} idz^j \wedge d\bar{z}^j \quad \text{et} \quad i\partial\bar{\partial}\psi = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j idz^j \wedge d\bar{z}^j$$

au point x . Par concavité du logarithme on écrit $(\frac{1}{\theta(r)})^{\frac{1}{m+1}} = \prod_{j=1}^{m+1} (1 - \lambda_j)^{\frac{1}{m+1}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m+1} (1 - \lambda_j)}{m+1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\Delta'\psi}{m+1}$, i.e. $\Delta'\psi \geq 2(m+1)(\theta(r)^{-1/(m+1)} - 1) \geq 0$, où Δ' est le laplacien de ω' . D'après le lemme 2.8, ceci donne $\psi \geq 0$, soit $\phi \geq \phi_1$.

En utilisant la même méthode, on obtient que :

- si ϕ' désigne une solution de $(E_{r'})$, $r \leq r' \leq 1$, alors $\Delta'(\phi - \phi') \geq 0$ donc $\phi \geq \phi'$. On obtient l'inégalité réciproque par symétrie. Ceci donne les assertions d'unicité, et donc de S^1 -invariance.
- On conserve la notation $\psi = \phi - \phi_1$. Si h désigne la fonction C_0^∞ telle que $\Delta_1 h = 2(m+1)$, avec Δ_1 le laplacien attaché à $\omega_1 - h$ est donnée par le lemme 2.6 – alors $\psi \leq h$, i.e. $\phi \leq \phi_1 + h$. Ceci découle de l'identité $\omega = \omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$ dont on prend la trace par rapport à ω_1 , ce qui donne : $m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi \geq 0$. □

2.4 Estimées d'ordre 2

Réécriture des équations. On désigne par f la fonction $\frac{\omega_1^{m+1}}{\omega^{m+1}}$, de sorte que $f \in C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$ et $f \geq c$ pour une constante $c > 0$. On remarque que (E_r) , $r \in (0, 1]$, se résume à $(\omega + i\partial\bar{\partial}\phi)^{m+1} = \theta(r)f\omega^{m+1}$, en plus de la condition de positivité et de la condition de bord. Il nous reste néanmoins une certaine liberté sur la définition de θ ; par exemple, on peut prendre $\theta(r) = r((1 - \chi(r))cf^{-1} + \chi(r))$ où χ est une fonction croissante sur $[0, 1]$, s'annulant identiquement sur un voisinage de 0, constante égale à 1 sur un voisinage de 1, et où $c = \inf_{(X \setminus D) \times \Sigma} f > 0$. Ainsi, $\theta(r)f = cr$ pour r proche de 0.

Estimation d'ordre 2 sur ψ . D'autre part, comme $\psi = \phi - \phi_1$ est la fonction qui a une chance d'être bornée – en général, ϕ_1 ne l'est pas si elle est construite à partir du segment joignant deux potentiels non bornés, et donc ϕ ne l'est pas non plus – il est utile de considérer nos équations (E_r) sous la forme : $(\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi)^{m+1} = \theta(r)\omega_1^{m+1}$. On désigne par (E'_r) cette dernière équation à laquelle on adjoint les conditions de borne mutuelle entre métriques ($c^{-1}\omega_1 \leq \omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi \leq c^{-1}\omega_1$ pour une certaine $c = c(r) > 0$) et la condition de bord (qui devient $\psi|_{(X \setminus D) \times \Sigma} \equiv 0$). On en déduit alors :

Proposition 2.9. *Il existe une constante C indépendante de $r \in (0, 1]$ telle que pour toute solution ψ d'une (E'_r) ,*

$$\sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} (m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi) \leq C(1 + \sup_{(X \setminus D) \times \partial \Sigma} (m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi)). \quad (2.3)$$

Démonstration. On a besoin d'une inégalité due à Yau [Yau78], dont la démonstration est purement locale, et qui s'écrit dans notre contexte :

Lemme 2.10 (Yau). *Si $\inf_{j \neq \ell} \text{Rm}_{j\bar{j}\ell\bar{\ell}}^{\omega_1}$ désigne la borne inférieure sur $(X \setminus D) \times \Sigma$ des quantités $(\text{Rm}^{\omega_1}(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial z^{\bar{j}}})\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\ell}}}, \frac{\partial}{\partial z^{\ell}})_{\omega_1}$, $j \neq \ell$, où les $\frac{\partial}{\partial z^k}$ sont choisis ω_1 -orthonormaux au point de calcul et Δ' est le laplacien de $\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi$ alors*

$$\begin{aligned} -\Delta'(e^{-\kappa\psi}(m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi)) &\geq \\ e^{-\kappa\psi}(\Delta_1 \log(c + \chi(r)(f-c)) - (m+1)^2 \inf_{j \neq \ell} \text{Rm}_{j\bar{j}\ell\bar{\ell}}^{\omega_1}) & \\ - \kappa e^{-\kappa\psi}(m+1)(m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi) & \\ + (\kappa + \inf_{j \neq \ell} \text{Rm}_{j\bar{j}\ell\bar{\ell}}^{\omega_1})e^{-\kappa\psi}(m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi)^{1+1/m} \cdot (r(c + \chi(r)(f-c)))^{-1}, & \end{aligned}$$

où la seule condition demandée est sur la constante κ : $\kappa + \inf_{j \neq \ell} \text{Rm}_{j\bar{j}\ell\bar{\ell}}^{\omega_1} > 1$.

On peut donc en particulier fixer κ une fois pour toutes, indépendamment de r . Il n'est pas difficile à présent de trouver une constante K_0 indépendante de r telle que

$$\begin{aligned} 1 \leq e^{-\kappa\psi}(\Delta_1 \log(c + \chi(r)(f-c)) - (m+1)^2 \inf_{j \neq \ell} \text{Rm}_{j\bar{j}\ell\bar{\ell}}^{\omega_1}) & \\ - \kappa(m+1)K + (\kappa + \inf_{j \neq \ell} \text{Rm}_{j\bar{j}\ell\bar{\ell}}^{\omega_1})K^{1+1/m} \cdot (r(c + \chi(r)(f-c)))^{-1} & \end{aligned}$$

dès que $K \geq K_0$. Or soit $e^{-\kappa\psi}(m+1)(m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi)$ est $\leq K_0 + 1$ sur $(X \setminus D) \times \Sigma$, et on a fini (ψ est bornée indépendamment de r), soit sa borne supérieure est $> K_0$. Dans ce dernier cas, on suppose que la borne supérieure n'est pas atteinte en suivant $(X \setminus D) \times \partial\Sigma$; on obtient grâce au lemme 2.5 une suite de points (x_j) tels que $e^{-\kappa\psi}(m+1)(m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi)(x_j)$ tende vers notre borne supérieure, et $\Delta(e^{-\kappa\psi}(m+1)(m+1 - \frac{1}{2}\Delta_1\psi))(x_j)$ vers une quantité négative. D'après notre définition de K_0 , ceci n'est pas consistant avec la formule du lemme 2.10, d'où le résultat, ψ étant bornée indépendamment de r . \square

Nous pouvons maintenant contrôler le membre de droite de l'inégalité (2.3) à l'aide des termes d'ordre 1 de ψ :

Proposition 2.11. *Il existe une constante C indépendante de $r \in (0, 1]$ telle que pour la solution ψ de toute (E'_r) on ait :*

$$\sup_{(X \setminus D) \times \partial\Sigma} (m+1 - \frac{1}{2}\Delta_{\omega_1}\psi) \leq C(1 + \sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} |d\psi|_{\omega_1}^2).$$

Démonstration. La démonstration de la proposition est assez technique, mais suit de près celle de Chen [Che00, Thm 1], de sorte que nous ne disons que quelques mots sur les adaptations nécessaires notre contexte non compact.

Tout d'abord, la preuve de Chen repose sur le choix en tout point p du bord de $(X \setminus D) \times \Sigma$ d'une demi-boule de coordonnées telle que la métrique de référence soit comprise entre $\frac{1}{2}\omega_{euc}$ et $2\omega_{euc}$, où ω_{euc} est la métrique euclidienne donnée par les coordonnées de B . De plus, le rayon de B ne doit pas dépendre de p , et les m premières coordonnées paramètrent la base $X \setminus D$ tandis que la dernière, disons z , paramètre Σ ; plus précisément, Σ est donnée par $\{\Re(z) \geq 0\}$ dans B .

Il nous est clairement impossible de procéder strictement de cette manière avec notre type de métrique (le rayon d'injectivité tend vers 0 près de D), mais nous savons déjà

qu'avoir des estimées uniformes sur les tirées-en-arrière dans un certain système de quasi-coordonnées (les Φ_δ) fournit des bornes globales. On remplace les demi-boules de quasi-coordonnées de la preuve de Chen par des *demi-boules de quasi-coordonnées*. Pour être plus explicite, on fixe une boule de rayon $\delta > 0$ dans $\mathbb{C}^m \times \{\Re(z) \geq 0\}$ et on considère une famille $(\pi_p)_{p \in (X \setminus D) \times \partial \Sigma}$ d'immersions holomorphes $B \rightarrow (X \setminus D) \times \Sigma$ telles que $p \in (X \setminus D) \times \partial \Sigma$, π_p envoie 0 sur p , $B \cap (\mathbb{C}^m \times \{0\})$ dans $(X \setminus D) \times \partial \Sigma$ et $\frac{1}{2}\omega_{euc} \leq \pi_p^* \omega_1 \leq 2\omega_{euc}$. On peut ainsi appliquer les techniques de Chen aux $\pi_p^* \psi$ et obtenir des résultats analogues, en particulier le fait que les dérivées secondes normales-tangentielles (*resp.* tangentielles-tangentielles) en p des $\pi_p^* \psi$ sont contrôlées par la norme L^∞ de $\pi_p^* d\psi$ d'une manière ne dépendant pas de p .

Une lecture précise de la preuve de Chen révèle toutefois une subtilité : pour prouver que la fonction-barrière ν de Chen est positive quand δ est assez petit, au lieu d'utiliser des bornes inférieures strictement positives sur $\Delta' \nu$ (ou plutôt sur $\pi_p^*(\Delta' \nu)$ pour être tout à fait correct), on utilise la définition de ν , et le fait qu'il existe une constante C ne dépendant pas de p telle que l'on ait $0 \leq x \leq Ch$ en posant $x = \Re(z)$. Nous pouvons en effet prendre $\pi_p(*, z) = (*, c(t + i(s - s_p)))$ ou $\pi_p(*, z) = (*, c((1 - t) - i(s - s_p)))$, selon que l'on se trouve sur le bord intérieur ou extérieur de Σ vue comme couronne dans le plan complexe, avec $c > 0$ ne dépendant pas de l'ouvert de travail, de sorte que l'on aura gagné si l'on sait que $t(1 - t) \leq Ch$ sur *tout* $X \setminus D$ pour une certaine constante $C > 0$. Une telle constante existe bien, puisque pour C assez grand, $\Delta_1(Ch - t(1 - t)) = 2C(m + 1) - \Delta_1(t(1 - t)) \geq 0$ sur $X \setminus D$, et par le lemme 2.8. Nous renvoyons le lecteur à [Che00, p. 204-208] pour les détails. \square

Nous concluons la présente section par un contrôle définitif sur $\Delta_1 \psi$:

Proposition 2.12. *Il existe une constante C indépendante de $r \in (0, 1]$ telle que pour la solution ψ de toute (E'_r) on ait :*

$$\sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} |d\psi|_{\omega_1} \leq C.$$

En particulier, au vu de la proposition 2.11, $\sup_{X \setminus D} |i\partial\bar{\partial}\psi|_{\omega_1}$ est majoré par une constante indépendante du paramètre r .

Démonstration. Nous adaptons ici aussi les arguments de Chen, à savoir l'analyse qu'il mène au travers d'un procédé d'éclatement – [Che00, §3.2] – et nous ne répétons donc pas la preuve dans son intégralité, mais nous soulignons plutôt les quelques changements nécessaires au bon fonctionnement de la démonstration.

On suppose qu'il existe une suite (r_j) telle que $\varepsilon_j^{-1} := \sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} |d\psi_{r_j}|_{\omega_1}$ tende vers $+\infty$, et on regarde une suite (p_j) de points de $(X \setminus D) \times \Sigma$ tels que $|d\psi_{r_j}(p_j)|_{\omega_1} \geq \varepsilon_j^{-1} - 1$ pour tout j . En général, on ne peut pas extraire de (p_j) de suite convergeant dans $(X \setminus D) \times \Sigma$; nous allons donc *suivre* ces points, et définir les objets intéressants sur des (demi-)boules autour de ces derniers. On doit néanmoins ici distinguer deux cas : à une extraction près, $w_j := \text{pr}_\Sigma(p_j)$ converge vers un point w de Σ , et :

1. si $w \in \partial \Sigma$, on choisit $\delta > 0$ assez petit et on se donne un demi-disque D_δ de rayon δ de coordonnée à partie réelle positive, centré en w et tel que $D_\delta \cap \{\Re = 0\}$ soit envoyé parallèlement à $\partial \Sigma$;
2. si $w \in \mathring{\Sigma}$, on choisit $\delta > 0$ assez petit et on se donne un disque D_δ de coordonnée dans Σ , de rayon δ et centré en w .

Dans les deux cas, abstraction faite de l'extraction, w_j est dans le voisinage considéré de w , et même dans celui de rayon moitié. Si l'on prend de plus une boule B'_δ de quasi-coordonnées pour $X \setminus D$ de rayon δ centrée en $z_j = \text{pr}_{X \setminus D}(p_j)$, on a alors des immersions

$$\begin{aligned} \pi_j : B_\delta &\longrightarrow (X \setminus D) \times \Sigma \\ 0 &\longmapsto (z_j, w_j), \end{aligned}$$

à notre disposition, où B_δ désigne la (demi-)boule de rayon δ centrée en l'origine de \mathbb{C}^{m+1} et incluse dans $B'_\delta \times D_\delta$. Notre construction de ω_1 (voir §2.2) nous autorise en outre à supposer que $\pi_j^* \omega_1$ est trivial en $(0, 0)$, et que ses dérivées à tout ordre sont bornées dans B_δ indépendamment de j . On pose alors, pour j assez grand et $(z, w) \in B_{\delta/\varepsilon_j}$,

$$\tilde{\psi}_j(z, w) = \pi_j^* \psi_{r_j}(\varepsilon_j(z, w)),$$

ce qui définit, sur tout compact de \mathbb{C}^{m+1} ou de $\{\Re \mathbf{e}(w)\} \subset \mathbb{C}^{m+1}$ selon le cas, une suite de fonctions que nous allons étudier pour parvenir à une contradiction. De même, on pose pour ces j , (z, w) ,

$$\tilde{h}_j(z, w) = \pi_j^* h(\varepsilon_j(z, w)),$$

et on pose enfin $\tilde{\omega}_j(z, w) = \pi_j^* \omega_1(\varepsilon_j(z, w))$. La remarque précédente nous permet d'affirmer que ces $\tilde{\omega}_j$ convergent dans C^∞ sur tout compact vers la métrique euclidienne, et que l'on peut supposer que δ est assez petit pour que l'on ait toujours $\frac{1}{2}\omega_{euc} \leq \tilde{\omega}_j \leq 2\omega_{euc}$.

Or notre changement d'échelle implique que $|d\tilde{\psi}_j(z, w)|_{\tilde{\omega}_j} \leq 1$ quand cela a un sens, que $|d\tilde{\psi}_j(0, 0)|_{\tilde{\omega}_j} \geq 1 - \varepsilon_j$, et que $|\Delta_{\tilde{\omega}_j} \tilde{\psi}_j(z, w)| \leq C$ où C est la constante de la proposition 2.11. De plus les inégalités $0 \leq \psi \leq h \leq \|h\|_{C^0}$ se propagent pour donner $0 \leq \tilde{\psi}_j \leq \tilde{h}_j \leq \|h\|_{C^0}$. On déduit de ces estimations et des estimées de Schauder classiques que $(\tilde{\psi}_j)$ est borné dans $C^{1,\alpha}$ sur tout compact dès que cela a un sens (α quelconque dans $(0, 1)$, indépendant du compact), ce qui nous donne après deux extractions diagonales une sous-suite que nous appelons encore $(\tilde{\psi}_j)$ qui converge $C^{1,\beta}$ sur chaque compact vers une fonction notée $\tilde{\psi}$ de $C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{C}^m \times \{\Re \mathbf{e} \geq 0\})$ dans le premier des deux cas évoqués ci-dessus, et vers $\tilde{\psi} \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{C}^{m+1})$ dans le second cas ($\beta \in (0, \alpha)$). Enfin $\tilde{\psi}$ est bornée par $\|h\|_{C^0}$ sur son domaine tout entier, et les inégalités sur les $|d\tilde{\psi}_j(0, 0)|_{\tilde{\omega}_j}$ nous disent, après passage à la limite : $|d\tilde{\psi}(0, 0)|_{euc} = 1$.

Toutefois dans le cas 1, on voit aisément que $\tilde{h}_j(z, w)$ tend vers 0 pour tout (z, w) fixé d'après la définition de \tilde{h}_j . Ceci implique $\tilde{\psi} \equiv 0$, ce qui contredit $|d\tilde{\psi}(0, 0)|_{euc} = 1$.

Dans le second cas, en utilisant la positivité de $\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi_{r_j}$, on peut montrer que sur chaque droite complexe Π passant par $0 \in \mathbb{C}^{m+1}$, on a $\Delta_\Pi \psi \leq 0$ au sens des distributions, et donc $\tilde{\psi}$ est constante sur chaque Π (car bornée), donc constante, ce qui contredit à nouveau $|d\tilde{\psi}(0, 0)|_{euc} = 1$. \square

2.5 Estimées C^2 et $C^{2,\beta}$

2.5.1 Estimée C^2

On a obtenu au paragraphe précédent une estimée sur la différentielle et le hessien complexe de nos potentiels ψ ; cette estimée est de plus uniforme, au sens où elle ne dépend pas du paramètre r de la famille d'équations (E'_r) . Notons qu'en vertu de l'identité $\psi|_{(X \setminus D) \times \partial \Sigma} \equiv 0$, cette estimée fournit une estimée uniforme C^2 complète sur ψ le long du bord $(X \setminus D) \times \partial \Sigma$. On donne ici une telle estimée sur $(X \setminus D) \times \Sigma$, dont on ne peut

toutefois pas demander l'uniformité par rapport au paramètre r , du moins quand celui-ci se rapproche de 0.

Proposition 2.13. *On suppose que ψ est la solution d'une (E'_r) , $r \in (0, 1]$. Alors il existe une constante C indépendante de r telle que : $\|(\nabla^{\omega_1})^2\psi\|_{C^0} \leq \frac{C}{r}$.*

Démonstration. Nous adaptons ici la preuve du théorème 3.2 de [Błó]. Cette preuve utilise de manière cruciale la compacité de la variété de base : on se focalise sur le voisinage d'un point où une fonction bien choisie atteint son maximum. Plutôt que de contourner dans notre contexte le défaut de compacité en utilisant, par exemple, notre principe du maximum (lemme 2.5), on choisit l'option suivante : on regarde ce qui se passe en suivant une suite de points le long de laquelle la fonction en question tend vers sa borne supérieure.

Pour commencer, fixons $r \in (0, 1]$, prenons ψ comme dans l'énoncé et définissons une fonction B_ψ par

$$B_\psi : x \longmapsto \sup_{\substack{Y \in T_x((X \setminus D) \times \Sigma) \\ |Y|_{\omega_1} = 1}} (\nabla_Y d\psi)(Y)$$

où ∇ désigne ∇^{ω_1} .

Remarquons que $B_\psi(x)$ n'est autre que la plus grande valeur propre de $(\nabla^{\omega_1})^2\psi$ en x , de sorte que nous devons produire l'estimée voulue sur B_ψ ; en effet, à un facteur 2 et des termes d'ordre 1 près $(\nabla^{\omega_1})^2\psi$ et $i\partial\bar{\partial}\psi$ ont la même trace. Une majoration est même suffisante. On définit

$$A_\psi = B_\psi + |d\psi|_{\omega_1},$$

et l'on pose $M_\psi = \sup_{(X \setminus D) \times \Sigma} A_\psi$. Comme A_ψ est déjà contrôlée sur $(X \setminus D) \times \partial\Sigma$, on peut supposer que $M_\psi > \sup_{(X \setminus D) \times \partial\Sigma} A_\psi$, et même qu'il existe un $\delta > 0$ (dépendant éventuellement de ψ) tel que

$$M_\psi = \sup_{(X \setminus D) \times [\delta, 1-\delta] \times S^1} A_\psi.$$

En effet, si un tel δ n'existe pas et comme les dérivées troisièmes de ψ sont bornées, bien que l'on n'ait aucune estimation sur une telle borne, cela dit schématiquement que l'on peut atteindre M_ψ en suivant une suite de points dont la projection sur $[0, 1]$ tend vers 0 ou 1, et ce qui donne $M_\psi = \sup_{(X \setminus D) \times \partial\Sigma} A_\psi$ et achève la preuve.

On a ainsi des boules de quasi-coordonnées $B_\delta \xrightarrow{\pi_j} B_j \subset (X \setminus D) \times \Sigma$ de rayon δ centrées en des points O_j telles que pour tout j :

- $\pi_j^* A_\psi(0) = A_\psi(O_j) \geq M_\psi - \frac{1}{2j}$, et $\inf_{(X \setminus D) \times \Sigma} A_\psi \leq \pi_j^* A_\psi \leq M_\psi$;
- $\frac{1}{2}\omega_{euc} \leq \pi_j^* \omega_1 \leq 2\omega_{euc}$, $\pi_j^* \omega_1 = \omega_{euc}$ en 0, et $\pi_j^*(i\partial\bar{\partial}\psi)$ est diagonale en 0 ;
- $(\pi_j^* \omega_1 + i\partial\bar{\partial}\pi_j^* \psi)^{m+1} = \pi_j^* \theta(r) \cdot \pi_j^*(\omega_1)^{m+1}$;
- il existe Y_j de norme 1 en O_j tel que $\pi_j^* A_\psi(0) = \pi_j^*(\nabla_{Y_j} d\psi)(Y_j) + \pi_j^*(|d_{Y_j} \psi|)$.

Si l'on note les tirés-en-arrière avec des chapeaux et que l'on ne fait plus apparaître la dépendance en ψ des objets introduits, on a donc :

- $\hat{A}_j(0) \geq M - \frac{1}{2j}$, et $\inf_{(X \setminus D) \times \Sigma} A \leq \hat{A}_j \leq M$;
- $\frac{1}{2}\omega_{euc} \leq \hat{\omega}_j \leq 2\omega_{euc}$, $\hat{\omega}_j = \omega_{euc}$ en 0, et $i\partial\bar{\partial}\hat{\psi}_j$ est diagonale en 0 ;
- $(\hat{\omega}_j + i\partial\bar{\partial}\hat{\psi}_j)^{m+1} = \hat{\theta}_j(r) \cdot (\hat{\omega}_j)^{m+1}$;
- $|\hat{Y}_j|_{\hat{\omega}_j} = 1$ (en 0) et $\hat{A}_j(0) = (\nabla_{\hat{Y}_j} d\hat{\psi}_j)(\hat{Y}_j) + |d_{\hat{Y}_j} \hat{\psi}_j|$.

L'idée à présent est de faire tendre j vers l'infini et de transporter le problème dans une situation où l'on peut répéter l'argument de Blocki. On n'a toutefois aucune raison de supposer que les \hat{A}_j sont régulières, ce pourquoi nous procédons tout d'abord à une régularisation. On prolonge donc les \hat{Y}_j à B_δ tout entière comme champs de vecteurs constants, et l'on considère :

$$\hat{A}'_j := \frac{1}{|\hat{Y}_j|_{\hat{\omega}_j}^2} (\nabla_{\hat{Y}_j} d\hat{\psi}_j)(\hat{Y}_j) + |d\hat{\psi}_j|_{\hat{\omega}_j},$$

de sorte que $\hat{A}'_j \leq \hat{A}_j \leq \hat{A}_j(0) + \frac{1}{2j} = \hat{A}'_j(0) + \frac{1}{2j}$. De plus \hat{A}'_j est $C^{2,\eta}$, et bornée dans $C^{2,\eta}(B_\delta)$ indépendamment de j (grâce aux contrôles $C^{4,\eta}$ sur les $\hat{\psi}_j$). D'autre part, on a des contrôles $C^{k,\eta}$ analogues sur les $\hat{\omega}_j$ ($k = 3$) et les $\hat{\theta}_j(r)$ ($k = 4$), ainsi qu'une minoration par cr pour ces derniers, $c > 0$ indépendante de j . On peut alors extraire simultanément des suites construites des sous-suites convergeant faiblement $C^{k,\eta}$, et donc à une nouvelle extraction près convergeant fortement C^k , vers des limites $C^{k,\eta}$; on a convergence dans la sphère S^{2m+1} pour (\hat{Y}_j) . On supprime l'indice j pour désigner ces limites; les relations ci-dessus passent à la limite pour donner :

- a) $\hat{A}'(0) = M$, et $\hat{A}' \leq M$, avec $\hat{A}' = \frac{1}{|\hat{Y}|_{\hat{\omega}}^2} (\nabla_{\hat{Y}} d\hat{\psi})(\hat{Y}) + |d\hat{\psi}|_{\hat{\omega}}$;
- b) $\frac{1}{2}\omega_{euc} \leq \hat{\omega} \leq 2\omega_{euc}$, $\hat{\omega} = \omega_{euc}$ en 0, et $i\partial\bar{\partial}\hat{\psi}$ est diagonale en 0;
- c) $(\hat{\omega} + i\partial\bar{\partial}\hat{\psi})^{m+1} = \hat{\theta}(r) \cdot (\hat{\omega})^{m+1}$, $cr \leq \hat{\theta}(r)$ et on a un contrôle sur les dérivées de $\hat{\theta}(r)$ jusqu'à l'ordre $k - 1$ indépendamment de r , et un contrôle analogue pour $\hat{\omega}$;
- d) $|\hat{Y}|_{\hat{\omega}} = 1$ (en 0) et $\hat{A}(0) = (\nabla_{\hat{Y}} d\hat{\psi})(\hat{Y}) + |d_{\hat{Y}}\hat{\psi}|$.

On peut à ce point utiliser des coordonnées normales en 0 et appliquer la preuve de Blocki, car les objets considérés sont suffisamment réguliers pour cela. On obtient en 0

$$\Delta_{\hat{\omega} + i\partial\bar{\partial}\hat{\psi}} \hat{A}' \leq -K_1 \left(\frac{(\nabla_{\hat{Y}} d\hat{\psi})(\hat{Y})}{|\hat{Y}|_{\hat{\omega}}^2} - K_2 \right)^2 + C_r,$$

où C_r ne dépend que du paramètre r , de la manière suivante : on a essentiellement $C_r \leq \frac{C}{r^2}$ avec $C = C(\|\omega_1\|_{C^3}, |d\psi|_{\omega_1}, \Delta_1\psi) > 0$ et indépendante du rayon $\delta = \delta(r)$ du domaine d'étude. La constante C est donc indépendante de r , et les constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ le sont également; ces contrôles ne dépendent pas non plus de η , qui nous sert uniquement à regarder des limites.

On conclut comme suit. On sait que \hat{A}' atteint son maximum en 0, et donc le membre de gauche de la dernière inégalité est positif. On en tire une majoration de $\hat{A}'(0)$ par une expression de la forme $\frac{C'}{r}$, avec $C' = C'(C, K_1, K_2)$, constante indépendante de r et η . Comme $\hat{A}'(0) = M$, ceci donne le contrôlé voulu sur $M = M_\psi$. \square

2.5.2 Estimée $C^{2,\beta}$

L'estimation C^2 que nous venons de démontrer est importante, mais n'est pas suffisante si l'on veut utiliser l'ensemble de nos estimations pour énoncer un résultat de compacité sur les solutions ψ des (E'_r) ; en termes équivalents, il nous faut pousser encore nos estimations pour démontrer que la borne inférieure de

$$\{r \in (0, 1] \mid (E_{r'}) \text{ admet une solution pour tout } r' \in (r, 1]\}$$

est 0, comme annoncé en section 2.2. On a besoin en réalité pour continuer d'estimées $C^{2,\beta}$; là encore, on ne peut pas demander à ce qu'elles soient uniformes quant au paramètre

$r \in (0, 1]$, mais qu'elles le soient bien si r ne tend pas vers 0 – ce qui signifie aussi que l'on peut demander dans cette situation β uniforme. L'énoncé précis est le suivant :

Proposition 2.14. *Soit $r_0 \in (0, 1]$. Alors il existe $\beta = \beta(r_0) \in (0, 1)$ et une constante $C = C(r_0)$ tels que $\|\psi\|_{C^{2,\beta}} \leq C$ pour toute solution ψ d'une (E'_r) , $r \in [r_0, 1]$.*

Démonstration. On utilise les techniques de [CKNS85], en travaillant dans des boules (ou des demi-boules) de quasi-coordonnées plutôt que dans des (demi-)boules de coordonnées. Plus précisément, on recouvre $(X \setminus D) \times \Sigma$ de (demi-)boules $B^{(+)} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{(+)}$ (où $\mathbb{C}^+ = \{\Re \mathbf{e} \geq 0\}$) de quasi-coordonnées (z^1, \dots, z^m, z) de rayon $\delta > 0$ indépendamment du paramètre r telles que :

- la collection des (demi-)boules de rayon moitié recouvre encore $(X \setminus D) \times \Sigma$;
- tout point de $(X \setminus D) \times \partial\Sigma$ est le centre d'une demi-boule ;
- la partie $T = (\mathbb{C}^m \times \{0\}) \cap B^+$ d'une demi-boule correspond à $(X \setminus D) \times \partial\Sigma$, i.e. si π est une des immersions associées aux B^+ , alors $T = B^+ \cap \pi^{-1}((X \setminus D) \times \partial\Sigma)$;
- sur toute (demi-)boule $\frac{1}{2}\omega_{euc} \leq \pi^*\omega \leq 2\omega_{euc}$, $\pi^*\theta(r) \geq cr$ et les dérivées à tout ordre de $\pi^*\omega$ et $\pi^*\theta(r)$ sont bornées ; tous ces contrôles sont indépendants de π et de r ;
- d'après la proposition 2.13, on a des bornes sur les $\pi^*\psi$ jusqu'à l'ordre $(4, \eta)$ qui ne dépendent pas de π . Ne dépendent non plus de r les contrôles sur $|\pi^*\psi|$, $|d\pi^*\psi|$ et $|i\partial\bar{\partial}\pi^*\psi|$; les contrôles sur les $|\nabla^2\pi^*\psi|$ sont également uniformes tant que r ne tend pas vers 0.

Contrôle sur les boules. Pour obtenir des estimées $C^{2,\beta}$ (β à déterminer) sur les boules, on écrit les tirés-en-arrière de (E'_r) sous la forme $F[\pi^*\psi] = 0$, où :

$$F[u] = \log \left[\det \left((\pi^*\omega)_{j\bar{k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \right) \right] - \log(\pi^*\theta(r)), \quad u \in C_{loc}^2(B) ;$$

de cette manière, $\pi^*\psi$ et F satisfont les hypothèses du théorème 17.14 de [GT83], l'ellipticité de F provenant en particulier de

$$\sum_{j,k=1}^{2m+2} F^{j\bar{k}} \xi_j \bar{\xi}_k = |\xi|_{(\pi^*\omega')^{-1}}^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2m+2} = \mathbb{C}^{m+1}$$

où $(\pi^*\omega')^{-1}$ est la $(1,1)$ -forme dont la matrice dans les coordonnées de B est l'inverse de $\pi^*\omega' = \pi^*(\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi)$, les estimées sur $i\partial\bar{\partial}\psi$ garantissant l'existence d'une constante $c > 0$ indépendante de r et de l'immersion π telle que :

$$g_{euc} \leq (\pi^*g_\phi)^{-1} \leq c^{-1}r^{-1}g_{euc}.$$

Le théorème mentionné nous donne une estimée sur les $|\nabla^2(\pi^*\psi)|_{C^{0,\beta}(\frac{1}{2}B)}$ avec $\beta = \beta(\delta, \lambda, \Lambda, |\nabla^2(\pi^*\psi)|_{C^0(B)}) \in (0, 1)$ où λ et Λ sont telles que $\lambda\omega_{euc} \leq \pi^*\omega_1 + i\partial\bar{\partial}(\pi^*\psi) \leq \Lambda\omega_{euc}$; on peut donc fixer $\beta > 0$ si l'on prend $r \geq r_0$ avec $r_0 \in (0, 1]$ fixé.

Contrôle sur les demi-boules. Ce cas est un peu plus délicat ; on procède néanmoins comme suit. On veut appliquer le théorème 9.15 de [GT83], et pour ce faire on a besoin d'une estimée sur le module de continuité de $\nabla^2(\pi^*\psi)$ autour des points du bord. En appliquant les techniques de [CKNS85], en particulier celles du §2.2, on obtient :

Lemme 2.15. *Il existe une constante C ne dépendant que de $|\pi^*\psi|_{C^2(B^+)}$, λ , Λ , $\pi^*\theta(r)$ – en particulier, C peut être prise indépendante de $r \geq r_0$, et indépendante de π – telle que pour tout $z_0 \in \frac{2}{3}T := T \cap \frac{2}{3}B^+$ on ait*

$$|\nabla^2 \pi^* \psi(z_0) - \nabla^2 \pi^* \psi(z)| \leq \frac{C}{1 + |\log |z - z_0||}$$

pour tout $z \in B^+$ tel que $|z - z_0| < \delta/3$.

On différencie à présent les (E'_r) écrites dans les B^+ par rapport à un des opérateurs tangentiels $\pm \frac{\partial}{\partial x_j}$ ou $\pm \frac{\partial}{\partial y_j}$, $1 \leq j \leq m$, désigné par \mathcal{D} ; on obtient :

$$\Delta_{\pi^*\omega'}(\mathcal{D}\pi^*\psi) = -\mathcal{D} \log(\pi^*\theta(r) \det(\pi^*g_1)_{j\bar{k}}) + \sum_{j,k=1}^{m+1} (\pi^*\omega')^{j\bar{k}} \mathcal{D}(\pi^*\omega_1)_{j\bar{k}}. \quad (2.4)$$

On applique ensuite le théorème 9.15 de [GT83], avec $L = -\Delta_{\pi^*\omega'}$, $u = \mathcal{D}\pi^*\psi$ et $p > \frac{2m+2}{1-\beta}$, β fixé ci-dessus. Ceci nous donne une estimation $|\mathcal{D}(\pi^*\psi)|_{L^{p,2}(\frac{2}{3}B^+)} \leq C$ avec $C = C(r_0)$.

On la convertit en une estimation $C^{1,\beta}(\frac{2}{3}B^+)$ de $\mathcal{D}(\pi^*\psi)$ grâce à notre choix sur p . On contrôle donc les $\frac{\partial^2 \pi^*\psi}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}$ dans $C^{0,\eta}(\frac{2}{3}B^+)$, $1 \leq j, k \leq m$. Un contrôle analogue des $\frac{\partial^2 \pi^*\psi}{\partial z \partial \bar{z}}$ vient de l'équation (E'_r) : on développe le déterminant par rapport à la dernière colonne, et on exprime $\frac{\partial^2 \pi^*\psi}{\partial z \partial \bar{z}}$ en fonction de tous les autres termes. \square

2.6 Démonstration de la proposition 2.3 et du théorème 2.1

2.6.1 Démonstration de la proposition 2.3

Comme les équations (E_r) et (E'_r) sont équivalentes *via* la translation $\psi \mapsto \phi_1 + \psi$, on peut prendre le r_0 de l'énoncé de la proposition comme étant la borne supérieure des r tels que $(E'_{r'})$ admette une solution pour tout $r' \in (r, 1]$. On démontre d'abord que $r_0 < 1$, ce qui est la partie facile, puis que r_0 ne peut être strictement positif; c'est pour ce point que l'on a besoin des estimées *a priori* établies dans les sections 2.3, 2.4 et 2.5. Notons que l'unicité des solutions a déjà été prouvée dans la proposition 2.4.

L'équation (E'_r) admet des solutions (régulières) pour r proche de 1. La remarque cruciale est ici la suivante : si P désigne l'opérateur

$$P : C_0^\infty \longrightarrow C^\infty$$

$$\psi \longmapsto \frac{(\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi)^{m+1}}{\omega_1^{m+1}},$$

et que ψ est strictement ω_1 -pluri-sous-harmonique, soit $\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi > 0$, alors à un facteur $-\frac{1}{2}$ près, la différentielle de P au point ψ est le laplacien associé à la métrique $\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi$, soit :

$$d_\psi P(\chi) = -\frac{1}{2} \Delta_{\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi} \chi;$$

ceci reste vrai si l'on se restreint à P de $C_0^{k+2,\beta}$ vers $C^{k,\beta}$, $(k, \beta) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$. En particulier, $d_0 P = -\frac{1}{2}(\Delta_{\omega_1} \cdot)$, ce qui est un isomorphisme $C_0^{4,\beta} \rightarrow C^{2,\beta}$, voir la remarque 2.7. On fixe $\gamma \in (0, 1)$. Comme $\theta(r) \in C^{2,\gamma}$, le théorème des fonctions implicites nous dit que (E'_r)

admet des solutions dans $C_0^{4,\gamma}$ pour r proche de 1, disons $r \in \mathcal{J}$ (et on peut supposer $r \geq \frac{1}{2}$). Pour que l'on ait des solutions *stricto sensu*, il faut néanmoins vérifier que chaque $\omega' = \omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi$ est mutuellement bornée avec ω_1 , et que les ψ_r produites sont dans $C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$ (on a déjà la condition au bord).

Voyons le premier point. Trouver une majoration $\omega' \leq C\omega_1$ pour tout $r \in \mathcal{J}$, C indépendante de r , est chose aisée : on peut en effet supposer que $\|\psi_r\|_{C^2}$ reste bornée pour $r \in \mathcal{J}$, puisque $r \mapsto \psi_r$ est continue $\mathcal{J} \rightarrow C^{4,\gamma}$. Pour la minoration, on remarque que

$$r \longmapsto (x \mapsto (\text{plus petite valeur propre de } \omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi_r \text{ par rapport à } \omega_1 \text{ en } x))$$

est également continue. Puisque $\theta(r)$ ne s'annule jamais, la valeur propre en jeu non plus ; elle reste donc > 0 , ainsi que les autres valeurs propres, d'où $\omega' > 0$. Pour prouver finalement l'existence d'une borne $\omega' > c(r)\omega_1$, $c(r) > 0$, sur $(X \setminus D) \times \Sigma$ tout entière, on remarque que $\theta(r) = \det^{\omega_1}(\omega')$; par stricte positivité de ω' et l'estimation $\omega' \leq C\omega_1$, on a $\omega' \geq \frac{\theta(r)}{C^m}\omega_1$, d'où la minoration voulue, puisque $\theta(r) \geq c(r)$ sur $(X \setminus D) \times \Sigma$ pour une certaine $c(r) > 0$.

On démontre à présent l'assertion sur la régularité $\psi_r \in C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$. Il s'agit en fait d'un argument de *bootstrap* assez classique ; nous serons donc succincts. On fixe r , on note $\psi = \psi_r$, et on prend un système de quasi-coordonnées comme dans la preuve de la proposition 2.14 ; on choisit une (demi-)boule de quasi-coordonnées (z^1, \dots, z^{m+1}) , on désigne par π l'immersion associée et par \mathcal{D} un des ∂_{x_j} ou des ∂_{y_j} , $j \in \{1, \dots, m+1\}$. On différencie l'équation de Monge-Ampère (E'_r) tirée-en-arrière par rapport à \mathcal{D} ; ceci s'écrit $\Delta_{\pi^*\omega'}(\mathcal{D}\pi^*\psi) = f$, avec f comme dans (2.4) et donc bornée à l'ordre $(2, \gamma)$ indépendamment de π . Or $\Delta_{\pi^*\omega'}$ est elliptique à coefficients $C^{2,\gamma}$; de plus, on a des bornes inférieures et supérieures sur son symbole principal, ainsi que des bornes $C^{2,\gamma}$ sur ses coefficients, qui ne dépendent pas de π . Les estimées de Schauder classiques nous disent donc que les $\mathcal{D}\pi^*\psi$ sont $C^{4,\gamma}$ sur les (demi-)boules de rayon moitié, et donnent des bornes $C^{4,\gamma}$ indépendantes de π sur les $\mathcal{D}\pi^*\psi$. En d'autres termes, on a $\psi \in C^{5,\gamma}((X \setminus D) \times \Sigma)$. On peut donc reprendre cet argument avec un ordre de régularité supplémentaire, et ainsi de suite ; une récurrence immédiate nous donne donc la régularité annoncée pour $\psi = \psi_r$.

L'équation (E'_r) admet des solutions (régulières) pour tout $r \in (0, 1]$. On prend r_0 comme dans l'énoncé de la proposition, soit : r_0 est la borne inférieure des r tels que $(E'_{r'})$ admette une solution pour tout $r' \in (r, 1]$; on suppose par l'absurde que $r_0 > 0$ (on sait déjà que $r_0 < 1$). On prend une suite $(r_j)_{j \geq 1}$ d'éléments de $(r_0, 1]$ tendant vers r_0 . D'après la proposition 2.14, il existe $\beta = \beta(r_0)$ et une constante $C = C(r_0)$ tels que $\|\psi_{r_j}\|_{C^{2,\beta}} \leq C$ pour tout j . En utilisant le même argument inductif que ci-dessus, on trouve une borne $C^{4,\beta}$ uniforme sur les ψ_{r_j} . Par des extractions diagonales, on obtient une sous-suite convergeant $C_{loc}^{4,\gamma}$, où $\gamma \in (0, \beta)$, vers une fonction ψ ; les bornes globales $C^{4,\beta}$ sur $(X \setminus D) \times \Sigma$ donnent une borne globale uniforme $C^{4,\gamma}$ qui passe à la limite (utiliser des quasi-coordonnées), d'où $\psi \in C^{4,\gamma}$, et même $C_0^{4,\gamma}$. Par convergence C^2 locale, les (E'_{r_j}) passent à la limite et donnent $(\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi)^{m+1} = \theta(r_0)\omega_1^{m+1}$; on sait aussi que $\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$, toujours par convergence C^2 locale. Comme $\psi \in C^2((X \setminus D) \times \Sigma)$, le même argument que celui utilisé dans la première partie de la preuve nous dit que $\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\psi$ est globalement mutuellement bornée avec ω_1 . On peut donc appliquer l'argument itératif, et on trouve que $\psi \in C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$: ψ est donc solution de (E'_{r_0}) .

On conclut avec une application du théorème des fonctions implicites à l'opérateur de Monge-Ampère au point ψ plutôt qu'au point 0 ; ceci nous donne des solutions $C_0^{4,\gamma}$ de (E'_r) pour tout $r \in (r_0 - \varepsilon, r_0]$, $\varepsilon > 0$ petit. Comme ci-dessus, on a que ces solutions sont

en réalité dans $C^\infty((X \setminus D) \times \Sigma)$, ce qui contredit la définition de r_0 . La proposition 2.3 est démontrée.

2.6.2 Démonstration du théorème 2.1

Le théorème 2.1 se déduit presque mot pour mot de la proposition 2.3, à l'exception de la borne uniforme sur les Φ_ε , déduite de la proposition 2.12, et de l'assertion sur la limite obtenue en faisant tendre ε vers 0.

Cette dernière est à comprendre au sens de la théorie développée dans [BT76], et est une application du *théorème de monotonie* de cet article. Ce théorème est énoncé pour une suite décroissante de fonction pluri-sous-harmoniques ; on peut néanmoins l'appliquer à la suite (Φ_ε) dont on a vu qu'elle est croissante quand ε décroît vers 0. On prend en effet une suite exhaustive (K_j) de compacts de $(X \setminus D) \times \Sigma$, et une suite décroissante ε_j de limite nulle telle que pour tout j , $m_j := \sup_{K_j} |\Phi_{\varepsilon_j} - \Phi_{\varepsilon_{j+1}}| \leq \frac{1}{2^j}$. Alors sur tout compact, $(\Phi_{\varepsilon_j} + \sum_{k \geq j-1} m_k)$ décroît à partir d'un certain rang, vers la même limite que la limite C_{loc}^0 des Φ_ε , et cette limite vérifie bien l'équation (1.5) par le théorème de monotonie.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.1, et le présent chapitre.

Théorème de Calabi-Yau sur $X \setminus D$ et formes de Ricci négatives

DANS ce chapitre et le suivant, on revient sur la base $X \setminus D$. Nous énonçons ici un théorème de Calabi-Yau logarithmique (théorème 3.2), que nous appliquons à la construction de métriques de \mathcal{PM}_Ω à forme de Ricci strictement négative (théorème 3.3). Cette construction nécessite l'hypothèse $K_X[D] > 0$, inutile pour le théorème 3.2. Noter également la proposition technique 3.5, valable elle aussi en général.

3.1 Énoncé et motivation

Espaces de Hölder à poids. Dans le but d'énoncer précisément le théorème qui va suivre et qui est une généralisation du célèbre *théorème de Calabi-Yau*, nous avons besoin d'introduire dans un premier temps des *espaces de Hölder à poids* dans lesquels est prise en compte la décroissance des fonctions près du diviseur.

Définition 3.1. Soit $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times [0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. On pose

$$C_\gamma^{k, \alpha} = \{f \in C_{loc}^{k, \alpha}(X \setminus D) \mid \rho^\gamma f \in C^{k, \alpha}(X \setminus D)\} = \rho^{-\gamma} C^{k, \alpha}(X \setminus D), \quad (3.1)$$

où $C^{k, \alpha}(X \setminus D)$ est l'espace défini en section 1.2. On munit $C_\gamma^{k, \alpha}$ de la norme évidente, que l'on note $\|\cdot\|_{C_\gamma^{k, \alpha}}$. On pose encore $C_\gamma^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1)} C_\gamma^{k, \alpha}$.

On donne des définitions analogues pour les tenseurs, en particuliers les formes de type $(1, 1)$.

Commentons brièvement cette définition. On rappelle que ρ est la fonction de poids $\prod_j |\log(|\sigma_j|^2)|$. L'égalité de droite dans (3.1) provient du contrôle que l'on a sur les dérivées successives de ρ , que l'on peut résumer par $|(\nabla^\omega)^k \log \rho|_\omega \leq C_k$ (ω désignant dans ce chapitre la métrique modèle définie à la section 1.1). On remarque que l'on peut aussi calculer les normes $\|\cdot\|_{C_\gamma^{k, \alpha}}$ via les quasi-coordonnées. Par exemple, si U est un polydisque $(c\Delta)^k \times (\Delta)^{m-k}$ au voisinage d'un point de D tel que $D \cap U = \{(0, \dots, 0)\} \times (\Delta)^{m-k}$ recouvert par une union $\bigcup_{\delta \in (0, 1)^k} \Phi_\delta((\frac{1}{2}\Delta)^k \times (\Delta)^{m-k})$ comme au §1.1, et si f est $C_{loc}^{k, \alpha}$, à support dans U , alors :

$$\|f\|_{C_\gamma^{k, \alpha}} \sim \sup_{\delta \in (0, 1)^k} \frac{1}{((1 - \delta_1) \cdots (1 - \delta_k))^\gamma} \|\Phi_\delta^* f\|_{C^{k, \alpha}(\mathcal{P}_k)},$$

où $\mathcal{P}_k = (\frac{1}{2}\Delta)^k \times (\Delta)^{m-k}$, ceci car $\Phi_\delta^* \rho$ est uniformément mutuellement borné avec $\frac{1}{(1-\delta_1)\dots(1-\delta_k)}$ sur \mathcal{P}_k pour $\delta \in (0, 1)^k$, comme on l'a vu dans §1.1.

Énoncé du théorème. On peut alors énoncer la version « logarithmique » suivante du théorème de Calabi-Yau (voir par exemple [Joy00, ch.5] pour une revue de la conjecture de Calabi et de la démonstration de Yau) :

Théorème 3.2. *Soit $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$, $\nu > 0$ et $f \in C_\nu^\infty(X \setminus D)$ tels que $\int_{X \setminus D} e^f \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}$. Alors il existe $\varphi \in C^\infty(X \setminus D)$ telle que*

$$(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f (\omega')^m.$$

Plus précisément, φ est une limite C_{loc}^k d'une suite $(\varphi_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ pour ε tendant 0 et ce pour tout $k \geq 0$, où

$$(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon)^m = e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon} (\omega')^m$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On a de plus des bornes C^k indépendantes de ε sur ces φ_ε , et il existe $c = c(\omega', f) > 0$ telle que $\varphi_\varepsilon \in C_{c\varepsilon}^\infty(X \setminus D)$ pour ε assez petit.

Cette approche de résolution, consistant à perturber l'équation de Monge-Ampère en rajoutant un terme $\varepsilon\varphi$ à la donnée f de base, est assez proche de celles de [TY90] et [Hei10, ch. 4].

La preuve est assez longue, et nous reportons ses aspects techniques au chapitre 4 ci-dessous. D'après Tian et Yau, on a encore l'estimation $|\varphi_\varepsilon|_{C^0} \leq \varepsilon^{-1}|f|_{C^0}$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$. Notre contribution est donc d'apporter des bornes C^k uniformes, à commencer par la borne C^0 , et de montrer que les φ_ε appartiennent à des espaces à poids strictement positif.

Enfin, il est intéressant de noter le fait suivant : pour $\varepsilon > 0$, $\varrho_{\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon} = \varrho_{\omega'} - i\partial\bar{\partial}f - \varepsilon i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$, ce qui tend à tout ordre et uniformément sur $X \setminus D$ vers $\varrho_{\omega'} - i\partial\bar{\partial}f$. En d'autres termes, si l'on a une fonction f telle que la forme $\varrho_{\omega'} - i\partial\bar{\partial}f$ soit « intéressante », en un certain sens, alors on peut réaliser cette forme comme la forme de Ricci d'une métrique différant de ω' par un potentiel à décroissance rapide, à un petit terme d'erreur près, « petit » signifiant ici « arbitrairement proche de 0 en topologie $C^\infty(\Lambda^{1,1})$ ».

De manière plus concrète, notre théorème nous permet sous une hypothèse d'amplitude de construire des métriques de type Poincaré à forme de Ricci strictement négative au sens Poincaré :

Théorème 3.3. *On suppose $K_X[D]$ ample sur X . Alors il existe $\varpi \in \mathcal{PM}_\Omega$ tel que $\varrho_\varpi \leq -c\varpi$ pour une constante positive c .*

Nous consacrons la section suivante à la preuve de ce résultat.

3.2 Preuve du théorème 3.3

Avant de commencer la démonstration annoncée, mentionnons que l'on procède par récurrence sur la plus grande codimension dans X des croisements de D . On doit également définir des espaces fonctionnels supplémentaires, car les espaces à poids définis dans la section précédente ne contiennent pas tout à fait les fonctions qui vont apparaître au cours de la démonstration à venir.

Définition 3.4. Soit g une métrique C^∞ -quasi-isométrique au modèle ω de la section 1.1 et soit $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times [0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Étant donnés v_1, \dots, v_n tels que $v_j \equiv 1$ sur un voisinage de la composante connexe \mathcal{D}_j de D et $v_j \equiv 0$ au voisinage des \mathcal{D}_ℓ pour $\ell \neq j$ (de sorte que $D = \bigsqcup_{j=1}^n \mathcal{D}_j$), on pose

$$E_\gamma^{k,\alpha}(g) = \left\{ f \in C_\gamma^{k,\alpha} \oplus \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}v_j \mid \int_{X \setminus D} f \operatorname{vol}^g = 0 \right\}.$$

Si $\gamma > 0$, on pose $\|f\|_{E_\gamma^{k,\alpha}(g)} = \|h\|_{C_\gamma^{k,\alpha} + \sum_j |a_j|}$, pour toute f s'écrivant $h + \sum_j a_j v_j$, avec $h \in C_\gamma^{k,\alpha}$.

Notons que pour le calcul de $\|f\|_{E_\gamma^{k,\alpha}(g)}$, on récupère chaque a_j comme limite de f vers \mathcal{D}_j , puis donc h comme $f - \sum_j a_j v_j$.

Ces espaces sont pertinents au vu d'un lemme $\partial\bar{\partial}$ à poids que nous allons utiliser au cours de la démonstration annoncée. Ce sont en effet les espaces où vivent les potentiels des (1,1)-formes réelles fermées qui sont des $O(\rho^{-\delta})$ à tout ordre pour un certain $\delta > 0$; voir la proposition 3.5, énoncée et prouvée en section 3.3.

3.2.1 Cas d'un diviseur lisse

Comme suggéré en commentaire, le théorème 3.3 est une conséquence du théorème 3.2. Il s'agit donc pour appliquer ce dernier de construire au préalable une métrique ω' et une fonction f correspondant à l'énoncé, de sorte qu'il soit utile pour notre problème de construction de métriques à forme de Ricci négative de résoudre l'équation $(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f(\omega')^m$. Observons que si f est comme dans l'énoncé du théorème 3.2, alors les formes de Ricci de $\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi$ et de ω' sont asymptotes près du diviseur. L'objet des lignes qui suivent est donc de construire ω' de type Poincaré dans la classe que l'on s'est fixé, à forme de Ricci négative près du diviseur – ce qui est réalisé en prenant ω' asymptotiquement produit de la métrique de Poincaré et de métriques à formes de Ricci négatives sur le diviseur – puis d'exhiber une fonction f telle que la forme de Ricci associée à la (m, m) -forme $e^f(\omega')^m$ soit strictement négative sur tout $X \setminus D$, au sens Poincaré.

Construction de ω' . Comme mentionné ci-dessus, on commence en supposant que les croisements sont de codimension au plus 1 dans X , ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de croisement, et donc que D est lisse. On choisit une forme lisse et strictement négative $\varrho_0 \in -2\pi c_1(K_X[D])$; on rappelle que ω_0 est une forme de Kähler lisse sur X telle que $\Omega = [\omega_0]_{dR}$. D'après la formule d'adjonction, si l'on conserve l'écriture $D = \sum_{j=1}^N D_j$ pour la décomposition de D en composantes irréductibles, et disjointes dans notre cas, on a pour tout j :

$$\begin{aligned} K_X[D]|_{D_j} &= (K_X \otimes [D_1] \otimes \cdots \otimes [D_N])|_{D_j} \\ &= (K_X \otimes [D_j])|_{D_j} \otimes ([D_1] \otimes \cdots \otimes \widehat{[D_j]} \otimes \cdots \otimes [D_N])|_{D_j} \\ &\cong K_{D_j} \otimes 1 = K_{D_j}, \end{aligned}$$

de sorte que $\varrho_0|_{D_j}$ (ce qui signifie « la forme fermée induite dans $\Lambda_{D_j}^{1,1}$ ») est dans $-2\pi c_1(K_{D_j})$. Or pour tout j , le théorème de Calabi-Yau pour les variétés kählériennes lisses et compactes s'applique sur D_j , et fournit un potentiel $\psi_j \in C^\infty(D_j)$ tel que $\varrho_0|_{D_j} = \varrho_{\omega_0|_{D_j} + i\partial\bar{\partial}\psi_j}$. Désignons par p_j la projection sur D_j , définie dans un voisinage tubulaire \mathcal{N}_j de D_j , et par χ_j une fonction de coupure à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 dans un voisinage de D_j ,

et à support dans \mathcal{N}_j . Ainsi, $\varphi := \sum_{j=1}^n \chi_j p_j^* \psi_j$ est bien définie et lisse sur X ; de plus, $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi$ induit $\omega_0|_{D_j} + i\partial\bar{\partial}\psi_j$ sur chaque D_j des que les \mathcal{N}_k sont disjoints (hypothèse fixée dans ce qui suit).

Le point est ici le suivant : la (1,1)-forme fermée réelle $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi$ n'a pas de raison en général d'être kählérienne; néanmoins, le défaut de positivité a lieu essentiellement près du diviseur, dans la direction normale à la composante regardée. On peut donc corriger ce défaut dans le cadre des métriques de type Poincaré, grâce à un potentiel en « log log ». De manière plus explicite, soit $\chi_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\chi_0 \equiv 0$ sur $(-\infty, 0]$ et $\chi_0 \equiv 1$ sur $[1, +\infty)$. On rappelle que $u_j = \log(\lambda + \rho_j)$, et l'on supposera ici que ρ_j est constant sur \mathcal{N}_k pour tous $1 \leq j \neq k \leq N$; on fixe en outre $A_1, \dots, A_N > 0$. On prétend alors que :

$$\omega' := \omega_0 - \sum_{j=1}^N A_j i\partial\bar{\partial}u_j + \sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial}(\chi_0(u_j^{1/2} - K)p_j^* \psi_j) \in \mathcal{PM}_\Omega$$

pour λ et K assez grands. On a même l'asymptotique

$$\omega' = \omega_0|_{D_j} + i\partial\bar{\partial}\psi_j + \frac{A_j idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)} + O\rho_j^{-1},$$

le O étant entendu à tout ordre (on écrira O^∞ dans la suite), sur tout voisinage d'un point de D_j où cette composante est donnée par $\{z = 0\}$. On démontre cette asymptotique de la même manière que les celles de la proposition 1.2; il reste donc à vérifier que $\omega' > 0$ sur $X \setminus D$ pour un choix convenable de λ et de K . Il suffit de le faire dans le cas où D est réduit à une composante, d'après le comportement que nous avons fixé pour les u_j ; on n'aura donc plus besoin de l'indice j . On fixe tout d'abord λ assez grand pour que $\omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u > 0$ on $X \setminus D$. On prend ensuite $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ assez petit pour que $\omega_0|_D + i\partial\bar{\partial}\psi \geq 4\varepsilon\omega_0|_D$, c'est-à-dire pour que $i\partial\bar{\partial}\psi \geq (4\varepsilon - 1)\omega_0|_D$. On prend une collection \mathcal{V} d'ouverts de coordonnées recouvrant D , et tel que D soit donné dans chaque ouvert par l'annulation d'une coordonnée notée z . On peut supposer les ouverts de \mathcal{V} assez petits pour que sur chacun d'eux, $i\partial\bar{\partial}(p^*\psi) \geq -(1 - 3\varepsilon)\omega_0 - Cidz \wedge d\bar{z}$. Comme χ_0 est à valeurs dans $[0, 1]$, on a de même $\chi_0(u^{1/2} - K)i\partial\bar{\partial}(p^*\psi) \geq -(1 - 3\varepsilon)\omega_0 - Cidz \wedge d\bar{z}$ sur les ouverts de \mathcal{V} , dont on note l'union V . On prend ensuite K assez grand pour que $V_K := \{u \geq K^2\} \subset V$, et de cette manière on a $\chi_1(u^{1/2} - K) \equiv 0$ sur $X \setminus V_K$, donc $\omega' = \omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u > 0$ sur $X \setminus V_K$. Il nous reste donc seulement à voir que $\omega' > 0$ sur V_K , et notre minoration sur $\chi_1(u^{1/2} - K)i\partial\bar{\partial}(p^*\psi)$ va dans ce sens.

En effet, comme on a :

$$i\partial\bar{\partial}\chi_1(u^{1/2} - K) = \chi_1''(u^{1/2} - K) \frac{i\partial u \wedge \bar{\partial}u}{4u} + \chi_1'(u^{1/2} - K) \left(\frac{i\partial\bar{\partial}u}{2u^{1/2}} - \frac{3i\partial u \wedge \bar{\partial}u}{4u^{3/2}} \right),$$

on peut supposer que $|(p^*\psi)i\partial\bar{\partial}\chi_1(u^{1/2} - K)| \leq \varepsilon(\omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u)$ sur V_K quitte à augmenter K , et se souvenant que du et $i\partial\bar{\partial}u$ sont bornés en métrique de type Poincaré. De même, on peut supposer que

$$|i(\partial\chi_1(u^{1/2} - K) \wedge \bar{\partial}(p^*\psi) + \partial(p^*\psi) \wedge \bar{\partial}\chi_1(u^{1/2} - K))| \leq \varepsilon(\omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u)$$

sur V_K . Finalement, sur l'intersection de V_K avec un ouvert de \mathcal{V} quelconque, et supposée assez petite pour que $-Ai\partial\bar{\partial}u \geq \frac{Aidz \wedge d\bar{z}}{2|z|^2 \log^2(|z|^2)} - \varepsilon\omega_0 \geq 2Cidz \wedge d\bar{z} - \varepsilon\omega_0$ quitte à augmenter

une dernière fois K , on a la minoration

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u + \chi_1(u^{1/2} - K)i\partial\bar{\partial}(p^*\psi) \\
&\quad + i(\partial\chi_1(u^{1/2} - K) \wedge \bar{\partial}(p^*\psi) + \partial(p^*\psi) \wedge \bar{\partial}\chi_1(u^{1/2} - K)) \\
&\quad + (p^*\psi)i\partial\bar{\partial}\chi_1(u^{1/2} - K) \\
&\geq (1 - 2\varepsilon)(\omega_0 - Ai\partial\bar{\partial}u) + \chi_1(u^{1/2} - K)i\partial\bar{\partial}(p^*\psi) \\
&\geq \varepsilon\omega_0 - Cidz \wedge d\bar{z} - (1 - 2\varepsilon)Ai\partial\bar{\partial}u \\
&\geq 2\varepsilon^2\omega_0 + (1 - 4\varepsilon)Cidz \wedge d\bar{z} \quad \text{car } -Ai\partial\bar{\partial}u \geq -\varepsilon\omega_0 + 2Cidz \wedge d\bar{z},
\end{aligned}$$

et le membre de droite est strictement positif.

Construction de f . La question de la stricte positivité de ω' étant réglée, grâce aux asymptotiques de cette métrique (équation (3.2.1)), il est aisé de calculer sa forme de Ricci près du diviseur; schématiquement, celle-ci s'écrit $\varrho_{\omega_0|_{D_j+i\partial\bar{\partial}\psi_j}} - \frac{2idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)} + O^\infty(\rho_j^{-1})$ près de chaque D_j . Ces asymptotiques sont exactement celles de $\varrho_0 + 2\sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial}u_j$; on peut supposer cette dernière (1,1)-forme majorée par $-\varepsilon\omega$ sur $X \setminus D$ pour une constante $\varepsilon > 0$, pour les mêmes raisons que l'on peut prendre ω kählérienne (on joue sur le paramètre λ des u_j). En résumé, $\varrho_{\omega'} - (\varrho_0 + 2\sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial}u_j) \in C_1^\infty$, et sa classe de cohomologie L^2 est nulle. On applique alors le lemme $\partial\bar{\partial}$ à poids (proposition 3.5); on peut ainsi écrire :

$$\varrho_{\omega'} - (\varrho_0 + 2\sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial}u_j) = i\partial\bar{\partial}f_0$$

pour une fonction $f_0 \in E_1^\infty(\omega')$. Soit $c \in \mathbb{R}$ telle que $\int_{X \setminus D} e^{f_0+c} \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}$; on ne va pas se servir de $\int_{X \setminus D} f_0 \text{vol}^{\omega'} = 0$, et on suppose donc $c = 0$. On n'a pas de raison de supposer que f_0 tende vers 0 près de D ; on peut toutefois la corriger, sur un compact de $X \setminus D$, en une fonction f' disons pour que ce soit le cas, pour que $\rho_{\omega'} + i\partial\bar{\partial}f' \leq -c'\omega$ et $\int_{X \setminus D} e^{f'} \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}$.

On procède comme suit. On pose $a_j := \lim_{D_j} f_0$ pour tout $j = 1, \dots, N$. On suppose, pour commencer, que $a_1 > 0$; si $a_1 = 0$, on passe à a_2 , et si $a_1 < 0$, la technique est la même. D'après la première partie de la preuve (stricte positivité de ω'), pour K assez grand et $\mu \geq 1$, on a :

$$\varrho_{\omega'} - i\partial\bar{\partial}f - a_1 i\partial\bar{\partial}\left(-\chi_0(u_j^{1/2} - K) + \chi_0(u_j^{1/2} - \mu K) + \chi_0(u_j^{1/2} - (\mu + 1)K)\right) \leq -c_1\omega$$

pour une constante c_1 indépendante de μ . On pose

$$f_{1,\mu} = f_0 + a_1\left(-\chi_0(u_j^{1/2} - K) + \chi_0(u_j^{1/2} - \mu K) + \chi_0(u_j^{1/2} - (\mu + 1)K)\right),$$

de sorte que $f_{1,\mu} \in E_1^\infty(\omega')$ si l'on ne tient pas compte de sa moyenne, $f_{1,\mu}$ tend vers 0 près de D_1 , et vers a_j près de D_j , $j \geq 2$. On a aussi $f_{1,1} = f_0 + a_1\chi_0(u_j^{1/2} - 2K)$, et $f_{1,\mu}$ tend localement vers $f_0 - a_1\chi_0(u_j^{1/2} - K)$ quand μ tend vers $+\infty$, avec contrôle uniforme par $\|f_0\|_{C^0} + 2|a_1|$. De plus, $\mu \mapsto \int_{X \setminus D} e^{f_{1,\mu}} \text{vol}^{\omega'}$ est continue sur $[1, +\infty)$; sa valeur en $\mu = 1$ est $> \text{Vol}$, et tend vers une limite $< \text{Vol}$ quand μ tend vers $+\infty$ - dans le cas où $a_1 < 0$, ces inégalités sont simplement inversées. On peut donc choisir μ_1 tel que $\int_{X \setminus D} e^{f_{1,\mu_1}} \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}$.

On répète cette construction pour les a_j restants ; on obtient une fonction $f' \in C_1^\infty(X \setminus D)$ telle que $\int_{X \setminus D} e^{f'} \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}$ et $\varrho_{\omega'} - i\partial\bar{\partial}f' \leq -c'\omega$. Notons η la différence $i\partial\bar{\partial}f_0 - i\partial\bar{\partial}f'$, de sorte que :

$$\eta = i\partial\bar{\partial} \left[\sum_{j=1}^N a_j \left(-\chi_0(u_j^{1/2} - K) + \chi_0(u_j^{1/2} - \mu_j K) + \chi_0(u_j^{1/2} - (\mu_j + 1)K) \right) \right] \quad (3.2)$$

avec les μ_j bien choisis ; cette (1,1)-forme est à support compact dans $X \setminus D$. On a la fonction f voulue pour appliquer le théorème 3.2, en posant $f = -f'$

Conclusion. On applique la première partie du théorème 3.2 avec ω' et $-f'$; alors

$$\varrho_{\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi} = \varrho_{\omega'} + i\partial\bar{\partial} \log \left(\frac{(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m}{(\omega')^m} \right) = \varrho_{\omega'} - i\partial\bar{\partial}f' \leq -c'\omega,$$

et on conclut en posant $\varpi = \omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi$. Notons que l'on aurait aussi bien pu appliquer la seconde partie du théorème avec $\varepsilon > 0$, et avoir encore $\varrho_{\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon} = \varrho_{\omega'} + i\partial\bar{\partial}f' - \varepsilon i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon \leq -c'_\varepsilon\omega$ avec $c'_\varepsilon > 0$, ainsi que φ_ε dans un Hölder à poids > 0 . Notons également que l'on a encore un degré de liberté sur les A_j choisis au début ; on peut les prendre de manière arbitraire dans \mathbb{R}^{+*} , et en particulier, on peut les choisir *égaux entre eux*.

3.2.2 Cas général

On suppose maintenant qu'il existe des croisements de codimension 2, et que c'est la plus grande codimension possible. Dans le paragraphe précédent, on a d'abord résolu le problème de Calabi sur le diviseur, puis on a construit un potentiel sur $X \setminus D$ grâce à la donnée des potentiels sur le diviseur. On fait ici exactement la même chose, à présent que nous savons résoudre avec une approximation suffisamment bonne le problème de Calabi quand le diviseur est lisse. Par simplicité, on suppose que D est réduit à deux composantes $D_1 + D_2$, et que la décomposition de $D' = D_1 \cap D_2$ en composantes lisses irréductibles s'écrit $\sum_{j=1}^{N'} D'_j$. On observe de plus que $D_1 \setminus D'$ et $D_2 \setminus D'$ sont naturellement munis de métriques de type Poincaré, à savoir $\omega|_{D_1 \setminus D'}$ et $\omega|_{D_2 \setminus D'}$.

Dans cette situation, la formule d'adjonction s'applique pour donner :

$$K_X[D]|_{D_1} \cong K_X[D_1]|_{D_1} \otimes [D_2]|_{D_1} \cong K_{D_1} \otimes [D']_{D_1},$$

et ce dernier fibré est le $K_{D_1}[D']$ intrinsèque de D_1 . On peut appliquer la formule à nouveau, ce qui donne :

$$K_X[D]|_{D'_j} = (K_X[D]|_{D_1})|_{D'_j} \cong (K_{D_1}[D'])|_{D'_j} \cong K_{D'_j}$$

pour tout $j = 1, \dots, N'$. Ainsi $\varrho_0|_{D'_j} \in -2\pi c_1(K_{D'_j})$ dès que ϱ_0 est lisse dans $-2\pi c_1(K_X[D])$. On prend une telle (1,1)-forme $\varrho_0 < 0$ sur X .

On pose comme précédemment $u_j = \log(\lambda + \rho_j)$ sur $X \setminus D_j$, $j = 1, 2$ ($\lambda \geq 0$ à ajuster) ; remarquons que pour $k \neq j$, $u_j|_{D_k}$ joue le rôle de $\sum_{\ell=1}^{N'} u'_{k,\ell}$ sur D_k , où l'on pourrait définir $u'_{k,\ell}$ sur D_k comme une fonction ayant un comportement « log log » près de D'_ℓ .

De même que dans le cas où D est lisse, si on a des $\psi_j \in C^\infty(D'_j)$ telles que les $\omega_0|_{D'_j} + i\partial\bar{\partial}\psi_j$ aient pour forme de Ricci $\varrho_0|_{D'_j}$ (les ψ_j sont donc fournies par le théorème de Calabi-Yau classique), on peut les étendre en une fonction $\tilde{\psi}$ sur X telle que

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= \omega_0|_{D_1} + i\partial\bar{\partial}(\tilde{\psi}|_{D_1}) - i\partial\bar{\partial}(u_2|_{D_1 \setminus D_2}) \\ \text{et} \quad \omega_2 &:= \omega_0|_{D_2} + i\partial\bar{\partial}(\tilde{\psi}|_{D_2}) - i\partial\bar{\partial}(u_1|_{D_2 \setminus D_1}) \end{aligned}$$

soient des métriques de type Poincaré, respectivement sur $D_1 \setminus D_2$ et $D_2 \setminus D_1$, avec asymptotiques respectives $\omega_0|_{D'_j} + i\partial\bar{\partial}\psi_j + \frac{idw \wedge d\bar{w}}{|w|^2 \log^2(|w|^2)} + O^\infty(\rho_2^{-1})$ près de D'_j donnée par $\{w = 0\}$ dans D_1 , et $\omega_0|_{D'_j} + i\partial\bar{\partial}\psi_j + \frac{idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)} + O^\infty(\rho_1^{-1})$ près de D'_j donnée par $\{z = 0\}$ dans D_2 . De plus, leurs formes de Ricci ont les asymptotiques respectives $\varrho_0|_{D'_j} - \frac{2idw \wedge d\bar{w}}{|w|^2 \log^2(|w|^2)} + O^\infty(\rho_2^{-1})$ près de D'_j dans D_1 et $\varrho_0|_{D'_j} - \frac{2idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)} + O^\infty(\rho_1^{-1})$ près de D'_j dans D_2 .

On applique alors la construction du paragraphe précédent ; on trouve $\varphi_1 \in C_\gamma^\infty(D_1 \setminus D')$ et $\varphi_2 \in C_\gamma^\infty(D_2 \setminus D')$ telles que :

$$\begin{aligned} \varrho_{\omega_1 + i\partial\bar{\partial}\varphi_1} &= (\varrho + 2i\partial\bar{\partial}u_1 + 2i\partial\bar{\partial}u_2)|_{D_1 \setminus D_2} - \varepsilon i\partial\bar{\partial}\varphi_1 + \eta_2|_{D_1} \\ \text{et} \quad \varrho_{\omega_2 + i\partial\bar{\partial}\varphi_2} &= (\varrho + 2i\partial\bar{\partial}u_1 + 2i\partial\bar{\partial}u_2)|_{D_2 \setminus D_1} - \varepsilon i\partial\bar{\partial}\varphi_2 + \eta_1|_{D_2} \end{aligned}$$

avec ε arbitrairement petit, $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, et η_1 à support compact dans $X \setminus D_2$ arbitrairement proche de 0 dans $C^\infty(X \setminus D_2)$, de même pour η_2 en permutant les indices 1 et 2, et construites de la même manière que la forme η de la formule (3.2) – on remarque que les formules pour η_1 et η_2 ont alors un sens respectivement sur $X \setminus D_2$ et $X \setminus D_1$ toutes entières. En reprenant le point de vue de $X \setminus D$, le seul prix à payer pour les croisements que l'on a admis est d'avoir un exposant $-\gamma$ au lieu d'un exposant -1 dans le O^∞ ; notons de plus que l'on ne pourrait demander un tel exposant si l'on avait appliqué la première partie du théorème 3.2 au lieu de la seconde (d'où nos ε).

On procède alors comme dans le cas du diviseur lisse : application du lemme $\partial\bar{\partial}$ à poids, correction des constantes près de D , application du théorème de Calabi-Yau logarithmique ; on en déduit l'existence d'une fonction φ' dans $C_\gamma^\infty(X \setminus D)$ pour un $\gamma' > 0$ sur $X \setminus D$, telle que $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}(\varphi + \varphi') - i\partial\bar{\partial}u_1 - i\partial\bar{\partial}u_2 > 0$ sur $X \setminus D$, et que la forme de Ricci de la métrique $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}(\varphi + \varphi') - i\partial\bar{\partial}u_1 - i\partial\bar{\partial}u_2$ soit arbitrairement proche de $\rho_0 + 2(i\partial\bar{\partial}u_1 + i\partial\bar{\partial}u_2) + \eta_1 + \eta_2 - \varepsilon i\partial\bar{\partial}\varphi$. Cette forme de Ricci est en particulier $\leq -c\omega$ pour une constante $c > 0$.

Ceci règle le cas le plus simple lorsque le diviseur possède des croisements de codimension au plus 2. La démonstration dans le cas où D admet d'autres composantes, éventuellement disjointes des premières, ou dans celui où les codimensions des croisements sont plus élevées consiste alors en une répétition soigneuse des techniques que nous venons d'utiliser. \square

3.3 Le lemme $\partial\bar{\partial}$ à poids

On précise que le contenu de cette section est indépendant de l'amplitude éventuelle de $K_X[D]$. On rappelle que l'on dit qu'une (1,1)-forme réelle η sur $X \setminus D$ est dans $C_\gamma^{k,\alpha}$, $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times [0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, si $\eta \in \rho^{-\gamma} C^{k,\alpha}(X \setminus D, \Lambda^{1,1})$.

Le résultat que nous avons utilisé dans la preuve du théorème 3.3 s'énonce comme suit :

Proposition 3.5 (Lemme $\partial\bar{\partial}$ à poids). *Soient $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$ et $\beta > 0$. Soit $\eta \in C_\beta^{k,\alpha}(\Lambda^{(1,1)})$ un (1,1)-forme L^2 exacte, et φ le potentiel $\partial\bar{\partial}$ de η de moyenne nulle par rapport à une métrique kählérienne de type Poincaré ω' . Alors φ est en réalité dans $E_\beta^{k+2,\alpha}(\omega')$, et il existe une constante $C = C(\beta, k, \alpha, \omega')$ telle que $\|\varphi\|_{E_\beta^{k+2,\alpha}} \leq C\|\eta\|_{C_\beta^{k,\alpha}}$.*

Démonstration. On décompose cette preuve à l'aide de trois lemmes intermédiaires :

Lemme 3.6. *Soit g une métrique kählérienne C^∞ -quasi-isométrique au modèle ω . Il existe une constante $c = c(g) > 0$ telle que pour tout $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ et $\gamma \in [0, c\varepsilon]$ le laplacien ε -perturbé $\Delta_g + \varepsilon : C_\gamma^{k+2, \alpha} \rightarrow C_\gamma^{k, \alpha}$ soit un isomorphisme.*

Démonstration du lemme 3.6. Pour γ et $\varepsilon > 0$, on doit vérifier que l'opérateur conjugué

$$\mathcal{L}_{\gamma, \varepsilon} = \rho^\gamma (\Delta_g + \varepsilon) (\rho^{-\gamma} \cdot) = \Delta_g + \left(\varepsilon - \gamma \frac{\Delta_g \rho}{\rho} - 2\gamma(\gamma + 1) \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_g^2 \right) + 2\gamma \left(d, \frac{d\rho}{\rho} \right)_g$$

est un isomorphisme de $C^{k+2, \alpha} \rightarrow C^{k, \alpha}$. En suivant [TY87, p. 589] (en particulier, résolution par exhaustion), ceci est vrai lorsque $\sup_{X \setminus D} \left\{ \gamma \frac{\Delta_g \rho}{\rho} + 2\gamma(\gamma + 1) \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_g^2 \right\} < \varepsilon$, le terme d'ordre 1 dans $\mathcal{L}_{\gamma, \varepsilon}$ n'ayant pas d'importance. On prend $A = \sup_{X \setminus D} \frac{\Delta_g \rho}{\rho}$ et $B = \sup_{X \setminus D} \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_g$; la dernière inégalité est alors facilement vérifiée pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, et $\gamma \in [0, c\varepsilon]$, où $c = \frac{4B}{2(A+B)\sqrt{4B+(A+B)^2}}$. ■

Lemme 3.7. *Sous les mêmes hypothèse que la proposition 3.5, $\varphi \in C^{k+2, \alpha}$, et il existe une constante C telle que $\|\varphi\|_{C^{k+2, \alpha}} \leq C \|\eta\|_{C_\beta^{k, \alpha}}$.*

Démonstration du lemme 3.7. On utilise un schéma d'itération de Moser perturbé, avec paramètre ε . Plus précisément, on définit φ_ε comme la solution de $\Delta_{\omega'} \varphi_\varepsilon + \varepsilon \varphi_\varepsilon = -2 \operatorname{tr}^{\omega'}(\eta)$, donnée par le lemme 3.6. Un fois remarqué que $\int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon \operatorname{vol}^{\omega'} = 0$ (intégrer l'équation vérifiée par φ_ε), on recopie mot pour mot la démonstration de la proposition 4.6 ci-dessous, en remplaçant $1 - e^{f + \varepsilon \varphi_\varepsilon}$ par $-2 \operatorname{tr}^{\omega'}(\eta) - \varepsilon \varphi_\varepsilon$ (comme dans cette preuve, les ε ne posent pas de problème, et jouent même en notre faveur; par exemple, $\int_{X \setminus D} |d\varphi_\varepsilon|_{\omega'}^2 \operatorname{vol}^{\omega'} = \int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon \Delta_{\omega'} \varphi_\varepsilon \operatorname{vol}^{\omega'} = \int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon (-2 \operatorname{tr}^{\omega'}(\eta) - \varepsilon \varphi_\varepsilon) \operatorname{vol}^{\omega'} \leq \|2 \operatorname{tr}^{\omega'}(\eta)\|_{L^2} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}$), en remplaçant T_ε par $(\omega')^{m-1}$, et en remarquant que les constantes C et C' de la proposition 4.5, qui dépendent de f , peuvent être ici remplacées par une expression du type $C'' \|\eta\|_{C_\beta^{k, \alpha}}$, C'' indépendante de η . On conclut en remarquant que φ est une limite C_{loc}^0 de $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ quand ε tend vers 0. ■

Remarque 3.8. *Notre argument peut paraître un peu succinct, mais on a préféré développer les calculs d'un tel schéma d'itération de Moser perturbé dans le cas plus difficile, car non-linéaire, qu'est le théorème 3.2. On remarque également que les deux preuves utilisent un plongement de Sobolev (lemme 4.4) énoncé au paragraphe 4.1.1.*

On en vient au cœur technique de notre démonstration :

Lemme 3.9. *Sous les hypothèses de la proposition 3.5, en posant $\beta' = \min\{2, \beta\}$, on a $\varphi = \psi + \sum_k a_k v_k$ avec : $\|\sum_j |\log |\sigma_j||^{\beta'} \psi\|_{C^0} \leq C \|\eta\|_{C_\beta^{0, \alpha}}$.*

Démonstration du lemme 3.9. On se limite au cas où les croisements du diviseur sont de codimension au plus 2. On remarque qu'en supposant la proposition démontrée, les a_k sont automatiquement contrôlés comme dans l'énoncé de la proposition 3.5, car pour tout k , $a_k = \lim_{x \rightarrow D_k} (\varphi - \psi)(x)$, et on contrôle déjà $\|\varphi\|_{C^0}$.

On choisit une composante connexe \mathcal{D}_k de D , que l'on décompose en composantes irréductibles D_1, \dots, D_j . On travaille tout d'abord autour de D_1 , que l'on recouvre par des polydisques de coordonnées $\{|z^1|, \dots, |z^m| \leq \frac{1}{e}\}$, où D_1 est donné par z^1 , et, dans le cas d'un croisement, la composante supplémentaire est donnée par z^2 . On fixe un de ces polydisques, \mathcal{P} disons; deux situations sont possibles :

1. *Il n'y a pas de croisement dans \mathcal{P} .* On écrit $z^1 = re^{i\theta} = e^{-e^t+i\theta}$, $z' = (z^2, \dots, z^m)$, et on munit chaque disque épointé $\{0 < |z^1| \leq \frac{1}{e}\}$ de la métrique *cuspid* standard $dt^2 + e^{-2t}d\theta^2$. L'équation $(i\partial\bar{\partial}\varphi)_{1\bar{1}} = \eta_{1\bar{1}} := \frac{f}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)}$ se réécrit $((\partial_t^2 - \partial_t) + e^{2t}\partial_\theta^2)\varphi = f$, avec $|f(z^1, z')| \leq C\|\eta\|_{C_\beta^0}e^{-\beta t}$ où C ne dépend que du polydisque. On décompose φ en $\varphi_0 + \varphi_\perp$, avec φ_0 invariante par rapport à θ , et φ_\perp orthogonale aux constantes sur chaque S^1 . De la même manière, on décompose f en $f_0 + f_\perp$; les majorations $|f_0(t, z')|, |f_\perp(t, z')| \leq C\|\eta\|_{C_\beta^0}e^{-\beta t}$ sont encore valables, quitte à augmenter C d'une manière ne dépendant toujours que de \mathcal{P} . Alors φ_0 vérifie $(\partial_t^2 - \partial_t)\varphi_0 = f_0(t, z')$, ce que l'on résout en écrivant :

$$\varphi_0(t, z') = a_{\mathcal{P}}(z') + \int_t^{+\infty} e^t dt' \int_{t'}^{+\infty} e^{-t''} f_0(t'', z') dt'' \quad (3.3)$$

(en utilisant le fait que φ_0 est L^2 pour $e^{-t}dt \text{ vol}^D$ pour se débarrasser d'un terme additionnel $\chi(z')e^t$). On remarque que pour chaque (t, z') , l'intégrale double est en valeur absolue majorée par $\frac{1}{\beta(1+\beta)}\|v(\cdot, z')e^{\beta\cdot}\|_{C^0}e^{-\beta t}$, et en particulier $\varphi_0(t, z')$ tend vers $a_{\mathcal{P}}(z')$ à vitesse exponentielle quand t tend vers $+\infty$. On peut de plus écrire $a_{\mathcal{P}}(z') = \varphi_0(0, z') - \int_0^{+\infty} e^t dt' \int_{t'}^{+\infty} e^{-t''} f_0(t'', z') dt''$ pour tout z' , ce qui donne une borne C^0 sur $a_{\mathcal{P}}$ qui ne dépend que du polydisque et de $\|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}}$.

Reste à traiter le cas de φ_\perp . Cette fonction étant orthogonale aux constantes sur chaque cercle, on peut écrire $|\varphi_\perp(t, \theta, z')| \leq \pi^2 \sup_{\theta' \in [0, 2\pi]} |\frac{\partial^2 \varphi_\perp}{\partial \theta^2}(t, \theta', z')|$ pour tout (t, θ, z') , ce qui s'écrit encore :

$$|\varphi_\perp(t, \theta, z')| \leq \pi^2 e^{-2t} \sup_{\theta' \in [0, 2\pi]} \left| \left(-\frac{\partial^2 \varphi_\perp}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi_\perp}{\partial t} + f_\perp \right)(t, \theta', z') \right|$$

pour tout (t, θ, z') grâce à l'équation vérifiée par φ_\perp . Le sup dans le dernier membre de droite est majoré par $C\|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}}$ avec C ne dépendant que du polydisque, grâce à l'estimée C^2 sur φ et donc sur φ_\perp obtenue grâce à la proposition 3.7.

Nous pouvons résumer ce qui précède en disant que sur \mathcal{P} , $|\varphi - a_{\mathcal{P}}| \leq C_{\mathcal{P}}\|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}}e^{-\beta t}$, avec $|a_{\mathcal{P}}| \leq C_{\mathcal{P}}\|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}}$ (et $a_{\mathcal{P}}$ ne dépendant pas de z^1 et continue).

2. *Il y a un croisement dans \mathcal{P} .* On écrit encore $z^1 = e^{-e^t+i\theta}$, et on pose $z'' = (z^3, \dots, z^m)$. Rien ne nous empêche de mener la même analyse que ci-dessus dans \mathcal{P} hors du polydisque $\{z_2 = 0\}$ de dimension $(m-1)$; on peut encore écrire les intégrales et prendre des bornes supérieures, pour voir que $|\varphi - a_{\mathcal{P}}| \leq C_{\mathcal{P}}\|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}}e^{-\beta t}$ avec $|a_{\mathcal{P}}(z^2, z'')| \leq C_{\mathcal{P}}\|\eta\|_{C_\beta^0}$, $z^2 \neq 0$, et $a_{\mathcal{P}}$ continue hors de $\{z_2 = 0\}$.

On veut toutefois améliorer notre analyse dans le cas des croisements. Pour l'instant, on compile l'information obtenue en travaillant autour de D_1 . Remarquons que les $a_{\mathcal{Q}}$ se recollent; en effet, si $x \in D_1$ a pour coordonnées $z'^{(1)}$ dans \mathcal{Q}_1 et $z'^{(2)}$ dans \mathcal{Q}_2 (et quitte à augmenter le nombre de polydisques on peut supposer que $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ est d'intérieur non vide), on a que :

$$a_{\mathcal{Q}_1}(z'^{(1)}) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \mathcal{Q}_1 \setminus D_1}} \varphi(y) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in (\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2) \setminus D_1}} \varphi(y) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \mathcal{Q}_2 \setminus D_1}} \varphi(y) = a_{\mathcal{Q}_2}(z'^{(2)}).$$

On désigne la fonction induite sur D_1 par a . Ainsi, a est continue et bornée sur $D_1 \setminus \bigcup_{\ell=2}^j D_\ell$. Elle est de plus pluri-harmonique. En effet, on choisit une $(m-2, m-2)$ -forme test

χ sur $D_1 \setminus \bigcup_{\ell=2}^j D_\ell$, ou plus précisément sur un polydisque dans D_1 dont on a retiré $\bigcup_{l=2}^j D_l$. Il ne nuit pas à la généralité de supposer que ce polydisque est un $\mathcal{Q} \cap D_1$ pour un des \mathcal{Q} considérés ci-dessus. Au sens des courants, $\langle i\partial_{z'}\bar{\partial}_{z'}\psi, \chi \rangle = \int_{D_1 \cap \mathcal{Q}} \psi i\partial_{z'}\bar{\partial}_{z'}\chi$. Or puisque l'on travaille sur \mathcal{Q} , on peut écrire ceci sous la forme $\int_{D_1 \cap \mathcal{Q}} \psi_{\mathcal{Q}} i\partial_{z'}\bar{\partial}_{z'}\chi$, ou encore $\int_{\{\log(-\log|z^1|)=t\}} \varphi(z^1, z') i\partial_{z'}\bar{\partial}_{z'}\chi + O(e^{-\beta't})$. Cette dernière intégrale est égale à $\int_{\{\log(-\log|z^1|)=t\}} \eta' \wedge \chi$ par Stokes, où $\eta' = \sum_{p,q \geq 2} \eta_{p\bar{q}} dz^p d\bar{z}^q$. Ceci est clairement un $O(e^{-\beta't})$, et donc $\langle i\partial_{z'}\bar{\partial}_{z'}\psi, \chi \rangle = 0$.

Au final, puisque pour une métrique de type Poincaré, le domaine du laplacien $L^2 \rightarrow L^2$ est H^2 , on a que a est H^2 sur D_1 ; une intégration par parties dit alors qu'elle est constante. On revient aux polydisques \mathcal{P} contenant un croisement, et on pose $z^2 = e^{-e^s+i\zeta}$. On sait qu'il existe une constante c_1 telle que $|\varphi(z^1, z^2, z'') - c_1| \leq C_1 \|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}} e^{-\beta't}$. Par symétrie, il existe une constante c_2 telle que $|\varphi(z^1, z^2, z'') - c_2| \leq C_2 \|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}} e^{-\beta's}$. Comme t et s sont arbitrairement grands, ceci force c_1 et c_2 à être égales. Dans le cas général, on prouve que la constante induite par φ est la même sur toutes les composantes irréductibles d'une même composante connexe \mathcal{D}_k du diviseur, et on peut écrire, en désignant cette constante par a_k , qu'il existe une constante C telle que sur un voisinage fixé de \mathcal{D}_k , $|\varphi - a_k| \leq C \|\eta\|_{C_{\beta'}^{0,\alpha}} (\sum_{\ell=1}^j |\log|\sigma_\ell||)^{-\beta'}$. Le lemme est démontré. \blacksquare

Fin de la preuve de la proposition 3.5. On améliore nos contrôles une dernière fois pour parvenir aux résultats de la proposition 3.5. Tout d'abord, on suppose que $\beta \leq 2$, de sorte que $\beta' = \beta$. Les estimées de Schauder sur des boules de quasi-coordonnées avec poids mixtes nous donnent alors une constante C telle que

$$\left\| \sum_j |\log|\sigma_j||^{\beta'} \left(\varphi - \sum_{k=1} a_k v_k \right) \right\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}}.$$

Pour prouver la proposition (à l'ordre $(2, \alpha)$), on doit transformer la somme de poids $|\log|\sigma_j||^{\beta'}$ en un produit de ces poids. Ceci est automatique loin des croisements de D ; on se concentre donc sur ce qui se passe près d'un croisement dans une composante connexe \mathcal{D}_k , que l'on supposera de codimension 2. Comme dans la démonstration de lemme 3.9, on considère un polydisque $\mathcal{P} = \{|z^1| \leq \frac{1}{e}\} \times \dots \times \{|z^m| \leq \frac{1}{e}\}$ autour d'un croisement donné par $\{z^1 = 0\} \cup \{z^2 = 0\}$, et on pose $z^1 = e^{-e^t+i\theta}$, $z^2 = e^{-e^s+i\zeta}$ et $z'' = (z_3, \dots, z_m)$. On prend un disque épointé $\{z_1\} \times \{0 < |z_2| \leq \frac{1}{e}\} \times \{z''\}$, sur lequel on écrit, en se référant à la preuve du lemme 3.9

$$\varphi(z^1, s, \zeta, z'') = a_k + \int_s^{+\infty} e^{s'} ds' \int_{s'}^{+\infty} e^{-s''} f_0(z^1, s'', z'') ds'' + \varphi_{\perp 2}(z^1, s, \zeta, z'')$$

où $f = |z^2|^2 \log^2(|z^2|^2) \eta(\frac{\partial}{\partial z^2}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^2})$ et f_0 est sa partie ζ -invariante (de sorte que l'on ait $|f_0|, |f| \leq C \|\eta\|_{C^0} e^{-\beta(t+s)}$, C dépendant seulement de \mathcal{P}), et $\varphi_{\perp 2}$ orthogonale aux constantes sur chaque cercle $\{s = \text{constante}\}$. Cette fonction $\varphi_{\perp 2}$ vérifie

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\perp 2}}{\partial s^2} - \frac{\partial \varphi_{\perp 2}}{\partial s} + e^{2s} \frac{\partial^2 \varphi_{\perp 2}}{\partial \zeta^2} = v_{\perp 2},$$

de sorte que $\frac{\partial^2 \varphi_{\perp 2}}{\partial \zeta^2} = e^{-2s} (f_{\perp 2} - \frac{\partial^2 \varphi_{\perp 2}}{\partial s^2} + \frac{\partial \varphi_{\perp 2}}{\partial s})$, ce qui est, entre autres, majoré par $C \|\eta\|_{C_\beta^{0,\alpha}} e^{-\beta'(t+s)}$ grâce au contrôle C^2 que l'on a sur $|\log|z_1||^{\beta'} (\varphi - a_k)$, d'où le contrôle C^0

sur $e^{\beta't} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{\perp 2}}{\partial s^2} - \frac{\partial \varphi_{\perp 2}}{\partial s} \right)$. L'estimation $|\varphi_{\perp 2}(z^1, s, \zeta, z'')| \leq \pi^2 \sup_{\zeta' \in [0, 2\pi]} \left| \frac{\partial^2 \varphi_{\perp 2}}{\partial \zeta'^2}(z_1, s, \zeta', z'') \right|$ suffit alors pour conclure.

Quand $\beta > 2$, on observe que l'on a déjà les contrôles voulus sur les parties S^1 -invariantes. Pour la partie orthogonale, par estimation de Schauder, on a un contrôle $C_{\beta'}^{2,\alpha}$ sur $(\varphi - a_k)$. On applique la même technique que ci-dessus ; on a d'abord un contrôle C^0 sur $\prod_j |\log |\sigma_j||^2 \left(\sum_j |\log |\sigma_j|| \right)^{\min\{\beta-2, 2\}} (\varphi - a_k)$, et donc un contrôle $C^{2,\alpha}$, et en appliquant la technique une fois de plus on obtient un contrôle $C_{\min\{\beta, 4\}}^0$, converti en un contrôle $C_{\min\{\beta, 4\}}^{2,\alpha}$. On répète l'argument autant de fois que nécessaire pour obtenir un contrôle C_{β}^0 , puis on conclut par des estimées de Schauder pondérées. \square

3.4 Théorie du pluri-potentiel

Concluons ce chapitre par la remarque suivante : en se rappelant que dans l'énoncé du théorème 3.2, on prend comme référence $\omega' \in \mathcal{PM}_{[\omega_0]}$, on voit que l'on résout essentiellement dans ce théorème l'équation

$$\omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi = F\omega_0^m,$$

avec F mutuellement bornée avec $\prod_j \frac{1}{|\sigma_j|^2 \log^2(|\sigma_j|)}$; si l'on pose $\mu = F\omega_0^m$, on a donc sur X une mesure qui ne charge pas les ensembles pluripolaires.

D'après [BGZ08, Theorem A], on a donc une fonction φ « d'énergie bornée » satisfaisant à cette équation : il n'est donc *a priori* pas vain de vouloir démontrer notre théorème 3.2, puisque l'on sait que des solutions existent, du moins dans une classe de fonctions assez large. Notre approche est de plus complémentaire de ce point de vue en ce sens que même si les techniques utilisant la notion de *capacité* prédisent le comportement en « log log » du potentiel φ (voir le dernier point du commentaire au théorème B de [BGZ08]), la situation limite dans laquelle on se trouve ici (F est L^1 pour ω_0^m , mais n'est L^p pour aucun $p > 1$) empêche dans ce cadre de pouvoir dire plus sur la régularité de φ , régularité nécessaire à l'application du théorème 3.2 dans la démonstration du théorème 3.3.

Preuve du théorème de Calabi-Yau sur $X \setminus D$

COMME nous l'avons souligné dans notre commentaire suivant l'énoncé du théorème 3.2, ce qui est nouveau dans notre résultat se décompose en deux parties : des estimées non-pondérées uniformes sur les solutions approchées, auxquelles est consacrée la prochaine section, et le fait que les solutions approchées soient dans des Hölder à poids, auquel est consacrée la section 4.2. De plus, une observation facile concernant l'énoncé du théorème 3.2 consiste à dire qu'il suffit d'avoir les contrôles uniformes annoncés sur les φ_ε pour obtenir φ *via* une extraction diagonale. Cela dit, on cherche à obtenir de telles estimées, et pas d'éventuelles estimées à poids ; pour un résultat allant néanmoins dans ce sens, voir l'appendice.

4.1 Bornes uniformes

Avant de commencer, notons que quand X est une surface de Riemann, le théorème se déduit immédiatement du lemme 3.6 et de la proposition 3.5. Dans cette section et la suivante, on suppose donc $m \geq 2$ (bien sûr, le lemme 4.4 reste vrai si néanmoins $m = 1$).

4.1.1 Estimée d'ordre 0

Pour obtenir une estimation C^0 , on suit un schéma d'itération de Moser. Toutefois, il sera également pratique de travailler sur des potentiels normalisés $\psi_\varepsilon := \varphi_\varepsilon - a_\varepsilon$ avec $a_\varepsilon := \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon \text{vol}^{\omega'}$. Dans ce qui suit, toutes les normes L^p sont prises par rapport à la mesure $\text{vol}^{\omega'}$, sauf si une autre mesure est explicitement mentionnée. De même, g se réfère à la métrique riemannienne fixe $\omega'(\cdot, J\cdot)$, ∇ à sa connexion de Levi-Civita, et les normes höldériennes des fonctions et des tenseurs sont calculées par rapport à ω' .

Proposition 4.1. *Dans les conditions du théorème 3.2, il existe des constantes C et A dépendant seulement de ω' et f telles que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$ et $|a_\varepsilon| \leq A$. En particulier, $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2} \leq C' = C + A \text{Vol}$.*

Démonstration. On commence par l'estimée L^2 . On fixe $\varepsilon \in (0, 1]$, et on pose $\omega'_\varepsilon = \omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$ et

$$T_\varepsilon := (\omega')^{m-1} + (\omega')^{m-2} \wedge (\omega'_\varepsilon) + \cdots + (\omega'_\varepsilon)^{m-1},$$

de sorte que T_ε est fermé, minoré par $(\omega')^{m-1}$ au sens des $(m-1, m-1)$ -formes, et $i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon = (\omega'_\varepsilon)^m - (\omega')^m = (e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon} - 1)(\omega')^m$. Or, comme

$$i\partial\bar{\partial}(\varphi_\varepsilon^2 T_\varepsilon) = 2i\partial\varphi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon + 2\varphi_\varepsilon i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon,$$

et que $\int_{X \setminus D} i\partial\bar{\partial}(\varphi_\varepsilon^2 T_\varepsilon) = 0$ (théorème de Stokes pour les variétés complètes), on a :

$$\int_{X \setminus D} i\partial\varphi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon + \int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon (e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon} - 1)(\omega')^m = 0.$$

En remarquant que $i\partial\varphi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon \geq i\partial\varphi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge (\omega')^{m-1}$, et que $(e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon} - 1)\varphi_\varepsilon = e^f(e^{\varepsilon\varphi_\varepsilon} - 1)\varphi_\varepsilon + (e^f - 1)\varphi_\varepsilon \geq (e^f - 1)\varphi_\varepsilon$ (car $e^{\varepsilon\varphi_\varepsilon} - 1$ a le signe φ_ε), il vient :

$$\int_{X \setminus D} i\partial\varphi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge (\omega')^{m-1} \leq \int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon (1 - e^f)(\omega')^m.$$

Comme $\int_{X \setminus D} (1 - e^f)(\omega')^m = 0$ et $\partial\varphi_\varepsilon = \partial\psi_\varepsilon$, on en réécrit ceci sous la forme :

$$\int_{X \setminus D} i\partial\psi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\psi_\varepsilon \wedge (\omega')^{m-1} \leq \int_{X \setminus D} (1 - e^f)\psi_\varepsilon (\omega')^m.$$

Le membre de gauche de cette inégalité n'est autre que $\frac{(m-1)!}{2} \|d\psi_\varepsilon\|_{L^2_{\omega'}}^2$. Or ψ_ε est de moyenne nulle ; d'après l'inégalité de Poincaré non pondérée (IP), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit : $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2} \leq 2mC_P \|1 - e^f\|_{L^2} = C(\omega', f)$, ce qui ne dépend pas de ε .

On estime à présent a_ε ; on commence par une majoration. En intégrant les deux membres de l'équation $(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon)^m = e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon}(\omega')^m$, on obtient $\int_{X \setminus D} e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon} \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}$. L'inégalité de Jensen dit alors que $\int_{X \setminus D} \varepsilon\varphi_\varepsilon e^f \text{vol}^{\omega'} \leq 0$, *i.e.* $\int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon e^f \text{vol}^{\omega'} \leq 0$. Or $a_\varepsilon \text{Vol} = \int_{X \setminus D} e^f(\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \text{vol}^{\omega'} \leq -\int_{X \setminus D} e^f \psi_\varepsilon \text{vol}^{\omega'}$, donc par Cauchy-Schwarz,

$$a_\varepsilon \leq \frac{\|\psi_\varepsilon\|_{L^2} \|e^f\|_{L^2}}{\text{Vol}} \leq \frac{C \|e^f\|_{L^2}}{\text{Vol}},$$

ce qui est encore indépendant de ε .

Pour obtenir d'autre part une minoration de a_ε , on pose $b_\varepsilon := \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon \text{vol}^{\omega'_\varepsilon}$; en d'autres termes, b_ε est la moyenne de φ_ε par rapport à la métrique dont elle est un potentiel. Ainsi, $\text{Vol} = \int_{X \setminus D} e^f \text{vol}^{\omega'} = \int_{X \setminus D} e^{-\varepsilon\varphi_\varepsilon} \text{vol}^{\omega'_\varepsilon} \geq \int_{X \setminus D} (1 - \varepsilon\varphi_\varepsilon) \text{vol}^{\omega'_\varepsilon} = (1 - \varepsilon b_\varepsilon) \text{Vol}$, donc $b_\varepsilon \geq 0$. Par suite, $a_\varepsilon \geq a_\varepsilon - b_\varepsilon = \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} \varphi_\varepsilon (\text{vol}^{\omega'} - \text{vol}^{\omega'_\varepsilon}) = \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} (1 - e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon}) \psi_\varepsilon \text{vol}^{\omega'} \geq -\frac{\|1 - e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon}\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^2}}{\text{Vol}}$. Pour conclure, on répète l'estimation $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$, et on utilise $|\varepsilon\varphi_\varepsilon| \leq |f|_{C^0}$ pour obtenir $a_\varepsilon \geq -\frac{2C\|f\|_{C^0} e^{2\|f\|_{C^0}}}{\text{Vol}^{1/2}}$, ce qui est bien indépendant de ε . \square

La proposition suivante est centrale dans le schéma d'itération à venir :

Proposition 4.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.2, pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$ et tout $p \geq 2$ on a :*

$$\int_{X \setminus D} i\partial(|\varphi_\varepsilon|^{p/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi_\varepsilon|^{p/2}) \wedge (\omega')^{m-1} \leq \frac{p^2}{4(p-1)} \int_{X \setminus D} |\varphi_\varepsilon|^{p-2} \varphi_\varepsilon (1 - e^f)(\omega')^m. \quad (4.1)$$

Démonstration. On fixe $p \geq 2$ et $\varepsilon \in (0, 1]$. D'après les inégalités $T_\varepsilon \geq (\omega')^{m-1}$ et $(1 - e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon})|\varphi_\varepsilon|^{p-2}\varphi_\varepsilon = (1 - e^f)|\varphi_\varepsilon|^{p-2}\varphi_\varepsilon + e^f(1 - e^{\varepsilon\varphi_\varepsilon})|\varphi_\varepsilon|^{p-2}\varphi_\varepsilon \leq (1 - e^f)|\varphi_\varepsilon|^{p-2}\varphi_\varepsilon$, la proposition est démontrée si l'on établit l'identité

$$\int_{X \setminus D} i\partial(|\varphi_\varepsilon|^{p/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi_\varepsilon|^{p/2}) \wedge T_\varepsilon = \frac{p^2}{4(p-1)} \int_{X \setminus D} |\varphi_\varepsilon|^{p-2}\varphi_\varepsilon(1 - e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon})(\omega')^m.$$

Mais ceci provient simplement du calcul direct

$$i\partial\bar{\partial}(|\varphi_\varepsilon|^{p-1}\varphi_\varepsilon T_\varepsilon) = p|\varphi_\varepsilon|^{p-2}\varphi_\varepsilon i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon + p(p-1)|\varphi_\varepsilon|^{p-2}i\partial\varphi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon,$$

grâce aux identités $i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon \wedge T_\varepsilon = (e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon} - 1)(\omega')^m$ et $|\varphi_\varepsilon|^{p-2}i\partial\varphi_\varepsilon \wedge \bar{\partial}\varphi_\varepsilon = \frac{4}{p^2}i\partial(|\varphi_\varepsilon|^{p/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi_\varepsilon|^{p/2})$, ainsi que $\int_{X \setminus D} i\partial\bar{\partial}(|\varphi_\varepsilon|^{p-1}\varphi_\varepsilon T_\varepsilon) = 0$ venant du théorème de Stokes. \square

Avant de tirer de cette proposition des contrôles récursifs dans notre schéma itératif, on précise quel injection de Sobolev on utilise, et en particulier les espaces de Sobolev (à poids) concernés :

Définition 4.3. Soit $q \in [1, +\infty)$. On pose :

$$L_0^{q,0} = \left\{ v \in L_{loc}^q \mid \int_{X \setminus D} |v|^q \rho \text{vol} \omega' < +\infty \right\} = L_{\rho \text{vol} \omega'}^q$$

et si $k \geq \mathbb{N}$, on appelle $L_0^{q,k}$ l'espace des fonctions $v \in L_{loc}^{q,k}$ telles que $|\nabla^j v| \in L_0^{q,0}$ pour tout $j = 0, \dots, k$.

Lemme 4.4. Soit $q_2 \geq q_1$. On a l'injection continue $L_0^{q_1,1} \hookrightarrow L_0^{q_2,0}$ dès que $\frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{q_2} + \frac{1}{2m}$.

Démonstration. Il suffit de regarder ce qui se passe près du diviseur, et même près des croisements, car le cas d'un diviseur lisse est traité dans [Biq97], lemme 4.4. On suppose pour simplifier que les croisements sont de codimension 2 dans X . On considère un petit polydisque U autour d'un point dans un tel croisement, et on recouvre $U \setminus D$ par une union (avec les notations de 1.1.2)

$$\bigcup_{k,\ell \geq 0} \Phi_{\delta_{k,\ell}}(\mathcal{P}), \quad \mathcal{P} = \left(\frac{3}{4}\Delta\right)^2 \times \Delta^{m-2},$$

où les $\delta_{k,\ell} = (\delta_k^1, \delta_\ell^2) \in (0, 1)^2$ sont choisis de sorte que $1 - \delta_k^1 \sim \frac{1}{2^k}$ (resp. $1 - \delta_\ell^2 \sim \frac{1}{2^\ell}$) lorsque k (resp. ℓ) tend vers $+\infty$ (on les choisit donc de la même manière que les δ_k de la preuve du lemme 1.13). De cette manière, $\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* \rho_1$ (resp. $\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* \rho_2$) est mutuellement borné avec 2^k (resp. 2^ℓ), i.e. $\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* \rho$ est mutuellement borné avec $2^{k+\ell}$. On suppose également que la métrique sur $U \setminus D$ est le produit g_U de deux métriques *cusp* standard et d'une métrique euclidienne, de sorte que tous les $\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* g_U$ donnent la même métrique sur \mathcal{P} . On a aussi $|w|_{L^p(U \setminus D)}^p \sim \sum_{k,\ell \geq 0} \frac{1}{2^{k+\ell}} \|\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* w\|_{L^p(\mathcal{P})}^p$ pour tout $p \geq 1$. Or on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $w \in L^{q_1,1}(\mathcal{P})$, $\|w\|_{L^{q_2,0}(\mathcal{P})} \leq C \|w\|_{L^{q_1,1}(\mathcal{P})}$.

On prend $v \in L_0^{q_1,1}$; on a alors :

$$\begin{aligned} |v|_{L_0^{q_2,0}(U \setminus D)}^{q_2} &\sim \sum_{k,\ell \geq 0} \frac{1}{2^{k+\ell}} \|\Phi_{\delta_{k,\ell}}^*(v\rho^{1/q_2})\|_{L^{q_2}(\mathcal{P})}^{q_2} \sim \sum_{k,\ell \geq 0} \frac{1}{2^{k+\ell}} 2^{k+\ell} \|\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* v\|_{L^{q_2}(\mathcal{P})}^{q_2} \\ &\leq C \sum_{k,\ell \geq 0} \|\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* v\|_{L^{q_1,1}(\mathcal{P})}^{q_2} \leq C \left(\sum_{k,\ell \geq 0} \|\Phi_{\delta_{k,\ell}}^* v\|_{L^{q_1,1}(\mathcal{P})}^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \text{ car } q_2 \geq q_1 \\ &\sim C \left(\sum_{k,\ell \geq 0} \frac{1}{2^{k+\ell}} \|\Phi_{\delta_{k,\ell}}^*(v\rho^{1/q_1})\|_{L^{q_1,1}(\mathcal{P})}^{q_2} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \sim C |v|_{L_0^{q_1,1}(U \setminus D)}^{q_2}. \quad \square \end{aligned}$$

Revenons à notre schéma itératif. On pose $\epsilon = \min \left\{ \frac{3}{2}, \frac{m}{m-1}, 1 + \nu \right\} > 1$ (on fera attention à ne pas confondre ϵ et ε), de sorte que l'on ait une injection continue $L_0^{2,1} \hookrightarrow L_0^{2\epsilon,0}$, de norme C_{Sob} disons, d'après le dernier lemme. Soit $d\mu$ la mesure $\rho^{1-\epsilon} \text{vol}^{\omega'}$. On a la formule suivante de contrôle récursif :

Proposition 4.5. *Sous les hypothèses du théorème 3.2, il existe deux constantes C telles que C' pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$ et tout $p \geq 2$,*

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^{p\epsilon}}^p \leq C \|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^p}^p + C' p \|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^{p\epsilon}}^{p-1}.$$

Démonstration. On va utiliser les inégalités de la proposition 4.2, mais tout d'abord, si B désigne la quantité $\sup_{X \setminus D} \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_{\omega'}$, un calcul simple donne (p et ε sont fixés) :

$$\int_{X \setminus D} |d(\rho^{-1/2} |\varphi_\varepsilon|^{p/2})|_{\omega'}^2 \rho \text{vol}^{\omega'} \leq 2 \int_{X \setminus D} |d|\varphi_\varepsilon|^{p/2}|_{\omega'}^2 \text{vol}^{\omega'} + \frac{1}{2} B \int_{X \setminus D} |\varphi_\varepsilon|^p \text{vol}^{\omega'}$$

de sorte que $\|\rho^{-1/2} |\varphi_\varepsilon|^{p/2}\|_{L_0^{2,1}} \leq 2 \int_{X \setminus D} |d|\varphi_\varepsilon|^{p/2}|_{\omega'}^2 \text{vol}^{\omega'} + (\frac{1}{2} B + 1) \int_{X \setminus D} |\varphi_\varepsilon|^p \text{vol}^{\omega'}$. Or $(\int_{X \setminus D} |\varphi_\varepsilon|^{p/2} \text{vol}^{\omega'})^2 \leq (\int_{X \setminus D} |\varphi_\varepsilon|^p \rho^{1-\epsilon} \text{vol}^{\omega'}) (\int_{X \setminus D} \rho^{\epsilon-1} \text{vol}^{\omega'})$, et cette dernière intégrale est finie puisque $\epsilon - 1 \leq \frac{1}{2} < 1$. On sait aussi d'après (4.1) que $\int_{X \setminus D} |d|\varphi_\varepsilon|^{p/2}|_{\omega'}^2 \text{vol}^{\omega'} \leq \frac{cp^2}{4(p-1)} \int_{X \setminus D} |1 - e^f| |\varphi_\varepsilon|^{p-1} \text{vol}^{\omega'}$, et d'après l'inégalité de Hölder ceci est majoré par la quantité $\frac{cp^2}{4(p-1)} (\int_{X \setminus D} |\varphi_\varepsilon|^p \rho^{1-\epsilon} \text{vol}^{\omega'})^{(p-1)/p} (\int_{X \setminus D} (|1 - e^f| \rho^{\epsilon-1})^p \rho^{1-\epsilon} \text{vol}^{\omega'})^{1/p}$; le dernier facteur est de plus toujours majoré par $(\int_{X \setminus D} \rho^{1-\epsilon} \text{vol}^{\omega'})^{1/p} \|1 - e^f\|_{C_\nu^0} \leq C$ pour une constante C ne dépendant que de ω' , ρ et ϵ (les « paramètres »).

Pour résumer, on dit qu'il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que des paramètres telles que pour tout $p > 2$ (et pour $p = 2$, par des arguments similaires),

$$\|\rho^{-1/2} |\varphi_\varepsilon|^{p/2}\|_{L_0^{2,1}} \leq C \|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^p}^p + C' p \|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^{p\epsilon}}^{p-1}.$$

On applique l'injection de Sobolev précisée au début de cette démonstration à $\rho^{-1/2} |\varphi_\varepsilon|^{p/2}$; on obtient exactement que $\|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^{p\epsilon}}^p$ est majoré par C_{Sob}^2 fois le membre de gauche de la dernière inégalité. Finalement, quitte à renommer les constantes, il existe C et C' ne dépendant que des paramètres telles que $p \geq 2$ et $\varepsilon \in (0, 1]$,

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^{p\epsilon}}^p \leq C \|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^p}^p + C' p \|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^{p\epsilon}}^{p-1}. \quad \square$$

Puisque dans les conditions du théorème 3.2 on a une estimation initiale sur $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}$, et donc sur $\|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^2}$ ($\text{vol}^{\omega'}$ domine $d\mu$) indépendantes de ε , c'est un exercice facile de démontrer qu'il existe deux constantes positive Q et C_1 ne dépendant que des paramètres telles que :

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_{d\mu}^p} \leq Q (C_1 p)^{-m/p}$$

pour tout $p \geq 2$ et $\varepsilon \in (0, 1]$. En faisant tendre p vers ∞ , on a donc prouvé :

Proposition 4.6 (Estimée C^0 uniforme). *Sous les hypothèses du théorème 3.2, il existe $Q = Q(\nu, \omega', \|f\|_{C_\nu^0})$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, $\|\varphi_\varepsilon\|_{C^0} \leq Q$.*

4.1.2 Estimée d'ordre deux

On cherche à présent des estimées d'ordre 2, typiquement un contrôle sur le laplacien des solutions ; il est courant, lorsque l'on traite d'équations de Monge-Ampère, que de telles estimées soient dérivées des estimées C^0 . Si l'on désigne par Δ (*resp.* Δ_ε) le laplacien de ω' (*resp.* $\omega'_\varepsilon = \omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$), alors le calcul de Joyce [Joy00, p. 111] pour la formule d'Aubin-Yau donne, en remplaçant f par $f + \varepsilon\varphi_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon(\Delta\varphi_\varepsilon) = & -2\Delta(f + \varepsilon\varphi_\varepsilon) + 4g^{\alpha\bar{\lambda}}g_\varepsilon^{\mu\bar{\beta}}g_\varepsilon^{\gamma\bar{\nu}}\nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi_\varepsilon\nabla_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}}\varphi_\varepsilon \\ & + 4g_\varepsilon^{\alpha\bar{\beta}}g_\varepsilon^{\gamma\bar{\delta}}((\text{Rm}^{\omega'})_{\bar{\delta}\gamma\bar{\beta}}\nabla_{\alpha\bar{\varepsilon}}\varphi_\varepsilon - (\text{Rm}^{\omega'})_{\bar{\beta}\alpha\bar{\delta}}\nabla_{\gamma\bar{\varepsilon}}\varphi_\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(nos facteurs 2 et 4 sont dûs au fait que nous utilisons l'opérateur $\partial\bar{\partial}$ plutôt que dd^c , et que Joyce utilise des demi-laplaciens). L'inégalité d'Aubin-Yau devient :

Proposition 4.7. *Sous les hypothèses du théorème 3.2, soit $\varepsilon \in (0, 1]$, et posons $F_\varepsilon = \log(2m - \Delta\varphi_\varepsilon) - \kappa\varphi_\varepsilon$ où κ est un réel à ajuster. Alors*

$$\Delta_\varepsilon F_\varepsilon \leq \frac{\Delta f + 2\varepsilon m}{2m - \Delta\varphi_\varepsilon} - \varepsilon + \kappa(2m - (g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}g_{\alpha\bar{\beta}}) + C(g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}g_{\alpha\bar{\beta}}$$

où C est une constante ne dépendant que de $\|\text{Rm}^{\omega'}\|_{C^0}$.

On en déduit le contrôle :

Corollaire 4.8 (Estimées d'ordre 2 uniformes). *Sous les hypothèses du théorème 3.2, il existe une constante $Q_1 = Q_1(\nu, \omega', \|f\|_{C^0}, \|f\|_{C^2})$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, $2m - \Delta\varphi_\varepsilon \leq Q_1$. Ceci fournit en particulier deux constantes Q_2 et $c > 0$ telles que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, $\|i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon\|_{C^0} \leq Q_2$ et $c\omega' \leq \omega'_\varepsilon \leq c^{-1}\omega'$.*

Démonstration. On prend $\kappa = C + 1$ dans la proposition 4.7. On rappelle que $2m - \Delta\varphi_\varepsilon \geq 2me^{-2\|f\|_{C^0}/m} > 0$; il suffit pour le voir de regarder les valeurs propres de $i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$ par rapport à ω' . Il s'en suit qu'en tout point,

$$(g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}g_{\alpha\bar{\beta}} = (\kappa - C)(g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}g_{\alpha\bar{\beta}} \leq -\Delta_\varepsilon F_\varepsilon + \frac{\Delta f + 2\varepsilon m}{2m - \Delta\varphi_\varepsilon} - \varepsilon + 2m\kappa \leq -\Delta_\varepsilon F_\varepsilon + C',$$

avec $C' = 2m\kappa + \frac{1}{2m}e^{2\|f\|_{C^0}/m}(\|\Delta f\|_{C^0} + 2m)$, constante indépendante de ε . On applique le principe du maximum de Wu ([Wu08], lemme 3.1) à Δ_ε (à ε fixé, on sait que ω'_ε est quasi-isométrique à ω' par [TY87]) et F_ε . Après une éventuelle extraction, on obtient une suite (x_j) de points de $X \setminus D$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} F_\varepsilon(x_j) = \sup_{X \setminus D} F_\varepsilon$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_\varepsilon F_\varepsilon(x_j) \geq 0$. Quitte à décaler les indices, on a donc $(g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}g_{\alpha\bar{\beta}}(x_j) \leq C' + 1$ pour tout j . De plus, en manipulant les valeurs propres de $i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$, on a facilement $2m - \Delta\varphi_\varepsilon \leq 2((g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}g_{\alpha\bar{\beta}})^{m-1}e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon}$ en tout point, ce qui donne pour tout j l'inégalité $2m - \Delta\varphi_\varepsilon(x_j) \leq 2(C' + 1)^{m-1}e^{2\|f\|_{C^0}}$. On la réinjecte dans la définition de F_ε pour évaluer $F_\varepsilon(x_j)$, et on fait tendre j vers $+\infty$; il vient $\sup_{X \setminus D} F_\varepsilon \leq 2\|f\|_{C^0} + (m-1)\log(C' + 1) + \log 2 + \kappa\|\varphi_\varepsilon\|_{C^0}$. Finalement, à nouveau par définition de F_ε , ceci nous dit que

$$2m - \Delta\varphi_\varepsilon \leq 2(C' + 1)^{m-1} \exp(2\|f\|_{C^0} + 2\kappa\|\varphi_\varepsilon\|_{C^0}),$$

et on peut aisément remplacer le membre de droite par une quantité indépendante de ε , puisque nous avons une estimation uniforme sur $\|\varphi_\varepsilon\|_{C^0}$ par la proposition 4.6. \square

4.1.3 Estimées d'ordre trois et d'ordre supérieur

On démontre à présent l'estimation :

Proposition 4.9 (Estimée d'ordre 3 uniforme). *Sous les hypothèses du théorème 3.2, il existe une constante Q_3 ne dépendant que des paramètres telles que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, $\|\nabla i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon\|_{C^0} \leq Q_3$.*

Démonstration. Le point de départ résulte encore d'un calcul difficile mais néanmoins local dû à Yau [Yau78] (voir aussi [Aub98]). On définit, pour $\varepsilon \in (0, 1]$, une fonction S_ε telle que $4S_\varepsilon^2 = |\nabla i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon|_{\omega'_\varepsilon}^2$, de sorte qu' en coordonnées holomorphes locales, $S^2 = (g'_\varepsilon)^{\alpha\bar{\lambda}}(g'_\varepsilon)^{\mu\bar{\beta}}(g'_\varepsilon)^{\gamma\bar{\nu}}\nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi_\varepsilon\nabla_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}}\varphi_\varepsilon$. Le calcul de Yau s'écrit alors :

$$\begin{aligned} -\Delta_\varepsilon(S_\varepsilon^2) &= |\nabla_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}\varphi_\varepsilon - (g_\varepsilon)^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\alpha\bar{\lambda}\gamma}\varphi_\varepsilon\nabla_{\beta\bar{\mu}\delta}\varphi_\varepsilon|_{\omega'_\varepsilon}^2 \\ &\quad + |\nabla_{\alpha\beta\bar{\gamma}\delta}\varphi_\varepsilon - (g_\varepsilon)^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\alpha\bar{\gamma}\lambda}\varphi_\varepsilon\nabla_{\beta\bar{\mu}\delta}\varphi_\varepsilon - g^{\lambda\bar{\mu}}\nabla_{\alpha\bar{\mu}\delta}\varphi_\varepsilon\nabla_{\lambda\bar{\gamma}\beta}\varphi_\varepsilon|_{\omega'_\varepsilon}^2 \\ &\quad + P^{4,2,1}((g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}, \nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi_\varepsilon, \nabla_{\alpha\bar{\beta}}(f + \varepsilon\varphi_\varepsilon)) + Q^{4,2,1}((g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}, \nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi_\varepsilon, \text{Rm}^a_{bcd}) \\ &\quad + P^{3,1,1}((g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}, \nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi_\varepsilon, \nabla_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}(f + \varepsilon\varphi_\varepsilon)) + Q^{3,1,1}((g_\varepsilon)^{\alpha\bar{\beta}}, \nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma}\varphi_\varepsilon, \nabla_e\text{Rm}^a_{bcd}) \end{aligned}$$

où les $P^{j,k,\ell}$ et $Q^{j,k,\ell}$ sont des polynômes à coefficients des constantes universelles et d'arguments les entrées de trois matrices, les exposants j , k et ℓ indiquant à quel degré est porté l'élément de la matrice correspondante.

Au vu du corollaire 4.8, il existe une constante $C_1 \geq 1$ ne dépendant que des paramètres telle que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, $\Delta_\varepsilon(S_\varepsilon^2) \leq C_1(S_\varepsilon^2 + S_\varepsilon)$. D'autre part, on peut utiliser la formule (4.2) pour déclarer qu'il existe des constantes $c > 0$ et C_2 ne dépendant que des paramètres telles que $\Delta_\varepsilon(\Delta\varphi_\varepsilon) \leq cS^2 - C$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$. On regroupe ces deux inégalités pour écrire

$$\Delta_\varepsilon(S_\varepsilon^2 - 2cC_1C_2\Delta\varphi_\varepsilon) \leq -C_1(S_\varepsilon - \frac{1}{2}) + C$$

avec $C := 2cC_1C_2 + \frac{1}{4}C_1$. On choisit une suite de points (x_j) de $X \setminus D$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} (S_\varepsilon^2 - 2cC_1C_2\Delta\varphi_\varepsilon)(x_j) = \sup_{X \setminus D} (S_\varepsilon^2 - 2cC_1C_2\Delta\varphi_\varepsilon)$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_\varepsilon(S_\varepsilon^2 - 2cC_1C_2\Delta\varphi_\varepsilon)(x_j) \geq 0$. Quitte à réindexer, $\Delta_\varepsilon(S_\varepsilon^2 - 2cC_1C_2\Delta\varphi_\varepsilon)(x_j) \geq -C_1$ de telle sorte que $(S_\varepsilon(x_j) - \frac{1}{2})^2 \leq 2cC_2 + \frac{5}{4}$, or $S_\varepsilon(x_j) \leq C_3 := (\frac{1}{2} + (2cC_2 + \frac{5}{4})^2)$ pour tout j .

On fait tendre j vers $+\infty$; ceci nous dit que $\sup_{X \setminus D} (S_\varepsilon^2 - 2cC_1C_2\Delta\varphi_\varepsilon) \leq C_3 + 2cC_1C_2\|\Delta\varphi_\varepsilon\|_{C^0}$, d'où $\|S_\varepsilon\|_{C^0} \leq (C_3 + 4cC_1C_2\|\Delta\varphi_\varepsilon\|_{C^0})^{1/2}$ estimation que l'on rend indépendante de ε à l'aide du corollaire 4.8. \square

On énonce une conséquence immédiate :

Corollaire 4.10. *Soit $\alpha \in (0, 1)$. Sous les hypothèses du théorème 3.2, il existe une constante Q_α telle que $\|\omega'_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}} \leq Q_\alpha$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$.*

En dernière analyse, un argument usuel de *bootstrap* nous permet de conclure. En effet, fixons $\alpha \in (0, 1)$; dans la formule (4.2), l'opérateur Δ_ε est uniformément elliptique dans un système de quasi-coordonnées et ses coefficients sont contrôlés dans $C^{0,\alpha}$, ces contrôles étant indépendants de ε . On a un contrôle C^0 uniforme sur le membre de droite et sur $\Delta\varphi_\varepsilon$, indépendamment de ε . Les estimées de Schauder dans les boules de quasi-coordonnées nous donnent une estimée $C^{1,\alpha}$ sur $\Delta\varphi_\varepsilon$ indépendante de ε . Comme on a déjà

une estimée C^0 sur φ_ε qui ne dépend pas de ε , on obtient un contrôle $C^{3,\alpha}$ sur φ_ε , qui ne dépend pas de ε . On réinjecte ce contrôle dans (4.2); les coefficients de l'opérateur Δ_ε sont à présent contrôlés $C^{1,\alpha}$, et le membre de droite dans $C^{0,\alpha}$, contrôles indépendants de ε . On en déduit sur φ_ε un contrôle $C^{4,\alpha}$ indépendant de ε . On continue la récurrence; on obtient pour tout $k \geq 0$ un contrôle $C^{k,\alpha}$ sur les φ_ε indépendant de ε .

4.2 Les solutions approchées sont dans des espaces à poids

On a vu qu'il est possible d'établir sur les φ_ε des estimations C^k uniformes en ε . On établit dans cette section des estimations pondérées similaires, qui ne sont toutefois plus uniformes lorsque ε tend vers 0; ceci cependant suffit à nos applications, comme on l'a vu au chapitre précédent. Nous voyons de plus dans l'appendice A (fin de la section A.1) que l'uniformité en ε n'est pas possible dans le cas où le diviseur admet des croisements, car les φ du théorème 3.2 ne sont pas dans des espaces à poids > 0 tels que nous les avons définis.

4.2.1 Un contrôle C^0 à poids entraîne un contrôle à poids à tout ordre

Une fois que l'on sait qu'un des potentiels φ_ε du théorème 3.2 est dans un C_γ^0 , $\gamma > 0$, la décroissance rapide de ses dérivées s'en déduit facilement :

Proposition 4.11. *Sous les hypothèses du théorème 3.2, soit $\varepsilon \in (0, 1]$. On suppose que $\varphi_\varepsilon \in C_\gamma^0$ pour un $\gamma \in (0, \nu]$. Alors $\varphi_\varepsilon \in C_\gamma^\infty$.*

Démonstration. On commence par prouver que $\varphi_\varepsilon \in C_\gamma^{1,\alpha}$, où $\alpha \in (0, 1)$ est fixé. L'assertion est locale près de D ; on regarde donc ce qui se passe au voisinage du diviseur. On prend un petit polydisque de coordonnées $U = (c\Delta)^k \times (\frac{1}{2}\Delta)^{m-k}$ ($c > 0$ petite) autour d'un point d'un croisement de codimension k , dans lequel les composantes de D sont données de la manière habituelle, *i.e.* par l'annulation des k premières coordonnées. On pose $\mathcal{P} = (\frac{1}{2}\Delta)^k \times \Delta^{m-k}$ et $\Phi_\delta : \mathcal{P} \rightarrow \Delta^m$ comme en section 1.1 pour $\delta \in (0, 1)^k$, de sorte que $U \setminus D \subset \bigcup_{\delta \in]0,1]^k} \Phi_\delta(\frac{1}{2}\mathcal{P})$. On veut une estimation de $\|\rho^\gamma \varphi_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(U \setminus D)}$, quantité comparable à

$$\sup_{\delta \in (0,1)^k} \frac{1}{(1-\delta_1)^\gamma \cdots (1-\delta_k)^\gamma} \|\Phi_\delta^* \varphi_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\frac{1}{2}\mathcal{P})}.$$

On considère à présent sur \mathcal{P} l'opérateur du second ordre

$$P_\delta : v \mapsto \frac{i\partial\bar{\partial}v \wedge \Phi_\delta^*[(\omega')^{m-1} + \cdots + (\omega'_\varepsilon)^{m-1}]}{\Phi_\delta^*(\omega')^{m-1}}$$

pour $\delta \in (0, 1)^k$. Comme $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(X \setminus D)$, on a ellipticité uniforme et contrôle C^ℓ pour tout $\ell \geq 0$ uniforme sur les coefficients de P_δ , ce qui implique par exemple qu'il existe une constante C telle que pour tout $\delta \in (0, 1)^k$,

$$\|v\|_{C^{1,\alpha}(\frac{1}{2}\mathcal{P})} \leq C(\|P_\delta v\|_{C^0(\mathcal{P})} + \|v\|_{C^0(\mathcal{P})})$$

pour toute fonction $v \in C^2(\mathcal{P})$ telle que $\|P_\delta v\|_{C^0(\mathcal{P})}$ soit finie. Or on remarque également que $P_\delta(\Phi_\delta^* \varphi_\varepsilon) = 1 - e^{\Phi_\delta^* f + \varepsilon \Phi_\delta^* \varphi_\varepsilon}$ pour tout $\delta \in (0, 1)^k$. Puisque $f \in C_\nu^0$ et $\varphi_\varepsilon \in C_\gamma^0$, $\gamma \leq \nu$, on a que $\|P_\delta(\Phi_\delta^* \varphi_\varepsilon)\|_{C^0(\mathcal{P})} \leq C(1-\delta_1)^\gamma \cdots (1-\delta_k)^\gamma$ pour une constante C indépendante de δ . De la même manière, $\|\Phi_\delta^* \varphi_\varepsilon\|_{C^0(\mathcal{P})} \leq C'(1-\delta_1)^\gamma \cdots (1-\delta_k)^\gamma$, C' ne dépendant pas de δ . Ainsi $\frac{1}{(1-\delta_1)^\gamma \cdots (1-\delta_k)^\gamma} \|\Phi_\delta^* \varphi_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\frac{1}{2}\mathcal{P})}$ est contrôlé indépendamment de δ , *i.e.*

$\|\rho^\gamma \varphi_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(U \setminus D)}$ est finie. On prend alors un nombre suffisant de petits polydisques U pour déclarer que $\|\rho^\gamma \varphi_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(X \setminus D)}$ est finie, ou de manière équivalente que $\varphi_\varepsilon \in C_\gamma^{1,\alpha}(X \setminus D)$.

On réinjecte alors cette borne dans l'argument que l'on vient de développer (au moment de contrôler les $\|P_\delta(\Phi_\delta^* \varphi_\varepsilon)\|_{C^{2\ell-1,\alpha}(\mathcal{P})}$) pour obtenir par récurrence que $\varphi_\varepsilon \in C_\gamma^{2\ell+1,\alpha}(X \setminus D)$ pour tout $\ell \geq 1$. \square

4.2.2 Contrôle C^0 à poids

Au vu de la dernière proposition, notre démonstration du théorème 3.2 sera complète une fois établi le résultat suivant :

Proposition 4.12. *Sous les hypothèses du théorème 3.2, il existe une constante $c > 0$ telle que $\varphi_\varepsilon \in C_{c\varepsilon}^0(X \setminus D)$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$.*

Démonstration. On prend $\varepsilon \in (0, 1]$. On part des inégalités $\Delta \varphi_\varepsilon + 2\varepsilon \varphi_\varepsilon \leq 2f$ et $\Delta_\varepsilon \varphi_\varepsilon + 2\varepsilon \varphi_\varepsilon \geq 2f$. Soit $\gamma \in (0, \min(\frac{1}{2}, \nu))$; on désigne par $\mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}$ l'opérateur $\rho^\gamma(\Delta + 2\varepsilon)(\rho^{-\gamma} \cdot)$, de sorte que

$$\mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}(\rho^\gamma \varphi_\varepsilon) \leq 2\rho^\gamma f \leq M \quad (4.3)$$

pour une constante réelle $M = M(f, \gamma)$.

Majoration pondérée. Soit ψ une fonction $C^\infty(X \setminus D)$ telle que $\mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}(\psi) = M$ hors d'un domaine compact K de $X \setminus D$; une telle ψ d'après la preuve du lemme 3.6, si l'on suppose $\gamma \leq c\varepsilon$ (c indépendante de γ). Or si A est une constante assez grande, $v := \rho^\gamma \varphi_\varepsilon - \psi - A \leq 0$ sur ∂K et $\mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}(v) \leq 0$ sur le complémentaire V de K dans $X \setminus D$. On veut en déduire que $v \leq 0$ sur V , ce qui nous donnera une majoration sur φ_ε ; pour cela, on utilise les arguments de la démonstration du lemme 1.15.

Plus précisément, on se donne une suite exhaustive croissante $(U_p)_{p \geq 0}$ d'ouverts relativement compacts de $X \setminus D$ contenant K , et on pose $V_p = U_p \setminus K$ pour tout p , de sorte que $V = \bigcup_p V_p$. Pour tout p , on note v_p la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}(v_p) = \mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}(v) & \text{sur } V_p \\ v_p = v & \text{sur } \partial K \\ v_p = 0 & \text{sur } \partial U_p. \end{cases}$$

Toujours en suivant la démonstration du lemme 1.15, on sait qu'il suffit pour conclure de démontrer que les v_p sont négatives, et qu'il existe sur $\|v_p\|_{L^2(V_p)}$ une borne ne dépendant pas de p . On commence par la négativité; fixons p . On sait déjà que v_p est négative sur les bords de son domaine V_p ; supposons qu'elle soit strictement positive en un point de V_p , et notons $x \in V_p$ un point tel que $v_p(x) = \sup_{V_p} v > 0$. En ce point, $\Delta v_p(x) \geq 0$, tandis que

$$0 \geq \mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}(v_p)(x) = \Delta v_p(x) + (2\varepsilon - \gamma \frac{\Delta \rho(x)}{\rho(x)} - 2\gamma(\gamma + 1) \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_{\omega',x}^2) v_p(x).$$

Dès que la parenthèse dans le membre de droite est > 0 , ce qui est le cas grâce à notre hypothèse sur γ , on a $v_p(x) \leq \frac{-\Delta v_p(x)}{(2\varepsilon - \gamma \frac{\Delta \rho(x)}{\rho(x)} - 2\gamma(\gamma + 1) \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_{\omega',x}^2)} \leq 0$, ce qui est absurde.

Reste à contrôler les $\|v_p\|_{L^2(V_p)}$ indépendamment de p . Pour ce faire, on écrit v_p comme la somme $\xi_p + \eta_p$, où $\xi_p|_{\partial V_p} \equiv 0$ et $\mathcal{L}_{\gamma,\varepsilon}(\eta_p) = 0$, de sorte qu'il s'agisse de contrôler $\|\xi_p\|_{L^2(V_p)}$ et $\|\eta_p\|_{L^2(V_p)}$ indépendamment de p . Les arguments ci-dessus donnent $\eta_p \leq 0$ et $\inf_{V_p} \eta_p = \inf_{\partial V_p} \eta_p = \inf_{\partial K} \eta_p = \inf_{\partial K} v$, donc $\|\eta_p\|_{L^2(V_p)} \leq \text{Vol}(V)^{1/2} |\inf_{\partial K} v|$.

Enfin, une intégration par parties donne :

$$\int_{V_p} \xi_p \mathcal{L}_{\gamma, \varepsilon}(\xi_p) \text{vol}^{\omega'} = \int_{V_p} (2\varepsilon - \gamma^2 \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_{\omega'}^2) \xi_p^2 \text{vol}^{\omega'} + \int_{V_p} |d\xi_p|^2 \text{vol}^{\omega'}.$$

Quitte à réduire la constante c , $2\varepsilon - \gamma^2 \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|_{\omega'}^2 \geq 0$ sur $X \setminus D$; on a de plus vu que $\int_{V_p} |d\xi_p|^2 \text{vol}^{\omega'} \geq \frac{\text{Vol}(K)}{C_P \text{Vol}} \int_{V_p} \xi_p^2 \text{vol}^{\omega'}$, d'où $\int_{V_p} \xi_p^2 \text{vol}^{\omega'} \leq \frac{C_P \text{Vol}}{\text{Vol}(K)} \int_{V_p} \xi_p \mathcal{L}_{\gamma, \varepsilon}(\xi_p) \text{vol}^{\omega'}$. Or on remarque que $\int_{V_p} \mathcal{L}_{\gamma, \varepsilon}(\xi_p)^2 \text{vol}^{\omega'} = \int_{V_p} \mathcal{L}_{\gamma, \varepsilon}(v)^2 \text{vol}^{\omega'} = \int_{V_p} (\rho^\gamma (\Delta \varphi_\varepsilon + 2\varepsilon \varphi_\varepsilon) - M)^2 \text{vol}^{\omega'} \leq \int_{V \setminus D} (\rho^\gamma (\Delta \varphi_\varepsilon + 2\varepsilon \varphi_\varepsilon) - M)^2 \text{vol}^{\omega'} < +\infty$, car $\Delta \varphi_\varepsilon + 2\varepsilon \varphi_\varepsilon$ est borné et ρ^γ est de carré intégrable car $\gamma < \frac{1}{2}$. On conclut alors par Cauchy-Schwarz. On a démontré que $\varphi_\varepsilon \leq C\rho^{-\gamma}$ sur V , pour tout $\gamma \in [0, c\varepsilon)$ (c indépendante de ε), et une constante C pouvant dépendre de ε et γ .

Minoration pondérée. L'inégalité réciproque $\Delta_\varepsilon \varphi_\varepsilon + 2\varepsilon \varphi_\varepsilon \geq 2f$ nous donne près de D la minoration pondérée $\varphi_\varepsilon \geq -C\rho^{-\gamma}$ pour tout $\gamma \in [0, c\varepsilon)$, quitte à réduire c . Ceci est fait en travaillant par rapport à ω'_ε plutôt que ω' . On peut néanmoins garder c indépendante de ε , car ω'_ε et ω' sont mutuellement bornées indépendamment de ε par le corollaire 4.8. \square

Unicité des métriques à courbure scalaire constante ($K_X[D]$ ample)

Ce court chapitre décrit une application des constructions des géodésiques approchées (chapitre 2) et des métriques de type Poincaré à forme de Ricci négative (chapitre 3) à l'unicité au sein de \mathcal{PM}_Ω d'une éventuelle métrique à courbure scalaire constante, sous l'hypothèse $K_X[D]$ ample; on rappelle à nouveau que Ω est une classe de Kähler quelconque sur X .

5.1 Énoncé du résultat

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 5.1. *On suppose $K_X[D]$ ample. Alors sous réserve d'existence, une métrique $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$ à courbure scalaire $s(\omega')$ constante sur $X \setminus D$ est unique dans \mathcal{PM}_Ω .*

La démonstration est faite dans la prochaine section. Pour l'instant, nous énonçons et démontrons un lemme qui est utile à la démonstration du théorème 5.1, et qui explique également l'énoncé d'unicité de ce théorème. En effet, le lemme spécifie que le groupe des automorphismes de X tangents au diviseur est discret si $K_X[D]$ est ample, et par conséquent pourquoi on a simplement unicité, et pas unicité modulo l'action de tels automorphismes homotopes à l'identité, d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante sur $X \setminus D$.

Lemme 5.2. *On suppose $K_X[D]$ ample. Alors l'espace des champs de vecteurs holomorphes L^2 par rapport à une métrique de type Poincaré est trivial.*

Démonstration. On munit $X \setminus D$ de la métrique de Kähler-Einstein construite par Tian et Yau [TY87], disons ϖ ; on a donc $\rho_\varpi \leq -c\varpi$ pour une constante $c > 0$. Soit Z un champ de vecteurs holomorphe L^2_ϖ ; un tel champ est automatiquement dans $C_{loc}^\infty(T^{1,0})$. Comme ϖ domine n'importe quelle métrique lisse à travers D , Z est en réalité lisse sur X toute entière. De plus, comme Z est L^2_ϖ , sa composante normale s'annule le long du diviseur. Plus précisément, au voisinage d'un point d'une composante, et loin des croisements pour simplifier, on a $Z = Z^j \frac{\partial}{\partial z^j}$, avec les Z^j holomorphes. Si la composante est donnée par z^1 , on a $|Z|_\varpi \gtrsim \frac{|Z^1|}{|z^1| |\log |z^1||}$. Si Z^1 n'est pas identiquement nulle le long du diviseur, on a

$|Z|_\varpi \gtrsim \frac{c}{|z^1| |\log |z^1||}$ sur le voisinage U d'un point du diviseur, ce qui fait diverger l'intégrale

$$\int_U |Z|_\varpi^2 \text{vol}^\varpi \geq c \int_U \frac{1}{|z^1|^2 (\log |z^1|)^2} \frac{idz^1 \wedge \bar{d}z^1}{|z^1|^2 (\log |z^1|)^2} \wedge \prod_{j=2}^m idz^j \wedge \bar{d}z^j = +\infty.$$

On peut donc écrire $Z = z^1 \tilde{Z}^1 \frac{\partial}{\partial z^j} + \sum_{j=2}^m Z^j \frac{\partial}{\partial z^j}$ sur le voisinage considéré, et obtenir une écriture analogue près des croisements. Ceci a pour conséquence l'estimation $|Z|_\varpi \in C^2(X \setminus D)$ (dérivées d'ordre ≤ 2 bornées). Le reste de la démonstration est à présent le même que dans le cas compact ; on a en effet $\Delta_\varpi |Z|_\varpi^2 = \text{Ric}_\varpi(Z, Z) - 2|\nabla_\varpi Z|^2 \leq -c|Z|^2$, de sorte que $\Delta_\varpi |Z|_\varpi^2 + \frac{c}{2}|Z|_\varpi^2 \leq 0$. À présent l'intégration par parties

$$\int_{X \setminus D} |d|Z|_\varpi^2|^2 \text{vol}^\varpi = \int_{X \setminus D} |Z|_\varpi^2 \Delta_\varpi |Z|_\varpi^2 \text{vol}^\varpi \leq -c \|Z\|_{L^4}^4$$

oblige $|Z|_\varpi^2$ à être constante, et donc à être nulle car alors $\Delta_\varpi |Z|_\varpi^2 = 0$. \square

5.2 Démonstration du théorème d'unicité

Notre démonstration suit de près celle que Chen donne pour le cas compact [Che00, §6], ce pourquoi ne serons assez brefs.

On fixe quelques notations. On désigne par ω une métrique de \mathcal{PM}_Ω telle que $\varrho_\omega \leq -c\omega$, $c > 0$, donnée par le théorème 3.3 ; on la voit comme point-base de \mathcal{PM}_Ω , de sorte que les potentiels vont être calculés par rapport à cette métrique ω , *i.e.* : φ est un potentiel de $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$ si $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$. On se donne de plus deux métriques ω_0 et ω_1 de \mathcal{PM}_Ω à courbure scalaire constante ; on appelle v_τ le potentiel associé à ω_τ tel que $\int_{X \setminus D} v_\tau \text{vol}^{\omega_\tau} = 0$, $\tau = 0, 1$. On considère enfin les ε -géodésiques $(v_t^\varepsilon)_{t \in [0,1]}$ de v_0 vers v_1 pour $\varepsilon > 0$ petit ; on a ainsi $v_\tau^\varepsilon \equiv v_\tau$, $\tau = 0, 1$, et si l'on pose $f_t^\varepsilon := \frac{\omega_{v_t^\varepsilon}^m}{(\omega_{v_t^\varepsilon})^m}$, alors

$$\ddot{v}_t^\varepsilon - |\partial v_t^\varepsilon|_{\omega_{v_t^\varepsilon}}^2 = \varepsilon f_t^\varepsilon$$

pour tout $t \in [0, 1] := I$.

On rappelle que l'on a sur \ddot{v}_t^ε et $d\dot{v}_t^\varepsilon$ des bornes uniformes sur $(X \setminus D) \times I$ indépendantes de ε , ainsi que sur $|i\partial\bar{\partial}v_t^\varepsilon|_\omega$. On pose $E^\varepsilon : t \mapsto \tilde{\mathbf{E}}(v_t^\varepsilon)$; d'après la proposition 1.7,

$$\ddot{E}^\varepsilon(t) = \int_{X \setminus D} |\mathcal{D}_t^\varepsilon \dot{v}_t^\varepsilon|_{\omega_{v_t^\varepsilon}}^2 \text{vol}^{\omega_{v_t^\varepsilon}} - \int_{X \setminus D} \varepsilon \mathbf{s}_{v_t^\varepsilon} \text{vol}^\omega + \varepsilon \bar{\mathbf{S}} \text{Vol} \quad (5.1)$$

pour tout $t \in I$, où $\mathcal{D}_t^\varepsilon$ désigne l'opérateur $\nabla_{\omega_{v_t^\varepsilon}}^- d$.

5.2.1 Une inégalité cruciale

On fixe provisoirement t dans le deuxième terme du membre de droite de (5.1), que l'on peut réécrire sous la forme $-\varepsilon \int_{X \setminus D} f_t^\varepsilon \mathbf{s}_t^\varepsilon \text{vol}_t^\varepsilon$ (avec les simplifications de notation évidentes). Comme $\mathbf{s}_t^\varepsilon = 2\Lambda_t^\varepsilon \varrho_t^\varepsilon$ et $\varrho_t^\varepsilon = \varrho_\omega + i\partial\bar{\partial} \log(f_t^\varepsilon)$, il vient :

$$\int_{X \setminus D} f_t^\varepsilon \mathbf{s}_t^\varepsilon \text{vol}_t^\varepsilon = 2 \int_{X \setminus D} f_t^\varepsilon (\text{tr}_t^\varepsilon(\varrho_\omega) - \Delta_t^\varepsilon \log(f_t^\varepsilon)) \text{vol}_t^\varepsilon.$$

Or $\log(f_t^\varepsilon) \in C^\infty(X \setminus D)$, et en utilisant $\text{vol}_t^\varepsilon = \frac{\text{vol}^\omega}{f_t^\varepsilon}$, une intégration par parties donne $\int_{X \setminus D} f_t^\varepsilon \Delta_t^\varepsilon \log(f_t^\varepsilon) \text{vol}_t^\varepsilon = \int_{X \setminus D} |d \log(f_t^\varepsilon)|_{\omega_t^\varepsilon}^2 \text{vol}^\omega$. Ainsi, on réécrit (5.1), après avoir intégré sur I et divisé par ε :

$$\int_{(X \setminus D) \times I} \frac{|D_t^\varepsilon \dot{v}_t^\varepsilon|_{\omega_t^\varepsilon}^2}{\varepsilon f_t^\varepsilon} \text{vol}^\omega dt - 2 \int_{(X \setminus D) \times I} (\text{tr}_t^\varepsilon(\varrho_\omega) - |d \log(f_t^\varepsilon)|_{\omega_t^\varepsilon}^2) \text{vol}^\omega dt = -\bar{s} \text{Vol}$$

car $\dot{E}^\varepsilon(0) = \dot{E}^\varepsilon(1)$, puisque les extrémités du chemin considéré sont à courbure scalaire constante. On utilise à présent l'égalité $\varrho_\omega \leq -c\omega$ pour obtenir :

$$\int_{(X \setminus D) \times I} \left[\frac{|D_t^\varepsilon \dot{v}_t^\varepsilon|_{\omega_t^\varepsilon}^2}{\varepsilon f_t^\varepsilon} + (2c \text{tr}_t^\varepsilon(\omega) + 2|d \log(f_t^\varepsilon)|_{\omega_t^\varepsilon}^2) \right] \text{vol}^\omega dt \leq -\bar{s} \text{Vol} := C, \quad (5.2)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Cette inégalité, ou plutôt les trois inégalités qu'elle contient, sont essentielles pour obtenir les contrôles du paragraphe suivant.

5.2.2 Bornes L^p , limites faibles, et conclusion

À présent que nous disposons de l'inégalité (5.2) ainsi que de contrôles indépendants de ε sur certaines dérivées d'ordre 2 des (v_t^ε) , on peut utiliser les calculs de Chen, et obtenir des contrôles sur les objets suivants : $w_t^\varepsilon := \log(f_t^\varepsilon)$, $X_t^\varepsilon := \sharp_t^\varepsilon \partial \dot{v}_t^\varepsilon$, $Y_t^\varepsilon := e^{-w_t^\varepsilon} X_t^\varepsilon$, pour tout $t \in I$, $\varepsilon > 0$. Résumons ces contrôles de la manière suivante :

Lemme 5.3. $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est borné dans $L^2(|\cdot|_\omega, \text{vol}^\omega dt)$, $(Y_t^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est borné dans $L^\infty(|\cdot|_\omega, \text{vol}^\omega dt)$, et $(\bar{\partial} Y_t^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est borné dans $L^q(|\cdot|_\omega, \text{vol}^\omega dt)$, $1 < q < 2$.

De plus, $(w_t^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est borné dans $L^p(\text{vol}^\omega dt)$ pour tout $p \geq 1$ fini, et $(e^{-w_t^\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ est borné dans L^∞ et $(\bar{\partial} w_t^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est borné dans $L^2(|\cdot|_\omega, \text{vol}^\omega dt)$.

Enfin, $(e^{-w_t^\varepsilon} \bar{\partial} X_t^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ tend vers 0 dans les $L^q(|\cdot|_\omega, \text{vol}^\omega dt)$, $1 < q < 2$.

Démonstration. [Che00], p. 225-229. ■

On extrait des sous-suites faiblement convergentes dans ces espaces L^p respectifs, et on note les limites en remplaçant les ε par 0. Ceci ne crée pas d'ambiguïté, car par exemple $\bar{\partial} Y^0$ coïncide avec la limite faible des $\bar{\partial} Y^\varepsilon$.

On veut démontrer que $\bar{\partial} X^0 = 0$, ce dont nous ne sommes pas si loin formellement, car si tout était lisse on pourrait écrire $\bar{\partial} X^0 = e^{w^0} (\bar{\partial} Y^0 + \bar{\partial} w^0 \otimes Y^0) = 0$. Pour atteindre cela, on doit faire un détour par des versions tronquées des X^0 , à savoir les $X^{0,k} := (\sum_{j=0}^k \frac{(w^0)^j}{j!}) Y^0$ définis pour $k \geq 0$. Ceci fournit $\bar{\partial} X^0 = 0$ au sens des distributions, *i.e.* pour toute ψ du type correct, $\int_{(X \setminus D) \times I} (X_t^0, \bar{\partial} \psi(t)) \text{vol}^\omega dt = 0$. De ceci on passe à l'assertion selon laquelle sur presque toute tranche $(X \setminus D) \times \{t\}$, $\bar{\partial} X_t^0 = 0$; puisque l'espace des champs de vecteurs holomorphes L_ω^2 est réduit à 0 par le lemme 5.2, $X_t^0 = 0$ pour ces t . Or dans un ouvert de coordonnées, $\partial \dot{v}_t^\varepsilon = \sum_{j,k=1}^m (g_t^\varepsilon)_{j\bar{k}} (X_t^\varepsilon)^{\bar{k}} dz_j$. Le membre de droite tend donc faiblement vers 0, car g_t^ε est bornée indépendamment de ε . Ainsi $d\dot{v}_t^\varepsilon$ tend faiblement vers 0 dans L_ω^2 ; d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ et en tout point, $\bar{\partial}(v_1 - v_0) = \bar{\partial} v_1^\varepsilon - \bar{\partial} v_0^\varepsilon = \int_0^1 \bar{\partial} \dot{v}_t^\varepsilon dt$, d'où pour toute $(2m-1)$ -forme ψ à support compact dans $X \setminus D$,

$$(d(v_1 - v_0), \psi) = \int_0^1 d\dot{v}_t^\varepsilon \wedge \psi dt = \int_{(X \setminus D) \times I} d\dot{v}_t^\varepsilon \wedge \tilde{\psi} dt = \langle d\dot{v}_t^\varepsilon, \tilde{\psi} \rangle,$$

où $\tilde{\psi}(\cdot, t) = \psi$ pour tout $t \in [0, 1]$. En faisant tendre ε vers 0, ceci nous dit que $d(v_1 - v_0)$ est nulle au sens des distributions, et est donc identiquement nulle car localement lisse.

Ceci implique $v_0 = v_1$ à une constante près, d'où $\omega_0 = \omega_1$ (et $v_0 = v_1$ par normalisation). On renvoie le lecteur à [Che00, p. 229-231] pour les détails. \square

Existence de métriques à courbure scalaire constante : contrainte topologique

Où l'on démontre une contrainte topologique sur (X, D) lorsque \mathcal{PM}_Ω contient une métrique à courbure scalaire constante.

6.1 Énoncé du résultat

6.1.1 Courbures scalaires moyennes

On se réfère toujours au chapitre 1 pour la terminologie concernant les métriques kählériennes de type Poincaré. Rappelons toutefois les faits suivants concernant la courbure scalaire de telles métriques.

En sus de leur propriété de complétude et de volume fini, les métriques de \mathcal{PM}_Ω ont aussi en commun d'avoir leur forme de Ricci dans $-2\pi c_1(K_X[D])$ (en tant que classe de cohomologie L^2 , proposition 1.6). Par conséquent, elles ont toutes même courbure scalaire moyenne ; on note

$$\bar{s} = -4\pi m \frac{c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-1}}{[\omega_0]^m}$$

cette quantité.

On observe finalement lorsque D est lisse que la métrique modèle ω (de la section 1.1) induit pour tout j une forme de Kähler $\omega|_{D_j}$ sur D_j . La classe de cette forme induite est $[\omega_0|_{D_j}]$, ce qui ne dépend que de Ω ; toute forme de Kähler sur D_j est de plus à forme de Ricci dans $-2\pi c_1(K_{D_j})$, que l'on peut réécrire comme $-2\pi c_1(K_X[D]|_{D_j})$, d'après la formule d'adjonction, et le fait que sur D_j , D_k est trivial pour tout $k \neq j$. Toute métrique de $[\omega_0|_{D_j}]$, en particulier $\omega|_{D_j}$, a ainsi pour courbure scalaire moyenne

$$\bar{s}_{D_j} := -4\pi(m-1) \frac{c_1(K_X[D]|_{D_j})[\omega_0|_{D_j}]^{m-2}}{[\omega_0|_{D_j}]^{m-1}}. \quad (6.1)$$

Lorsque D n'est plus lisse, et que D_j croise d'autres composantes, la métrique induite sur $D_j \setminus \bigcup_{j' \neq j} D_{j'}$ est de type Poincaré ; sa forme de Ricci est donc de classe $-2\pi c_1(K_{D_j}[D_j \cap$

$\sum_{j' \neq j} D_{j'}]$, ce qui à nouveau se réécrit sous la forme $-2\pi c_1(K_X[D]|_{D_j})$; la courbure scalaire moyenne que l'on obtient pour la forme induite par ω est donc encore donnée par la formule (6.1); on conserve la notation \bar{s}_{D_j} . Finalement, on associe dans les deux cas ce nombre à $[\omega_0|_{D_j}]$ (cas D lisse) ou $\mathcal{PM}_{[\omega_0|_{D_j}]}$ (cas où D a des croisements); on parle de *courbure scalaire moyenne associée à cette classe*.

6.1.2 Obstruction topologique

Nous pouvons à présent énoncer le principal résultat de ce chapitre :

Théorème 6.1. *Soit \bar{s}_{D_j} la courbure scalaire moyenne associée à la classe (éventuellement de type Poincaré) de $\omega|_{D_j}$ pour $j = 1, \dots, N$ comme ci-dessus. On suppose qu'il existe une métrique kählérienne de type Poincaré et de classe $\Omega = [\omega_0]$ (au sens de la définition 1.3) à courbure scalaire constante sur $X \setminus D$. Alors pour tout j indexant une composante irréductible de D , $\bar{s} < \bar{s}_{D_j}$. Autrement dit, on a pour tout j l'inégalité*

$$m \frac{c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-1}}{[\omega_0]^m} > (m-1) \frac{c_1([D_j])c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-2}}{c_1([D_j])[\omega_0]^{m-1}}$$

en termes de classes définies sur X .

Ce théorème est tout à fait propre aux métriques kählériennes de type Poincaré, car la contrainte qu'il stipule est vide en l'absence de diviseur. Il représente de plus une première étape vers la notion de K-stabilité que G. Székelyhidi [Szé06] suggère pour les paires (X, D) , formulée de sorte à tenir compte d'un tel comportement de type Poincaré; nous expliquons ces liens dans la prochaine section, premier paragraphe. Notons toutefois dès à présent que le contenu du théorème est assez intuitif, et peut simplement se comprendre comme une contribution négative à la courbure scalaire de la composante de la métrique normale au diviseur, dont le comportement se rapproche de celui de la métrique d'Einstein à courbure de Ricci négative sur le disque épointé de Poincaré.

Apportons le commentaire supplémentaire suivant au choix fait dans la définition 1.3 pour l'espace des potentiels. Nous avons déjà commenté les contrôles L^∞ requis sur les dérivées d'ordre au moins 1, choix gouverné par des raisons analytiques; nous avons aussi expliqué pourquoi nous ne demandons pas des asymptotiques plus précises, ce qui nous permettrait par exemple d'avoir un théorème d'unicité assez large. Dans la même direction, ce chapitre illustre l'intérêt d'éviter, tout du moins *a priori*, la situation asymptotiquement produit. En effet, on voit dans la section 6.2, paragraphe 6.2.2, que l'existence sur $X \setminus D$ d'une métrique de type Poincaré asymptotiquement produit et à courbure scalaire constante implique l'existence sur D d'une métrique kählérienne à courbure scalaire constante, dont résulte la K-stabilité de D , du moins si D est lisse (voir le commentaire suivant la conjecture 2 de l'introduction); il n'est pas clair néanmoins que cette stabilité soit impliquée par la K-stabilité de (X, D) . On évite donc de supposer que D est K-stable en travaillant avec des métriques ayant un comportement assez libre près du diviseur. Il s'ensuit que le théorème 6.1 n'est plus une conséquence immédiate des hypothèses, comme il le serait si les métriques étaient supposées asymptotiquement produits; nous regardons ce point plus en détail dans le paragraphe indiqué.

Précisons enfin que le théorème 6.1 est une conséquence de contraintes sur la croissance du potentiel d'une métrique de type Poincaré en général, établies dans les propositions 6.4 et 6.5 de ce chapitre, combinées à la propriété de courbure scalaire constante. On a besoin d'une description convenable de X près de D pour énoncer et démontrer ces propositions, *via* la fibration décrite au paragraphe 1.4.4, que nous rappelons dans la section 6.3; nous

énonçons et démontrons les propositions, et en déduisons le théorème 6.1, dans la section 6.4 dans le cas où D est lisse. Le cas général est traité à la section 6.5.

6.2 Liens avec les suggestions de Székelyhidi

6.2.1 K-stabilité d'un triplet (X, D, L)

Dans [Szé06, §3.1.2], G. Székelyhidi considère des (une sous-classe de) métriques kählériennes de type Poincaré résultant d'une polarisation $L \rightarrow X$, la classe des *métriques asymptotiquement hyperboliques*. Il suggère alors la conjecture suivante, qui étend celle de Yau-Tian-Donaldson du cas compact (conjecture 2, cf. introduction) :

Conjecture 6.2 (Székelyhidi). *On suppose D lisse. Alors le triplet (X, D, L) est K-stable si et seulement s'il existe sur $X \setminus D$ une métrique asymptotiquement hyperbolique à courbure scalaire constante dans la classe de polarisation.*

On donne des précisions sur les métriques asymptotiquement hyperboliques au paragraphe suivant. Commentons pour l'instant la notion de K-stabilité pour les triplets (X, D, L) ; par contraste avec le cas compact, cette K-stabilité requiert deux types de conditions :

1. pour toute *configuration-test* de (X, D, L) , l'*invariant de Futaki* est positif, et s'annule uniquement pour les configurations produits ;
2. à toute configuration-test sont attachés des nombres $c_0 \neq 0$, c_1 , $\alpha_1 \neq 0$ et α_2 ; on demande l'inégalité :

$$\frac{c_1}{c_0} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (6.2)$$

La condition 1 est l'analogie de la condition de K-stabilité du cas compact. Disons brièvement que cette condition, dans le cas compact comme dans le cas asymptotiquement hyperbolique, généralise l'obstruction liée à l'*invariant de Futaki* en l'absence de champ de vecteurs holomorphe sur la variété ; nous renvoyons le lecteur à [Gau, ch. 4] au sujet de l'invariant de Futaki, et à l'article [Don11] pour la définition précise de la K-stabilité dans le cas compact.

D'autre part, on ne dispose pas d'une telle analogie pour la condition 2 ; elle est formulée de sorte à garantir que les métriques en jeu ont bien un « comportement Poincaré » près du diviseur. C'est cette condition que nous regardons plus en détail dans les lignes à venir.

Mentionnons ici que nous ne donnerons pas la définition précise des configurations-test, de même que nous n'utiliserons pas d'invariants de Futaki ; nous renvoyons le lecteur à [Szé06] pour les détails sur ces objets dans le cas asymptotiquement hyperbolique. Il nous suffit en effet de savoir que $(X \times \mathbb{C}, D \times \mathbb{C})$, au-dessus de (X, D) , polarisée par le tiré-en-arrière de L pour la projection évidente, avec action triviale de \mathbb{C}^* , est une configuration-test ; c'est en effet la configuration-test triviale.

À cet égard, nous précisons la valeurs des nombres c_0 , c_1 , α_1 et α_2 , calculés pour cette configuration triviale. Par définition, c_0 et c_1 sont donnés par

$$\frac{d_k + \tilde{d}_k}{2} =: c_0 k^m + c_1 k^{m-1} + O(k^{m-2}),$$

où d_k (*resp.* \tilde{d}_k) est la dimension de $H^0(X, L^k)$ (*resp.* celle de $H^0(X, L^k \otimes \mathcal{O}(-D))$).

Des calculs similaires sont utilisés pour définir α_1 et α_2 , qui vérifient la relation asymptotique :

$$\dim H^0(D, L^k|_D) =: \alpha_1 k^{m-1} + \alpha_2 k^{m-2} + O(k^{m-3})$$

Il n'est pas difficile de calculer ces quatre nombres pour la configuration triviale :

Proposition 6.3. *On considère la configuration-test triviale pour le triplet (X, D, L) . Alors :*

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{c_1(L)^m}{m!}, & c_1 &= -\frac{c_1(L)^{m-1} \cdot c_1(K_X) + c_1(L|_D)^{m-1}}{2(m-1)!}, \\ \alpha_1 &= \frac{c_1(L|_D)^{m-1}}{(m-1)!}, & \alpha_2 &= -\frac{c_1(L|_D)^{m-2} \cdot c_1(K_D)}{2(m-2)!}. \end{aligned}$$

Si l'on prend à présent $[\omega_0] = 2\pi c_1(L)$ dans ce cas, on a alors $[\omega_0|_D] = 2\pi c_1(L|_D)$, soit $[\omega_0|_D]^{m-1} = [\omega_0]^{m-1} \cdot c_1([D])$. Un calcul direct montre que l'inégalité $\frac{c_1}{c_0} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ équivaut à $m \frac{c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-1}}{[\omega_0]^m} > (m-1) \frac{c_1(K_D)[\omega_0|_D]^{m-2}}{[\omega_0|_D]^{m-1}}$, ce qui est l'inégalité énoncée dans le théorème 6.1 lorsque D est réduit à une composante. De plus, si D est lisse et compte plusieurs composantes, l'inégalité (6.2) est obtenue comme moyenne des inégalités du théorème 6.1.

En un mot, le théorème 6.1 est une première étape vers l'implication « l'existence de métriques asymptotiquement hyperboliques implique la K-stabilité du triplet (X, D, L) ».

Démonstration de la proposition 6.3. D'après le théorème de Riemann-Roch, pour k tendant vers $+\infty$,

$$d_k = \frac{c_1(L)^m}{m!} k^m - \frac{c_1(L)^{m-1} \cdot c_1(K_X)}{2(m-1)!} k^{m-1} + O(k^{m-2}),$$

et

$$h^0(D, L^k|_D) = \frac{c_1(L|_D)^{m-1}}{(m-1)!} k^{m-1} - \frac{c_1(L|_D)^{m-2} \cdot c_1(K_D)}{2(m-2)!} k^{m-2} + O(k^{m-3}), \quad (6.3)$$

donc $\alpha_1 = \frac{c_1(L|_D)^{m-1}}{(m-1)!}$ et $\alpha_2 = -\frac{c_1(L|_D)^{m-2} \cdot c_1(K_D)}{2(m-2)!}$.

Reste à calculer \tilde{d}_k ; or pour k assez grand $H^1(X, L^k \otimes \mathcal{O}(-D)) = 0$ par amplitude de L , et par conséquent la suite courte

$$0 \longrightarrow H^0(X, L^k \otimes \mathcal{O}(-D)) \longrightarrow H^0(X, L^k) \longrightarrow H^0(D, L^k|_D) \longrightarrow 0$$

est exacte, d'où : $\tilde{d}_k = d_k - h^0(D, L^k|_D)$. Finalement, par (6.3) on a $c_0 = \frac{c_1(L)^m}{m!}$, et $c_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{c_1(L)^{m-1} \cdot c_1(K_X)}{(m-1)!} + \frac{c_1(L|_D)^{m-1}}{(m-1)!} \right)$. \square

6.2.2 Métriques kählériennes asymptotiquement hyperboliques

Notre prochain commentaire sur la conjecture de Székelyhidi concerne plus particulièrement la classe des métriques asymptotiquement hyperboliques près de D . Donnons tout d'abord la définition précise de ces métriques, empruntée à [Szé06].

On considère un ouvert U de coordonnées holomorphes $\{z^1, \dots, z^m\}$ voisinage d'un point de D (supposé lisse) tel que $D = \{z^1 = 0\}$ dans U . Une métrique kählérienne asymptotiquement hyperbolique g ressemble alors à une métrique produit

$$\hat{g}_U = K \frac{|dz^1|^2}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)} + h_U \quad (6.4)$$

à tout ordre, au sens où $|\nabla_{\hat{g}_U}^k (g - \hat{g}_U)|_{\hat{g}_U} = o(1)$ près de D pour tout $k \geq 0$. Ici K est une fonction strictement positive lisse sur X , et h_U une extension lisse d'une métrique sur $D|_U$.

Il est ainsi clair que les métriques asymptotiquement hyperboliques sont de type Poincaré ; elles forment en réalité une sous-classe assez spécifique, car leur définition implique que :

1. K est constante sur D , et peut donc être choisie constante près de D , si l'on inclut l'erreur faite dans le $o(1)$ ci-dessus ;
2. si g est à courbure scalaire constante, il en va de même pour la métrique $g|_D$ qu'elle induit sur D , et $\mathbf{s}(g) < \mathbf{s}(g|_D)$.

On démontre le fait 1. en regardant la forme de Kähler de ω_g de g ; en effet, dans les coordonnées utilisées ci-dessus, pour tous $j, k \in \{2, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} \omega_{1\bar{1}} &= \frac{K + o(1)}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)}, & \omega_{1\bar{k}} &= o\left(\frac{1}{|z^1| |\log |z^1||}\right), \\ \omega_{j\bar{1}} &= o\left(\frac{1}{|z^1| |\log |z^1||}\right), & \text{et} & \quad \omega_{j\bar{k}} &= (\omega_{h_U})_{j\bar{k}} + o(1) \end{aligned}$$

à tout ordre, par référence à une métrique asymptotiquement hyperbolique (ou de type Poincaré, en vertu de bornes mutuelles). Or comme g est kählérienne, on a pour tout $j \in \{2, \dots, m\}$ que $\partial_{z^j} \omega_{1\bar{1}} = \partial_{z^1} \omega_{j\bar{1}}$, et ces derniers termes sont des $o\left(\frac{1}{|z^1|^2 |\log |z^1||^2}\right)$, d'après les contrôles évoqués. Comme $\partial_{z^j} \omega_{1\bar{1}} = \frac{\partial_{z^j} K + o(1)}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)}$, on a donc $\partial_{z^j} K \equiv 0$ sur $D \cap U$ (K est lisse sur X). Ainsi K est constante sur D ; comme de telles fonctions peuvent dépendre de l'ouvert U mais doivent se recoller, on en déduit qu'elles sont constantes et égales entre elles sur chaque composante de D .

On peut reformuler ce point comme suit : sur U comme ci-dessus, $\omega_g = \frac{A idz^1 \wedge d\bar{z}^1}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)} + \omega_{g|_D} + o(1)$ pour une certaine constante $A > 0$ indépendante de U , la perturbation étant entendu à tout ordre en métrique asymptotiquement hyperbolique.

Le fait 2 découle immédiatement de cette dernière observation. On a en effet $\omega_g^m = m \frac{A idz^1 \wedge d\bar{z}^1}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)} \wedge (\omega_{g|_D})^{m-1} + o(1)$. La forme de Ricci ϱ_g de g est donc donnée par

$$\varrho_{g|_D} - i\partial\bar{\partial} \log\left(\frac{A}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)}\right) + o(1) = \varrho_{g|_D} - \frac{idz^1 \wedge d\bar{z}^1}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)} + o(1).$$

Or $\mathbf{s}(g)\omega_g^m = 2m\varrho_g \wedge \omega_g^{m-1}$, ce qui se développe sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(g)\omega_g^m &= m \left[2(m-1)\varrho_{g|_D} \wedge \omega_{g|_D}^{m-2} - 2A^{-1}\omega_{g|_D}^{m-1} \right] \wedge \frac{A idz^1 \wedge d\bar{z}^1}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)} + o(1) \\ &= m(\mathbf{s}(g|_D) - 2A^{-1})\omega_{g|_D}^{m-1} \wedge \frac{A idz^1 \wedge d\bar{z}^1}{|z^1|^2 \log^2(|z^1|^2)} + o(1), \end{aligned}$$

soit $\mathbf{s}(g) = \mathbf{s}(g|_D) - 2A^{-1} + o(1)$. Si donc $\mathbf{s}(g)$ est constante, $\mathbf{s}(g|_D)$ l'est également, le $o(1)$ est inutile, $\mathbf{s}(g|_D) > \mathbf{s}(g)$ et $A = \frac{2}{\mathbf{s}(g|_D) - \mathbf{s}(g)}$.

Ces calculs illustrent l'interprétation intuitive du théorème 6.1. De telles manipulations ne sont bien entendu plus possibles en l'absence d'asymptotiques similaires à celles venant de la définition des métriques asymptotiquement hyperboliques, ce pourquoi nous développons dans ce qui suit quelques techniques dans le but d'obtenir notre résultat dans la classe plus générale des métriques kählériennes de type Poincaré.

6.3 Fibration près du diviseur : rappel

On suppose dans cette partie et la suivante que D est lisse ; on fait l'hypothèse supplémentaire pour commencer que D est réduit à une composante (lisse) ; on désigne par σ une section définissant D . On suppose également que la constante A_1 dans l'équation (1.2) vaut 2, de sorte que $\omega = \omega_0 - dd^c u$.

On reprend la fibration sur un voisinage tubulaire \mathcal{N} de D , identifié à un voisinage de la section nulle dans son fibré normal, décrite au paragraphe 1.4.4. On rappelle brièvement quelques notations ; l'action de S^1 sur le fibré normal, donc sur le voisinage tubulaire, laisse invariante la projection $p : \mathcal{N} \rightarrow D$, et on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & \mathcal{N} \setminus D \\ & & \downarrow q=(t,p) \\ & & [A, +\infty) \times D \end{array}$$

où t désigne une fonction invariante sous l'action de cercle, égale à u modulo un terme d'erreur qui est un $O(\frac{1}{|\log|\sigma||})$ (soit encore $O(e^{-u})$, ou $O(e^{-t})$) près de D .

On a enfin une 1-forme de connexion η associée à l'action de cercle, vérifiant la propriété suivante : si l'on considère autour d'un point de D un ouvert de coordonnées holomorphes $(z^1 = re^{i\theta}, \dots, z^m)$ où D est donné par z^1 , on a $\eta = d\theta$ modulo un terme qui est un $O(1)$ ainsi que toutes ses dérivées pour la métrique de référence ω . Si l'on suppose donc que g désigne la métrique riemannienne associée à ω , on a :

$$g = dt^2 + 4e^{-2t}\eta^2 + p^*g_D + O(e^{-t})$$

où g_D est la métrique associée à $\omega_0|_D$, avec le $O(e^{-t})$ entendu à tout ordre en métrique de type Poincaré ; ceci découle de la proposition 1.2. Ainsi par exemple, $Jdt = 2e^{-t}\eta + O(e^{-t})$, ce $O(e^{-t})$ compris dans le même sens que précédemment.

On rappelle l'application suivante de la fibration (1.8). Pour $f \in C^{k,\alpha}(X \setminus D)$, on a la décomposition

$$f = (\Pi_0 f)(t, z) + \Pi_\perp f = f_0(t) + f_1(t, z) + \Pi_\perp f$$

où $z = p(x)$, avec $f_0 + f_1$ la partie S^1 -invariante de f , et f_1 la partie de moyenne nulle sur D pour $g|_D$ de $f_0 + f_1$.

On se souvient que, d'après la décomposition (1.10) et par définition de $C^{k,\alpha}(X \setminus D)$, les fibres S^1 ayant leur longueur en e^{-t} pour g ,

$$\mathcal{D}_{\ell, j-\ell}(\Pi_\perp f) = O(e^{-(k-\ell+\alpha)t})$$

si $j \leq k$, dès que $\mathcal{D}_{\ell, j-\ell}$ désigne un produit dont $(j - \ell)$ facteurs sont $e^t \partial_\theta$, et les ℓ facteurs restants sont dans $\{r|\log r|\partial_r, \partial_{z^\beta}, \bar{\partial}_{z^\beta}, \beta \geq 2\}$, avec $r = |z^1|$ (dans un ouvert de coordonnées comme précédemment).

Apportons enfin la précision suivante : si J_D est la structure complexe de D , on a que p^*J_D diffère de J restreint à $\bigoplus_{\beta \geq 2} (\mathbb{C} \frac{\partial}{\partial z^\beta} \oplus \mathbb{C} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta})$ d'un $O(e^{-t})$ à tout ordre. On en déduit les formules de dérivation suivantes, pour $f \in C^{k,\alpha}(X \setminus D)$, $k \geq 2$, $\alpha \in (0, 1)$,

$$df = (\partial_t f_0(t) + \partial_t f_1(t, z))dt + d_D f_1(t, z) + O(e^{-(k-1+\alpha)t}),$$

$$d^c f = Jdf = 2(\partial_t f_0(t) + \partial_t f_1(t, z))e^{-t}\eta + d_D^c f_1(t, z) + O(e^{-t}) \quad (6.5)$$

avec $d_D^c = p^*(J_D d)$, et

$$\begin{aligned} dd^c f = & 2(\partial_t^2 f_0(t) + \partial_t^2 f_1(t, z) - \partial_t f_0(t) - \partial_t f_1(t, z))e^{-t} dt \wedge \eta \\ & + 2e^{-t} d_D(\partial_t f_0(t) + \partial_t f_1(t, z)) \wedge \eta + dt \wedge d_D^c \partial_t f_1(t, z) \\ & + dd_D^c f_1(t, z) + O(e^{-t}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

où $dd_D^c = p^*(dJ_D d)$.

Si l'on remplace enfin $f \in C^{k, \alpha}(X \setminus D)$ par un potentiel φ d'une métrique de \mathcal{PM}_Ω , calculé par rapport à ω , la décomposition (1.10) et les estimées (6.5) et (6.6) s'appliquent encore, à ceci près que $\varphi_0(t) = O(t)$, et $\partial_t^j \varphi_0 = O(1)$ pour tout $j \geq 1$.

Cette description se transpose aisément dans le cas où le nombre N de composantes disjointes de D est strictement plus grand que 1, en travaillant séparément autour de chaque composante, de manière assez rapprochée pour ne pas être gêné par les autres composantes. Dans ce cas, on rajoute aux objets définis ci-dessus un indice j (on aura donc $t_j, \eta_j, \varphi_{0,j}$ et ainsi de suite) pour spécifier au besoin la composante de D à laquelle ils se réfèrent.

6.4 Deux propositions-clé

6.4.1 Énoncés des propositions, et preuve du théorème 6.1 (diviseur lisse)

On suppose toujours dans cette partie que D est lisse. On en vient à présent aux énoncés des deux propositions dont le théorème 6.1 est un corollaire, *via* l'argument : en supposant que $\omega_\varphi := \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ est à courbure scalaire constante (donc égale à $\bar{s} = -4\pi m \frac{c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-1}}{[\omega_0]^m}$ en tout point), on trouve des contraintes sur φ qui se traduisent en contraintes sur \bar{s} . Dans ce but, on énonce :

Proposition 6.4 (D lisse). *On suppose que $\varphi \in \widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$. On fixe $j \in \{1, \dots, N\}$, et on considère les compacts $\{t_j \leq s\} \subset X \setminus D_j$. Alors $\bigcup_{s \geq 0} \{t_j \leq s\} = X \setminus D_j$, les intégrales $\int_{X \setminus D} e^{t_j} \omega_\varphi^m$ tendent vers $+\infty$, et :*

$$\int_{\{t_j \leq s\}} e^{t_j} \omega_\varphi^m = 2\pi m! \text{Vol}(D_j)(2s - \varphi_{0,j}(s)) + O(1) \quad (6.7)$$

où s tend vers $+\infty$, pour $j = 1, \dots, N$.

On énonce également :

Proposition 6.5 (D lisse). *On suppose que $\varphi \in \widetilde{\mathcal{PM}}_\Omega$; soit \mathbf{s}_φ la courbure scalaire de $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$. Alors :*

$$\int_{\{t_j \leq s\}} \mathbf{s}_\varphi e^{t_j} \omega_\varphi^m = 2\pi m! \text{Vol}(D_j)(2(\bar{s}_{D_j} - 1)s - \bar{s}_{D_j} \varphi_{0,j}(s)) + O(1) \quad (6.8)$$

quand s tend vers $+\infty$, pour $j = 1, \dots, N$.

Les démonstrations sont reportées à la section 6.4.2, car nous expliquons à présent pourquoi les propositions 6.4 et 6.5 impliquent le théorème 6.1 lorsque D est lisse.

Démonstration du théorème 6.1 d'après les propositions 6.4 et 6.5 (cas D lisse). On suppose que $\omega_\varphi = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ est à courbure scalaire constante. On fixe $j \in \{1, \dots, N\}$. On compare les équations (6.7) et (6.8), après avoir multiplié la première par \bar{s} (qui est égale à s_φ en tout point de $X \setminus D$). Il vient, pour s tendant vers $+\infty$:

$$2(\bar{s}_j - \bar{s} - 1)s = (\bar{s}_j - \bar{s})\varphi_{0,j}(s) + O(1),$$

ou encore, de manière plus explicite, $(\bar{s}_j - \bar{s})(2s - \varphi_{0,j}(s)) = 2s + O(1)$ (dorénavant, \bar{s}_j désigne \bar{s}_{D_j}). L'égalité $\bar{s}_j = \bar{s}$, *i.e.* $2s = O(1)$, n'est pas tenable. On en déduit que $\bar{s} \neq \bar{s}_j$, et $2s - \varphi_{0,j}(s) = \frac{2}{\bar{s}_j - \bar{s}}s + O(1)$. Dans le but à présent de déterminer le signe de $\bar{s}_j - \bar{s}$, on utilise la divergence de $\int_{X \setminus D} e^{t_j} \omega_\varphi^m$. Comme $\int_{X \setminus D} e^{t_j} \omega_\varphi^m$ est la limite croissante de $\int_{\{t_j \leq s\}} e^{t_j} \omega_\varphi^m$, on sait d'après les asymptotiques de (6.7) que $(2s - \varphi_{0,j}(s))$ tend vers $+\infty$ avec s . Ceci ne serait pas compatible avec une inégalité $\bar{s} > \bar{s}_j$, et par suite $\bar{s} < \bar{s}_j$.

On a démontré l'inégalité $m \frac{c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-1}}{[\omega_0]^m} > (m-1) \frac{c_1(K_{D_j})[\omega_0|_{D_j}]^{m-2}}{[\omega_0|_{D_j}]^{m-1}}$. Pour parvenir à l'inégalité cohomologique du théorème, on utilise l'assertion selon laquelle, étant données $(m-1)$ classes $[\alpha_1], \dots, [\alpha_{m-1}]$ de représentants $(1,1)$ $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ sur X , le cup-produit $[\alpha_1] \cdots [\alpha_{m-1}] c_1([D_j])$ est égal à $[\alpha_1|_{D_j}] \cdots [\alpha_{m-1}|_{D_j}]$ (formule de Lelong). On conclut par la formule d'adjonction $K_X[D]|_{D_j} \approx K_X[D_j]|_{D_j} \approx K_{D_j}$ (les $[D_k]$, $k \neq j$, étant triviaux sur D_j). \square

Remarque 6.6. *Cette démonstration donne également une première description du potentiel φ d'une métrique de type Poincaré à courbure scalaire constante ; en un mot, on a $\varphi - \sum_{j=1}^N a_j t_j \in C^\infty(X \setminus D)$, où $a_j = 2 \frac{\bar{s}_j - \bar{s} - 1}{\bar{s}_j - \bar{s}}$ pour tout j . Autrement dit, on passe directement des termes en « log log » (les t_j) aux termes bornés à tout ordre dans le développement d'un tel potentiel, alors que des termes intermédiaires comme $t_j^{1/2}$ sont a priori autorisés à contribuer à des potentiels de métriques de type Poincaré générales.*

6.4.2 Démonstrations des propositions 6.4 et 6.5

Démonstration de la proposition 6.4. On fixe $j \in \{1, \dots, N\}$. L'exhaustion $\bigcup_{s \geq 0} \{t_j \leq s\} = X \setminus D_j$ est claire, résultant de la construction des t_j , et plus précisément de l'estimation $t_j = u_j + o(1)$, où l'on rappelle que $u_j = \log(-\log(|\sigma_j|^2))$ et que $D_j = \{\sigma_j = 0\}$ dans X .

Regardons la divergence de $\int_{X \setminus D} e^{t_j} \omega_\varphi^m$. Comme $e^{t_j} \omega_\varphi^m$ est mutuellement bornée avec la forme volume du modèle ω , c'est-à-dire $\frac{1}{m!} \omega^m$, près de chaque D_k différent de D_j , et comme ω est à volume fini sur $X \setminus D$, l'intégration près de ces D_k ne contribue pas à la divergence de notre intégrale. D'autre part, près de D_j , $e^{t_j} \omega_\varphi^m$ est mutuellement bornée avec $e^{t_j} \omega^m$, se comportant elle-même comme la forme volume cylindrique $dt_j \wedge \eta_j \wedge p_j^*(\omega|_{D_j})^{m-1}$, de volume infini, ce qui nous permet d'établir la divergence voulue

On démontre maintenant la formule (6.7). Posons $\Theta = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} \wedge \omega_\varphi + \dots + \omega_\varphi^{m-1}$, de sorte que $\omega_\varphi^m = \omega^{m-1} + \frac{1}{2} dd^c \varphi \wedge \Theta$, et que Θ soit une $(m-1, m-1)$ -forme fermée. L'indice $j \in \{1, \dots, N\}$ est fixé à nouveau. Par le théorème de Stokes, pour s tendant vers $+\infty$ (on suppose que s est assez grand pour que $D_k \subset \{t_j \leq s\}$ si $k \neq j$), on a :

$$\int_{\{t_j \leq s\}} e^{t_j} \omega_\varphi^m = \int_{\{t_j \leq s\}} e^{t_j} \omega^m + \frac{1}{2} \int_{\{t_j = s\}} e^{t_j} d^c \varphi \wedge \Theta - \frac{1}{2} \int_{\{t_j \leq s\}} d(e^{t_j}) \wedge d^c \varphi \wedge \Theta.$$

Simplifions les notations en évacuant les indices j ; ceci ne provoque pas de confusion, puisque nous sommes précisément en train de traiter des intégrales près de D_j . Or comme

Θ est de type $(m-1, m-1)$, $d(e^t) \wedge d^c \varphi \wedge \Theta = d\varphi \wedge d^c(e^t) \wedge \Theta$, et par Stokes à nouveau,

$$\int_{\{t \leq s\}} d\varphi \wedge d^c(e^t) \wedge \Theta = \int_{\{t=s\}} \varphi d^c(e^t) \wedge \Theta - \int_{\{t \leq s\}} \varphi dd^c(e^t) \wedge \Theta,$$

d'où :

$$\int_{\{t \leq s\}} e^t \omega_\varphi^m = \int_{\{t \leq s\}} e^t \omega^m + \frac{1}{2} \int_{\{t \leq s\}} \varphi dd^c(e^t) \wedge \Theta + \frac{e^s}{2} \int_{\{t=s\}} (d^c \varphi - \varphi d^c t) \wedge \Theta. \quad (6.9)$$

Pour parvenir à (6.7), analysons les différents termes de cette somme. Tout d'abord, $e^t = \rho_j + O(1)$ à tout ordre, d'où $dd^c(e^t) = dd^c \rho_j + O(1)$; or $dd^c \rho_j$ est bornée (pour la métrique lisse ω_0 sur X , et donc pour ω , de type Poincaré) puisqu'elle s'étend de manière lisse à travers D . À cet égard, comme Θ est elle-même dominée ω^{m-1} et que φ est L^1 pour ω , on en déduit que $\int_{\{t \leq s\}} \varphi dd^c(e^t) \wedge \Theta$ converge lorsque s tend vers l'infini, et est en particulier bornée.

On regarde maintenant $\int_{\{t=s\}} d^c \varphi \wedge \Theta$. D'après les formules de dérivation (6.5) et (6.6), comme $dt = 0$ sur $\{t = s\}$, on a sur cette tranche

$$\begin{cases} \omega = p^* \omega_D + O(e^{-s}) \\ \omega_\varphi = p^*(\omega_{D_j} + dd_{D_j}^c \varphi_1) + 2d_{D_j} \dot{\varphi}_1 \wedge e^{-s} \eta + O(e^{-s}) \\ d^c \varphi = 2(\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1) e^{-s} \eta + d_{D_j}^c \varphi_1 + O(e^{-s}), \end{cases}$$

où $\dot{\varphi}_t$ désigne ∂_t , et le O est au sens des métriques de type Poincaré. La notation $d_{D_j} \dot{\varphi}_1$ signifie $d(\dot{\varphi}_1|_{t=s})$, ou plus exactement la tirée-en-arrière par p de la différentielle de la fonction induite sur D_j par $\dot{\varphi}_1$ en fixant $t = s$; de même $d_{D_j}^c \varphi_1$ désigne la tirée-en-arrière de $J_{D_j} d(\varphi_1|_{t=s})$.

On obtient ainsi sur $\{t = s\}$:

$$\begin{aligned} d^c \varphi \wedge \Theta &= 2(\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1) e^{-s} \eta \wedge p^*(\omega_{D_j}^{m-1} + \dots + (\omega_{D_j} + idd^c \varphi_1)^{m-1}) \\ &\quad - 2 \sum_{k=0}^{m-1} k e^{-s} \eta \wedge d_{D_j} \dot{\varphi}_1 \wedge d_{D_j}^c \varphi_1 \wedge p^*((\omega_{D_j} + dd_{D_j}^c \varphi_1)^{k-1} \wedge \omega_{D_j}^{m-1-k}) \\ &\quad + O(e^{-s}). \end{aligned}$$

Notons que ce dernier $O(e^{-s})$ est une $(2m-1)$ -forme sur $\{t = s\}$; on pourrait donc l'écrire sous la forme $\varepsilon(x) e^{-s} \eta \wedge (p^* \omega_{D_j})^{m-1}$, avec $\varepsilon(x) = O(e^{-t(x)})$.

À un $O(e^{-s})$ près, $d^c \varphi \wedge \Theta$ est S^1 -invariant, et comme les fibres S^1 sont de longueur 2π pour η , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\{t=s\}} d^c \varphi \wedge \Theta &= 4\pi e^{-s} \left(\int_{D_j} (\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1)(s, \cdot) (\omega_{D_j}^{m-1} + \dots + (\omega_{D_j} + idd^c \varphi_1)^{m-1}) \right. \\ &\quad \left. - \int_{D_j} d\dot{\varphi}_1(s, \cdot) \wedge d^c \varphi_1(s, \cdot) \wedge \Xi(\varphi_1(s, \cdot)) + O(e^{-s}) \right), \end{aligned}$$

où $\Xi(u) = \sum_{k=1}^{m-1} k (\omega_{D_j} + dd^c u)^{k-1} \wedge \omega_{D_j}^{m-1-k}$ pour tout fonction lisse u sur D_j .

Au vu :

- de la dépendance en s seulement de φ_0 ;
- de l'égalité

$$\int_{D_j} (\omega_{D_j} + dd_{D_j}^c \varphi_1)^{m-1-k} \wedge \omega_{D_j}^k = [\omega_{D_j}]^{m-1} =: (m-1)! \text{Vol}(D_j)$$

pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$;

– du caractère borné de φ_1 et de sa différentielle,
il vient :

$$\int_{\{t=s\}} d^c \varphi \wedge \Theta = 4\pi e^{-s} m! \text{Vol}(D_j) \varphi_0(s) + O(e^{-s}), \quad (6.10)$$

soit : $\frac{e^s}{2} \int_{\{t=s\}} d^c \varphi \wedge \Theta = 2\pi \text{Vol}(D_j) m! \varphi_0(s) + O(1) = O(1)$.

En procédant de la même manière, et en posant $\Upsilon(u) = \omega_{D_j}^{m-1} + \dots + (\omega_{D_j} + dd^c u)^{m-1}$ pour toute u fonction sur D_j , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{e^s}{2} \int_{\{t=s\}} \varphi d^c t \wedge \Theta &= 2\pi m! \text{Vol}(D_j) \varphi_0(s) + 2\pi \int_{D_j} \varphi_1(s, \cdot) \Upsilon(\varphi_1(s, \cdot)) + O(e^{-s}) \\ &= 2\pi m! \text{Vol}(D_j) \varphi_0(s) + O(1). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Il reste à analyser le terme $\int_{\{t \leq s\}} e^t \omega^m$. On peut écrire, dans un voisinage de D_j , $\omega^m = 2me^{-t} dt \wedge \eta \wedge (p^* \omega_{D_j})^{m-1} (1 + O(e^{-t}))$, d'après (1.9) (ou plutôt de son analogue près de D_j lorsque D a plusieurs composantes). Ceci se réécrit $e^t \omega^m = 2m dt \wedge \eta \wedge (p^* \omega_{D_j})^{m-1} + O(e^{-t})$, $O(e^{-t})$ entendu au sens des formes volumes de métriques de type Poincaré. Une nouvelle utilisation de l'invariance sous S^1 de $dt \wedge (p^* \omega_{D_j})^{m-1} + O(e^{-t})$ sur $\{t \geq A\}$, et de l'égalité $\int_{D_j} \omega_{D_j}^{m-1} = (m-1)! \text{Vol}(D_j)$, nous donne pour s assez grand :

$$\int_{\{t \leq s\}} e^t \omega^m = \int_{\{t \leq A\}} e^t \omega^m + \int_A^s (4\pi m! \text{Vol}(D_j) + O(e^{-t})) dt = 4\pi m! \text{Vol}(D_j) s + O(1). \quad (6.12)$$

La proposition est démontrée en regroupant les estimations (6.9), (6.10), (6.11) et (6.12). \square

Démonstration de la proposition 6.5. Les techniques utilisées pour obtenir l'estimation (6.8) sont tout à fait similaires à celles que nous venons de mettre en œuvre pour démontrer la proposition 6.4. Le point de départ consiste cependant en la formule suivante pour le calcul de la courbure scalaire : $\mathbf{s}_\varphi = 2(\Lambda_\varphi \varrho_\varphi)$, ou, de manière équivalente, $\mathbf{s}_\varphi \omega_\varphi^m = 2m \varrho_\varphi \wedge \omega_\varphi^{m-1}$; on désigne ici par ϱ_φ la forme de Ricci de ω_φ , et l'on note ϱ celle de ω . On a entre ces deux formes de Ricci la relation bien connue : $\varrho_\varphi = \varrho - \frac{1}{2} dd^c f$, où l'on a posé $f = \log(\frac{\omega_\varphi^m}{\omega^m}) \in C^\infty(X \setminus D)$. En multipliant cette égalité par $2m \omega_\varphi^{m-1}$, il vient :

$$\mathbf{s}_\varphi \omega_\varphi^m = 2m \varrho \wedge \omega_\varphi^{m-1} - m dd^c f \wedge \omega_\varphi^{m-1}.$$

soit : $\int_{\{t \leq s\}} e^t \mathbf{s}_\varphi \omega_\varphi^m = 2m \int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge \omega_\varphi^{m-1} - m \int_{\{t \leq s\}} e^t dd^c f \wedge \omega_\varphi^{m-1}$ après intégration (ici encore on fixe $j \in \{1, \dots, N\}$, et on oublie cet indice quand cela ne prête pas à confusion). On peut alors écrire $\omega_\varphi^{m-1} = \omega^{m-1} + \frac{1}{2} dd^c \varphi \wedge \Psi$, avec Ψ la $(m-2, m-2)$ -forme $\omega^{m-2} + \dots + \omega_\varphi^{m-2}$. Ceci donne la somme :

$$\int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge \omega_\varphi^{m-1} = \int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge \omega^{m-1} + \frac{1}{2} \int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge dd^c \varphi \wedge \Psi. \quad (6.13)$$

Pour estimer $\int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge \omega^{m-1}$, on remarque que, ω étant asymptotiquement un produit, il en va de même pour sa forme de Ricci ϱ . Plus précisément, en notant ϱ_j la forme de Ricci de ω_{D_j} , comme par (1.9) on a $\omega = 2dt \wedge e^{-t} \eta + p^*(\omega|_{D_j}) + O(e^{-t})$, on obtient les asymptotiques :

$$\varrho = p^* \varrho_j - dt \wedge e^{-t} \eta + O(e^{-t}), \quad (6.14)$$

ainsi qu'esquissé dans la discussion du paragraphe 6.2.2, avec des asymptotiques moins précises. On en déduit près de D_j :

$$\varrho \wedge \omega^{m-1} = 2(m-1)dt \wedge e^{-t}\eta \wedge p^*(\varrho_j \wedge \omega_{D_j}^{m-2}) - dt \wedge e^{-t}\eta \wedge p^*(\omega_{D_j}^{m-1}) + O(e^{-t}).$$

En procédant comme pour $\int_{\{t \leq s\}} e^t \omega^m$, on obtient de cette manière :

$$\int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge \omega^{m-1} = 2\pi s(2(m-1)[\varrho_j][\omega_{D_j}]^{m-2} - [\omega_{D_j}]^{m-1}) + O(1),$$

c'est-à-dire, puisque $[\varrho_j][\omega_{D_j}]^{m-2} = \frac{\bar{s}_j[\omega_{D_j}]^{m-1}}{2(m-1)}$ et que $[\omega_{D_j}]^{m-1} = (m-1)! \text{Vol}(D_j)$,

$$2m \int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge \omega^{m-1} = 4\pi m! s(\bar{s}_j - 1) \text{Vol}(D_j) + O(1).$$

On procède par intégrations par parties successives pour le terme $\int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge dd^c \varphi \wedge \Psi$ de l'équation (6.13) :

$$\int_{\{t \leq s\}} e^t \varrho \wedge dd^c \varphi \wedge \Psi = \int_{\{t \leq s\}} \varphi dd^c(e^t) \wedge \varrho \wedge \Psi + e^s \int_{\{t=s\}} (d^c \varphi - \varphi d^c t) \wedge \varrho \wedge \Psi.$$

La première intégrale du membre de droite est bornée pour les mêmes raisons que $\int_{\{t \leq s\}} \varphi dd^c(e^t) \wedge \Theta$ (voir la démonstration de la proposition 6.4, §6.4.2). En utilisant les asymptotiques de ϱ (formule (6.14)) et les mêmes arguments que pour $e^s \int_{\{t=s\}} (\varphi d^c t - d^c \varphi) \wedge \Theta$, on parvient à :

$$\begin{aligned} e^s \int_{\{t=s\}} (\varphi d^c t - d^c \varphi) \wedge \varrho \wedge \Psi &= 2\pi(m-1)! \bar{s}_j (\dot{\varphi}_0(s) - \varphi_0(s)) + O(1) \\ &= -2\pi(m-1)! \bar{s}_j \varphi_0(s) + O(1), \end{aligned}$$

i.e. $m \int_{\{t \leq s\}} \varphi dd^c(e^t) \wedge \varrho \wedge \Psi = -2\pi m! \bar{s}_j \varphi_0(s) + O(1)$

On doit pour conclure voir que $\int_{\{t \leq s\}} e^t dd^c f \wedge \omega_\varphi^{m-1}$ reste bornée ; ici à nouveau deux intégrations par parties successives donnent :

$$\int_{\{t \leq s\}} e^t dd^c f \wedge \omega_\varphi^{m-1} = \int_{\{t \leq s\}} f dd^c(e^t) \wedge \omega_\varphi^{m-1} + e^s \int_{\{t=s\}} (d^c f - f d^c t) \wedge \omega_\varphi^{m-1};$$

on démontre alors que $(dd^c(e^t))$ est bornée et que $(d^c f - f d^c t) \wedge \omega_\varphi^{m-1}$ restreinte à la tranche $\{t = s\}$ est un $O(e^{-s})$, disons par rapport à $\eta \wedge p^*(\omega_{D_j})^{m-1}$. \square

6.5 Généralisation : cas où D est à croisements normaux

On suppose désormais que D est à croisements normaux ; les lignes qui suivent sont consacrées à donner les adaptations nécessaires à la démonstration du théorème 6.1 dans ce cas général.

On veut tout d'abord construire une action de cercle autour de chaque composante, dans le but d'avoir des décompositions analogues à (1.10). On souhaite pour cela que l'action d'une composante donnée respecte les autres composantes. Si ces actions proviennent de l'identification des fibrés normaux aux voisinages tubulaires par rapport à une application exponentielle, il est nécessaire que la connexion dont est issue cette exponentielle confère une certaine orthogonalité aux composantes s'intersectant. Autrement

dit, on cherche une connexion par rapport à laquelle les composantes sont totalement géodésiques. On demande aussi que la connexion préserve la structure complexe J de X , car des asymptotiques sur cet opérateur sont également requises.

Il existe en général des obstructions à ce qu'une telle connexion soit la connexion de Levi-Civita d'une métrique kählérienne lisse définie sur un voisinage du diviseur. On a seulement besoin néanmoins de la connexion, et non d'une métrique à laquelle la rattacher, et nous la construisons de la manière suivante.

Soit $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{U}_m$ un recouvrement fini de D dans X , tel que $U \in \mathcal{U}_k$ ssi U est un ouvert de coordonnées holomorphes rencontrant un croisement de D de codimension k , et ne rencontrant pas de croisement de codimension $\geq k + 1$, ceci pour $k = 1, \dots, m$. Si un croisement de codimension k , disons $D_1 \cap \cdots \cap D_k$, est donné par $\{z^1 = \cdots = z^k = 0\}$, avec D_j donnée par z^j , dans $U \in \mathcal{U}_k$, on appelle ∇_U la tirée-en-arrière de la connexion de Levi-Civita de la métrique euclidienne de U pour ces coordonnées. Soit de plus une partition de l'unité $(\chi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ subordonnée à \mathcal{U} ; on pose :

$$\nabla = \sum_{U \in \mathcal{U}} \chi_U \nabla_U$$

dans le voisinage $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ de D .

Il est clair que :

- chaque intersection constituée par les D_j est totalement géodésique pour ∇ ;
- la structure complexe J de X est parallèle pour ∇ .

On fixe alors $j \in \{1, \dots, N\}$, et l'on pose $D'_j = D_j \setminus \bigcup_{j' \neq j} D_{j'}$ (*resp.* $D' = \sum_{j \neq j'} D_{j'}$). Grâce à l'exponentielle de ∇ , on identifie un voisinage \mathcal{V} de D_j dans X (*resp.* un voisinage \mathcal{V}' de D'_j dans $X \setminus D'$) à un voisinage de la section nulle du fibré normal de D_j dans X (*resp.* à sa restriction dans D'_j). On appelle p_j la projection associée sur \mathcal{V} ; on a : $p_j(\mathcal{V}') = D'_j$.

Via cette identification, on obtient une action de S^1 autour de D_j préservant les autres composantes de D , et les disques de la fibration de \mathcal{V} qui en résultent sont asymptotiquement holomorphes.

En prenant la moyenne de $|\sigma_j|_j^2$ comme dans le paragraphe 1.4.4, on obtient une fonction S^1 -invariante t_j vérifiant $t_j = u_j + O(e^{-u_j})$ à tout ordre. On construit aussi une 1-forme de connexion η_j donnant une longueur de 2π aux fibres de l'action. Enfin, si g est la métrique riemannienne associée au modèle ω de la section 1.1, où l'on prend $A_1 = \cdots = A_N = 2$ dans la formule (1.2), et si h_j est celle associée à $\omega|_{D'_j}$ (la forme kählérienne de type Poincaré induite sur D'_j), on a sur \mathcal{V}' les asymptotiques

$$g = dt_j^2 + 4e^{-t_j} \eta_j^2 + p_j^* h_j + o(1)$$

où le terme d'erreur $o(1)$ est entendu à tout ordre pour une métrique de type Poincaré sur $X \setminus D_j$ restreinte à $X \setminus D$, ω_j disons.

De même, quand cela a un sens (par exemple, pour des potentiels de métriques de type Poincaré), on définit $\Pi_0 f$ comme la composante invariante sous S^1 de f autour de D'_j , et $f_{0,j}$ et $f_{1,j}$ par

$$f_{0,j}(t_j) = \frac{1}{\text{Vol}(D_j)} \int_{D'_j} (p_j)_* (\Pi_0 f)(t_j, \cdot) \text{vol}^{h_j} \quad \text{et} \quad f_{1,j} = \Pi_0 f - f_{0,j}$$

($\text{Vol}(D_j)$ est ici calculé par rapport à h_j , ou de manière équivalente par rapport à $\omega|_{D'_j}$, et vaut donc $\frac{[\omega_0|_{D_j}]^{m-1}}{(m-1)!}$). Les formules de dérivation (6.5) et (6.6) deviennent

$$d^c f = Jdf = 2(\partial_{t_j} f_0(t) + \partial_{t_j} f_1(t, z)) e^{-t_j} \eta_j + d_{D'_j}^c f_1(t, z) + o(1)$$

avec $d_{D'_j}^c = p_j^*(J_{D_j}d)$, et

$$\begin{aligned} dd^c f &= 2(\partial_{t_j}^2 f_0(t_j) + \partial_{t_j}^2 f_1(t_j, z) - \partial_{t_j} f_0(t_j) - \partial_{t_j} f_1(t_j, z))e^{-t_j} dt_j \wedge \eta_j \\ &\quad + 2e^{-t_j} d_{D'_j}(\partial_{t_j} f_0(t_j) + \partial_{t_j} f_1(t_j, z)) \wedge \eta_j + dt_j \wedge d_{D'_j}^c \partial_{t_j} f_1(t_j, z) \\ &\quad + dd_{D'_j}^c f_1(t_j, z) + o(1) \end{aligned}$$

où $f \in C^{k,\alpha}(X \setminus D)$, $k \geq 2$, $\alpha \in (0, 1)$, ou bien $f \in \widetilde{\mathcal{P}\mathcal{M}}_\Omega$ (dans les deux cas, les dérivées de f par rapport à ω et d'ordre $\leq k - 1$ sont bornées, et la partie dépendant de S^1 est incluse dans le $o(1)$).

Le point à remarquer ici est que ces estimations sont uniformes pour ω_j le long de D'_j , indifféremment de la proximité des $D_{j'}$.

Une lecture attentive des démonstrations des propositions 6.4 et 6.5 nous permet désormais d'énoncer ces propositions dans le cas où D est à croisements normaux, modulo quelques adaptations : si $\varphi \in \widetilde{\mathcal{P}\mathcal{M}}_\Omega$, alors

$$\int_{\{t_j \leq s\}} e^{t_j} \omega_\varphi^m = 2\pi m! \text{Vol}(D_j)(2s - \varphi_{0,j}(s)) + O(1), \quad (6.15)$$

avec de plus cette intégrale divergeant vers $+\infty$ lorsque s tend vers $+\infty$, et

$$\int_{\{t_j \leq s\}} e^{t_j} \mathbf{s}_\varphi \omega_\varphi^m = 2\pi m! \text{Vol}(D_j)(2(\bar{\mathbf{s}}_{D'_j} - 1)s - \bar{\mathbf{s}}_{D'_j} \varphi_{0,j}(s)) + O(1), \quad (6.16)$$

où à présent, $\bar{\mathbf{s}}_{D'_j}$ est calculée pour une classe de métriques kählériennes de *type Poincaré* sur D'_j relativement à $\omega_0|_{D_j}$ (au lieu d'une classe de métriques lisses dans le cas où D est lisse), et est donc donnée par

$$\bar{\mathbf{s}}_{D'_j} = -4\pi(m-1) \frac{c_1(K_X[D]|_{D_j})[\omega_0|_{D_j}]^{m-2}}{[\omega_0|_{D_j}]^{m-1}} = -4\pi(m-1) \frac{c_1([D_j])c_1(K_X[D])[\omega_0]^{m-1}}{c_1([D_j])[\omega_0]^{m-1}}.$$

Par exemple, le théorème de Stokes, qui est un ingrédient-clé des preuves mentionnées ci-dessus, fonctionne encore car les différents intégrandes (à s fixé) des intégrations par parties sont L^1 par rapport à $\omega|_{\{t_j \leq s\}}$. De plus, les $O(e^{-s})$ de ces preuves étaient bien meilleurs que ce dont on avait réellement besoin, et les $o(1)$ dont on dispose sont suffisants pour parvenir au $O(1)$ final.

En conclusion, si l'on suppose que ω_φ est à courbure scalaire constante, et que l'on compare (6.15) multipliée par $\bar{\mathbf{s}}$ avec (6.16), on obtient à nouveau $\bar{\mathbf{s}}_{D'_j} > \bar{\mathbf{s}}$. Ceci est vrai pour tout $j = 1, \dots, N$; le théorème 6.1 est démontré dans le cas où D admet des croisements normaux.

Appendice



Théorème de Calabi-Yau logarithmique : cas d'un diviseur lisse

ON se propose dans cet appendice de préciser le théorème 3.2 dans le cas où le diviseur est lisse, en demandant notamment que la solution φ de ce théorème hérite du comportement asymptotique du second membre.

A.1 Enoncé du théorème et stratégie de preuve

Le prix à payer pour pouvoir raffiner le théorème 3.2 est d'avoir une métrique de départ $\omega' \in \mathcal{PM}_\Omega$ avec des asymptotiques assez fines. Plus exactement, on supposera dans cet appendice :

On dispose d'asymptotiques pour ω' comparables à celles énoncées pour ω dans la proposition 1.2, à ceci près que les $O(\rho^{-1})$ dans les contrôles sur les dérivées sont remplacés par des $O(\rho^{-\delta})$, avec $\delta > 0$ indépendant de l'ordre de dérivation.

On suppose également le diviseur est lisse, de sorte que ses composantes irréductibles D_j , $j = 1, \dots, N$, soient disjointes.

On dispose alors d'après [Biq97] d'une *analyse à poids* entre espaces de Hölder pour le laplacien $\Delta_{\omega'}$. Avant d'en rappeler plus précisément les éléments, désignons par $\nu_0 > 0$ le premier poids critique > 0 de cet opérateur. On peut alors énoncer :

Théorème A.1. *Soit $f \in C_\nu^\infty$, avec $0 < \nu < \nu_0$, telle que $\int_{X \setminus D} e^f \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}_\Omega$. Il existe alors une unique fonction $\varphi \in E_\nu^\infty(\omega')$ telle que $(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi) \in \mathcal{PM}_\Omega$ vérifie :*

$$(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f (\omega')^m.$$

On rappelle que les $E_\nu^*(\omega')$, définis en 3.2, sont les espaces de fonctions de régularité C^* , s'écrivant près de chaque D_j comme somme d'une constante et d'une fonction C_ν^* , et de moyenne nulle pour ω' .

Le théorème A.1 peut parfaitement remplacer le théorème 3.2 dans l'utilisation qui en est faite pour la démonstration du théorème 3.3 dans le cas d'un diviseur lisse. En effet, la forme ω' construite au cours de cette démonstration permettant de se ramener au théorème 3.2 dispose des asymptotiques nécessaires. La métrique à forme de Ricci négative obtenue possède alors elle-même des asymptotiques analogues.

Méthode de continuité. La stratégie adoptée en vue de démontrer le théorème A.1 est la suivante. Une fois fixée f comme dans l'énoncé, au lieu de résoudre des équations perturbées du type $(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon)^m = e^{f+\varepsilon\varphi_\varepsilon}(\omega')^m$, on interpole entre 0 et f par une famille (f_t) de fonctions de C_ν^∞ telles que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int_{X \setminus D} e^{f_t} \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}_\Omega.$$

On résout alors pour tout t l'équation :

$$(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^m = e^{f_t}(\omega')^m \quad (E_t)$$

(on a donc une méthode de continuité analogue à celle de la section 2.2). Cette résolution se fait selon le schéma suivant : soit

$$S = \{t \in [0, 1] \mid (E_t) \text{ admet une unique solution } \varphi_t \in E_\nu^\infty(\omega')\};$$

on montre alors que S est ouvert (la partie « facile », cf. ci-après) et que S est fermée (la partie plus « difficile » ; on va pouvoir reprendre toutefois des estimations du chapitre 4). Voyons pour commencer une construction possible pour la famille (f_t) utilisée dans cette méthode.

Construction de (f_t) . Rappelons que les D_j sont données respectivement par les $\sigma_j \in \mathcal{O}([D_j])$, et que les $|\cdot|_j$ sont des métriques hermitiennes sur les $[D_j]$. On pose $\sigma = |\sigma_1|_1 \cdots |\sigma_N|_N$. Pour tout $t \in [0, 1]$, il existe un unique $\mu(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{X \setminus D} e^{tf + \mu(t)\sigma} \text{vol}^{\omega'} = \text{Vol}_\Omega;$$

on a donc $\mu(0) = \mu(1) = 0$. La fonction $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est en réalité lisse. En posant $f_t = tf + \mu(t)\sigma$, on a donc une famille uniformément bornée dans C_ν^∞ (avec bornes ne dépendant que des $\|f\|_{C_\nu^k}$).

Ceci mis en place, commençons notre méthode de continuité.

L'ensemble S est ouvert. Soit $t \in S$; on pose $\omega'_t = \omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$, et on vérifie facilement que c'est une forme de Kähler (de type Poincaré) (équivalente à ω' près de D , à déterminant par rapport à ω' ne s'annulant jamais). Soit $\alpha \in (0, 1)$; on admet provisoirement que $\Delta_{\omega'_t} : E_\nu^{5,\alpha}(\omega'_t) \rightarrow C_\nu^{3,\alpha}$ est un isomorphisme. La linéarisation de l'opérateur

$$\begin{aligned} E_\nu^{5,\alpha}(\omega'_t) &\longrightarrow C_\nu^{3,\alpha} \\ \psi &\longmapsto \frac{(\omega' + i\partial\bar{\partial}\psi)^m}{(\omega')^m} \end{aligned}$$

en φ_t étant $-\frac{e^f}{2}\Delta_{\omega'_t}$, on a pour tout $s \in [0, 1]$ proche de t une fonction $\tilde{\varphi}_s \in E_\nu^{5,\alpha}(\omega'_t)$ telle que $(\omega' + i\partial\bar{\partial}\tilde{\varphi}_s)^m = e^{f_s}(\omega')^m$. On démontre de plus que :

- les $\omega' + i\partial\bar{\partial}\tilde{\varphi}_s$ sont positives (même argument que ci-dessus) ;
- les $\tilde{\varphi}_s \in E_\nu^\infty(\omega'_t)$: on procède comme au paragraphe 4.2, en retranchant à $\tilde{\varphi}_s$ près de chaque D_j la constante vers laquelle elle tend. Notons que l'on déduit la régularité locale par les estimations de Schauder. Par ailleurs, les $\tilde{\varphi}_s$ ne vérifient pas tout à fait la même équation que les φ_ε de la partie 4 ; pour que la technique utilisée en 4.2 fonctionne, il suffit néanmoins d'avoir $(1 - e^{f_s}) \in C_\nu^\infty$, et un contrôle initial dans C_ν^0 et dans $C^{2,\alpha}$ de $\tilde{\varphi}_s$.

En posant $\varphi_s = \tilde{\varphi}_s - \frac{1}{\text{Vol}} \int_{X \setminus D} \tilde{\varphi}_s \text{vol}^{\omega'}$, on a donc bien un potentiel solution de (E_s) pour s assez proche de t . Il ne manque plus que l'unicité; soit donc ψ_s un potentiel normalisé par rapport à ω' , donc dans $E^\infty(\omega')$, vérifiant (E_s) . En posant $\chi_s = \psi_s - \varphi_s$, on a comme au paragraphe 2.3 que $\Delta_{\omega'_s} \chi_s \leq 0$; or $\int_{X \setminus D} \Delta_{\omega'_s} \chi_s \text{vol}^{\omega'_s} = 0$, donc χ_s est constante. Or χ_s est de moyenne nulle pour ω' , d'où $\chi_s \equiv 0$, *i.e.* $\varphi_s = \psi_s$.

Le dernier point à voir est donc que $\Delta_{\omega'_t} : E_\nu^{5,\alpha}(\omega'_t) \rightarrow C_\nu^{3,\alpha}$ est un isomorphisme. Ceci découle de [Biq97]; en effet, le premier poids critique $\nu_t > 0$ d'un tel opérateur ne dépend que de l'asymptotique de ω'_t (raison pour laquelle on demande initialement une asymptotique fine sur ω'), et plus précisément des métriques qu'elle induit sur les D_j , et étant donnée une équation z d'une de ces composantes, du coefficient A tel que ω'_t soit asymptote au produit

$$A_t \frac{idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)} + \text{métrique induite sur la composante.}$$

Au vu de la condition $\varphi_t \in E^\infty$, on a que les A_t et les métriques induites sur les composantes *ne dépendent pas de t* ; par conséquent, le poids critique évoqué non plus. On a donc (dès que φ_t existe) $\nu_t = \nu_0$, et donc $\Delta_{\omega'_t} : E_\nu^{5,\alpha}(\omega'_t) \rightarrow C_\nu^{3,\alpha}$ est bien un isomorphisme, puisque l'on a choisi $\nu \in (0, \nu_0)$.

Le reste de cet appendice est consacré à l'assertion de fermeture pour l'ensemble S . Ceci passe par des estimations *a priori*, auxquelles on consacre la prochaine section, avant de conclure à la section suivante.

Mais expliquons tout d'abord pourquoi il serait vain de vouloir généraliser le théorème A.1 sous cette forme au cas où le diviseur admet des croisements. Dans ce cas en effet, on ne dispose plus d'une analyse à poids, cruciale dans la méthode de continuité, comme dans le cas où le diviseur est lisse avec métrique asymptotiquement produit (cusp) \times (métrique lisse sur le diviseur). Plus précisément, l'échelle de poids des ρ^γ , $\gamma < 0$, ne semble plus adaptée à la situation puisque si l'on se donne deux composantes D_1 et D_2 non disjointes, il semble exister des fonctions qui sont harmoniques (pour une métrique de type Poincaré asymptotiquement produit) au voisinage de $D_1 \cup D_2$, et qui à une constante près sont seulement des $O((s^2 + t^2)^{-1/2})$ sur $\{t = s\}$ à l'approche de $D_1 \cap D_2$, où $s = \log \rho_1$ et $t = \log \rho_2$.

A.2 Estimations *a priori*

On commence dans l'ordre habituel pour les estimations *a priori* des solutions des (E_t) : estimation C^0 non pondérée, estimation C^0 sur le laplacien $\Delta_{\omega'} \varphi_t$, estimation C^0 de $(\nabla^{\omega'} i\partial\bar{\partial} \varphi_t)$. Toutefois, on a aussi besoin d'estimations *a priori* à poids pour voir que S est fermé; il est en effet plus aisé de passer à la limite dans des espaces à poids, plutôt que de prouver qu'une solution obtenue par passage à la limite, dans $C^{2,\alpha}(X \setminus D)$ disons, est *a fortiori* dans un $E_\gamma^{2,\alpha}(\omega')$; ces estimations constituent le point le plus technique de cette section.

A.2.1 Estimation C^0 non pondérée

On démontre pour commencer le résultat suivant :

Proposition A.2. *Il existe $Q_0 = Q_0(\|f\|_{C^0}, \omega')$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0, \nu]$, toute solution $\varphi_t \in E_\gamma^2(\omega')$ d'une (E_t) vérifie : $\|\varphi_t\|_{C^0} \leq Q_0$.*

Démonstration. On se donne φ_t comme dans l'énoncé. Le théorème 3.2 nous donne une solution $\tilde{\varphi}_t \in C^\infty(X \setminus D)$ à l'équation (E_t) , telle que $\|\tilde{\varphi}_t\|_{C^0} \leq \tilde{Q}_0(\|f_t\|_{C^0_\nu}, \omega')$; en effet, la solution $\tilde{\varphi}_t$ est obtenue comme limite sur tout compact d'une suite $\tilde{\varphi}_{t,\varepsilon} \in C^\infty$ telle que $\|\tilde{\varphi}_{t,\varepsilon}\|_{C^0} \leq \tilde{Q}_0$ (proposition 4.1.1). Comme on l'a vu ci-dessus, φ_t et $\tilde{\varphi}_t$ sont des potentiels ne différant que d'une constante (l'argument reste valable puisque $\varphi_t - \tilde{\varphi}_t \in C^2(X \setminus D)$); par normalisation, $\varphi_t = \tilde{\varphi}_t - \frac{1}{\text{vol}} \int_{X \setminus D} \tilde{\varphi}_t \text{vol}^{\omega'}$.

Or il est clair que $\frac{1}{\text{vol}} \left| \int_{X \setminus D} \tilde{\varphi}_t \text{vol}^{\omega'} \right| \leq \tilde{Q}_0$. Il vient donc $\|\varphi_t\| \leq 2\tilde{Q}_0$; on conclut en vérifiant facilement que l'on a sur $\|f_t\|_{C^0_\nu}$ un contrôle par $\|f\|_{C^0_\nu}$ indépendant de t . \square

Remarque A.3. *On aurait également pu parvenir à une estimation C^0 en suivant un schéma itératif de type Moser, comme en 4.1.1, l'absence de ε dans (E_t) ne gênant pas pour transposer les arguments développés dans ce paragraphe (disons plutôt que c'est leur présence dans 4.1.1 qui ne constitue pas un obstacle important). On a préféré l'argument ci-dessus par souci de concision.*

A.2.2 Estimations d'ordre 2 et 3 non pondérées

On a le contrôle suivant sur le laplacien des solutions :

Proposition A.4. *Il existe $Q_2 = Q_2(\|f\|_{C^0_\nu}, \|f\|_{C^2}, \omega')$ telle que pour tout $\gamma \in (0, \nu]$, toute solution $\varphi_t \in E_\gamma^2(\omega')$ d'une (E_t) vérifie : $\|\Delta_{\omega'} \varphi_t\|_{C^0} \leq Q_2$.*

Démonstration. Soit φ_t comme dans l'énoncé. On se sert encore de la solution $\tilde{\varphi}_t$ donnée par le théorème 3.2. Cette solution $\tilde{\varphi}_t$ est aussi limite C^2_{loc} de $\tilde{\varphi}_{t,\varepsilon}$; on a de plus un contrôle $\|\Delta_{\omega'} \tilde{\varphi}_{t,\varepsilon}\|_{C^0} \leq \tilde{Q}_2(\|f_t\|_{C^0_\nu}, \|f_t\|_{C^2}, \omega')$ par le corollaire 4.8. On a donc le résultat en faisant tendre ε vers 0, en remarquant que $\Delta_{\omega'} \tilde{\varphi}_t = \Delta_{\omega'} \varphi_t$, et en contrôlant respectivement $\|f_t\|_{C^0}$ et $\|f_t\|_{C^2}$ par $\|f\|_{C^0_\nu}$ et $\|f\|_{C^2}$.

On peut aussi faire abstraction du théorème 3.2 et de sa preuve, et démontrer directement le résultat *via* l'utilisation de la formule d'Aubin-Yau qui s'écrit ici

$$\begin{aligned} \Delta_t(\Delta \varphi_t) &= -2\Delta f_t + 4g^{\alpha\bar{\lambda}} g_t^{\mu\bar{\beta}} g_t^{\gamma\bar{\nu}} \nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \varphi_t \nabla_{\lambda\bar{\mu}\nu} \varphi_t \\ &\quad + 4g_t^{\alpha\bar{\beta}} g^{\gamma\bar{\delta}} ((\text{Rm}^{\omega'})^{\bar{\epsilon}}_{\delta\bar{\gamma}\bar{\beta}} \nabla_{\alpha\bar{\epsilon}} \varphi_t - (\text{Rm}^{\omega'})^{\bar{\epsilon}}_{\bar{\beta}\alpha\bar{\delta}} \nabla_{\gamma\bar{\epsilon}} \varphi_t) \end{aligned}$$

et de la fonction $F_t = \log(2m - \Delta \varphi_t) - \kappa \varphi_t$, κ constante dont le choix ne dépend que de $\|\text{Rm}^{\omega'}\|_{C^0}$ (ici, g_t désigne la métrique riemannienne associée à $\omega'_t = \omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$, et Δ_t son laplacien); on doit néanmoins alors prendre $\varphi_t \in E_\gamma^4$. \square

Ce résultat nous donne un contrôle $C^{-1}\omega' \leq \omega'_t \leq C\omega'$ pour un constante $C = C(\|f\|_{C^0}, \|f\|_{C^2}, \omega')$ (on rappelle que ω'_t est automatiquement positive, au vu des asymptotiques de φ_t et de (E_t)).

En utilisant une fois de plus le théorème 3.2 (ou en raisonnant directement, en « remplaçant les ε par des t », à condition de demander plus de régularité au départ sur φ_t), on a :

Proposition A.5. *Il existe une constante $Q_3 = Q_3(\|f\|_{C^0_\nu}, \|f\|_{C^3}, \omega')$ telle que pour tout $\gamma \in (0, \nu]$ et toute solution $\varphi_t \in E_\gamma^3(\omega')$ d'une (E_t) on ait : $|(\nabla^{\omega'})\omega'_t|_{\omega'} \leq Q_3$.*

On peut à présent en venir à la délicate estimation C^0 à poids.

A.2.3 Estimation C^0 pondérée

On démontre dans ce paragraphe le résultat suivant :

Proposition A.6. *Soit $\gamma \in (0, \nu)$. Il existe $Q_\gamma = Q_\gamma(\|f\|_{C_\nu^0}, \|f\|_{C^3}, \omega')$ telle que pour toute solution $\varphi_t \in E_\gamma^2(\omega')$ d'une (E_t) on ait : $\|\varphi_t\|_{E_\gamma^0} \leq Q_\gamma$.*

Démonstration. La démonstration de ce résultat est de loin la plus technique de cet appendice ; on procède en effet par itération de Moser, et la présence de poids dans les intégrales a pour effet de compliquer les calculs. Le schéma itératif nécessite plusieurs étapes ; on commencera par ailleurs en supposant que D est réduit à une composante.

Cas où D est réduit à une composante. On se restreint pour commencer au cas où D est réduit à une composante, si bien que l'on va chercher à estimer $\varphi_t - a_t$ dans C_γ^0 , avec a_t la constante vers laquelle tend φ_t vers D . Comme a_t est contrôlée *via* l'estimation sur $\|\varphi_t\|_{C^0}$, on supposera que $a_t = 0$. On oublie provisoirement la dépendance en t du problème (les estimations sur f_t étant contrôlées par des estimations du même type sur f). Le lemme suivant va jouer le rôle d'analogie pondéré de (4.1) ; on pose $T = (\omega')^{m-1} + \dots + (\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi)^{m-1}$.

Lemme A.7. *Dans les conditions de la proposition A.6, il existe $p_0 = p_0(\gamma)$ et C_1, C_2 ne dépendant que de $\|f\|_{C_\nu^0}, \|f\|_{C^2}, \omega'$ et γ telles que pour tous $p \geq p_0$ et $q = p\gamma$,*

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T \leq C_1 p \int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p (\omega')^m \\ + C_2 p \int_{X \setminus D} |\varphi|^{p-1} \rho^{q+1-\nu} (\omega')^m. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Remarque A.8. *Heuristiquement, en comparant les deux membres de l'inégalité de ce lemme, on a gagné à droite sur ρ une puissance $\geq \min(1, \nu)$ par rapport au membre de gauche, et on ne perd rien sur $|\varphi|$.*

Démonstration du lemme A.7. Soit $p > 2$, et q tel que $q = p\gamma$. On pose $\alpha = |\varphi|^p \rho^q T$; tous calculs faits on a :

$$\begin{aligned} i\partial\bar{\partial}\alpha &= [\rho^q |\varphi|^{p-2} (p\varphi i\partial\bar{\partial}\varphi + p(p-1)i\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi) \\ &\quad + pq|\varphi|^{p-2} \varphi \rho^{q-1} i(\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\rho + \partial\rho \wedge \bar{\partial}\varphi) \\ &\quad + |\varphi|^p \rho^{q-2} (q\rho i\partial\bar{\partial}\rho + q(q-1)i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho)] \wedge T. \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} i\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) &= \frac{p^2}{4} |\varphi|^{p-2} \rho^q i\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \\ &\quad + \frac{pq}{4} |\varphi|^{p-2} \varphi \rho^{q-1} i(\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\rho + \partial\rho \wedge \bar{\partial}\varphi) + \frac{q^2}{4} |\varphi|^p \rho^{q-2} i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho, \end{aligned}$$

soit en comparant le terme mixte en $i(\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\rho + \partial\rho \wedge \bar{\partial}\varphi)$:

$$\begin{aligned} i\partial\bar{\partial}\alpha &= [4i\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) + p\rho^q |\varphi|^{p-2} (\varphi i\partial\bar{\partial}\varphi - i\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi) \\ &\quad + q|\varphi|^p \rho^{q-2} (\rho i\partial\bar{\partial}\rho - i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho)] \wedge T. \end{aligned}$$

On a de plus α et ses dérivées d'ordre 1 et 2 qui sont des $O(\rho^{-p\nu+q})$; comme on a choisi p et q pour que $-p\nu + q < 0$, on a :

$$\int_{X \setminus D} \rho i \partial \bar{\partial} \alpha = \int_{X \setminus D} i \partial \bar{\partial} \rho \wedge \alpha;$$

ceci n'est autre qu'une intégration par parties classique en remplaçant α par une $(m-1, m-1)$ -forme nulle au voisinage de D , et on récupère le résultat pour α en l'approchant par des $\alpha_k = \chi(u-k)\alpha$ avec $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonction de coupure égale à 1 sur $(-\infty, 0]$ et nulle sur $[1, +\infty)$. Les estimations sur α et ses dérivées nous donnent alors en effet une constante C indépendante de k telle que $|\frac{\rho i \partial \bar{\partial} \alpha_k}{\omega^m}| \leq C \rho^{1-p\nu+q}$ et $|\frac{i \partial \bar{\partial} \rho \wedge \alpha_k}{\omega^m}| \leq C \rho^{-p\nu+q}$. Comme $\rho^{1-p\nu+q} \in L^1_\omega$, ce contrôle nous permet de passer à la limite de chaque côté dans les égalités $\int_{X \setminus D} \rho i \partial \bar{\partial} \alpha_k = \int_{X \setminus D} i \partial \bar{\partial} \rho \wedge \alpha_k$.

En remplaçant α par $|\varphi|^p \rho^q T$ et $i \partial \bar{\partial} \alpha$ par l'expression calculée ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^q i \partial \bar{\partial} \rho \wedge T &= 4 \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T \\ &\quad + p \int_{X \setminus D} \rho^{q+1} |\varphi|^{p-2} (\varphi i \partial \bar{\partial} \varphi - i \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi) \wedge T \\ &\quad + q \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} (\rho i \partial \bar{\partial} \rho - i \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho) \wedge T; \end{aligned}$$

ceci se réécrit :

$$\begin{aligned} 4 \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T \\ = p \int_{X \setminus D} \rho^{q+1} |\varphi|^{p-2} (i \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi - \varphi i \partial \bar{\partial} \varphi) \wedge T \quad (\text{A.2}) \\ + \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} (q i \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho - (q-1) \rho i \partial \bar{\partial} \rho) \wedge T. \end{aligned}$$

Notre but est maintenant de faire chuter dans le membre de droite la puissance de φ ou celle de ρ . On commence donc par se débarrasser du terme en $i \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi$: on utilise le calcul de $i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})$ ci-dessus avec l'inégalité ponctuelle $\pm i(\partial \varphi \wedge \bar{\partial} \rho + \partial \rho \wedge \bar{\partial} \varphi) \leq \varepsilon i \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho + \varepsilon^{-1} i \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi$ dans laquelle on prend $\varepsilon = \frac{c q |\varphi|}{p \rho}$ (c restant à déterminer) sur $\{\varphi \neq 0\}$, ensemble hors duquel l'inégalité voulue est automatique. On parvient à :

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{4} |\varphi|^{p-2} \rho^q i \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi &\leq i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) + \frac{q^2}{4} (c-1) |\varphi|^p \rho^{q-2} i \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho \\ &\quad + \frac{p^2}{4c} |\varphi|^{p-2} \rho^q i \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi. \end{aligned}$$

En prenant $c = \frac{3}{2}$ et en regroupant les termes semblables, il vient :

$$\frac{p^2}{12} |\varphi|^{p-2} \rho^q i \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi \leq i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) + \frac{q^2}{8} |\varphi|^p \rho^{q-2} i \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho.$$

On tire donc de cette inégalité et de (A.2), et en se rappelant que $i \partial \bar{\partial} \varphi \wedge T = (e^f - 1)(\omega')^m$,

$$\begin{aligned} \left(4 - \frac{12}{p}\right) \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T \\ \leq p \int_{X \setminus D} \rho^{q+1} |\varphi|^{p-2} \varphi (e^f - 1)(\omega')^m - (q-1) \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^q i \partial \bar{\partial} \rho \wedge T \quad (\text{A.3}) \\ + \left(q + \frac{3q^2}{4p}\right) \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} i \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho \wedge T. \end{aligned}$$

Il reste donc à se débarrasser du terme en $i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho$ (puisque $|\partial\rho|_\omega$ est comparable à ρ vers D) dans le membre de droite. On utilise pour cela le calcul de Joyce [Joy00, p. 191], similaire au nôtre mais indépendant, avec $q+1$ au lieu de q , l'intégration par parties étant légitime pour les mêmes raisons que ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \int_{X \setminus D} i\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) \wedge T \\ &= \frac{-p^2}{4(p-1)} \int_{X \setminus D} \varphi|\varphi|^{p-2}\rho^{q+1}(e^f - 1)(\omega')^m \\ & \quad + \frac{q+1}{4(p-1)} \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} [(p+q-1)i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho - (p-2)\rho i\partial\bar{\partial}\rho] \wedge T. \end{aligned}$$

En isolant le terme en $i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho$, ceci équivaut à :

$$\begin{aligned} & \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge T \\ &= \frac{4(p-1)}{(q+1)(p+q-1)} \int_{X \setminus D} i\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) \wedge T \\ & \quad + \frac{p^2}{(q+1)(p+q-1)} \int_{X \setminus D} \varphi|\varphi|^{p-2}\rho^{q+1}(e^f - 1)(\omega')^m \\ & \quad + \frac{p-2}{p+q-1} \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^q i\partial\bar{\partial}\rho \wedge T. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Ensuite, on écrit

$$\begin{aligned} & i\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) \\ &= \rho i\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2}) + \frac{1}{4}|\varphi|^p \rho^{q-1} i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \\ & \quad + |\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2} i[\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial}(\rho^{1/2}) + \partial(\rho^{1/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2})] \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} i\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}) &\leq (1+\kappa)\rho i\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2}) \\ & \quad + \frac{1}{4}(1+\kappa^{-1})|\varphi|^p \rho^{q-1} i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \end{aligned}$$

par la même technique que ci-dessus consistant à écrire $i(\partial v \wedge \bar{\partial} w + \partial w \wedge \bar{\partial} v) \leq \lambda i\partial v \wedge \bar{\partial} v + \lambda^{-1} i\bar{\partial} w \wedge \partial w$ avec un $\lambda > 0$ bien choisi (ici, on prend $v = \rho^{1/2}$, $w = |\varphi|^{p/2}\rho^{(q+1)/2}$ et $\lambda = \kappa|\varphi|^{-p/2}\rho^{-(q+1)/2}$ sur $\{\varphi \neq 0\}$, κ étant une constante > 0 restant à déterminer). Avec (A.4) dont on remplace le premier terme du membre de droite grâce à la dernière inégalité, il vient donc :

$$\begin{aligned} & \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge T \\ & \leq \frac{4(p-1)(1+\kappa^{-1})}{(q+1)(p+q-1)} \int_{X \setminus D} \rho i\partial(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}\rho^{q/2}) \wedge T \\ & \quad + \frac{(p-1)(1+\kappa)}{(q+1)(p+q-1)} \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \wedge T \\ & \quad + \frac{p^2}{(q+1)(p+q-1)} \int_{X \setminus D} \varphi|\varphi|^{p-2}\rho^{q+1}(e^f - 1)(\omega')^m \\ & \quad + \frac{p-2}{p+q-1} \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^q i\partial\bar{\partial}\rho \wedge T, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{(p-1)(1+\kappa)}{(q+1)(p+q-1)}\right) \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^{q-1} i \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho \wedge T \\
 & \leq \frac{4(p-1)(1+\kappa^{-1})}{(q+1)(p+q-1)} \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T \\
 & \quad + \frac{p^2}{(q+1)(p+q-1)} \int_{X \setminus D} \varphi |\varphi|^{p-2} \rho^{q+1} (e^f - 1) (\omega')^m \\
 & \quad + \frac{p-2}{p+q-1} \int_{X \setminus D} |\varphi|^p \rho^q i \partial \bar{\partial} \rho \wedge T.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Pour que (A.5) soit utilisable avec (A.3), il suffit maintenant que :

$$\left(q + \frac{3q^2}{4p}\right) \left(1 - \frac{(p-1)(1+\kappa)}{(q+1)(p+q-1)}\right)^{-1} \cdot \frac{4(p-1)(1+\kappa^{-1})}{(q+1)(p+q-1)} \leq C,$$

avec C une certaine constante < 4 , au moins pour les p grands. Or $q = \gamma p$; en faisant tendre p vers l'infini on obtient $\frac{4(1+\kappa^{-1})(1+3\gamma/4)}{1+\gamma}$ dans le membre de gauche, ce qui est < 4 dès que $\kappa > \frac{4}{\gamma} + 3$.

On prend donc $\kappa = \frac{8}{\gamma} + 6$ de sorte que pour $p \geq p_0(\gamma)$, $p_0(\gamma)$ ne dépendant que de γ , on ait $(q + \frac{3q^2}{4p})(1 - \frac{(p-1)(1+\kappa)}{(q+1)(p+q-1)})^{-1} \cdot \frac{4(p-1)(1+\kappa^{-1})}{(q+1)(p+q-1)} \leq C(\gamma) < 4$. On peut alors récrire (A.3) sous la forme

$$\begin{aligned}
 & 4 \left(1 - \frac{C(\gamma)}{4} - \frac{3}{p}\right) \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T \\
 & \leq \left[1 - q + q \left(1 + \frac{3\gamma}{4} q\right) \frac{p-2}{p+q-1} \left(1 - \frac{(p-1)(1+\kappa)}{(q+1)(p+q-1)}\right)^{-1}\right] \\
 & \quad \cdot \int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p i \partial \bar{\partial} \rho \wedge T \\
 & \quad + \left[p + q \left(1 + \frac{3\gamma}{4} q\right) \frac{p^2}{(q+1)(p+q-1)} \left(1 - \frac{(p-1)(1+\kappa)}{(q+1)(p+q-1)}\right)^{-1}\right] \\
 & \quad \cdot \int_{X \setminus D} \varphi |\varphi|^{p-2} \rho^{q+1} (e^f - 1) \omega^m
 \end{aligned}$$

Le coefficient du membre de gauche est $\geq c(\gamma) > 0$ pour $p \geq p_0$, quitte à augmenter ce dernier (indépendamment de φ). En outre, les deux crochets en coefficients des intégrales du membre de droite étant essentiellement proportionnels à p , on parvient à l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T & \leq C'_1 p \int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p |i \partial \bar{\partial} \rho|_\omega \wedge T \\
 & \quad + C'_2 p \int_{X \setminus D} |\varphi|^{p-1} \rho^{q+1} |e^f - 1| (\omega')^m
 \end{aligned}$$

pour tout $p \geq p_0$ avec les $C'_j = C'_j(\gamma)$ ne dépendant que de γ , quitte une fois encore à augmenter p_0 (indépendamment de φ). En notant pour finir que $|i \partial \bar{\partial} \rho|_\omega \leq C$, $0 \leq \omega' \leq C\omega$ ($C = C(\|f\|_{C^0}, \|f\|_{C^2}, \omega')$, paragraphe A.2.2) et $|e^f - 1| \leq \|f\|_{C^0} \rho^{-\nu}$, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 \int_{X \setminus D} \rho i \partial (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge \bar{\partial} (|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T & \leq C_1 p \int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p (\omega')^m \\
 & \quad + C_2 p \int_{X \setminus D} |\varphi|^{p-1} \rho^{q+1-\nu} (\omega')^m
 \end{aligned}$$

pour tout $p \geq p_0(\gamma)$, avec les C_j ne dépendant que de $\|f\|_{C^0}$, $\|f\|_{C^2, \omega'}$, ω' et γ . \blacksquare

On note $\epsilon = \min\left(\frac{m}{m-1}, \frac{3}{2}\right) \in (1, 2)$. On a à présent le contrôle inductif :

Lemme A.9. *Dans les conditions de la proposition A.6, soient $\delta = \frac{1}{2} \min(1, \nu - \gamma)$, et $d\mu$ la mesure $\rho^{1-\delta} \text{vol}^\omega$. Il existe deux constantes C_3, C_4 ne dépendant que de $\|f\|_{C^0}$, $\|f\|_{C^2}$, ω' et γ , telles que pour tout $p \geq p_0$,*

$$\|\varphi \rho^\gamma\|_{L_\mu^{p\epsilon}}^p \leq C_3 p \|\varphi \rho^\gamma\|_{L_\mu^p}^p + C_4 p \|\varphi \rho^\gamma\|_{L_\mu^p}^{p-1}. \quad (\text{A.6})$$

Démonstration. On fixe $\gamma \in (0, \nu)$ et on note encore $q = p\gamma$. On renvoie au paragraphe 4.1.1 pour la définition des espaces de Sobolev $L_0^{2,0}$ et $L_0^{2,1}$. On note avec largesse que

$$\|\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/(2\epsilon)})\|_{L_0^{2,0}}^2 \leq 8 \|\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})\|_{L_0^{2,0}}^2 + 8B \|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/(2\epsilon)}\|_{L_0^{2,0}}^2$$

avec B ne dépendant que de ω' et δ (venant de l'estimation $|d\rho|_{\omega'} = O(\rho)$). D'autre part, l'inégalité de Poincaré pondérée du lemme 1.12 avec mesure $\rho^{1-\delta/\epsilon} \text{vol}^{\omega'}$:

$$\begin{aligned} \|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/(2\epsilon)}\|_{L_0^{2,0}}^2 &\leq C_\delta \|\rho^{-\delta/(2\epsilon)} \partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})\|_{L_0^{2,0}}^2 \\ &\quad + \text{Vol}(\delta/\epsilon)^{-1} \left(\int_{X \setminus D} \rho^{q/2} |\varphi|^{p/2} \rho^{1-\delta/\epsilon} \text{vol}^\omega \right)^2. \end{aligned}$$

où $\text{Vol}(\delta/\epsilon) = \int_{X \setminus D} \rho^{1-\delta/\epsilon} \text{vol}^{\omega'}$. Or $\|\rho^{-\delta/(2\epsilon)} \partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})\|_{L_0^{2,0}}^2 \leq \|\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})\|_{L_0^{2,0}}^2$. En combinant ce fait avec les deux inégalités précédentes, on obtient le contrôle $L_0^{2,1}$:

$$\begin{aligned} \|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/(2\epsilon)}\|_{L_0^{2,1}}^2 &\leq (8 + (8B + 1)C_\delta) \|\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})\|_{L_0^{2,0}}^2 \\ &\quad + (8B + 1) \text{Vol}(\delta/\epsilon)^{-1} \left(\int_{X \setminus D} \rho^{q/2} |\varphi|^{p/2} \rho^{1-\delta/\epsilon} \text{vol}^\omega \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

On se sert de (A.1), dont le membre de gauche est $\|\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})\|_{L_0^{2,0}}^2$, pour traiter la première ligne du membre de droite de (A.7), tandis que Cauchy-Schwarz suffira pour la seconde ligne.

Regardons les intégrales dans le membre de droite de (A.1) ; pour la première, puisque $\delta \geq -1$, $\int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p \text{vol}^\omega \leq \int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p \rho^{1+\delta} \text{vol}^\omega$, et par Hölder ($q = p\gamma$) :

$$\int_{X \setminus D} |\varphi|^{p-1} \rho^{q+1-\nu} \text{vol}^\omega \leq \left(\int_{X \setminus D} \rho^{1-\delta+p(\gamma+\delta-\nu)} \text{vol}^\omega \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p \rho^{1-\delta} \text{vol}^\omega \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

avec la première parenthèse à la puissance $\frac{1}{p}$ du membre de droite qui est convergente et majorée par une constante K_1 ne dépendant que des paramètres annoncés grâce à la contrainte $\delta < \nu - \gamma$, i.e. $\gamma + \delta - \nu < 0$.

On revient à (A.7) ; notons que

$$\left(\int_{X \setminus D} \rho^{q/2} |\varphi|^{p/2} \rho^{1-\delta/\epsilon} \text{vol}^\omega \right)^2 \leq \left(\int_{X \setminus D} \rho^q |\varphi|^p \rho^{1-\delta} \text{vol}^\omega \right) \cdot \left(\int_{X \setminus D} \rho^{1+(1-2/\epsilon)\delta} \text{vol}^\omega \right)$$

par Cauchy-Schwarz, et l'on note $K_2 < +\infty$ la dernière intégrale qui est convergente converge, puisque $\epsilon < 2$.

Les inégalités (A.7) et (A.1) mises bout à bout avec les deux dernières donnent :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/(2\epsilon)}\|_{L_0^{2,1}}^2 &\leq [C_1(8 + (8B + 1)C_\delta)p + K_2(8B + 1) \text{Vol}(\delta/\epsilon)^{-1}] \\ &\quad \cdot \|\varphi\|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/2}\|_{L_0^{2,0}}^2 \\ &\quad + [C_1(8 + (8B + 1)C_\delta)K_1p] \|\varphi\|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/2}\|_{L_0^{2,0}}^{2(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Soit C_3 telle que pour $p \geq p_0$ on ait

$$C_{Sob} \left(C_1(8 + (8B + 1)C_\delta)p + K_2(8B + 1) \text{Vol}(\delta/\epsilon)^{-1} \right) \leq C_3p,$$

et posons $C_4 = C_{Sob}^{-1}[C_1(8 + (8B + 1)C_\delta)K_1]$. Alors par injection de Sobolev $L_0^{2,1} \hookrightarrow L_0^{2\epsilon,0}$ (lemme 4.4), on obtient

$$\|\varphi\|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/(2\epsilon)}\|_{L_0^{2\epsilon,0}}^2 \leq C_3p \|\varphi\|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/2}\|_{L_0^{2,0}}^2 + C_4p \|\varphi\|^{p/2} \rho^{q/2} \rho^{-\delta/2}\|_{L_0^{2,0}}^{2(p-1)/p},$$

pour tout $p \geq p_0$. Comme $d\mu = \rho^{1+\delta} \text{vol}^\omega$, cela signifie exactement :

$$\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p\epsilon}}^p \leq C_3p \|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^p}^p + C_4p \|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^p}^{p-1}. \quad \blacksquare$$

Admettons provisoirement que l'on ait une estimation *a priori* $\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}} \leq C_5$ avec C_5 ne dépendant que de paramètres identiques à C_3 et C_4 . Alors d'après (A.6),

$$\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0\epsilon}}^{p_0\epsilon} \leq \left(C_3p_0 \|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}}^p + C_4p_0 \|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}}^{p-1} \right)^{1/p_0} := C_5'.$$

Par interpolation, il est donc facile de trouver deux constantes Q_γ et C_6 ne dépendant que des paramètres telles que pour tout $p \in [p_0, p_0\epsilon]$, $\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^p} \leq Q_\gamma(C_6p)^{-M/p}$, où $M := \frac{\epsilon}{\epsilon-1}$, inégalité que l'on note (\star_p) pour $p \geq p_0$. On peut en outre supposer que $C_6 \geq (C_3 + C_4)\epsilon^{M-1}$ puis que $Q_\gamma(C_6p)^{-M/p} \geq 1$ pour tout $p \geq p_0$. Finalement, supposons que (\star_p) soit vraie pour tout $p \in [p_k, p_k\epsilon]$, $p_k = p_0\epsilon^k$, $k \in \mathbb{N}$. Par (A.6), pour un tel p ,

$$\begin{aligned} \|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p\epsilon}}^p &\leq C_3p(C_6p)^{-M} + C_4p \underbrace{(Q_\gamma(C_6p)^{-M/p})^{p-1}}_{\geq 1} \leq (C_3 + C_4)Q_\gamma^p C_6^{-M} p^{1-M} \\ &\leq C_6\epsilon^{1-M} Q_\gamma^p C_6^{-M} p^{1-M} = Q_\gamma^p (C_6(p\epsilon))^{1-M}, \end{aligned}$$

ce qui donne bien en prenant la racine p -ème, comme $\epsilon = \frac{M}{M-1}$, l'inégalité

$$\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p\epsilon}} \leq Q_\gamma (C_6(p\epsilon))^{-M/(p\epsilon)},$$

et donc (\star_r) est vraie pour tout $r \in [p_{k+1}, p_{k+1}\epsilon]$, donc par récurrence pour tout $r \geq p_0$. En faisant tendre r vers l'infini, on parvient donc à la conclusion que $\|\varphi\rho^\gamma\|_{C^0} \leq Q_\gamma$, soit $\|\varphi\|_{C_\gamma^0} \leq Q_\gamma$, avec Q_γ ne dépendant que des paramètres annoncés.

Pour que la récurrence que l'on vient d'effectuer soit valide, il nous faut justifier l'estimation qui l'amorce, à savoir l'estimation sur la norme $L_\mu^{p_0}$ de $\varphi\rho^\gamma$. Énonçons dans ce sens :

Lemme A.10. *Soit $\gamma \in (0, \nu)$ et $p_0 = p_0(\gamma)$ comme dans le lemme A.7. Il existe $C_5 = C_5(\|f\|_{C_\gamma^0}, \|f\|_{C^2}, \omega', \gamma)$ telle que $\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}} \leq C_5$.*

Démonstration. Notons $q_0 = p_0\gamma$. Appliquons l'inégalité de Poincaré pondérée de la section 1.4.1 à $\psi = |\varphi|^{p_0/2}\rho^{q_0/2}$ et avec mesure $\rho^{1-\delta}\text{vol}^\omega$, δ choisi comme dans le lemme A.9, dans le membre de gauche, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0}\rho^{q_0+1-\delta}\text{vol}^\omega &\leq C_\delta \int_{X\setminus D} \rho |\partial(|\varphi|^{p_0/2}\rho^{q_0/2})|_{\omega'}^2 \text{vol}^{\omega'} \\ &\quad + \text{Vol}(\delta)^{-1} \left(\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0/2}\rho^{q_0/2+1-\delta}\text{vol}^{\omega'} \right)^2, \end{aligned}$$

ce qui avec (A.1) donne :

$$\begin{aligned} \int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0}\rho^{q_0+1-\delta}\text{vol}^{\omega'} &\leq C_\delta C_1 p_0 \int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0}\rho^{q_0}\text{vol}^{\omega'} \\ &\quad + C_\delta C_2 p_0 \int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0-1}\rho^{q_0+1-\nu}\text{vol}^{\omega'} \quad (o) \\ &\quad + \text{Vol}(\delta)^{-1} \left(\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0/2}\rho^{q_0/2+1+\delta}\text{vol}^{\omega'} \right)^2. \end{aligned}$$

Il s'agit à présent de contrôler chaque terme de droite par une quantité du type $K\|\varphi\|_{L_\mu^{p_0}}^{p_0\alpha}$, avec $\alpha < 1$ et K ne dépendant que des paramètres, de sorte que l'on ait une inégalité de la forme $x \leq K_1x^{\alpha_1} + K_2x^{\alpha_2} + K_3x^{\alpha_3}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$, dont on déduit $x \leq C_5(K_j, \alpha_j)^{p_0}$, avec $x = \|\varphi\|_{L_\mu^{p_0}}^{p_0}$. On procède séparément sur les termes du membre de droite de (o).

Par inégalité de Hölder,

$$\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0}\rho^{q_0}\text{vol}^{\omega'} \leq \left(\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0}\rho^{1-\delta}\text{vol}^{\omega'} \right)^{\frac{1-\delta}{q_0}} \left(\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0}\rho^{q_0+1-\delta}\text{vol}^{\omega'} \right)^{\frac{q_0-(1-\delta)}{q_0}} \quad (i)$$

– écrire $q_0 = \left(\frac{1+\delta}{q_0}\right)^2 q_0 + [1 - \left(\frac{1+\delta}{q_0}\right)^2] q_0$, puis mettre $\rho^{\left(\frac{1+\delta}{q_0}\right)^2 q_0}$ à la puissance $\frac{q_0}{1-\delta}$ dans l'intégrale de gauche du membre de droite, et $\rho^{[1 - \left(\frac{1+\delta}{q_0}\right)^2] q_0}$ à la puissance $\frac{q_0}{q_0-(1-\delta)}$ dans l'intégrale de droite. On utilise alors l'estimée C^0 sur φ et le fait que $\rho^{1-\delta}\text{vol}^{\omega'}$ est à volume fini pour avoir un contrôle sur le premier facteur du membre de droite de la forme $k_1\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}}^{p_0\alpha_1}$, $\alpha_1 = \frac{q_0-(1+\delta)}{q_0} < 1$ et k_1 ne dépendant que des paramètres.

Toujours par Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0-1}\rho^{q_0+1-\nu}\text{vol}^{\omega'} &= \int_{X\setminus D} \rho^{1+\gamma-\nu} (\rho^\gamma|\varphi|)^{p_0-1}\text{vol}^{\omega'} \\ &\leq \left(\int_{X\setminus D} \rho^{1+\gamma-\nu}\text{vol}^{\omega'} \right)^{\frac{1}{p_0}} \left(\int_{X\setminus D} \rho^{1+\gamma-\nu+p_0\gamma} |\varphi|^{p_0}\text{vol}^{\omega'} \right)^{\frac{p_0-1}{p_0}} \quad (ii) \\ &\leq \left(\int_{X\setminus D} \rho^{1+\gamma-\nu}\text{vol}^{\omega'} \right)^{\frac{1}{p_0}} \left(\int_{X\setminus D} \rho^{1-\delta+q_0} |\varphi|^{p_0}\text{vol}^{\omega'} \right)^{\frac{p_0-1}{p_0}} \end{aligned}$$

car $\delta < \nu - \gamma$. On a donc sur $\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0-1}\rho^{q_0+1+\beta}\text{vol}^{\omega'}$ un contrôle de la forme $k_2\|\varphi\rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}}^{p_0\alpha_2}$, $\alpha_2 = \frac{p_0-1}{p_0} < 1$ et k_2 ne dépendant que des paramètres.

Choisissons finalement η tel que $0 > \eta > \delta$; une dernière application de Hölder nous donne

$$\begin{aligned} \int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0/2}\rho^{q_0/2+1-\delta}\text{vol}^{\omega'} &\leq \left(\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0'}\rho^{1-\eta}\text{vol}^{\omega'} \right)^{\frac{q_0}{2(q_0-\delta+\eta)}} \\ &\quad \cdot \left(\int_{X\setminus D} |\varphi|^{p_0}\rho^{1-\delta+q_0}\text{vol}^\omega \right)^{\frac{q_0+2(\eta-\delta)}{2(q_0+\eta-\delta)}} \quad (iii) \end{aligned}$$

– écrire

$$\frac{q_0}{2} + 1 - \delta = s\left(\frac{q_0}{2} + 1 - \delta\right) + (1 - s)\left(\frac{q_0}{2} + 1 - \delta\right),$$

où $s = s(q_0, \delta, \eta) = \frac{(q_0+1-\delta)(q_0+2(\eta-\delta))}{(q_0+2(1-\delta))(q_0+\eta-\delta)}$, puis mettre $\rho^{s(\frac{q_0}{2}+1-\delta)}$ à la puissance $\frac{2(q_0+\eta-\delta)}{q_0+2(\eta-\delta)} > 2$ dans la deuxième intégrale du membre de droite, et $\rho^{(1-s)(\frac{q_0}{2}+1-\delta)}$ à la puissance $\frac{2(q_0+\delta-\eta)}{q_0}$ dans la première intégrale ; choisir ensuite p'_0 de sorte que l'on obtienne p_0 comme exposant de $|\varphi|$ dans la seconde intégrale ; p'_0 ne dépend donc que des paramètres.

On a donc sur $\left(\int_{X \setminus D} |\varphi|^{p_0/2} \rho^{q_0/2+1+\delta} \text{vol}^\omega\right)^2$ un contrôle du type $k_3 \|\varphi \rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}}^{p_0 \alpha_3}$, $\alpha_3 = \frac{q_0+2(\delta-\eta)}{q_0+\delta-\eta} < 1$ et $k_3 = \left(\int_{X \setminus D} |\varphi|^{p'_0} \rho^{1-\eta} \text{vol}^\omega\right)^{\frac{q_0}{(q_0+\delta-\eta)}}$ ne dépendant que des paramètres (par estimation C^0 de φ a priori pour k_3).

En conclusion, si l'on pose $x = \|\varphi \rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}}^{p_0}$, $K_1 = k_1 C_\delta C_1 p_0$, $K_2 = k_2 C_\delta C_1 p_0$ et $K_3 = \text{Vol}(\delta)^{-1} k_3$, on a par (o), (i), (ii), (iii) :

$$x \leq K_1 x^{\alpha_1} + K_2 x^{\alpha_2} + K_3 x^{\alpha_3},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$ et K_1, K_2, K_3 ne dépendant que des paramètres annoncés, d'où l'estimation

$$\|\varphi \rho^\gamma\|_{L_\mu^{p_0}} = x^{1/p_0} \leq C_5 = C_5(K_1, K_2, K_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{A.8}$$

avec C_5 ne dépendant que des paramètres annoncés, ce qui achève la démonstration du lemme. ■

La démonstration de la proposition A.6 dans le cas où D est réduit à une composante est achevée.

Cas où D possède plusieurs composantes. L'idée est maintenant, pour parvenir à une estimation E_γ^0 , $0 < \gamma < \nu$, de φ d'appliquer *telle quelle* la preuve précédente, non pas à φ directement, puisqu'elle ne tend pas vers 0 à l'approche du diviseur en général, mais précisément à une fonction $\tilde{\varphi}$ définie par :

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \sum_{j=1}^N a_j v_j$$

avec $a_j = \varphi|_{D_j}$ et $v_j \equiv 1$ près de D_j et nulle autour des autres composantes pour tout $j = 1, \dots, N$. Toutefois, une des clés des calculs de la preuve du cas où D n'a qu'une composante est l'égalité $i\partial\bar{\partial}\varphi \wedge [(\omega')^{m-1} + \dots + (\omega'_\varphi)^{m-1}] = (1 - e^f)\omega^m$, avec $\omega'_\varphi = \omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi$, qui n'est autre qu'une réécriture de l'équation de Monge-Ampère $(\omega' + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^f(\omega')^m$. On va donc préciser l'allure des v_j dans le but d'avoir une égalité comparable avec $\tilde{\varphi}$ remplaçant φ .

Pour ce faire, on prend une fonction de coupure lisse $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $\chi \equiv 0$ sur $(-\infty, 0]$ et $\chi \equiv 1$ sur $[1, +\infty)$, telle que $|\chi'|, |\chi''| \leq 2$. On rappelle que $u_j = \log \rho_j$, et l'on pose $v_j := \chi(u_j^{1/2} - K_j)$, avec $K_j \geq 0$ une constante restant à déterminer. On calcule

$$\begin{aligned} i\partial\bar{\partial}v_j &= \frac{1}{2}u_j^{-1/2}\chi'(u_j^{1/2} - K_j)i\partial\bar{\partial}u_j - \frac{1}{4}u_j^{-3/2}\chi'(u_j^{1/2} - K_j)i\partial u_j \wedge \bar{\partial}u_j \\ &\quad + \frac{1}{4}u_j^{-1}\chi''(u_j^{1/2} - K_j)i\partial u_j \wedge \bar{\partial}u_j, \end{aligned}$$

ce qui est bien entendu nul en dehors de $\{K_j \leq u_j^{1/2} \leq K_j + 1\}$.

Dans cet ensemble néanmoins, $|i\partial\bar{\partial}\psi_j|_{\omega'} \leq \frac{|i\partial\bar{\partial}u_j|_{\omega'}}{K_j} + \frac{|i\partial u_j \wedge \bar{\partial}u_j|_{\omega'}}{2K_j^3} + \frac{|i\partial u_j \wedge \bar{\partial}u_j|_{\omega'}}{2K_j^2}$, et comme $|i\partial\bar{\partial}u_j|_{\omega'}$ et $|i\partial u_j \wedge \bar{\partial}u_j|_{\omega'}$ sont bornées, on peut choisir K_j assez grand pour que $|i\partial\bar{\partial}v_j|_{\omega'} \leq \frac{1}{2N(1+|a_j|)C}$, où C est telle que $\omega'_\varphi \geq \frac{\omega'}{C}$ via la proposition A.4. Si $\tilde{\omega}$ désigne la $(1, 1)$ -forme $\omega' + i\partial\bar{\partial}\tilde{\varphi} = \omega'_\varphi - \sum_{j=1}^N a_j i\partial\bar{\partial}\psi_j$, on a par construction

$$\tilde{\omega} \geq \frac{1}{C} \left(\omega' - \left(\sum_{j=1}^N |a_j| |i\partial\bar{\partial}\psi_j|_{\omega'} \right) \omega' \right) \geq \frac{1}{2C} \omega'$$

ce qui est en particulier de type Poincaré. En outre, toujours d'après l'estimée C^0 sur $i\partial\bar{\partial}\varphi$, on a aisément une constante que l'on appelle encore C et ne dépendant que des paramètres telle que $\tilde{\omega} \leq 2C\omega'$.

On peut alors écrire $(\tilde{\omega})^m = e^{\tilde{f}}(\omega')^m$, avec \tilde{f} qui est C_{loc}^2 et $-m \log(2C) \leq \tilde{f} \leq m \log(2C)$ sur $Y := \bigsqcup_{j=1}^N \{K_j^2 \leq u_j \leq (K_j + 1)^2\}$, et $\tilde{f} = f$ ailleurs. En particulier, \tilde{f} dans C_ν^0 , et $\|\tilde{f}\|_{C_\nu^0} \leq \sup(m(|\log(2C)|) \sum_{j=1}^N e^{\nu(K_j+1)^2}, \|f\|_{C_\nu^0})$, ce qui là encore ne dépend que des paramètres.

En résumé, nous disposons donc d'une fonction $\tilde{\varphi}$ qui est de classe $C_{loc}^5 \cap C_\gamma^2$, vérifiant l'équation de Monge-Ampère $(\omega' + i\partial\bar{\partial}\tilde{\varphi})^m = e^{\tilde{f}}(\omega')^m$, telle que l'on ait une estimation ne dépendant que des paramètres d'origine ($\omega, f, etc.$) sur $\|\tilde{\varphi}\|_{C^0}$, $\|\tilde{f}\|_{C_\nu^0}$ et sur les constantes \tilde{c} et \tilde{C} telles que $\tilde{c}\omega \leq \omega + i\partial\bar{\partial}\tilde{\varphi} \leq \tilde{C}\omega$.

Une lecture attentive de la preuve de la proposition A.6 dans le cas où D est irréductible nous dit alors que pour tout γ de $(0, \nu)$, on a une constante \tilde{Q}_γ ne dépendant que des paramètres d'origine, de $\|\tilde{\varphi}\|_{C^0}$, $\|\tilde{f}\|_{C_\beta^0}$ et des constantes \tilde{c} et \tilde{C} , donc en définitive que des paramètres annoncés dans l'énoncé de notre proposition, telle que $\|\tilde{\varphi}\|_{C_\gamma^0} \leq \tilde{Q}_\gamma$. En effet, nous pouvons mener les mêmes calculs en remplaçant φ par $\tilde{\varphi}$ et f par \tilde{f} , et en prenant pour ρ la somme des ρ_j . En fin de compte, si l'on se donne des voisinages fixes U_j des D_j assez petits, par exemple $U_j = \{(K_j + 1)^2 \leq u_j\}$ (qui sont bien fixes une fois fixés les paramètres), nous pouvons pour tout γ de $(0, \nu)$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$ écrire $\|(\varphi - a_j)\rho^{-\gamma}\|_{C^0(U_j)} \leq Q_\gamma$ avec Q_γ dépendant uniquement des paramètres et de γ , d'où l'estimation annoncée. \square

A.3 L'ensemble S est fermé

Une fois acquises les estimations non pondérées d'ordre ≤ 3 et l'estimation dans les E_γ^0 , on a facilement en procédant comme dans la section 4.1 les estimations d'ordre supérieur :

Proposition A.11. *Soient $k \geq 3$ et $\alpha \in (0, 1)$, et soit $\gamma \in (0, \nu]$. Soit $t \in [0, 1]$ et soit $\varphi_t \in E_\gamma^{2, \alpha}(\omega')$ une solution de (E_t) . Alors $\varphi_t \in E_\gamma^{k, \alpha}(\omega')$, et il existe $Q_{\gamma, k, \alpha} = Q_{\gamma, k}(\|f\|_{C_\nu^{k, \alpha}}, \omega', \|\varphi\|_{E_\gamma^0})$ telle que $\|\varphi_t\|_{E_\gamma^k(\omega')} \leq Q_{\gamma, k}$. De plus, au vu de la proposition A.6, si $\gamma < \nu$, alors $Q_{\gamma, k, \alpha}$ ne dépend que de $\|f\|_{C_\nu^{k, \alpha}}$ et ω' .*

La seule différence notable pour la démonstration est qu'il faut ici regarder les φ_t auxquelles sont retranchées leur limite près de la composante concernée pour les estimations à poids.

On peut maintenant démontrer que S est fermé. Fixons $\alpha \in (0, 1)$. Soit (t_j) une suite convergente d'éléments de S de limite $t_\infty \in [0, 1]$; en particulier, les φ_{t_j} sont dans

$E_{2\nu/3}^\infty(\omega')$. D'après la proposition que nous venons d'énoncer, les φ_{t_j} sont bornées dans $E_{2\nu/3}^{2,\alpha}(\omega')$; on peut donc en extraire une suite faiblement convergente dans $E_{\nu/2}^{2,\alpha/2}(\omega')$ vers une limite $\varphi_\infty \in E_{\nu/2}^{2,\alpha/2}(\omega')$; en effet, l'injection

$$E_{2\nu/3}^{2,\alpha}(\omega') \hookrightarrow E_{\nu/2}^{2,\alpha/2}(\omega')$$

est compacte (cf. [Biq97]); on peut également supposer que φ_∞ est limite C^2 des φ_{t_j} , par compacité encore de l'inclusion $E_{\nu/2}^{2,\alpha/2}(\omega') \hookrightarrow E_0^2 \subset C^2$. On sait donc que φ_∞ est solution de (E_{t_∞}) . On développe cette équation :

$$(\omega')^m + m(\omega')^{m-1} \wedge i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty + \sum_{j=2}^m \binom{m}{j} (\omega')^{m-j} \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty)^j = e^{f_\infty} (\omega')^m,$$

d'où l'on tire :

$$\Delta_{\omega'}\varphi_\infty = 2(e^{f_\infty} - 1) - 2 \sum_{j=2}^m \binom{m}{j} \frac{(\omega')^{m-j} \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty)^j}{(\omega')^m}.$$

Noter que $i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty$, qui est $C_{\nu/2}^{2,\alpha/2}$, apparaît avec des puissances ≥ 2 dans le membre de droite. Ainsi, $\Delta_{\omega'}\varphi_\infty \in C_{\nu}^{0,\alpha/2}$. Or $\Delta_{\omega'}\varphi_\infty : E_{\nu}^{2,\alpha/2}(\omega') \rightarrow C_{\nu}^{0,\alpha/2}(\omega')$ est un isomorphisme; par unicité des solutions C^2 normalisées, on a donc $\varphi_\infty \in E_{\nu}^{2,\alpha/2}(\omega')$. On utilise alors la proposition A.11 pour obtenir $\varphi_\infty \in E_{\nu}^\infty(\omega')$, et donc $t_\infty \in S$, l'unicité d'une telle solution ne posant pas de problème.

Le théorème A.1 est démontré.

Part II

From ALE to ALF gravitational instantons

Quatre chapitres

Prelude: ALE gravitational instantons

WE recall in this short chapter a few elementary facts about ALE gravitational instantons, which will be needed further when dealing with ALF spaces. The discussion is globally informal; the reader is referred to the references herein for more detailed statements.

7.1 Basic material

Consider \mathbb{R}^4 identified to \mathbb{C}^2 by the standard canonical relation between coordinates, that is:

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_3 + ix_4.$$

One shall denote the associated complex structure by I_1 ; we also denote respectively by I_2 and I_3 the complex structures associated to the complex coordinates $x_1 + ix_3$ and $x_4 + ix_2$ on the one hand, and $x_1 + ix_4$ and $x_2 + ix_3$ on the other hand. This way, one has the quaternionic relations $I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3$, etc.

Let us take I_1 , the usual complex structure, as our favorite complex structure, meaning that without further precisions, we refer implicitly to this complex structure (when speaking about hermitian tensors, holomorphic functions, and so on).

We define a family of finite subgroups of $SU(2)$ acting on \mathbb{R}^4 , the *binary dihedral* groups:

Definition 7.1 (Binary dihedral groups.). *For $k \geq 2$, let ζ_k act on $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ via $\zeta_k(z_1, z_2) = (e^{\frac{i\pi}{k}} z_1, e^{-\frac{i\pi}{k}} z_2)$, and τ via $\tau(z_1, z_2) = (z_2, -z_1)$. We call the group $\langle \zeta_k, \tau \rangle$ the binary dihedral group of order $4k$, and denote it by \mathcal{D}_k .*

Remark 7.1. *We are focusing in what follows on the finite groups of this definition. In order to avoid confusion though, let us note that to these finite groups correspond some Lie groups and root systems. Notice the following shift: to the finite group \mathcal{D}_k corresponds the Lie groups "of type D_{k+2} ". This being fixed, when using the notation \mathcal{D}_k , we will always refer to the finite group; one can thus forget about the Lie groups alluded here.*

If Γ is one of the groups above, then the standard euclidean metric \mathbf{e} on \mathbb{C}^2 is clearly invariant under the action of Γ which acts freely outside of 0, hence descends to $(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})/\Gamma$.

For the same reason, I_1 (but also I_2 and I_3) and r make sense on $(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})/\Gamma$; throughout this part we denote the projection $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4/\Gamma$ by π .

Let us fix $k \geq 2$. Notice that the three polynomials

$$u = \frac{1}{2}(z_1^{2k+1}z_2 - z_2^{2k+1}z_1), \quad v = \frac{i}{2}(z_1^{2k} + z_2^{2k}), \quad w = z_1^2z_2^2$$

are invariant under the action of \mathcal{D}_k , and verify the relation: $u^2 + v^2w + w^{k+1} = 0$. Actually, one may also check that $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\mathcal{D}_k} = \mathbb{C}[u, v, w]$, and moreover that

$$X_{\mathcal{D}_k} := \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 \mid u^2 + v^2w + w^{k+1} = 0\} \simeq \mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$$

as complex orbifolds.

Now, ALE gravitational instantons can be defined as follows:

Definition 7.2. *We say that $(X, g, I_1^X, I_2^X, I_3^X)$ is an Asymptotically Locally Euclidean gravitational instanton, or ALE gravitational instanton for short, if it is a hyperkähler complete manifold of real dimension 4, of maximal volume growth, and with square integrable Riemannian curvature.*

We mean by *hyperkähler* the following:

- the I_j^X are complex structures, and verify the quaternionic relation $I_1^X I_2^X I_3^X = -1$;
- the metric g is Kähler with respect to each of these complex structures.

Notice that the Ricci-flatness of ALE instantons follows at once from the hyperkähler assumption; indeed, taking I_1^X as a favourite complex structure, it turns out that $\Theta_g := g(I_2^X \cdot, \cdot) + ig(I_3^X \cdot, \cdot)$ is a holomorphic symplectic $(2,0)$ -form. Since $\Omega_g := \text{vol}^g = \frac{1}{4}\Theta_g \wedge \overline{\Theta_g}$, the vanishing of Ric^g follows at once.

From the works [BKN89] and [Kro89b], those spaces are completely classified – let us mention quickly a recent addition to this classification : if one drops the hyperkähler assumption (keeping the Ricci-flatness and the ALE geometry), one has to add quotients of certain spaces from Kronheimer’s list [Šuv12]. We will not give here this classification, but instead underline some of its consequences.

To an ALE gravitational instanton (X, g) is attached a finite subgroup Γ of $SU(2)$; then:

- $X \setminus K$ is diffeomorphic to $(\mathbb{R}^4 \setminus B)/\Gamma$, where K is some compact subset of X , B is a ball of \mathbb{R}^4 centered at the origin;
- let \underline{g} be the pull-back of the metric to $(\mathbb{R}^4 \setminus B)$; then $\nabla_{\mathbf{e}}^\ell(\mathbf{e} - \underline{g}) = O(r^{-4-\ell})$ for all $\ell \geq 0$, provided that the diffeomorphism above is well-chosen ;
- choose three complex structures I_j^X on X such that the data (g, I_j^X) is a hyperkähler structure on X ; then up to the action of $SO(3)$ on the I_j^X , one has $\nabla_{\mathbf{e}}^\ell(I_j - \underline{I}_j^X) = O(r^{-4-\ell})$ for all $\ell \geq 0$. Here the underlining indicates the pulling-back to \mathbb{C}^2 , for the *same* diffeomorphism as that of the previous point.

Example 7.2 (Eguchi-Hanson metric). *The Eguchi-Hanson metric on the minimal resolution (for the complex structure I_1) $T^*P_{\mathbb{C}}^1$ of $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ is a standard example. If one identifies*

$(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}_2$ and $T^*P_{\mathbb{C}}^1 \setminus P_{\mathbb{C}}^1$, then the (pulled-back) metric can be written as $\mathbf{e} + g_1 + \varepsilon$, with :

$$g_1 = \frac{(|z_1|^2 - |z_2|^2)}{r^6} (dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2) + \frac{2(x_1x_3 + x_2x_4)}{r^6} (dx_1 \cdot dx_3 + dx_2 \cdot dx_4) \\ + \frac{2(x_1x_4 - x_2x_3)}{r^6} (dx_1 \cdot dx_4 - dx_2 \cdot dx_3),$$

where $\alpha \cdot \beta = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha$, and

$$|(\nabla^{\mathbf{e}})^{\ell} \varepsilon|_{\mathbf{e}} = O(r^{-6-\ell}) \quad \text{for all } \ell \geq 0.$$

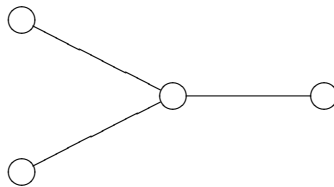
Here our identification plays the role of the diffeomorphism; the diffeomorphism is thus holomorphic for I_1 and I_1^X in this situation. However, one can only choose I_2^X and I_3^X so that the diffeomorphism is asymptotically holomorphic for the pairs (I_2, I_2^X) and (I_3, I_3^X) , in the sense given above. Notice also that $\text{tr}^{\mathbf{e}}(g_1) = 0$, so that actually $\det^{\mathbf{e}}(\mathbf{e} + g_1 + \varepsilon) = 1 + O(r^{-6})$.

7.2 Minimal resolutions

Sketchy picture of McKay correspondence. Let us restrict for now to the case where Γ is a binary dihedral subgroup of $SU(2)$ (though most of the following also applies to other finite subgroups of $SU(2)$, namely the cyclic, and binary tetrahedral, octahedral and icosahedral ones).

Fix $k \geq 3$, and consider the orbifold $X_{\mathcal{D}_k} \simeq \mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$. From Hironaka's resolution of singularities Theorem (cf. [Joy00, Th. 4.9.4]), it is known that the quotient singularity of $X_{\mathcal{D}_k}$ at 0 can be solved smoothly through successive blow-ups at that point. We are more interested in the so-called *minimal resolution* $\widetilde{X}_{\mathcal{D}_k}$ of $X_{\mathcal{D}_k}$.

This resolution is the unique one such that if one denotes by $\text{bl} : \widetilde{X}_{\mathcal{D}_k} \rightarrow X_{\mathcal{D}_k}$ the blow-up map, then $K_{\widetilde{X}_{\mathcal{D}_k}} = \text{bl}^*(K_{X_{\mathcal{D}_k}})$ (so that the discrepancy is zero, hence the alternate name *crepant resolution*). The exceptional divisor of the blow-up can be described as follows: it consists in $(k+2)$ rational curves in $\widetilde{X}_{\mathcal{D}_k}$, each of which corresponds to a vertex of the Dynkin diagram D_{k+2} (in the sense of Lie groups); two of these curves intersect (at one point, transversely) *iff* the corresponding vertices are linked by an edge in the diagram. They moreover give a basis for the homology group $H_2(\widetilde{X}_{\mathcal{D}_k}, \mathbb{Z})$. For example, if one takes $k = 2$, then the diagram is



which means that $\widetilde{X}_{\mathcal{D}_k}$ contains four rational curves as above, three of them intersecting with the "central" fourth.

The links between the Kleinian singularities $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ (and more generally \mathbb{C}^2/Γ with Γ a finite subgroup of $SU(2)$) and the Dynkin diagrams, are explained in a theory called *McKay correspondence*, see [McK80].

Volume forms. Now, general \mathcal{D}_k ALE instantons are smooth *deformations* of $\widetilde{X_{\mathcal{D}_k}}$; in particular, they are not biholomorphic to this latter one. Likewise, the volume form of such spaces can only be described with asymptotics similarly to that of Example 7.2 (or likely with a $O(r^{-8})$ instead of the $O(r^{-6})$ in the precise case of dihedral instantons). On the other hand, on minimal resolutions X of \mathbb{C}^2/Γ endowed with their ALE metric g , one can assume that the volume form Ω_g is the same as the volume form Ω_e induced by the euclidean metric on X (this holds independently of the dihedral character of Γ), and is thus well-known. This also tells us that the $O(r^{-6})$ term in the volume form of the Eguchi-Hanson metric presented in Example 7.2 is only an artifact due to the non-exhaustive expansion we give for the metric (nonetheless, this error term seems to be the correct error term in the more general case of deformations).

Taub-NUT metric on \mathbb{C}^2

THE Taub-NUT metric on \mathbb{C}^2 , introduced by S.W. Hawking [Haw77], turns out to be a general prototype for metrics of ALF gravitational instantons, which are roughly speaking complete hyperkähler 4-manifolds of *cubic* volume growth and whose Riemannian curvature has faster than quadratic decay, see [Min07]; precisions on the terminology are made below. To describe such a model, we solve an exercise in [LeB91], which is stated so as to provide a potential for the Taub-NUT metric for the standard complex structure I_1 on \mathbb{C}^2 .

We then compare the Taub-NUT and the euclidean metrics.

8.1 A potential for the Taub-NUT metric on \mathbb{C}^2

In [LeB91] C. LeBrun suggests the following exercise: let m be a positive parameter, and u and v implicitly defined on \mathbb{C}^2 by formulas:

$$\begin{aligned} |z_1| &= e^{m(u^2-v^2)}u, \\ |z_2| &= e^{m(v^2-u^2)}v \end{aligned} \tag{8.1}$$

(we do not make the dependence on m appparent here, since for now we see this parameter as fixed; we shall only add m as an index if we need to emphasize this dependence). One has:

Proposition 8.1 (LeBrun). *The metric \mathbf{f} associated to the form*

$$\omega_{\mathbf{f}} := \frac{1}{4} dd^c(u^2 + v^2 + m(u^4 + v^4))$$

for the standard complex structure I_1 on \mathbb{C}^2 is the Taub-NUT metric.

Recall briefly the following description for the Taub-NUT metric: it takes the form $V(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) + V^{-1}\eta^2$, where the y_j are the coordinates of \mathbb{R}^3 , $V = 2m(1 + \frac{1}{4mR})$ where $R^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, η is a connection 1-form on a circle bundle over $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ such that $d\eta = *_{\mathbb{R}^3}dV$; a complex structure is moreover given for example by $V dy_1 \mapsto \eta$, $dy_2 \mapsto dy_3$, the other two being given by cyclic permutation of the y_j ; see e.g. [LeB91] for details.

Remark 8.2. *Notice that with the notations of Definition 7.1, u and v are invariant under the action of ζ_k , whereas that of τ interchanges them. As a consequence, $u^2 + v^2 +$*

$m(u^4 + v^4)$ is invariant under \mathcal{D}_k , and is smooth on $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathcal{D}_k$. It is also invariant under the cyclic groups, but not anymore under the binary tetrahedral group – generated by \mathcal{D}_2 and $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon^7 & \varepsilon^7 \\ \varepsilon^5 & \varepsilon \end{pmatrix}$, with $\varepsilon = e^{i\pi/4}$ – the binary octahedral group – generated by the binary tetrahedral group and $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^7 \end{pmatrix}$ – nor the binary icosahedral group – generated by $\begin{pmatrix} -\eta^3 & 0 \\ 0 & -\eta^2 \end{pmatrix}$ and $\frac{1}{\eta^2 - \eta^3} \begin{pmatrix} \eta + \eta^4 & 0 \\ 0 & -(\eta + \eta^4) \end{pmatrix}$, with $\eta = e^{2i\pi/5}$.

As LeBrun leaves the proof to his reader, we shall give our own one here, relying on a sequence of basic lemmas. Before this, we shall mention that LeBrun's potential can be obtained by hyperkähler quotient considerations; we chose to give an elementary proof though since it exhibits several objects we shall need further.

Lemma 8.3. *The metric \mathbf{f} is Ricci-flat; more precisely, $\omega_{\mathbf{f}}^2 = 2\Omega_{\mathbf{e}}$, where we recall that $\Omega_{\mathbf{e}}$ is the standard volume form $\frac{idz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge idz_2 \wedge d\bar{z}_2}{4}$.*

Proof. We start by the computation of $\omega_{\mathbf{f}}$, which goes through that of $\frac{\partial u}{\partial z_j}, \frac{\partial v}{\partial z_j}, j = 1, 2$. One has:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_1} &= \frac{1 + 2mv^2}{(2z_1)(1 + 2m(u^2 + v^2))} u, & \frac{\partial u}{\partial z_2} &= \frac{mv^2}{z_2(1 + 2m(u^2 + v^2))}, \\ \frac{\partial v}{\partial z_1} &= \frac{mu^2v}{z_1(1 + 2m(u^2 + v^2))}, & \frac{\partial v}{\partial z_2} &= \frac{1 + 2mu^2}{(2z_2)(1 + 2m(u^2 + v^2))} v. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Indeed, differentiating the relation $|z_1| = e^{m(u^2 - v^2)} u$ with $\frac{\partial}{\partial z_1}$, it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{|z_1|}{z_1} = \left[m \left(2u^2 \frac{\partial u}{\partial z_1} - 2uv \frac{\partial v}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial u}{\partial z_1} \right] e^{m(u^2 - v^2)},$$

hence, writing $e^{m(u^2 - v^2)} = \frac{|z_1|}{u}$, $u = 2z_1 \left[(1 + 2mu^2) \frac{\partial u}{\partial z_1} - 2muv \frac{\partial v}{\partial z_1} \right]$. Similarly, applying $\frac{\partial}{\partial z_1}$ to the relation $|z_2| = e^{m(v^2 - u^2)} v$, one gets $0 = (1 + 2mv^2) \frac{\partial v}{\partial z_1} - 2muv \frac{\partial u}{\partial z_1}$, that is $\frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{2muv}{1 + 2mv^2} \frac{\partial u}{\partial z_1}$. Substituting in the previous equality, one has

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{1 + 2mv^2}{(2z_1)(1 + 2m(u^2 + v^2))} u,$$

and then $\frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{mu^2v}{z_1(1 + 2m(u^2 + v^2))}$. The other two equalities are obtained by symmetry.

Set now $\varphi = \frac{1}{4}(u^2 + v^2 + m(u^4 + v^4))$ (we will keep this notation throughout next chapters). According to formulas (8.2),

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = u(1 + 2mu^2) \frac{\partial u}{\partial z_1} + v(1 + 2mv^2) \frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{(1 + 2mv^2)u^2}{2z_1}$$

and $2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} = \frac{(1 + 2mu^2)v^2}{2z_2}$, i.e.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_1} = \frac{(1 + 2mv^2)u^2}{4\bar{z}_1} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_2} = \frac{(1 + 2mu^2)v^2}{4\bar{z}_2}$$

by conjugation. Apply again $\frac{\partial}{\partial z_1}$ and $\frac{\partial}{\partial z_2}$ to those equalities, as well as the relation $uv = |z_1 z_2|$ and the formulas (8.2), it follows, setting $R = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{f}} &= dd^c \varphi \\ &= \left(\frac{u^2(1 + 2mv^2)}{2|z_1|^2(1 + 4mR)} + m|z_2|^2 \right) idz_1 \wedge d\bar{z}_1 + m\bar{z}_2 z_1 \left(1 + \frac{1}{1 + 4mR} \right) idz_2 \wedge d\bar{z}_1 \\ &\quad + m\bar{z}_1 z_2 \left(1 + \frac{1}{1 + 4mR} \right) idz_1 \wedge d\bar{z}_2 + \left(\frac{v^2(1 + 2mu^2)}{2|z_2|^2(1 + 4mR)} + m|z_1|^2 \right) idz_2 \wedge d\bar{z}_2. \end{aligned}$$

The conclusion follows from direct computation of $\omega_{\mathbf{f}}^2$, using $uv = |z_1 z_2|$ once more. \square

Let $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ act on \mathbb{C}^2 by $\alpha \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\alpha} z_1, e^{-i\alpha} z_2)$. The infinitesimal action is given by the vector field

$$\xi := i \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right).$$

By invariance of u and v under this circle action, it is clear that $\xi \cdot u = \xi \cdot v = \xi \cdot \varphi = 0$, and similarly that $\mathcal{L}_\xi \omega_{\mathbf{f}} = 0$. Let us furthermore consider the $(2, 0)$ -form $\Theta := dz_1 \wedge dz_2$, which is symplectic and holomorphic, so that $\Theta \wedge \bar{\Theta} = 4\Omega_{\mathbf{e}} = 2\omega_{\mathbf{f}}^2$. One moreover has $\mathcal{L}_\xi \Theta = 0$.

We look for a complex hamiltonian H for the S^1 -action, relatively to the symplectic structure given by Θ . Now one has $\iota_\xi \Theta = i(z_1 dz_2 + z_2 dz_1) = d(i z_1 z_2)$, which prompts us to set $y_2 := \Im(z_1 z_2)$ and $y_3 := -\Re(z_1 z_2)$, i.e. $H = y_2 + i y_3$.

In the same way, one has $\mathcal{L}_\xi d^c \varphi = 0$, and the right-hand-side member also equals, by Cartan's formula, $\iota_\xi d d^c \varphi + d(\iota_\xi d^c \varphi)$, hence: $\iota_\xi \omega_{\mathbf{f}} = -d(d^c \varphi(\xi))$, which encourages us to set $y_1 = d^c \varphi(\xi)$ this time. All computations done, we state:

Lemma 8.4. *One has $y_1 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, and thus R indeed equals $(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}$.*

Proof. According to the proof of Lemma (8.3),

$$d^c \varphi = i(1 + 2mv^2)u^2 \left(\frac{d\bar{z}_1}{2\bar{z}_1} - \frac{dz_1}{2z_1} \right) + i(1 + 2mu^2)v^2 \left(\frac{d\bar{z}_2}{2\bar{z}_2} - \frac{dz_2}{2z_2} \right),$$

hence the result from formula (8.1).

To get the equality $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2$, it is enough to notice that $y_2^2 + y_3^2 = |y_2 + i y_3|^2 = |z_1 z_2|^2 = u^2 v^2$. \square

Finally, let us set $V = |\xi|_{\mathbf{f}}^{-2}$.

Lemma 8.5. *One has $|\xi|_{\mathbf{f}}^2 = \frac{2R}{1+4mR}$, and hence $V = 2m(1 + \frac{1}{4mR})$.*

Proof. As I_1 is the standard complex structure of \mathbb{C}^2 , $I_1 \xi = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$. The easy but tedious calculation of $|\xi|_{\mathbf{f}}^2 = \omega_{\mathbf{f}}(\xi, I_1 \xi)$ then follows. However, noticing that

$$\begin{aligned} idz_1 \wedge d\bar{z}_1(\xi, I_1 \xi) &= 2|z_1|^2, & idz_1 \wedge d\bar{z}_2(\xi, I_1 \xi) &= -2z_1 \bar{z}_2, \\ idz_2 \wedge d\bar{z}_1(\xi, I_1 \xi) &= -2z_2 \bar{z}_1, & idz_2 \wedge d\bar{z}_2(\xi, I_1 \xi) &= 2|z_2|^2; \end{aligned}$$

makes the computation of $\sum_{j,k=1}^2 (\omega_{\mathbf{f}})_{j\bar{k}} idz_j \wedge d\bar{z}_k(\xi, I_1 \xi)$ easier. \square

In order to get the Taub-NUT metric back under its classical form, we need finally a 1-form η , which would be a connection 1-form for the circle fibration $\varpi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(z_1, z_2) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$. The natural candidate is given by

$$\eta := V I_1 dy_1.$$

Lemma 8.6. *On $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$, one has*

$$\eta = \frac{i}{4R} \left[u^2 \left(\frac{d\bar{z}_1}{\bar{z}_1} - \frac{dz_1}{z_1} \right) - v^2 \left(\frac{d\bar{z}_2}{\bar{z}_2} - \frac{dz_2}{z_2} \right) \right],$$

and $\eta(\xi) = 1$ outside of 0.

Proof. By definition, $\eta = Vd^c y_1 = \frac{1}{2}iV(2u(\bar{\partial}u - \partial u) - 2v(\bar{\partial}v - \partial v))$. We then apply formula (8.2) which gives the first order derivatives of u and v , which can be rewritten (with the introduced notations) :

$$V \frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{1 + 2mv^2}{4z_1 R} u, \quad V \frac{\partial u}{\partial z_2} = \frac{mu^2 v}{2z_2 R}, \quad V \frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{mu^2 v}{2z_1 R}, \quad V \frac{\partial v}{\partial z_2} = \frac{1 + 2mu^2}{4z_2 R} v,$$

hence (for instance), the component of η in the direction of dz_1 is $-iu \frac{1+2mv^2}{4z_1 R} u + iv \frac{mu^2 v}{2z_1 R} = -\frac{iu^2}{4z_1 R}$, and similarly for the other three components. A straightforward computation suffices to see that $\eta(\xi) = 1$. \square

We shall now recover the Taub-NUT metric under a more familiar shape:

Lemma 8.7. *Outside of 0, $\omega_{\mathbf{f}} = dx_1 \wedge \eta + Vdx_2 \wedge dx_3$, and thus $\mathbf{f} = V(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) + V^{-1}\eta^2$.*

Proof. This is rather clear that the family formed by dy_2 and dy_3 is linearly independent away from $0 \in \mathbb{C}^2$, and that those forms vanish against ξ because y_2 and y_3 are invariant under the action of S^1 . We see that they vanish as well against $I_1\xi$, because for instance $I_1 dy_2 = dy_3$. Since dy_1 vanishes against ξ (y_1 is S^1 -invariant) but not against $I_1\xi$ since $I_1 dy_1 = V^{-1}\eta$, and since η vanishes $I_1\xi$ but not against ξ , we deduce that $\{dy_1, dy_2, dy_3, \eta\}$ is linearly independent away from 0.

Consequently, on $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, one has at any point:

$$\omega_{\mathbf{f}} = \alpha dy_1 \wedge \eta + \beta dy_2 \wedge \eta + \gamma dy_3 \wedge \eta + \delta dy_1 \wedge dy_2 + \varepsilon dy_1 \wedge dy_3 + \zeta dy_2 \wedge dy_3,$$

for some α, \dots, ζ (depending on the point). Now $\alpha dy_1 + \beta dy_2 + \gamma dy_3 = -\iota_{\xi} \omega_1 = dy_1$, thus $\alpha = 1$ and $\beta = \gamma = 0$, and since $\omega_{\mathbf{f}}$ is of type $(1, 1)$, one also has $\delta = \varepsilon = 0$.

It remains to determine the coefficient ζ ; we easily see that

$$(dy_1 \wedge \eta) \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) = 2iV \left| \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \right|^2 = i \frac{Vu^4}{2|z_1|^2(1+4mR)^2} = i \frac{u^4}{4R|z_1|^2(1+4mR)},$$

whereas

$$\omega_{\mathbf{f}} \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) = i \frac{u^2(1+2mv^2)}{2|z_1|^2(1+4mR)} + im|z_2|^2,$$

hence $(\omega_{\mathbf{f}} - dy_1 \wedge \eta) \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) = \left(\frac{1}{4R} + m \right) i |z_2|^2$. Now since $dy_2 \wedge dy_3 = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} (|z_1 z_2|^2)$, $dy_2 \wedge dy_3 \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) = \frac{i}{2} |z_2|^2$, thus $\zeta = \frac{1+4mR}{2R} = V$, and the lemma is proved. \square

One easily checks that η is a connection 1-form away from 0 for the fibration given by ϖ ; it is S^1 -invariant (since $R, u, v, \frac{dz_1}{z_1}$, etc. are so), and at any point $p \neq 0 \in \mathbb{C}^2$, since $\{\eta, dy_1, dy_2, dy_3\}$ is a basis of $T_p^* \mathbb{C}^2$ and $\varpi = (y_1, y_2, y_3)$, we necessarily have $T_p \mathbb{C}^2 = \ker \eta + \ker T\pi$.

Finally, the differential of η has the expected shape:

Lemma 8.8. *The differential of η is given on $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ by:*

$$d\eta = *_{\mathbb{R}^3} dV.$$

Proof. Our 1-form η is S^1 -invariant and $\eta(\xi)$ is constant; by Cartan's formula, $0 = \mathcal{L}_\xi \eta = \iota_\xi d\eta + d(\iota_\xi \eta) = \iota_\xi d\eta$, i.e.: the components of $d\eta$ in direction of the $dy_j \wedge \eta$ vanish. Moreover $d\omega_{\mathbf{f}} = 0$ thus according to the latter Proposition, $d\eta = \frac{\partial V}{\partial y_1} dy_2 \wedge dy_3 + \alpha_2 dy_3 \wedge dy_1 + \alpha_3 dy_1 \wedge dy_2$. For the computation of α_2 and α_3 , we do not have such a direct method. However, in order to simplify an explicit computation of $d\eta$, we can observe the following:

$$4\eta = \left(1 + \frac{y_1}{R}\right) d^c \log(|z_1|^2) - \left(1 - \frac{y_1}{R}\right) d^c \log(|z_2|^2),$$

by noticing simply that $u^2 = R + y_1$ and $v^2 = R - y_1$.

Since $\log(|z_1|^2)$ and $\log(|z_2|^2)$ are pluriharmonic outside of $\{z_1 = 0\}$ and $\{z_2 = 0\}$, we thus have $d\eta = \frac{1}{4} d\left(\frac{y_1}{R}\right) \wedge d^c \log(|z_1 z_2|^2) = \frac{1}{4} d\left(\frac{y_1}{R}\right) \wedge d^c \log(y_2^2 + y_3^2)$. Now

$$d\left(\frac{y_1}{R}\right) = \frac{1}{R^3} \left((y_2^2 + y_3^2) dy_1 - y_1 y_2 dy_2 - y_1 y_3 dy_3 \right)$$

and

$$d^c \log(y_2^2 + y_3^2) = I_1 d \log(y_2^2 + y_3^2) = 2 \frac{y_2 dy_3 - y_3 dy_2}{y_2^2 + y_3^2}$$

hence, after computations, $d\eta = -\frac{y_1}{2R^3} dy_2 \wedge dy_3 - \frac{y_2}{2R^3} dy_3 \wedge dy_1 - \frac{y_3}{2R^3} dy_1 \wedge dy_2 = \frac{\partial V}{\partial y_1} dy_2 \wedge dy_3 + \frac{\partial V}{\partial y_2} dy_3 \wedge dy_1 + \frac{\partial V}{\partial y_3} dy_1 \wedge dy_2$.

The lemma is proved, at least outside of $\{z_1 z_2 = 0\}$, and there is no problem in extending the formula to $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ by continuity. \square

8.2 Comparison of the Euclidean and the Taub-NUT metrics

8.2.1 Mutual control

Euclidean and Taub-NUT geometries on \mathbb{C}^2 are radically different, in the sense that \mathbf{e} and \mathbf{f} are far from being globally mutually bounded. Indeed, euclidean balls volume grows proportionally to r^4 , whereas after noticing that the function R plays the role of the distance to 0 on $(\mathbb{C}^2, \mathbf{f})$, we see that the volume of a big ball of radius R of $(\mathbb{C}^2, \mathbf{f})$ is essentially proportional to R^3 .

Another example of the geometric gap is given by the length of the circles of the S^1 -action we used to check that \mathbf{f} was the Taub-NUT metric; a circle passing through some $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ has length $2\pi r(x)$ when measured by \mathbf{e} , and length $2\pi V(x)^{-1/2}$ when measured by \mathbf{f} ; this length tends to $\pi\sqrt{2/m}$ when $R(x)$ goes ∞ – which gives us a geometric interpretation of the parameter m . We can nonetheless still compare the two metrics as follows:

Proposition 8.9. *There exists some constant $C > 0$ such that on \mathbb{C}^2 minus its unit ball,*

$$C^{-1} r^{-2} \mathbf{e} \leq \mathbf{f} \leq C r^2 \mathbf{e}.$$

Proof. Since $\mathbf{f} = V(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) + \frac{1}{V} \eta^2$, with $\eta = I_1 V dy_1$ and $dy_3 = I_1 dy_2$, we shall first evaluate $|dy_1|_{\mathbf{e}}$ and $|dy_2|_{\mathbf{e}}$. The latter one is immediate, from the identity $dy_2 = \frac{i}{2}(z_1 dz_2 + z_2 dz_1 - \bar{z}_1 d\bar{z}_2 - \bar{z}_2 d\bar{z}_1)$, which provides $|dy_2|_{\mathbf{e}} = cr$. Now, we rearrange formulas (8.1) to write

$$dy_1 = \frac{1}{2(1 + 4mR)} \left(e^{-4my_1} (\bar{z}_1 dz_1 + z_1 d\bar{z}_1) - e^{4my_1} (\bar{z}_2 dz_2 + z_2 d\bar{z}_2) \right).$$

This provides $|dy_1|_{\mathbf{e}}^2 = \frac{c}{(1+4mR)^2}(|z_1|^2 e^{-8my_1} + |z_2|^2 e^{8my_1})$. But $|z_1|^2 e^{-4my_1} = u^2$ and $|z_2|^2 e^{4my_1} = v^2$, so $|dy_1|_{\mathbf{e}}^2 = \frac{c}{(1+4mR)^2}(e^{-4my_1} u^2 + e^{4my_1} v^2) = \frac{c'}{(1+4mR)^2}(R \cosh(4my_1) - y_1 \sinh(4my_1))$. Now $R \cosh(4my_1) - y_1 \sinh(4my_1) \leq R \cosh(4my_1) + y_1 \sinh(4my_1)$ is obvious, and rearranging formulas (8.1) gives also

$$2(R \cosh(4my_1) + y_1 \sinh(4my_1)) = r^2, \quad (8.3)$$

so finally $|dy_1|_{\mathbf{e}}^2 \leq c \frac{r^2}{R^2}$. Those estimates give us the bound $\mathbf{f} \leq Cr^2 \mathbf{e}$.

On the other hand, at any point p , one can choose two 1-forms e_1 and e_2 so that (e_1, Ie_1, e_2, Ie_2) is a basis of $T_p \mathbb{C}^2$, and that

$$\mathbf{e} = e_1^2 + (Ie_1)^2 + e_2^2 + (Ie_2)^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{f} = \lambda(e_1^2 + (Ie_1)^2) + \mu(e_2^2 + (Ie_2)^2),$$

$\lambda, \mu > 0$. Since $\lambda\mu = \det^{\mathbf{e}}(\mathbf{f}) = 1$, one has $\min(\lambda, \mu) = \max(\lambda, \mu)^{-1}$ in an obvious way. This allows us to convert the bound $\mathbf{f} \leq Cr^2 \mathbf{e}$ into a bound $\mathbf{e} \leq Cr^2 \mathbf{f}$. \square

Remark 8.10. *One can notice that with R fixed, the function $y \mapsto R \cosh(4my) + y \sinh(4my)$ is convex and even on $[-R, R]$, so that its minimum is R , and its maximum is Re^{4mR} . Consequently, we get from formula (8.3) the inequality on \mathbb{C}^2 :*

$$2R \leq r^2 \leq 2Re^{4mR}, \quad (8.4)$$

which implies, among others, that R is proper on \mathbb{C}^2 . This latter inequality is sharp, in the sense that $2R = r^2$ on $\{y_1 = 0\} = \{|z_1| = |z_2|\}$, and $2Re^{4mR} = r^2$ on $\{y_1 = \pm R\} = \{z_1 z_2 = 0\}$.

8.2.2 Expressing euclidean objects in Taub-NUT vocabulary

We give here some extra entries of the dictionary between the euclidean and the Taub-NUT settings on \mathbb{C}^2 . More precisely, we give in Lemma 8.11 a vector field ζ helping to complete the dual frame of $(V^{-1/2}\eta, V^{1/2}dy_1, V^{1/2}dy_2, V^{1/2}dy_3)$ for \mathbf{f} . Then in Lemma 8.12, we express the canonical frames of 1-forms and vector fields of \mathbf{e} , i.e. the dx_j and the $\frac{\partial}{\partial x_j}$, in terms of those of \mathbf{f} .

The essential point in those expressions lies in their computational consequences; indeed, they allow to compute objects like $\nabla^{\mathbf{f}} dx_j$, and estimate quantities like $|\nabla^{\mathbf{f}} dx_j|_{\mathbf{f}}$. Such estimates will be needed in next part, when constructing rough models of non-euclidean Ricci-flat Kähler metrics on the ALE spaces X alluded to in Chapter 7.

In paragraph 8.1, we used the vector field ξ on \mathbb{C}^2 , which verified $\eta(\xi) = 1$, $dy_j(\xi) = 0$, $j = 1, 2, 3$, and $dy_1(I_1\xi) = -\frac{1}{V}$, $\eta(I_1\xi) = dy_2(I_1\xi) = dy_3(I_1\xi) = 0$. We shall complete our dual frame with the help of another vector field:

Lemma 8.11. *Define on $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ the vector field*

$$\zeta = \frac{1}{2iR} \left(e^{4my_1} \left(z_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + e^{-4my_1} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right).$$

Then $dy_2(\zeta) = 1$ whereas $\eta(\zeta) = dy_1(\zeta) = dy_3(\zeta) = 0$, and $dy_3(I_1\zeta) = 1$ whereas $\eta(I_1\zeta) = dy_1(I_1\zeta) = dy_2(I_1\zeta) = 0$. Moreover, $[\xi, \zeta] = 0$.

Proof. We only need to check the first list of equalities, since $dy_3 = I_1 dy_2$ and $\eta = I_1 V dy_1$. Let us start with $dy_2(\zeta) = 1$. Since $dy_2 = \frac{1}{2i}(z_1 dz_2 + z_2 dz_1 - \bar{z}_1 d\bar{z}_2 - \bar{z}_2 d\bar{z}_1)$, we get

$$dy_2(\zeta) = \frac{1}{2R} (e^{4my_1} |z_2|^2 + e^{-4my_1} |z_1|^2).$$

But $e^{4my_1}|z_2|^2 = v^2$, $e^{-4my_1}|z_1|^2 = u^2$, and $R = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, hence $dy_2(\zeta) = 1$.

To check that $dy_3(\zeta) = 0$, use that $dy_3 = -\frac{1}{2}(z_1dz_2 + z_2dz_1 + \bar{z}_1d\bar{z}_2 + \bar{z}_2d\bar{z}_1)$; this readily gives $dy_3(\zeta) = 0$. Now for the equality $dy_1(\zeta) = 0$, we use formula (8.2.1) to write $dy_1(\zeta) = \frac{1}{4iR(1+4mR)}(z_1z_2 - \bar{z}_1\bar{z}_2 - z_1z_2 + \bar{z}_1\bar{z}_2) = 0$. The equality $\eta(\zeta) = 0$ follows in the same way, using the formula for η of Lemma 8.6.

To see that $[\xi, \zeta] = 0$, write $[\xi, \zeta] = \frac{d}{dt}e^{t\xi} \cdot \zeta|_{t=0}$ and recall that $e^{t\xi} \cdot (z_1, z_2) = (e^{it}z_1, e^{-it}z_2)$. Since y_1 , R , as well as $\bar{z}_2\frac{\partial}{\partial z_1}$, $z_2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}$, $\bar{z}_1\frac{\partial}{\partial z_2}$ and $z_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}$ are clearly invariant under this action, we get the result. \square

Lemma 8.12. *One has the following formulas for 1-forms:*

$$\begin{aligned} dx_1 &= Vx_1dy_1 - x_2\eta + \frac{e^{4my_1}}{2R}(x_4dy_2 - x_3dy_3), \\ dx_2 &= Vx_2dy_1 + x_1\eta + \frac{e^{4my_1}}{2R}(x_3dy_2 + x_4dy_3), \\ dx_3 &= -Vx_3dy_1 + x_4\eta + \frac{e^{-4my_1}}{2R}(x_2dy_2 - x_1dy_3), \\ dx_4 &= -Vx_4dy_1 - x_3\eta + \frac{e^{-4my_1}}{2R}(x_1dy_2 + x_2dy_3); \end{aligned}$$

and for vector fields:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= -\frac{e^{-4my_1}}{2R}(x_2\xi + x_1I_1\xi) + (x_4\zeta - x_3I_1\zeta), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{e^{-4my_1}}{2R}(x_1\xi - x_2I_1\xi) + (x_3\zeta + x_4I_1\zeta), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{e^{4my_1}}{2R}(x_4\xi + x_3I_1\xi) + (x_2\zeta - x_1I_1\zeta), \\ \frac{\partial}{\partial x_4} &= \frac{e^{4my_1}}{2R}(-x_3\xi + x_4I_1\xi) + (x_1\zeta + x_2I_1\zeta). \end{aligned}$$

Proof. We shall only see how those formulas arise for dx_1 and $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Indeed, one can find the other identities using that $dx_2 = I_1dx_1$, $dx_3 = \tau^*dx_1$, $dx_4 = I_1dx_3$, etc., on the euclidean side, and $\tau^*y_j = -y_j$, $\tau^*\eta = -\eta$, $\tau^*\xi = -\xi$, $\tau^*\zeta = -d\zeta$, etc., on the Taub-NUT side.

Write $dx_1 = \alpha dy_1 + \beta\eta + \gamma dy_2 + \delta dy_3$. According to the duality between $(\xi, -VI_1\xi, \zeta, I_1\zeta)$ and (η, dy_1, dy_2, dy_3) , $dx_1(\xi) = \beta$, $dx_1(I_1\xi) = -\frac{\alpha}{V}$, $dx_1(\zeta) = \gamma$ and $dx_1(I_1\zeta) = \delta$. On the other hand, $dx_1(\xi) = \frac{1}{2}i(z_1 - \bar{z}_1) = -x_2$, $dx_1(I_1\xi) = -\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1) = -x_1$, $dx_1(\zeta) = \frac{1}{2iR}(e^{4my_1}\frac{1}{2}(z_2 - \bar{z}_2) + 0) = \frac{e^{4my_1}}{2R}x_4$ and $dx_1(I\zeta) = \frac{i}{2R}(e^{4my_1}\frac{i}{2}(z_2 + \bar{z}_2) + 0) = -\frac{e^{4my_1}}{2R}x_3$, hence the result.

Similarly, write $\frac{\partial}{\partial x_1} = \alpha\xi + \beta I_1\xi + \gamma\zeta + \delta I_1\zeta$. Then $\alpha = \eta(\frac{\partial}{\partial x_1}) = -e^{-4my_1}\frac{x_2}{2R}$, $\beta = -Vdy_1(\frac{\partial}{\partial x_1}) = -e^{-4my_1}\frac{x_1}{2R}$, $\gamma = dy_2(\frac{\partial}{\partial x_1}) = x_4$ and $\delta = dy_3(\frac{\partial}{\partial x_1}) = -x_3$, as wanted. \square

Remark 8.13. *With the previous formulas, it is easy to observe that*

$$dx_1 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_2 = dy_2 \wedge \eta + Vdy_3 \wedge dy_1$$

and

$$dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 = dy_3 \wedge \eta + Vdy_1 \wedge dy_2.$$

The reason for these identities is the following: one can check that the almost complex structures J_2 and J_3 defined by

$$\begin{cases} J_2 V dy_2 = \eta, \\ J_2 dy_3 = dy_1, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} J_3 V dy_3 = \eta, \\ J_3 dy_1 = dy_2, \end{cases}$$

are genuine complex structures (this follows from the harmonicity of $\varpi_* V$), and setting $J_1 = I_1$, that we recover with (J_j) the usual hyperkähler structure for the Taub-NUT metric. Since now Θ has constant norm, hence is parallel, for \mathbf{f} , we get moreover that $\mathbf{f}(J_2 \cdot, \cdot) = \Re(\Theta)$ and $\mathbf{f}(J_3 \cdot, \cdot) = \Im(\Theta)$. But we already know that $\Theta = \mathbf{e}(I_2 \cdot, \cdot) + i\mathbf{e}(I_3 \cdot, \cdot)$.

Notice moreover that when $m = 0$, $J_2 = I_2$ and $J_3 = I_3$.

8.2.3 Derivatives

Consider the orthonormal frame $(e_j)_{j=0,\dots,3}$ of vector fields given by

$$(e_0, e_1, e_2, e_3) = (V^{1/2}\xi, -V^{1/2}I_1\xi, V^{-1/2}\zeta, V^{-1/2}I_1\zeta)$$

away from 0. In the following, we will have to estimate the $\nabla_{e_i}^{\mathbf{f}} e_j$. The following lemma will make the computations easier:

Lemma 8.14. *One has $[e_0, e_i] = \frac{y_i}{4R^3 V^{3/2}} e_0$ for $i = 1, 2, 3$, and*

$$[e_i, e_j] = \frac{1}{4R^3 V^{3/2}} (y_i e_j - y_j e_i + 2y_k e_0)$$

for any triple $(i, j, k) \in \mathcal{I} = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$. As a consequence,

$$\nabla^{\mathbf{f}} e_0 = \frac{1}{4R^3 V^{3/2}} \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}} e_i \otimes (y_k e_j^* - y_j e_k^* - y_i e_0^*)$$

with $(e_0^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*) = (V^{-1/2}\eta, V^{1/2}dy_1, V^{1/2}dy_2, V^{1/2}dy_3)$.

Remark 8.15. *Since $e_0 = J_1 e_1 = J_2 e_2 = J_3 e_3$ and the (J_j) are parallel, an immediate induction shows that $(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell e_i = O(R^{-(1+\ell)})$ for every $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ and $\ell \geq 1$. One easily recovers from these estimates that $(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell \text{Rm}^{\mathbf{f}} = O(R^{-(3+\ell)})$, which is one of the explanation for the terminology "Asymptotically Locally Flat" for \mathbf{f} .*

Proof of Lemma 8.14. Once the statement on the Lie brackets is proved, the formula for $\nabla^{\mathbf{f}} e_0$ follows from Koszul formula for the Levi-Civita connection $\nabla^{\mathbf{f}}$ and the orthonormality of the frame (e_i) . Moreover, because of the symmetric roles of e_1, e_2, e_3 , we shall only see how to compute $[e_0, e_1]$ and $[e_1, e_2]$.

- $[e_0, e_1]$: this bracket is rather easy to compute. Recall that $e_0 = V^{1/2}\xi$, $e_1 = -V^{1/2}I_1\xi$, and ξ is holomorphic for I_1 , so that $[\xi, I_1\xi] = 0$. Moreover since V is invariant under the S^1 -action $\alpha \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\alpha} z_1, e^{-i\alpha} z_2)$, $\xi \cdot V = 0$ and $(I_1\xi) \cdot V = -V^{-1} \frac{\partial V}{\partial y_1}$. On the other hand,

$$\begin{aligned} [e_0, e_1] &= -[V^{1/2}\xi, V^{1/2}I_1\xi] = -V^{1/2}(\xi \cdot V^{1/2})I_1\xi + V^{1/2}(I_1\xi) \cdot V^{1/2}\xi - V[\xi, I_1\xi] \\ &= -\frac{1}{2}V^{-1} \frac{\partial V}{\partial y_1} \xi \quad \text{since } \xi \cdot V = 0 \quad \text{and} \quad [\xi, I_1\xi] = 0 \\ &= \frac{1}{2V^{3/2}} \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y_1} e_0, \end{aligned}$$

hence the result, as $\frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{1}{2R^3}$ and $\frac{\partial R}{\partial y_1} = \frac{y_1}{R}$.

- $[e_1, e_2]$: this bracket is more delicate than the previous one. We start with

$$[e_1, e_2] = -[V^{1/2}I_1\xi, V^{-1/2}\zeta] = -V^{1/2}(I_1\xi) \cdot V^{-1/2}\zeta + V^{-1/2}(\zeta \cdot V^{1/2})I_1\xi - [I_1\xi, \zeta].$$

We already know $(I_1\xi) \cdot V$, and similarly, $\zeta \cdot V = \frac{\partial V}{\partial y_2}$. We are thus left with the computation of $[I_1\xi, \zeta] = \mathcal{L}_{I_1\xi}\zeta = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(e^{tI_1\xi})^*\zeta$. But $e^{tI_1\xi}(z_1, z_2) = (e^{-t}z_1, e^tz_2)$; moreover, $\mathcal{L}_{I_1\xi}y_1 = dy_1(I\xi) = -V^{-1}$, and consequently $\mathcal{L}_{I_1\xi}R = -\frac{y_1}{RV}$. From the explicit formula (8.11), a direct computation yields

$$\mathcal{L}_{I_1\xi}\zeta = \frac{|z_1|^2}{iR^2(1+4mR)}\left(z_2\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1} - \bar{z}_2\frac{\partial}{\partial z_1}\right) - \frac{|z_2|^2}{iR^2(1+4mR)}\left(z_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2} - \bar{z}_1\frac{\partial}{\partial z_2}\right);$$

using formulas (8.1), formulas from Lemma 8.12 and the identities $y_2 = \frac{1}{2i}(z_1z_2 - \bar{z}_1\bar{z}_2)$, $y_3 = -\frac{1}{2}(z_1z_2 + \bar{z}_1\bar{z}_2)$, this provides:

$$\mathcal{L}_{I_1\xi}\zeta = -\frac{1}{2R^3V}(y_3\xi + y_2I_1\xi).$$

We can finally conclude that:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -\frac{1}{2V}V^{-1}\frac{y_1}{2R^3}\zeta + \frac{1}{2V}\left(-\frac{y_2}{2R^3}\right)I_1\xi + \frac{1}{2R^3V}(y_3\xi + y_2I_1\xi) \\ &= \frac{1}{4R^3V^{3/2}}(y_2e_1 - y_1e_2 + 2y_3e_0). \end{aligned} \quad \square$$

Application to \mathcal{D}_k ALE spaces (minimal resolutions)

As the Taub-NUT metrics of the previous chapter are \mathcal{D}_k -invariant, and since we have a biholomorphism between $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ and its minimal resolution X near infinity, a natural idea is to push-forward the potential of the Taub-NUT metric to X , compute the resulting (1,1)-form, and correct it into a global Ricci-flat Kähler form on X . We detail this program in the first section of this chapter; the following four sections are devoted to analytic considerations involved by the program.

Before starting though, let us recall previous constructions by Cherkis-Kapustin [CK98] and Cherkis-Hitchin [CH05], of families of dihedral ALF gravitational instantons. Nonetheless, despite their generality (they deal with general deformations of dihedral kleinian singularities), these abstract constructions are not much explicit; we thus believe our analytic and more direct method might help to give a more concrete idea of such spaces.

9.1 Description of the program

In order to construct ALF metrics on ALE gravitational instantons of dihedral type, the study of the Taub-NUT metric on \mathbb{C}^2 suggests the following program; here the positive parameter m is fixed:

1. push the Taub-NUT metric \mathbf{f} forward to a neighbourhood of infinity of X ; if one assumes moreover that X is the minimal resolution of $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$, one can identify I_1 and I_1^X , and then the pushed-forward metric is still Kähler where defined, and one can take for it the push-forward of φ as a potential.
2. glue this metric at infinity with the ALE metric to get a Kähler metric on the whole X (still with respect to I_1^X), with moreover a small Ricci form at infinity.
3. correct the Ricci form on X to get a Ricci-flat metric with ALF type asymptotics, and conclude by saying it is hyperkähler.

In a nutshell, if (X, g) denotes an ALE gravitational instanton as above, with volume form Ω_g , and giving back its freedom to $m \in (0, +\infty)$, the result we get following this program is:

Theorem 9.1. *There exists a one-parameter hyperkähler metric $g_{RF,m}$ on X , with volume form Ω_g , which are Kähler for I_1^X , indexed by a "mass" parameter $m \in (0, +\infty)$. When m*

is fixed, $(g_{RF,m} - \tilde{\mathbf{f}}_m)$ and $\nabla^{\tilde{\mathbf{f}}_m}(g_{RF,m} - \tilde{\mathbf{f}}_m)$ are $O(\tilde{R}^{-2-\delta})$ for any $\delta \in (0, 1)$. If one denotes by $\omega_{RF,m}$ the Kähler form $g_{RF,m}(I_1^X \cdot, \cdot)$, then $\omega_{RF,m}$ and ω_g are in the same cohomology class.

In this statement, $\tilde{\mathbf{f}}_m$ is a smooth extension of the pull-back of $\pi_* \mathbf{f}$, with \mathbf{f} computed with m , via the I_1^X -holomorphic identification between infinities of $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ and X ; \tilde{R} is defined likewise.

Let us come back to the program itself; as suggested, we run it once m is fixed, so omit this parameter if not needed. Point 1. is rather clear, and does not need further detailed explanations. The gluing (point 2.) will be performed in next section. The correction of the Ricci-form (point 3.), which requires several steps of extra analytic work, is finally dealt with in sections 9.3, 9.4 and 9.5.

Nonetheless, we shall explain first why we restrict ourselves to minimal resolutions from point 1, and do not deal with the general case of *deformations*. Assuming we are in this general situation, call π the projection $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ and Φ an asymptotically triholomorphic diffeomorphism identifying $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ and X outside of compact subsets. We thus have three complex structures I_j^X , verifying the quaternionic relations, such that

$$|\nabla_{\mathbf{e}}^\ell(I_j - (\pi \circ \Phi)^* I_j^X)|_{\mathbf{e}} = O(r^{-4-\ell}),$$

and this is sharp in general. In order to make a rough prototype of a Ricci-flat Kähler metric near infinity on X , one would like to take

$$(dI_1^X d\varphi)(\cdot, I_1^X \cdot),$$

where the φ stands for $(\pi \circ \Phi)_* \varphi$.

Call ι_1^X the difference $I_1 - (\pi \circ \Phi)^* I_1^X$; we can think that for instance the estimate $|\iota_1^X|_{\mathbf{e}} = O(r^{-4})$ is rather nice. On the other hand, the error term between \mathbf{f} and $dI_1^X d(\pi \circ \Phi)^* \varphi$ can be interpreted on \mathbb{C}^2 as

$$(d\iota_1^X d\varphi)(\cdot, I_1 \cdot) + (dI_1 d\varphi)(\cdot, \iota_1^X \cdot) + (d\iota_1^X d\varphi)(\cdot, \iota_1^X \cdot).$$

Now, the potential φ , which we rewrite as $\varphi = \frac{1}{2}(R + m(R^2 + y_1^2))$, is thus $O(R^2)$, and easily $|d\varphi|_{\mathbf{f}} = O(R)$, $|\nabla^{\mathbf{f}} d\varphi|_{\mathbf{f}} = O(1)$. But because of the rather loose mutual control we have between \mathbf{e} and \mathbf{f} (Proposition 8.9), the estimate on ι_1^X converts into $|\iota_1^X|_{\mathbf{f}} = O(r^{-2})$ from inequality (8.4). We hence have $|\iota_1^X d\varphi|_{\mathbf{f}} = O(r^{-2}R)$, which is $O(1)$. What is to be estimated is however $|\nabla^{\mathbf{f}}(\iota_1^X d\varphi)|_{\mathbf{f}}$, which is controlled by $|\iota_1^X|_{\mathbf{f}} |\nabla^{\mathbf{f}} d\varphi|_{\mathbf{f}} + |d\varphi|_{\mathbf{f}} |\nabla^{\mathbf{f}} \iota_1^X|_{\mathbf{f}}$.

But the best we can do so far is: $|\iota_1^X|_{\mathbf{f}} |\nabla^{\mathbf{f}} d\varphi|_{\mathbf{f}} = O(r^{-2}) = O(R^{-1})$, which may be good enough to go on, if there was not the bad estimate

$$|\nabla^{\mathbf{f}} \iota_1^X|_{\mathbf{f}} = O(R^{-1}) \tag{9.1}$$

giving $|d\varphi|_{\mathbf{f}} |\nabla^{\mathbf{f}} \iota_1^X|_{\mathbf{f}} = O(1)$. This schematic estimation says that $(d\iota_1^X d\varphi)(\cdot, I_1 \cdot)$ is an error term with the same size as \mathbf{f} ; there is no reason that the other error terms would compensate it, since

$$|(dI_1 d\varphi)(\cdot, \iota_1^X \cdot)|_{\mathbf{f}} = |\mathbf{f}(I_1 \cdot, \iota_1^X \cdot)|_{\mathbf{f}} \lesssim |\iota_1^X|_{\mathbf{f}} = O(R^{-1}),$$

and

$$|(d\iota_1^X d\varphi)(\cdot, \iota_1^X \cdot)|_{\mathbf{f}} \lesssim |d\iota_1^X d\varphi|_{\mathbf{f}} |\iota_1^X|_{\mathbf{f}} = O(R^{-1}).$$

One could think though that we should get an R^{-1} from the differentiation in (9.1); computations like those we make below (see e.g. the proof of Proposition 9.3) however

show that this hope is not justified, and that the regularity we have on objects like ι_1^X for \mathbf{e} does not propagate for such objects when considered via \mathbf{f} .

These heuristic estimates are a bit rough; nonetheless, even a precise computation of the objects in play does not enable us to make them better. A way to bypass this difficulty may lie in the choice of the potential.

9.2 Gluing the Kähler metrics

In this section, we work both on X and on \mathbb{C}^2 for convenience. Since we fix the binary dihedral group \mathcal{D}_k we work with, we fix the notation $\Gamma = \mathcal{D}_k$ for the rest of the article. To simplify the notations, we will not write the pull-backs explicitly when there is no risk of confusion.

We recall that if (X, g) is a minimal resolution of \mathbb{C}^2/Γ for the pair (I_1, I_1^X) ; one can then take $\Omega_g = \Omega_{\mathbf{e}}$ (see section 7.2).

In order to make a *global* Kähler metric with \mathbf{f} pushed-forward to X minus a compact subset, we shall work with Kähler forms and more precisely with potentials, and use the already global $\omega_g = g(I_1^X \cdot, \cdot)$. We will also need a cut-off smooth non-decreasing function, χ say, such that

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0, \\ 1 & \text{if } t \geq 1. \end{cases} \quad (9.2)$$

We need a smooth nondecreasing convex function as well. We will denote by $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such a function, with the behaviour:

$$\kappa(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0, \\ t & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

(and as a consequence, one can choose $\chi = \kappa'$).

Moreover, we denote by φ_0 a smooth function on X such that

$$\alpha_0 := \omega_g - dd^c \varphi_0 = O(r^{-8}) \quad \text{and} \quad |(\nabla^g)^\ell(\omega_g - dd^c \varphi_0)|_g = O(r^{-8-\ell})$$

for all $\ell \geq 1$, where r is a smooth positive function on X extending the push-forward of the usual r of \mathbb{C}^2 . In particular, $dd^c \varphi_0 \geq 0$ in the sense of I_1^X (1,1)-forms near infinity. Such a φ_0 can be chosen so that $|(\nabla^g)^\ell \varphi_0|_g = O(r^{2-\ell})$ for all $\ell \geq 0$.

Remark 9.2. *Here one could have taken φ_0 so that the equality $\omega_g = dd^c \varphi_0$ exactly holds outside of a compact subset of X ; this would have allowed us to avoid the analytic machinery we use in the following two sections. We decided however to leave the error term α_0 , somehow artificially, because such a perturbation would have to be dealt with if performing our program in the case when X is a deformation of \mathbb{C}^2/Γ ; we think indeed that the analytic considerations developed here would transpose nicely to that case, in order to get then a result generalizing Theorem 9.1 to any \mathcal{D}_k ALE instanton, once a better potential to start with is found.*

Recall that φ is the Taub-NUT potential with fixed mass parameter m . We state:

Proposition 9.3. *Take $K \geq 0$ so that the identification Φ between infinities of $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ and X is defined on $\varphi \geq K$. Consider $r_0 \gg 1$, $\beta \in (0, 1]$ and set*

$$\Phi_m = \kappa \circ (\varphi - K) - \chi((r - r_0)^\beta) \tilde{\varphi}_0,$$

where

$$\tilde{\varphi}_0 = \chi(r - r_0)\varphi_0$$

Then if the parameters K and r_0 (resp. β) are chosen big enough (resp. small enough), the symmetric 2-tensor g_m associated to the (1,1)-form

$$\omega_m := \omega_g + dd^c\Phi_m$$

is well-defined on the whole X , is a Kähler metric, is ALF in the sense that

$$|(\nabla^{\mathbf{f}})^j(g_m - \mathbf{f})|_{\mathbf{f}} = O(R^{-3}) \quad \text{for } j = 0, 1, 2, 3$$

and its volume form Ω_m verifies

$$|(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell(\Omega_m - \Omega_g)|_{\mathbf{f}} = O(R^{-3})$$

for $\ell = 0, 1, 2, 3$, where Ω_g is the volume form of the ALE metric g .

Proof. The proof splits into three steps, the first two corresponding to an analysis of each of the two components of the potential Φ_m . In the first step, we deal with the component $\kappa \circ (\varphi - K)$ and adjust K ; roughly speaking, we add an ALF part to an ALE Kähler metric, and get a metric which is asymptotically a sum ALE+ALF. This is the easy part. In the second step, we deal with $\chi((r - r_0)^\beta)\tilde{\varphi}_0$; this corresponds to killing the ALE part of the previous sum, in order to get an asymptotically ALF metric. Since we schematically subtract a metric to another one, this operation, where r_0 and β are adjusted, needs to be carried out carefully to guarantee that the result is still a metric; this is why this second step is a bit more delicate than the first one. In the third step, we deal with the asymptotics of g_m and of its volume form.

First step. Take K as in the statement. A direct computation yields:

$$dd^c(\kappa \circ (\varphi - K)) = \kappa'' \circ (\varphi - K)d\varphi \wedge d^c\varphi + \kappa' \circ (\varphi - K)dd^c\varphi.$$

Now since κ is convex, $\kappa'' \circ (\varphi - K)d\varphi \wedge d^c\varphi$ is always nonnegative in the sense of I_1 (or I_1^X) (1,1)-forms. Moreover, $dd^c\varphi$ is nothing but $\omega_{\mathbf{f}}$, with $\omega_{\mathbf{f}} = \mathbf{f}(I_1^X \cdot, \cdot)$ where this makes sense, so that finally, as soon as K is big enough, $dd^c(\kappa \circ (\varphi - K)) \geq 0$ on the whole X , and

$$dd^c(\kappa \circ (\varphi - K)) = \omega_{\mathbf{f}}$$

near infinity.

Consequently, $\omega_g + dd^c(\kappa \circ (\varphi - K)) \geq \omega_g$ on the whole X , and this (1,1)-form equals $\omega_g + \omega_{\mathbf{f}}$ near infinity, namely on $\{\varphi \geq K + 1\}$. We fix K once for all.

Second step. Let us choose now r_0 so that $\{r \geq r_0\}$ makes sense on X and is a subset of $\{\varphi \geq K\}$. One has, if setting $\tilde{\alpha}_0 := \omega_g - dd^c\tilde{\varphi}_0$, which equals α_0 defined in (9.2) on $\{r \geq r_0 + 1\}$:

$$\begin{aligned} \omega_g - dd^c_X(\chi((r - r_0)^\beta)\tilde{\varphi}_0) &= \chi((r - r_0)^\beta)\tilde{\alpha}_0 + (1 - \chi((r - r_0)^\beta))\omega_g \\ &\quad - \beta\chi'((r - r_0)^\beta)(r - r_0)^{\beta-1}\Xi_\beta \\ &\quad - \beta^2\chi''((r - r_0)^\beta)(r - r_0)^{2\beta-2}\Upsilon \end{aligned}$$

where

$$\begin{cases} \Xi_\beta = d\tilde{\varphi}_0 \wedge d^c r + dr \wedge d_X^c \tilde{\varphi}_0 + \tilde{\varphi}_0 dd^c r + (\beta - 1)(r - r_0)^{-1} \tilde{\varphi}_0 dr \wedge d^c r \\ \Upsilon = \tilde{\varphi}_0 dr \wedge d^c r \end{cases}$$

We deal separately with the different summands:

- $(1 - \chi((r - r_0)^\beta))\omega_g$ is everywhere nonnegative;
- $\chi((r - r_0)^\beta)\tilde{\alpha}_0$ is $O(r^{-6})$ for g (or \mathbf{e}), independently of β , and is zero on $\{r \leq r_0\}$, so is bounded below by $-\frac{1}{2}\omega_{\mathbf{f}}$ on $\{r \geq r_0\}$ provided that r_0 is fixed big enough; we fix such an r_0 once for all;
- by construction, there exists some constant C (depending on r_0 , which is fixed, but independent of β), such that:

$$|\tilde{\varphi}_0| \leq C(r - r_0)^2, \quad |d\tilde{\varphi}_0|_g \leq C(r - r_0), \quad |dd^c \tilde{\varphi}_0|_g \leq C;$$

taking a bigger constant (still independent of β) if necessary to take into account the contributions of $dr = O(1)$, $dd^c r = O(\frac{1}{r})$, $\chi'((r - r_0)^\beta)$ and so on, one thus has:

$$\begin{aligned} \left| \beta \chi'((r - r_0)^\beta)(r - r_0)^{\beta-1} \Xi_\beta + \beta^2 \chi''((r - r_0)^\beta)(r - r_0)^{2\beta-2} \Upsilon \right|_g \\ \leq C(\beta(r - r_0)^\beta + \beta^2(r - r_0)^{2\beta}) \end{aligned}$$

on the annulus where the left-hand-side may not vanish identically, i.e. $\{r_0 \leq r \leq r_0 + 1\}$. Now on this region, $(r - r_0)^\beta \leq 1$, so the latter bound becomes $C(\beta + \beta^2)$.

Take $c > 0$ small enough so that $\omega_{\mathbf{f}} \geq \frac{c}{r}\omega_g$ on $\{r \geq r_0\}$, and choose β small enough so that $\beta + \beta^2 \leq \frac{c}{4C(r_0+1)^2}$. Then

$$\beta \chi'((r - r_0)^\beta)(r - r_0)^{\beta-1} \Xi_\beta + \beta^2 \chi''((r - r_0)^\beta)(r - r_0)^{2\beta-2} \Upsilon \geq -\frac{1}{4}\omega_{\mathbf{f}}$$

on $\{r_0 \leq r \leq r_0 + 1\}$, and the left-hand-side member vanishes elsewhere.

Finally, on $X \setminus \{r > r_0\}$, $\omega_m := \omega_g + dd^c \Phi_m \geq \omega_g$; on the annulus $\{r_0 \leq r \leq r_0 + 1\}$, $\omega_m \geq \frac{1}{4}\omega_{\mathbf{f}}$; on the neighbourhood of infinity $\{r \geq r_0 + 1\}$, $\omega_m \geq \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{f}}$. In other words, ω_m is positive, hence Kähler, on the whole X .

Third step. Near infinity, namely on $\{r \geq r_0 + 1\}$, $\omega_m = dd^c \varphi + \alpha_0 = \omega_{\mathbf{f}} + \alpha_0$. We are thus left with proving that $|(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell \alpha_0|_{\mathbf{f}} = O(R^{-3})$ for $\ell \in \{0, \dots, 3\}$.

The case $\ell = 0$ does not require much work: write $|\alpha_0|_{\mathbf{f}} \leq |g|_{\mathbf{f}} |\alpha_0|_g$ (α_0 is a $(0, 2)$ tensor) and $|g|_{\mathbf{f}} = O(r^2)$, since $g \sim \mathbf{e}$, so $|\alpha_0|_{\mathbf{f}} = O(r^{-6})$, which is a $O(R^{-3})$.

In order to evaluate $\nabla^{\mathbf{f}} \alpha_0$, let us work on $\mathbb{C}^2 \setminus B$, where we can use coordinates adapted to \mathbf{e} , as well as global coordinates and a connection 1-form adapted to \mathbf{f} . We still denote the pull-back of α_0 by α_0 . Let us write on $\mathbb{C}^2 \setminus B$

$$\alpha_0 = \sum_{j,k} \alpha_{jk} dx_j \wedge dx_k$$

so that

$$\nabla^{\mathbf{f}} \alpha_0 = \sum_{j,k} d\alpha_{jk} \otimes (dx_j \wedge dx_k) + \sum_{j,k} \alpha_{jk} \nabla^{\mathbf{f}} (dx_j \wedge dx_k). \quad (9.3)$$

On the one hand, $\nabla^{\mathbf{e}}\alpha_0 = d\alpha_{jk} \otimes (dx_j \wedge dx_k)$ is a $O(r^{-9})$ for \mathbf{e} , i.e. the $d\alpha_{jk}$ are so. Since these are 1-forms, one gets that these are $O(r^{-8})$ for \mathbf{f} (we lose the r^{-1} we won by differentiating α_{jk}), and then that $d\alpha_{jk} \otimes (dx_j \wedge dx_k)$ is $O(r^{-6})$, hence $O(R^{-3})$, for \mathbf{f} . On the other hand, we have to estimate the $\nabla^{\mathbf{f}}dx_j$; we state:

Lemma 9.4. *For $j \in \{1, \dots, 4\}$, one has $|\nabla^{\mathbf{f}}dx_j|_{\mathbf{f}} = O(r)$. More generally, for any $\ell \geq 2$, one has $|(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell dx_j|_{\mathbf{f}} = O(r)$.*

We show these estimates after the end of the current proof.

For now, we conclude from these estimates and formula (9.3) that $|\nabla^{\mathbf{f}}\alpha_0|_{\mathbf{f}} = O(r^{-6})$, which is $O(R^{-3})$, and we transpose this estimate to X near infinity. It is an easy induction to prove that $|(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell \alpha_0|_{\mathbf{f}} = O(R^{-3})$ for $\ell = 2, 3$.

Let us deal finally with the volume form of ω_m . One writes

$$\Omega_m - \Omega_g = (\Omega_m - \Omega_{\mathbf{f}}) + (\Omega_{\mathbf{f}} - \Omega_{\mathbf{e}}) + (\Omega_{\mathbf{e}} - \Omega_g)$$

The asymptotics we proved on $\omega_m - \omega_{\mathbf{f}}$, hence on $g_m - \mathbf{f}$, provide $|(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell(\Omega_m - \Omega_g)|_{\mathbf{f}} = O(R^{-3})$ for $\ell = 0, \dots, 3$. Moreover, the central form $\Omega_{\mathbf{f}} - \Omega_{\mathbf{e}}$ vanishes, and thanks to our assumption that X is a minimal resolution of \mathbb{C}^2/Γ , so does $\Omega_{\mathbf{e}} - \Omega_g$. \square

Proof of Lemma 9.4. We shall only deal with the estimate of $\nabla^{\mathbf{f}}dx_1$, since it will be rather clear from our computations that those of the $(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell dx_1$, $\ell \geq 2$, would be established in a similar way. The estimates on the $(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell dx_j$, $j = 2, 3, 4$, would furthermore be obtained by symmetry.

From Lemma 8.12, using the orthonormal frame (e_j^*) given by in Lemma 8.14, one has

$$dx_1 = -x_2 V^{1/2} e_0^* + V^{1/2} x_1 e_1^* + \frac{e^{4my_1}}{2R} (V^{-1/2} x_4 e_2^* - V^{-1/2} x_3 e_3^*).$$

Thus

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{f}}dx_1 &= -dx_2 \otimes V^{1/2} e_0^* + V^{1/2} dx_1 \otimes e_1^* + \frac{e^{4my_1}}{2R} (V^{-1/2} dx_4 \otimes e_2^* - V^{-1/2} dx_3 \otimes e_3^*) \\ &\quad - x_2 \nabla^{\mathbf{f}}(V^{1/2} e_0^*) + x_1 \nabla^{\mathbf{f}}(V^{1/2} e_1^*) + \frac{e^{4my_1}}{2R} (x_4 \nabla^{\mathbf{f}}(V^{-1/2} e_2^*) - x_3 \nabla^{\mathbf{f}}(V^{-1/2} e_3^*)) \\ &\quad + d\left(\frac{e^{4my_1}}{2R}\right) \otimes (V^{-1/2} x_4 e_2^* - V^{-1/2} x_3 e_3^*). \end{aligned} \tag{9.4}$$

One handles this formula in the following way (estimations are made w.r.t. \mathbf{f}):

- $dx_1, dx_2 = O(r)$ so $-dx_2 \otimes V^{1/2} e_0^* + V^{1/2} dx_1 \otimes e_1^* = O(r)$;
- $\frac{e^{4my_1}}{2R} dx_4 = -\frac{e^{4my_1}}{2R} (V x_4 dy_1 + x_3 \eta) + x_1 dy_2 + x_2 dy_3$, so

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{4my_1}}{2R} dx_4 \right|_{\mathbf{f}} &= \left(V |z_2|^2 \left(\frac{e^{4my_1}}{2R} \right)^2 + V^{-1} |z_1|^2 \right)^{1/2} = e^{2my_1} \left(V \frac{v^2}{4R^2} + V^{-1} u^2 \right)^{1/2} \\ &= O(r), \end{aligned}$$

since $e^{2my_1} = O\left(\frac{r}{R^{1/2}}\right)$ from formula (8.4); similarly, $\frac{e^{4my_1}}{2R} dx_3 = O(r)$. Hence $\frac{e^{4my_1}}{2R} (V^{-1/2} dx_4 \otimes e_2^* - V^{-1/2} dx_3 \otimes e_3^*) = O(r)$, and thus the first line of the RHS of (9.4) is a $O(r)$;

- $\nabla^{\mathbf{f}}(V^{1/2}e_0^*)$, $\nabla^{\mathbf{f}}(V^{1/2}e_1^*)$, $\nabla^{\mathbf{f}}(V^{-1/2}e_2^*)$ and $\nabla^{\mathbf{f}}(V^{-1/2}e_3^*) = O(1/R^2)$ from Lemma 8.14; $x_1, x_2 = O(r)$, and $\frac{e^{4my_1}}{2R}x_3, \frac{e^{4my_1}}{2R}x_4 = O(\frac{r}{R})$, as $(e^{4my_1})^2|z_2|^2 = e^{4my_1}v^2 = O(r^2)$. The second line of the RHS of (9.4) is a $O(\frac{r}{R^2})$;
- $d(\frac{e^{4my_1}}{2R}) = \frac{mRdy_1 - dR}{2R^2}e^{4my_1}$, from which we deduce as above that $d(\frac{e^{4my_1}}{2R}) \otimes (V^{-1/2}x_4e_2^* - V^{-1/2}x_3e_3^*) = O(\frac{r}{R})$; the last line of the RHS of (9.4) is a $O(\frac{r}{R})$.

Collecting these estimates, we can conclude that $|\nabla^{\mathbf{f}}dx_1|_{\mathbf{f}} = O(r)$. \square

9.3 Making the metric Ricci-flat near infinity

We shall see now that we can correct our metric g_m to a metric which is Ricci-flat in a neighbourhood of infinity. Indeed, before making the metric Ricci-flat *on the whole* X , which is the final aim of point 4. in the program sketched in paragraph 9.1, we need to control our metric up to higher orders.

The price to pay to correct g_m is a slight loss of accuracy in the asymptotics of the metric for low orders, which may seem paradoxical since we want to improve regularity. However, a way to obtain the regularity we need, which is *local near infinity*, once we have a Ricci-flat metric outside a compact subset, is putting it in an adequate gauge, which corresponds to looking at it with a better chart at infinity. This compensates the slight loss alluded to above, and provides actually asymptotics at any order.

For now, we settle the problem of getting Ricci-flatness outside of a compact subset of X ; we perform the change of gauge in next section.

The first point uses a standard implicit function theorem; in order to apply it properly, we have to introduce quickly weighted Hölder spaces. Notice that thanks to the asymptotics of Proposition 9.3, and since \mathbf{f} has a positive injectivity radius, so does the metric g_m produced in this proposition; denote this injectivity radius by inj_{g_m} .

Definition 9.1 (Weighted Hölder spaces.). *Let $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times [0, 1)$, and $\delta \in \mathbb{R}$. For any $C^{0, \alpha}$ tensor u , define*

$$[u]_{\delta}^{\alpha}(x) = \sup_{\substack{y \in X, \\ d_{g_m}(x, y) < \text{inj}_{g_m}}} \left| \min(\tilde{R}(x)^{\alpha+\delta}, \tilde{R}(y)^{\alpha+\delta}) \frac{u(x) - u(y)}{d_{g_m}(x, y)^{\alpha}} \right|_{g_m} \quad (9.5)$$

where \tilde{R} is a positive smooth extension of R on X .

We define the weighted Hölder space $C_{\delta}^{k, \alpha}$ as the space of $C^{k, \alpha}$ functions f such that

$$\|f\|_{C_{\delta}^{k, \alpha}} := \|\tilde{R}^{\delta} f\|_{C^0} + \dots + \|\tilde{R}^{k+\delta} (\nabla^{g_m})^k f\|_{C^0} + \sup_X [\tilde{R}^k (\nabla^{g_m})^k f]_{\delta}^{\alpha} < +\infty$$

where the norms $\|\cdot\|_{C^0}$ are computed with g_m . We endow this space with this $\|\cdot\|_{C_{\delta}^{k, \alpha}}$ norm.

In the definition of $[\cdot]_{\delta}^{\alpha}$ (formula (9.5)), the difference $(u(x) - u(y))$ is interpreted in a usual way, i.e. bringing $u(y)$ to x with the parallel transport along the minimizing geodesic joining y to x .

Remark 9.5. *Notice that in view of the asymptotics of ω_m , one would have obtained the same $C_{\delta}^{k, \alpha}$ if defined with (a smooth extension of) \mathbf{f} , as long as $k + \alpha + \delta \leq 3$ ($\delta \geq 0$).*

We recall that g is the original hyperkähler ALE metric on X .

Proposition 9.6. *Take $(\alpha_1, \delta_1) \in (0, 1)^2$ such that $\alpha_1 + \delta_1 < 1$. Then there exists $R_0 = R_0(\alpha_1, \delta_1)$ and a smooth function $\psi \in C_{\delta_1}^{2, \alpha_1} \cap C_{\delta_1-1}^{3, \alpha_1} \cap C_{\delta_1-2}^{4, \alpha_1}$ such that $\omega_\psi := \omega_m + dd^c \psi$ is positive and satisfies*

$$\frac{1}{2} \omega_\psi^2 = \Omega_g,$$

and is thus Ricci-flat, on $\{R \geq R_0 + 1\}$.

Proof. Consider the cut-off function χ of the previous section (see equations (9.2)), take $R_0 \gg 1$, set $\chi_{R_0} = \chi(R - R_0)$ on $\{R \geq R_0\}$ and extend it by 0 elsewhere; this makes sense provided R_0 is large enough.

If we solve the problem

$$(\omega_m + dd^c \psi)^2 = (1 - \chi_{R_0}) \omega_m^2 + 2\chi_{R_0} \Omega_g \quad (9.6)$$

with $\psi \in C_\delta^{2, \alpha_1} \cap C_{\delta_1-1}^{3, \alpha_1} \cap C_{\delta_1-2}^{4, \alpha_1}$ where $\alpha_1, \delta_1 > 0$ and $\alpha_1 + \delta_1 < 1$, such that $\omega_m + dd^c \psi > 0$, then we are done, since the smoothness of ψ , which is purely local, will follow at once from local ellipticity arguments.

Now, we want to solve our problem (9.6) with the implicit function theorem. Indeed, the linearization of the Monge-Ampère operator

$$\begin{aligned} C_\nu^{k+2, \beta} &\longrightarrow C_{\nu+2}^{k, \beta} \\ \psi &\longmapsto \frac{(\omega_m + dd^c \psi)^2 - \omega_m^2}{\omega_m^2} \end{aligned}$$

($k \geq 0, \beta \in (0, 1), \nu > 0$) is, up to the sign, the Laplacian operator Δ_{g_m} of g_m . Moreover, we know that g_m is $C_{2+\delta}^{0, \alpha} \cap C_{1+\delta}^{1, \alpha} \cap C_\delta^{2, \alpha}$ close to \mathbf{f} , with $\alpha, \delta \in (0, 1), \alpha + \delta \leq 1$ and $\alpha > \alpha_1, \delta > \delta_1$. Let us quote the following lemma:

Lemma 9.7. *Take $k \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{R}$ such that $k + \nu + \alpha_1 < 3$. The operator $\Delta_{g_m} : C_\nu^{k+2, \alpha_1} \rightarrow C_\nu^{k, \alpha_1}$ is an isomorphism if $\nu \in (0, 1)$, and surjective with kernel reduced to the constants if $\nu \in (-2, 0)$.*

We postpone the proof of this lemma below.

We get from this lemma isomorphisms $\Delta_{g_m} : C_{\delta_1}^{2, \alpha_1} \rightarrow C_{2+\delta_1}^{0, \alpha_1}, E_{\delta_1-1}^{2, \alpha_1}(x_0) \rightarrow C_{1+\delta_1}^{0, \alpha_1}$ and $E_{\delta_1-2}^{3, \alpha_1}(x_0) \rightarrow C_{\delta_1}^{1, \alpha_1}$ where $E_*(x_0)$ is the space of C_* functions vanishing at some fixed point $x_0 \in X$.

So the last ingredient we need to apply the implicit function theorem to our Monge-Ampère operator is making the right-hand side member in (9.6) arbitrarily close to ω_m^2 in $C_{2+\delta}^{0, \alpha}, C_{1+\delta}^{1, \alpha}$ and $C_\delta^{2, \alpha}$ norms. In other terms, we want the $C_{2+\delta_1}^{0, \alpha_1}, C_{1+\delta_1}^{1, \alpha_1}$ and $C_{\delta_1}^{2, \alpha_1}$ norms of

$$\omega_m^2 - ((1 - \chi_{R_0}) \omega_m^2 + 2\chi_{R_0} \Omega_g) = 2\chi_{R_0} (\Omega_m - \Omega_g)$$

to be arbitrarily small. Since $(\nabla^{\mathbf{f}})^\ell (\Omega_m - \Omega_g) = O(R^{-3})$ and $\alpha_1 + \delta_1 < 1$, an easy interpolation provides this estimate for R_0 big enough.

We can thus apply simultaneously the implicit function theorem for our Monge-Ampère operator, and get $\psi_0 \in C_{\delta_1}^{2, \alpha_1}, \psi_1 \in \psi_0(x_0) + E_{\delta_1-1}^{3, \alpha_1}(x_0) \subset C_{\delta_1-1}^{2, \alpha_1}$ and $\psi_2 \in \psi_0(x_0) + E_{\delta_1-2}^{4, \alpha_1}(x_0) \subset C_{\delta_1-2}^{3, \alpha_1}$ satisfying problem (9.6). Before we see that $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2$, we shall check that the ω_{ψ_j} are positive.

In any cases, $\omega_{\psi_j} = \omega_m + o(1)$, this $o(1)$ being computed with ω_m , so that ω_{ψ_j} is positive near infinity. Now, its volume form, which we can interpret as $\det^{\omega_m}(\omega_{\psi_j}) \omega_m^2$,

never vanishes, and hence neither do its eigenvalues with respect to ω_m . Thus the ω_{ψ_j} are indeed positive as I_1^X (1,1)-forms on the whole X .

To see that $\psi_1 = \psi_2$, let us set $\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2$, call g_{ψ_1} (resp. g_{ψ_2}) the metric associated to ω_{ψ_1} (resp. ω_{ψ_2}), and observe that

$$(\omega_{\psi_1} + \omega_{\psi_2}) \wedge dd_X^c \psi_{12} = (\omega_{\psi_1} + \omega_{\psi_2}) \wedge (\omega_{\psi_1} - \omega_{\psi_2}) = \omega_{\psi_1}^2 - \omega_{\psi_2}^2 = 0.$$

On the other hand, $\omega_{\psi_1} + \omega_{\psi_2}$ is a Kähler form, namely that associated to $g_{12} := g_{\psi_1} + g_{\psi_2}$, so actually $(\omega_{\psi_1} + \omega_{\psi_2}) \wedge dd_X^c \psi_{12} = -\Delta_{g_{12}} \psi_{12} \text{vol}^{g_{12}}$. In other words, ψ_{12} is harmonic for g_{12} . But $\psi_{12} = O(R^{2-\delta})$, and g_{12} is close enough the Kähler metric $2g_{\psi_1}$, which is itself close enough to $2g_m$ say, so that we know that ψ_{12} is constant. Since $\psi_{12}(x_0) = 0$, $\psi_{12} \equiv 0$, i.e. $\psi_1 = \psi_2$. The identity $\psi_0 = \psi_1$ is deduced in the same way. \square

Notice however that the last argument in the latter proof works thanks to the complex dimension 2. As promised, we conclude this section with the proof of Lemma 9.7.

Proof of Lemma 9.7. The statement for $\Delta_{g_m} : C_\nu^{k+2, \alpha'} \rightarrow C_\nu^{k, \alpha'}$ with $\nu \in (0, 1)$ is done in the appendix of [BM10]. Using the same techniques, and the facts that 0 is the first critical weight, authorizing constants in the kernel, and -2 is the second critical weight, we get the assertion on $\Delta_{g_m} : C_\nu^{k+2, \alpha'} \rightarrow C_\nu^{k, \alpha'}$ with $\nu \in (-2, 0)$. The fact that the second critical weight is -2 , and not -1 , is due to the action of \mathcal{D}_k , which makes $(\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k, \mathbf{f})$, hence $(X, \tilde{\mathbf{f}})$, into a circle fibration over \mathbb{R}^3/\pm at infinity. \square

9.4 Improvement of the asymptotics

When one has a Ricci-flat metric, it is a somehow usual trick in Riemannian geometry to put the metric in an adequate gauge, in order to improve the regularity we can state on it. Roughly speaking, this process corresponds to look at the metric in a better chart, in which the artifacts of its construction disappear, letting one use inductive ellipticity arguments to reach the desired regularity.

We hence want to look at our metric g_ψ pulled-back by some diffeomorphism, or, which is equivalent of our purpose, to look at its pull-back to \mathbb{C}^2 pulled-back once more by a diffeomorphism of \mathbb{C}^2 ; we work on this space instead of X for minor technical reasons. Before explaining what will guide us for the choice of such a diffeomorphism, let us precise the class we shall take it in.

9.4.1 The diffeomorphisms

We recall that the orthonormal frames (e_i) and (e_i^*) are given in paragraph 8.2.3.

Definition 9.2. Let $(k, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times (0, 1)$, and let $\nu > 0$. We denote by $\mathbf{Diff}_\nu^{k, \alpha}$ the class of diffeomorphisms ϕ of \mathbb{C}^2 such that:

- ϕ has regularity (k, α) ;
- there exists a constant C such that for any $x \in \mathbb{C}^2$, $d_{\mathbf{f}}(x, \phi(x)) \leq C(1 + R(x))^{-\nu}$;
- take $R_0 \geq 1$ such that for any $x \in \{R \geq R_0\}$, $d_{\mathbf{f}}(x, \phi(x)) \leq \text{inj}_{\mathbf{f}}$. Denote by $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2$ the minimizing geodesic for \mathbf{f} joining $\phi(x)$ to x and by p_{γ_x} the parallel transport along γ_x . Consider the maps $\phi_{ij} : \{R \geq R_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$\phi_{ij}(x) = e_i^*((T_x \phi \circ p_{\gamma_x}(1) - \text{id})(e_j)),$$

and extend them smoothly to $\{R \leq R_0\}$. We then ask $\|\phi_{ij}\|_{C_{\nu+1}^{k-1,\alpha}}$ to be finite.

We endow $\mathbf{Diff}_{\nu}^{k,\alpha}$ with the obvious topology.

In this definition the involved weighted Hölder spaces are the analogues for \mathbf{f} of those of section 9.3 for g_m .

This definition gives a concrete idea of what is a diffeomorphism of class $C_{\nu}^{k,\alpha}$, and makes the following lemma quite intuitive:

Lemma 9.8. *For any $Y \in C_{\nu}^{k,\alpha}(\mathbb{C}^2)$ with $\|Y\|_{C_{\nu}^{k,\alpha}}$ small enough, the map*

$$\phi_Y : x \mapsto \exp_x^{\mathbf{f}}(Y(x))$$

is in $\mathbf{Diff}_{\nu}^{k,\alpha}$. Conversely, any $\phi \in \mathbf{Diff}_{\nu}^{k,\alpha}$ close enough to the identity has the form ϕ_Y for a unique $Y \in C_{\nu}^{k,\alpha}$.

In other words, one can parametrise a neighbourhood of identity in $\mathbf{Diff}_{\nu}^{k,\alpha}$ by a neighbourhood of 0 in $C_{\nu}^{k,\alpha}$.

Proof. This statement is standard, so we will content ourselves with a word on the injectivity of the ϕ_Y . Suppose $\|Y\|_{C_{\nu}^{k,\alpha}} \leq 1$. Take a triplet (y, x_1, x_2) of points of X such that $y = \phi_Y(x_1) = \phi_Y(x_2)$. With the estimate $\mathbf{Rm}^{\mathbf{f}} = O(R^{-3})$, one gets a constant C independent of the points and Y such that $d_{\mathbf{f}}(x_1, x_2) \leq C(1 + R(y))^{-4-3\nu} \|Y\|_{C_{\nu}^{k,\alpha}} d_{\mathbf{f}}(x_1, x_2)$. This can be made with two steps; first we call γ_i the geodesic $t \mapsto \exp_{x_i}^{\mathbf{f}}(tY(x_i))$:

1. control $d_{\mathbf{f}}(x_1, x_2)$ by $|p_{\gamma_1}(1)(Y(x_1)) - p_{\gamma_2}(1)(Y(x_2))|(1 + R(y))^{-3-2\nu} \|Y\|_{C_{\nu}^{k,\alpha}}^2$ (use [BK81, Prop. 6.6]);
2. interpolate between the geodesics γ_1 and γ_2 via a minimizing geodesic $\alpha = \exp_{x_1}^{\mathbf{f}}(\cdot Z)$ joining x_1 to x_2 to get

$$|p_{\gamma_1}(1)(Y(x_1)) - p_{\gamma_2}(1)(Y(x_2))| \leq C d_{\mathbf{f}}(x_1, x_2) \|Y\|_{C_{\nu}^{k,\alpha}} (1 + R(y))^{-1-\nu};$$

the interpolation can be written for example as $\gamma_s(t) = \exp_{\alpha(s)}^{\mathbf{f}}[tY(\alpha(s))]$. \square

9.4.2 The gauge and its consequences

We are now ready to put the metric g_{ψ} , pulled-back to \mathbb{C}^2 and extended smoothly, in so-called *Bianchi-gauge* with respect to \mathbf{f} , at least outside a compact set. We denote by $B^g = \delta^g + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g$ the Bianchi operator of any Riemannian metric on \mathbb{C}^2 . Recall that Φ is a holomorphic identification between infinities of \mathbb{C}^2/Γ and X , and that π is the projection $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$.

We assume that the parameter δ_1 in Proposition 9.6 is fixed $> \frac{1}{2}$. We state:

Proposition 9.9. *Let $(\alpha_2, \delta_2) \in (0, 1)^2$ such that $\alpha_2 < \alpha_1$, $\frac{1}{2} < \delta_2 < \delta_1$, with (α_1, δ_1) fixed in Proposition 9.6. There exists a smooth diffeomorphism $\phi \in \mathbf{Diff}_{\delta_2}^{1,\alpha_2}$ such that*

$$B^{\phi^* \mathbf{f}}((\Phi \circ \pi)^* g_{\psi}) = 0 \tag{9.7}$$

near infinity on \mathbb{C}^2 , where g_{ψ} stands for the metric of Proposition 9.6. Moreover, ϕ can be chosen so as to commute with the action of Γ .

Before proving Proposition 9.9, we state the following consequence:

Corollary 9.10. *Let $\delta_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ and ϕ as in Proposition 9.9, and denote by $\tilde{\phi}$ the diffeomorphism induced on the infinity of X by the diffeomorphism ϕ of Proposition 9.9. Then $(g_\psi - \tilde{\phi}^*\tilde{\mathbf{f}}) \in C_{\delta_2+1}^\infty(X, \tilde{\phi}^*\tilde{\mathbf{f}})$.*

Proof of Proposition 9.9. Recall that χ is the smooth nondecreasing cut-off function defined such that (9.2) holds. Now, for R_1 big enough,

$$g_{R_1} := \chi(R - R_1)(\Phi \circ \pi)^* g_\psi + (1 - \chi(R - R_1))\mathbf{f}$$

is a well defined metric on X , and is in the set $\mathbf{Met}_{\delta_1+1}^{1,\alpha_1}(\mathbf{f})$ of metrics $C_{\delta_1+1}^{1,\alpha_1}$ close to \mathbf{f} ; it is moreover Γ -invariant. We want to find $\phi \in \mathbf{Diff}_{\delta_2}^{1,\alpha_2}$ such that $B^{\phi^*\mathbf{f}}(g_{R_1}) = 0$, so that (9.7) will be verified on $\{R \geq R_1 + 1\}$. Hence we are led to look at the operator

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{Diff}_{\delta_2}^{2,\alpha_2} \times \mathbf{Met}_{\delta_2+1}^{1,\alpha_2}(\mathbf{f}) &\longrightarrow C_{\delta_2+2}^{0,\alpha_2}(T^*\mathbb{C}^2) \\ (\phi, g) &\longmapsto B^{\phi^*\mathbf{f}}(g_{R_1}), \end{aligned}$$

where of course, $C_{\delta_2+2}^{0,\alpha_2}(T^*\mathbb{C}^2)$ denotes the space of $C_{\delta_2+2}^{0,\alpha_2}$ 1-forms on \mathbb{C}^2 . Indeed, we want to use the implicit function theorem in a neighbourhood of (id, \mathbf{f}) to find ϕ once g is fixed, and we are interested in choosing $g = g_{R_1}$. Now, this latter R_1 can be arbitrarily big, provided that $\|g_{R_1} - \mathbf{f}\|_{C_{\delta_2}^{1,\alpha_2}}$ is arbitrarily small. But this is precisely the case, since $(g_\psi - \tilde{\mathbf{f}}) \in C_{\delta_1}^{1,\alpha_1}$ on X , and $\alpha_2 < \alpha_1$, $\delta_2 < \delta_1$ (whereas we would have no mean to claim that $\|g_{R_1} - \mathbf{f}\|_{C_{\delta_1}^{1,\alpha_1}} \rightarrow 0$ when R_1 goes to ∞).

There only remains to observe that the derivative of Φ at (id, \mathbf{f}) with respect to its first argument is an isomorphism between $C_{\delta_2}^{2,\alpha_2}(T\mathbb{C}^2)$ and $C_{\delta_2+2}^{0,\alpha_2}(T^*\mathbb{C}^2)$. But actually this derivative is, after identifying $C_{\delta_2+2}^{0,\alpha_2}(T^*\mathbb{C}^2)$ to $C_{\delta_2+2}^{0,\alpha_2}(T\mathbb{C}^2)$, the rough Laplacian $(\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}}$ acting on vector fields, since \mathbf{f} is Ricci-flat. It is precisely an isomorphism in our situation; until the end of this proof, since we do not use α_1 and δ_1 anymore, α and δ stand for α_2 and δ_2 .

- *injectivity:* take $v \in C_\delta^{2,\alpha}$ so that $(\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}}v = 0$. For $t > 0$, one can write the integration by parts

$$\int_{\{R \leq t\}} \langle v, (\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}}v \rangle_{\mathbf{f}} \text{vol}^{\mathbf{f}} = \int_{\{R \leq t\}} |\nabla^{\mathbf{f}}v|^2 \text{vol}^{\mathbf{f}} - \int_{\{R=t\}} v \odot \nabla^{\mathbf{f}}v \text{vol}^{\mathbf{f}}|_{\{R=t\}}.$$

The boundary term is $O(t^{2-\delta-(\delta+1)}) = O(t^{1-2\delta})$ (the spheres of radius t have their volume in t^2 in Taub-NUT geometry), and hence $\nabla^{\mathbf{f}}v = 0$ since $\delta > \frac{1}{2}$. Such a v is thus parallel, and since it tends to 0, we must have $v = 0$. Notice that since there is no critical value in $(0, 1)$, the injectivity of $(\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}}$ still holds when $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$.

- *surjectivity:* according to the theory of elliptic operators in weighted spaces, the surjectivity of $(\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}} : C_\delta^{2,\alpha} \rightarrow C_{\delta+2}^{0,\alpha}$ amounts to the injectivity of $(\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}}$ on $C_{1-\delta}^{0,\alpha}$. Thus if $w \in C_{1-\delta}^{0,\alpha}$ is in the kernel of $(\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}}$, we get by weighted elliptic estimates (see the techniques of [BM10, App.]) that $w \in C_{1-\delta}^{2,\alpha}$. Now we noticed that $(\nabla^{\mathbf{f}})^*\nabla^{\mathbf{f}}$ is injective on $C_{1-\delta}^{2,\alpha}$, and thus $w = 0$.

Finally, we have to check that the vector field Y such that $\Psi(\phi_Y, g_{R_1}) = 0$ given by the implicit function theorem is Γ -invariant; it is a direct consequence of its uniqueness (if chosen close enough to 0), and the Γ -invariance of the problem $\Psi(\phi, g_{R_1}) = 0$. The smoothness of Y , and hence that of ϕ_Y , is purely local. \square

Remark 9.11. We chose to work back on \mathbb{C}^2 with \mathbf{f} instead of staying on X with $\tilde{\mathbf{f}}$ to have exactly a rough Laplacian, and not $(\nabla^{\tilde{\mathbf{f}}})^* \nabla^{\tilde{\mathbf{f}}} + \text{Ric}^{\tilde{\mathbf{f}}}$. Indeed, since $\text{Ric}^{\tilde{\mathbf{f}}}$ has no reason to be small when we extend \mathbf{f} on X , we would not have been able to give an isomorphism statement for the latter operator. It reduces nonetheless to a rough Laplacian near infinity; an alternate proof could thus consist in working with diffeomorphisms of X minus some compact set, and solve a Dirichlet problem as linearized problem.

Proof of Corollary 9.10. Take ϕ as in Proposition 9.9. Then since g_ψ is Ricci-flat at infinity, one has, outside of a compact subset of X ,

$$\begin{cases} \text{Ric}^{g_\psi} &= 0 \\ B^{\tilde{\phi}^* \tilde{\mathbf{f}}}(g_\psi) &= 0 \end{cases}$$

Set $\tilde{\mathbf{F}} := \tilde{\phi}^* \tilde{\mathbf{f}}$ where it makes sense, and extend it as a Riemannian metric on X . Set also

$$\Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}(h) = \text{Ric}(h) + (\delta^h)^* B^{\tilde{\mathbf{F}}} h$$

for locally C^2 Riemannian metrics h , so that $\Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{\mathbf{F}}) = \Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}(g_\psi) = 0$ near infinity. Set now $\varepsilon := g_\psi - \tilde{\mathbf{F}} = (g_\psi - \tilde{\mathbf{f}}) + (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{F}}) \in C_{1+\delta_2}^{1,\alpha_2}$. Since $\Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}$ is an operator of order 2, we can write schematically

$$0 = \Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{\mathbf{F}}) - \Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}(g_\psi) = (d_{\tilde{\mathbf{F}}} \Phi^{\tilde{\mathbf{F}}})(\varepsilon) + P(\varepsilon, \partial\varepsilon, \partial^2\varepsilon).$$

where $P(\varepsilon, \partial\varepsilon, \partial^2\varepsilon)$ is some combination of ε , its first and second derivatives, which is at least quadratic, and with coefficients depending on $\tilde{\mathbf{F}}$. Now, in local coordinates,

$$\begin{aligned} (\Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}(h))_{ij} &= -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{F}}^{kr} (\partial_{ij} h_{kr} - \partial_{ir} h_{jk} - \partial_{jk} h_{ir} + \partial_{kr} h_{ij}) \\ &\quad + (\tilde{\mathbf{F}}^{kr} - h^{kr}) (\partial_{ij} h_{kr} - \frac{1}{2} (\partial_{ir} h_{jk} - \partial_{jk} h_{ir}) + \partial_{kr} h_{ij}) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\partial_j h^{kr}) (\partial_i h_{kr} + \partial_k h_{ir} - \partial_r h_{ik}) - (\partial_i h^{kr}) (\partial_j h_{kr} + \partial_k h_{jr} - \partial_r h_{jk})] \\ &\quad - (\Gamma_{jk}^\ell(h) \Gamma_{i\ell}^k(h) - \Gamma_{ij}^\ell(h) \Gamma_{k\ell}^k(h)) \\ &\quad + S_{ij} [h_{j\ell} (\partial_i h^{\ell p}) (\partial_k h_{rp} + \partial_r h_{pk} - \partial_p h_{rk}) + h_{k\ell} (\partial_i h^{\ell p}) (\partial_j h_{rp} + \partial_r h_{jp} - \partial_p h_{jr})] \\ &\quad - [\tilde{\mathbf{F}}^{kr} (\frac{1}{2} \partial_\ell h_{kr} - \partial_k h_{\ell r}) + \frac{1}{2} h_{kr} \partial_\ell \tilde{\mathbf{F}}^{kr} + \tilde{\mathbf{F}}^{kr} h_{\ell m} \Gamma_{kr}^\ell(h) + \tilde{\mathbf{F}}^{kr} h_{km} \Gamma_{\ell r}^m(h)], \end{aligned} \tag{9.8}$$

where S_{ij} means the symmetrization with respect to indexes i and j of its argument, and $\Gamma(h)$ the Christoffel symbols of h .

The interest of this formula lies in the following: in $P(\varepsilon, \partial\varepsilon, \partial^2\varepsilon)$,

1. the only occurrence of the second derivatives of $\varepsilon = g_\psi - \tilde{\mathbf{F}}$, which we denote by $\partial^2\varepsilon$ in (9.8), is via a tensor of type $\varepsilon \odot \partial^2\varepsilon$, where \odot is some algebraic operation with coefficients depending only on g_ψ and $\tilde{\mathbf{F}}$;
2. there is no appearance in (9.8) of terms of type $\varepsilon \odot \varepsilon$, unless through a term of type $\varepsilon \odot \varepsilon \odot \partial\varepsilon$;
3. the algebraic coefficients are controlled (for $\tilde{\mathbf{F}}$ say) in C^{1,α_2} .

Let us sum those three points up by saying that

$$(d_{\tilde{\mathbf{F}}} \Phi^{\tilde{\mathbf{F}}})(\varepsilon) + \varepsilon \odot \partial^2\varepsilon = \varepsilon \odot \varepsilon \odot P_1(\varepsilon, \partial\varepsilon) + \varepsilon \odot \partial\varepsilon \odot P_2(\varepsilon, \partial\varepsilon), \tag{9.9}$$

which provides us with a control of $(d_F\Phi^{\mathbf{F}})(\varepsilon) + \varepsilon \odot \partial^2\varepsilon$ in $C_{2\delta_2+3}^{0,\alpha_2}$. On the other hand, since $\tilde{\mathbf{F}}$ is Ricci-flat in a neighbourhood of infinity, the derivative $d_{\tilde{\mathbf{F}}}\Phi^{\tilde{\mathbf{F}}}$ there is well-known: it is nothing but $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{F}}}$, where $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{F}}}$ denotes the Lichnerowicz Laplacian associated to $\tilde{\mathbf{F}}$. Now since $\varepsilon \in C_{1+\delta_2}^{1,\alpha_2}$, the perturbed Laplacian

$$\mathcal{L}_\varepsilon : \hat{\varepsilon} \longmapsto \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{F}}}\hat{\varepsilon} + \varepsilon \odot \partial^2\hat{\varepsilon}$$

(where we emphasize that the bareheaded ε is seen as *fixed*) is $C_{1+\delta_2}^{1,\alpha_2}$ close to $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{F}}}$, and in particular is elliptic near infinity. The weighted estimates are thus the same for this operator as for $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{F}}}$ (at least near infinity). Since $\varepsilon \in C_{1+\delta_2}^{1,\alpha_2}$, we get from (9.9), which we rewrite as $\mathcal{L}_\varepsilon\varepsilon \in C_{2\delta_2+3}^{0,\alpha_2}$, that $\varepsilon \in C_{1+\delta_2}^{2,\alpha_2}$ near infinity and hence on X , since it is smooth.

Plugging back this estimate into (9.9), we get $\mathcal{L}_\varepsilon\varepsilon \in C_{2\delta_2+3}^{1,\alpha_2}$, with $\mathcal{L}_\varepsilon C_{\delta_2+1}^{2,\alpha_2}$ close to $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{F}}}$. It follows that $\varepsilon \in C_{1+\delta_2}^{3,\alpha_2}$ near infinity, and thus on the whole X . An immediate inductive repetition of these arguments provides finally that $\varepsilon \in C_{\delta_2+1}^\infty$. \square

Reformulation of Corollary 9.10. Set now (on \mathbb{C}^2) $\bar{y}_j = \phi^*(y_j)$ and $\bar{\eta} = \phi^*(\eta)$, and so on, so that near infinity on X , $\tilde{\mathbf{F}} = \bar{V}(d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + d\bar{y}_3^2) + \bar{V}^{-1}\bar{\eta}^2$. Forgetting the projection π and the identification Φ , since I_1 is parallel for g_ψ , in view of Corollary 9.10, it is a rather simple exercise to write

$$g_\psi = \bar{V}(d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + d\bar{y}_3^2) + \bar{V}^{-1}\bar{\eta}^2 + \varepsilon$$

with $\varepsilon \in C_{\delta_2+1}^\infty$, and $(I_1\bar{V}d\bar{y}_1 - \bar{\eta})$ and $(I_1d\bar{y}_2 - d\bar{y}_3) \in C_{\delta_2+1}^\infty(\tilde{\mathbf{F}})$.

9.5 Making the metric Ricci-flat on the whole X .

We perform now the very last step of our program. For this we state a general Calabi-Yau theorem for Kähler ALF 4-manifolds of dihedral type – terminology is made clear right after the statement –, which we prove in next chapter:

Theorem 9.12. *Let (Y, g_Y, J^Y, ω_Y) be an ALF Kähler 4-manifold of dihedral type. Given a C_{loc}^∞ function f such that there exists some positive $\beta \in (0, 1)$ such that $(\nabla^{g_Y})^\ell f = O(R^{-2-\ell-\beta})$ for all $\ell \geq 0$, there exists a unique $\varphi \in C_{loc}^\infty$ such that*

$$(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f\omega_Y^2, \tag{9.10}$$

and $(\nabla^{g_Y})^\ell\varphi = O(R^{-\ell-\beta})$ for all $\ell \geq 0$.

4-manifolds of ALF dihedral type. Before applying this theorem to our construction, we shall define the terms it involves. In particular, let us clarify the statement " (Y, g_Y, J, ω_Y) is an ALF Kähler 4-manifold of dihedral type". We say so if (Y, g_Y, J^Y, ω_Y) is a complete Kähler manifold of real dimension 4 such that:

- outside a compact subset, Y admits a holomorphic two-sheeted covering space $(\mathcal{Y}, J^{\mathcal{Y}})$ which is the total space of an S^1 -fibration $\varpi = (y_1, y_2, y_3)$ over \mathbb{R}^3 minus some ball;
- the fibration is equivariant under the \mathbb{Z}_2 -action on \mathcal{Y} : if α generates the \mathbb{Z}_2 -action, then $\varpi(\alpha(y)) = -\varpi(y)$ for any $y \in \mathcal{Y}$;

- g_Y is asymptotic to some metric h adapted to the fibration; more precisely, there exists $L > 0$ and an S^1 -invariant 1-form μ such that if $\frac{L}{2\pi}T$ is the infinitesimal generator of the S^1 -action on the fibers, then $\mu(T) = 1$, and

$$h := \varpi^* g_{\mathbb{R}^3} + \mu^2 \quad \text{on } \mathcal{Y},$$

then for some $\nu > 0$, if we still denote by h its push-forward on Y ,

$$(\nabla^h)^\ell (g - h) = O(\rho^{-\nu-\ell}) \quad \text{for all } \ell \geq 0.$$

We also assume the following decay condition on the connection form μ :

$$D^\ell \mu = O(\rho^{-\nu-1-\ell}) \quad \text{for all } \ell \geq 1,$$

where D is the standard connection on \mathbb{R}^3 and ρ is the radius on \mathbb{R}^3 , transposed and extended smoothly to Y .

- the complex structure J^Y and ϖ are compatible in the sense that: $D^\ell (J^Y dx_1 - \mu) = O(R^{-\ell-\tau})$ and $D^\ell (J^Y dx_2 - dx_3) = O(R^{-\ell-\tau})$ for all $\ell \geq 0$.

One can check that if (Y, g_Y, J^Y, ω_Y) verifies this definition, then $(\nabla^{g_Y})^\ell \text{Rm}^{g_Y} = O(\rho^{-\nu-2-\ell})$ for all $\ell \geq 0$.

Application of Theorem 9.12. Set $Y = X$, $J^Y = I_1^X$, $g_Y = g_\psi$, and take the fibration induced by $\phi^*(y_1, y_2, y_3)$ on $(\mathbb{C}^2 \setminus B) / \langle \zeta_k \rangle$, with ϕ the diffeomorphism involved in the gauge process (section 9.4). This provides $(X, g_\psi, I_1^X, \omega_\psi)$ the structure of an ALF 4-manifold of dihedral type. The parameter L , the geometric interpretation of which is the length of the fibers at infinity, becomes $\frac{\pi\sqrt{2/m}}{k}$. Thus set $f = \log\left(\frac{\Omega_g}{\text{Vol}^{g_\psi}}\right)$, so that $\Omega_g = e^f \text{vol}^{g_\psi}$; since f is smooth and has compact support, it verifies the hypotheses of Theorem 9.12 for any $\beta \in (0, 1)$.

The theorem now gives us a φ which is in C_β^∞ for any $\beta \in (0, 1)$ and such that

$$(\omega_\psi + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f \omega_\psi^2 = 2\Omega_g,$$

and $\omega_{RF} := \omega_\psi + i\partial\bar{\partial}\varphi$ is Kähler by the usual arguments (equivalent to ω_ψ at infinity, nowhere-vanishing determinant). The associated Riemannian metric, g_{RF} say, is thus Kähler for I_1^X and Ricci-flat, and $(g_{RF} - g_\psi) \in C_{\beta+2}^\infty$ for any $\beta \in (0, 1)$.

Conclusion of the program. The Ricci-flat metric g_{RF} is also hyperkähler; indeed, set $\omega_j = g(I_j^X \cdot, \cdot)$, $j = 2, 3$, and denote by θ the holomorphic (2,0)-form $\omega_2 + i\omega_3$. Then $\theta \wedge \bar{\theta} = 4\Omega_g$. Hence θ has constant norm with respect to g_{RF} and is thus parallel; so are ω_2 and ω_3 . Define endomorphisms J_j^X of TX by $\omega_j = g_{RF}(J_j^X \cdot, \cdot)$, $j = 2, 3$. Elementary manipulations tell us these are almost-complex structures, that g_{RF} is hermitian for them, and that $J_1^X J_2^X J_3^X = -1$ if one sets $J_1^X = I_1^X$. They are automatically parallel, hence integrable: (g_{RF}, J_j^X) is hyperkähler.

To sum our construction up, we say for example that g_{RF} is Kähler with respect to I_1^X , hyperkähler with volume form Ω_g , and $(g_{RF} - \mathbf{f}) \in C_{\delta_1+2}^0 \cap C_{\delta_1+1}^1$. Now g_{RF} may depend on our intermediate steps, like Propositions 9.3 and 9.6; suppose then g'_{RF} is obtained with the same program, but with different parameters; in particular, call δ'_1 the relevant one. Following the program nevertheless, we see that $\omega_{RF} - \omega'_{RF}$ writes $dd^c \nu$ for some $\nu \in C_{\min(\delta_1, \delta'_1)}^2$. Moreover g_{RF} and g'_{RF} have the same volume form; as a consequence,

$\Delta_{g_{RF}}\nu \leq 0$, and thus $\nu \leq 0$. Arguing symmetrically from the identity $\omega_{RF} = \omega'_{RF} - dd^c\nu$ gives $\nu \geq 0$, whence $g_{RF} = g'_{RF}$.

A consequence of this uniqueness property is that $(g_{RF} - \tilde{\mathbf{f}}) \in C^0_{\delta+2} \cap C^1_{\delta+1}$ for any $\delta \in (0, 1)$; the naive prototype $(\Phi \circ \pi)_*\mathbf{f}$ on X is thus a rather good approximation to the desired Ricci-flat metric. Despite this, we have to make some detour by a diffeomorphic perturbation of \mathbf{f} to perform the last step of our construction. This concludes the program we described at the beginning of this part, and completes the proof of Theorem 9.1.

Proof of Theorem 9.12

WE shall use for proving Theorem 9.12 a classical method in the study of Monge-Ampère equations: the *continuity method*. This method was suggested by Calabi for the resolution of the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds. Since the successful use by Yau [Yau78] of this method, it has been adapted to different non-compact settings; let us quote here the version by Joyce [Joy00, ch. 8] for ALE manifolds, which greatly inspired ours. We also refer the reader to Tian and Yau's seminal work [TY90, TY91], which pioneered the research on generalizing Calabi-Yau theorem to non-compact manifolds. We shall mention a result by Hein [Hei10, Prop. 4.1] too, very similar to ours if taking Hein's parameter $\beta = 3$, but dealing with less precise asymptotics.

We hence start this part by describing the method, and follow by the analytic work (in particular, a priori estimates) it requires.

10.1 The continuity method.

The principle of this method is not to solve directly the Monge-Ampère equation (9.10), but to solve a one-parameter family of such equations in which the right-hand-side term moves from ω_Y^2 to $e^f \omega_Y^2$. Concretely, we consider the equations

$$(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^m = e^{tf} \omega_Y^m \quad (E_t)$$

for $t \in [0, 1]$. Now set $S := \{t \in [0, 1] \mid (E_t) \text{ has a unique solution } \varphi_t \in C_\beta^\infty\}$; the weighted space involved in this definition is defined on Y in total analogy with those of section 9.3 (replace g_m by g_Y , \tilde{R} by ρ , and so on), and we could express Theorem 9.12 by writing $f \in C_{\beta+2}^\infty$ and $\varphi \in C_\beta^\infty$.

Up to the uniqueness of the solution 0 of (E_0) , it is obvious that $0 \in S$. We shall then prove:

1. the set S is closed (section 10.2);
2. the set S is open (section 10.3).

Theorem 9.12 then follows from an immediate connectedness argument.

In order to prove the openness of S , one observes that the linearization of the Monge-Ampère operator is (nearly) a Laplacian close enough to Δ_{g_Y} ; this allows one to use the isomorphisms induced between some Hölder spaces, plus ellipticity of such an operator. This is done in section 10.3.

On the other hand, in order to prove the closedness of S (the hard part), we need some compactness properties for solutions of a family of (E_t) , and this we get by establishing a priori estimates on such solutions. This is done in paragraph 10.2.5.

The easiest part is the uniqueness of the solution of any (E_t) , and we shall deal with it now as a warm-up.

Lemma 10.1. *Let $t \in [0, 1]$, and let φ_1, φ_2 be two solutions of (E_t) . Assume that φ and $\psi \in C_\beta^\infty$. Then $\varphi = \psi$.*

Proof. This is essentially the same argument as that used to prove the uniqueness of g_{RF} above, namely if for some t , φ_1 and φ_2 are C_β^2 solutions of (E_t) , then $\omega_{\varphi_1} = \omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi_1$ is a Kähler form equivalent to ω_Y , and denoting by Δ_1 the Laplacian of its associated metric, one gets that $\Delta_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ has constant sign. Since $\varphi_1 - \varphi_2$ tends to 0 at infinity, we thus have $\varphi_1 = \varphi_2$. \square

10.2 Closedness of S : a priori estimates.

10.2.1 C^0 estimates.

We are proving in this paragraph an a priori estimate on the C^0 norm of a solution of a Monge-Ampère equation on Y .

The estimates can already be deduced from [Hei10, Prop. 4.1]; we give our own proof though, because *weighted C^0 estimates* will be established below (§10.2.3) in a very similar but slightly more complicated way.

The techniques used here are quite close to the ones used by Yau in the compact case, namely a recursive use of integration by parts giving a variation of Moser's iteration adapted to the Monge-Ampère equation, and their adaptation by Joyce for his version of the Calabi-Yau theorem on ALE manifolds. Nonetheless, because ALF geometry is quite different from the ALE geometry, we write in detail the manipulations that need to be adapted to our framework. In particular, because of different measures on both sides of a Sobolev inequality (Lemma 10.3) we make a crucial use of, our system of weights in the following integrals is not the same as Joyce's.

We start with the following :

Lemma 10.2. *Let $f \in C_{\beta+2}^0$, $\beta \in (0, 1)$, and $\varphi \in C_\gamma^3$, $0 < \gamma \leq \beta$, such that $(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f \omega_Y^2$. Then for any $p > \gamma^{-1}$, $p > 2$,*

$$\int_Y |\partial|\varphi|^{p/2}|^2 \omega_Y^2 \leq \frac{p^2}{2(p-1)} \int_Y |\varphi|^{p-2} \varphi (e^f - 1) \omega_Y^2,$$

where both integrals are finite.

Notice that in this lemma f plays the role of tf in our problem, but this is not an issue since a $C_{\beta+2}^0$ bound on f gives uniform $C_{\beta+2}^0$ bounds on the tf .

Proof of Lemma 10.2. First, we set $T = \omega_Y + \omega_\varphi$, with $\omega_\varphi = \omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi$. Picking $p > \gamma^{-1}$ and $p > 2$, we claim that

$$\int_Y d(\varphi|\varphi|^{p-2} d^c \varphi \wedge T) = 0.$$

Indeed, for any real number R big enough, if B_R denotes the set $\{\rho < R\}$ and S_R its boundary, Stokes' theorem asserts that

$$\int_{B_R} d(\varphi|\varphi|^{p-2} d^c \varphi \wedge T) = \int_{S_R} \varphi|\varphi|^{p-2} d^c \varphi \wedge T.$$

Now since the volume of S_R according to g is $O(R^2)$, since T is bounded with respect to g_Y and since $\varphi|\varphi|^{p-2}d^c\varphi = O(R^{-p\gamma-1})$ on S_R , we get that the right-hand-side term is $O(R^{1-p\gamma})$, and hence goes to 0 as R goes to ∞ by our choice of $p > \gamma^{-1}$. A little computation yields

$$\frac{1}{2}d(|\varphi|^{p-2}d^c\varphi \wedge T) = \varphi|\varphi|^{p-2}i\partial\bar{\partial}\varphi \wedge T + (p-1)|\varphi|^{p-2}i\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge T$$

because T is closed. But on the one hand, $i\partial\bar{\partial}\varphi \wedge T = (\omega_\varphi - \omega) \wedge T = (e^f - 1)\omega_Y^2$ and on the other hand $|\varphi|^{p-2}i\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi = \frac{4}{p^2}i\partial(|\varphi|^{p/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2})$, hence

$$\int_Y i\partial(|\varphi|^{p/2}) \wedge \bar{\partial}(|\varphi|^{p/2}) \wedge T = \frac{p^2}{2(p-1)} \int_Y \varphi|\varphi|^{p-2}(1 - e^f)\omega_Y^2.$$

Finally, observe that $\frac{i\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \omega_\varphi}{\omega_Y^2} = \frac{1}{2}e^f|\alpha|_{\omega_\varphi}^2 \geq 0$, and that $i\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \omega_Y = \frac{1}{2}|\alpha|_{g_Y}^2\omega_Y^2$ for any $(1,0)$ -form α , and conclude by setting $\alpha = \partial(|\varphi|^{p/2})$. The finiteness of the integrals in play merely comes from our choice of p . \square

Next, we want to use the inequality we have just proved with some Sobolev embedding to estimate recursively $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^{p\varepsilon}}$ in terms of $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^p}$, with some fixed $\varepsilon > 1$, and some positive measure $d\lambda$. The Sobolev embedding states as :

Lemma 10.3. *There exists a constant C_S such that for any $u \in H_{loc}^1$ (hence in L_{loc}^4) such that the $\int_Y |u|^4 \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y}$ is finite, one has*

$$\left(\int_Y |u|^4 \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/4} \leq C_S^{1/2} \left(\int_Y |du|_{g_Y}^2 \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2}. \quad (10.1)$$

This inequality can be compared to [Hei10, Prop. 3.2]; we postpone its proof to the end of the present paragraph.

First we initiate the induction by estimating $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^{p_0}}$ (or $\|\varphi\|_{L_{d\mu}^{p_0\varepsilon}}$) for some p_0 independent of φ . It will be relevant to take $\varepsilon = 2$, and $d\lambda = \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y}$ in the following. Our initial estimation states:

Lemma 10.4. *Fix some $p_0 > 2$, $p_0 > \gamma^{-1}$. Then under the assumptions of Lemma 10.2 there exists C depending only on β , $\|f\|_{C_{\beta+2}^0}$, p_0 and g such that $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^{2p_0}} \leq C$.*

Proof. Apply inequality (10.1) to $u = |\varphi|^{p_0/2}$ to get:

$$\left(\int_Y |\varphi|^{2p_0} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2} \leq C_S \int_Y |d|\varphi|^{p_0/2}|_{g_Y}^2 \text{vol}^{g_Y}.$$

By Lemma 10.2, we have

$$\left(\int_Y |\varphi|^{2p_0} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2} \leq \frac{p_0^2 C_S}{2(p_0 - 1)} \int_Y |\varphi|^{p_0-1} |e^f - 1| \text{vol}^{g_Y}.$$

Write $|e^f - 1| = |e^f - 1|^{a+b}$ with $a = \frac{p_0-1}{2(\beta+2)p_0}$ and $b = 1 - a$, and apply Hölder inequality to the right-hand-side term of the inequality above with exponents $s = \frac{2p_0}{p_0-1}$ and $t = (1 - \frac{1}{s})^{-1} = \frac{2p_0}{1+p_0}$. This yields:

$$\begin{aligned} \left(\int_Y |\varphi|^{2p_0} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2} &\leq \frac{p_0^2 C_S}{2(p_0 - 1)} \left(\int_Y |\varphi|^{s(p_0-1)} |e^f - 1|^{as} \right)^{1/s} \left(\int_Y |e^f - 1|^{bt} \right)^{1/t} \\ &= \frac{p_0^2 C_S}{2(p_0 - 1)} \left(\int_Y |\varphi|^{2p_0} |e^f - 1|^{\frac{1}{(\beta+2)}} \right)^{1/s} \left(\int_Y |e^f - 1|^{bt} \right)^{1/t}. \end{aligned}$$

Noticing that $|e^f - 1| = O(\rho^{-(\beta+2)})$ (and more precisely that at any point, $|e^f - 1| \leq e^{\|f\|_{C^0}} \|f\|_{C_{\beta+2}^0} \rho^{-(\beta+2)}$), we get that $\int_Y |\varphi|^{2p_0} |e^f - 1|^{\frac{1}{(\beta+2)}} \leq C \int_Y |\varphi|^{2p_0} \rho^{-1}$ for some C depending only on the parameters announced. Moreover, we have that $(\beta + 2)bt = \frac{2p_0}{1+p_0}((\beta + 2) - \frac{p_0-1}{2p_0}) > 3$ because $p_0 > \gamma^{-1} \geq \beta^{-1}$, so that $\int_X |e^f - 1|^{bt}$ is finite and equal to some constant, K^t say, also independent of φ . So far, we obtain that:

$$\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^{2p_0}}^{p_0} \leq \frac{p_0^2 C C_S}{2(p_0 - 1)} K \|\varphi\|_{L_{d\lambda}^{2p_0}}^{p_0-1},$$

and the conclusion follows. \square

We fix now $p_0 = \frac{2}{\gamma}$. Using the same techniques, we can prove a recursive control on $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^{2p}}$ from $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^p}$:

Lemma 10.5. *Under the assumptions of Lemma 10.2, there exists a constant C_1 depending only on $\beta, \gamma, \|f\|_{C_{\beta+2}^0}$ and g_Y such that for any $p \geq p_0$, $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^{2p}}^p \leq C_1 p \|\varphi\|_{L_{d\lambda}^p}^{p-1}$.*

Proof. The idea is the same as for the previous lemma: apply inequality (10.1) to $u = |\varphi|^{p/2}$, lemma 10.2 and Hölder inequality (with well-chosen exponents). The first two give, for $p > \gamma^{-1}, p > 2$:

$$\left(\int_Y |\varphi|^{2p} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2} \leq \frac{p^2 C_S}{2(p-1)} \int_Y |\varphi|^{p-1} |e^f - 1| \text{vol}^{g_Y}.$$

Apply now Hölder inequality with exponents $s = \frac{p}{p-1}, t = p$ and weights $a = \frac{(p-1)}{(\beta+2)p} = \frac{1}{(\beta+2)s}$ and $b = 1 - a$ to write:

$$\begin{aligned} & \left(\int_Y |\varphi|^{2p} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{p^2 C_S}{2(p-1)} \left(\int_Y |\varphi|^p |e^f - 1|^{\frac{1}{(\beta+2)}} \text{vol}^{g_Y} \right)^{(p-1)/p} \left(\int_Y |e^f - 1|^{bp} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

But $|e^f - 1|^{\frac{1}{(\beta+2)}} \leq C \rho^{-1}$ for some constant depending only on f . Moreover, $(\beta + 2)pb = p(\beta + 1) + 1$, which is > 3 as soon as $p > \frac{2}{\beta+1}$; this is actually automatic since $p > \gamma^{-1} \geq \beta^{-1}$ and $\beta \in (0, 1)$. Since furthermore $b = b(p)$ tends to $\frac{\beta+1}{\beta+2} := b_\infty > 0$ when p goes to ∞ , $(\int_Y |e^f - 1|^{bp} \text{vol}^g)^{1/p}$ tends to $\sup_Y |e^f - 1|^{b_\infty}$ when p goes to ∞ , so we can claim: for all $p \geq p_0$, $(\int_Y |e^f - 1|^{bp} \text{vol}^{g_Y})^{1/p} \leq K$ for some K depending only on f (and which we could evaluate in terms of $\|f\|_{C_{\beta+2}^0}$ only). Finally, we get that for all $p \geq p_0$:

$$\begin{aligned} \left(\int_Y |\varphi|^{2p} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2} & \leq \frac{p^2 C_S C^{(p-1)/p} K}{2(p-1)} \left(\int_Y |\varphi|^p \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{(p-1)/p} \\ & \leq C_1 p \left(\int_Y |\varphi|^p \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

with $C_1 = (1 + C)K$, which only depends on the parameters announced. \square

We fix now $p_0 = 2\gamma^{-1}$ in Lemma 10.4

Lemma 10.6. *Under the assumptions of Lemma 10.2, there exist two constants Q_0 and C_2 depending only on $\beta, \gamma, \|f\|_{C_{\beta+2}^0}$ and g_Y such that for any $q \geq 2p_0$, $\|\varphi\|_{L_{d\lambda}^q} \leq Q_0(C_2q)^{-2/q}$.*

Letting q go to ∞ , we get the C^0 a priori estimate for φ we are seeking :

Proposition 10.7. *Under the assumptions of Lemma 10.2, there exists a constant $Q_0 = Q_0(\beta, \gamma, \|f\|_{C_{\beta+2}^0}, g_Y)$ such that $\|\varphi\|_{C^0} \leq Q_0$.*

We conclude this paragraph by the proof of Lemma 10.3:

Proof of Lemma 10.3: We shall prove that there exist two constants C_1 and C_2 such that for any u as in the statement of the lemma,

$$\left(\int_Y |u|^4 \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/4} \leq C_1 \left(\int_Y |du|_{g_Y}^2 \text{vol}^{g_Y} + \int_Y |u|^2 \rho^{-2} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/2} \quad (10.2)$$

and

$$\int_Y |u|^2 \rho^{-2} \text{vol}^{g_Y} \leq C_2 \int_Y |du|_{g_Y}^2 \text{vol}^{g_Y};$$

the lemma will then follow at once. Let us start by the latter inequality. We prove it first for u with compact support in $\{\rho \geq \rho_0\}$, where ρ_0 is chosen so that we have the two-sheeted cover \mathcal{Y} described in section 9.5 over $\{\rho \geq \rho_0\}$; this way, we can replace Y by \mathcal{Y} , g_Y by h and u by its pull-back. Decompose u as $u_{\perp} + u_0$, with $u_0(x)$ the mean value of u along the fiber of ϖ passing by x . This makes u_0 a compactly supported function on $\mathbb{R}^3 \setminus B$ (B the unit ball). Take spherical coordinates (ρ, θ, ϕ) on \mathbb{R}^3 . Then

$$0 = \int_{\{\rho \geq 1\}} \partial_{\rho}(u_0^2 \rho) d\rho \text{vol}^{S^2} = 2 \int_{\{\rho \geq 1\}} u_0 \partial_{\rho}(u_0) \rho d\rho \text{vol}^{S^2} + \int_{\{\rho \geq 1\}} u_0^2 d\rho \text{vol}^{S^2},$$

which rewrites

$$\begin{aligned} \int_{\{\rho \geq 1\}} u_0^2 \rho^{-2} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} &= -2 \int_{\{\rho \geq 1\}} u_0 \partial_{\rho}(u_0) \rho^{-1} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \\ &\leq 2 \left(\int_{\{\rho \geq 1\}} u_0^2 \rho^{-2} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^{1/2} \left(\int_{\{\rho \geq 1\}} \partial_{\rho}(u_0)^2 \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(Cauchy-Schwarz inequality), i.e. $\int_{\rho=1}^{\infty} u_0^2 \rho^{-2} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \leq 4 \int_{\rho=1}^{\infty} |du_0|^2 \text{vol}^{\mathbb{R}^3}$.

Now for the component u_{\perp} , after pulling it back on \mathcal{Y} , one has $\int_{\mathcal{Y}} u_{\perp}^2 \rho^{-2} \text{vol}^h = \int_{\rho \geq \rho_0} \rho^{-2} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \int_{\text{fiber}} u_{\perp}^2 \mu$. Since u_{\perp} has zero mean along the fibers, $\int_{\text{fiber}} u_{\perp}^2 \mu \leq c \int_{\text{fiber}} |du_{\perp}|_h^2 \mu$ for some c independent of the fiber, and thus $\int_{\mathcal{Y}} u_{\perp}^2 \rho^{-2} \text{vol}^h \leq c \int_{\mathcal{Y}} |du_{\perp}|_h^2 \rho^{-2} \text{vol}^h$; we even have a ρ^{-2} factor in the RHS, which we can loosely get rid of. Adding these estimations on separate components, we get that $\int_{\mathcal{Y}} u^2 \rho^{-2} \text{vol}^h \leq C \int_{\mathcal{Y}} |du|_h^2 \text{vol}^h$, which easily transposes on Y with g_Y . Now, to extend this Hardy type inequality to a general u as in the statement, one may proceed as in paragraph 1.4.1; the only point to be noticed is that the only integrable constant on Y for $\rho^{-1} \text{vol}^{g_Y}$ is 0 (this replaces a zero mean assumption in the necessary normalisation).

We now prove the Sobolev type inequality (10.2). Since such an inequality is known on compact manifolds, we can assume that u has compact support on $\{\rho \geq \rho_0\}$. We pull-back u to \mathcal{Y} once more, and split it again into $u_0 + u_{\perp}$. We easily get the inequality on u_{\perp} (and even a much better one) by using the standard Sobolev embedding on the circle. Now for

the component u_0 , we write $\mathbb{R}^3 \setminus B = \bigcup_{\ell \geq 0} \mathcal{A}_\ell$, where \mathcal{A}_ℓ is the annulus $\{2^\ell \leq \rho \leq 2^{\ell+1}\}$. Denote by $\kappa_\ell : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_\ell$ the homothety of factor 2^ℓ , and write:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} |u_0|^4 \rho^{-1} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{\mathcal{A}_\ell} |u_0|^4 \rho^{-1} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} (2^\ell)^2 \int_{\mathcal{A}_1} |\kappa_\ell^* u_0|^4 \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} (2^\ell)^2 c \left[\left(\int_{\mathcal{A}_1} |d(\kappa_\ell^* u_0)|^2 \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^2 + \left(\int_{\mathcal{A}_1} |\kappa_\ell^* u_0|^2 \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^2 \right] \\ &\sim c \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\left(\int_{\mathcal{A}_\ell} |du_0|^2 \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^2 + \left(\int_{\mathcal{A}_\ell} |u_0|^2 \rho^{-2} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^2 \right] \\ &= c \left[\left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} |u_0|^2 \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} |du_0|^2 \rho^{-2} \text{vol}^{\mathbb{R}^3} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

The norms here are taken for $g_{\mathbb{R}^3}$. We used the Sobolev embedding $L^{1,2}(\mathcal{A}_1) \rightarrow L^4(\mathcal{A}_1)$ between the first and the second lines, and denoted its norm (to the power 4) by c . \square

10.2.2 Unweighted second order and third order estimates.

The technique we use here is really the same as that used by Joyce in the ALE case, and this is essentially the same as in the compact case. It is based on the following observation.

Proposition 10.8. *Let $f \in C_{\beta+2}^0 \cap C^2$, $\beta \in (0, 1)$, and $\varphi \in C_\gamma^3 \cap C_{loc}^4$, $0 < \gamma \leq \beta$, such that $(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f \omega_Y^2$. Denote by F the function $\log(4 - \Delta\varphi) - \kappa\varphi$ on Y where κ is any constant and Δ the Laplacian of g_Y , and by Δ' the Laplacian operator with respect to ω_φ . Then there exists a constant C depending only on $\|\text{Rm}^{\omega_Y}\|_{C^0}$ such that*

$$\Delta' F \leq (4 - \Delta\varphi)^{-1} \|\Delta f\|_{C^0} + \kappa(2 - \text{tr}^{\omega_\varphi} \omega) + C \text{tr}^{\omega_\varphi} \omega.$$

We do not prove this proposition, because (up to some minor changes, like 4, which is the real dimension of Y , instead of its complex dimension because we use $i\partial\bar{\partial}$ instead of dd^c) it all comes from a local formula, which is proved in [Yau93], [Aub98] or [Joy00]. Nevertheless, because the computation of this formula can be considered as a tour-de-force, we quote it now: in the conditions of the proposition, if g' is the metric $\omega_\varphi(\cdot, J_Y \cdot)$, in local holomorphic coordinates and with Einstein's summation convention, one has

$$\begin{aligned} \Delta'(\Delta\varphi) &= -2\Delta f + 4g^{\alpha\bar{\lambda}} g'^{\mu\bar{\beta}} g'^{\gamma\bar{\nu}} \nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \varphi \nabla_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}} \varphi \\ &\quad + 4g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{\gamma\bar{\delta}} ((\text{Rm}^{\omega_Y})^{\bar{\epsilon}}_{\delta\bar{\gamma}\bar{\beta}} \nabla_{\alpha\bar{\epsilon}} \varphi - (\text{Rm}^{\omega_Y})^{\bar{\epsilon}}_{\bar{\beta}\alpha\bar{\delta}} \nabla_{\gamma\bar{\epsilon}} \varphi). \end{aligned} \tag{10.3}$$

Here and in what follows, ∇ is the Levi-Civita connection of g_Y . We also note that $(4 - \Delta\varphi)$ is always positive: take the trace according to ω_Y of ω_φ , which is automatically positive as we saw when proving the uniqueness of the solution of (E_t) , and even $\geq 4e^{f/2}$, so that its inverse is a priori bounded above.

Furthermore, it is not hard to deduce from Proposition 10.8 a second order estimate on φ :

Corollary 10.9. *Under the assumptions of Proposition 10.8, there exists a constant $Q \geq 0$ depending only on $\beta, \gamma, \|f\|_{C_{\beta+2}^0}, \|\Delta f\|_{C^0}, g, m$ and $\|\text{Rm}^{\omega_Y}\|_{C^0}$ such that $\Delta\varphi \geq -Q$.*

Proof. Fix $\kappa = C + 1$ in Proposition 10.8. Two situations can occur: the function F of this proposition achieves its supremum or not. If not, since decay conditions imply that

it tends to $2 \log 2$ at infinity, we get that $4 - \Delta\varphi \leq 4e^{\kappa\varphi}$, and conclude with Proposition 10.7.

If now F achieves its supremum, at a point p say, we have that $\Delta'F(p) \geq 0$, and a little computation using this inequality shows that at p , $\text{tr}^{\omega'}\omega_Y \leq C' := 4\kappa + \frac{1}{4}e^{\|f\|_{C^0}/2}\|\Delta f\|_{C^0}$. From this we get $F(p) \leq \|f\|_{C^0} + \log(2C') + \kappa\|\varphi\|_{C^0}$, and since $F \leq F(p)$ on Y , the conclusion follows, noticing that C' and $\|\varphi\|_{C^0}$ only depend on the parameters announced in Propositions 10.7 and 10.8. Details can be found in [Joy00]. \square

Finally, using the positivity condition on ω_φ and the upper and lower estimates on $\Delta\varphi$, one gets :

Proposition 10.10. *Let $f \in C_{\beta+2}^0 \cap C^2$, $\beta \in (0, 1)$, and $\varphi \in C_\gamma^3 \cap C_{loc}^4$, $0 < \gamma \leq \beta$, such that $(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f\omega_Y^2$. Then there exist some constants Q_1 and Q_2 depending only on β , γ , $\|f\|_{C_{\beta+2}^0}$, $\|\Delta f\|_{C^0}$, g_Y , and $\|\text{Rm}^{\omega_Y}\|_{C^0}$ such that*

$$\|i\partial\bar{\partial}\varphi\|_{C^0} \leq Q_1 \quad \text{and} \quad Q_2^{-1}\omega_Y \leq \omega_\varphi \leq Q_2\omega_Y.$$

Finally, we give a third order estimate :

Proposition 10.11. *Let $f \in C_{\beta+2}^0 \cap C^3$, $\beta \in (0, 1)$, and $\varphi \in C_\gamma^3 \cap C_{loc}^5$, $0 < \gamma \leq \beta$, such that $(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f\omega_Y^2$. Then there exists a constant Q_3 depending only on β , γ , $\|f\|_{C_{\beta+2}^0}$, $\|f\|_{C^3}$, g , and $\|\text{Rm}^{\omega_Y}\|_{C^1}$ such that $\|\nabla i\partial\bar{\partial}\varphi\|_{C^0} \leq Q_3$.*

Proof. Here again we are not giving the complete proof because it is very similar to the one in [Joy00]. We only say a few words about the main ingredients. Set S so that $4S^2 = \|\nabla i\partial\bar{\partial}\varphi\|_{C^0}^2$, with ∇ the Levi-Civita connection of g_Y . Formula (10.3) tells us that $\Delta'(S^2) \geq cS^2 - C$ for some constants $c > 0$ and C depending only on the parameters announced. Moreover, a hard but local computation shows that $\Delta'(S^2)$ is equal to a nonpositive quantity plus a linear term (with coefficients that are polynomials in e^f , ω_φ , $\nabla^2 f$, Rm^{ω_Y}) in $\nabla i\partial\bar{\partial}\varphi$ and a quadratic term (with coefficients that are polynomials in e^f , ω_φ , $\nabla^3 f$, ∇R) in $\nabla i\partial\bar{\partial}\varphi$. This we can sum up by saying there exists a constant C' depending only on the parameters announced such that $\Delta'(S^2) \leq C'(S^2 + S)$. Now those considerations give $\Delta'(S^2 - 2c^{-1}CC'\Delta\varphi) \leq -C(S - \frac{1}{2})^2 + 2c^{-1}CC' + \frac{1}{4}C$; one concludes according to whether $(S^2 - 2c^{-1}CC'\Delta\varphi)$ achieves its supremum at some point (and using its Δ' is ≥ 0 at this point) or not (and using decay conditions). \square

10.2.3 C_δ^0 estimates.

We now prove an estimate on a weighted C^0 -norm of a solution of a complex Monge-Ampère equation on Y .

For this, we take a point of view close to that of paragraph 10.2.1 but we estimate $\|\varphi\rho^\delta\|_{C^0}$ (i.e. $\|\varphi\|_{C_\delta^0}$, $\delta \in (0, \gamma)$), instead of $\|\varphi\|_{C^0}$, with the same iteration. Of course, putting a weight $\rho^{p\delta}$ makes the integrations by parts a bit more complicated, but the whole spirit of the proof remains the same. Here again we write the computations in detail since they differ at some points from Joyce's.

To begin with, we state the weighted integration by parts formula we are using in our iteration scheme:

Lemma 10.12. *Let $f \in C_{\beta+2}^0$, $\beta \in (0, 1)$, and $\varphi \in C_\gamma^3$, $0 < \gamma \leq \beta$, such that $(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f \omega_Y^2$. Set $T = \omega_Y + \omega_\varphi$. Then for any $p > 2$, q such that $p\gamma - q > 1$,*

$$\begin{aligned} \int_Y |\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})|^2 \omega_Y^2 &\leq \frac{p^2}{2(p-1)} \int_Y \rho^q |\varphi|^{p-2} \varphi (e^f - 1) \omega_Y^m \\ &\quad + \frac{q}{2(p-1)} \int_Y |\varphi|^p \rho^{q-2} [(p+q-2)i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho - (p-2)\rho i\partial\bar{\partial}\rho] \wedge T, \end{aligned}$$

where those integrals are finite.

Proof. As in [Joy00], we say that $\int_Y d[p^2\varphi|\varphi|^{p-2}\rho^q d^c\varphi \wedge T + (p-2)q|\varphi|^p \rho^{q-1} \wedge T] = 0$, because of the same Stokes' argument as in the proof of Lemma 10.2. Now, a direct computation yields

$$\begin{aligned} &d[p^2\varphi|\varphi|^{p-2}\rho^q d^c\varphi \wedge T + (p-2)q|\varphi|^p \rho^{q-1} \wedge T] \\ &= p^2(p-1)|\varphi|^{p-2}\rho^q d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge T + p^2|\varphi|^{p-2}\rho^q dd^c\varphi \wedge T \\ &\quad + 2pq(p-1)|\varphi|^{p-2}\rho^{q-1} d^c\varphi \wedge T + q(q-1)(p-2)|\varphi|^p \rho^{q-2} d\rho \wedge d^c\rho \wedge T \\ &\quad + (p-2)q|\varphi|^p \rho^{q-1} dd^c\rho \wedge T \end{aligned}$$

(notice that $d\varphi \wedge d^c\rho \wedge T = d\rho \wedge d^c\varphi \wedge T$ since T is of bidegree $(1, 1)$). On the other hand,

$$\begin{aligned} d(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge d^c(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T &= \frac{p^2}{4} |\varphi|^{p-2} \rho^q d\varphi \wedge d^c\varphi + \frac{q^2}{4} |\varphi|^p \rho^{q-2} d\rho \wedge d^c\rho \\ &\quad + \frac{pq}{2} |\varphi|^{p-2} \varphi \rho^{q-1} d\rho \wedge d^c\varphi \wedge T. \end{aligned}$$

Comparing those identities one can write

$$\begin{aligned} &d[p^2\varphi|\varphi|^{p-2}\rho^q d^c\varphi \wedge T + (p-2)q|\varphi|^p \rho^{q-1} \wedge T] \\ &= 4(p-1)d(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge d^c(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}) \wedge T + p^2\varphi|\varphi|^{p-2}\rho^q dd^c\varphi \wedge T \\ &\quad + q|\varphi|^p \rho^{q-2} [(p-2)\rho dd^c\rho \wedge T - (p+q-2)d\rho \wedge d^c\rho \wedge T]. \end{aligned}$$

Then conclude after dividing this by 2, integrating both sides over Y and noticing that $i\partial\bar{\partial}\varphi \wedge T = (e^f - 1)\omega^2$ and $T \geq \omega_Y$. Checking that all resulting integrals are finite is straightforward with the assumption $p\gamma - q > 1$. \square

Now fix $\delta \in (0, \gamma)$; we look at q in the latter lemma as to be $p\delta$, so the condition $p\gamma - q > 1$ becomes $p > \frac{1}{\gamma-\delta}$.

Lemma 10.13. *Fix $p'_0 > 2$, $p'_0 > \frac{1}{\gamma-\delta}$, $p'_0 \geq p_0 = \frac{2}{\gamma}$. Under the assumptions of Proposition 10.10, there exists a constant C_0 depending only on p'_0 , β , γ , δ , $\|f\|_{C_{\beta+2}^0}$, $\|f\|_{C^2}$, g_Y , and $\|\text{Rm}^{\omega_Y}\|_{C^0}$ such that $\|\varphi\rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{p'_0}} \leq C_0$.*

We recall that $d\lambda$ is the measure $\rho^{-1} \text{vol}^{g_Y}$.

Proof. From Lemma 10.12 and Proposition 10.10, and also the facts that $d\rho = O(1)$ and $dd^c\rho = O(\rho^{-1})$, we get two constants c_1, c_2 depending only on the parameters announced such that for every $p > \frac{1}{\gamma-\delta}$,

$$\int_Y |\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})|^2 \text{vol}^{g_Y} \leq c_1 p \int_Y |\varphi|^{p-1} \rho^{p\delta-(\beta+2)} \text{vol}^{g_Y} + c_2 p \int_Y |\varphi|^p \rho^{p\delta-2} \text{vol}^{g_Y}. \quad (10.4)$$

We now play the same game of Hölder's inequalities as in paragraph 10.2.1 for the first summand of the right-hand-side. Indeed,

$$\int_Y |\varphi|^{p-1} \rho^{p\delta-(\beta+2)} \text{vol}^{g_Y} \leq \left(\int_Y \rho^{bt} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/t} \left(\int_Y (|\varphi|\rho^\delta)^{2p} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{(p-1)/2p},$$

with $t = (1 - \frac{p-1}{2p})^{-1} = \frac{2p}{p+1}$ and $b = \frac{p-1}{2p} + \delta - (\beta + 2)$. Notice that the condition $bt < -3$, which ensures the convergence of $\int_Y \rho^{bt} \text{vol}^{g_Y}$, is equivalent to $p > \frac{1}{\beta-\delta}$, and is thus automatically verified for the p we work with. Furthermore, when p goes to ∞ , bt tends to $-3 + 2(\delta - \beta)$, which is < -3 ; the quantity $(\int_Y \rho^{bt} \text{vol}^{g_Y})^{1/t}$ is thus bounded above by some constant C_1 depending only on our parameters for the considered p , if we choose them away from $p_0 = \frac{2}{\gamma}$; the choice $p \geq p'_0$ is convenient.

On the other hand, we have to argue in a slightly different way for the summand $\int_Y |\varphi|^p \rho^{p\delta-2} \text{vol}^{g_Y}$ of (10.4). Let us write

$$\int_Y |\varphi|^p \rho^{p\delta-2} \text{vol}^{g_Y} \leq \left(\int_Y |\varphi|^r \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/t} \left(\int_Y (|\varphi|\rho^\delta)^{2p} \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/s},$$

where $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, $\frac{2p\delta-1}{s} - \frac{1}{t} = p\delta - 2$ and $\frac{2p}{s} + \frac{q}{t} = p$. This gives $s = \frac{2p\delta}{p\delta-1} := s(p)$ (well-defined and > 2 as soon as $p > \frac{1}{\delta}$, and tends to 2 as p goes to ∞), $t = \frac{2p\delta}{p\delta+1}$ (which tends to 2) and $r = \frac{t}{\delta} = \frac{2p}{p\delta+1}$ (which tends to $\frac{2}{\delta}$). Now the condition $r\gamma > 2$ ensures the convergence of $\int_Y |\varphi|^r \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y}$, and this condition turns out to be equivalent to $p > \frac{1}{\gamma-\delta}$, which we assume.

Moreover, when p ranges over $[p'_0, \infty)$ for $p'_0 > \frac{1}{\gamma-\delta}$ (e.g. $p'_0 = \frac{2}{\gamma-\delta}$), r ranges over $[r_0, \frac{2}{\delta})$, with $r_0 = \frac{2p'_0}{p'_0\delta+1} > 2$. From Lemma 10.6, $(\int_Y |\varphi|^r \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y})^{1/t}$ (converges and) is bounded by some constant C_2 . This constant C_2 depends only on the parameters announced. Finally, we can sum all this up saying that for $p \geq p'_0$,

$$\int_Y |\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})|^2 \text{vol}^{g_Y} \leq c_1 C_1 p \|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{2p}}^{p-1} + c_2 C_2 p \|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{2p/s(p)}}^{2p/s(p)}.$$

Take $p = p'_0$, and apply inequality (10.1) to the LHS, with $u = |\varphi|^{p/2} \rho^{q/2}$; this yields :

$$\|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{2p'_0}}^{p'_0} \leq C_s c_1 C_1 p'_0 \|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{2p'_0}}^{p'_0-1} + C_s c_2 C_2 p'_0 \|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{2p'_0/s(p'_0)}}^{2p'_0/s(p'_0)},$$

and one concludes noticing that $p'_0 > p'_0 - 1$ and $p'_0 > 2p'_0/s(p'_0)$, as $s(p'_0) > 2$. \square

We fix $p'_0 = \frac{2}{\gamma-\delta}$, so that it verifies all the assumptions of the latter lemma. As in paragraph 10.2.1, the last step makes the transition from $\|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^p}$ to $\|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{2p}}$ for big enough p :

Lemma 10.14. *Under the assumptions of Proposition 10.10, there exist constants C_1 and C_2 depending only on $\beta, \gamma, \delta, \|f\|_{C^0_{\beta+2}}, \|f\|_{C^2}, g, m$ and $\|\text{Rm}^{\omega_Y}\|_{C^0}$ such that for all $p \geq p'_0 = \frac{2}{\gamma-\delta}$, $\|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^{2p}}^p \leq C_1 p \|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^p}^{p-1} + C_2 p \|\varphi \rho^\delta\|_{L_{d\lambda}^p}^p$.*

Proof. We saw in the beginning of the proof of Lemma 10.13 that there exist c_1 and c_2 depending only on the parameters announced such that for all $p > \frac{1}{\gamma-\delta}$

$$\int_Y |\partial(|\varphi|^{p/2} \rho^{q/2})|^2 \text{vol}^{g_Y} \leq c_1 p \int_Y |\varphi|^{p-1} \rho^{p\delta-(\beta+2)} \text{vol}^{g_Y} + c_2 p \int_Y |\varphi|^p \rho^{p\delta-2} \text{vol}^{g_Y}.$$

We deal again with the two summands of the RHS separately. For the concerned p , $\int_Y |\varphi|^{p-1} \rho^{p\delta-(\beta+2)} \text{vol}^{g_Y} = \int_Y (|\varphi| \rho^\delta)^{p-1} \rho^{\delta-(\beta+2)} \text{vol}^{g_Y}$ and by Hölder inequality this is bounded above by

$$\left(\int_Y \rho^{p(\delta-\beta)-p-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{1/p} \left(\int_Y (|\varphi| \rho^\delta)^p \rho^{-1} \text{vol}^{g_Y} \right)^{(p-1)/p}.$$

The first integral converges for $p > \frac{2}{1+\beta-\delta}$, which is automatic if $p > \frac{1}{\gamma-\delta}$, and its $\frac{1}{p}$ -th power tends to $\sup_Y \rho^{\delta-\beta-1}$ as p goes to infinity, so we get the constant C_1 of the statement (after multiplying by c_1), if we restrict to $p \in [\frac{2}{\gamma-\delta}, \infty)$.

Let us deal next with the summand $\int_Y |\varphi|^p \rho^{p\delta-2} \text{vol}^{g_Y}$; we can take $C_2 = c_2 \sup_Y \rho^{-1}$ without more efforts, and the lemma is proved. \square

Under the assumptions of Proposition 10.10 and the condition $\delta \in (0, \gamma)$, it is again an easy exercise, in view of Lemmas 10.13 and 10.14, to get two constants Q_δ and C_3 depending only on the same parameters than those announced in Lemma 10.14 such that for every $p \geq p'_0$, we have $\|\varphi \rho^\delta\|_{L^p_{d\lambda}} \leq Q_\delta (C_3 p)^{-2/p}$. Letting p go to ∞ , we can conclude:

Proposition 10.15. *Under the assumptions of Proposition 10.10 and assuming $\delta \in (0, \gamma)$, there exists a constant Q_δ depending only on $\beta, \gamma, \delta, \|f\|_{C^0_{\beta+2}}, \|f\|_{C^2}, g_Y$, and $\|\text{Rm}^{\omega_Y}\|_{C^0}$ such that $\|\varphi\|_{C^0_\delta} \leq Q_\delta$.*

10.2.4 $C^{k,\alpha}$ and $C^{k,\alpha}_\delta$ estimates.

We shall now state (unweighted) higher order a priori estimates :

Proposition 10.16. *Let $f \in C^0_{\beta+2} \cap C^{k,\alpha}$, $\beta \in (0, 1)$, $k \geq 3$, $\alpha \in (0, 1)$ and $\varphi \in C^3_\gamma \cap C^5_{loc}$, $0 < \gamma \leq \beta$, such that $(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f \omega_Y^2$. Then $\varphi \in C^{k+2,\alpha}$ and there exists a constant $Q_{k,\alpha}$ only depending on $\beta, \gamma, k, \alpha, \|f\|_{C^0_{\beta+2}}, \|f\|_{C^{k,\alpha}}$ and $\|g_Y\|_{C^{k,\alpha}}$ such that $\|\varphi\|_{C^{k+2,\alpha}} \leq Q_{k,\alpha}$.*

Proof. The theorem follows from an inductive use of the crucial Aubin-Yau formula (10.3), which we recall here for convenience:

$$\begin{aligned} \Delta'(\Delta\varphi) &= -2\Delta f + 4g_Y^{\alpha\bar{\lambda}} g'^{\mu\bar{\beta}} g'^{\gamma\bar{\nu}} \nabla_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \varphi \nabla_{\bar{\lambda}\mu\bar{\nu}} \varphi \\ &\quad + 4g'^{\alpha\bar{\beta}} g^{\gamma\bar{\delta}} ((\text{Rm}^{\omega_Y})^{\bar{\epsilon}}_{\delta\gamma\bar{\beta}} \nabla_{\alpha\bar{\epsilon}} \varphi - (\text{Rm}^{\omega_Y})^{\bar{\epsilon}}_{\bar{\beta}\alpha\bar{\delta}} \nabla_{\gamma\bar{\epsilon}} \varphi) \end{aligned}$$

(Δ' stands for the scalar Laplacian with respect to ω_φ).

To begin with, suppose $k = 3$. Then according to the assumptions on f and the conclusions of Propositions 10.10 and 10.11, we have for the moment a C^0 estimate in terms of the parameters announced on the right-hand side.

Now the geometry of Y and the asymptotics of g_Y allow us to take an atlas of Y of holomorphic balls with uniform radius, such that the pull-backs of g_Y to these balls are uniformly bounded above and below, and so are the pull-backs of g' . As a consequence the Laplacian operators associated to these latter Kähler metrics are uniformly elliptic in the C^0 sense. We can ask furthermore that the family of those balls with the half radius still gives an atlas.

To say this more precisely, we have a family of holomorphic charts $\pi_i : B(0, 1) \rightarrow Y$, $i \in \mathcal{I}$, such that $Y = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \pi_i(B(0, 1)) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \pi_i(B(0, \frac{1}{2}))$ and such that there exist

constants $c > 0$ and C depending on the parameters announced such that for all $i \in \mathcal{I}$, $c\mathbf{e} \leq \pi_i^* g' \leq C\mathbf{e}$. Then the $\pi_i^* \Delta'$ are uniformly elliptic, in the C^0 sense.

Pulling back the formula above by any π_i , the right-hand side is bounded independently of i , and so is $\pi_i^*(\Delta\varphi)$. The standard Morrey-Schauder's theorem tells us that the $\pi_i^*(\Delta\varphi)$ is bounded in $C^{1,\alpha}$ on $B(0, \frac{3}{4})$, again independently of i ; a careful reading shows quickly that this uniform bound depends only on the parameters of the statement. We can reformulate all this saying that $\Delta\varphi$ is in $C^{1,\alpha}$, and the corresponding norm is controlled in terms of the parameters.

On the other hand, $\pi_i^*(\Delta\varphi) = (\pi_i^*\Delta)(\pi_i^*\varphi)$. We can also suppose our covering is taken so that there exist constants $c > 0$ and C depending only on the parameters announced such that for all $i \in \mathcal{I}$, $c\mathbf{e} \leq \pi_i^* g$ and $\|g\|_{C^{1,\alpha}} \leq C$. This allows us to apply again a Schauder estimate, and conclude that we have a uniform bound on the $\pi_i^*\varphi$ in $C^{3,\alpha}(B(0, \frac{1}{2}))$, that is: $\varphi \in C^{3,\alpha}$ and the corresponding norm is again controlled in terms of the parameters announced.

This settles the $k = 3$ case. Now observe that a $C^{3,\alpha}$ bound on φ together with the assumptions on f (at least, a $C^{2,\alpha}$ bound) give a $C^{0,\alpha}$ bound on the RHS of (10.3). Applying again twice the Schauder estimates (once with Δ' which is uniformly elliptic in the $C^{0,\alpha}$ sense from the previous case, and once to Δ which is uniformly elliptic in the $C^{2,\alpha}$ sense) after refining the covering if needed so, one gets the announced $C^{4,\alpha}$ estimate on φ . Following once more this scheme using in particular the $C^{k,\alpha}$ bounds on f , and noticing the Schauder estimates include regularity before giving bounds on $C^{\ell,\alpha}$ norms, we get the result with $k = 5$. For the general case, just follow the initiated induction. \square

We state a similar result for the *weighted* higher order estimates :

Proposition 10.17. *Let $f \in C_{\beta+2}^{k,\alpha} \cap C$, $\beta \in (0, 1)$, $k \geq 3$, $\alpha \in (0, 1)$ and $\varphi \in C_\gamma^3 \cap C_{loc}^5$, $0 < \gamma \leq \beta$, such that $(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi)^2 = e^f \omega_Y^2$. Then $\varphi \in C_\gamma^{k+2,\alpha}$. Moreover, there exists a constant $Q_{k,\alpha,\gamma}$ depending only on β , γ , k , α , $\|\varphi\|_{C_\gamma^{k,\alpha}}$ and $\|f\|_{C_\beta^{k,\alpha}}$ such that $\|\varphi\|_{C_\gamma^{k+2,\alpha}} \leq Q_{k,\alpha,\gamma}$.*

Proof. We use a technical lemma from [Joy00], (Proposition 8.6.12, p.197), which remains true in our ALF setting; its utility lies in the rescaling process used in establishing elliptic weighted estimates. The lemma states, with our notations:

Lemma 10.18. *Let $K_1, K_2 > 0$, $\lambda \in [0, 1]$ and $k \geq 3$ be an integer. Then there exists K_3 depending only on α , β , γ , $\|\varphi\|_{C_\gamma^0}$ and K_1, K_2, λ, k such that the following holds:*

Under the assumptions of Proposition 10.17 and if $\|f\|_{C_\beta^{k,\alpha}} \leq K_1$, $\|\nabla^j dd^c \varphi\|_{C_{\lambda\ell}^0} \leq K_2$, $\ell = 0, \dots, k$ and $[\nabla^k dd^c \varphi]_{\lambda k + (\lambda-1)\alpha}^\alpha \leq K_2$, then: $\|\nabla^j dd^c \varphi\|_{C_{\lambda\ell+\gamma}^0} \leq K_3$, $\ell = 0, \dots, k+2$ and $[\nabla^k dd^c \varphi]_{\gamma+\lambda(k+2)+(\lambda-1)\alpha}^\alpha \leq K_3$.

The $[\cdot]^\alpha$ are analogous to those used in 9.1, with Y , g_Y and ρ instead of X , g_m and \tilde{R} .

Proof of Lemma 10.18. The major change here is that the injectivity radius does not grow as fast as ρ , but instead remains bounded, essentially by half the length of the fibers. But this is not an issue. Indeed, exponential map is still well defined, and authorizes the following manipulations. Given $x \in \{\rho \geq 2\rho_0\}$ (ρ_0 determined later), identify $(T_x Y, J_Y, g_Y)$ with and $(\mathbb{C}^2, I_1, \mathbf{e})$. Take $R > 0$, and denote by $\pi_{R,x}$ the map $B_{\mathbf{e}}(0, 1) \rightarrow B_{g_Y}(x, R)$, $y \mapsto \exp_x^{g_Y}(Ry)$; it is not a diffeomorphism in general, since large

balls wrap following asymptotically the fibers of ϖ . We can nonetheless define the operator $P_{x,R} : C^{k+2,\alpha}(B_{\mathbf{e}}(0,1)) \rightarrow C^{k,\alpha}(B_{\mathbf{e}}(0,1))$ by

$$P_{x,R}(v) = R^2 \frac{(\pi_{R,x}^*(i\partial\bar{\partial})) (v) \wedge \pi_{R,x}^*(\omega_Y + \omega_\varphi^{m-1})}{\pi_{R,x}^*(\omega_Y^2)}.$$

Then one can take $R = L\rho(x)^\lambda$ with $L = L(\rho_0, \lambda, g_Y)$ small enough so that $B_{g_Y}(x, R) \subset \{\rho \geq \rho_0\}$; this way one has

$$\begin{aligned} \|R^{-2}\pi_{x,R}^*g_Y - \mathbf{e}\|_{C^{k,\alpha}} &\leq \frac{1}{2} \quad \text{for all } x \in \{\rho \geq 2\rho_0\}, \quad \text{and} \\ \|R^{-2}\pi_{x,R}^*\omega_Y - \omega_{\mathbf{e}}\|_{C^{k,\alpha}} &\leq \frac{1}{2} \quad \text{for all } x \in \{\rho \geq 2\rho_0\}, \end{aligned}$$

if ρ_0 is chosen big enough, thanks to the asymptotic geometry of g_Y . Now the rest of Joyce's proof applies unchanged (in particular, one is brought to using Schauder estimates between the *fixed* balls $B_{\mathbf{e}}(0,2)$ and $B_{\mathbf{e}}(0,1)$, with a $C^{k,\alpha}$ uniformly elliptic family of operators), since the identity

$$P_{x,R}((\pi_{x,R})^*\varphi) = R^2(e^{(\pi_{x,R})^*f} - 1)$$

is again just a rewriting of the pulled-back Monge-Ampère equation verified by φ .

To complete the present proof though, one has to deal with the compact subset $\{\rho \leq 2\rho_0\}$; in that case, the estimates of the statement are an immediate consequence of the unweighted estimates of Proposition 10.16. \blacksquare

Now Proposition 10.17 follows from a repeated use of Lemma 10.18, as in [Joy00, p. 195]. At the end of the argument, we pass to $\lambda = 1$ in this lemma, which precisely gives estimates on the $\|\nabla^j dd^c \varphi\|_{C_{\ell+\gamma}^0}$, $\ell = 0, \dots, k+2$, and on $[\nabla^k dd^c \varphi]_{\gamma+k+2+\alpha}^\alpha$, i.e. on $\|dd^c \varphi\|_{C_\gamma^{k,\alpha}}$. \square

10.2.5 Closedness of S

We conclude this section by the proof of the closedness of S . Take a sequence (t_j) of elements of S , converging to some $t_\infty \in [0,1]$; in particular, $\varphi_{t_j} \in C_{\beta/2}^\infty$ for all j . Pick $\alpha \in (0,1)$. From Proposition 10.17, since the $t_j f$ now play the role of the f of that Proposition, we have a bound on $\|\varphi_{t_j}\|_{C_{\beta/2}^{5,\alpha}}$ which depends only on $\|f\|_{C_\beta^{3,\alpha}}$ and the $\|\varphi_{t_j}\|_{C_{\beta/2}^0}$. But from Proposition 10.15, we also have on the $\|\varphi_{t_j}\|_{C_{\beta/2}^0}$ a bound which depends only on $\|f\|_{C_\beta^{3,\alpha}}$. In other words, (φ_{t_j}) is bounded in $C_{\beta/2}^{5,\alpha}$, and thus converges weakly to some $\varphi_\infty \in C_{\beta/2}^{5,\alpha}$. Now the inclusion $C_{\beta/2}^{5,\alpha} \hookrightarrow C_{\beta/4}^{5,\alpha/2}$ is compact; we can thus assume that (φ_{t_j}) converges strongly to φ_∞ in $C_{\beta/4}^{5,\alpha/2}$. In particular the (E_{t_j}) pass to the limit to give:

$$(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty)^2 = e^{t_\infty f} \omega_Y^2.$$

Developing this latter equation yields: $\omega_Y^2 + 2\omega_Y \wedge i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty + (i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty)^2 = e^{f t_\infty} \omega_Y^2$, that is:

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi_\infty = (e^{t_\infty f} - 1) + \frac{(i\partial\bar{\partial}\varphi_\infty)^2}{\omega_Y^2} \in C_{\beta+2}^{3,\alpha/2}.$$

On the other hand, $\Delta : C_\gamma^{5,\alpha/2} \rightarrow C_{\gamma+2}^{3,\alpha/2}$ is an isomorphism for any $\gamma \in (0,1)$; this follows from [BM10, App.]. In view of the latter equation, we hence get $\varphi_\infty \in C_\beta^{5,\alpha/2}$. Apply Proposition 10.17 to conclude that $\varphi_\infty \in C_\beta^\infty$, and thus that $t_\infty \in S$. \square

10.3 Openness of S

The only point we are left with is the openness of S ; we settle it now. Let $t \in S$; write ω_t for $\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$. We already know that ω_t is Kähler. Moreover, the linearisation of the Monge-Ampère operator

$$\begin{aligned} C_\beta^{5,\alpha} &\longrightarrow C_{\beta+2}^{3,\alpha} \\ \psi &\longmapsto \frac{(\omega_Y + i\partial\bar{\partial}\psi)^2}{(\omega_Y)^2}, \end{aligned}$$

with $\alpha \in (0, 1)$, at point φ_t , is $-\frac{e^{t_f}}{2}\Delta_t$, where Δ_t is the Laplacian of ω_t . Now ω_t is $C_{\beta+2}^\infty$ close to ω_Y ; it follows that Δ_t , and hence $-\frac{e^{t_f}}{2}\Delta_t$, are isomorphisms $C_\beta^{5,\alpha} \rightarrow C_{\beta+2}^{3,\alpha}$. Consequently, (E_s) has a (necessarily unique) solution $\varphi_s \in C_\beta^{5,\alpha}$ for all s close to t . At last, we apply Proposition 10.17 to get that those φ_s are in C_β^∞ , which ends the proof of the openness of S , and that of Theorem 9.12. \square

Bibliographie

- [AP09] C. AREZZO & F. PACARD – « Blowing up Kähler manifolds with constant scalar curvature. II », *Ann. of Math. (2)* **170** (2009), no. 2, p. 685–738.
- [Aub98] T. AUBIN – *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Bes08] A. L. BESSE – *Einstein manifolds*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008, Reprint of the 1987 edition.
- [BGZ08] S. BENELKOURCHI, V. GUEDJ & A. ZERIAHI – « A priori estimates for weak solutions of complex Monge-Ampère equations », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **7** (2008), no. 1, p. 81–96.
- [Biq97] O. BIQUARD – « Fibrés de Higgs et connexions intégrables : le cas logarithmique (diviseur lisse) », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **30** (1997), no. 1, p. 41–96.
- [BK81] P. BUSER & H. KARCHER – *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque, vol. 81, Société Mathématique de France, Paris, 1981.
- [BKN89] S. BANDO, A. KASUE & H. NAKAJIMA – « On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth », *Invent. Math.* **97** (1989), no. 2, p. 313–349.
- [Blo] Z. BŁOCKI – « On geodesics in the space of Kähler metrics », *Proceedings of the "Conference in Geometry" dedicated to Shing-Tung Yau (Warsaw, April 2009)*, à paraître.
- [BM10] O. BIQUARD & V. MINERBE – « A Kummer construction for gravitational instantons », *À paraître dans Comm. Math. Phys.*; prépublication arXiv :1005.5133, 2010.
- [BT76] E. BEDFORD & B. A. TAYLOR – « The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation », *Invent. Math.* **37** (1976), no. 1, p. 1–44.
- [Cal56] E. CALABI – « On Kähler manifolds with vanishing canonical class », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954* (North-Holland, Amsterdam), vol. 2, 1956, p. 206–207.
- [Cal57] —, « On Kähler manifolds with vanishing canonical class », in *Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, p. 78–89.

- [CGP11] F. CAMPANA, H. GUENANCIA & M. PAUN – « Metrics with cone singularities along normal crossing divisors and holomorphic tensor fields », Prépublication arXiv :1104.4879, 2011.
- [CH05] S. A. CHERKIS & N. J. HITCHIN – « Gravitational instantons of type D_k », *Comm. Math. Phys.* **260** (2005), no. 2, p. 299–317.
- [Che00] X. CHEN – « The space of Kähler metrics », *J. Differential Geom.* **56** (2000), no. 2, p. 189–234.
- [CK98] S. A. CHERKIS & A. KAPUSTIN – « Singular monopoles and supersymmetric gauge theories in three dimensions », *Nuclear Phys. B* **525** (1998), no. 1-2, p. 215–234.
- [CKNS85] L. CAFFARELLI, J. J. KOHN, L. NIRENBERG & J. SPRUCK – « The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic, equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985), no. 2, p. 209–252.
- [CT08] X. X. CHEN & G. TIAN – « Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2008), no. 107, p. 1–107.
- [Don01] S. K. DONALDSON – « Scalar curvature and projective embeddings. I », *J. Differential Geom.* **59** (2001), no. 3, p. 479–522.
- [Don02] —, « Scalar curvature and stability of toric varieties », *J. Differential Geom.* **62** (2002), no. 2, p. 289–349.
- [Don09] —, « Constant scalar curvature metrics on toric surfaces », *Geom. Funct. Anal.* **19** (2009), no. 1, p. 83–136.
- [Don11] —, « Kahler metrics with cone singularities along a divisor », Prépublication arXiv :1102.1196, 2011.
- [Gaf54] M. P. GAFFNEY – « A special Stokes’s theorem for complete Riemannian manifolds », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 140–145.
- [Gau] P. GAUDUCHON – « Calabi’s extremal metrics : an elementary introduction », Notes de cours.
- [GH76] G. W. GIBBONS & S. W. HAWKING – « Gravitational multi-instantons », *Phys. Lett. B* **78** (1976), p. 430–432.
- [GT83] D. GILBARG & N. S. TRUDINGER – *Elliptic partial differential equations of second order*, seconde éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Gua98] B. GUAN – « The Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equations and regularity of the pluri-complex Green function », *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), no. 4, p. 687–703.
- [Haw77] S. W. HAWKING – « Gravitational instantons », *Phys. Lett. A* **60** (1977), no. 2, p. 81–83.
- [Hei10] H. J. HEIN – « On Gravitational Instantons », Thèse de Doctorat, 2010.
- [JMR11] T. JEFFRES, R. MAZZEO & Y. RUBINSTEIN – « Kähler-einstein metrics with edge singularities », Prépublication arXiv :1105.5216, 2011.
- [Joy00] D. D. JOYCE – *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.

- [Kol98] S. KOŁODZIEJ – « The complex Monge-Ampère equation », *Acta Math.* **180** (1998), no. 1, p. 69–117.
- [Kro89a] P. B. KRONHEIMER – « The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients », *J. Differential Geom.* **29** (1989), no. 3, p. 665–683.
- [Kro89b] — , « A Torelli-type theorem for gravitational instantons », *J. Differential Geom.* **29** (1989), no. 3, p. 685–697.
- [LeB91] C. LEBRUN – « Complete Ricci-flat Kähler metrics on \mathbf{C}^n need not be flat », in *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, p. 297–304.
- [Lic58] A. LICHNEROWICZ – *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.
- [LV11] L. LEMPERT & L. VIVAS – « Geodesics in the space of Kähler metrics », Prépublication arXiv :1105.2188, 2011.
- [Mab87] T. MABUCHI – « Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds. I », *Osaka J. Math.* **24** (1987), no. 2, p. 227–252.
- [Mab04] — , « Uniqueness of extremal Kähler metrics for an integral Kähler class », *Internat. J. Math.* **15** (2004), no. 6, p. 531–546.
- [Mab08] — , « K-stability of constant scalar curvature polarization », Prépublication arXiv :0812.4093v2 [math.DG], 2008.
- [McK80] J. MCKAY – « Graphs, singularities, and finite groups », in *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, p. 183–186.
- [Min07] V. MINERBE – « Sur l’effondrement à l’infini des variétés asymptotiquement plates », Thèse de Doctorat, 2007.
- [Min11] — , « Rigidity for multi-Taub-NUT metrics », *J. Reine Angew. Math.* **656** (2011), p. 47–58.
- [PS05] D. H. PHONG & J. STURM – « The monge-ampère operator and geodesics in the space of Kähler potentials », Prépublication arXiv :math.DG/0504157, 2005.
- [RT11] J. ROSS & R. THOMAS – « Weighted projective embeddings, stability of orbifolds, and constant scalar curvature Kähler metrics », *J. Differential Geom.* **88** (2011), no. 1, p. 109–159.
- [Sch02] G. SCHUMACHER – « Asymptotics of complete Kähler-Einstein metrics—negativity of the holomorphic sectional curvature », *Doc. Math.* **7** (2002), p. 653–658 (electronic).
- [Sem92] S. SEMMES – « Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds », *Amer. J. Math.* **114** (1992), no. 3, p. 495–550.
- [Sto09] J. STOPPA – « K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds », *Adv. Math.* **221** (2009), no. 4, p. 1397–1408.
- [Şuv12] I. ŞUVAINA – « ALE Ricci-flat Kähler metrics and deformations of quotient surface singularities », *Ann. Global Anal. Geom.* **41** (2012), no. 1, p. 109–123.
- [Szé06] G. SZÉKELYHIDI – « Extremal metrics and K-stability », Thèse de Doctorat, 2006.

- [Tia97] G. TIAN – « Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature », *Invent. Math.* **130** (1997), no. 1, p. 1–37.
- [TY87] G. TIAN & S.-T. YAU – « Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry », in *Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 1, World Sci. Publishing, Singapore, 1987, p. 574–628.
- [TY90] —, « Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 3, p. 579–609.
- [TY91] —, « Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II », *Invent. Math.* **106** (1991), no. 1, p. 27–60.
- [Wu08] D. WU – « Kähler-Einstein metrics of negative Ricci curvature on general quasi-projective manifolds », *Comm. Anal. Geom.* **16** (2008), no. 2, p. 395–435.
- [Yau78] S.-T. YAU – « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I », *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), no. 3, p. 339–411.
- [Yau93] —, « Open problems in geometry », in *Differential geometry : partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 1–28.

Ce travail de thèse s'intéresse à la résolution d'équations de Monge-Ampère complexes et à ses applications sur certains types de variétés non compactes. Ce mémoire décrit plus précisément deux situations distinctes dans lesquelles on résout des équations de Monge-Ampère, avant de tirer les conséquences de ces résolutions. Dans une première partie, on travaille sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans une variété kählérienne compacte. On fixe sur le complémentaire du diviseur une classe de métriques kählériennes à singularités *cusp* le long du diviseur. Pour construire des géodésiques entre métriques de cette classe, on résout une équation de Monge-Ampère homogène, sur le produit de notre ouvert de Zariski par une surface de Riemann à bord. On applique cette construction à un résultat d'unicité de métriques à courbure scalaire constante dans la classe considérée ; on résout encore pour cela une équation de Monge-Ampère avec second membre sur le complémentaire du diviseur. On exhibe enfin des obstructions topologiques à l'existence de métriques à courbure scalaire constante au sein des classes de métriques kählériennes singulières envisagées. La seconde partie du mémoire traite d'une construction analytique d'instantons gravitationnels ALF, ou variétés complètes de dimension 4, hyperkähleriennes, à croissance cubique du volume. On donne la construction d'instantons diédraux ; on considère plus exactement des résolutions de singularités kleiniennes diédrales. Le traitement d'une équation de Monge-Ampère, donné pour des variétés kählériennes ALF assez générales, nous permet sur nos exemples de corriger un prototype simple pour obtenir la métrique hyperkählienne recherchée.

Mots-clés : Équation de Monge-Ampère complexe, variétés non compactes, métriques à singularités *cusp* le long d'un diviseur, métriques kählériennes à courbure scalaire constante, métriques hyperkähleriennes, instantons gravitationnels ALF diédraux.

Complex Monge-Ampère equation, Kähler metrics of Poincaré type and ALF gravitational instantons

The topic of this thesis is the resolution of Monge-Ampère equations and its application on certain types of non-compact manifolds. This dissertation describes more precisely two distinct situations in which we solve Monge-Ampère equations, and draw conclusions of these resolutions. We work in a first part on the complement of a divisor with normal crossings in a compact Kähler manifold. We fix on the complement of the divisor a class of Kähler metrics with cusp singularities along the divisor. In order to construct geodesics joining metrics of this class, we solve a homogeneous Monge-Ampère equation on the product of our Zariski open set with some Riemann surface with boundary. This construction is then applied to a uniqueness results for constant scalar curvature metrics in the considered class; for this, we also solve a Monge-Ampère equation with right-hand-side member on the complement of the divisor. We finally prove topological obstructions to the existence of constant scalar curvature metrics among the classes of singular metrics we are interested in. The second part of the dissertation is devoted to an analytic construction of ALF gravitational instantons, that is complete hyperkähler 4-manifolds, with cubic growth of the volume. We give the construction of some dihedral instantons ; more specifically, we consider resolutions of kleinian singularities. The treatment of a Monge-Ampère equation, given for quite general ALF manifolds, allows us to correct on our examples a simple prototype to get the sought hyperkähler metric.

Keywords: Complex Monge-Ampère equation, non-compact manifolds, metrics with cusp singularities along a divisor, constant scalar curvature Kähler metrics, hyperkähler metrics, dihedral gravitational instantons.