



HAL
open science

Analyse de données multivariées et surveillance des processus industriels par analyse en composantes principales

Baligh Mnassri

► **To cite this version:**

Baligh Mnassri. Analyse de données multivariées et surveillance des processus industriels par analyse en composantes principales. Automatique. Aix-Marseille Université, 2012. Français. NNT: . tel-00749282

HAL Id: tel-00749282

<https://theses.hal.science/tel-00749282>

Submitted on 7 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse de données multivariées et surveillance des processus industriels par analyse en composantes principales

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 octobre 2012

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université d'Aix-Marseille

Spécialité Automatique

par

Baligh MNASSRI

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	José RAGOT	Professeur à l'INPL, Université de Lorraine
	Abdessamad KOBI	Professeur à l'Université d'Angers
<i>Examineurs :</i>	Jean-Marc THIRIET	Professeur à l'Université Joseph Fourier
	Rachid OUTBIB	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille
	Mustapha OULADSINE	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille (Directeur de thèse)
	El Mostafa EL ADEL	Maître de Conférences à l'Université d'Aix-Marseille (Co-directeur de thèse)
<i>Invité :</i>	Jacques PINATON	Ingénieur à STMicroelectronics Rousset



Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein de l'équipe ESCODI (ESTimation COMmande et Diagnostic) dans le Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS – UMR 7296 CNRS).

Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements à Messieurs Mustapha OULADSINE et El Mostafa EL ADEL pour leur constante disponibilité, leurs aides et leurs encouragements qu'ils m'ont toujours prodigués ainsi que pour m'avoir fait bénéficier amplement de leur rigueur scientifique, de leurs critiques objectives et de leurs conseils avisés.

Je souhaite ensuite exprimer toute ma gratitude à Monsieur José RAGOT, Professeur à l'INPL de l'Université de Lorraine, ainsi qu'à Monsieur Abdessamad KOBI, Professeur à l'Université d'Angers, pour avoir accepté de juger ce travail en qualité de rapporteurs et d'assister parmi le jury.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Jean-Marc THIRIET, Professeur à l'Université Joseph Fourier, à Monsieur Rachid OUTBIB, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille ainsi qu'à Monsieur Jacques PINATON, Ingénieur et chef d'équipe à ST-Microelectronics Rousset, pour leur participation à ce jury de thèse.

Je n'oublie pas dans mes remerciements tous ceux et celles qui ont contribué à la réussite de ces travaux, en particulier, Madame Bouchra ANANOU, Maître de Conférences à l'Université d'Aix-Marseille.

Je remercie mes amis et mes collègues de laboratoire, pour l'ambiance conviviale qu'ils ont contribué à entretenir, les bons moments passés en leur compagnie ainsi que leur sympathie.

Enfin, je ne saurais oublier de trop remercier mes parents pour leur soutien le long de ce parcours.

*À mes très chers parents.
À ma femme et mon petit Yamène.
À mon frère et mes sœurs.*

Table des matières

Table des figures	ix
Références personnelles	xi
Notations	xiii

Introduction générale

1	Contexte et objectifs	1
2	Organisation du rapport de thèse	3

Chapitre 1

Supervision, surveillance et diagnostic

1.1	Introduction	6
1.2	Supervision des processus	7
1.2.1	Concepts associés à la supervision des processus	7
1.2.2	Les étapes de la supervision	9
1.3	Théorie de la surveillance et du diagnostic	10
1.3.1	La surveillance	11
1.3.2	Diagnostic de défauts	11
1.3.3	Critères de performance pour la détection et le diagnostic	14
1.4	Techniques statistiques pour la détection et le diagnostic	15
1.4.1	Cartes de contrôle univariées	15
1.4.2	Limitations des cartes univariées	20
1.4.3	Extensions multivariées des cartes univariées	21
1.4.4	Méthodes de projection	22
1.4.5	Interprétations des situations hors contrôle	25
1.5	Conclusion	26

Chapitre 2

Modélisation par analyse en composantes principales

2.1	Introduction	28
2.2	Analyse en composantes principales linéaire	29
2.3	Propriétés	33
2.3.1	Modélisation en absence de bruit	34
2.3.2	Modélisation en présence de bruit	36
2.4	Détermination d'une structure optimale du modèle ACP	36
2.4.1	Critères de la théorie de l'information	36
2.4.2	Critères heuristiques	37
2.4.3	Minimisation de la variance de l'erreur de reconstruction	41
2.5	Etude comparative des différents critères	45
2.5.1	Présentation et interprétation de l'exemple simulé	46
2.5.2	Interprétations des critères basés sur des seuils	48
2.5.3	Interprétations des critères minimisés	51
2.6	Conclusion	58

Chapitre 3

Contribution au choix d'un modèle optimal par la variance non reconstruite

3.1	Introduction	63
3.2	Détection et détectabilité de défauts	64
3.2.1	Détectabilité généralisée de défauts	64
3.2.2	Influence de la modélisation sur la détectabilité de défauts	71
3.3	Différentes variances non reconstruites	73
3.3.1	Principe de la reconstruction unidimensionnelle	73
3.3.2	Variance non reconstruite généralisée	74
3.3.3	Comportements des différents critères VNR	76
3.4	Nouveaux critères VNR	81
3.4.1	VNR utilisant un nouvel indice combiné	81
3.4.2	Changement de représentation des données	83
3.5	Résultats de simulation	89
3.6	Conclusion	93

Chapitre 4**Théorie d'un diagnostic de défauts par ACP**

4.1	Introduction	97
4.2	Isolation et isolabilité de défauts par reconstruction	98
4.2.1	Généralisation de l'isolation et l'isolabilité de défauts	98
4.2.2	Analyse d'isolabilité par reconstruction de l'indice combiné versus celles de <i>SPE</i> et <i>T2</i> de Hotelling	105
4.3	Diagnostic de défauts simples par les contributions	107
4.3.1	Contributions par décomposition complète : <i>CDC</i>	109
4.3.2	Contributions par décomposition partielle : <i>PDC</i>	109
4.3.3	Contributions diagonales : <i>DC</i>	112
4.3.4	Contributions par reconstruction : <i>RBC</i>	112
4.3.5	Contributions par angle : <i>ABC</i>	113
4.3.6	Analyse de diagnosticabilité	113
4.4	Nouvelles approches pour un diagnostic de défauts multiples	115
4.4.1	Contributions par reconstruction multidimensionnelle	116
4.4.2	<i>RBC ratio</i>	117
4.5	Exemple de synthèse	119
4.5.1	Diagnostic d'un défaut simple	122
4.5.2	Diagnostic de défauts multiples	123
4.6	Conclusion	131

Conclusion générale & perspectives

Annexe A	Limitation du critère VNR	137
Annexe B	Limitation du critère IE	143
Annexe C	Démonstration de la décroissance d'une fonction	145
Annexe D	Consistance théorique du critère VNRVI	147
Annexe E	Relation entre un seuil de contrôle et celui reconstruit	149
Annexe F	Démonstrations d'unification	151

Annexe G Invalidité d'un diagnostic par comparaison des <i>RBC</i> à leurs seuils de contrôle	153
------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------

Références bibliographiques	155
------------------------------------	------------

Table des figures

1.1	Ordonnancement des anomalies selon leur criticité (Adrot, 2000)	9
1.2	Les principales étapes de la supervision	10
1.3	Carte de contrôle typique	17
1.4	Illustration de l'inconvénient de l'utilisation des cartes univariées	21
2.1	Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{A} dont les variables sont entachées par un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.002$	49
2.2	Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{B} dont les variables sont entachées par un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.002$	49
2.3	Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{C} dont les variables sont entachées par un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.002$	50
2.4	Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{D} dont les variables sont entachées par un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.002$	50
3.1	Pourcentages de sélections correctes en fonction de $(1 - \alpha)$ par \mathbf{VNR}_φ et \mathbf{VNR}_ψ sur tous les ensembles des variables avec un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.002$	90
3.2	Pourcentages de sélections correctes en fonction de $(1 - \alpha)$ par \mathbf{VNR}_φ et \mathbf{VNR}_ψ sur tous les ensembles des variables avec un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.2$	90
3.3	Pourcentages de sélections correctes en fonction de $(1 - \alpha)$ par \mathbf{VNR}_φ et \mathbf{VNR}_ψ sur tous les ensembles des variables avec un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.5$	91
3.4	Allures des nouveaux critères appliquées sur les ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} , respectivement en 1 ^{ère} et 2 ^{ème} colonne, en considérant un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.002$	91
3.5	Allures des nouveaux critères appliquées sur les ensembles \mathcal{C} et \mathcal{D} , respectivement en 1 ^{ère} et 2 ^{ème} colonne, en considérant un bruit <i>i.i.d.</i> de variance $\sigma^2 = 0.002$	92
4.1	Sous-espace d'isolabilité de défauts par reconstruction de l'indice combiné en fonction de ceux des indices <i>SPE</i> et <i>T2</i> de Hotelling	107
4.2	Sélection du nombre optimal des CPs	120
4.3	Détection des défauts avec les différents indices	121
4.4	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice <i>SPE</i>	124

4.5	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice SWE	124
4.6	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice $T2$	125
4.7	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice φ	125
4.8	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice D	126
4.9	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice SPE	126
4.10	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice SWE	127
4.11	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice $T2$	127
4.12	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice φ	128
4.13	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice D	128
4.14	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice SPE	129
4.15	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice SWE	129
4.16	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice $T2$	130
4.17	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice φ	130
4.18	Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$	par différentes méthodes basées sur l'indice D	131

Références personnelles

Conférences nationales

- B. Mnassri, E.M. El Adel, B. Ananou, and M. Ouladsine. Détection et Identification de défauts par Analyse en Composantes Principales. In *3èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS*, Angers, France, 2009.
- B. Mnassri. Diagnostic de Défauts par Analyse en Composantes Principales. In *6èmes Journées des Doctorants du LSIS*, Giens, Hyères, France, 2009.

Conférences internationales

- B. Mnassri, B. Ananou, E.M. El Adel, M. Ouladsine and F. Gasnier. Détection et localisation de défauts des Wafers par des approches statistiques multivariées et calcul des contributions. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bucarest, Roumanie, 2008.
- B. Mnassri and E.M. El Adel and M. Ouladsine. Fault Localization Using Principal Component Analysis Based on a New Contribution to the Squared Prediction Error. In *16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 65–70, Ajaccio, France, 2008.
- B. Mnassri, E.M. El Adel, B. Ananou, and M. Ouladsine. Fault Detection and Diagnosis Based on PCA and a New Contribution Plots. In *7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, pages 834–839, Barcelona, Spain, 2009.
- B. Mnassri, E.M. El Adel, B. Ananou, and M. Ouladsine. A Generalized Variance of Reconstruction Error Criterion for Determining the Optimum Number of Principal Components. In *18th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 868–873, Marrakech, Morocco, 2010.
- B. Mnassri, E.M. El Adel, M. Ouladsine and B. Ananou. Selection of the Number of Principal Components Based on the Fault Reconstruction Approach Applied to a New Combined Index. In *49th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3307–3312, Atlanta, Georgia, USA, 2010.
- B. Mnassri, E.M. El Adel and M. Ouladsine. New VRE Criterion to Select the Optimum Number of PCs. In *11th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, pages 1–13, Monastir, Tunisia, 2010.
- B. Mnassri, E.M. El Adel and M. Ouladsine. Une généralisation sur les conditions

- suffisantes de détectabilité de défauts multidimensionnels par ACP. In *Conférence Méditerranéenne sur l'Ingénierie Sûre des Systèmes Complexes*, Agadir, Maroc, 2011.
- B. Mnassri, E.M. El Adel and M. Ouladsine. Inverse-Variance Weighting PCA-based VRE criterion to select the optimal number of PCs. In *18th IFAC World Congress*, pages 2851–2856, Milano, Italy, 2011.
 - B. Mnassri, E.M. El Adel and M. Ouladsine. Unified Sufficient Conditions for PCA-based Fault Detectability and Isolability. In *8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, pages 421–426, Mexico City, Mexico, 2012.
 - B. Mnassri, M. Ouladsine and E.M. El Adel. Diagnostic de défauts par l'approche *RBC ratio*. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, pages 114–119, Grenoble, France, 2012.

Notations

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m}$	Matrice de données représentant le fonctionnement normal du processus
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$	Vecteur d'observation de mesures des variables de \mathbf{X}
$\overset{\circ}{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{N \times m}$	Matrice de données représentant le fonctionnement normal du processus en l'absence de bruit de mesures
$\overset{\circ}{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$	Vecteur d'observation en l'absence de bruit de mesures
$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Matrice de covariance ou de corrélation de \mathbf{X}
$\overset{\circ}{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Matrice de covariance ou de corrélation de $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$
$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N \times m}$	Matrice de composantes principales de \mathbf{X}
$\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$	Vecteur d'observation de composantes principales de \mathbf{X}
N	Nombre d'échantillons mesurés
m	Nombre de variables mesurées
ℓ	Nombre de composantes principales retenues dans le modèle ACP qui correspond aux données de \mathbf{X}
k	Indice du temps (numéro d'observation)
$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times m}$	Nouvelles données issues d'une transformation linéaire de celles de \mathbf{X}
$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$	Vecteur d'observation de mesures des variables de \mathbf{Y}
$\mathbf{S} = \Sigma^{-1}$	Matrice de covariance de \mathbf{Y}
κ	Nombre de composantes principales retenues dans le modèle ACP qui correspond aux données de \mathbf{Y}
$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Matrice des vecteurs propres de Σ
$\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Matrice des valeurs propres de Σ
λ_a	a ème valeur propre de Σ
$\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^m$	a ème vecteur propre de Σ correspondant à λ_a
$\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$	Matrice des ℓ premiers vecteurs propres de Σ
$\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)}$	Matrice des $(m - \ell)$ derniers vecteurs propres de Σ
$\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$	Matrice représentant le modèle ACP des données de \mathbf{X}
$\gamma = \mathbf{x}^T \mathcal{M} \mathbf{x}$	Indice de détection quelconque ayant une forme quadratique

Notations

Γ^2	Seuil de contrôle correspondant à l'indice γ
\mathcal{M}	Matrice de γ
$\xi_j \in \mathbb{R}^m$	Vecteur qui représente la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité $\mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$
\mathcal{F}_j	Défaut réel de type simple porté par la direction de ξ_j
$\Xi_{\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{m \times r}$	Matrice orthonormée composée des r correspondantes colonnes de la matrice identité \mathbf{I}_m
$\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$	Défaut réel de type multiple porté par les directions qui correspondent aux colonnes de $\Xi_{\mathcal{J}}$
r	Nombre de variables réellement en défaut
\mathcal{J}	Index de l'ensemble composé par les r variables réellement en défaut
\mathcal{I}	Index d'un ensemble composé par r variables supposées en défaut
$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$	Vecteur d'observation dont la $i^{\text{ème}}$ variable est reconstruite
$\mathbf{x}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^m$	Vecteur d'observation dont les variables constituant l'ensemble \mathcal{I} sont reconstruites

Introduction générale

1 Contexte et objectifs

L'anticipation et la correction à temps des pannes et des défaillances dues généralement à des anomalies dans les procédés évitent sans doute la baisse de productivité des processus industriels. En revanche, le moindre dysfonctionnement dans un processus peut entraîner de lourdes conséquences dans un monde économiquement parlant très concurrentiel où la qualité et plus particulièrement le rendement sont des atouts cruciaux. En l'occurrence, le génie de l'homme qui est au service des besoins de celui-ci a été l'origine des progrès industriels durant les derniers siècles favorisant pour autant les essors des industries à risques. Celles-ci présentent des dangers potentiels qui ont plus ou moins défrayé la chronique en émergeant ainsi le monde dans un tourbillonnement de mesures sur la prévention de tels risques. Outre les enjeux économiques et ceux de la qualité des produits, il y a en réalité d'autres intérêts plus prioritaires afin d'assurer un fonctionnement normal de processus. En effet, la détection ou même l'anticipation d'une défaillance au début de son apparition peut éviter de grands dommages et catastrophes. Par conséquent, la détection et le diagnostic de défauts des processus industriels représentent un intérêt capital.

La connaissance profonde de la dynamique des processus est indispensable pour une interprétation de leurs dérèglages. En l'occurrence, les systèmes industriels se complexifient avec l'automatisation des processus ainsi que d'autres facteurs. Malgré la complexité, ils doivent assurer quand même les fonctions pour lesquelles ils ont été conçus, notamment la sûreté de leur fonctionnement. Les processus complexes se caractérisent par un environnement ouvert où l'incertitude, l'imprédictibilité et la dynamique des phénomènes rendent les décisions difficiles ([Gentil, 2007](#)). Entre autres, et pour de tels processus ou ceux de types boîtes noires, il est souvent compliqué de créer des modèles mathématiques. Même si la réalisation de tels modèles est possible, les approches analytiques présentent une description insuffisante des fonctionnements de processus. Néanmoins, les approches permettant de définir les états de fonctionnement en s'appuyant sur l'analyse statistique des données de ces processus peuvent jouer un rôle important pour la détection et le diagnostic des défauts. Ainsi, les statistiques multivariées ont été l'origine de nombreuses techniques exploitées pour un contrôle statistique.

En effet, les cartes de contrôle sont les outils finaux d'une mise en œuvre d'un contrôle statistique de processus. Elles permettent la visualisation de l'évolution temporelle d'un processus afin de détecter les changements susceptibles de modifier ses performances. En revanche, la dimensionnalité des processus et les colinéarités qui peuvent exister entre les

variables limitent l'efficacité en terme d'isolation de défauts par l'interprétation directe de telles cartes. Pour cela, la réduction de la dimension de l'espace des variables en utilisant les méthodes de projection comme l'analyse en composantes principales (ACP) peut révéler des informations cachées mieux interprétables.

L'objectif de la réduction de données pour une analyse statistique multivariée est d'assurer la simplicité pour la visualisation tout en conservant suffisamment d'informations pour une interprétation appropriée d'un dérèglement. La plupart des approches qui réduisent la dimension d'un espace multivarié s'appuient sur l'utilisation de ce qu'on appelle variables latentes ou cachées. Ces dernières représentent des variables virtuelles construites dans le but de comprendre un intérêt caractéristique qui ne peut pas être mesuré directement. Bien que les variables latentes ne soient pas observables, elles ont quand même un certain impact sur les variables originelles de processus et par conséquent, elles sont soumises à une analyse. Les variables latentes sont généralement définies comme une combinaison linéaire des variables originelles. Notamment, l'ACP qui est une méthode révélatrice d'informations latentes est particulièrement adaptée à l'analyse des données corrélées.

La surveillance et le diagnostic de défauts des processus en utilisant l'ACP ont reçu une attention considérable. En effet, l'ACP permet de mettre en évidence les corrélations linéaires significatives entre les variables du processus par la génération d'un modèle ACP basé sur la connaissance issue du système sans pour autant ni formuler ni avoir une forme explicite d'un modèle entrées/sorties. Ainsi, toutes les corrélations entre les différentes variables sont prises en considération dans le modèle ACP. Cette approche représente un outil de modélisation du comportement de processus plus particulièrement en fonctionnement normal. Ainsi, les défauts sont alors détectés en comparant le comportement observé à celui donné par le modèle ACP. Plus précisément, la phase de détection de défauts est liée à une étape génératrice de résidus ou plutôt d'indices de détection basés sur une estimation paramétrique (Isermann, 2011). Une telle étape se résume dans la génération, à partir des mesures observées et d'un modèle ACP représentant un fonctionnement normal du processus, des indices sous forme de signaux révélateurs de défauts. A partir de la comparaison de ces signaux à des tolérances caractérisant le comportement normal en considérant notamment leurs aspects non déterministes, l'étape de détection doit alors indiquer la présence ou non de défauts (Kresta et al., 1991; Harkat, 2003).

La littérature révèle une abondance d'approches différentes qui ont pour autant un seul objectif qui est le diagnostic de défauts par ACP. Or, la définition et le principe mathématique de l'ACP ont déjà fait l'unanimité depuis des décennies. On se demande alors pourquoi toutes ces contributions enrichissantes qui ne cessent d'accroître au fil du temps en nombre ainsi qu'en forme? En effet, une réponse apparaît immédiatement : l'ACP n'est qu'un outil mathématique dont la manière d'exploiter son avantage pour un diagnostic se distingue et s'interprète différemment d'une approche à l'autre. Ainsi, la question qui devrait être posée est plutôt comment exploite-t-on un tel outil?

Puisque l'ACP est une méthode de projection afin de réduire les données, la première étape lors de son utilisation repose sur la modélisation de processus en essayant de déterminer une structure adaptée du modèle ACP. Dans ce cadre, la littérature a offert plusieurs critères de choix de la dimension d'un tel modèle. Pour cela, nous allons essayer de répondre à certaines interrogations. Notamment : pour quels objectifs et pourquoi ces

critères ont-ils pris de différentes formes? Sur quelles hypothèses sont-ils basés et quelles sont leurs limitations? Ces dernières sont-elles prouvables mathématiquement et ont-elles un rapport avec un type particulier de variables? Existe-t-il un inconvénient commun? La modélisation a-t-elle une influence sur la détectabilité de défauts et quelles solutions pouvons-nous apporter?

Un diagnostic de défauts par ACP est généralement basé sur deux principales approches. La première et la plus classique représente le calcul des contributions aux indices de détection. La deuxième approche est fondée sur le principe de reconstruction de tels indices. Sous cette optique, nos objectifs s'articulent autour des questions suivantes : qu'est-ce qu'une contribution et pourquoi a-t-elle été proposée pour des indices particuliers et non pas pour d'autres? Peut-elle garantir un diagnostic correct et pour quels types de défauts est-elle valable? Que pouvons-nous proposer comme améliorations? Dans le cadre de l'ACP, le concept d'isolabilité de défauts par reconstruction des indices de détection est négligemment étudié en le développant par reconstruction uniquement de l'indice *SPE*. Pour cela, est-il possible d'étendre un tel concept aux autres indices? Pour quelle raison?

La reconstruction aboutit à des indices de détection insensibles aux défauts et ayant une forme quadratique permettant d'établir des seuils de tolérances pour l'isolation de défauts complexes. Entre autre, quelques approches de contributions disposent aussi d'une forme quadratique, ce qui permet d'établir des limites de contrôle. Dans ce cadre, on se demande si ces limites sont-elles valides? Sinon, que peut-on envisager comme solution afin d'isoler les défauts complexes en utilisant le principe de contribution? Enfin, peut-on décider laquelle est meilleure pour un diagnostic fiable, l'approche des contributions ou celle de reconstruction d'indices?

2 Organisation du rapport de thèse

La présente thèse se divise en quatre chapitres organisés de la manière suivante :

Le premier chapitre présente des généralités principalement sur la détection et le diagnostic de défauts des processus. Les concepts généraux ainsi que les théories respectivement de la supervision et plus particulièrement de la surveillance et le diagnostic de processus sont introduits. Les caractéristiques de tels processus ainsi que d'autres enjeux peuvent imposer des types de méthodes pour la surveillance et le diagnostic. En s'appuyant sur les avantages d'un contrôle statistique de processus, ce chapitre présente également un sommaire des techniques statistiques ainsi que leurs extensions et évolutions pour la détection et le diagnostic des défauts de processus. L'objectif étant d'éclaircir l'intérêt de l'utilisation des méthodes de projection comme l'analyse en composantes principales linéaire et ses extensions.

Le deuxième chapitre présente un rappel du principe mathématique de l'ACP linéaire. En prouvant qu'une telle approche est un outil de modélisation, un choix d'une structure adaptée du modèle ACP reste une problématique. Pour cela, il semblerait utile de rappeler les propriétés de la modélisation par ACP en essayant de comprendre la structure d'un modèle optimal en l'absence de bruit. Dans la pratique, la présence de bruit dans les données est inévitable compliquant ainsi la détermination d'une telle structure. Dans ce

cadre, quelques critères de choix parmi les plus connus dans la littérature sont étudiés et comparés les uns aux autres à travers un exemple simulé. Ce chapitre présente deux démonstrations montrant les limitations de deux critères en concluant également que le problème souvent rencontré par l'utilisation de tels critères est lié à la présence des variables indépendantes et quasi-indépendantes.

Le troisième chapitre présente principalement nos contributions dans le choix d'un modèle ACP en s'appuyant sur le principe de la variance de l'erreur de reconstruction. Afin de prouver l'importance de la précision dans le choix de la dimension d'un tel modèle, les concepts de la détection ainsi que la détectabilité de défauts sont introduits. L'objectif étant de montrer les influences de la modélisation suite à une sous-estimation comme une surestimation du modèle sur la qualité de la détection de défauts. En essayant de remédier à l'inconvénient du critère classique de la variance non reconstruite dans le choix du modèle, plusieurs autres variances sont révélées et analysées théoriquement. Cela a permis la distinction d'un premier critère empirique suivi par la proposition d'un deuxième nouveau critère du même principe mais basé sur la variance de l'erreur de reconstruction d'un nouvel indice combiné. En s'appuyant sur un changement de représentation des données, un troisième nouveau critère faisant la particularité est également proposé en établissant théoriquement les conditions de son efficacité. Les performances des différents critères proposés sont illustrées à travers l'exemple de simulation du deuxième chapitre.

Le quatrième et dernier chapitre est dédié à la théorie d'un diagnostic de défauts par ACP en s'appuyant plus particulièrement sur deux principales approches telles que les contributions et la reconstruction des indices de détection. Cette dernière garantit l'identification de tout type de défauts. Néanmoins, l'isolation de ces défauts n'est garantie que sous une condition établie à l'aide d'un concept d'isolabilité de défauts. Celui-ci représente un des principaux objectifs de ce chapitre. Un tel concept est étendu à tous les indices de détection en permettant l'élaboration d'une analyse théorique d'isolabilité de défauts par reconstruction de l'indice combiné versus une reconstruction des indices SPE et T^2 de Hotelling. Les contributions sont dédiées au diagnostic des défauts simples. Dans ce cadre, une nouvelle méthode de contribution par décomposition de l'indice SPE est proposée. Ce chapitre est également enrichi par deux nouvelles approches de contributions dans l'objectif est de garantir un diagnostic correct de défauts multiples ayant de grandes amplitudes et l'isolation de défauts plus complexes. Un exemple de synthèse est utilisé pour appliquer les différentes méthodes proposées.

1

Supervision, surveillance et diagnostic

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Supervision des processus	7
1.2.1	Concepts associés à la supervision des processus	7
1.2.2	Les étapes de la supervision	9
1.3	Théorie de la surveillance et du diagnostic	10
1.3.1	La surveillance	11
1.3.2	Diagnostic de défauts	11
1.3.2.1	Caractéristiques des défauts	12
1.3.2.2	Principe du diagnostic	13
1.3.3	Critères de performance pour la détection et le diagnostic	14
1.4	Techniques statistiques pour la détection et le diagnostic	15
1.4.1	Cartes de contrôle univariées	15
1.4.1.1	Définitions des cartes de contrôle	16
1.4.1.2	Rôle et critères de performance des cartes univariées	16
1.4.1.3	Aperçu sur les cartes univariées	18
1.4.2	Limitations des cartes univariées	20
1.4.3	Extensions multivariées des cartes univariées	21
1.4.4	Méthodes de projection	22
1.4.4.1	Intérêt de la projection	23
1.4.4.2	Différentes extensions de l'ACP	23
1.4.5	Interprétations des situations hors contrôle	25
1.5	Conclusion	26

1.1 Introduction

Dans les processus industriels, la majorité des pannes causant une baisse de la production est généralement due à des anomalies dans le procédé qui n'ont pas été corrigées à temps. En plus des contraintes de la qualité des produits et celles économiques, il y a plusieurs autres intérêts afin d'assurer un fonctionnement normal pour ces processus. La détection, ou même l'anticipation d'une défaillance au début de son apparition peut éviter de grands dommages et catastrophes. Par conséquent, la détection et le diagnostic des défaillances de processus représentent un intérêt capital.

Pour les processus complexes ou ceux de type boîtes noires, il est souvent très compliqué voire impossible de leur établir des modèles mathématiques. Même si la réalisation de tels modèles est possible, les approches analytiques présentent toujours une vision insuffisante des fonctionnements des processus (Verron et al., 2008). Une connaissance profonde de la dynamique de ces processus est un atout primordial pour une interprétation fiable de leurs dérèglages. Dans ce cadre, les approches qui permettent l'identification des états de fonctionnement en se basant sur l'analyse des informations extraites des données ou des mesures des processus peuvent apporter une aide avantageuse pour la détection et le diagnostic de défauts. Plus particulièrement, les approches statistiques sont parmi les techniques les plus exploitées dans ce contexte.

La surveillance de processus en s'appuyant sur une analyse des mesures a pour but la détection des variations survenues dans les variables caractéristiques de tels processus. Pour prendre les actions correctives nécessaires afin d'améliorer le processus, un diagnostic doit être mené pour l'isolation des défauts causant ces variations. Le principe d'une telle analyse repose sur une maîtrise ou un contrôle statistique de processus. Une telle discipline est la traduction intégrale de celle en anglais *statistical process control* largement connue dans la littérature sous l'abréviation du *SPC*. Le contrôle statistique de processus a été initié par W.A. Shewhart en 1924 aux Etats-Unis. C'est en étudiant la variabilité des particules dans des fluides que Shewhart a inventé la célèbre carte de contrôle (Shewhart, 1931). Oubliée depuis, ce n'est qu'à partir des années soixante après la deuxième guerre mondiale qu'il y a eu réellement regain d'intérêt pour cette discipline, et c'est au Japon qu'elle a vite pris racine. La maîtrise statistique de processus a fortement contribué à l'amélioration de la qualité des produits japonais, ce qui explique entre autre le fabuleux succès industriel et économique qu'a connu ce pays. Son apparition en Europe débuta à partir de la fin des années 70, poussée par les effets de la mondialisation, des échanges et de l'accroissement de la concurrence internationale. Une telle maîtrise statistique reposait encore sur des techniques univariées. A cette époque, beaucoup d'améliorations ont été proposées mais peu de chercheurs s'intéressaient à ces méthodes statistiques. L'activité de recherche a connu une dynamique très importante à partir des années 80 (Zaïdi, 1989; Elbekkaye, 1993).

De nos jours, ces méthodes statistiques sont utilisées dans de nombreux secteurs pour le contrôle des processus, la détection et la prévention de leurs défauts. Les cartes de contrôle uni et/ou multivariées sont les outils finaux d'une mise en œuvre d'un contrôle statistique de processus. Elles servent à visualiser l'évolution temporelle d'un processus et à détecter les changements susceptibles de modifier ses performances. En revanche, les corrélations entre les variables ont été une cause principale limitant l'efficacité de

l'utilisation de la carte univariée en ouvrant ainsi les portes aux notions multivariées. La plus célèbre carte de contrôle multivariée est celle de la T^2 de Hotelling ([Hotelling, 1947](#)). Le contrôle multivarié a la capacité de combiner des mesures multidimensionnelles en une seule mesure de performance. Néanmoins, la dimensionnalité des processus et les colinéarités qui peuvent exister entre les variables limitent également l'efficacité en termes de détection et d'isolation de défauts par l'interprétation directe de telle carte. La réduction de la dimension de l'espace des variables en utilisant les méthodes de projection comme l'analyse en composantes principales peut révéler des informations cachées mieux interprétables et exploitables.

Ce chapitre tracera, dans la deuxième et la troisième section, les principaux concepts définissant la supervision et plus particulièrement la surveillance et le diagnostic de processus. La quatrième section présentera un sommaire des approches statistiques ainsi que leurs extensions et évolutions pour la détection et le diagnostic. L'objectif de cette section est de mettre en contexte l'intérêt de l'utilisation des méthodes de projection, en particulier l'analyse en composantes principales linéaire et ses extensions.

1.2 Supervision des processus

Dans un contexte économique de productivité et de flexibilité, la supervision a bénéficié d'une avancée technologique exceptionnelle née du besoin d'un outil de visualisation des processus industriels. A ses débuts, elle se composait d'un grand tableau mural représentant la vision des opérateurs du processus industriel. Avec l'essor informatique, les voyants ont été remplacés par des écrans et des claviers. Le but restait le même : contrôler et commander un processus industriel.

La supervision établit l'état actuel du système pour pouvoir prendre des décisions et pouvoir maintenir ses critères de performance (qualité, rentabilité, sûreté, etc.). Elle consiste à surveiller l'état de fonctionnement d'un procédé pour l'amener et le maintenir à son point de fonctionnement normal. En effet, la supervision a pour vocation première d'émettre des alarmes dont l'objectif est d'attirer l'attention de l'opérateur de supervision sur l'apparition d'un ou de plusieurs événements susceptibles d'affecter le bon fonctionnement du système. Compte tenu de la complexité des procédés, la génération d'alarmes est le moyen le plus employé pour avertir l'opérateur de l'occurrence d'un événement anormal. Les alarmes sont donc liées aux dysfonctionnements pouvant apparaître sur le processus. Pour cela, il est important de préciser le sens accordé aux termes employés pour évoquer les dysfonctionnements pouvant survenir dans le système.

1.2.1 Concepts associés à la supervision des processus

Après avoir décrit le rôle de la supervision, il reste alors à présenter ses principales étapes. Néanmoins, il est question de donner tout d'abord les différents concepts rencontrés dans la littérature concernant la supervision, la détection et le diagnostic de défauts, car de bons supervision, détection et diagnostic nécessitent une bonne compréhension des ces notions. En se référant à la littérature, on reconnaît immédiatement que la terminologie dans ce domaine n'est pas uniforme. En effet, les définitions peuvent présenter des

différences provenant du fait que la supervision, la détection et le diagnostic de défauts peuvent être abordés de différentes manières selon l'origine et la formation des intervenants (Zwingelstein, 1995; Isermann et Ballé, 1997; Hernández-De-León, 2006).

- Un système est dans un état de **fonctionnement normal** si ses variables caractéristiques (variables d'état, variables de sortie, variables d'entrée, paramètres du système) demeurent au voisinage de leurs valeurs nominales. Le système est dit défaillant dans le cas contraire ;
- Une **anomalie** représente une condition anormale diminuant ou supprimant l'aptitude d'un ensemble (de composants) à accomplir une fonction requise. Ce terme générique permet de décrire tout ce qui n'est pas conforme à une référence ;
- Une **défaillance** est l'altération ou la cessation de l'aptitude d'un ensemble (de composants) à accomplir sa ou ses fonctions requises avec les performances définies dans les spécifications techniques. Après défaillance d'une entité, celle-ci est en état de panne. La défaillance est un passage d'un état à un autre, par opposition à une panne qui est un état ;
- Une **dégradation** caractérise le processus qui amène à un état défaillant du procédé ;
- Un **défaut** se définit comme une anomalie du comportement d'un système sans forcément remettre en cause sa fonction mais peut présager d'une défaillance à venir ;
- Une **panne** caractérise l'incapacité d'un dispositif à accomplir une fonction requise. Un système est généralement considéré en panne dès l'apparition d'une défaillance. Ainsi, la panne est la cause de l'apparition des symptômes ;
- Un **symptôme** est l'événement qui révèle d'un dysfonctionnement. Il s'agit de l'effet conséquent d'un comportement anormal. Ainsi, il est le seul signe dont dispose le système de surveillance au moment de la détection d'une anomalie.

Pour parvenir à déterminer et caractériser les anomalies d'un système, on fait nécessairement référence à des informations sur le comportement et/ou le fonctionnement du système considéré. Ces informations sont généralement extraites des observations de l'environnement du système ou de sa modélisation de connaissance. Pour cela, les définitions des termes observation, mesure et signe (Zwingelstein, 1995; Ploix, 1998; Vellemans, 2006) sembleraient également essentielles :

- Une **observation** est une information obtenue à partir du comportement ou du fonctionnement réel du processus ;
- Une **mesure** est une observation élémentaire du fait qu'elle reflète une et une seule grandeur physique. Elle est représentée par une variable dont le contenu est l'image d'une grandeur physique. Son obtention s'effectue par l'intermédiaire d'un système physique (capteur). Ainsi, les mesures peuvent être de différentes natures :
 - ✓ *qualitatives* : représentées par un ensemble fini de modalités dont chacune est associée à un symbole ;
 - ✓ *quantitatives* : dont les valeurs appartiennent à l'ensemble des réels ;
 - ✓ *logiques* : valeurs tout ou rien {vrai, faux} souvent elles correspondent respectivement aux valeurs $\{0, 1\}$;
 - ✓ *floues* : représentées par des fonctions d'appartenance, dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle $[0, 1]$.
- Un **signe** est le caractère distinctif d'un état comportemental anormal. Il est ca-

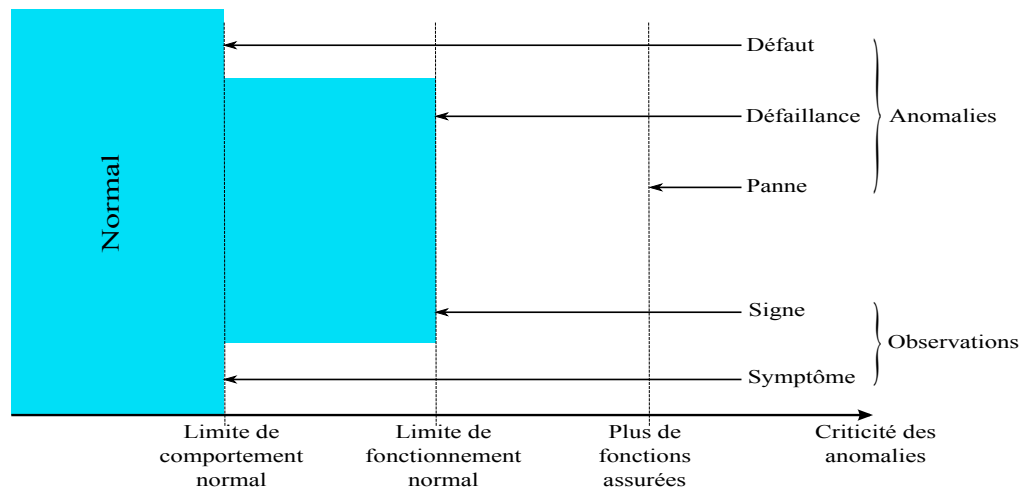


FIGURE 1.1 – Ordonnancement des anomalies selon leur criticité (Adrot, 2000)

ractérisé par un ensemble d’observations en provenance d’un système physique et révèle la présence d’un défaut.

La distinction entre ces définitions est établie en considérant les aspects comportementaux et fonctionnels (Ploix, 1998; Hernández-De-León, 2006). Un défaut (comportement) n’entraîne pas forcément une défaillance (fonctionnelle), c’est-à-dire une impossibilité pour le procédé d’accomplir sa tâche. Le défaut n’induit pas nécessairement une défaillance mais il en est la cause. En outre, une panne résulte toujours d’une ou de plusieurs défaillances qui elles-mêmes résultent d’un ou de plusieurs défauts. Finalement, on utilise également le terme plus générique d’anomalie pour évoquer une particularité non-conforme à une référence comportementale ou fonctionnelle. Par mesure de simplicité, on peut employer de façon équivalente les termes défaut, défaillance et panne puisqu’ils sont des anomalies.

La distinction entre les termes symptôme et signe s’apparente donc à la différence entre les notions de défaut et de défaillance. Un symptôme révélateur d’une défaillance est nécessairement un signe, alors qu’un défaut se manifeste à travers des signes qui ne sont pas nécessairement des symptômes. Les symptômes et les signes sont alors des observations. Dans ce cadre, Adrot (2000) a établi un ordonnancement des anomalies selon leur criticité afin de révéler l’étendue de leurs effets sur le fonctionnement d’un processus (figure 1.1).

1.2.2 Les étapes de la supervision

Le mot *supervision* est abondamment utilisé par la communauté des automaticiens. Bien qu’il n’est pas évident d’en donner une définition qui fait l’unanimité. La supervision est généralement présentée comme étant la commande et la surveillance de l’exécution d’une opération ou d’un travail accompli par d’autres agents (hommes ou machines). Notamment, elle regroupe l’ensemble des outils et méthodes qui permettent de conduire des installations industrielles tant en fonctionnement normal qu’en présence de défaillances ou de perturbations.

Pour mener correctement la supervision d’un processus, il est nécessaire de définir l’en-

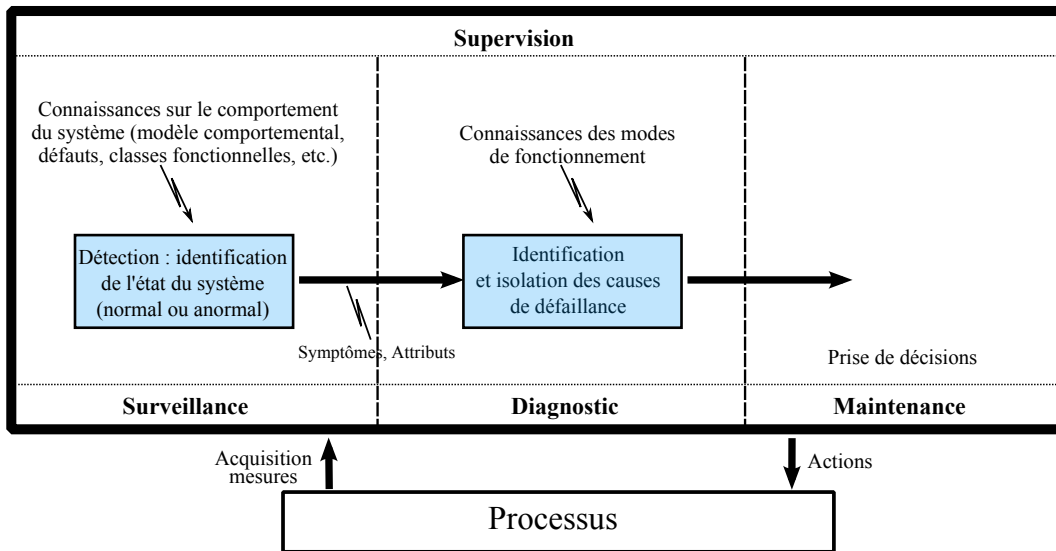


FIGURE 1.2 – Les principales étapes de la supervision

semble des étapes que peut inclure. Dans ce cadre, la littérature a offert plusieurs propositions. Comme exemple, [Breuker et Van De Velde \(1994\)](#) ont fourni une large perspective en suggérant que les étapes d'une supervision se succèdent en une chaîne de planification, prédiction, surveillance, diagnostic et affectation des tâches pour le contrôle du processus et la manipulation des dispositifs. Néanmoins, il y a quelques tâches infaisables en ligne. Ainsi, [Acosta et al. \(2001\)](#) ont encore utilisé une représentation plus différente en proposant une supervision dite globale constituée de huit étapes fondamentales qui sont : la surveillance, le diagnostic, l'évaluation d'état, le mode de fonctionnement, le pronostic, la planification, l'interface HM et la validation des données.

Malgré la diversité des propositions, le plus souvent la supervision prend en compte trois étapes principales, notamment la surveillance, le diagnostic et la reconfiguration (ou prise de décision). Ces étapes peuvent être assurées par des algorithmes (machines) comme par un ou plusieurs opérateurs humains.

L'étape de la surveillance (ou *monitoring*) traite les données recueillies en ligne afin d'obtenir l'état de fonctionnement du processus. En présence des anomalies, le diagnostic consiste à estimer leurs causes afin que des actions de corrections soient prises (reconfiguration). Dans ce contexte, la figure 1.2 présente un schéma récapitulatif retraçant les principales étapes de la supervision d'un processus.

1.3 Théorie de la surveillance et du diagnostic

La thématique de la surveillance et du diagnostic des systèmes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche depuis des années. La diversité dans les approches du diagnostic des systèmes semble être souvent le résultat de contextes différents notamment en ce qui concerne les applications visées et le cahier des charges qui en résulte. Les informations relatives au système et aux types de défauts à détecter peuvent conduire à la

mise en œuvre de méthodes spécifiques. Par exemple, si seules des données entrée/sortie sont disponibles sur le système, une méthode par apprentissage semblera naturellement adaptée, par contre si un modèle mathématique est disponible, les méthodes analytiques pourront être privilégiées.

1.3.1 La surveillance

La surveillance d'un système a pour objectif de déceler les comportements qui diffèrent d'un fonctionnement normal. De manière générale, les méthodes de surveillance peuvent être classées en deux catégories : celles pour qui seules les données acquises sur le processus considéré permettant de caractériser son mode de fonctionnement et celles basées sur un modèle décrivant le comportement du système à surveiller. Face à la complexité plus particulièrement des grands systèmes, la surveillance se doit être robuste vis-à-vis des incertitudes et erreurs qui entachent tant les modèles que les données.

Le rôle de la surveillance est de veiller sur les évolutions du comportement du système et de collecter des informations pertinentes pour la prise de décisions dans le cas d'une défaillance. Elle joue donc un rôle clef dans la phase d'exploitation des systèmes en regroupant ainsi deux principales fonctions. Le suivi du système a pour objectif l'acquisition de ses données. Ces dernières sont utilisées pour la reconstitution de l'état réel du système. A partir de l'analyse en temps réel de données recueillies en ligne, la surveillance nécessite donc une prise de décision rapide et implique, de ce fait, une prise en compte impérative du facteur temps. La fonction du suivi maintient en permanence un historique des traitements effectués ainsi qu'une trace des événements observés par la supervision.

En plus de l'acquisition de données, la deuxième fonction qui est la détection consiste essentiellement à révéler la présence d'un défaut. Ceci implique qu'une telle fonction permet de déterminer la normalité ou l'anormalité du fonctionnement de processus. En outre, elle peut être également révélatrice du moment de l'apparition de l'événement défectueux (Isermann et Ballé, 1997; Fortuna et al., 2006).

1.3.2 Diagnostic de défauts

Un diagnostic est le raisonnement menant à l'identification de la cause (origine) d'une anomalie (défaut, défaillance, panne) à partir des informations révélées par les observations (mesure, signe, symptôme). Le diagnostic établit un lien de cause à effet entre un symptôme observé et la défaillance survenue, ses causes et ses conséquences. Dans ce cadre, l'implantation d'une démarche du diagnostic doit apporter des réponses aux questions suivantes en ce qui concerne ses objectifs, ses principes de mises en œuvre et ses critères d'évaluation :

- Objectifs : que veut-on surveiller ? Quels types de défauts doit-on détecter ?
- Principes : Quel est le principe du diagnostic à mettre en œuvre ?
- Critères : quelles sont les performances attendues ? Quels sont les indices d'évaluation de ces performances ?

1.3.2.1 Caractéristiques des défauts

La première question que l'on se pose, lorsque l'on conçoit une démarche du diagnostic, est de savoir ce que l'on veut détecter, c'est-à-dire de définir le type de dysfonctionnement que l'on veut diagnostiquer et donc les défauts susceptibles d'altérer le bon fonctionnement du système. Un défaut est défini comme une déviation non autorisée d'au moins une propriété caractéristique d'une variable de son comportement acceptable. Par conséquent, le défaut est un événement qui peut mener au dysfonctionnement du système. Dans ce cadre, l'étude des caractéristiques des défauts a abouti à une distinction entre leurs classes, types et formes (Isermann, 1997, 2005; Fortuna et al., 2006).

Pour le diagnostic, la façon dont les défauts agissent sur le système (défauts additifs ou multiplicatifs) revêt un intérêt particulier. Ces classes de défauts sont aussi désignées dans la littérature de la surveillance par les termes de défauts paramétriques (pour les défauts multiplicatifs) et non paramétriques (pour les défauts additifs) :

- Défauts additifs : ce sont représentés par des signaux d'entrées du système. Ces entrées sont inconnues et non contrôlées ;
- Défauts multiplicatifs : désignent un changement de la valeur d'un paramètre du système (constante de temps d'un capteur par exemple).

Les défauts sont des événements qui apparaissent à différents endroits du système. Cela a fait l'objet d'une distinction des types de défauts en fonction de leur localisation ou de leurs sources :

- Défauts capteurs : ce type des défauts est la cause d'une mauvaise image de l'état physique du système. Un défaut capteur partiel produit un signal avec plus ou moins d'adéquation avec la valeur vraie de la variable à mesurer. Ceci peut se traduire par une réduction de la valeur affichée par rapport à la valeur vraie, ou de la présence d'un biais ou de bruit accru empêchant une bonne lecture. Un défaut capteur total produit une valeur qui n'est pas en rapport avec la grandeur à mesurer ;
- Défauts actionneurs : ces défauts agissent au niveau de la partie opérative et détériorent le signal d'entrée du système. Ils représentent une perte totale (défaillance) ou partielle d'un actionneur agissant sur le système. Un exemple de perte totale d'un actionneur est un actionneur qui est resté bloqué sur une position entraînant une incapacité à commander le système par le biais de cet actionneur. Les défauts actionneurs partiels sont des actionneurs réagissant de manière similaire au régime nominal mais en partie seulement, c'est-à-dire avec une certaine dégradation dans leur action sur le système (perte de puissance d'un moteur, fuite dans un vérin, etc.) ;
- Défauts composants ou systèmes : ce type des défauts provient du système lui-même ; bien souvent les défauts n'appartenant pas à un défaut capteur ou actionneur sont classés de manière arbitraire dans cette catégorie. Néanmoins, un défaut composant résulte de la casse ou de l'altération d'un composant du système réduisant les capacités de celui-ci à effectuer une tâche. En pratique, ceci revient à considérer une modification des caractéristiques du système proprement dit (une chaufferie est cassée, un roulement est altéré, etc.).

On peut également citer d'autres types de défauts comme les défauts de l'unité de traitement ou de commande et les défauts qui sont dus à l'opérateur humain. Qu'il s'agisse

des défauts inhérents aux capteurs, aux actionneurs ou aux composants du système, ils se manifestent tous par une altération des signaux associés.

L'évolution temporelle des défauts mène à la distinction entre quatre formes tels que les biais, les dégradations, les dérives et les points aberrants. Généralement, un biais correspond à un saut brutal (brusque) du signal. Cependant, une dérive se manifeste par une évolution anormale lente et continue du signal donc un éloignement progressif de sa valeur nominale. Ainsi, les phénomènes de dérive sont plus longs à détecter du fait de leur faible amplitude à l'origine et de leur lente évolution. En revanche, les dégradations prennent souvent des valeurs aléatoires et n'obéissent à aucune loi de distribution. Les valeurs aberrantes sont des défauts dits fugitifs. Ces derniers affectent le système de manière instantanée et leur cause est souvent due à un parasite, par exemple une perturbation électromagnétique. Les valeurs aberrantes correspondent à un écart important par rapport à la valeur nominale du signal.

1.3.2.2 Principe du diagnostic

Selon, le contexte et le domaine d'application, le mot diagnostic peut avoir plusieurs interprétations. Le diagnostic des systèmes a pour objectif de trouver la cause d'une défaillance ou d'un défaut. Il peut être défini comme étant un processus d'identification de la cause probable des défaillances à l'aide d'un raisonnement logique fondé sur un ensemble d'informations provenant d'une inspection, d'un contrôle ou d'un test.

Dans un sens plus proche de la notion communément admise, un diagnostic peut être vu comme une tentative pour expliquer un mauvais comportement du système en analysant ses caractéristiques pertinentes qui sont souvent appelées symptômes ou parfois indicateurs de défauts. Généralement, le diagnostic est toujours lié à l'observation des symptômes. On note qu'un diagnostic est mieux connu et établi dans les cas des maladies humaines plutôt que dans les défauts des systèmes (Fortuna et al., 2006).

Afin d'établir un diagnostic, il faut être capable de décrire une situation, de l'analyser puis de l'interpréter. Cette démarche peut s'évoquer en trois étapes. La première consiste à définir les caractéristiques ou les symptômes du processus. D'une manière générale, la description d'une situation consiste en l'acquisition d'informations renseignant sur l'état du système. Ces informations correspondent à des données recueillies par des capteurs dans le cas des systèmes instrumentés ou de la description formelle d'un expert dans le cas empirique. La deuxième étape représente une description des situations types. Ces situations sont les états ou les modes que peut avoir un système tels que les modes normaux, anormaux ou évolutifs. La dernière étape consiste à établir des liens entre les symptômes et les situations types.

Plus généralement, un diagnostic est une exploitation de toute la connaissance accessible et existante sur le système. Ainsi, et dans une première vue, une telle exploitation peut s'articuler autour de trois fonctions principales (Isermann et Ballé, 1997; Gerlter, 1998; Fortuna et al., 2006) :

- La détection est une fonction alternative qui peut être attribuée à l'étape de surveillance comme à celle du diagnostic ;
- L'identification a pour rôle de déterminer les caractéristiques de chacun des défauts ;
- La localisation, également appelée isolation, a pour but de remonter à l'origine

du défaut. Cette fonction devrait déterminer l'endroit de la panne (le composant défectueux).

L'ensemble de ces trois fonctions forme souvent l'étape du diagnostic de défauts. Néanmoins, certains auteurs se réfèrent plutôt au terme détection et diagnostic de défauts (en anglais : *Fault Detection and Diagnosis* (FDD)), en considérant ainsi la détection comme étant une fonction séparée, et notamment l'isolation et l'identification dans l'étape du diagnostic de défauts (Isermann et Ballé, 1997; Gerlter, 1998; Fortuna et al., 2006).

Puisque les fonctions de détection et d'isolation sont absolument impératives dans toute démarche ayant pour objectif le diagnostic d'un système, l'identification de défauts (si utile) ne peut pas justifier la même importance qu'aux autres fonctions. Par conséquent, les démarches du diagnostic les plus pratiques ne contiennent que les fonctions de détection et d'isolation de défauts d'où l'appellation en anglais : *Fault Detection and Isolation* (FDI). Ainsi, le mot "diagnostic" est utilisé comme un simple synonyme du terme "isolation" (Gerlter, 1998).

1.3.3 Critères de performance pour la détection et le diagnostic

Les performances d'un diagnostic sont caractérisées par un certain nombre de critères importants et quantifiables tels que la détectabilité, la robustesse, la rapidité des réponses, la sensibilité aux erreurs de modélisation, le taux de fausses alarmes ou de non-détection, l'isolabilité ainsi que des contraintes d'ordre économique et de mise en œuvre pratique (Gerlter, 1998; Ripoll, 1999). De manière générale, on révèle :

- La détectabilité est l'aptitude de la méthode de détection à pouvoir déceler la présence d'une défaillance sur le processus. Elle est fortement liée aux indicateurs de défauts qui doivent d'une certaine manière être sensibles à la défaillance que l'on souhaite détecter ;

La sensibilité, la rapidité des réponses et la robustesse aux défauts résultent d'une interaction entre les défauts d'une part et les bruits, les perturbations et les erreurs de modélisation d'autre part. Dans la plupart des cas, il faudra se fixer un compromis entre ces différentes propriétés (Gerlter, 1998).

- La sensibilité caractérise l'aptitude de la méthode de détection à détecter des défauts d'une certaine amplitude. Elle dépend non seulement de la structure des résidus mais aussi du rapport de l'amplitude du bruit de mesures et celle du défaut ;
- La rapidité des réponses représente la capacité de l'indice de détection à détecter la présence des défauts en un minimum de retard de temps ;
- La robustesse détermine la capacité d'une telle méthode à détecter des défauts avec peu de fausses alarmes en présence des bruits, des perturbations et des erreurs de modélisation.

La performance de l'isolation de défauts dépend des propriétés physiques de l'installation à diagnostiquer, à savoir : l'amplitude des défauts, les bruits, les perturbations et les erreurs de modélisation ainsi que la méthode du diagnostic elle-même. Les défauts multiples sont en général plus difficiles à isoler que les défauts simples. En outre, l'interaction entre les défauts et les perturbations, les bruits et les erreurs de modélisation peut conduire à des décisions incertaines ou incorrectes. Certains défauts peuvent être non isolables les uns des autres parce qu'ils agissent sur les installations physiques d'une

manière indiscernable. En s'appuyant sur tous ces facteurs, l'isolabilité peut être définie comme suit :

- L'isolabilité est la capacité du diagnostic à remonter directement à l'origine de la défaillance. Cette dernière engendre souvent une cascade d'alarmes et il peut être difficile de remonter au composant défaillant. Par conséquent, le degré d'isolabilité des défaillances est lié à la structure des résidus rendus disponibles et à la méthode mise en œuvre.

D'autres critères sont également à prendre en considération. Les coûts économiques contraignent généralement la démarche adoptée pour un diagnostic. Les contraintes posées ont pour objectif d'apporter des réponses à quelques interrogations comme : le diagnostic nécessite-t-il des composants trop chers pour sa réalisation, le temps de développement est-il trop important ? En effet, autant de points à vérifier afin de satisfaire le cahier des charges.

1.4 Techniques statistiques pour la détection et le diagnostic

De nombreuses techniques statistiques performantes qui ont été conçues pour le suivi des processus peuvent fournir des moyens algorithmiques peu coûteux afin d'assurer et maintenir la qualité des produits et la sécurité des processus sans avoir besoin de lourds investissements dans le matériel. Ces techniques permettent également d'optimiser l'utilisation et l'efficacité du matériel.

Le pilotage du processus pour le contrôle en cours de production augmente la rapidité de correction d'un dérèglement et contribue à diminuer la quantité de produits non conformes, il est donc un facteur d'amélioration de la qualité et de la productivité.

Du point de vue historique, le contrôle statistique de la qualité est devenu un élément essentiel des efforts de l'assurance qualité dans l'industrie avec l'introduction des cartes de contrôle univariées par [Shewhart \(1931\)](#). Le contrôle statistique de la qualité recouvre plusieurs aspects de la statistique industrielle en particulier le contrôle statistique de processus qui regroupe toute méthode statistique conçue pour détecter des changements dans un processus ([Tiplica, 2002](#)).

L'objectif d'un contrôle statistique de processus est de détecter l'apparition des changements opérationnels poussant le processus à dévier d'une cible souhaitée. Dans ce cadre, la détection des changements est fondée sur des techniques statistiques qui se basent sur la collecte, la classification, l'analyse et l'interprétation des données. Ces actions se suivent par un diagnostic qui vise à localiser les causes profondes de ces changements en permettant aux opérateurs de prendre les précautions nécessaires pour corriger la situation et ramener le processus à son fonctionnement normal.

1.4.1 Cartes de contrôle univariées

Les approches traditionnelles d'évaluation des performances des processus s'appuient sur les caractéristiques et les tendances temporelles des variables critiques (contrôlées ou manipulées) de tels processus ([Cinar et al., 2007](#)). Les méthodes statistiques utilisées

pour le contrôle d'un processus font appel à la théorie de l'échantillonnage afin de savoir si le processus a probablement dérivé en moyenne ou en dispersion. Dans ce contexte, il convient tout d'abord de choisir une ou plusieurs caractéristiques représentant la qualité du produit à contrôler. Pour chacune des caractéristiques retenues, un échantillon doit être constitué périodiquement dans des conditions fixées à l'avance. Les résultats obtenus sur ces échantillons sont résumés par une ou plusieurs valeurs appelées statistiques d'échantillon pouvant être par exemple la moyenne, l'écart type ou l'étendue. Ces statistiques peuvent alors être portées sur un tracé, appelé carte de contrôle, où l'on reporte généralement les statistiques d'échantillon par rapport à des limites de contrôle. La carte de contrôle a été largement utilisée pour distinguer les causes des variations. Ainsi, un point sur cette carte représente l'état du processus à un moment donné.

1.4.1.1 Définitions des cartes de contrôle

En essayant de définir une carte de contrôle, la littérature a révélé plusieurs définitions. Dans ce contexte, [Shewhart \(1931\)](#) a considéré qu'une carte de contrôle peut servir d'abord, pour définir l'objectif dont la gestion s'efforce d'atteindre par le processus. Ensuite, elle peut être utilisée comme un instrument pour atteindre cet objectif. Enfin, elle peut servir comme un moyen pour juger si l'objectif a été atteint. D'après [Duncan \(1956\)](#), les cartes de contrôle peuvent être considérées comme un outil statistique. Cependant, [Feigenbaum \(1983\)](#) a défini la carte de contrôle comme un outil graphique pour la comparaison des caractéristiques du produit actuel avec celles de son passé.

D'après ces définitions, une carte de contrôle constitue à la fois un outil statistique et graphique, qui permet de suivre dans le temps l'évolution des valeurs individuelles d'une variable (caractéristique d'un produit ou paramètre d'un procédé), ou de la moyenne d'un échantillon prélevé régulièrement, et de décider du temps d'intervention pour modifier ou arrêter une évolution non désirée. Une carte de contrôle est généralement constituée d'un axe horizontal correspond à une valeur cible de la variable surveillée ainsi que deux limites de contrôle supérieure et inférieure. Ces limites ne sont pas déterminées de façon arbitraire ni liées à des limites de spécification, mais plutôt par des critères statistiques. Ainsi, les deux limites de contrôle forment ce qu'on appelle la zone de contrôle.

1.4.1.2 Rôle et critères de performance des cartes univariées

L'aspect préventif des cartes de contrôle consiste à anticiper une tendance à la dérive, et à corriger en conséquence le processus à temps avant que des défauts ne soient produits. Les cartes de contrôle ne doivent être introduites que si toutes les causes spéciales de variation ont été éliminées, sinon, toute prédiction du comportement du processus serait impossible.

Chaque carte comporte une ligne centrale, une limite inférieure et une limite supérieure de contrôle et parfois des limites de surveillance. Les limites de contrôle jouent le rôle d'alarmes (figure 1.3). En effet, lorsqu'un point se situe à l'intérieur des limites de contrôle, le processus est dit sous contrôle ou libre de toutes causes assignables. Par contre, lorsque celui-ci se situe à l'extérieur, alors il est probable que le processus est hors contrôle, à savoir, des causes assignables sont probablement présentes. Dans ce cas, une action

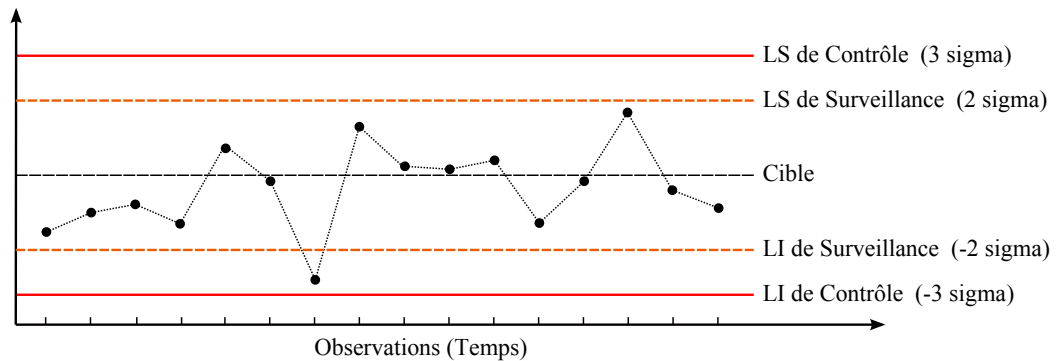


FIGURE 1.3 – Carte de contrôle typique

corrective doit être entreprise pour l'identification et la suppression ou l'isolation de ces causes. Sinon, les pièces produites ultérieurement auront probablement des défauts. Les causes assignables également appelées des causes spéciales, sont une partie de la variabilité dans un ensemble d'observations. Elles peuvent être attribuées à des causes spécifiques tels que les opérateurs, les matériels ou les équipements. Les causes communes aussi appelées causes de chance sont une partie d'une variabilité due uniquement à des forces aléatoires qui ne peuvent pas être attribuées à des sources spécifiques.

Les limites de contrôle des cartes de Shewhart sont calculées de telle sorte que la probabilité qu'un point tombe en dehors des limites alors que le processus est stable, reste très faible. La carte de Shewhart habituellement utilisée est celle dont les limites sont à une distance égale à plus ou moins 3σ de la moyenne de la statistique utilisée. Ce qui correspond entre autres à une probabilité de 0.0027 (0.00135 sur chaque coté) d'être en dehors des limites lorsque le processus est stable et ce sous l'hypothèse que la variable observée suit une loi Gaussienne. Les limites de surveillance permettent d'attirer l'attention sur un comportement qui n'est pas encore hors contrôle mais qui nécessite une attention accrue et une surveillance particulière.

Les conclusions que l'on peut tirer de la position d'un point par rapport aux limites de contrôle sont soumises aux incertitudes inhérentes aux fluctuations d'échantillonnages. Dans ce cadre, deux sortes d'erreur sont alors possibles (dont les risques s'expriment par des probabilités). La première est dite risque α consiste à conclure qu'un dérèglement a eu lieu alors qu'aucune cause n'est venue perturber le processus. Ce cas est également désigné sous le nom de fausse alarme. La deuxième erreur représente le risque β qui consiste à conclure que le processus est resté stable alors qu'une cause perturbatrice est venue effectivement le dérégler.

Les cartes de contrôle se différencient non seulement par les méthodes de calcul des limites et les statistiques utilisées, mais également par la rapidité avec laquelle un dérèglement est détecté. Cette rapidité se mesure en terme de période opérationnelle moyenne (*Average Run Length* : ARL) qui est le nombre moyen d'échantillons successifs nécessaires pour s'apercevoir du dérèglement ou autrement dit, le temps moyen d'attente entre le moment où le dérèglement se produit et l'instant où la carte le signale. Cette rapidité dépend évidemment du dérèglement et elle est notée $ARL(\delta)$ où δ est le dérèglement maximal toléré de la statistique

étudiée, exprimé en nombre d'écart types.

Ainsi, une carte de contrôle est dite efficace pour la détection d'un dérèglement δ si $ARL(\delta)$ est faible. Cependant, il arrive que la carte signale une sortie des limites sans qu'il ait eu un dérèglement, l' $ARL(0)$ correspondante est alors le nombre moyen de contrôle avant une fausse alerte qui conduit à des efforts inutiles pour la recherche de causes spéciales inexistantes. L'efficacité d'une carte de contrôle se mesure avec les deux ARL . Une bonne carte doit réaliser un compromis entre la période opérationnelle moyenne en cas de dérèglement $ARL(\delta)$ et l' $ARL(0)$. Souvent, on souhaite détecter un dérèglement δ le plus rapidement possible (la ARL correspond à δ doit être faible) en ayant le moins de fausses alertes possible (l' $ARL(0)$ doit être grande). De même, cette efficacité peut être exprimée par la probabilité d'acceptation (Pa) de conclure à la stabilité d'un processus en fonction du dérèglement de celui-ci, autrement dit, la probabilité de se trouver entre les limites de contrôle ou la probabilité de ne pas déceler un dérèglement (risque β).

1.4.1.3 Aperçu sur les cartes univariées

De manière générale, les méthodes les plus classiques conçues pour un contrôle de processus fournissent un groupe de tests statistiques univariées afin d'assurer qu'une variable de qualité d'un processus est constamment sur sa cible. Dans ce cadre, le principe de base dans la construction de la plupart des cartes univariées repose sur la notion de test d'hypothèse. En considérant que le modèle théorique du processus suit une certaine distribution de probabilité, l'hypothèse nulle (ou sous-contrôle) pour ses paramètres est spécifiée. Lorsque les paramètres représentent la moyenne ou la variance du processus, l'hypothèse alternative consistera dans le changement de tels paramètres (Tiplica, 2002).

De nombreuses cartes de contrôle qui reposent sur un test d'hypothèse comme celles de Shewhart (Shewhart, 1931), les cartes à somme cumulée (*cumulative sum* : CUSUM) (Page, 1954; Woodward et Goldsmith, 1964), les cartes de moyennes mobiles équipondérées (*moving average* : MA) et les cartes à moyennes mobiles avec pondération exponentielle (*exponentially weighted moving average* : EWMA) (Roberts, 1959; Hunter, 1986) ont eu une contribution remarquable à l'amélioration de la qualité des processus.

Les premières cartes de contrôle utilisées sont dites cartes aux mesures de Shewhart. Elles visent à définir le niveau de la qualité à atteindre et auquel la direction doit se référer, à apporter une aide pour obtenir ce standard ou cible et à fournir un élément de jugement pour décider si cette cible a été atteinte. Les cartes de Shewhart s'attachent aux variables quantitatives (mesurables). Elles réunissent le contrôle du paramètre de centrage et celui de la dispersion (étalement des valeurs de la distribution de la variable autour d'une valeur centrale). Les cartes de Shewhart comprennent celles sur la moyenne \bar{X} , sur l'étendue R ou sur l'écart type S . D'après la figure 1.3, ces cartes traditionnelles aux mesures utilisent à chaque instant t les seules mesures relatives à t . Elles détectent uniquement les dérives rapides et les grands écarts de variation du processus. Par conséquent, elles ne sont pas satisfaisantes lorsque les changements dans l'évolution des caractéristiques représentatives d'un processus sont de faibles amplitudes.

Pour remédier au problème lié à la détection de faibles écarts de dérèglement ainsi que les lentes dérives, on utilise des cartes d'applications spécifiques. Ces cartes permettent l'accumulation de l'information dans le temps en utilisant les observations à l'instant t et

l'ensemble ou une partie des observations à des instants antérieurs à t comme le cas des cartes CUSUM, MA et EWMA.

Les cartes CUSUM ont été initialement introduites par [Page \(1954\)](#). Elles sont parmi les méthodes les plus efficaces, en accord avec les propriétés de leurs ARL, dans la détection d'un changement d'ampleur connue dans la moyenne ([Basseville et Nikiforov, 1993](#)). En effet, elles utilisent toutes les observations considérées durant l'échantillonnage. La carte CUSUM consiste à représenter pour chaque variable la somme cumulée suivante :

$$\sum_{k=1}^t (x_i(k) - \mu_i) \quad (1.1)$$

où $x_i(k)$ est la mesure de la variable i au moment de l'échantillonnage k et μ_i représente la moyenne de cette variable.

Bien que l'on ait cru pendant de nombreuses décennies que la carte de Shewhart n'est plus efficace dans la détection des faibles et moyennes variations dans un processus, des travaux récents ont confirmé que la différence entre une telle carte et celle de CUSUM n'est pas significative. En effet, [Nenes et Tagaras \(2007\)](#) ont comparé la performance économique réalisée par ces deux cartes pour le suivi d'un processus. Ainsi, les résultats de leur étude ont montré que l'avantage économique dans leurs utilisations est important uniquement lorsque la taille d'un échantillon est contrainte à des faibles valeurs.

Les cartes MA n'utilisent que les w observations les plus récentes. A l'instant t , on supprime la plus ancienne des moyennes des échantillons et on ajoute la plus récente moyenne à l'ensemble. Ainsi, on calcule :

$$\begin{cases} w^{-1} \sum_{k=1}^w x_i(t - k + 1) & \text{si } t \geq w \\ t^{-1} \sum_{k=1}^t x_i(k) & \text{si } t < w \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans le cas particulier où $w = 1$, on retrouve les cartes de Shewhart. Intuitivement, plus le dérèglement est petit, plus l'ordre w de la MA doit être élevé pour une bonne détection. [Niang et Saporta \(1995\)](#) ont constaté d'après une étude comparative que les cartes MA remplacent avantageusement celles de Shewhart. D'après les mêmes auteurs, les cartes MA sont moins utilisées que les cartes CUSUM et EWMA malgré qu'elles sont d'efficacité comparable en étant d'utilisation aussi simple.

Les cartes EWMA utilisent un coefficient de pondération compris dans l'intervalle $[0, 1]$ ayant pour objectif l'oubli progressive des mesures antérieures. Dans le cas particulier où un tel coefficient est égal à l'unité, la carte EWMA est identique à celle de Shewhart. Plus la valeur du coefficient de pondération est faible, plus les petites dérives sont mieux décelées par la carte EWMA. En s'appuyant sur l'idée que les mesures récentes observées sur le processus peuvent contenir plus d'informations sur les anomalies que les anciennes mesures, de différents poids peuvent être affectés aux données en fonction de leurs temps d'acquisition. La carte EWMA permet d'augmenter le poids de façon exponentielle au fur et à mesure que les observations sont plus récentes. Pour chaque variable, on fixe la valeur

de démarrage $y_i(0) = \mu_i$ et on affiche sur la carte la statistique suivante :

$$y_i(t) = \mathbf{r}x_i(t) + (1 - \mathbf{r})y_i(t - 1) \quad (1.3)$$

où \mathbf{r} représente le paramètre de pondération.

En comparant la performance de la carte EWMA à celle de CUSUM dans la détection des faibles dérives de la moyenne d'un processus, Vargas et al. (2004) ont observé suite à une étude de simulation que la carte CUSUM ne détecte pratiquement pas des points ayant des niveaux de variation particulière. Les points en question correspondent à des situations hors contrôle. Cela a permis ces auteurs de conclure que la carte de contrôle EWMA est mieux efficace que la carte CUSUM.

1.4.2 Limitations des cartes univariées

L'acquisition de données en considérant un grand nombre de variables sert à extraire des informations sur tout régime efficace pour une surveillance et un diagnostic opérationnels et fiables du processus. En revanche, la plupart des méthodes classiques de contrôle statistique de processus fournissent des cartes de contrôle interprétables uniquement pour un nombre réduit de variables. En outre, ces cartes présentent une explication des tendances des variables les unes indépendamment des autres. Par conséquent, les cartes univariées fournissent des informations quantitatives en ignorant l'effet de la corrélation entre les variables.

Le problème rencontré avec une utilisation séparée des cartes de contrôle univariées peut être illustré en se référant à la figure 1.4 (Kourti et MacGregor, 1995). Dans ce cas, seulement deux variables corrélées x_1 et x_2 ont été considérées pour faciliter l'illustration. Supposons que si le processus est dans un état sous contrôle où seules les variations des causes communes sont présentes, x_1 et x_2 suivent une distribution multivariée normale. L'ellipse représente alors le périmètre de la zone de confiance pour le processus multivarié. Les points qui sont à l'intérieur de l'ellipse représentent un ensemble d'observations en considérant une carte multivariée. Les mêmes observations sont également tracées en considérant pour chaque variable sa propre carte univariée de Shewhart.

L'observation indiquée par le symbole \diamond est en dehors de la zone de confiance de la carte multivariée. Le lot correspondant est clairement différent de la population normale "sous contrôle" du produit. Toutefois, aucune des deux cartes univariées n'a indiqué la présence d'un problème dans l'observation \diamond puisqu'elle se trouve dans leurs zones de confiance situées entre leurs limites UCL et LCL. En effet, la véritable situation ne se révèle qu'à travers le tracé multivarié des deux variables. D'après la figure 1.4, l'utilisation des cartes univariées risque d'accepter un mauvais produit (lot \diamond), mais aussi risque de refuser un bon produit (lot \star). Dans le cas de variables corrélées, les résultats obtenus en considérant uniquement les cartes univariées sont erronés car la probabilité associée à l'erreur de type I (l'erreur de première espèce ou le risque α) est plus grande.

Malgré les limitations des cartes de contrôle univariées, celles-ci continuent d'être presque le seul outil de surveillance encore utilisé dans certaines industries (MacGregor et Kourti, 1995). Alors que plusieurs extensions multivariées des cartes de Shewhart, CUSUM et EWMA basées sur la statistique T^2 de Hotelling ont été proposées dans la littérature.

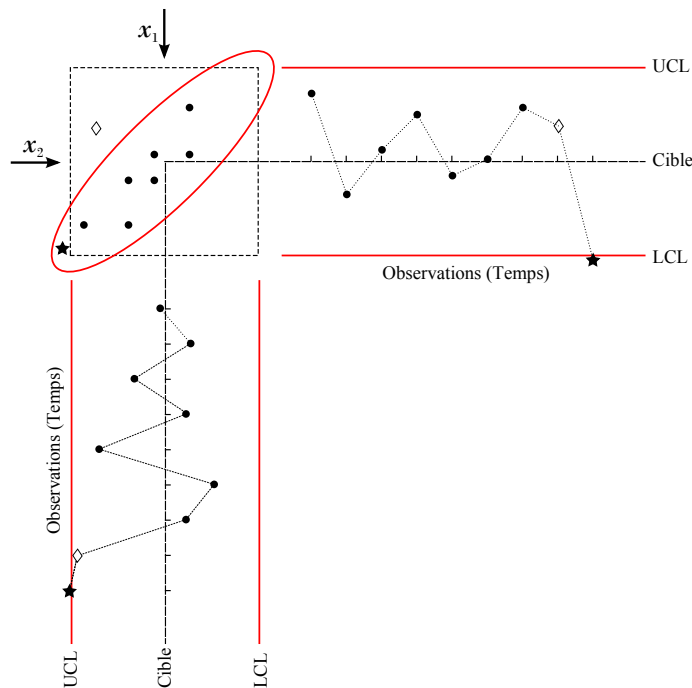


FIGURE 1.4 – Illustration de l'inconvénient de l'utilisation des cartes univariées

1.4.3 Extensions multivariées des cartes univariées

Actuellement, suite à l'évolution remarquable de l'électronique et de l'informatique, on a le moyen de faire mieux car, il faut être conscient, que le processus de fabrication n'est jamais univarié (Tiplica, 2002). En effet, le processus de fabrication est régi par un grand nombre de variables ou des facteurs qu'il faut maîtriser simultanément afin de s'assurer le succès de la démarche mise en œuvre et l'obtention des bons résultats. Un contrôle de processus dont plusieurs variables sont simultanément considérées est appelé contrôle multivarié.

Le contrôle des processus multivariés bénéficie de l'utilisation inhérente des méthodes multivariées plutôt que d'une collection des méthodes univariées appliquées à des variables séparées. Notamment, certaines techniques déployées pour assurer le contrôle de processus multivarié sont des extensions multivariées des approches univariées. La première étude originale abordant le contrôle de qualité multivariée a été introduite par Hotelling (1933, 1947). Ainsi, les extensions vers une représentation multivariée ont été découlées principalement du principe classique de la carte de Shewhart. Les premières cartes multivariées qui ont été développées représentent la carte χ^2 et la carte T^2 de Hotelling. En effet, ces deux cartes de contrôle utilisent seulement les observations à l'instant présent pour déterminer l'état du processus. Elles sont donc moins performantes pour la détection des faibles dérèglages du processus (Jackson, 1991; Kourti et MacGregor, 1995; Tiplica, 2002).

Notamment, une détection mieux efficace de ce type de changements nécessite un contrôle statistique basé sur l'accumulation de l'information des observations antérieures. Pour cette raison, les cartes de contrôle MEWMA (Multivariate EWMA) et MCUSUM (Multivariate CUSUM) ont été développées en analogie avec le cas univarié (Woodall et

Ncube, 1985; Healy, 1987; Lowry et al., 1992).

La carte MEWMA est parmi les cartes multivariées qui ont été conçues pour une détection fiable des faibles changements, cependant, elle s'adresse généralement à des changements dans le vecteur des moyennes. Dans l'objectif d'élaborer des procédures de suivi de la variance au lieu de la moyenne du processus, Hawkins et Maboudou-Tchao (2008) ont développé une approche dite MEWMA-CM, afin de surveiller la stabilité de la matrice de covariance de processus.

Généralement, la moyenne et la variance de processus peuvent changer simultanément durant la surveillance. Leur considération simultanée, pour des faibles changements et dans un contexte multivarié, a reçu peu d'intérêt dans la littérature. Cheng et Thaga (2006) ont fourni un aperçu sur les cartes de contrôle univariées dans un effort de construire une carte permettant la surveillance simultanée de la moyenne et de la variance du processus dans un contexte univarié. En raison de la complexité des distributions multivariées, cette idée n'a pas pu être facilement étendue aux cas multivariés.

Bien que la littérature a fourni des preuves en faveur de l'intérêt de l'application du contrôle statistique multivariée de processus, un certain nombre de limitations ont été quand même inévitables. Lors de l'application des cartes de contrôle de Shewhart, l'utilisation des moyennes des sous-groupes améliore sensiblement leur performance. Cependant, ce n'est pas toujours le cas lors de l'utilisation de la carte MCUSUM. En outre, les procédures de conception des cartes de contrôle multivariées présentent des calculs intensifs (Montgomery, 2001). Ainsi, ces cartes sont efficaces lorsque le nombre des variables du processus n'est pas grand. Les cartes de contrôle multivariées perdent de leur efficacité en terme de détection des changements en augmentant le nombre des variables. En plus, l'interprétation directe de ces cartes ne fournit pas les informations dont un opérateur a besoin quand une anomalie est détectée.

Dans ce cadre, Jackson et Mudholkar (1979), Jackson (1980) et Kourti (2005) et plusieurs autres auteurs ont recommandé les méthodes de projection qui sont révélatrices d'informations cachées par la transformation de la corrélation entre les variables en un ensemble de nouvelles variables indépendantes.

1.4.4 Méthodes de projection

Les méthodes d'analyse de données multivariées peuvent aider à la visualisation ainsi que l'interprétation d'un ensemble d'observations qui décrivent un phénomène naturel ou physique. La difficulté confrontée se manifeste souvent dans les phénomènes complexes qui produisent ainsi une masse de données à analyser. Dans ce cadre, un ensemble particulier de techniques permettant efficacement de surmonter une telle difficulté sont les méthodes de projection. Leur objectif consiste à compresser les données afin d'extraire un résumé de l'information que contiennent. Les techniques les plus connues sont l'analyse factorielle (AF), l'analyse en composantes principales (ACP), l'analyse canonique (AC), la régression sur composantes principales (RCP) et la projection dans les structures latentes (PSL), également connue sous la dénomination de moindres carrés partiels.

1.4.4.1 Intérêt de la projection

La réduction de la dimension d'un problème en supprimant certaines variables peut conduire à une réduction de l'information utile et par conséquent à une interprétation erronée ou incomplète. Cependant, l'objectif de la réduction pour une analyse statistique multivariée est d'assurer la simplicité pour la visualisation, tout en conservant suffisamment d'informations pour une interprétation appropriée et pertinente. Les méthodes utilisées pour réduire la dimension d'un espace multivarié s'appuient sur le concept des variables latentes ou cachées. Ces dernières représentent des variables virtuelles construites dans le but de comprendre un intérêt caractéristique qui ne peut pas être mesuré directement. Bien que les variables latentes ne soient pas observables, elles ont un certain impact sur les variables mesurées ou originelles et, par conséquent, sont soumises à une analyse. Les variables latentes sont généralement définies comme une combinaison linéaire des variables originelles.

En essayant de surmonter les difficultés décrites auparavant, les méthodes multivariées comme l'ACP et la PLS ont été appliquées. Elles sont particulièrement adaptées à des données corrélées qui sont projetées sur des sous-espaces de dimensions réduites afin d'extraire toutes informations pertinentes sur le processus. L'ACP est une méthode utilisée pour expliquer la variabilité d'un ensemble de données en définissant un ensemble de vecteurs latents décrivant des directions principales non corrélées. Cette méthode sera étudiée avec plus de détail dans le chapitre suivant. La PLS est similaire à l'ACP, sauf qu'elle réduit simultanément la dimension de l'espace des variables de processus et celles de la qualité pour trouver les vecteurs latents. L'application type de l'utilisation de la PLS est de définir deux matrices de données. La première est notée \mathbf{Y} contenant uniquement les caractéristiques qualité de la production, alors que la deuxième matrice \mathbf{X} contient toutes les autres variables du processus. Ainsi, la PLS permet la maximisation de la covariance entre la matrice de prédicteurs \mathbf{X} et la matrice prédite \mathbf{Y} . L'objectif est alors de trouver les espaces de projection pour \mathbf{X} et \mathbf{Y} pour lesquels la corrélation entre les vecteurs directeurs de chaque espace est la plus importante. Il existe de nombreux algorithmes de calcul des espaces réduits pour la PLS.

Vu l'intérêt qu'a connu l'ACP, cette dernière constituera l'intérêt de nos travaux de recherche menés par la présente thèse. Cette approche sera expliquée en détail de point de vue théorique dans le chapitre suivant. Néanmoins, et pour illustrer l'importance de l'ACP, nous présentons dans la suite un panorama non exhaustif de différentes extensions qu'a connu cette méthode dans la littérature.

1.4.4.2 Différentes extensions de l'ACP

L'analyse en composantes principales est une étape clé pour une surveillance multivariée de processus. Son efficacité dépend du modèle statistique généré qui dépend également des données collectées. L'approche classique de l'ACP utilise un calcul préliminaire de la moyenne des données et de leur matrice de covariance. La moyenne et la variance sont sensibles à la présence de valeurs aberrantes. Ainsi, les résultats obtenus s'avèrent souvent inexploitable car trop biaisés par l'influence de ces valeurs aberrantes. Pour tolérer la présence de ces dernières, une ACP robuste peut être conduite en calculant une matrice

de covariance des données robuste (Chen et al., 1996; Hubert et al., 2005; Tharrault et al., 2008).

Une autre extension possible de l'ACP est la prise en compte de la production par lots (procédé batch). En effet, l'ACP classique fait la supposition que le procédé est strictement continu. Or, dans l'industrie, il est fréquent de trouver des procédés de fabrication fonctionnant par lots. La technique la plus étudiée pour traiter ce genre de problème est l'ACP multiéchelle (multiway PCA) (Nomikos et MacGregor, 1994; Nomikos, 1996; Smilde et al., 2004). L'ACP multiéchelle est une extension à trois dimensions de l'ACP classique. Les trois dimensions représentent respectivement les observations, les instants d'observations et les lots (le raisonnement pour l'ACP classique n'est fait que sur deux dimensions : les observations et les instants d'observations).

Le suivi de la performance des processus continus en utilisant des méthodes de projection multivariées comme l'ACP est étendu à des situations où les processus peuvent être naturellement subdivisés en des sous-blocs. En effet, l'ACP multi-bloc (Kourti et al., 1995; Qin et al., 2001; Cherry et Qin, 2006) permet d'établir des cartes de suivi pour chacun des blocs ainsi que pour l'ensemble du processus. Quand un événement ou un défaut se produit, l'utilisation de l'ACP multi-bloc peut détecter l'événement plus tôt en révélant le bloc dans lequel l'événement est produit. Dans la même optique, l'ACP offre une autre possibilité par l'utilisation des modèles partiels. On sous entend par ACP partielle, une ACP effectuée sur des données collectées en écartant quelques variables. Les résidus générés pour la détection de défauts sont donc sensibles uniquement aux défauts associés aux variables utilisées (Huang et al., 2000).

L'ACP classique est une méthode de projection linéaire où seules les dépendances linéaires ou quasi-linéaires entre les variables peuvent être révélées. Si les données traitées présentent des comportements fortement non linéaires, l'ACP linéaire est incapable de trouver une représentation compacte décrivant ces données. Par conséquent, l'extension de l'ACP aux problèmes non linéaires a été abordée dans la littérature. Les réseaux neuronaux ainsi que les fonctions noyaux peuvent bien être adaptés pour résoudre ce type de problèmes.

Une nouvelle méthode d'ACP non linéaire basée sur une couche d'entrée de réseau de neurones a été proposée par Jia et al. (1998), conjointement avec des cartes de contrôle non paramétriques. Un autre algorithme d'ACP non linéaire utilisant les réseaux neuronaux et les ondelettes a été proposé par Shao et al. (1999) pour le suivi des performances de processus. En effet, la plupart des approches utilisent les réseaux de neurones MLP pour l'obtention du modèle ACP non linéaire. Néanmoins, on rencontre souvent des problèmes d'optimisation non linéaires telles que la convergence et l'initiation de ce type de réseaux. Pour cette raison, Harkat (2003) et Harkat et al. (2007) ont proposé une approche d'ACP non linéaire où le problème d'apprentissage se ramène à un problème de régression linéaire, ainsi qu'un algorithme permettant de déterminer le nombre de composantes non linéaires à retenir dans le modèle.

Une ACP à noyaux non linéaires à été initialement proposée par Schölkopf et al. (1998). On peut calculer les composantes principales de manière efficace dans un espace de dimension plus élevée lié à l'espace d'entrée par certaines fonctions noyaux. Une ACP linéaire est ensuite appliquée sur les données projetées dans le nouvel espace (Lee et al., 2004; Choi et al., 2005; Sun et al., 2007). L'ACP à noyaux peut être considérée comme

une généralisation de l'ACP linéaire et particulièrement adaptée pour extraire des caractéristiques non linéaires de données. Néanmoins, un problème persistant dans le cadre de l'ACP à noyaux réside dans le choix de la fonction noyau.

1.4.5 Interprétations des situations hors contrôle

Lorsqu'une carte de contrôle univariée signale une situation hors contrôle, l'opérateur peut facilement envisager une solution au problème puisqu'une telle carte est liée uniquement à une seule variable. En revanche, et dans le cas multivarié, une telle interprétation n'est plus valable par l'intermédiaire d'une carte univariée puisqu'en présence de la corrélation, un certain nombre de variables peuvent être généralement impliquées. Comme il a été mentionné précédemment, les cartes multivariées de Shewhart, MCUSUM et MEWMA, ainsi que les méthodes de projection comme l'ACP ont été utilisées principalement pour la surveillance de processus. Ces méthodes sont en mesure seulement de détecter une situation hors contrôle en signalant l'existence probable d'un défaut dans le processus. Pour cela, l'identification de la (ou les) variable(s) responsable(s) de défauts a été un sujet intéressant pour de nombreux chercheurs au cours des dernières années. Dans cette section, quelques méthodes d'isolation de défauts ou d'interprétation d'une situation hors contrôle sont présentées.

L'utilisation des cartes de contrôle univariées pour l'identification pose quelques problèmes liés à la probabilité globale des fausses alarmes qui n'est pas contrôlée ainsi qu'à l'ignorance de la corrélation entre les variables. Pour contrôler la probabilité globale, [Alt \(1982\)](#) a suggéré d'utiliser les cartes de contrôle univariées avec des limites ajustées de type Bonferroni. Ainsi, [Hayter et Tsui \(1994\)](#) ont étendu cette idée en proposant une procédure de construction précise et simultanée d'intervalles de confiance pour chaque variable. Ceci a pour but d'offrir une identification plus aisée des variables probablement responsables du problème.

Dans le contexte multivarié, [Mason et al. \(1995\)](#) ont proposé une idée basée sur la décomposition de la statistique T^2 en des parties indépendantes, dont chacune reflète la contribution d'une variable individuelle. Le problème de cette approche se résume dans la non unicité d'une telle décomposition. Pour cela, [Mason et al. \(1996\)](#) ont présenté également une procédure de contrôle alternative basée sur une double décomposition de la statistique T^2 .

[Kourti et MacGregor \(1996\)](#) ont développé différentes approches basées sur l'ACP. Lorsqu'une situation hors contrôle est détectée, des contributions sont calculées pour identifier les variables responsables. La contribution indique la valeur impliquée par chaque variable dans le calcul de l'indice ou la statistique utilisée pour la détection. En effet, le principe de la contribution des variables évite les problèmes d'interprétations physiques des composantes principales. Les approches des contributions sont également investiguées par [Westerhuis et al. \(2000a\)](#) et [Alcala et Qin \(2009, 2011\)](#).

Une approche de localisation de défauts basée sur le principe de la reconstruction à été proposée dans la littérature ([Dunia et Qin, 1998b](#); [Qin, 2003](#)). Cette méthode repose sur l'estimation de l'amplitude du défaut en considérant la corrélation entre les variables.

Nous notons que les approches dédiées au diagnostic de défauts, comme les contributions et la reconstruction, seront détaillées lors du dernier chapitre.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents concepts et définitions sur lesquels se basent généralement la surveillance et le diagnostic de défauts d'un système. Parmi les approches existantes dans la littérature, nous sommes plus particulièrement intéressés à celles basées sur une analyse de données. Nous avons présenté des notions, très générales, concernant les cartes de contrôle. Ainsi, nous avons évoqué la nécessité de l'application des techniques relevant du contrôle statistique multivarié afin d'assurer le contrôle des processus qui ne disposent pas d'un modèle mathématique qui soit complet. Nous avons présenté, d'une manière non exhaustive, quelques unes des cartes de contrôle multivariées les plus utilisées. Malgré leurs avantages par rapport aux cartes de contrôle univariées, un problème très important qui reste à résoudre est la manière d'identifier la variable ou les variables responsable(s) d'un fonctionnement anormal de processus.

Le nombre de variables surveillées dans un système ainsi que la corrélation limitent le choix des méthodes utilisées pour l'obtention d'un diagnostic fiable. Dans ce cas, les méthodes de projection peuvent être utilisées, en particulier l'ACP qui a l'avantage d'élaborer un nombre réduit de cartes de contrôle ce qui peut faciliter l'analyse. Pour l'identification des variables responsables de défauts, les méthodes de contributions ainsi que celle de reconstruction sont liées aux paramètres de modèle ACP. Par conséquent, la fiabilité de la détection et du diagnostic de défauts en s'appuyant sur l'ACP est principalement basée sur l'optimalité de tel modèle. Dans le chapitre suivant, nous allons décrire plus en détail l'approche d'ACP ainsi que la problématique liée au choix de modèle.

2

Modélisation par analyse en composantes principales

Sommaire

2.1	Introduction	28
2.2	Analyse en composantes principales linéaire	29
2.3	Propriétés	33
2.3.1	Modélisation en absence de bruit	34
2.3.2	Modélisation en présence de bruit	36
2.4	Détermination d'une structure optimale du modèle ACP	36
2.4.1	Critères de la théorie de l'information	36
2.4.2	Critères heuristiques	37
2.4.2.1	Critère IE	37
2.4.2.2	Pourcentage cumulé de la variance	38
2.4.2.3	Scree Test	38
2.4.2.4	Critère de Guttman	39
2.4.2.5	Autocorrélation	40
2.4.2.6	Validation croisée	40
2.4.3	Minimisation de la variance de l'erreur de reconstruction	41
2.4.3.1	Critère VNR	42
2.4.3.2	Consistance théorique du critère VNR	43
	Cas de bruit <i>i.i.d.</i>	44
	Cas de bruit coloré	45
2.5	Etude comparative des différents critères	45
2.5.1	Présentation et interprétation de l'exemple simulé	46
2.5.2	Interprétations des critères basés sur des seuils	48
2.5.3	Interprétations des critères minimisés	51
2.6	Conclusion	58

2.1 Introduction

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une méthode statistique multivariée qui permet d'extraire les corrélations d'un ensemble de données à travers un ensemble de fonctions empiriques orthogonales. Elle représente une méthode descriptive permettant d'étudier les relations linéaires entre les variables sans tenir compte *a priori* d'une quelconque structure (Jolliffe, 2002). Ses origines historiques peuvent être remontées jusqu'aux œuvres de E. Beltrami en Italie (1873) et C. Jordan en France (1874) puisque ce sont eux qui ont formulé la décomposition en valeurs singulières (SVD) d'une matrice carrée (Cinar et al., 2007). Cependant, la première application pratique de l'ACP peut être attribuée au travail de Pearson (1901) en biologie, puis elle a été de nouveau développée et formalisée par Hotelling (1933). Ensuite, elle est devenue une technique multivariée standard (Jackson, 1991; Jolliffe, 2002).

Depuis les années 1970, de nombreux travaux ont proposé d'utiliser l'ACP comme une technique de modélisation de processus à partir de laquelle un modèle ACP peut être obtenu (Kresta et al., 1991; MacGregor et Kourti, 1995; Jolliffe, 2002). Ce modèle est extrait en se basant sur un ensemble de données qui sont issues d'un fonctionnement normal. Il permet d'estimer les variables ou les paramètres du processus à surveiller. Ainsi, il peut être utilisé pour détecter les valeurs aberrantes dans les données, fournir la réconciliation de données et surveiller les écarts par rapport à un fonctionnement normal.

L'utilisation fréquente de l'ACP dans plusieurs domaines s'est justifiée par sa réduction des données caractérisant un espace de grande dimension en un ensemble de composantes principales (CPs) constituant un sous-espace de dimension réduite. Cependant, l'optimalité d'une telle réduction réside dans la détermination du nombre de CPs les plus significatives. Dans ce cadre, plusieurs critères et règles ont été proposés dans la littérature afin de définir la dimension optimale d'un modèle ACP (Jackson, 1991; Valle et al., 1999; Jolliffe, 2002). D'une façon non exhaustive, Jolliffe (2002) distingue selon son point de vue trois différentes catégories de critères.

La première famille constitue des critères empiriques ou heuristiques dont la justification de leur utilisation, malgré quelques tentatives pour les mettre sur une base plus formelle, reste subjective comme le pourcentage de la variance totale ou également le test du coude (*Scree Test*) proposé par Cattell (1966). Contrairement, la fonction d'*imbedded error* (IE) de Malinowski (1977) et beaucoup d'autres critères qui proviennent généralement de la communauté de la chimiométrie disposent des règles de décision plus objectives et simples. Ces règles se basent souvent sur la minimisation d'un critère par rapport au nombre des CPs. En revanche, la subjectivité s'exprime dans la théorie du critère lui-même. La deuxième catégorie représente des approches basées sur une série de tests d'hypothèses qui sont généralement très sophistiquées et surestiment souvent la dimension du modèle. A titre d'exemple, Bartlett (1954) et Lawley (1956) ont développé une méthode dont le problème confronté est associé au choix des niveaux des seuils pour les différents tests. La troisième catégorie constitue des critères basés sur des méthodes de calculs intensifs comme la validation croisée qui permet le calcul d'un critère dit **PRESS** (Wold, 1978; Eastment et Krzanowski, 1982). En effet, ce critère est fondé sur la capacité prédictive des différents modèles ACP.

Notamment, la littérature a offert une autre catégorie de critères qu'on ne peut pas

ignorer. Une telle catégorie intitulée la théorie de l'information est principalement issue du domaine du traitement du signal. Notamment, elle est constituée de deux critères qui sont communément connus sous les noms d'*Akaike Information Criterion* (**AIC**, Akaike (1973)) et *Minimum Description Length* (**MDL**, Schwarz (1978) et Rissanen (1978)).

Différemment aux principes des critères classiques, de nouvelles approches proposent de définir un modèle ACP afin d'assurer une meilleure détection et localisation des défauts plutôt que d'offrir une meilleure approximation des données. Pour obtenir le modèle ACP le plus sensible à un défaut, Wang et al. (2004) ont proposé d'utiliser un indice prenant en compte l'amplitude minimale du défaut nécessaire afin d'assurer sa détection. Notamment, cette approche nécessite une connaissance *a priori* sur les défauts. Plus récemment, Tamura et Tsujita (2007) ont proposé une procédure permettant de définir la dimension d'un modèle ACP en fonction des directions des défauts afin de leur offrir une meilleure sensibilité. Puisque ces directions sont généralement inconnues, les mêmes auteurs suggèrent de définir plusieurs modèles ACP. Par conséquent, une telle approche semble être plus pratique en considérant uniquement les défauts simples. Cependant, elle est difficilement utilisable dans le cas de défauts multiples où un grand nombre de modèles doivent être considérés.

Le critère qui représente un intérêt majeur dans nos travaux de recherche se base sur la minimisation de la variance de l'erreur de reconstruction également appelée la variance non reconstruite (**VNR**) (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Qin et Dunia, 2000). Son expression représente la variance en fonction du nombre de CPs, de la différence entre une mesure observée et son estimée obtenue en utilisant l'ensemble des mesures des autres variables. En effet, nous montrerons que ce critère aide à identifier le nombre des axes principaux uniquement entre les variables qui sont linéairement corrélées.

Ce chapitre présentera un rappel du principe mathématique de l'ACP linéaire dans la deuxième section. Etant donné que cette méthode est considérée comme un outil de modélisation, la problématique souvent confrontée lors de son utilisation représente le choix de la dimension du modèle ACP. Pour cela, la troisième section définira quelques propriétés liées à la détermination d'un modèle ACP en absence puis en présence de bruit. Dans la pratique, le bruit de mesures ne peut pas être négligé, ce qui compliquera la détermination de la structure optimale du modèle. Dans ce contexte, la quatrième section présentera quelques critères de sélection parmi les plus connus dans la littérature. Ensuite, une étude comparative des critères choisis sera présentée dans l'avant dernière section. Ceci en considérant un exemple de synthèse. A travers ce dernier, nous contribuons par deux démonstrations montrant les limitations de deux critères. Finalement, nous concluons ce chapitre.

2.2 Analyse en composantes principales linéaire

L'ACP consiste à remplacer une famille de variables par de nouvelles variables appelées CPs. Ces dernières sont de variances maximales et non corrélées deux à deux. Elles sont des combinaisons linéaires des variables originelles.

Considérons un ensemble de données collectées lors d'un fonctionnement normal du

système étudié. Ces données peuvent être représentées par une matrice

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)]^T \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (2.1)$$

où N représente le nombre des observations et m représente le nombre des variables mesurées. Chaque ligne de la matrice de données \mathbf{X} représente une observation sous forme d'un vecteur de mesures collectées à un instant k , généralement centrées

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k), \dots, x_m(k)]^T \in \mathbb{R}^m \quad (2.2)$$

où $x_j(k)$ avec $j = \{1, \dots, m\}$ représente la mesure de la variable j à l'instant k . Par définition, la matrice de covariance est donnée par :

$$\Sigma = \mathbb{E} \{ \mathbf{x}\mathbf{x}^T \} = \frac{1}{N} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.3)$$

Selon le principe de l'ACP, on suppose qu'un vecteur de composantes $\hat{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^\ell$ est associé à chaque vecteur d'observation dont il optimise la représentation au sens de la minimisation de l'erreur d'estimation de \mathbf{x} ou la maximisation de la variance de $\hat{\mathbf{t}}$. A chaque instant k , les vecteurs $\hat{\mathbf{t}}$ et \mathbf{x} sont liés par une transformation linéaire de type $\hat{\mathbf{t}}(k) = \hat{P}^T \mathbf{x}(k)$ telle que la matrice de transformation $\hat{P} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ vérifie la condition d'orthogonalité $\hat{P}^T \hat{P} = \mathbf{I}_\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$.

Les colonnes de la matrice \hat{P} sont les vecteurs d'une base orthonormée d'un sous-espace \mathbb{R}^ℓ de représentation réduite des données initiales. La transformation linéaire se traduit par la projection des données originelles exprimées dans un espace de dimension m vers un sous-espace orthogonal de dimension ℓ . Les composantes $t_j(k)$ avec $j = \{1, \dots, \ell\}$ du vecteur $\hat{\mathbf{t}}(k)$ sont les projections des éléments du vecteur de données $\mathbf{x}(k)$ dans le sous-espace \mathbb{R}^ℓ .

L'optimisation de la représentation en se basant sur la matrice de projection \hat{P} est obtenue par la minimisation de l'erreur quadratique d'estimation de \mathbf{x} . Notons par \hat{P} la matrice optimale de représentation, celle-ci peut être donnée par :

$$\hat{P} = \arg \min_{\hat{P}} \left\{ J_e(\hat{P}) \right\} \quad (2.4)$$

où J_e représente le critère de l'erreur d'estimation par ACP qui devrait être minimisé. Sous la contrainte d'orthogonalité de la matrice de projection \hat{P} , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} J_e(\hat{P}) &= \mathbb{E} \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{x} - \hat{P} \hat{P}^T \mathbf{x} \right\|^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left(\mathbf{x} - \hat{P} \hat{\mathbf{t}} \right)^T \left(\mathbf{x} - \hat{P} \hat{\mathbf{t}} \right) \right\} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}}^T \hat{\mathbf{t}} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \text{tr} \left(\mathbf{x}\mathbf{x}^T \right) - \hat{\mathbf{t}}^T \hat{\mathbf{t}} \right\} = \text{tr} \{ \Sigma \} - \mathbb{E} \left\{ \hat{\mathbf{t}}^T \hat{\mathbf{t}} \right\} \\ &= \text{tr} \{ \Sigma \} - J_v(\hat{P}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $\text{tr} \{ \cdot \}$ désigne la trace d'une matrice carrée. Etant donné que le terme $\text{tr} \{ \Sigma \}$ est une constante, la minimisation du critère J_e revient à maximiser celui du J_v donné par :

$$J_v(\hat{P}) = \mathbb{E} \left\{ \hat{\mathbf{t}}^T \hat{\mathbf{t}} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} t_j^2 \right\} = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{E} \left\{ t_j^2 \right\} = \sum_{j=1}^{\ell} \text{Var} \left\{ t_j \right\} \quad (2.6)$$

D'après l'équation précédente, la maximisation du critère J_v est équivalente à une maximisation de la variance de la composante t_j . Ainsi, le problème d'optimisation est reformulé comme suit :

$$\hat{\mathbf{P}} = \arg \min_{\hat{P}} \left\{ J_e(\hat{P}) \right\} = \arg \max_{\hat{P}} \left\{ J_v(\hat{P}) \right\} \quad (2.7)$$

Pour déterminer les vecteurs colonnes de la matrice $\hat{\mathbf{P}}$, on note par $t \in \mathbb{R}$ la projection du vecteur de données \mathbf{x} le long d'une direction représentée par un vecteur unitaire $p \in \mathbb{R}^m$. La composante t est obtenue par le produit scalaire $t = \mathbf{x}^T p = p^T \mathbf{x}$ sous la contrainte $\|p\|^2 = p^T p = 1$. Notamment, elle représente une nouvelle variable ayant une moyenne et une variance qui dépendent des propriétés statistiques de \mathbf{x} comme suit :

$$\mathbb{E} \{t\} = \mathbb{E} \{p^T \mathbf{x}\} = p^T \mathbb{E} \{\mathbf{x}\} = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Var} \{t\} &= \mathbb{E} \{(t - \mathbb{E} \{t\})^2\} = \mathbb{E} \{t^2\} \\ &= \mathbb{E} \{(p^T \mathbf{x}) (\mathbf{x}^T p)\} = p^T \mathbb{E} \{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} p \\ &= p^T \Sigma p \end{aligned} \quad (2.9)$$

La maximisation de la variance de projection, sous condition d'une norme unité du vecteur p , représente un problème d'optimisation sous contrainte égalité qui peut être formalisé par la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L}(p, \lambda) = J_v(p) - \lambda (p^T p - 1) = p^T \Sigma p - \lambda (p^T p - 1) \quad (2.10)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ désigne le multiplicateur de Lagrange. En tenant compte de la symétrie de la matrice Σ , le vecteur p maximisant le critère d'optimisation J_v est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial \mathcal{L}(p, \lambda) / \partial p = \Sigma p - \lambda p = 0 \\ \partial \mathcal{L}(p, \lambda) / \partial \lambda = p^T p - 1 = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Par conséquent, la résolution de ce système d'équations est identifiée comme un problème d'estimation de valeurs et vecteurs propres normalisés de la matrice Σ . Un tel système d'équations admet des solutions réelles de la variables λ obtenues par résolution de l'équation caractéristique suivante :

$$\text{Det} \{\Sigma - \lambda \mathbf{I}_m\} = 0 \quad (2.12)$$

où $\text{Det} \{.\}$ représente le déterminant d'une matrice carrée. \mathbf{I}_m est la matrice identité d'ordre m . Les solutions de l'équation précédente représentent les valeurs propres de Σ . A chaque valeur propre λ est associé un vecteur propre p vérifiant $(\Sigma - \lambda \mathbf{I}_m)p = 0$.

Ceci permet d'avoir m vecteurs propres \mathbf{p}_i associés aux m valeurs propres λ_i de la matrice Σ vérifiant ainsi la relation $\Sigma \mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ avec $i = \{1, \dots, m\}$. Sous forme matricielle, une telle relation mène à écrire ce qui suit :

$$\Sigma \mathbf{P} = \mathbf{P} \Lambda \quad (2.13)$$

$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ représente la matrice de projection de données. Elle est orthonormée puisque ses colonnes correspondent aux vecteurs propres de Σ :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.14)$$

$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_m \} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ représente la matrice diagonale constituée en éléments diagonaux des valeurs propres de Σ .

D'après les équations (2.13) et (2.14), on peut déduire que $\mathbf{P}^T \Sigma \mathbf{P} = \Lambda$. Ceci nous permet de conclure que la première direction, ayant une variance maximale de projection de données \mathbf{x} , est portée par le vecteur propre \mathbf{p}_1 associé à la plus grande valeur propre λ_1 . Cette dernière représente la variance d'une telle direction. Le second axe factoriel aussi rend la variance maximale tout en étant orthogonal au premier. Sa variance λ_2 est moins importante que celle qui correspond à la première direction. Par conséquent, les éléments diagonaux de Λ sont arrangés dans l'ordre décroissant : $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$.

En considérant la matrice \mathbf{P} , le vecteur de données $\mathbf{x}(k)$ peut se transformer sans aucune perte d'informations en un vecteur de composantes principales (CPs) :

$$\mathbf{t}(k) = [t_1(k), \dots, t_m(k)]^T = \mathbf{P}^T \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^m \quad (2.15)$$

où les CPs t_j avec $j = \{1, \dots, m\}$ sont définies par :

$$t_j(k) = \mathbf{p}_j^T \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{p}_j \quad (2.16)$$

Celles-ci sont statistiquement non corrélées :

$$\mathbb{E} \{ t_i t_j \} = \mathbb{E} \{ \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{p}_j \} = \mathbf{p}_i^T \Sigma \mathbf{p}_j = 0 \quad i \neq j \quad (2.17)$$

La notation sous forme matricielle nous permet de définir la matrice des CPs comme suit :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}(1), \dots, \mathbf{t}(N)]^T = \mathbf{X} \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (2.18)$$

La détermination du vecteur de données $\mathbf{x}(k)$ à partir du vecteur associé des CPs $\mathbf{t}(k)$ est donnée par :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P} \mathbf{t}(k) = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j t_j(k) \quad (2.19)$$

La réduction des données est réalisée à travers les ℓ premières CPs ayant les plus grandes variances. En conséquence, les ℓ premiers vecteurs propres forment le sous-espace vectoriel réduit pour les données initiales. L'estimation $\hat{\mathbf{x}}(k)$ du vecteur de données $\mathbf{x}(k)$ dans ce sous-espace réduit (souvent appelé sous-espace de représentation ou principal et noté $\hat{\mathcal{S}}$) est donnée par :

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{t}}(k) = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \quad (2.20)$$

où la matrice optimale de représentation exprimée dans l'équation (2.7) est définie comme suit :

$$\hat{\mathbf{P}} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_\ell] \in \mathbb{R}^{m \times \ell} \quad (2.21)$$

$\hat{\mathbf{t}}(k) = \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^\ell$ représente le vecteur des ℓ premières CPs. La matrice $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ caractérise ainsi le modèle ACP.

Toutefois, la réduction de dimension engendre généralement une perte d'informations qui sont récupérées dans un vecteur résiduel $\tilde{\mathbf{x}}(k)$. Ce dernier est exprimé dans un sous-espace résiduel $\tilde{\mathcal{S}}$ constitué par le reste des CPs associées aux $(m - \ell)$ derniers vecteurs propres :

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{t}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) \quad (2.22)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{p}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{p}_m] \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)} \quad (2.23)$$

et

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T = \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{C}} \quad (2.24)$$

La matrice $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ décrit le modèle résiduel. On entrevoit ici que l'ACP est une approche de modélisation permettant ainsi l'obtention d'un modèle ACP d'un système étudié.

L'interprétation du principe de la modélisation par ACP représente un partitionnement de l'espace \mathbb{R}^m des mesures $\mathbf{x}(k)$ en un sous-espace principal $\hat{\mathcal{S}}$ et un sous-espace résiduel $\tilde{\mathcal{S}}$. Par conséquent, le vecteur de mesures $\mathbf{x}(k)$ est décomposé comme suit :

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (2.25)$$

Notamment, une propriété géométrique d'orthogonalité entre le vecteur estimé et celui résiduel est toujours vérifiée puisque :

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.26)$$

Celle-ci implique que le sous-espace principal et le sous-espace résiduel sont orthogonaux pour toutes valeurs de ℓ . Ainsi,

$$\tilde{\mathbf{x}}^T(k)\hat{\mathbf{x}}(k) = 0 \quad (2.27)$$

Une analyse de la robustesse de l'ACP par rapport au bruit de mesures mène à la définition de quelques propriétés relatives à la détermination d'un modèle ACP.

2.3 Propriétés

Généralement, la présence de bruit de mesures est inévitable dans les données. Sous l'hypothèse de l'absence de perturbations et de défauts, il est possible de considérer que le vecteur \mathbf{x} est perturbé par un bruit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ de moyenne nulle :

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (2.28)$$

où $\hat{\mathbf{x}}(k)$ représente le vecteur de données en absence de bruit de mesures.

2.3.1 Modélisation en absence de bruit

Notons par $\overset{\circ}{\Sigma}$ la matrice de covariance des données $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$. Sa décomposition en valeurs singulières peut s'exprimer comme suit :

$$\overset{\circ}{\Sigma} = \frac{1}{N} \overset{\circ}{\mathbf{X}}^T \overset{\circ}{\mathbf{X}} = \overset{\circ}{\mathbf{P}} \overset{\circ}{\Lambda} \overset{\circ}{\mathbf{P}}^T \quad (2.29)$$

où $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ représente la matrice des données supposées être sans bruit. Elle est exprimée en fonction des observations $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(k)$ comme suit :

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = [\overset{\circ}{\mathbf{x}}(1), \dots, \overset{\circ}{\mathbf{x}}(N)]^T \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (2.30)$$

En effet, le nombre optimal ℓ des CPs doit correspondre au rang q de la matrice $\overset{\circ}{\Sigma}$ car en présence des corrélations linéaires entre les variables, les $(m - q)$ dernières valeurs propres de $\overset{\circ}{\Sigma}$ sont nulles. Ainsi, les partitionnements appropriés des matrices $\overset{\circ}{\mathbf{P}}$ et $\overset{\circ}{\Lambda}$ conduisent à réécrire cette dernière de la façon suivante :

$$\overset{\circ}{\Lambda} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{(m-q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}^T \\ \tilde{\mathbf{P}}^T \end{bmatrix} \overset{\circ}{\Sigma} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} & \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

où $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ représente la matrice diagonale composée des q valeurs propres non nulles :

$$\hat{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\} \quad (2.32)$$

λ_ℓ , avec $\ell = \{1, \dots, q\}$, décrit la variance de la ℓ ème CP des données étudiées en l'absence de bruit de mesures. D'après l'équation (2.31), on peut déduire ce qui suit :

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \overset{\circ}{\Sigma} \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{0}_{(m-q)} \in \mathbb{R}^{(m-q) \times (m-q)} \quad (2.33)$$

Ainsi, la substitution de la matrice $\overset{\circ}{\Sigma}$ par son expression donnée dans (2.29) mène à la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \overset{\circ}{\mathbf{X}}^T \overset{\circ}{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{P}} = \left(\overset{\circ}{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{P}} \right)^T \left(\overset{\circ}{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{P}} \right) = \mathbf{0}_{(m-q)} \quad (2.34)$$

Celle-ci implique que :

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N \times (m-q)} \quad (2.35)$$

En tenant compte des observations $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(k)$ qui constituent la matrice $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, on peut également déduire que :

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \overset{\circ}{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(m-q)} \quad (2.36)$$

La relation précédente forme un système composé de $(m - q)$ équations linéaires. En effet, les $(m - q)$ valeurs propres nulles de $\overset{\circ}{\Sigma}$ impliquent l'existence de $(m - q)$ relations linéaires entre les variables. Ainsi, ces équations représentent celles de redondance présentes entre les variables étudiées. En absence de bruit de mesures, les q valeurs propres non nulles indiquent l'existence de q variables linéairement indépendantes.

Exemple 2.1 Détermination d'un modèle ACP en absence de bruit

Afin d'illustrer un exemple, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} y_1(k) = 2u_1(k) - u_2(k) \\ y_2(k) = u_2(k) + u_3(k) \end{cases} \quad (2.37)$$

y_1 et y_2 représentent les signaux de sorties d'un tel système. u_1 , u_2 et u_3 sont les signaux d'entrées dont les expressions en fonction du temps sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_1(k) = 1 + \sin(k/3) \\ u_2(k) = 2 \cos(k/4) \exp(-k/N) \\ u_3(k) = \log(u_2(k)^2) \end{cases} \quad (2.38)$$

On a construit une matrice de données \mathbf{X} composée de $N = 2700$ observations. Chacune de ces dernières représente un vecteur des mesures associées aux variables étudiées : $\mathbf{x}(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k) \ y_1(k) \ y_2(k)]^T$. La décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariance $\mathring{\Sigma}$ de \mathbf{X} mène aux valeurs propres données par le tableau 2.1.

13.026	5.276	1.315	0	0
--------	-------	-------	---	---

TABLE 2.1 – Valeurs propres de $\mathring{\Sigma}$ de l'exemple 2.1

On remarque l'existence de deux valeurs propres nulles ce qui explique l'existence de deux équations de redondance dans le système. Les trois valeurs propres non nulles indiquent la présence de trois variables non corrélées qui représentent les entrées du système dans cet exemple.

Le sous-espace résiduel est engendré par les deux derniers vecteurs propres dont les transposées sont exprimées comme suit :

$$\tilde{\mathbf{P}}^T = \begin{bmatrix} 0.410 & 0.366 & 0.572 & -0.205 & -0.572 \\ 0.733 & -0.526 & -0.160 & -0.366 & 0.160 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

On peut alors déduire que les équations de redondance sont les suivantes :

$$\begin{cases} 0.410u_1(k) + 0.366u_2(k) + 0.572u_3(k) - 0.205y_1(k) - 0.572y_2(k) = 0 & \text{(a)} \\ 0.733u_1(k) - 0.526u_2(k) - 0.160u_3(k) - 0.366y_1(k) + 0.160y_2(k) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (2.40)$$

A partir de l'équation (2.40.a), la variable y_1 peut être exprimée en fonction des autres variables de la manière suivante :

$$y_1(k) = \frac{1}{0.205} (0.410u_1(k) + 0.366u_2(k) + 0.572u_3(k) - 0.572y_2(k)) \quad (2.41)$$

En remplaçant la variable y_1 de l'équation (2.40.b) par son expression donnée dans (2.41), on peut déduire que :

$$y_2(k) = u_2(k) + u_3(k) \quad (2.42)$$

Ainsi, la réinjection de celle-ci dans l'équation (2.41) mène à :

$$y_1(k) = 2u_1(k) - u_2(k) \quad (2.43)$$

On peut alors conclure qu'il est possible de retrouver à partir des équations de redondance le système initial donné par (2.37).

2.3.2 Modélisation en présence de bruit

D'après Li et Qin (2001), l'ACP fournit un modèle non biaisé uniquement dans le cas particulier où les mesures des variables du processus sont entachées par un bruit blanc (indépendant et identiquement distribué : *i.i.d.*).

Lorsque le bruit \mathbf{v} est *i.i.d.* de variance identique σ^2 , l'expression de la matrice de covariance des données bruitées est la suivante :

$$\Sigma = \mathbb{E}\{\mathbf{xx}^T\} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T = \overset{\circ}{\Sigma} + \sigma^2\mathbf{I}_m \quad (2.44)$$

Ainsi, Anderson (1963) a montré que les vecteurs propres des matrices Σ et $\overset{\circ}{\Sigma}$ sont identiques. Pour $\ell = q$ CPs, il est alors possible d'exprimer la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T \quad (2.45)$$

Par conséquent, le vecteur résiduel ainsi que celui estimé d'une observation bruitée $\mathbf{x}(k)$ sont respectivement exprimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k) &= \tilde{\mathbf{C}}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k)) \\ &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (2.46)$$

et

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{C}}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k)) \quad (2.47)$$

En présence de bruit *i.i.d.*, le modèle ACP est constitué de q CPs. Dans ce cas et d'après l'équation (2.46), les données sans bruit ne sont pas projetées dans le sous-espace résiduel. En effet, ce dernier ne peut contenir que le bruit de mesures. Cependant, le sous-espace principal peut contenir les données non bruitées ainsi que le bruit.

2.4 Détermination d'une structure optimale du modèle ACP

En présence de bruit de mesures, les valeurs propres nulles de la matrice de covariance indiquent l'existence de relations linéaires et les plus petites valeurs propres indiquent l'existence de relations quasi-linéaires. Le choix du nombre de CPs joue donc un rôle crucial dans la détermination des relations de redondance entre les variables. Toutefois, un tel nombre révèle une difficulté pour sa détermination. Pour cela, de nombreux critères ont été proposés dans la littérature afin d'offrir des solutions aidant dans le choix de la structure adaptée du modèle ACP. D'une façon non exhaustive, nous avons choisi certains critères parmi les plus connus afin de réaliser une étude comparative sur leurs performances.

2.4.1 Critères de la théorie de l'information

Dans le domaine du traitement du signal, l'identification des sources indépendantes des signaux à partir d'un nombre fini d'observations bruitées est un problème crucial. Les solutions proposées dans ce cadre peuvent être explorées avec l'ACP pour déterminer le

nombre des signaux non corrélés. En effet, un vecteur d'observation peut être modélisé comme une superposition d'un nombre fini de signaux noyés dans un bruit additif. L'objectif est d'identifier ces signaux. Sous l'hypothèse que le bruit de mesures est *i.i.d.*, sa variance doit correspondre aux plus petites valeurs propres de la matrice de covariance. En se basant sur le principe de la vraisemblance, deux critères **AIC** (Akaike, 1973) et **MDL** (Rissanen, 1978) et (Schwarz, 1978) ont été proposés puis reformulés et adaptés par Wax et Kailath (1985) afin d'être utiles dans le choix du nombre des CPs significatives. En effet, le nombre des signaux non corrélés à identifier doit correspondre aux minima des critères **AIC** et **MDL** dont les expressions sont respectivement données par :

$$\mathbf{AIC}(\ell) = -2 \log f(\mathbf{X}|\hat{\theta}) + 2G(\hat{\theta}) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{MDL}(\ell) = -2 \log f(\mathbf{X}|\hat{\theta}) + G(\hat{\theta}) \log N \quad (2.49)$$

avec

$$f(\mathbf{X}|\hat{\theta}) = N \sum_{a=\ell+1}^m \log \lambda_a - N(m - \ell) \log \left(\frac{1}{m - \ell} \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a \right) \quad (2.50)$$

et

$$G(\hat{\theta}) = \ell(2m - \ell) \quad (2.51)$$

où la fonction log représente l'opérateur du logarithme népérien. On remarque que les premiers termes (à droite) des expressions (2.48) et (2.49) sont identiques et décroissants en ℓ . En revanche, les seconds termes sont croissants en ℓ . Théoriquement, il existe un minimum qui correspond à un nombre de CPs pour chacun des deux critères. Notamment, Wax et Kailath (1985) ont montré que le critère **MDL** est capable d'estimer une structure adaptée du modèle ACP sous l'hypothèse que le nombre d'observations considérées soit assez important. Tandis que celui d'**AIC** présente une tendance asymptotique de surestimation du nombre des CPs retenues.

2.4.2 Critères heuristiques

La qualité des estimations par ACP dépend du choix du nombre des CPs retenues ou encore de la dimension du sous-espace de représentation. Dans la suite, nous présentons d'une façon non exhaustive les critères heuristiques les plus couramment utilisés.

2.4.2.1 Critère IE

L'analyse factorielle est une méthode conçue pour résoudre les problèmes multidimensionnels. Elle exprime un ensemble de données sous forme d'une somme linéaire des produits de fonctions. Ainsi, une réduction est réalisée afin de reproduire ces données à partir d'un sous-espace composé uniquement des variables latentes significatives qui ont été déterminées par l'analyse factorielle. Notamment, la première étape dans le processus de cette méthode fait appel à l'ACP qui consiste à déterminer ce nombre de facteurs cachés. Puisque la reproduction des données engendre nécessairement des erreurs, Malinowski (1977) distingue trois types d'erreurs qui sont : *real error* (**RE**), *imbedded error*

(**IE**) et *extracted error* (**XE**). En investiguant de près le comportement de la fonction **IE**, cette dernière a été considérée par Malinowski (1977) comme un critère capable de déterminer la dimension d'un modèle ACP. Son expression dépend principalement des valeurs propres résiduelles :

$$\mathbf{IE}(\ell) = \left(\frac{\ell}{Nm(m-\ell)} \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

Chaque variable latente ou CP sélectionnée est composée des mesures observées et des erreurs. Lorsque le sous-espace constitué par les variables latentes retenues n'est pas encore optimal, le critère **IE** décroît en ℓ en représentant par conséquent une mixture des mesures observées et des erreurs. Au point où toute l'information normale est extraite, **IE** devient croissant en ℓ en exprimant uniquement les erreurs. Une représentation convenable des données est assurée par le nombre des CPs qui correspondent à la valeur minimale de ce critère.

Bien que les critères **AIC**, **MDL** et **IE** soient développés dans différents domaines, ils représentent deux points communs. En effet, ils se basent uniquement sur des valeurs propres issues de la matrice de covariance des données. Par conséquent, ces dernières ne doivent pas être normalisées. En outre, le bruit de mesures des variables est supposé être indépendant et identiquement distribué.

2.4.2.2 Pourcentage cumulé de la variance

Les valeurs propres de la matrice de corrélation représentent les variances des CPs. Par conséquent, elles ont été utilisées pour définir un critère **PCV** dans le but est la détermination de la structure optimale d'un modèle ACP. Ce critère représente le pourcentage de la variance expliquée par les CPs retenues comme suit :

$$\mathbf{PCV}(\ell) = 100 \left(\frac{\sum_{a=1}^{\ell} \lambda_a}{\sum_{a=1}^m \lambda_a} \right) \% \quad (2.53)$$

Généralement, on essaie de retenir avec ce critère un nombre de CPs ayant un **PCV** compris entre 90% et 95% ou 99% de la variance totale. La règle de décision basée sur un tel critère est très subjective, car il s'agit d'une réalisation d'un compromis entre une variance maximale et un nombre minimal de CPs retenues. Le choix de la dimension du modèle ACP est souvent difficile puisque ce critère est monotone croissant en ℓ . En outre, son efficacité à fournir le nombre optimal des CPs dépend fortement du rapport signal sur bruit puisque la variance du bruit est inconnue.

2.4.2.3 Scree Test

Le *Scree Test* ou test du coude est une approche empirique proposée principalement par Cattell (1966) pour la sélection du nombre optimal des CPs. Elle est basée sur un

test du coude de la courbe du pourcentage de la variance résiduelle dont l'expression est la suivante :

$$\mathbf{PVR}(\ell) = 100 \left(\frac{\sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a}{\sum_{a=1}^m \lambda_a} \right) \% \quad (2.54)$$

Ce critère présente une allure décroissante en ℓ . Son principe est fondé sur l'idée que la variance résiduelle devrait atteindre un état stationnaire lorsque les CPs ignorées ressemblent à des erreurs aléatoires. Ainsi, le nombre des CPs à retenir est relatif au premier point d'inflexion détecté sur la courbe.

On observe le graphique du critère **PVR** et on ne retient que les valeurs qui se trouvent à gauche du point d'inflexion. Graphiquement, on part des composantes qui se trouvent à droite, apportant le moins d'informations. On relie par une droite les points presque alignés et on ne retient que les CPs qui sont au dessus de cette ligne. La mise en œuvre de cette méthode est relativement facile, cependant dans certains cas il est difficile de trouver un point d'inflexion ou le coude si la courbe décroît lentement.

2.4.2.4 Critère de Guttman

Le critère de Guttman pour la détermination du nombre approprié des variables latentes en analyse factorielle (ou le nombre des CPs significatives en ACP) a été initialement proposé par [Guttman \(1954\)](#) puis adapté et popularisé par [Kaiser \(1961\)](#). En s'appuyant sur un tel critère, on ne compte que les composantes ou facteurs avec des valeurs propres supérieures à l'unité qui représente la moyenne arithmétique de toutes les valeurs propres de la matrice de corrélation. L'expression de ce critère en ℓ est la suivante :

$$\mathbf{KG}(\ell) = \lambda_\ell \quad (2.55)$$

Chaque CP retenue dans le modèle ACP contribue par sa variance. Ainsi, sa contribution est considérée significative si elle dépasse la moyenne totale, sinon elle devrait être écartée. Cette idée est justifiée par [Guttman \(1954\)](#) afin de fournir une borne inférieure pour le nombre des variables latentes représentatives en considérant une matrice de corrélation. Plus intuitivement, l'argument a été avancé afin d'exprimer qu'aucune CP dont la variance est inférieure à celle d'une variable originelle ne peut être considérée comme représentative.

La popularité du critère **KG**, par rapport à d'autres plus opérationnels et mieux justifiables, apparaît plus particulièrement dans sa simplicité d'utilisation. Dans un cadre d'une étude par simulation, [Yeomans et Golder \(1982\)](#) ont examiné de plus près le comportement de ce critère afin de montrer l'ampleur probable des erreurs introduites par son utilisation sans précautions. Le seul cas où ce critère est efficace semble bien être lorsque le nombre des composantes représentatives est beaucoup moins inférieur que celui des variables originelles. Ainsi, la proportion de la variance de chaque variable, expliquée par les CPs retenues, doit être élevée.

2.4.2.5 Autocorrélation

L'autocorrélation est une méthode qualitative proposée pour le choix d'un modèle ACP. Généralement, les allures des CPs les plus significatives doivent être lisses tandis que les autres liées principalement aux bruits présentent des fluctuations rapides et aléatoires. Dans ce cadre, [Shrager et Hendler \(1982\)](#) ont proposé la fonction d'autocorrélation du premier ordre comme une mesure quantitative de ce comportement :

$$\mathbf{AC}(\ell) = \frac{\mathbb{E}\{t_\ell(k)t_\ell(k+1)\}}{\text{Var}\{t_\ell(k)\}} = \frac{1}{(N-1)\lambda_\ell} \sum_{k=1}^{N-1} t(k, \ell)t(k+1, \ell) \quad (2.56)$$

où $t(k, \ell)$ représente la k ème valeur de la ℓ ème colonne de la matrice des CPs notée \mathbf{T} dans l'équation (2.18).

Lorsqu'une CP est significative, son autocorrélation sera importante car il y aura certainement une corrélation entre ses éléments qui correspondent aux différentes observations. En revanche et si elle est principalement associée à un bruit de mesures, peu de corrélation est attendue entre ses éléments qui sont fortement aléatoires. Par conséquent, son autocorrélation sera relativement faible. D'après [Shrager et Hendler \(1982\)](#), une valeur d'autocorrélation supérieure à 0.5 indique que la CP correspondante est significative. Dans le cas contraire, la composante en question est constituée principalement de bruit. Dans ce cas, elle ne devrait pas être incluse dans le modèle. Le choix de la valeur d'un tel seuil est considérablement arbitraire, ce qui représente l'inconvénient de ce critère. En outre, une CP ayant une grande variance peut correspondre à une faible valeur d'autocorrélation, ce qui lui risque d'être exclue du modèle.

2.4.2.6 Validation croisée

L'idée de la validation croisée est basée principalement sur la prédiction à travers un modèle ACP d'une mesure $x_i(k)$ de la matrice de données \mathbf{X} . Selon [Wold \(1978\)](#) et [Eastment et Krzanowski \(1982\)](#), le nombre des CPs retenues est optimal si la moyenne de la prédiction globale d'une telle mesure n'est plus significativement améliorée par l'ajout de CPs supplémentaires. Ainsi, le modèle optimal est alors constitué du nombre minimum des CPs nécessaires pour une prédiction adéquate.

Dans ce cadre, le critère qui découle de l'approche de la validation croisée représente une minimisation de la somme des carrés des erreurs de prédiction. Il est connu sous le nom de **PRESS** :

$$\mathbf{PRESS}(\ell) = \frac{1}{Nm} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m (\hat{x}_i^{(\ell)}(k) - x_i(k))^2 \quad (2.57)$$

où $\hat{x}_i^{(\ell)}(k)$ représente la prédiction de $x_i(k)$, qui correspond à la k ème mesure de la i ème variable, en utilisant un modèle ACP constitué de ℓ CPs.

Toutefois, on distingue dans la littérature deux façons différentes pour le calcul de ce critère, car la manière de la prédiction proposée par [Wold \(1978\)](#) diffère de celle proposée par [Eastment et Krzanowski \(1982\)](#). Indépendamment de cette différence, il est important

de mentionner que ce critère présente une complexité dans son implémentation ainsi qu'un coût de calcul important.

Par ailleurs, Besse et Ferré (1993) ont montré théoriquement que l'usage du critère **PRESS** n'apporte pas une règle de décision plus objective que les critères heuristiques. Sous l'hypothèse que le nombre d'observations considérées est très important, un développement de Taylor a permis à ces auteurs de montrer que la quantité **PRESS** peut être approximée comme suit :

$$\mathbf{PRESS}(\ell) \approx \frac{1}{m} \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a \quad (2.58)$$

Ce critère est alors décroissant en ℓ . Par conséquent, l'idée d'identifier la CP qui correspond au minimum de **PRESS** ne peut servir dans le choix d'un modèle ACP. En outre, ce critère est équivalent à ceux prenant simplement la part de la variance résiduelle en particulier le critère **PVR**. Tandis que, Wold (1978) et Eastment et Krzanowski (1982) ont également proposé l'investigation d'autres critères issues de la quantité **PRESS** qui sont respectivement le ratio **R** et le critère **W**. L'utilisation des ces derniers pour le choix de la dimension d'un modèle ACP est basée sur une comparaison de leurs valeurs à des seuils jugés arbitraires dans la littérature limitant par conséquence de leurs efficacités. Malgré la célébrité de la validation croisée, cette dernière n'est plus considérée avantageuse par rapport aux restes des critères heuristiques. Pour cette raison, elle ne présentera pas l'objectif de notre étude dans ce chapitre.

2.4.3 Minimisation de la variance de l'erreur de reconstruction

Le critère qui représente un objectif principal d'une étude dans ce chapitre est lié à la variance de l'erreur de reconstruction ou la variance non reconstruite (**VNR**) (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Qin et Dunia, 2000). En effet, la qualité de la reconstruction est liée à la capacité du modèle ACP à modéliser les relations de redondance entre les variables. Ainsi, ce critère aide à définir le nombre des CPs exprimant une meilleure reconstruction.

Le principe de reconstruction représente une élimination de l'effet d'un défaut. Autrement dit, cette approche estime le vecteur d'amplitudes d'un tel défaut.

Pour une raison de simplifications qui seront utiles pour le reste des chapitres, nous définissons ici d'une manière générale l'expression d'un vecteur de données en présence de défauts multidimensionnels. Nous notons par $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$ le sous-espace caractéristique d'un défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ affectant un ensemble \mathcal{J} constitué de r variables où $r = \dim(\mathcal{S}_{\mathcal{J}})$. Nous considérons également $\Xi_{\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ une base orthonormée pour un tel sous-espace dont les colonnes sont celles de la matrice identité et qui correspondent aux variables en défaut. Posons $\mathbf{x}^*(k)$ qui est supposé inconnu le vecteur de mesures collectées lors du fonctionnement normal. En présence du défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, le vecteur $\mathbf{x}(k)$ peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \quad (2.59)$$

où $\mathbf{f}(k) \in \mathbb{R}^r$ représente le vecteur d'amplitudes des composants de défaut à l'instant k .

On formule l'hypothèse que les données utilisées pour construire le modèle ACP sont "saines". Les données "saines" correspondent à des données obtenues lors du fonctionnement normal du système étudié.

2.4.3.1 Critère VNR

Dans l'objectif de choisir une structure adaptée du modèle ACP en s'appuyant sur l'approche de reconstruction, on suppose que les défauts sont unidimensionnels ou simples. Cela signifie que la matrice orthonormée des directions $\Xi_{\mathcal{J}}$ ainsi que le vecteur d'amplitudes des composants de défaut $\mathbf{f}(k)$ dans l'équation (2.59) sont respectivement remplacés par un vecteur ξ_j qui représente la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité et $f(k)$ un scalaire qui désigne l'amplitude de défaut caractérisant la $j^{\text{ème}}$ variable. Dans ce cadre, la reconstruction d'une telle variable aboutit à un vecteur reconstruit d'observation ayant l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j(k) &= \mathbf{x}^*(k) = \mathbf{x}(k) - \xi_j f(k) \\ &= \mathbf{x}(k) - \xi_j \hat{f}_j(k)\end{aligned}\quad (2.60)$$

où $\hat{f}_j(k)$ est l'estimée de $f(k)$ dans la direction de la $j^{\text{ème}}$ variable. En effet, l'estimation de l'amplitude f est optimale par minimisation de l'erreur quadratique résiduelle $\|\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}_j(k)\|^2$ comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{f}_j(k) &= \arg \min_{f(k)} \left\{ \|\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}_j(k)\|^2 \right\} \\ &= (\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\xi_j)^{-1} \xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (2.61)$$

Par conséquent, le vecteur reconstruit d'observation aura la forme suivante :

$$\mathbf{x}_j(k) = (\mathbf{I}_m - \xi_j (\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\xi_j)^{-1} \xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{x}(k) \quad (2.62)$$

Certainement, la reconstruction n'est possible que sous conditions. En effet, la $j^{\text{ème}}$ variable est reconstituible si $\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\xi_j \neq 0$. Cela implique que le vecteur $\tilde{\mathbf{C}}\xi_j$ n'est pas nul.

Après avoir présenté le principe de reconstruction, la variance non reconstruite de la $j^{\text{ème}}$ variable est définie par :

$$\begin{aligned}\sigma_j^2(\ell) &= \text{Var} \left\{ \xi_j^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} = \text{Var} \left\{ \hat{f}_j \right\} \\ &= \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbb{E} \{ \mathbf{x}\mathbf{x}^T \} \tilde{\mathbf{C}}\xi_j}{(\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\xi_j)^2} = \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\Sigma\tilde{\mathbf{C}}\xi_j}{(\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\xi_j)^2}\end{aligned}\quad (2.63)$$

On déduit qu'une telle variance représente tout simplement la variance de l'amplitude estimée du défaut. Une telle variance justifie l'idée de son utilisation pour le choix d'un modèle ACP. En effet, les données utilisées pour la modélisation sont supposées être sans défauts. Ainsi, la reconstruction d'une variable donnée en utilisant un modèle judicieusement choisi doit fournir une variance non reconstruite minimale. Puisqu'on dispose de plusieurs variables qui doivent être étudiées simultanément, on doit alors identifier un modèle ACP qui minimise la variance globale non reconstruite (**VNR**) représentée par la somme suivante :

$$\mathbf{VNR}(\ell) = \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j^2(\ell)}{\xi_j^T \Sigma \xi_j} = \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\Sigma\tilde{\mathbf{C}}\xi_j}{(\xi_j^T \Sigma \xi_j)(\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}}\xi_j)^2} \quad (2.64)$$

Dans le but d'éviter les problèmes d'échelles des variances non reconstruites, il est important de pondérer chaque σ_j^2 par $\xi_j^T \Sigma \xi_j$ qui représente la variance originelle de la $j^{\text{ème}}$ variable. Evidemment, si les variables étudiées sont réduites alors $\xi_j^T \Sigma \xi_j = 1$.

Le choix d'un modèle ACP en se basant sur ce critère s'est justifié par une sélection du nombre optimal (ℓ_{op}) des CPs offrant la meilleure reconstruction. Autrement dit, ℓ_{op} doit assurer une variance non reconstruite minimale :

$$\ell_{op} = \arg \min_{\ell} \{ \mathbf{VNR}(\ell) \} \quad (2.65)$$

2.4.3.2 Consistance théorique du critère VNR

D'après [Dunia et Qin \(1998b,c,a\)](#) et [Qin et Dunia \(2000\)](#), ce critère doit nécessairement admettre un minimum qui correspond à un modèle optimal offrant une meilleure reconstruction. Afin de montrer l'existence d'un tel minimum, [Dunia et Qin \(1998a\)](#) ont décomposé la variance non reconstruite de la $j^{\text{ème}}$ variable en deux variances en se basant sur la propriété exprimée dans l'équation (2.24) et qui donne :

$$\|\xi_j\|^2 = \|\tilde{\mathbf{C}}\xi_j\|^2 + \|\hat{\mathbf{C}}\xi_j\|^2 = 1 \quad (2.66)$$

Ainsi, la variance de l'erreur de reconstruction individuelle d'une variable donnée peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_j^2(\ell) &= \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j}{(\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j)^2} = \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j}{\|\tilde{\mathbf{C}}\xi_j\|^2 (1 - \|\hat{\mathbf{C}}\xi_j\|^2)} \\ &= \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j}{\|\tilde{\mathbf{C}}\xi_j\|^2} \left(1 + \frac{\|\hat{\mathbf{C}}\xi_j\|^2}{1 - \|\hat{\mathbf{C}}\xi_j\|^2} \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

En posant

$$\tilde{\sigma}_j^2(\ell) = \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j}{\|\tilde{\mathbf{C}}\xi_j\|^2} \quad (2.68)$$

et

$$\hat{\sigma}_j^2(\ell) = \tilde{\sigma}_j^2(\ell) \left(\frac{\|\hat{\mathbf{C}}\xi_j\|^2}{1 - \|\hat{\mathbf{C}}\xi_j\|^2} \right) \quad (2.69)$$

la variance non reconstruite exprimée dans l'équation (2.67) n'est autre que :

$$\sigma_j^2(\ell) = \tilde{\sigma}_j^2(\ell) + \hat{\sigma}_j^2(\ell) \quad (2.70)$$

[Dunia et Qin \(1998a\)](#) ont montré que la fonction $\tilde{\sigma}_j^2$ est monotone décroissante en ℓ . Par ailleurs, la fonction $\hat{\sigma}_j^2$ tend vers l'infini pour $\ell = m$. En conséquence, la variance non reconstruite σ_j^2 doit obligatoirement avoir un minimum qui correspond à un nombre de CPs $\ell \in [1, m]$. Ces déductions peuvent être également étendues au critère **VNR** puisqu'il représente la somme des variances non reconstruites de toutes les variables. Néanmoins, on s'interroge si le nombre des CPs qui correspond à un tel minimum représente le nombre théorique q défini auparavant. Dans ce cadre, [Valle et al. \(1999\)](#) ont étendu leurs travaux afin d'établir des théorèmes sur la consistance d'un tel critère en montrant qu'il est capable de définir correctement le nombre optimal des CPs sous des conditions qui dépendent de la distribution du bruit de mesures.

Cas de bruit *i.i.d.* D'après (2.44), la matrice des valeurs propres, en présence d'un bruit de mesures *i.i.d.* de variance σ^2 , peut être introduite de la façon suivante :

$$\Lambda = \hat{\Lambda} + \sigma^2 \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} + \sigma^2 \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{(m-q)} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

où $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}$ sont données respectivement par les équations (2.31) et (2.32).

Pour $\ell \geq q$, on a $\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j = \sigma^2 \xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j$ ce qui implique que la variance non reconstruite de la *j*ème variable peut s'exprimer comme suit :

$$\sigma_j^2(\ell) = \frac{\sigma^2}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j} \quad \forall \ell \geq q \quad (2.72)$$

Dans le cas particulier où $\ell = q$, on a :

$$\sigma_j^2(q) = \frac{\sigma^2}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q^T \xi_j} \quad (2.73)$$

avec la matrice des vecteurs propres $\tilde{\mathbf{P}}_q$ est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{P}}_q = [\mathbf{p}_{q+1}, \dots, \mathbf{p}_\ell, \mathbf{p}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{p}_m] = [\mathbf{p}_{q+1}, \dots, \mathbf{p}_\ell, \tilde{\mathbf{P}}] \quad (2.74)$$

Celle-ci implique que :

$$\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q^T \xi_j \geq \xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j \quad (2.75)$$

ainsi,

$$\sigma_j^2(\ell) \geq \sigma_j^2(q) \quad \forall \ell \geq q \quad (2.76)$$

Indépendamment de la nature de la matrice Σ si elle représente une matrice de covariance ou une matrice de corrélation, on a :

$$\frac{\sigma_j^2(\ell)}{\xi_j^T \Sigma \xi_j} \geq \frac{\sigma_j^2(q)}{\xi_j^T \Sigma \xi_j} \quad \forall \ell \geq q \quad (2.77)$$

L'inégalité précédente nous permet de déduire que :

$$\mathbf{VNR}(\ell) \geq \mathbf{VNR}(q) \quad \forall \ell \geq q \quad (2.78)$$

d'où

$$\arg \min_{\ell} \{\mathbf{VNR}(\ell)\} = q \quad \forall \ell \geq q \quad (2.79)$$

Cette égalité prouve que le critère \mathbf{VNR} ne surestime plus la dimension d'un modèle ACP en présence de bruit *i.i.d.*

Par ailleurs et dans le cas où $\ell < q$, la matrice des vecteurs propres $\tilde{\mathbf{P}}_q$ sera englobée dans $\tilde{\mathbf{P}}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{p}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{p}_q, \tilde{\mathbf{P}}_q] \quad \text{pour } \ell < q \quad (2.80)$$

Dans ce cas, Valle et al. (1999) ont montré que :

$$\sigma_j^2(\ell) \geq \sigma_j^2(q) \quad \text{si} \quad \hat{\lambda}_q \geq \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q^T \xi_j} \sigma^2 \quad \forall \ell < q \quad (2.81)$$

Cette hypothèse mettra en évidence que la variance de la dernière CP théoriquement significative doit être supérieure à la variance du bruit de mesures. Par conséquent, le critère **VNR** définit correctement le nombre optimal des CPs sous une telle condition :

$$\arg \min_{\ell} \{\mathbf{VNR}(\ell)\} = q \quad \text{si} \quad \hat{\lambda}_q \geq \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q^T \xi_j} \sigma^2 \quad \forall \begin{cases} \ell < q \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (2.82)$$

Cas de bruit coloré Il semblerait que l'hypothèse qui consiste à considérer que le bruit est blanc ne soit pas toujours adaptée. Il se peut qu'on préfère modéliser le bruit différemment en le colorant i.e. soit en relâchant la contrainte que les variances sont identiques soit que le bruit est indépendant, soit les deux. Dans la pratique, les variances du bruit ne sont pas nécessairement identiques. Dans ce cas, la matrice des valeurs propres prend la forme suivante :

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, \sigma_{q+1}^2, \dots, \sigma_m^2\} \quad (2.83)$$

où les σ_i^2 sont les variances du bruit. En suivant le même principe que celui du cas de bruit *i.i.d.*, Valle et al. (1999) ont montré que le critère **VNR** atteint son minimum à $\ell = q$ CPs si :

$$\frac{\sigma_{q+1}^2}{\sigma_m^2} \leq \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q^T \xi_j}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j} \quad \text{pour} \quad \ell \geq q \quad (2.84)$$

et

$$\lambda_q \geq \left(1 + \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_q \tilde{\mathbf{P}}_q^T \xi_j} \right) \sigma_{q+1}^2 \quad \text{pour} \quad \ell < q \quad (2.85)$$

L'interprétation de la première inégalité implique que l'étendue des variances du bruit doit être faible ce qui implique également que ces variances doivent avoir des valeurs très proches. Cependant, la deuxième condition indique que la q ème CP qui est la dernière supposée être théoriquement retenue doit avoir une variance au moins deux fois plus supérieure que celle de la $(q+1)$ ème CP.

2.5 Etude comparative des différents critères

Les différents critères présentés dans ce chapitre vont être comparés vis-à-vis de leurs efficacités et performances dans le choix de la dimension optimale du modèle ACP d'un ensemble de données simulées. Pour évaluer ces critères plusieurs enjeux sont considérés tels que le nombre de variables, le nombre d'observations et la variance du bruit de mesures.

$\hat{x}_1(k)$	$=$	$3 + \exp(\cos(\frac{k}{15\pi}))$
$\hat{x}_2(k)$	$=$	$\cos(\frac{1}{2\pi k}) \sin(\frac{k}{2\pi})$
$\hat{x}_3(k)$	$=$	$\arctan(50\pi k) \log(1 + \hat{x}_2(k)^2)$
$\hat{x}_4(k)$	$=$	$\hat{x}_1(k) + 3\hat{x}_2(k)$
$\hat{x}_5(k)$	$=$	$\hat{x}_1(k) - \hat{x}_2(k)$
$\hat{x}_6(k)$	$=$	$\hat{x}_1(k) + \hat{x}_3(k)$
$\hat{x}_7(k)$	$=$	$\hat{x}_2(k) + 3\hat{x}_3(k)$
$\hat{x}_8(k)$	$=$	$\frac{10}{\pi} \arctan(\tan(\frac{\pi}{200}(k - 100)))$
$\hat{x}_9(k)$	$=$	$10 \cos(7\pi k)$
$\hat{x}_{10}(k)$	$=$	$2\hat{x}_8(k) + \hat{x}_9(k)$
$\hat{x}_{11}(k)$	$=$	$-2\hat{x}_8(k) + 3\hat{x}_9(k)$
$\hat{x}_{12}(k)$	$=$	$\hat{x}_2(k) + \hat{x}_8(k)$
$\hat{x}_{13}(k)$	$=$	$(2 + \cos(0.2\pi k))^{-1}$
$\hat{x}_{14}(k)$	$=$	$\frac{40}{\pi} \cos(7\pi k) \arctan(\tan(\frac{9\pi}{200}(k - 900)))$
$\hat{x}_{15}(k)$	$=$	$\text{sgn}(\sin(0.007\pi k))$

TABLE 2.2 – Expressions analytiques des variables simulées

2.5.1 Présentation et interprétation de l'exemple simulé

L'exemple de simulation comporte différents ensembles de variables. Nous considérons un jeu de données qui fait apparaître des relations de redondance analytiques linéaires et non linéaires ainsi que des variables indépendantes. Les relations non linéaires entre quelques variables ne peuvent pas être exprimées dans un contexte d'une ACP linéaire. Par conséquent, ces variables sont linéairement indépendantes.

Notons par $\hat{\mathbf{x}}(k) = [\hat{x}_1(k), \dots, \hat{x}_{15}(k)]^T \in \mathbb{R}^{15}$ un vecteur de données composé des mesures non bruitées prélevées au k ème instant d'un ensemble de 15 variables. A titre d'exemple, $\hat{x}_j(k)$ représente la mesure non bruitée de la j ème variable au k ème instant. En absence de bruit, les mesures des variables sont générées par les expressions analytiques données dans le tableau 2.2.

L'interprétation théorique des équations du tableau 2.2 nous permet de déduire que les variables \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 , \hat{x}_8 et \hat{x}_9 ne sont pas corrélées. Par contre, elles sont corrélées avec d'autres variables. Cependant, les variables \hat{x}_{13} , \hat{x}_{14} et \hat{x}_{15} sont linéairement indépendantes et/ou quasi-indépendantes du reste des variables et entre elles. Afin de mieux interpréter ces relations de dépendance, nous avons proposé d'investiguer les valeurs propres des matrices de corrélation de quatre principales bases de données sans bruit de mesures. En considérant des mesures normalisées, les matrices de corrélation de ces quatre groupes de variables à étudier sont notées de la manière suivante :

$$\left(\overset{\circ}{\Sigma}\right)_{\mathcal{A}} = \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^T \} \quad \text{où, à l'instant } k \quad \hat{\mathbf{x}}(k) = [\hat{x}_1(k), \dots, \hat{x}_{12}(k)]^T \in \mathbb{R}^{12} \quad (2.86)$$

$$\left(\overset{\circ}{\Sigma}\right)_{\mathcal{B}} = \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^T \} \quad \text{où, à l'instant } k \quad \hat{\mathbf{x}}(k) = [\hat{x}_1(k), \dots, \hat{x}_{13}(k)]^T \in \mathbb{R}^{13} \quad (2.87)$$

$$\left(\overset{\circ}{\Sigma}\right)_{\mathcal{C}} = \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^T \} \quad \text{où, à l'instant } k \quad \hat{\mathbf{x}}(k) = [\hat{x}_1(k), \dots, \hat{x}_{14}(k)]^T \in \mathbb{R}^{14} \quad (2.88)$$

$$\left(\overset{\circ}{\Sigma}\right)_{\mathcal{D}} = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{x}} \overset{\circ}{\mathbf{x}}^T \right\} \quad \text{où, à l'instant } k \quad \overset{\circ}{\mathbf{x}}(k) = [\overset{\circ}{x}_1(k), \dots, \overset{\circ}{x}_{15}(k)]^T \in \mathbb{R}^{15} \quad (2.89)$$

Le premier ensemble de données noté \mathcal{A} est composé des 12 premières variables du tableau 2.2. Théoriquement, ce groupe présente 5 variables linéairement non corrélées. Cela indique l'existence de 5 valeurs propres non nulles. Cette déduction est bien confirmée par les résultats donnés dans la deuxième colonne du tableau 2.3. L'addition de la treizième variable à celles de l'ensemble \mathcal{A} , permettra l'obtention d'un deuxième groupe de variables \mathcal{B} . La variable ajoutée est linéairement indépendante de toutes les variables. Théoriquement, elle représente toute seule une CP en gardant sa variance originelle qui vaut l'unité puisque les mesures sont normalisées. La troisième colonne du tableau 2.3 montre que la valeur propre $\overset{\circ}{\lambda}_6$ est celle qui est associée à la variable indépendante $\overset{\circ}{x}_{13}$. Ainsi, l'indépendance d'une telle variable se manifeste par l'insensibilité des autres valeurs propres à sa présence car elles sont inchangées. Cette variable indépendante constitue une CP ayant une variance moins faible qu'aux variances des autres CPs. Le groupe \mathcal{B} dispose alors de 6 valeurs propres non nulles.

Le troisième ensemble \mathcal{C} est composé des quatorze premières variables. Cet ensemble représente celui de \mathcal{B} auquel on a ajouté la variable $\overset{\circ}{x}_{14}$. En absence du bruit de mesures, l'ajout d'une telle variable à l'ensemble \mathcal{B} a légèrement modifié trois valeurs propres parmi les anciennes tout en produisant une nouvelle valeur propre $\overset{\circ}{\lambda}_7$ proche de l'unité. L'interprétation de la quatrième colonne du tableau 2.3 nous mène à conclure que la variable $\overset{\circ}{x}_{14}$ est très légèrement corrélée avec $\overset{\circ}{x}_{13}$ ainsi qu'avec d'autres variables difficilement identifiables. En effet, les seules valeurs propres qui ont été perturbées par la présence de $\overset{\circ}{x}_{14}$ sont $\overset{\circ}{\lambda}_6$ qui correspond à la variable $\overset{\circ}{x}_{13}$ ainsi que $\overset{\circ}{\lambda}_2$ et $\overset{\circ}{\lambda}_3$. Par ailleurs, cette perturbation peut être considérée très négligeable puisque $\overset{\circ}{\lambda}_6$ et $\overset{\circ}{\lambda}_7$ sont toutes les deux très proches de l'unité. En conséquence, $\overset{\circ}{x}_{13}$ et $\overset{\circ}{x}_{14}$ sont linéairement quasi-indépendantes voire indépendantes entre elles ainsi qu'aux autres variables. Notamment, l'ensemble \mathcal{C} présente 7 valeurs propres non nulles.

Le quatrième groupe de données, noté \mathcal{D} , est constitué de toutes les variables du tableau 2.2. D'après la cinquième colonne de ce tableau, on peut déduire que la variable ajoutée $\overset{\circ}{x}_{15}$ est indépendante puisque sa présence n'a aucun effet sur le reste des variables. En effet, elle a produit une valeur propre égale à l'unité, en même temps les autres anciennes valeurs propres n'ont subi aucun changement. Ce dernier groupe de variables dispose donc de 8 CPs associées aux valeurs propres non nulles.

Dans la pratique, les mesures sont entachées de bruit. Pour cette raison, des bruits *i.i.d.* de moyennes nulles et de variances identiques générées selon trois différents cas ont été superposés aux variables du tableau 2.2.

Selon le principe d'utilisation des critères étudiés dans ce chapitre, nous avons distingué deux principales familles. La première représente des critères qui se réfèrent à des seuils pour définir le nombre optimal des CPs. En revanche, la deuxième catégorie est constituée des critères dont la minimisation par rapport au nombre des CPs peut indiquer la dimension adéquate du modèle ACP.

Le premier cas correspond à la superposition d'un bruit *i.i.d.* de faible variance ($\sigma^2 = 0.002$) largement inférieure aux variances des variables originelles. Naturellement, les relations linéaires entre les variables ne sont pas trop perturbées. Ainsi, les nombres opti-

	Ensemble \mathcal{A}	Ensemble \mathcal{B}	Ensemble \mathcal{C}	Ensemble \mathcal{D}
	$(\hat{\Sigma})_{\mathcal{A}}$	$(\hat{\Sigma})_{\mathcal{B}}$	$(\hat{\Sigma})_{\mathcal{C}}$	$(\hat{\Sigma})_{\mathcal{D}}$
$\hat{\lambda}_1$	2.92	2.92	2.92	2.92
$\hat{\lambda}_2$	2.77	2.77	2.78	2.78
$\hat{\lambda}_3$	2.69	2.69	2.70	2.70
$\hat{\lambda}_4$	2.10	2.10	2.10	2.10
$\hat{\lambda}_5$	1.51	1.51	1.51	1.51
$\hat{\lambda}_6$	0	1	1.08	1.08
$\hat{\lambda}_7$	0	0	0.90	1
$\hat{\lambda}_8$	0	0	0	0.90
$\hat{\lambda}_9$	0	0	0	0
$\hat{\lambda}_{10}$	0	0	0	0
$\hat{\lambda}_{11}$	0	0	0	0
$\hat{\lambda}_{12}$	0	0	0	0
$\hat{\lambda}_{13}$	✓	0	0	0
$\hat{\lambda}_{14}$	✓	✓	0	0
$\hat{\lambda}_{15}$	✓	✓	✓	0

TABLE 2.3 – Valeurs propres des matrices de corrélation des quatre ensembles de variables en absence du bruit de mesures et pour $N = 1500$ observations

maux des CPs qui constituent les modèles ACP dans chaque ensemble étudié de variables, doivent correspondre aux nombres des valeurs propres non nulles du tableau 2.3.

Les courbes des critères étudiés pour la sélection du nombre des CPs dans les ensembles de variables \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} dont chacun est constitué de 1500 observations, sont illustrées respectivement par les figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4. On note que les critères **AIC**, **MDL**, **IE** et **VNR** sont exprimées en coordonnées semi-logarithmique afin que leurs courbes soient mieux lisibles. Notamment, une majorité des critères étudiés est basée sur des données initialement normalisées donc en utilisant les valeurs propres des matrices de corrélation. Néanmoins, les critères **AIC**, **MDL** et **IE** utilisent des données non réduites puisqu'ils ont été définis valables uniquement avec les valeurs propres des matrices de covariance.

2.5.2 Interprétations des critères basés sur des seuils

Pour le premier cas de cette étude qui correspond à des variables entachées d'un bruit de faible variance, les nombres optimaux théoriques des CPs dans les ensembles \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} sont respectivement 5, 6, 7 et 8 CPs. On observe clairement dans toutes les figures (2.1, 2.2, 2.3 et 2.4) que les critères **AC**, **KG**, **PCV** et **PVR** ne peuvent en aucun cas assurer d'une façon précise et objective les modèles optimaux.

En effet, le critère **AC** montre que la deuxième CP possède la plus faible valeur d'autocorrélation. En outre, une telle valeur est très inférieure au seuil indiqué. Néanmoins, quelques auteurs suggèrent parfois un ajustement d'un tel seuil afin qu'il soit adaptable au critère. Il est bien évident qu'aucun ajustement ne peut apporter d'avantage puisque la CP en question présente la plus faible valeur d'autocorrélation. L'inconvénient de ce critère se résume dans le fait qu'une CP ayant une variance importante peut correspondre malheureusement à une faible valeur d'autocorrélation.

Le critère **KG** a correctement indiqué le nombre optimal des CPs uniquement dans

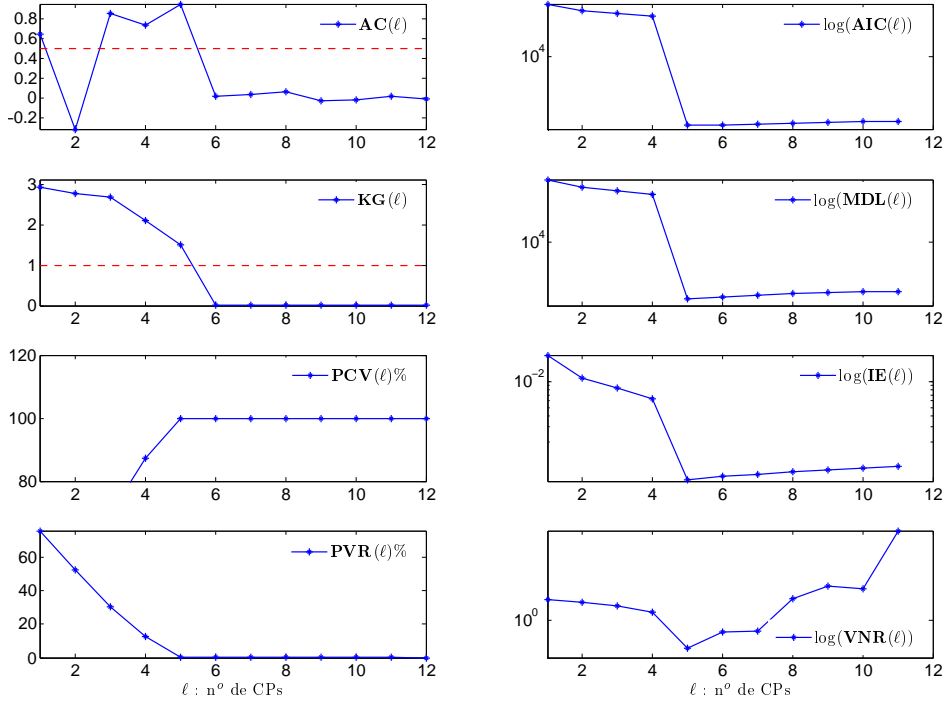


FIGURE 2.1 – Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{A} dont les variables sont entachées par un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.002$

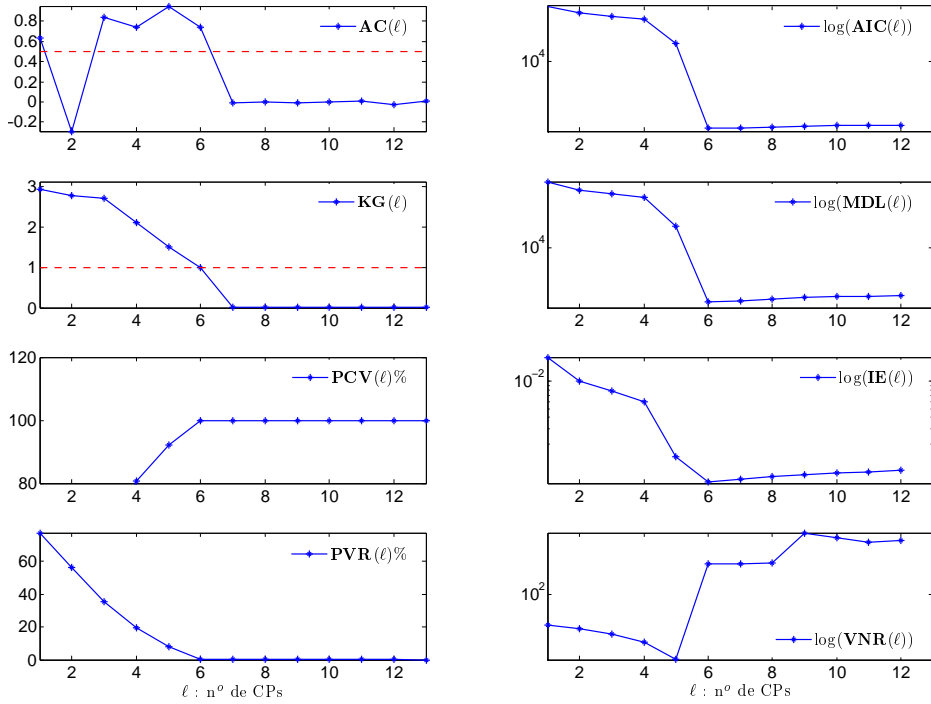


FIGURE 2.2 – Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{B} dont les variables sont entachées par un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.002$

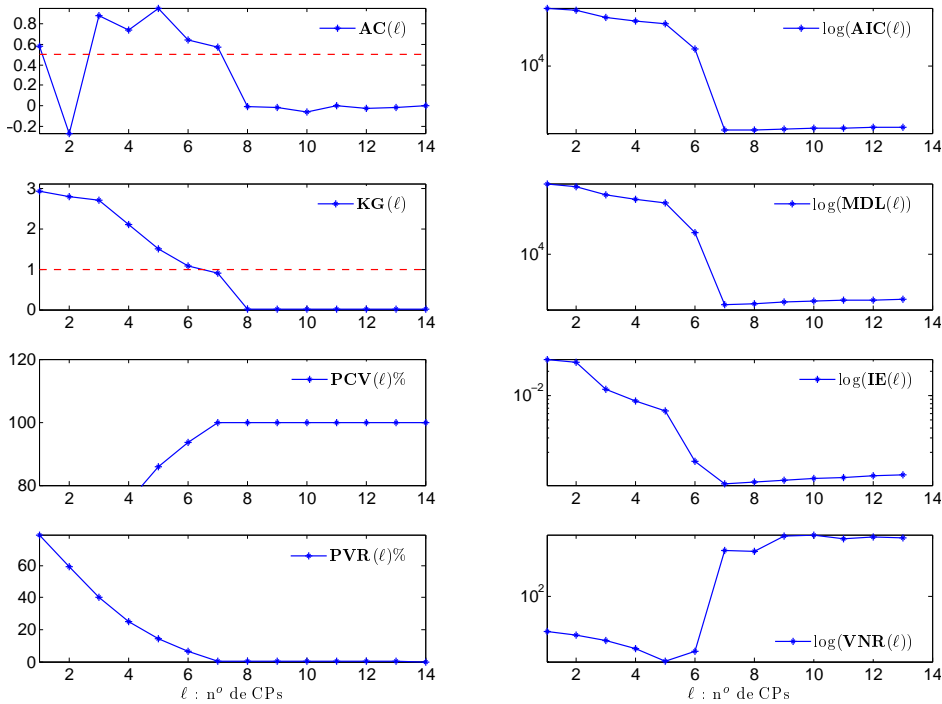


FIGURE 2.3 – Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{C} dont les variables sont entachées par un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.002$

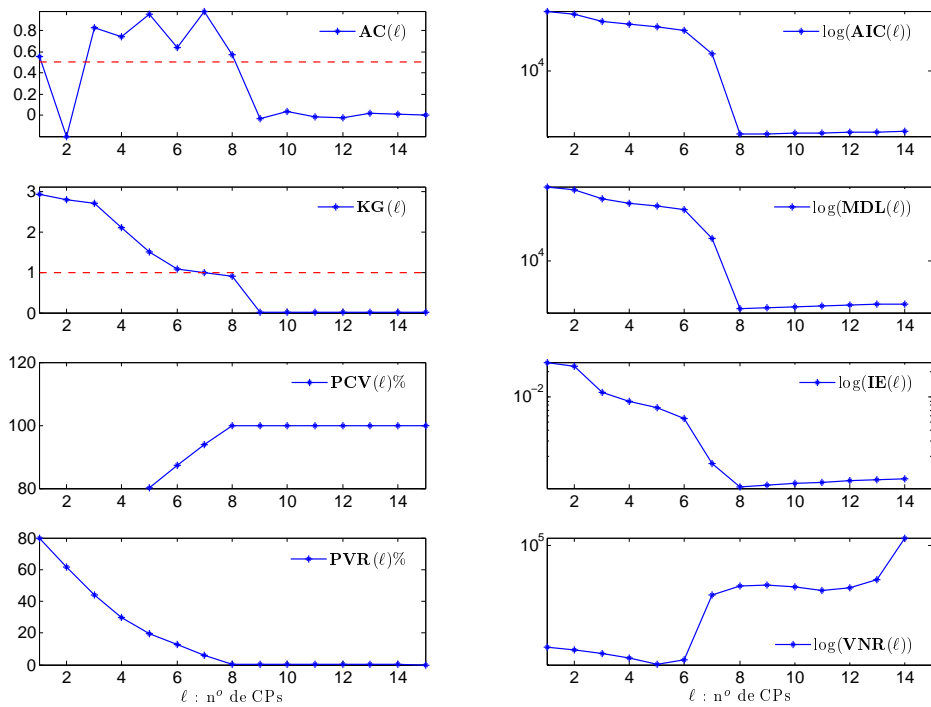


FIGURE 2.4 – Allures des critères de sélection pour l'ensemble \mathcal{D} dont les variables sont entachées par un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.002$

l'ensemble \mathcal{A} . Cependant, sa performance de sélection a été dégradée dans le reste des ensembles en manquant toujours une ou deux CPs par rapport aux nombres théoriques prévus. Cette limitation s'explique par l'existence des variables quasi-indépendantes \hat{x}_{13} et \hat{x}_{14} dans les ensembles \mathcal{C} et \mathcal{D} . Ces deux variables ont produit deux valeurs propres qui sont légèrement supérieure et inférieure à l'unité. En ajoutant un bruit, l'une des deux valeurs propres n'a pas franchi le seuil de l'unité. En effet, le critère **KG** ignore souvent les CPs qui correspondent aux variables indépendantes et plus particulièrement quasi-indépendantes dans le cas de données normalisées. En considérant des matrices de covariance, une variable indépendante ne peut être retenue par le critère **KG** que si sa variance est supérieure à la moyenne arithmétique de toutes les valeurs propres. Cela explique qu'une telle variable peut être retenue dans des cas et écartée dans d'autres.

En essayant d'expliquer une variabilité généralement supérieure à 80% de la variance totale, le critère **PCV** montre une diversité de choix qui se complique proportionnellement au nombre des variables considérées. En effet, il peut exister dans l'intervalle [80%, 99%] plus qu'une CP qui peut satisfaire la contrainte. En plus, cette situation est très confrontée lorsque les valeurs propres significatives sont trop proches les unes des autres. Par conséquent, la décision devient difficile voire même très subjective.

Le principe de l'utilisation du critère **PVR** se résume dans la recherche du coude ou du point d'inflexion. D'après les figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4, on observe très nettement les points d'inflexion qui correspondent correctement aux nombres théoriques optimaux des CPs dans chaque ensemble de variables. Cependant, et selon le principe conventionné de l'utilisation de ce critère, on ne retient que les valeurs qui se trouvent à gauche du point d'inflexion. De cette manière, on remarque l'existence en permanence d'une CP manquante dans les modèles sélectionnés. Par conséquent, la meilleure solution semble d'en compter également les points d'inflexion. En revanche, cette situation qui montre clairement les points d'inflexion est très particulière pour deux raisons principales. Premièrement, la faiblesse de la variance du bruit considéré a rendu les valeurs propres significatives assez distinctes des autres. Deuxièmement, le nombre des variables étudiées n'est pas assez important. Si ces deux arguments ne sont pas vérifiés, la courbe du critère **PVR** sera caractérisée par une lente décroissance. Par conséquent, on peut se confronter à des situations où le point d'inflexion est quasiment inexistant.

2.5.3 Interprétations des critères minimisés

La deuxième catégorie est constituée des critères **AIC**, **MDL**, **IE** et **VNR**. Leurs courbes pour le cas des données entachées par un bruit *i.i.d.* de variance identique assez faible sont illustrées dans les deuxièmes colonnes des figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4. L'avantage dans l'utilisation de ces critères se manifeste dans l'objectivité des choix puisqu'ils se basent sur leurs minima afin d'en définir un nombre optimal des CPs. En revanche, il reste à évaluer la consistance de leurs performances.

Afin d'approfondir l'étude comparative entre ces quatre critères, nous avons réalisé trois jeux de données pour chacun des ensembles \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} . Chaque jeu représente une matrice de données composé de N observations et correspond à une variance particulière du bruit *i.i.d.* Ainsi, les valeurs de ces variances sont respectivement $\sigma^2 = 0.002$, $\sigma^2 = 0.2$ puis $\sigma^2 = 0.5$. Puisque le bruit représente des variables aléatoires, une seule réalisation

peut ne pas exprimer continuellement le même minimum pour chaque critère. Pour cette raison, chaque jeu de données a été simulé 1500 fois afin d'exprimer en pourcentage le nombre des CPs retenues par chaque critère.

Le tableau 2.4 illustre les pourcentages des CPs retenues par les critères considérés pour des jeux de données dont chacun est composé de $N = 1500$ observations. En rejoignant les remarques données par Wax et Kailath (1985), ce tableau prouve que le critère **AIC** surestime souvent le nombre des CPs. Pour un bruit *i.i.d.* de faible variance ($\sigma^2 = 0.002$), le minimum d'un tel critère correspond dans 76.80%, 74.33%, 78.53% et 75.26% des réalisations à 5, 6, 7 et 8 CPs respectivement dans les ensembles \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} . Malgré la légère variance du bruit considéré, ce critère a retenu dans approximativement 25% des cas des nombres de CPs supérieures à ceux nécessaires. Par conséquent, son inconvénient se manifeste dans la surestimation de la structure du modèle. L'augmentation de la variance du bruit modifie les relations entre les variables en causant certainement l'apparition de nouvelles variables indépendantes. A ce stade, il est difficile de connaître les nombres optimaux de CPs dans les jeux de données qui correspondent aux deux autres variances du bruit. Cependant, et d'après les pourcentages exprimés dans le tableau 2.4, le comportement du critère **AIC** est toujours fluctuant.

D'après le même tableau, nous remarquons que le critère **VNR** présente avec 100% des réalisations un minimum pour 5 CPs dans les ensembles \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} qui correspondent aux deux premiers cas des variances du bruit qui sont respectivement $\sigma^2 = 0.002$ et $\sigma^2 = 0.2$. En revanche, ce critère indique avec plus de 97% un nombre de 4 CPs dans tous les ensembles des variables en considérant un bruit de variance plus forte $\sigma^2 = 0.5$.

Puisque le premier cas présente des données entachées par un bruit de faible variance, il peut être considéré comme une référence pour l'évaluation des critères étudiés car on sait *a priori* les nombres optimaux des CPs dans chaque ensemble. Dans ce cas, le critère **VNR** a défini correctement le nombre optimal des CPs uniquement dans l'ensemble \mathcal{A} . En investiguant la transition réalisée entre les ensembles étudiés, nous remarquons l'existence d'une variable indépendante ou quasi-indépendante qui s'ajoute à chaque transition d'un ensemble à l'autre dans le sens de \mathcal{A} vers \mathcal{D} . Notamment, les variables indépendantes conservent leurs indépendances quelle que soit la valeur de la variance du bruit *i.i.d.* En considérant cette propriété ainsi que les résultats exprimés par le tableau 2.4, on peut déduire que le critère **VNR** ne prend pas en compte ce type des variables. Cette déduction a été illustrée à travers un exemple simulé par Mnassri et al. (2010a). Néanmoins, elle n'a pas été prouvée ou montrée théoriquement dans la littérature. Dans le cadre de cette thèse, nous proposons dans l'annexe A une démonstration théorique prouvant la limitation du critère **VNR** dans la sélection des CPs en présence des variables indépendantes et quasi-indépendantes.

Une telle démonstration justifie les pourcentages donnés par ce critère dans le tableau 2.4 lors du premier cas de la variance du bruit. En augmentant cette variance ($\sigma^2 = 0.2$), nous remarquons que le critère **VNR** maintient les mêmes résultats. Toutefois, l'augmentation d'une telle variance peut causer l'apparition de variables indépendantes. Originellement, l'ensemble \mathcal{A} ne contient pas ce type de variables. Si les résultats de ce critère sont inchangés en faisant varier la variance du bruit ($\sigma^2 = 0.2$), cela ne peut pas nier la possibilité de leur apparition dans \mathcal{A} puisqu'un tel critère est prouvé insensible à leur présence.

Critère :	Ensemble \mathcal{A}				Ensemble \mathcal{B}				Ensemble \mathcal{C}				Ensemble \mathcal{D}			
	AIC	MDL	IE	VNR	AIC	MDL	IE	VNR	AIC	MDL	IE	VNR	AIC	MDL	IE	VNR
Bruit <i>i.i.d.</i> :																
$\sigma^2 = 0.002$																
5 CPs (%)	76.80	100	100	100				100				100				100
6 CPs (%)	18.40				74.33	100	100									
7 CPs (%)	03.93				20.26				78.53	100	100					
8 CPs (%)	00.60				04.53				16.46				75.26	100	100	
9 CPs (%)	00.13				00.53				03.46				19.93			
10 CPs (%)	00.13				00.26				01.00				03.66			
Bruit <i>i.i.d.</i> :																
$\sigma^2 = 0.2$																
5 CPs (%)	77.73	100	100	100	00.33	79.60	100	100				100				100
6 CPs (%)	17.80				76.73	20.40			00.33	79.06	100					
7 CPs (%)	03.06				17.80				76.00	20.93			00.20	79.53	100	
8 CPs (%)	00.80				03.60				19.53				78.06	20.46		
9 CPs (%)	00.46				01.40				03.20				17.40			
10 CPs (%)	00.13				00.13				00.73				03.40			
Bruit <i>i.i.d.</i> :																
$\sigma^2 = 0.5$																
4 CPs (%)				97.20				97.66				98.20				98.20
5 CPs (%)	75.73	100	100	02.80	47.00	100	100	02.33				01.80				01.80
6 CPs (%)	19.40				42.13				45.80	100	100					
7 CPs (%)	03.53				08.53				41.86				44.93	100	100	
8 CPs (%)	00.80				01.86				10.00				42.46			
9 CPs (%)	00.33				00.46				01.80				10.40			
10 CPs (%)									00.53				01.86			

TABLE 2.4 – Pourcentage, par rapport à 1500 réalisations, des nombres de CPs retenues dans les ensembles des données par les critères minimisés ($N = 1500$ observations générées selon trois différents cas de bruit *i.i.d.*)

	Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.2$	Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.5$	
	$\ell = 5$ CPs	$\ell = 4$ CPs	$\ell = 5$ CPs
	$\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j$	$\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j$	$\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j$
$j = 1$	0.593	0.653	0.604
$j = 2$	0.611	0.706	0.628
$j = 3$	0.398	0.965	0.362
$j = 4$	0.575	0.674	0.584
$j = 5$	0.629	0.622	0.622
$j = 6$	0.624	0.622	0.616
$j = 7$	0.579	0.760	0.593
$j = 8$	0.544	0.548	0.544
$j = 9$	0.628	0.629	0.628
$j = 10$	0.640	0.642	0.642
$j = 11$	0.611	0.611	0.610
$j = 12$	0.563	0.562	0.562

TABLE 2.5 – Coefficients diagonaux de la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ de l'ensemble \mathcal{A} et pour deux différentes variances de bruit *i.i.d.*

D'après l'expression du critère **VNR** ainsi que la démonstration de l'annexe A, les coefficients diagonaux ($\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j$ avec $j = \{1, \dots, m\}$) de la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ peuvent nous aider dans l'identification des variables indépendantes et quasi-indépendantes. Par ailleurs, nous notons que cette technique ne garantit pas l'objectif désiré. Notamment, ces variables se transforment en des CPs de variances hiérarchiquement moins importantes que celles des premières CPs qui représentent les principales sources de corrélation. Ainsi, elles contribuent très faiblement dans les vecteurs propres associés aux premières CPs. Cela implique que les coefficients diagonaux qui leur correspondent dans $\tilde{\mathbf{C}}$ sont très proches de l'unité. En investiguant le tableau 2.5, la colonne qui correspond au cas d'un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.2$ n'exprime pas de particularité intéressante dans les coefficients diagonaux de $\tilde{\mathbf{C}}$. On peut ainsi déduire qu'avec une telle variance du bruit, l'ensemble \mathcal{A} ne présente pas de variables indépendantes.

Dans le troisième cas qui correspond à des données entachées par un bruit *i.i.d.* de variance plus élevée ($\sigma^2 = 0.5$), les pourcentages indiquent que le critère **VNR** a manqué une CP. Ce résultat implique certainement qu'une variable qui représente une source de corrélation s'est transformée avec l'effet du bruit en une variable indépendante ou quasi-indépendante. Par conséquent, l'étendue de cette transformation peut toucher d'autres variables en les rendant également indépendantes. Les variables touchées sont uniquement celles qui dépendent de la source disparue. Ainsi, la propriété du critère **VNR** garantit l'apparition d'au moins une variable indépendante dans l'ensemble \mathcal{A} avec un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.5$. D'après l'avant dernière colonne du tableau 2.5, les éléments diagonaux de la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ calculée à base des 4 CPs retenues par le critère **VNR** montre que la troisième variable dispose d'un coefficient égale à 0.965. Par conséquent, cette variable est devenue quasi-indépendante sous l'effet du bruit. Nous rappelons ainsi qu'elle a été une source de corrélation. Malgré sa transformation, les autres variables n'ont pas été influencées car leurs coefficients dans $\tilde{\mathbf{C}}$ calculée à base de 5 CPs ne présentent pas des valeurs proches de l'unité (dernière colonne du tableau 2.5).

Cette analyse nous permet de déduire les nombres optimaux théoriques des CPs sup-

posées être retenues dans les ensembles étudiés selon les différentes variances du bruit. Indépendamment des critères utilisés, les ensembles de variables \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} disposent respectivement de 5, 6, 7 et 8 CPs dans les trois différents cas du bruit *i.i.d.*

D'après le tableau 2.4, le critère **IE** retient avec une certitude de 100% un nombre approprié de CPs pour chaque ensemble de variables et dans les différents cas du bruit. En effet, il a correctement défini les nombres optimaux des CPs pour tous les ensembles de variables durant le premier cas qui correspond à un du bruit de faible variance. Exceptionnellement, ce critère a manqué une CP dans les ensembles \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} pour les deux autres cas où la variance du bruit est plus élevée. Plus particulièrement, la CP manquée se déclare dans l'ensemble \mathcal{B} entaché d'un bruit de variance $\sigma^2 = 0.2$. En absence de ce dernier, nous rappelons que l'ensemble \mathcal{B} se distingue par rapport à \mathcal{A} par la variable indépendante \hat{x}_{13} (voir tableaux 2.2 et 2.3). Puisque ce critère a convenablement déterminé le nombre des CPs dans l'ensemble \mathcal{A} avec le même bruit, la CP manquée doit nécessairement correspondre à cette variable indépendante \hat{x}_{13} . En s'appuyant sur cette déduction, nous nous interrogeons alors sur la raison pour laquelle le critère **IE** a retenu les autres variables indépendantes dans le reste des ensembles.

Nous notons que Malinowski (1977) a montré qu'un tel critère est monotone croissant en ℓ en se limitant à l'intervalle $[q, m - 1]$ où q désigne le nombre théorique des CPs supposées être retenues. Cependant, cela n'implique pas nécessairement que le minimum de ce critère correspond à q CPs pour toutes valeurs de $\ell \in [1, m - 1]$. Pour cette raison, nous avons établi dans l'annexe B une condition nécessaire et suffisante garantissant le minimum de ce critère à q CPs. Théoriquement, le critère **IE** ne surestime pas la dimension du modèle. Par contre, il peut abandonner quelques CPs dont les valeurs propres en absence du bruit de mesures ne satisfont pas la condition établie (annexe B).

Avec des données non réduites, la variable indépendante \hat{x}_{13} abandonnée par ce critère dispose en l'absence du bruit d'une variance de 0.25. Ainsi, il a été supposé que $q = 6$ CPs dans l'ensemble \mathcal{B} entaché d'un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.2$. En considérant ces paramètres, nous pouvons prouver que la variance de la variable abandonnée ne satisfait pas la condition établie par l'inégalité (B.6) dans l'annexe B. De la même manière, nous pouvons vérifier également que cette variable n'est plus en mesure d'être retenue par le critère **IE** non seulement dans l'ensemble \mathcal{B} mais également dans \mathcal{C} et \mathcal{D} pour les deux cas des variances du bruit ($\sigma^2 = 0.2$ et $\sigma^2 = 0.5$).

Puisque le critère **IE** ne surestime pas le nombre des CPs, cela justifie notre raisonnement par l'apparition d'une variable indépendante qui n'a pas pu être retenue par le critère **VNR** dans l'ensemble \mathcal{A} contenant un bruit de variance $\sigma^2 = 0.5$.

Dans le premier cas qui correspond à un bruit *i.i.d.* de faible variance ($\sigma^2 = 0.002$), le critère **MDL** exprime dans 100% des réalisations les nombres corrects de CPs pour tous les ensembles de données (tableau 2.4). L'investigation du deuxième cas, caractérisé par un bruit de variance $\sigma^2 = 0.2$, montre que ce critère a défini convenablement le nombre théorique des CPs uniquement dans l'ensemble \mathcal{A} . Dans le reste des ensembles, il a exprimé avec 79% des nombres manquant une CP par rapport aux nombres théoriques prévus. Dans le troisième cas du bruit, le critère a totalement manqué une CP dans les ensembles \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} . En comparant les résultats de ce critère avec ceux donnés par **IE**, nous remarquons que la CP non retenue par **MDL** est également liée à la variable indépendante \hat{x}_{13} .

Critère :	Ensemble \mathcal{A}				Ensemble \mathcal{B}				Ensemble \mathcal{C}				Ensemble \mathcal{D}			
	AIC	MDL	IE	VNR	AIC	MDL	IE	VNR	AIC	MDL	IE	VNR	AIC	MDL	IE	VNR
Bruit <i>i.i.d.</i> :																
$\sigma^2 = 0.002$																
5 CPs (%)	76.66	100	100	100				100				100				100
6 CPs (%)	18.53				76.93	100	100									
7 CPs (%)	03.93				19.20				79.00	100	100					
8 CPs (%)	00.60				03.06				17.26				77.73	100	100	
9 CPs (%)	00.13				00.73				03.20				17.13			
10 CPs (%)	00.13								00.40				03.73			
Bruit <i>i.i.d.</i> :																
$\sigma^2 = 0.2$																
5 CPs (%)	78.40	100	100	100			100	100				100				100
6 CPs (%)	18.06				77.46	100					100					
7 CPs (%)	02.93				18.33				79.00	100						100
8 CPs (%)	00.40				03.06				16.93				74.00	100		
9 CPs (%)	00.13				00.86				03.06				21.06			
10 CPs (%)	00.06				00.13				00.80				03.86			
Bruit <i>i.i.d.</i> :																
$\sigma^2 = 0.5$																
4 CPs (%)				100				100				100				100
5 CPs (%)	74.13	100	100		01.93	99.40	100									
6 CPs (%)	20.46				75.86	00.60			01.60	99.40	100					
7 CPs (%)	04.13				17.80				77.60	00.60			02.06	99.06	100	
8 CPs (%)	01.13				03.66				15.93				76.53	00.93		
9 CPs (%)	00.13				00.60				03.80				17.40			
10 CPs (%)					00.13				00.86				02.86			

TABLE 2.6 – Pourcentage, par rapport à 1500 réalisations, des nombres de CPs retenues dans les ensembles des données par les critères minimisés ($N = 6000$ observations générées selon trois différents cas de bruit *i.i.d.*)

	Ensemble \mathcal{A}	Ensemble \mathcal{B}	Ensemble \mathcal{C}	Ensemble \mathcal{D}
Critère :	MDL	MDL	MDL	MDL
Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.002$				
5 CPs (%)	100			
6 CPs (%)		100		
7 CPs (%)			100	
8 CPs (%)				100
Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.2$				
5 CPs (%)	100			
6 CPs (%)		100		
7 CPs (%)			100	
8 CPs (%)				100
Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.5$				
5 CPs (%)	100	01.46		
6 CPs (%)		98.53	01.53	
7 CPs (%)			98.46	02.00
8 CPs (%)				98.00

TABLE 2.7 – Pourcentage, par rapport à 1500 réalisations, des nombres de CPs retenues dans les ensembles des données par le critère **MDL** ($N = 26000$ observations générées selon trois différents cas de bruit *i.i.d.*)

Néanmoins, [Wax et Kailath \(1985\)](#) ont montré que le nombre des CPs sélectionnées par le critère **MDL** converge vers le nombre optimal en considérant un nombre d’observations N assez important. Dans un premier temps, nous avons reconsidéré les mêmes ensembles des variables avec les mêmes variances du bruit mais pour un nombre d’observations $N = 6000$. Ainsi, nous avons refait le calcul des pourcentages des nombres de CPs retenues par les critères étudiés (tableau 2.6). Ce calcul a été réalisé en considérant 1500 réalisations.

La comparaison des résultats du tableau 2.6 à ceux du tableau 2.4 ne montre pas d’améliorations particulières aux niveaux des sélections par les critères **AIC**, **IE** et **VNR**. Toutefois, le critère **MDL** a été remarquablement influencé par l’augmentation du nombre d’observations en assurant avec une performance de 100% le nombre adéquat des CPs dans tous les ensembles de variables entachées par un bruit de variance $\sigma^2 = 0.2$. Pour le cas d’une variance $\sigma^2 = 0.5$, ce critère manque encore la CP posant le problème du départ dans les ensembles \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} . Par contre, nous remarquons que les pourcentages de sélection ont quand même subi une très légère modification suite à l’augmentation du nombre d’observations. Malgré que ces observations soient largement suffisantes pour décrire correctement le comportement du système étudié, il semblerait encore insuffisantes pour que le critère **MDL** définisse correctement le nombre adéquat des CPs.

Dans ce cadre, nous avons augmenté le nombre d’observations à une valeur très importante $N = 26000$. Les nouveaux pourcentages obtenus pour le critère concerné sont affichés dans le tableau 2.7. D’après ce dernier, nous remarquons que le critère **MDL** converge dans 98% des réalisations vers les nombres souhaités des CPs dans le cas d’un bruit de variance $\sigma^2 = 0.5$. Pour les deux premiers cas du bruit, le critère atteint son optimal avec un nombre d’observations N moins inférieur.

Il est ainsi clair que la performance du critère **MDL** est proportionnelle au nombre d’observations. Dans la pratique, on dispose généralement d’un nombre fini d’observations. Par conséquent, l’utilisation d’un tel critère malgré son efficacité prometteuse ne garantit

pas la convergence vers le nombre convenable des CPs. Si les observations disponibles sont insuffisantes pour ce critère, ce dernier abandonne généralement les CPs qui correspondent aux variables indépendantes ou quasi-indépendantes ayant de faibles variances.

2.6 Conclusion

Le principe mathématique d'une ACP des données sans bruit de mesures nous a permis d'avoir une idée claire sur la définition d'une structure optimale d'un modèle ACP. Dans la pratique, la détermination d'une telle structure n'est pas assez simple qu'on l'imagine à cause de la présence du bruit dans les données. En se référant aux critères de choix de la structure adaptée du modèle ACP qui existent dans la littérature, nous avons choisi d'une manière non exhaustive quelques critères parmi les plus connus pour une évaluation de leur performance sur un exemple simulé. Selon le principe d'utilisation de ces critères, nous avons distingué deux principales familles.

La première présente des critères heuristiques qui se basent généralement sur des seuils pour la sélection du nombre optimal des CPs tels que l'autocorrélation (**AC**), le critère de Kaiser-Guttman (**KG**), le pourcentage cumulé de la variance (**PCV**) et le pourcentage de la variance résiduelle (**PVR**). Dans ce chapitre, ces critères ont été utilisés sur des données normalisées. Nous avons conclu à travers l'exemple de simulation qu'une décision basée sur les deux critères **PCV** et **PVR** se complique avec l'augmentation du nombre de variables étudiées ainsi que la variance du bruit. En effet, les allures des courbes représentant les valeurs propres peuvent devenir très lentes, ce qui favorise l'inexistence du point d'inflexion pour le critère **PVR**. Ceci implique également une multitude des nombres de CPs dans l'intervalle de sélection pour le critère **PCV**. Quant à la décision basée sur le critère **KG**, on constate qu'elle est discriminante car elle a éliminé les variables indépendantes et quasi-indépendantes. En ce qui concerne le critère **AC**, son inconvénient se résume principalement dans le fait qu'une CP significative peut avoir une faible valeur d'autocorrélation qui ne lui permis pas d'être retenue par un tel critère. Malgré leurs popularités, ces critères sont subjectifs et largement restreints en termes de décisions et efficacités respectivement.

La deuxième famille est constituée des critères qui se basent sur la minimisation pour déterminer la dimension du modèle ACP. Les trois premiers critères, notamment **AIC**, **MDL** et **IE** possèdent deux points communs. Premièrement, leur utilisation n'est valable qu'avec des données non réduites. Deuxièmement, le bruit de mesures est supposé être indépendant et identiquement distribué. Le quatrième critère de cette famille représente la variance non reconstruite (**VNR**). Ce dernier peut être utilisé aussi bien sur des données réduites ou non réduites. Dans le cadre d'une ACP, il est cependant préférable que les données soient exprimées dans la même échelle. Nous avons étudié le comportement du critère **VNR** en considérant des données normalisées car il est en relation directe avec les paramètres fournis par l'ACP.

Puisque les bruits de mesures représentent des variables aléatoires, une seule simulation ne permet pas de juger l'efficacité de ces critères. Pour cette raison, nous avons établi des pourcentages sur les nombres des CPs retenues par tous les critères en considérant 1500 réalisations. Ainsi, notre étude comparative a pris en compte plusieurs facteurs tels que

la nature des variables étudiées (corrélées ou indépendantes), la valeur de la variance du bruit considéré et le nombre d'observations.

Selon les résultats de simulation, le critère **AIC** surestime souvent le nombre des CPs nécessaires. L'avantage du critère **VNR** étant la considération de toutes les variables étudiées dans la même échelle. Malgré cette caractéristique, nous avons découvert que ce critère ne prend pas en compte les variables indépendantes et quasi-indépendantes même si en absence du bruit ces variables disposent des variances non nulles. Dans ce contexte, nous avons contribué par une démonstration théorique confirmant la limitation de ce critère. En effet, nous avons montré que le nombre des CPs qui correspond au minimum d'un tel critère ne change pas en ajoutant des variables indépendantes et quasi-indépendantes. Autrement dit, le critère **VNR** est insensible à la présence de ce type des variables. Ainsi, son minimum correspond au nombre des CPs uniquement pour les variables qui sont linéairement corrélées.

Dans cette étude comparative, nous avons remarqué que le critère **IE** abandonne souvent les CPs ayant de faibles variances bien qu'elles soient théoriquement supposées être retenues dans le modèle. Ce critère ne surestime pas le nombre des CPs. Dans ce contexte, nous avons étudié son expression afin de vérifier sa consistance théorique. Ainsi, nous avons établi une condition nécessaire et suffisante permettant au critère **IE** de garantir son minimum qui correspond au nombre optimal des CPs. En effet, ce critère ne retient plus la dernière CP si sa variance en l'absence du bruit est inférieure à une valeur établie par une telle condition. Alors qu'en théorie cette CP doit être retenue. En outre, cette valeur est proportionnelle au nombre des variables, ce qui présente un inconvénient majeur car cela implique que la CP en question peut être retenue dans des cas et écartées dans d'autres.

Le **MDL** semble être le critère le plus efficace. Cependant, sa performance est proportionnelle au nombre d'observations considérées. Sa sélection converge vers le nombre correct des CPs si le nombre d'observations utilisées est assez important. Dans la pratique, un système peut être suffisamment décrit par un nombre N d'observations. Ce nombre peut être insuffisant pour que le critère **MDL** exprime correctement le nombre adéquat des CPs. Dans ce cas, on ne peut pas savoir si un tel critère converge finalement vers le nombre correct des CPs. D'après les résultats de simulation, nous avons remarqué que si le nombre d'observations n'est pas suffisant, ce critère ne retient pas souvent les CPs associées aux variables indépendantes de faibles variances.

Cette étude comparative entre les critères choisis nous a permis d'illustrer leurs inconvénients et avantages. Dans ce cadre, seuls les critères **MDL** et **VNR** peuvent être considérés intéressants vis-à-vis de leur comportement et principe respectivement. Cependant, ils présentent des inconvénients rendant souvent les décisions incertaines. Pour cette raison, nous proposons dans le chapitre suivant d'autres critères utilisant le principe du celui de **VNR** et assurant les résultats obtenus par celui de **MDL** avec des conditions plus réalistes.

3

Contribution au choix d'un modèle optimal par la variance non reconstruite

Sommaire

3.1	Introduction	63
3.2	Détection et détectabilité de défauts	64
3.2.1	Détectabilité généralisée de défauts	64
3.2.1.1	Indice T^2 de Hotelling	66
3.2.1.2	Indice SPE	67
3.2.1.3	Indice SWE	68
3.2.1.4	Indice combiné	69
3.2.1.5	Indice de Mahalanobis	70
3.2.2	Influence de la modélisation sur la détectabilité de défauts	71
3.2.2.1	Effet d'une sous-estimation du modèle	71
3.2.2.2	Effet d'une surestimation du modèle	72
3.3	Différentes variances non reconstruites	73
3.3.1	Principe de la reconstruction unidimensionnelle	73
3.3.2	Variance non reconstruite généralisée	74
3.3.3	Comportements des différents critères VNR	76
3.3.3.1	VNR utilisant l'indice SPE	76
3.3.3.2	VNR utilisant l'indice SWE	76
3.3.3.3	VNR utilisant l'indice T^2 de Hotelling	77
3.3.3.4	VNR utilisant l'indice de Mahalanobis	78
3.3.3.5	VNR utilisant un indice exprimé dans le sous-espace principal	79
3.3.3.6	VNR utilisant l'indice combiné	80
3.4	Nouveaux critères VNR	81
3.4.1	VNR utilisant un nouvel indice combiné	81
3.4.2	Changement de représentation des données	83

3.4.2.1	Motivation et théorie d'une nouvelle approche ACPVI	83
3.4.2.2	VNR basée sur l'ACPVI	86
3.4.2.3	Consistance théorique du critère VNRVI	87
3.5	Résultats de simulation	89
3.6	Conclusion	93

3.1 Introduction

Les méthodes de détection et de localisation de défauts en s'appuyant sur l'ACP ont été largement utilisées pour la surveillance de processus. Le principe de la surveillance basée sur l'approche de l'ACP repose principalement sur une modélisation du comportement de processus en fonctionnement normal. Les défauts sont alors détectés en comparant le comportement observé par rapport à celui donné par le modèle ACP. En effet, la phase de détection de défauts est liée à une étape de génération de résidus ou d'indices de détection qui a pour but de générer à partir des mesures observées et d'un modèle ACP, des signaux révélateurs de la présence de défauts. A partir de l'analyse de ces indices, l'étape de détection doit alors indiquer l'existence ou non de défauts.

Dans ce cadre, quelques indices typiques pour la détection des fonctionnements anormaux ont été proposés dans la littérature (Qin, 2003). En revanche, la plupart des méthodes de diagnostic utilisent plus particulièrement l'erreur quadratique de prédiction (*squared prediction error* : *SPE*) et la statistique T^2 de Hotelling qui sont souvent connues par les statistiques Q et D respectivement (Kresta et al., 1991; Kourti et MacGregor, 1995; Dunia et al., 1996; Dunia et Qin, 1998c; Qin, 2003). On note que ces deux indices de détection jouent des rôles différents dans la stratégie de surveillance par ACP. La statistique T^2 décrit le comportement des variables du processus qui sont corrélées avec les composantes principales, tandis que la statistique *SPE* dépend de toutes les variables à surveiller. En outre, celle-ci représente un test global qui cumule les erreurs de modélisation présentes sur chaque résidu (Harkat et al., 2006). L'indice *SPE* est utilisé dans le sous-espace résiduel. Tandis que l'indice T^2 de Hotelling est utilisé dans le sous-espace principal. L'indice T_H^2 de Hawkins (Hawkins, 1974) aussi appelé *SWE* (*squared weighted error*) représente aussi les variations des données dans le sous-espace résiduel. Sa particularité par rapport à l'indice *SPE* se manifeste par une pondération des résidus par les inverses des valeurs propres résiduelles. Néanmoins, d'autres indices sensibles à l'ensemble de l'espace de représentation des données ont été également utilisés comme la distance combinée (Yue et Qin, 2001) et la distance de Mahalanobis. Dans le but d'améliorer les capacités de détection en utilisant la méthode d'ACP, un test basé sur les dernières composantes principales a été proposé par Harkat et al. (2002, 2005, 2006).

Une telle description des indices de détection nous permettra de définir dans ce chapitre de nouveaux critères de sélection du nombre optimal des CPs en se basant sur la variance non reconstruite afin de remédier aux limitations des critères comparés dans le chapitre précédent. En effet, toute procédure d'un diagnostic de défauts repose d'une manière cruciale sur la précision et l'efficacité du critère considéré. Pour cela, nous allons prouver théoriquement l'influence de la modélisation par ACP sur la détectabilité de défauts. En s'appuyant sur le principe de la variance de l'erreur de reconstruction, il s'est avéré possible d'établir une variance non reconstruite associée à chacun de ces indices de détection. Ce résultat nous a permis de proposer un critère empirique relatif à la distance combinée (Mnassri et al., 2010a). Ensuite, un nouveau critère de même type, basé sur une nouvelle statistique combinée représente notre deuxième contribution (Mnassri et al., 2010b). Ces contributions ont été également enrichies par un critère plus performant. Ce dernier est basé sur un changement de représentation de données en envisageant que d'autres données sont beaucoup mieux révélatrices d'informations que les données observées réellement.

Cela nous a permis de proposer une nouvelle théorie reposant sur une ACP de variances inversées (ACPVI) (Mnassri et al., 2010c, 2011b). Ainsi, ce troisième critère de sélection, appelé **VNRVI**, montrera une efficacité importante en remédiant au problème souvent rencontré qui est relatif à la présence des variables indépendantes et quasi-indépendantes. Les résultats de simulation valideront cette nouvelle approche.

3.2 Détection et détectabilité de défauts

Dans le cadre de l'ACP, tous les indices de détection disponibles dans la littérature se caractérisent par une forme quadratique (Yue et Qin, 2001; Qin, 2003; Alcalá et Qin, 2009, 2011). Par conséquent, les procédures de détection, isolation et diagnostic de défauts peuvent être généralisées en considérant un indicateur généralisé ou unifié.

Le succès de l'utilisation de l'ACP pour la surveillance de processus a été enrichi par le développement de certains concepts fondamentaux de performance comme la détectabilité de défauts. En effet, la détectabilité représente la capacité d'un indice donné, à détecter la présence de défauts. Dans la littérature, ce concept a été développé plus particulièrement pour l'indice *SPE* et la distance *T2* de Hotelling (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Yue et Qin, 2001; Qin, 2003). Pour cela, nous proposons une étude généralisée de détectabilité valable pour tout indice de détection ayant une forme quadratique.

3.2.1 Détectabilité généralisée de défauts

Considérons γ et Γ^2 respectivement un indice quadratique de détection et sa limite de contrôle. γ peut être n'importe quel indice de détection parmi ceux qui existent dans la littérature (voir tableau 3.1). Mathématiquement, γ représente une distance quadratique qui est égale au carré de la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x}(k)$ projeté dans un sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_\gamma = \text{span}\{\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}\}$:

$$\gamma(k) = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 = \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \mathbf{x}(k) \quad (3.1)$$

où $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ est une matrice semi-définie positive. k est le numéro de l'observation considérée.

En s'appuyant sur les travaux de Box (1954), le seuil de détection de la distance quadratique γ pour un nombre d'observations N important peut être approximé par une distribution de la forme $g_\gamma \chi_{(h_\gamma, \alpha)}^2$, où $\chi_{(h_\gamma, \alpha)}^2$ est la distribution du χ^2 avec h_γ degrés de liberté et un seuil de signification α . On note que le niveau de confiance est égale à $(1 - \alpha)$. En se basant sur l'indice γ , le processus est considéré en fonctionnement normal à la k ème observation si :

$$\gamma(k) \leq \Gamma^2 = g_\gamma \chi_{(h_\gamma, \alpha)}^2 \quad (3.2)$$

Les paramètres g_γ et h_γ peuvent être déterminés comme suit :

$$g_\gamma = \frac{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M})^2]}{\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}]} \quad (3.3)$$

Indice de détection	Matrice caractéristique	Limite de contrôle
γ	$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$	Γ^2
$T2$	$\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{P}}^T$	τ^2
SPE	$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T = \tilde{\mathbf{C}}$	δ^2
SWE	$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{P}}^T$	ϵ^2
φ	$\delta^{-1}\tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{P}}^T$	β^2
D	$\mathbf{P}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T = \Sigma^{-\frac{1}{2}}$	ϱ^2

TABLE 3.1 – Indices de détection

$$h_\gamma = \frac{(\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}])^2}{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M})^2]} \quad (3.4)$$

où Σ est la matrice de covariance des données de \mathbf{X} . L'expression $\text{tr}[\cdot]$ représente la trace d'une matrice carrée.

Nous rappelons que la présence d'un défaut multiple $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ dans les données a été considérée par le vecteur de mesures en défaut donné par l'équation (2.59). A partir de cette dernière et celle de (3.1), le vecteur duquel découle l'indice γ est exprimé par :

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{x}^*(k) + \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)) = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \quad (3.5)$$

Deux conditions nécessaires doivent être considérées afin que le défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ soit détectable par l'indice γ :

- i.* Sa projection dans le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ ne devrait pas être nulle, i.e. $\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \neq 0$;
- ii.* Son amplitude devrait être suffisamment large afin que l'indice de détection dépasse sa limite de contrôle, i.e. $\gamma(k) > \Gamma^2$.

Pour déterminer la condition qui garantit la détection du défaut, nous avons besoin d'exprimer la norme euclidienne du vecteur $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)$ comme suit :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\| = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \geq \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \quad (3.6)$$

Puisque \mathbf{x}^* représente un vecteur de mesures prélevées lors du fonctionnement normal, alors :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \leq \Gamma \quad (3.7)$$

La substitution de (3.7) dans (3.6) en considérant la positivité de la norme euclidienne mène à l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\| \geq \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma \geq 0 \quad (3.8)$$

Afin que le défaut soit suffisamment détectable, la contrainte $\gamma(k) > \Gamma^2$ devrait être satisfaite. On doit alors imposer que

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \geq (\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma)^2 > \Gamma^2 \quad (3.9)$$

La résolution de l'inégalité (3.9) mène au résultat suivant :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\Gamma \quad (3.10)$$

Lorsque l'inégalité précédente est satisfaite, alors la détection du défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garantie en utilisant l'indice de détection γ . Cette condition suffisante (sur l'amplitude du défaut) est valable pour tout indice de détection ayant une forme quadratique. En s'appuyant sur une telle inégalité, nous allons exprimer dans la suite la détectabilité relative à chaque indice donné dans le tableau 3.1.

3.2.1.1 Indice $T2$ de Hotelling

L'indice $T2$ de Hotelling mesure les variations des projections dans le sous-espace principal pondéré par les inverses des variances des ℓ premières CPs :

$$\begin{aligned} T2(k) &= \|\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{t}}(k)\|^2 = \hat{\mathbf{t}}^T(k) \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{t}}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) = \|\hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

En considérant un tel indice, le processus est supposé sous contrôle à la k ème observation si :

$$T2(k) \leq \tau^2 = g_{T2} \chi_{(h_{T2}, \alpha)}^2 \quad (3.12)$$

où g_{T2} et h_{T2} sont calculés respectivement, à partir de (3.3) et (3.4), comme suit :

$$g_{T2} = \frac{\text{tr}[(\sum \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)^2]}{\text{tr}[\sum \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T]} = \frac{\text{tr}[\mathbf{I}_{\ell}]}{\text{tr}[\mathbf{I}_{\ell}]} = 1 \quad (3.13)$$

$$h_{T2} = \frac{(\text{tr}[\sum \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T])^2}{\text{tr}[(\sum \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)^2]} = \frac{(\text{tr}[\mathbf{I}_{\ell}])^2}{\text{tr}[\mathbf{I}_{\ell}]} = \text{tr}[\mathbf{I}_{\ell}] = \ell \quad (3.14)$$

Si le nombre d'observations N est faible, la limite de contrôle de la statistique $T2$ de Hotelling peut être approximée par la relation suivante :

$$\tau^2 = \frac{\ell(N^2 - 1)}{N(N - \ell)} F_{(\ell, N - \ell, \alpha)} \quad (3.15)$$

où $F_{(\ell, N - \ell, \alpha)}$ représente la distribution de Fisher avec ℓ et $(N - \ell)$ degrés de liberté ainsi qu'un seuil de signification α .

Afin d'assurer la détection du défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, la condition suffisante de sa détectabilité par l'indice $T2$ de Hotelling en se référant à (3.10) est donnée par :

$$\|\hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\tau \quad (3.16)$$

Cette condition a été établie par Yue et Qin (2001). D'après (2.46) et (2.47), les mesures collectées sous des conditions de fonctionnement normal se projettent dans le sous-espace principal. Par conséquent, la performance de l'indice $T2$ de Hotelling dans la détection de

défauts peut être limitée car les variations des projections des défauts dans le sous-espace principal peuvent être masquées par les variations normales. Nous avons montré que si le choix du modèle ACP est optimal, un tel indice est dédié à la détection de défauts des variables indépendantes et quasi-indépendantes (Mnassri et al., 2010a,b, 2011b,a). Sous la contrainte d'optimalité du modèle ACP, les défauts portés par les directions de ces variables se projettent totalement dans le sous-espace principal. Ainsi, leur détection n'est possible qu'avec des indices calculés dans ce sous-espace.

3.2.1.2 Indice *SPE*

L'indice *SPE* assure la détection de défauts dans le sous-espace résiduel. Son expression, à l'instant k , est donnée par :

$$\begin{aligned} SPE(k) &= \|\tilde{\mathbf{x}}(k)\|^2 = \|\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k)\|^2 \\ &= \mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) = \|\tilde{\mathbf{t}}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

La distance *SPE* est un indicateur global qui somme les résidus sans tenir compte de leurs variances différentes. Toutefois, les résidus avec forte variance portent les erreurs de modélisation produites par l'ACP. Ainsi, ils ont plus d'effets sur la quantité *SPE* que les résidus ayant une faible variance et qui représentent réellement les relations de redondance linéaires ou quasi-linéaires. Par conséquent, l'indice *SPE* est très sensible aux erreurs de modélisation, ce qui peut entraîner de nombreuses fausses alarmes ou l'absence de la sensibilité à la détection de défauts en raison d'un seuil théorique élevé (Tharrault, 2008).

Avec un tel indice, le processus est considéré en fonctionnement normal à la k ème observation si :

$$SPE(k) \leq \delta^2 = g_{SPE} \chi_{(h_{SPE}, \alpha)}^2 \quad (3.18)$$

où g_{SPE} et h_{SPE} sont respectivement données en se basant sur les expressions généralisées (3.3) et (3.4) par :

$$g_{SPE} = \frac{\text{tr}[(\Sigma\tilde{\mathbf{C}})^2]}{\text{tr}[\Sigma\tilde{\mathbf{C}}]} = \frac{\text{tr}[\tilde{\Lambda}^2]}{\text{tr}[\tilde{\Lambda}]} = \frac{\sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a^2}{\sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a} \quad (3.19)$$

$$h_{SPE} = \frac{(\text{tr}[\Sigma\tilde{\mathbf{C}}])^2}{\text{tr}[(\Sigma\tilde{\mathbf{C}})^2]} = \frac{(\text{tr}[\tilde{\Lambda}])^2}{\text{tr}[\tilde{\Lambda}^2]} = \frac{\left(\sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a\right)^2}{\sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a^2} \quad (3.20)$$

où λ_a représente la a ème valeur propre de la matrice Σ . En posant $\theta_i = \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a^i$, nous retrouvons ainsi la formule connue dans la littérature pour le seuil de contrôle de l'indice *SPE*. Il est important de mentionner qu'il existe également une autre expression proposée par Jackson et Mudholkar (1979) pour le calcul d'une telle limite de contrôle.

Ainsi, [Nomikos et MacGregor \(1995\)](#) ont montré que les deux expressions donnent des résultats identiques.

Le défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti détectable par l'indice SPE si son amplitude calculée dans le sous-espace résiduel respecte d'après (3.10) l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{\mathbf{C}}\Xi_{\mathcal{J}}\mathbf{f}(k)\| > 2\delta \quad (3.21)$$

Nous notons également qu'une telle condition a été proposée dans des travaux antérieurs ([Dunia et Qin, 1998b,c,a](#); [Yue et Qin, 2001](#); [Qin, 2003](#)). Dans la suite, nous allons proposer les conditions suffisantes de détectabilité pour le reste des indices en se basant sur notre étude généralisée développée dans la sous-section 3.2.1.

3.2.1.3 Indice SWE

L'indice T_H^2 de Hawkins ou SWE est généralement plus sensible aux défauts ([Westerhuis et al., 2000b](#)). Il peut être défini comme l'indice SPE calculé avec des CPs résiduelles pondérées. Aussi, son expression est une implémentation symétrique de la statistique T^2 de Hotelling dans le sous-espace résiduel :

$$\begin{aligned} SWE(k) &= \|\tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{t}}(k)\|^2 = \tilde{\mathbf{t}}^T(k)\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\mathbf{t}}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k)\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^T\mathbf{x}(k) = \|\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{P}}^T\mathbf{x}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Un problème de conditionnement est considéré comme l'inconvénient d'un tel indice. En effet, le calcul numérique de cet indice peut rencontrer des erreurs lorsque les dernières valeurs propres de la matrice Σ sont très proches de zéro. Néanmoins, ce problème de conditionnement apparaît seulement en absence de bruit de mesures ([Tharrault, 2008](#)).

La présence d'erreurs de modélisation se traduit par une augmentation des variances des projections dans le sous-espace résiduel. Ainsi, les fortes variances peuvent limiter la performance de détection de défauts avec l'indice SPE . En effet, la pondération avec les valeurs propres de Σ en utilisant l'indice SWE peut être considérée comme une solution prometteuse. L'indice SWE est plus robuste pour la détection de défauts que celui du SPE ([Westerhuis et al., 2000b](#)).

Le comportement du processus à la k ème observation est considéré normal en se basant sur l'indicateur SWE si :

$$SWE(k) \leq \epsilon^2 = g_{SWE}\chi_{(h_{SWE},\alpha)}^2 \quad (3.23)$$

En se référant aux formules (3.3) et (3.4), les paramètres g_{SWE} et h_{SWE} sont respectivement exprimés comme suit :

$$g_{SWE} = \frac{\text{tr}[(\Sigma\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^T)^2]}{\text{tr}[\Sigma\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^T]} = \frac{\text{tr}[\mathbf{I}_{m-\ell}]}{\text{tr}[\mathbf{I}_{m-\ell}]} = 1 \quad (3.24)$$

$$h_{SWE} = \frac{(\text{tr}[\Sigma\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^T])^2}{\text{tr}[(\Sigma\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}^T)^2]} = \frac{(\text{tr}[\mathbf{I}_{m-\ell}])^2}{\text{tr}[\mathbf{I}_{m-\ell}]} = \text{tr}[\mathbf{I}_{m-\ell}] = m - \ell \quad (3.25)$$

où $\mathbf{I}_{m-\ell} \in \mathbb{R}^{(m-\ell) \times (m-\ell)}$ représente la matrice identité.

Lorsque le nombre d'observations N est faible, la limite de contrôle de l'indice SWE est approximée par une distribution de Fisher avec $(m - \ell)$ et $(N - m + \ell)$ degrés de liberté et un seuil de signification α :

$$\epsilon^2 = \frac{(m - \ell)(N^2 - 1)}{N(N - m + \ell)} F_{(m-\ell, N-m+\ell, \alpha)} \quad (3.26)$$

D'après (3.10), le défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti détectable par l'indice SWE si l'amplitude de sa projection dans le sous-espace résiduel pondéré satisfait l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}}\mathbf{f}(k)\| > 2\epsilon \quad (3.27)$$

3.2.1.4 Indice combiné

D'après leurs expressions, et selon l'étude pratique, les indices SPE et $T2$ de Hotelling se comportent d'une manière complémentaire. Il est ainsi possible de combiner ces deux indices en un seul afin de simplifier la tâche de détection de défauts (Yue et Qin, 2001). En réalité, l'idée de la combinaison d'indices a été initialement proposée par Raich et Çinar (1996) :

$$\mathcal{R}(k) = c \frac{SPE(k)}{\delta^2} + (1 - c) \frac{T2(k)}{\tau^2} \quad (3.28)$$

où c est une constante comprise dans l'intervalle $[0, 1]$. Dans ce cadre, les mêmes auteurs suggèrent l'unité comme un seuil de contrôle pour cet indice ce qui a lourdement limité son efficacité. En effet, cet indice peut conduire à des résultats erronés en présence d'un défaut qui peut se manifester dans la possibilité d'avoir $SPE > \delta^2$ et/ou $T2 > \tau^2$, alors que lui-même peut indiquer une situation normale. Pour cette raison, une forme quadratique connue sous le nom de la distance combinée a été proposée par Yue et Qin (2001). Une telle distance combine les statistiques SPE et $T2$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \frac{SPE(k)}{\delta^2} + \frac{T2(k)}{\tau^2} = \mathbf{x}^T(k) \left(\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{\delta^2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T}{\tau^2} \right) \mathbf{x}(k) \\ &= \|(\delta^{-1}\tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{P}}^T)\mathbf{x}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

La matrice caractéristique de cet indice est semi-définie positive. Afin d'utiliser l'indice combiné pour la détection de défauts, sa limite de contrôle est également établie en utilisant la distribution des formes quadratiques. Le processus est considéré en fonctionnement normal à l'instant k si :

$$\varphi(k) \leq \beta^2 = g_{\varphi} \chi_{(h_{\varphi}, \alpha)}^2 \quad (3.30)$$

D'après (3.3) et (3.4), les paramètres g_{φ} et h_{φ} ont respectivement les expressions suivantes :

$$g_{\varphi} = \frac{\text{tr}[(\Sigma(\delta^{-2}\tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T))^2]}{\text{tr}[\Sigma(\delta^{-2}\tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T)]} = \frac{\tau^{-4}\ell + \delta^{-4} \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a^2}{\tau^{-2}\ell + \delta^{-2} \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a} \quad (3.31)$$

$$h_\varphi = \frac{(\text{tr}[\Sigma(\delta^{-2}\tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T)])^2}{\text{tr}[(\Sigma(\delta^{-2}\tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T))^2]} = \frac{\left(\tau^{-2}\ell + \delta^{-2} \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a\right)^2}{\tau^{-4}\ell + \delta^{-4} \sum_{a=\ell+1}^m \lambda_a^2} \quad (3.32)$$

L'indice combiné permet de contrôler le processus dans l'ensemble de l'espace. D'après l'équation (3.10), le défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti détectable si son amplitude exprimée dans l'espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice caractéristique de cet indice respecte l'inégalité suivante :

$$\|(\delta^{-1}\tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{P}}^T)\Xi_{\mathcal{J}}\mathbf{f}(k)\| > 2\beta \quad (3.33)$$

3.2.1.5 Indice de Mahalanobis

La distance de Mahalanobis correspond à celle de la T^2 de Hotelling étendue sur l'ensemble de l'espace :

$$\begin{aligned} D(k) &= \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\Lambda^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^T(k)\Sigma^{-1}\mathbf{x}(k) = \|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}(k)\|^2 \\ &= \|\mathbf{P}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T\mathbf{x}(k)\|^2 = \|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{t}(k)\|^2 = \mathbf{t}^T(k)\Lambda^{-1}\mathbf{t}(k) \end{aligned} \quad (3.34)$$

En présence de bruit de mesures, la matrice Σ est généralement de rang plein. Par conséquent, elle est inversible ce qui permet d'éviter le problème de conditionnement confronté également avec l'indice SWE .

Pour un nombre d'observations N important, le processus est considéré en fonctionnement normal à l'instant k en se basant sur la distance de Mahalanobis si :

$$D(k) \leq \varrho^2 = g_D \chi_{(h_D, \alpha)}^2 \quad (3.35)$$

Par analogie avec la limite de contrôle de l'indice T^2 de Hotelling ou celle de SWE , les coefficients g_D et h_D auront respectivement les valeurs 1 et m . En se référant aux équations (3.3) et (3.4), on peut démontrer très aisément ces résultats :

$$g_D = \frac{\text{tr}[(\Sigma\Sigma^{-1})^2]}{\text{tr}[\Sigma\Sigma^{-1}]} = \frac{\text{tr}[\mathbf{I}_m]}{\text{tr}[\mathbf{I}_m]} = 1 \quad (3.36)$$

$$h_D = \frac{(\text{tr}[\Sigma\Sigma^{-1}])^2}{\text{tr}[(\Sigma\Sigma^{-1})^2]} = \frac{(\text{tr}[\mathbf{I}_m])^2}{\text{tr}[\mathbf{I}_m]} = \text{tr}[\mathbf{I}_m] = m \quad (3.37)$$

Lorsque le nombre d'observations N est faible, un tel seuil est approximé par une distribution de Fisher avec m et $(N - m)$ degrés de liberté ainsi qu'un seuil de signification α :

$$\varrho^2 = \frac{m(N^2 - 1)}{N(N - m)} F_{(m, N-m, \alpha)} \quad (3.38)$$

A partir de l'inégalité (3.10), la condition suffisante de détectabilité d'un défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ basée sur l'utilisation de la distance de Mahalanobis est donnée par :

$$\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Xi_{\mathcal{J}}\mathbf{f}(k)\| > 2\varrho \quad (3.39)$$

3.2.2 Influence de la modélisation sur la détectabilité de défauts

Bien que le thème du choix d'une structure optimale du modèle ACP ait reçu une attention considérable dans la littérature, l'objectif de l'optimalité est négligemment justifié théoriquement. Autrement dit, on n'est pas certain des conséquences d'un choix arbitraire du modèle ACP sur la démarche d'un diagnostic de défauts. Le point clé dans la construction d'un modèle ACP est de choisir un nombre adéquat de CPs afin de représenter le système de façon optimale. Si le nombre retenu est inférieur à celui requis, la représentation du processus sera incomplète. Par contre, si plus de CPs que nécessaires sont sélectionnées, le modèle ACP sera surestimé et contiendra le bruit de mesures (Valle et al., 1999). Néanmoins, ces arguments ainsi que d'autres sont difficiles à prouver mathématiquement.

Il se peut que les résultats obtenus par différents critères de choix d'un modèle ACP se diffèrent de plus ou moins d'une seule CP par rapport au cas optimal. Malgré cette faible différence, les effets peuvent avoir de lourdes conséquences, plus particulièrement dans la qualité de détection de défauts. Pour cela, nous allons montrer que ce choix doit être judicieux et peut être unique.

Puisque q représente le nombre optimal théorique des CPs, les vecteurs colonnes de la matrice $\mathcal{M}_q^{\frac{1}{2}}$ engendrent le sous-espace optimal pour l'indice quadratique γ . Notre intérêt est de savoir l'effet d'un changement de la dimension du modèle ACP sur la détectabilité d'un défaut donné. Notamment, le plus intéressant est de se baser sur des hypothèses qui sont vérifiées dans le sous-espace optimal. Ensuite, on vérifie si ces hypothèses sont encore vérifiées ou non. Pour cela, nous supposons que le défaut considéré est garanti détectable par l'indice γ exprimé dans le sous-espace optimal :

$$\|\mathcal{M}_q^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|^2 > 4\Gamma_q^2 \quad (3.40)$$

où Γ_q^2 représente la limite de contrôle de l'indice γ dans le sous-espace optimal. En effet, la considération d'un critère quelconque pour le choix du nombre des CPs peut engendrer un modèle ACP qui se diffère par rapport à celui optimal suite à une réduction ou une augmentation du sous-espace optimal de γ . Par conséquent, nos démonstrations se déroulent en deux étapes.

3.2.2.1 Effet d'une sous-estimation du modèle

Puisque les CPs sont orthogonales, une sous-estimation du modèle qui implique une réduction du sous-espace optimal nous permet d'établir la relation suivante :

$$\mathcal{M}_q^{\frac{1}{2}} = \mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{M}_{red}^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

où $\mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}}$ représente la matrice dont les vecteurs colonnes engendrent le sous-espace retranché qui correspond aux CPs supprimées. Les vecteurs colonnes de la matrice $\mathcal{M}_{red}^{\frac{1}{2}}$ engendrent le sous-espace réduit considéré optimal par un critère quelconque. Ainsi, nous montrons que :

$$\mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_{red}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{M}_{red}^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.42)$$

D'après (3.40), nous pouvons déduire ce qui suit :

$$\|\mathcal{M}_q^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 = \|\mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 + \|\mathcal{M}_{red}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 > 4\Gamma_q^2 \quad (3.43)$$

Celle-ci peut nous permettre de définir le domaine de définition de l'amplitude du défaut dans le sous-espace réduit :

$$\|\mathcal{M}_{red}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 > 4\Gamma_q^2 - \|\mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 \quad (3.44)$$

Afin de conserver la qualité de détection du défaut en réduisant le sous-espace optimal, il faut que ce même défaut déjà garanti détectable dans un tel sous-espace demeure garanti détectable dans le sous-espace réduit, i.e. $\|\mathcal{M}_{red}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\| > 2\Gamma_{red}$. Pour cela, nous devons imposer ce qui suit :

$$4\Gamma_q^2 - \|\mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 \geq 4\Gamma_{red}^2 \quad (3.45)$$

où Γ_{red}^2 représente le seuil de contrôle de l'indice de détection dans le sous-espace réduit. Ainsi, le défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{F}}$ reste garanti détectable suite à une réduction du sous-espace si son amplitude exprimée dans le sous-espace retranché satisfait l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{M}_{d^-}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\| \leq 2\sqrt{\Gamma_q^2 - \Gamma_{red}^2} \quad (3.46)$$

Cette inégalité n'est valable que si $\Gamma_q^2 \geq \Gamma_{red}^2$ qui est généralement vérifiée. Elle représente une condition suffisante sur l'amplitude du défaut dans le sous-espace retranché afin qu'il reste garanti détectable même en réduisant le sous-espace optimal. Dans cette optique, nous pouvons conclure que le sous-espace retranché doit être insensible au défaut considéré. Ainsi, la majoration d'une telle amplitude prouve qu'une conservation de la qualité de détection de défauts par réduction du sous-espace optimal n'est pas garantie.

3.2.2.2 Effet d'une surestimation du modèle

Une surestimation du modèle implique une augmentation du sous-espace optimal par l'addition d'un ensemble de CPs. Cela nous permet d'écrire :

$$\mathcal{M}_{aug}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{M}_{d^+}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{M}_q^{\frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

où $\mathcal{M}_{d^+}^{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{M}_{aug}^{\frac{1}{2}}$ représentent deux matrices dont les vecteurs colonnes engendrent respectivement le sous-espace ajouté qui correspond aux CPs insérées et le sous-espace augmenté considéré optimal par un critère donné. L'orthogonalité de ces deux sous-espaces, nous permet d'écrire ce qui suit :

$$\|\mathcal{M}_{aug}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 = \|\mathcal{M}_{d^+}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 + \|\mathcal{M}_q^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 \quad (3.48)$$

Puisque le défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{F}}$ est garanti détectable dans le sous-espace optimal (3.40), l'inégalité suivante est alors vraie :

$$\|\mathcal{M}_{aug}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 > \|\mathcal{M}_{d^+}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{F}} \mathbf{f}(k)\|^2 + 4\Gamma_q^2 \quad (3.49)$$

Afin de conserver la qualité de détection par addition de CPs supplémentaires, il faut que le même défaut demeure garanti détectable dans le sous-espace augmenté. Par conséquent, il faut s'assurer que :

$$\|\mathcal{M}_{d^+}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|^2 + 4\Gamma_q^2 \geq 4\Gamma_{aug}^2 \quad (3.50)$$

ainsi,

$$\|\mathcal{M}_{d^+}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \geq 2\sqrt{\Gamma_{aug}^2 - \Gamma_q^2} \quad (3.51)$$

où Γ_{aug}^2 représente la limite de contrôle de l'indice de détection dans le sous-espace augmenté. Evidemment, cette inégalité n'est valable que si $\Gamma_{aug}^2 \geq \Gamma_q^2$. Une telle inégalité représente une condition de minoration sur l'amplitude du défaut dans le sous-espace ajouté. Cette minoration implique qu'un tel sous-espace doit être sensible au défaut considéré. Ainsi, la performance de détection prouvée dans le sous-espace optimal ne peut être garantie conservée par augmentation du sous-espace si les CPs ajoutées sont insensibles au défaut considéré.

Dans le cadre de l'utilisation de l'ACP pour une démarche de diagnostic, le nombre de CPs retenues pour la construction d'un modèle ACP aura certainement un impact sur les étapes d'une telle démarche notamment la détection et la localisation ou l'isolation de défauts. Si le nombre de CPs retenues est inférieur à celui optimal, cela risque de perdre des informations contenues dans les données initiales en projetant certaines variables dans le sous-espace résiduel. Par conséquent, on pourrait avoir des résidus entachés ce qui entraîne des fausses alarmes. Dans le cas contraire, le modèle est surestimé, et il peut ne pas permettre la détection de défauts.

3.3 Différentes variances non reconstruites

Le principe de l'approche de reconstruction des variables sera réalisé dans un contexte de défauts unidimensionnels en supposant qu'il ne peut y exister qu'une seule variable en défaut à chaque instant. Puisque les données collectées représentent le fonctionnement normal de processus, les défauts supposés sont réellement nuls. Par conséquent, l'objectif est de définir le modèle ACP permettant d'avoir une plus faible variance non reconstruite.

3.3.1 Principe de la reconstruction unidimensionnelle

Le vecteur de données exprimant la présence d'un défaut simple \mathcal{F}_j affectant la j ème variable au k ème instant peut être déduit de l'équation (2.59) en remplaçant respectivement $\Xi_{\mathcal{J}}$ et $\mathbf{f}(k)$ par ξ_j et $f(k)$. L'élimination de l'effet d'un tel défaut revient à estimer un vecteur $\mathbf{x}_j(k)$ insensible au défaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j(k) &= \mathbf{x}(k) - \xi_j f(k) \\ &= \mathbf{x}(k) - \xi_j \hat{f}_j(k) \end{aligned} \quad (3.52)$$

où $\hat{f}_j \in \mathbb{R}$ représente une estimation de f . Celle-ci permettra de calculer un indice de détection associé non influencé par le défaut :

$$\gamma_j(k) = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_j(k)\|^2 \quad (3.53)$$

Ainsi, une estimation optimale de l'amplitude du défaut est celle qui minimise l'indice reconstruit $\gamma_j(k)$ comme suit :

$$\hat{f}_j(k) = \arg \min_{f(k)} \{ \gamma_j(k) \} \quad (3.54)$$

Cette minimisation est obtenue par l'application du principe des moindres carrés. En conséquence, l'amplitude estimée du défaut ainsi que le vecteur de données dont la $j^{\text{ème}}$ variable est reconstruite sont respectivement exprimés par :

$$\hat{f}_j(k) = (\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^{-1} \xi_j^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k) \quad (3.55)$$

$$\mathbf{x}_j(k) = (\mathbf{I}_m - \xi_j (\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^{-1} \xi_j^T \mathcal{M}) \mathbf{x}(k) \quad (3.56)$$

On peut déduire que la $j^{\text{ème}}$ variable n'est reconstituable dans le sous-espace de γ que si le terme $\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j$ est non nul. Cela implique que le vecteur $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j$ ne soit pas nul.

Pour une meilleure mise en évidence du principe de reconstruction d'une variable, nous proposons de décomposer les vecteurs $\mathbf{x}(k)$, ξ_j et la matrice \mathcal{M} comme suit :

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{j-}(k) \\ x_j(k) \\ \mathbf{x}_{j+}(k) \end{bmatrix}, \quad \xi_j = \begin{bmatrix} \xi_{j-} \\ 1 \\ \xi_{j+} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_{j-} & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_{j-}^T & \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j & \mathcal{M}_{j+}^T \\ \mathcal{M}_2^T & \mathcal{M}_{j+} & \mathcal{M}_3 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

où $\mathbf{x}_{j-}(k)$ et $\mathbf{x}_{j+}(k)$ sont respectivement composés des $(j-1)$ premières et $(m-j)$ dernières mesures du vecteur de données $\mathbf{x}(k)$. $x_j(k)$ représente la mesure de la $j^{\text{ème}}$ variable au $k^{\text{ème}}$ instant. $\xi_{j-} \in \mathbb{R}^{j-1}$ et $\xi_{j+} \in \mathbb{R}^{m-j}$ sont deux vecteurs nuls. \mathcal{M}_{j-}^T et \mathcal{M}_{j+}^T sont deux vecteurs composés respectivement des $(j-1)$ premières et $(m-j)$ dernières valeurs de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathcal{M} . $\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j$ est la $j^{\text{ème}}$ valeur diagonale de la matrice \mathcal{M} .

A partir des équations (3.56) et (3.57), le vecteur de données dont la $j^{\text{ème}}$ variable est reconstruite peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{x}_j(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{j-}(k) \\ -(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^{-1} (\mathcal{M}_{j-}^T \mathbf{x}_{j-}(k) + \mathcal{M}_{j+}^T \mathbf{x}_{j+}(k)) \\ \mathbf{x}_{j+}(k) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

D'après cette expression, seules les mesures des variables autres que celles de la variable en question sont utilisées pour sa reconstruction. En outre, la contribution des autres variables dans la reconstruction dépend de la dimension du modèle ACP considéré. Une telle contribution peut être illustrée par les coefficients des vecteurs \mathcal{M}_{j-}^T et \mathcal{M}_{j+}^T . Evidemment, les valeurs de ces coefficients changent en fonction du nombre des CPs utilisées dans le modèle ACP.

3.3.2 Variance non reconstruite généralisée

La reconstruction d'une variable dans un sous-espace donné est basée sur l'estimation de sa grandeur supposée être normale en utilisant les mesures des autres variables.

Néanmoins, la variance d'une telle variable ne peut être totalement reconstruite. Il est donc possible d'en extraire une variance non reconstruite qui dépend de la dimension du modèle ACP et du sous-espace dans lequel l'estimation est réalisée. Nous rappelons que seule la variance non reconstruite relative à une estimation dans le sous-espace résiduel a été étudiée dans la littérature (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Qin et Dunia, 2000). Dans ce cadre, nous avons proposé une variance non reconstruite généralisée relative à un indice de détection quadratique quelconque (Mnassri et al., 2010a). Cette généralisation nous a permis d'étudier la variance de l'erreur de reconstruction relative à chaque indice de détection donné dans le tableau 3.1.

Considérons $\mathbf{e}_j(k) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur qui représente l'erreur de reconstruction de la j ème variable au k ème instant. Ainsi, l'erreur de reconstruction de cette variable est donnée par :

$$\xi_j^T \mathbf{e}_j(k) = \xi_j^T (\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}_j(k)) = \hat{f}_j(k) = (\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^{-1} \xi_j^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k) \quad (3.59)$$

Cette expression montre que l'estimation de la j ème variable dans n'importe quel sous-espace est non biaisée. Puisque les données sont centrées, la moyenne de l'erreur de reconstruction est nulle :

$$\mathbb{E} \{ \xi_j^T \mathbf{e}_j \} = \mathbb{E} \{ \hat{f}_j \} = (\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^{-1} \xi_j^T \mathcal{M} \mathbb{E} \{ \mathbf{x} \} = 0 \quad (3.60)$$

La variance d'une telle erreur dans la direction de la variable en question dépend de la dimension du modèle ACP. Etant donné que les données utilisées dans l'objectif d'une modélisation par ACP sont censées être sans défauts, cela implique que le modèle ACP le plus adapté doit assurer une erreur de reconstruction ayant le moins possible de variance. Ainsi, on définit la variance de l'erreur de reconstruction de la j ème variable comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma_j}^2(\ell) &= \text{Var} \{ \xi_j^T \mathbf{e}_j \} = \mathbb{E} \left\{ \left(\hat{f}_j - \mathbb{E} \{ \hat{f}_j \} \right)^2 \right\} = \mathbb{E} \{ \hat{f}_j^2 \} \\ &= \frac{\xi_j^T \mathcal{M} \mathbb{E} \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \} \mathcal{M} \xi_j}{(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^2} = \frac{\xi_j^T \mathcal{M} \Sigma \mathcal{M} \xi_j}{(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

L'objectif étant alors de définir le nombre de CPs qui minimise l'expression précédente pour une meilleure reconstruction d'une variable donnée. En effet, le minimum de la variance non reconstruite d'une variable correspond à un nombre de CPs qui peut être différent de celui obtenu pour une reconstruction optimale d'une autre variable. Pour cette raison, ce compromis peut être résolu par la considération d'une variance non reconstruite globale. Ainsi, l'objectif sera plutôt de définir un nombre de CPs qui minimise la variance globale qui peut malheureusement ne pas assurer une variance non reconstruite minimale pour chacune des variables. Puisque le critère global représente la somme des variances non reconstruites individuelles des variables, il est préférable de les considérer dans la même échelle en pondérant chacune par la variance originelle de sa variable. Par conséquent, le critère de la variance non reconstruite globale relative à l'indice γ est donné par :

$$\mathbf{VNR}_\gamma(\ell) = \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_{\gamma_j}^2(\ell)}{\xi_j^T \Sigma \xi_j} = \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j^T \mathcal{M} \Sigma \mathcal{M} \xi_j}{(\xi_j^T \Sigma \xi_j)(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j)^2} \quad (3.62)$$

Dans le cadre d'une utilisation de la variance non reconstruite, nous considérons plus particulièrement que les données de \mathbf{X} sont centrées réduites. Par conséquent, Σ représente une matrice de corrélation, ce qui implique que $\xi_j^T \Sigma \xi_j = 1$.

3.3.3 Comportements des différents critères VNR

A partir de l'expression généralisée de la variance non reconstruite, nous développons et étudions théoriquement dans la suite les comportements des différents critères envisageables qui sont relatifs aux indices de détection utilisés dans le cadre de l'ACP.

3.3.3.1 VNR utilisant l'indice *SPE*

En se référant au tableau 3.1, la matrice de l'indice *SPE* est $\mathcal{M} = \tilde{\mathbf{C}}$. La substitution de celle-ci dans la formule de la variance non reconstruite généralisée (3.61), nous permet de prouver en considérant l'équation (2.63) ce qui suit :

$$\sigma_{SPE_j}^2(\ell) = \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j}{(\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j)^2} = \sigma_j^2(\ell) \quad (3.63)$$

Nous pouvons déduire que la variance non reconstruite d'une variable donnée en utilisant l'indice *SPE* est égale à celle étudiée dans le deuxième chapitre. Par conséquent, le critère de la variance globale de l'erreur de reconstruction relative à un tel indice n'est autre que le critère **VNR** qui a été l'objet d'une étude dans le chapitre précédent :

$$\mathbf{VNR}_{SPE}(\ell) = \sum_{j=1}^m \sigma_{SPE_j}^2(\ell) = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2(\ell) = \mathbf{VNR}(\ell) \quad (3.64)$$

L'expression précédente représente l'unique critère proposé dans un contexte de choix d'une dimension optimale d'un modèle ACP en s'appuyant sur l'idée de la variance non reconstruite (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Qin et Dunia, 2000).

3.3.3.2 VNR utilisant l'indice *SWE*

En remplaçant la matrice \mathcal{M} exprimée dans l'équation (3.61) par $\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T$ qui représente la matrice de l'indice *SWE*, la variance de l'erreur de reconstruction de la *j*ème variable en utilisant un tel indice est donnée par :

$$\sigma_{SWE_j}^2(\ell) = \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j}{(\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j)^2} = \frac{1}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j} \quad (3.65)$$

En effet, la matrice résiduelle des vecteurs propres ainsi que celle des valeurs propres peuvent être réécrites respectivement comme suit :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \left[\mathbf{p}_{\ell+1}, \tilde{\mathbf{P}}_r \right] \quad (3.66)$$

et

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{\ell+1} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}_r \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

On peut alors déduire que :

$$\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j = \lambda_{\ell+1}^{-1} \xi_j^T \mathbf{P}_{\ell+1} \mathbf{P}_{\ell+1}^T \xi_j + \xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_r \tilde{\Lambda}_r^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_r^T \xi_j \quad (3.68)$$

Puisque $\lambda_{\ell+1}^{-1} \xi_j^T \mathbf{P}_{\ell+1} \mathbf{P}_{\ell+1}^T \xi_j \geq 0$, alors

$$\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j \geq \xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_r \tilde{\Lambda}_r^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_r^T \xi_j \quad (3.69)$$

donc

$$\frac{1}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_j} \leq \frac{1}{\xi_j^T \tilde{\mathbf{P}}_r \tilde{\Lambda}_r^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_r^T \xi_j} \quad (3.70)$$

D'après l'inégalité précédente et l'équation (3.65), on peut établir ce qui suit :

$$\sigma_{SWE_j}^2(\ell) \leq \sigma_{SWE_j}^2(\ell + 1) \quad (3.71)$$

L'inégalité (3.71) prouve que la variance non reconstruite d'une variable donnée en utilisant l'indice SWE est monotone croissante en ℓ . Ainsi, la variance globale de l'erreur de reconstruction est également monotone croissante en ℓ :

$$\sum_{j=1}^m \sigma_{SWE_j}^2(\ell) \leq \sum_{j=1}^m \sigma_{SWE_j}^2(\ell + 1) \quad (3.72)$$

d'où

$$\mathbf{VNR}_{SWE}(\ell) \leq \mathbf{VNR}_{SWE}(\ell + 1) \quad (3.73)$$

Par conséquent, le minimum d'un tel critère correspond toujours à une seule CP qui est la première :

$$\min_{\ell} \mathbf{VNR}_{SWE}(\ell) = 1 \quad (3.74)$$

On peut conclure que la variance non reconstruite utilisant l'indice SWE ne peut pas servir dans le choix d'un nombre optimal de CPs.

3.3.3.3 VNR utilisant l'indice $T2$ de Hotelling

La reconstruction de la $j^{\text{ème}}$ variable en se basant sur l'indice $T2$ de Hotelling génère une variance non reconstruite dont l'expression est obtenue en substituant dans l'équation (3.61) et d'après le tableau 3.1 la matrice \mathcal{M} par $\hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T$ comme suit :

$$\sigma_{T2_j}^2(\ell) = \frac{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j}{(\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j)^2} = \frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j} \quad (3.75)$$

Notamment, l'augmentation de la dimension du sous-espace principal par l'addition d'une CP supplémentaire implique que la nouvelle matrice des vecteurs propres ainsi que celle des valeurs propres prennent respectivement les formes suivantes :

$$\hat{\mathbf{P}}_+ = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{p}_{\ell+1} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\hat{\Lambda}_+ = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} & 0 \\ 0 & \lambda_{\ell+1} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\sigma_{T_2}^2(\ell+1) = \frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_+ \hat{\Lambda}_+^{-1} \hat{\mathbf{P}}_+^T \xi_j} = \frac{1}{\lambda_{\ell+1}^{-1} \xi_j^T \mathbf{p}_{\ell+1} \mathbf{p}_{\ell+1}^T \xi_j + \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j} \quad (3.78)$$

Puisque $\lambda_{\ell+1}^{-1} \xi_j^T \mathbf{p}_{\ell+1} \mathbf{p}_{\ell+1}^T \xi_j \geq 0$, alors

$$\frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j} \geq \frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_+ \hat{\Lambda}_+^{-1} \hat{\mathbf{P}}_+^T \xi_j} \quad (3.79)$$

donc

$$\sigma_{T_2}^2(\ell) \geq \sigma_{T_2}^2(\ell+1) \quad (3.80)$$

et

$$\sum_{j=1}^m \sigma_{T_2}^2(\ell) \geq \sum_{j=1}^m \sigma_{T_2}^2(\ell+1) \quad (3.81)$$

Celle-ci implique que

$$\mathbf{VNR}_{T_2}(\ell) \geq \mathbf{VNR}_{T_2}(\ell+1) \quad (3.82)$$

Cette inégalité prouve que le critère de la variance non reconstruite utilisant à l'indice T_2 de Hotelling est monotone décroissant en ℓ . En se basant sur ce critère, la meilleure reconstruction est obtenue en considérant toutes les CPs puisque :

$$\min_{\ell} \mathbf{VNR}_{T_2}(\ell) = m \quad (3.83)$$

En effet, la variance de l'erreur de reconstruction basée sur l'indice T_2 de Hotelling est incapable de déterminer un modèle optimal.

3.3.3.4 VNR utilisant l'indice de Mahalanobis

D'après le tableau 3.1, la matrice de la distance de Mahalanobis est indépendante du nombre des CPs. Par conséquent, la variance non reconstruite utilisant une telle distance ne dépend pas également d'une dimension donnée :

$$\sigma_{D_j}^2 = \frac{\xi_j^T \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^T \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{P}^T \xi_j}{(\xi_j^T \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{P}^T \xi_j)^2} = \frac{1}{\xi_j^T \mathbf{P} \Lambda^{-1} \mathbf{P}^T \xi_j} = \frac{1}{\xi_j^T \Sigma^{-1} \xi_j} \quad (3.84)$$

ainsi,

$$\mathbf{VNR}_D = \sum_{j=1}^m \sigma_{D_j}^2 \quad (3.85)$$

Il est clair que ce critère est constant. Ainsi, sa minimisation par rapport à ℓ n'est pas possible et ne peut apporter aucun avantage pour le choix d'un nombre optimal de CPs.

3.3.3.5 VNR utilisant un indice exprimé dans le sous-espace principal

Nous proposons ici d'étudier la variance non reconstruite en utilisant un indice exprimé dans le sous-espace principal autre que les indices de détection connus dans le cadre de l'ACP. Cet indice est complémentaire à celui du *SPE*.

En effet, nous remarquons dans la littérature l'inexistence d'intérêt à l'étude de la distance $\|\hat{\mathbf{x}}\|^2$ malgré qu'elle représente une forme quadratique. La reconstruction d'une variable donnée en se basant sur une telle distance produit une variance non reconstruite. En substituant la matrice \mathcal{M} dans (3.61) par $\hat{\mathbf{C}}$, l'expression de la variance de l'erreur de reconstruction de la *j*ème variable est la suivante :

$$\sigma_{\|\hat{\mathbf{x}}_j\|^2}^2(\ell) = \frac{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \Sigma \hat{\mathbf{C}} \xi_j}{(\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \xi_j)^2} = \left(\frac{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \Sigma \hat{\mathbf{C}} \xi_j}{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \xi_j} \right) \left(\frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \xi_j} \right) = \hat{u}_j(\ell) \hat{v}_j(\ell) \quad (3.86)$$

avec

$$\hat{u}_j(\ell) = \frac{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \Sigma \hat{\mathbf{C}} \xi_j}{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \xi_j} \quad (3.87)$$

et

$$\hat{v}_j(\ell) = \frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}} \xi_j} \quad (3.88)$$

L'ajout d'une CP supplémentaire dans le sous-espace principal nous permet d'écrire :

$$\hat{v}_j(\ell + 1) = \frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{C}}_{+\xi_j}} = \frac{1}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \xi_j} \quad (3.89)$$

D'après l'équation (3.76), on peut déduire que :

$$\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \xi_j = \xi_j^T \mathbf{p}_{\ell+1} \mathbf{p}_{\ell+1}^T \xi_j + \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j \quad (3.90)$$

Celle-ci implique que

$$\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \xi_j \geq \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j \quad (3.91)$$

ainsi,

$$\hat{v}_j(\ell) \geq \hat{v}_j(\ell + 1) \quad (3.92)$$

L'inégalité précédente prouve que la fonction \hat{v}_j est monotone décroissante en ℓ . En ce qui concerne la fonction \hat{u}_j , nous proposons de calculer la différence suivante :

$$\begin{aligned} \hat{u}_j(\ell + 1) - \hat{u}_j(\ell) &= \frac{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \Sigma \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \xi_j}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \xi_j} - \frac{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \Sigma \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j} \\ &= \frac{\lambda_{\ell+1} \xi_j^T \mathbf{p}_{\ell+1} \mathbf{p}_{\ell+1}^T \xi_j + \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\xi_j^T \mathbf{p}_{\ell+1} \mathbf{p}_{\ell+1}^T \xi_j + \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j} - \frac{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j} \\ &= \frac{\xi_j^T \mathbf{p}_{\ell+1} \mathbf{p}_{\ell+1}^T \xi_j \left(\lambda_{\ell+1} \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j - \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j \right)}{(\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \xi_j) (\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j)} \\ &= \frac{\xi_j^T \mathbf{p}_{\ell+1} \mathbf{p}_{\ell+1}^T \xi_j}{(\xi_j^T \hat{\mathbf{P}}_{+} \hat{\mathbf{P}}_{+}^T \xi_j) (\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j)} \left(\xi_j^T \hat{\mathbf{P}} (\lambda_{\ell+1} \mathbf{I}_\ell - \hat{\Lambda}) \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j \right) \quad (3.93) \end{aligned}$$

où $\mathbf{I}_\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ est une matrice identité. Notamment, toutes les valeurs propres de la matrice diagonale $\hat{\Lambda}$ sont supérieures ou égales à $\lambda_{\ell+1}$ ce qui implique que tous les éléments de la matrice diagonale $(\lambda_{\ell+1}\mathbf{I}_\ell - \hat{\Lambda})$ sont alors négatifs ou nuls. Par conséquent, la différence exprimée par l'équation précédente est négative ou nulle, ainsi :

$$\hat{u}_j(\ell) \geq \hat{u}_j(\ell + 1) \quad (3.94)$$

A partir des inégalités (3.94) et (3.92), nous pouvons déduire que :

$$\hat{u}_j(\ell)\hat{v}_j(\ell) \geq \hat{u}_j(\ell+1)\hat{v}_j(\ell + 1) \quad (3.95)$$

ce qui nous permet également de déduire, d'après (3.86), que :

$$\sigma_{\|\hat{\mathbf{x}}_j\|^2}^2(\ell) \geq \sigma_{\|\hat{\mathbf{x}}_j\|^2}^2(\ell + 1) \quad (3.96)$$

En posant

$$\mathbf{VNR}_{\|\hat{\mathbf{x}}\|^2}(\ell) = \sum_{j=1}^m \sigma_{\|\hat{\mathbf{x}}_j\|^2}^2(\ell) \quad (3.97)$$

le critère qui représente la variance globale non reconstruite relative à l'indice considéré, on peut conclure de l'inégalité (3.96) que :

$$\mathbf{VNR}_{\|\hat{\mathbf{x}}\|^2}(\ell) \geq \mathbf{VNR}_{\|\hat{\mathbf{x}}\|^2}(\ell + 1) \quad (3.98)$$

Ce critère est alors monotone décroissant en ℓ . Evidemment, la meilleure reconstruction est obtenue en considérant toutes les CPs dans le modèle ACP puisque :

$$\min_{\ell} \mathbf{VNR}_{\|\hat{\mathbf{x}}\|^2}(\ell) = m \quad (3.99)$$

Le comportement de cette variance non reconstruite ne peut pas servir pour le choix d'un nombre optimal de CPs.

3.3.3.6 VNR utilisant l'indice combiné

D'après le tableau 3.1, les vecteurs colonnes de la matrice \mathcal{M} de l'indice combiné engendrent deux sous-espaces orthogonaux. La substitution d'une telle matrice dans l'expression (3.61), nous a permis de montrer que la variance non reconstruite de la j ème variable en s'appuyant sur cet indice peut s'écrire comme suit :

$$\sigma_{\varphi_j}^2(\ell, \alpha) = \frac{\tau^4 \xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j + \delta^4 \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\left(\tau^2 \xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j + \delta^2 \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j \right)^2} \quad (3.100)$$

Cette expression dépend du nombre ℓ des CPs retenus. En outre, nous remarquons qu'une telle variance dépend également des seuils de contrôle des indices SPE et $T2$ de Hotelling. Ces limites sont en fonction de ℓ et un seuil de signification α . Par conséquent, la variance non reconstruite globale dépendra également des ces paramètres :

$$\mathbf{VNR}_{\varphi}(\ell, \alpha) = \sum_{j=1}^m \sigma_{\varphi_j}^2(\ell, \alpha) \quad (3.101)$$

Cette équation présente un nouveau critère basé sur la variance non reconstruite relative à l'indice combiné. Nous notons qu'il n'a pas été étudié auparavant dans la littérature.

Jusqu'à ce stade, nous avons montré théoriquement que tous les critères qui se basent sur la variance non reconstruite, à l'exception de celui de l'équation (3.101), ne peuvent pas définir la dimension adaptée d'un modèle ACP voire la plupart de ces critères sont inutiles pour effectuer une telle tâche. En revanche, l'unique critère dont nous ignorons son comportement est celui relatif à l'indice combiné. Pour cette raison, ce critère a été l'objet d'une étude sur un exemple simulé par Mnassri et al. (2010a). Nous avons remarqué qu'il peut nous renseigner sur la dimension optimale en s'appuyant sur à un choix très approprié du niveau de confiance $(1 - \alpha)$.

Afin d'assurer la détection de défauts, le seuil de signification α doit généralement avoir des valeurs voisines de 5%. Malheureusement, ces valeurs sont inadéquates pour le nouveau critère. En effet, nous avons constaté que α doit être proche de 80% pour que le minimum de \mathbf{VNR}_φ converge modérément vers le nombre désiré des CPs. Ce critère est conçu pour un objectif primordial qui est la minimisation de la variance de l'erreur de reconstruction. Toutefois, il est difficile d'expliquer théoriquement son comportement. Pour cela, nous pouvons le considérer comme un critère empirique puisque son efficacité s'appuie plus particulièrement sur l'expérience.

3.4 Nouveaux critères **VNR**

Dans l'objectif d'une sélection correcte de la dimension optimale d'un modèle ACP, nous contribuons dans ce chapitre par deux autres nouveaux critères qui se basent sur la théorie de la variance de l'erreur de reconstruction.

3.4.1 **VNR** utilisant un nouvel indice combiné

En se basant sur l'étude établie par Mnassri et al. (2010a) pour le critère \mathbf{VNR}_φ , nous avons essayé de remédier à l'inconvénient de celui-ci par la proposition d'un nouveau critère plus consistant en utilisant une nouvelle distance combinée (Mnassri et al., 2010b). Une caractéristique majeure constatée dans le premier critère réside dans son allure fluctuante face aux valeurs du niveau de confiance $(1 - \alpha)$. Notre objectif prioritaire est d'assurer par le nouveau critère une robustesse par rapport au choix de la valeur du seuil de signification au moins dans l'intervalle couramment utilisé comme $[1\%, 5\%]$.

D'après (3.100), nous constatons que le critère \mathbf{VNR}_φ est exprimé en fonction de l'inverse des valeurs propres. En effet, celles-ci ont une influence importante sur le comportement de ce critère. Dans ce cadre, Mnassri et al. (2010b) ont proposé un nouvel indice combiné qui combine la statistique SPE et une nouvelle distance \mathfrak{B} exprimée dans le sous-espace principal. La particularité de l'indice \mathfrak{B} se manifeste dans une matrice des valeurs propres modifiées :

$$\mathfrak{B}(k) = \|\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k)\|^2 = \mathbf{x}^T(k)\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-1}\hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) \quad (3.102)$$

avec

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \Lambda_v^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(m-v)} + \Lambda_{(m-v)} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

où $\hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ est une matrice diagonale constituée des ℓ premiers éléments de la matrice diagonale $\Lambda_{\mathfrak{B}}$. Evidemment, ℓ représente le nombre des CPs à retenir. $\mathbf{I}_{(m-v)}$ est une matrice identité d'ordre $(m-v)$. $v = \{1, \dots, m\}$ joue le rôle d'un deuxième paramètre pour le critère proposé en représentant également un nombre de CPs qui servira dans la minimisation par la suite. $\Lambda_v \in \mathbb{R}^{v \times v}$ et $\Lambda_{(m-v)} \in \mathbb{R}^{(m-v) \times (m-v)}$ sont deux matrices diagonales contenant respectivement les v premières et $(m-v)$ dernières valeurs propres de la matrice Λ .

Nous constatons que cet indice ressemble dans sa forme générale à celui de la T^2 de Hotelling. La modification est réalisée aux niveaux des valeurs propres de la matrice Λ . L'utilisation de l'indice \mathfrak{B} pour la détection de défauts impose qu'on lui propose une limite de contrôle. Puisque cet indice présente une forme quadratique, son seuil de détection peut être déterminé en se référant à la théorie de [Box \(1954\)](#). En considérant un tel indice, le processus est en fonctionnement normal au k ème instant si :

$$\mathfrak{B}(k) \leq \mathfrak{b}^2 = g_{\mathfrak{B}} \chi_{(h_{\mathfrak{B}}, \alpha)}^2 \quad (3.104)$$

avec

$$g_{\mathfrak{B}} = \frac{\text{tr}[(\Sigma \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)^2]}{\text{tr}[\Sigma \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T]} \quad (3.105)$$

$$h_{\mathfrak{B}} = \frac{(\text{tr}[\Sigma \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T])^2}{\text{tr}[(\Sigma \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)^2]} \quad (3.106)$$

Dans la pratique, on suggère généralement qu'on surveille le processus par un seul indice plutôt que deux statistiques de détection séparées. Pour cela, nous avons proposé de combiner l'indice \mathfrak{B} et celui du SPE en une seule statistique combinée comme suit :

$$\Psi(k) = \|\Upsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 = \frac{SPE(k)}{\delta^2} + \frac{\mathfrak{B}(k)}{\mathfrak{b}^2} \quad (3.107)$$

où

$$\Upsilon^{\frac{1}{2}} = \delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \mathfrak{b}^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \quad (3.108)$$

Υ représente la matrice du nouvel indice combiné Ψ . Notamment, la reconstruction de la j ème variable en utilisant un tel indice engendre une variance non reconstruite dont son expression est déterminée en remplaçant dans l'équation (3.61) \mathcal{M} par Υ . Ainsi, nous montrons qu'elle peut s'écrire comme suit :

$$\sigma_{\Psi_j}^2(\ell, v, \alpha) = \frac{\mathfrak{b}^4 \xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j + \delta^4 \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j}{\left(\mathfrak{b}^2 \xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j + \delta^2 \xi_j^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}_{\mathfrak{B}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_j \right)^2} \quad (3.109)$$

Cette variance dépend de deux paramètres principaux qui sont ℓ et v ainsi qu'un paramètre de lissage α qui représente le seuil de signification. En revanche, le critère global dépend uniquement de ℓ et α :

$$\mathbf{VNR}_{\Psi}(\ell, \alpha) = \sum_{v=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_{\Psi_j}^2(\ell, v, \alpha) \quad (3.110)$$

Nous suggérons que le minimum de cette fonction peut correspondre au nombre optimal des CPs. En se basant sur un exemple simulé, nous avons observé que ce critère peut déterminer correctement le nombre désiré des CPs avec des valeurs pour α qui sont comprises entre 1% et 5% (Mnassri et al., 2010b). Notamment, ce critère montre des résultats plus corrects que ceux du critère utilisant le classique indice combiné. Cependant, il demeure un critère empirique car seul l'expérience peut illustrer son efficacité.

3.4.2 Changement de représentation des données

La présence du seuil de signification dans les expressions des deux nouveaux critères proposés précédemment pose souvent des difficultés en rendant les résultats et les décisions incertains. Pour cette raison, nous avons étendu nos travaux dans ce cadre en proposant également un troisième nouveau critère que nous considérons le mieux performant et le plus consistant du point de vue théorique. Ce critère a été proposé initialement dans Mnassri et al. (2010c) puis il a été rectifié et adapté théoriquement dans Mnassri et al. (2011a).

3.4.2.1 Motivation et théorie d'une nouvelle approche ACPVI

Le nouveau critère est fondé sur l'idée d'une analyse en composantes principales pondérées par leurs variances inversées (ACPVI, en anglais : *Inverse-Variance Weighting PCA* (IVWPCA)). En considérant des données normalisées, nous avons montré dans le deuxième chapitre que le critère **VNR** peut déterminer correctement le nombre optimal des CPs seulement en absence des variables indépendantes et quasi-indépendantes. En effet, un tel critère est insensible à la présence de ce type de variables. En outre, nous notons que ce critère peut également être plus limité en utilisant des données non normalisées. Une variable indépendante ayant une variance très importante peut occuper le premier ou le deuxième rang dans l'ordre d'importance des CPs en considérant la matrice de covariance. Dans ce cas et d'après la démonstration établie dans l'annexe A, le minimum du critère **VNR** correspondra à un nombre de CPs qui ne peut pas dépasser le rang d'une telle variable. Par conséquent, des CPs qui sont réellement significatives seront écartées. Ce critère peut garantir la sélection de ces CPs uniquement si les variables indépendantes et quasi-indépendantes disposent de variances moins inférieures aux valeurs propres de telles CPs.

Nous recommandons alors l'utilisation d'un tel critère avec des données normalisées car les CPs qui correspondent aux variables indépendantes sont hiérarchiquement placées après les CPs les plus significatives qui expriment de fortes corrélations. De cette manière, on est confronté uniquement au problème d'identification de telles variables. Notamment, les variables indépendantes se caractérisent par une invariabilité en termes de

leurs indépendances ainsi que leurs variances même en cas d'inversion de la matrice de corrélation.

Pour cette raison, l'idée principale s'appuie sur le principe des problèmes inverses par un changement de représentation des données. Puisque la normalisation des données influe souvent les relations linéaires entre les variables, nous supposons que les données normalisées de la matrice \mathbf{X} sont initialement issues d'une transformation linéaire d'autres données $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ qui ne sont pas forcément normalisées. En notation vectorielle, cette hypothèse se traduit par :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{y}(k) \quad (3.111)$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de transformation. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur des données desquelles sont extraites celles du vecteur \mathbf{x} . A travers le changement de représentation, nous devons assurer que les données de \mathbf{X} sont normalisées. Dans ce contexte, on peut établir ce qui suit :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = \mathbf{A} \mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (3.112)$$

où Σ et \mathbf{S} sont respectivement la matrice de corrélation de \mathbf{X} et la matrice de covariance de \mathbf{Y} .

Une contrainte que nous devons également l'assurer par une telle transformation linéaire concerne l'organisation des valeurs propres de Σ ainsi que celles de \mathbf{S} . En effet, nous souhaitons que leurs valeurs propres soient reliées en conservant un certain ordonnancement. Pour cela, la détermination des matrices \mathbf{A} et \mathbf{S} peut s'effectuer selon trois possibilités. Cependant, une unique possibilité peut satisfaire nos hypothèses :

- i.* D'après les équations (2.13) et (3.112), nous pouvons supposer que $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ et $\mathbf{S} = \Lambda$. Avec ces considérations, le problème à résoudre se ramène au cas classique ;
- ii.* Puisque Σ doit être nécessairement une matrice de corrélation, on peut considérer que \mathbf{S} est la matrice de covariance de \mathbf{X} et \mathbf{A} est une matrice diagonale constituée par les inverses des racines carrées des écarts types des variables originelles. Dans ce cas, on serait confronté à une étude sur les données de \mathbf{X} qui ne sont pas normalisées. Par conséquent, le critère **VNR** ne peut pas assurer une optimalité dans la sélection des CPs significatives, plus particulièrement en présence des variables indépendantes de variances importantes ;
- iii.* La dernière et l'unique possibilité envisageable est de supposer que :

$$\mathbf{A} = \Sigma \quad (3.113)$$

et

$$\mathbf{S} = \Sigma^{-1} \quad (3.114)$$

En présence de bruit de mesures de variances non nulles, la matrice de corrélation Σ est inversible. Ainsi, Σ^{-1} représente la matrice de covariance des données de \mathbf{Y} . Par conséquent, le vecteur de données $\mathbf{y}(k)$ peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{y}(k) = \Sigma^{-1}\mathbf{x}(k) \quad (3.115)$$

Puisque \mathbf{P} est une matrice orthonormée, i.e. $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, la décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariance \mathbf{S} des données de \mathbf{Y} mène à la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \Sigma^{-1} = \mathbf{P}\Lambda^{-1}\mathbf{P}^T \quad (3.116)$$

L'interprétation théorique de l'équation précédente prouve que les variables de \mathbf{Y} disposent des mêmes CPs que celles des variables de \mathbf{X} . La distinction se manifeste uniquement dans les variances de telles CPs. Posons $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des CPs qui correspondent aux données de \mathbf{Y} , nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(k) &= \mathbf{P}^T \mathbf{y}(k) = \mathbf{P}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}(k) \\ &= \Lambda^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{x}(k) = \Lambda^{-1} \mathbf{t}(k) \end{aligned} \quad (3.117)$$

où, d'après (2.15), \mathbf{t} représente le vecteur des CPs de \mathbf{X} . Puisque ces CPs sont caractérisées par des variances qui sont égales aux valeurs propres de Σ , i.e. $\mathbb{E}\{\mathbf{t}\mathbf{t}^T\} = \Lambda$, on montre alors que :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{h}\mathbf{h}^T\} = \Lambda^{-1} \mathbb{E}\{\mathbf{t}\mathbf{t}^T\} \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \quad (3.118)$$

Par conséquent, nous déduisons que les CPs de \mathbf{Y} sont les mêmes que celles de \mathbf{X} mais de variances inverses. Pour cette raison, nous avons appelé cette approche analyse en composantes principales pondérées par leurs variances inversées (ACPVI).

D'après l'équation (3.116), nous remarquons qu'une telle décomposition engendre des valeurs propres dans l'ordre croissant. Cependant, le principe communément connu par une ACP est d'organiser les valeurs propres dans un ordre décroissant. Pour cela, l'équation (3.116) peut se réécrire comme suit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{G}^T \quad (3.119)$$

avec

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{m-q}, \mathbf{g}_{m-q+1}, \dots, \mathbf{g}_m] = [\mathbf{p}_m, \dots, \mathbf{p}_{q+1}, \mathbf{p}_q, \dots, \mathbf{p}_1] \quad (3.120)$$

et

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_{m-q}, d_{m-q+1}, \dots, d_m\} = \text{diag}\{\lambda_m^{-1}, \dots, \lambda_{q+1}^{-1}, \lambda_q^{-1}, \dots, \lambda_1^{-1}\} \quad (3.121)$$

Puisque \mathbf{S} est une matrice de covariance, cela semblerait contradictoire avec notre recommandation concernant la nature des données sur lesquelles on doit appliquer un critère basé sur le principe de la variance non reconstruite. Toutefois, l'organisation des valeurs propres de cette matrice de covariance qui est obtenue par un changement de représentation des données présentera un avantage majeur pour notre approche. Ainsi, ce type de matrice de covariance qui représente l'inverse d'une matrice de corrélation d'autres données sera le plus adapté pour une utilisation du critère **VNR** sur des données non normalisées.

Nous avons supposé que q représente le nombre optimal des CPs pour les données de \mathbf{X} . En présence des variables indépendantes et/ou quasi-indépendantes, la q ème CP représentera certainement l'une de ces variables. Ainsi, l'inversion de la matrice de corrélation

n'influe pas leurs natures. D'après (3.120) et (3.121), les q CPs significatives dans \mathbf{X} se transforment en des relations de redondance dans \mathbf{Y} . Inversement, les $(m - q)$ relations de redondance dans \mathbf{X} se transforment en des CPs significatives dans \mathbf{Y} . Ces effets sont dus aux inverses des valeurs propres résiduelles de Σ qui produisent des valeurs propres très importantes dans Σ^{-1} . Evidemment s'il existe un ensemble de variables indépendantes dans \mathbf{X} , elles se mutent dans \mathbf{Y} sans modification considérable dans leurs indépendances. Ainsi, la dernière parmi elles sera associée au vecteur propre \mathbf{g}_{m-q+1} (3.120).

Afin de sélectionner les q CPs de la matrice \mathbf{X} , nous envisageons qu'il est plus facile d'identifier les $(m - q)$ CPs de la matrice \mathbf{Y} en utilisant le principe de la variance non reconstruite.

3.4.2.2 VNR basée sur l'ACPVI

Posons $\mathbf{y}^*(k)$ le vecteur des données obtenues lors du fonctionnement normal. En présence d'un défaut simple \mathcal{W}_i porté par la i ème direction ζ_i et d'amplitude $w(k)$ à l'instant k , le vecteur de données $\mathbf{y}(k)$ peut s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}^*(k) + \zeta_i w(k) \quad (3.122)$$

Le vecteur $\zeta_i \in \mathbb{R}^m$ représente la i ème colonne de la matrice identité. Il correspond à la variable supposée en défaut. Ainsi, la reconstruction d'une telle variable engendre un vecteur reconstruit de données comme suit :

$$\mathbf{y}_i(k) = \mathbf{y}(k) - \zeta_i \hat{w}_i(k) \quad (3.123)$$

où \hat{w}_i est une estimation de w . Une telle estimation est optimale en minimisant l'erreur quadratique d'estimation $\|\tilde{\mathbf{Z}}\mathbf{y}_i(k)\|^2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{w}_i(k) &= \arg \min_{w(k)} \left\{ \|\tilde{\mathbf{Z}}\mathbf{y}_i(k)\|^2 \right\} \\ &= (\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i)^{-1} \zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{y}(k) \end{aligned} \quad (3.124)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \quad (3.125)$$

Notamment, $\tilde{\mathbf{Z}}$ est la matrice de projection dans le sous-espace résiduel de \mathbf{Y} . $\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\kappa)}$ est composée des $(m - \kappa)$ derniers vecteurs propres de la matrice \mathbf{G} et κ représente le nombre des CPs utilisées dans le modèle.

On note que la i ème variable est reconstructible si $\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i \neq 0$, i.e. le vecteur $\tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i$ est non nul.

Puisque les données de \mathbf{X} sont centrées alors celles de \mathbf{Y} le sont également. Par conséquent, la moyenne de \hat{w}_i est nulle. Ainsi, la variance de l'erreur de reconstruction de la i ème variable dans le sous-espace résiduel est définie par :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(\kappa) &= \text{Var} \left\{ \zeta_i^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}_i) \right\} = \text{Var} \left\{ \hat{w}_i \right\} \\ &= \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \mathbb{E} \{ \mathbf{y} \mathbf{y}^T \} \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i)^2} = \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \Sigma^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i)^2} = \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i)^2} \end{aligned} \quad (3.126)$$

On peut alors déduire le critère de la variance globale non reconstruite noté **VNRVI** et qui dépend de κ comme suit :

$$\mathbf{VNRVI}(\kappa) = \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_i^2(\kappa)}{\zeta_i^T \Sigma^{-1} \zeta_i} = \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \Sigma^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i}{(\zeta_i^T \Sigma^{-1} \zeta_i) (\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i)^2} = \sum_{i=1}^m \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \Sigma^{-1} \zeta_i) (\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i)^2} \quad (3.127)$$

Notons par κ_{op} le nombre optimal des CPs dans \mathbf{Y} . En se basant sur ce critère, nous suggérons que son minimum correspond à $\kappa_{op} = (m - q)$ CPs :

$$\kappa_{op} = \arg \min_{\kappa} \{\mathbf{VNRVI}(\kappa)\} = m - q \quad (3.128)$$

Par conséquent, le nombre optimal des CPs de \mathbf{X} est déduit de la manière suivante :

$$\ell_{op} = q = m - \kappa_{op} = m - \arg \min_{\kappa} \{\mathbf{VNRVI}(\kappa)\} \quad (3.129)$$

3.4.2.3 Consistance théorique du critère **VNRVI**

En posant

$$\tilde{u}_i^2(\kappa) = \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \Sigma^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i)} \quad (3.130)$$

et

$$\hat{u}_i^2(\kappa) = \tilde{u}_i^2(\kappa) \left(\frac{1 - \zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i} \right) \quad (3.131)$$

et d'après l'équation (3.126), la variance non reconstruite de la i ème variable pondérée par sa variance originelle peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{\sigma_i^2(\kappa)}{\zeta_i^T \Sigma^{-1} \zeta_i} = \frac{\tilde{u}_i^2(\kappa) + \hat{u}_i^2(\kappa)}{\zeta_i^T \Sigma^{-1} \zeta_i} \quad (3.132)$$

Etant donné que la quantité $\zeta_i^T \Sigma^{-1} \zeta_i$ est une constante qui ne dépend pas de κ , notre étude du comportement du nouveau critère peut se limiter aux deux termes \tilde{u}_i^2 et \hat{u}_i^2 . Dans ce cadre, nous avons montré théoriquement dans l'annexe C que la fonction \tilde{u}_i^2 est monotone décroissante en κ . D'autre part, le terme $\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i$ tend vers zéro quand κ tend vers m . Cela implique par conséquent que \hat{u}_i^2 devient croissante en montant rapidement quand κ tend vers m . De cette manière, l'expression (3.132) doit avoir nécessairement un minimum unique qui correspond à un nombre de CPs dans l'intervalle $[1, m]$. Ainsi, nous pouvons déduire également que le critère **VNRVI** aura un seul minimum global pour un nombre de CPs dans le même intervalle.

En revanche, il est crucial d'établir les conditions qui garantissent d'avoir théoriquement ce minimum en $(m - q)$ CPs. Dans ce cadre, il semblerait nécessaire de connaître tout d'abord la distribution du bruit dans les données de \mathbf{Y} . Selon l'équation (2.28), le vecteur de données $\mathbf{y}(k)$ peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{y}(k) = \Sigma^{-1} \hat{\mathbf{x}}(k) + \Sigma^{-1} \mathbf{v}(k) = \hat{\mathbf{y}}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (3.133)$$

où les vecteurs $\hat{\mathbf{y}}(k)$ et $\mathbf{w}(k)$ représentent respectivement les mesures sans bruit et le bruit au k ème instant. Ainsi, la matrice de covariance du bruit dans \mathbf{Y} est donnée par :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = \Sigma^{-1} \mathbb{E}\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} \Sigma^{-1} \quad (3.134)$$

où $\mathbb{E}\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\}$ représente la matrice de covariance du bruit dans les données de \mathbf{X} . D'après l'équation précédente, nous remarquons que le bruit dans \mathbf{Y} dépend fortement de celui dans \mathbf{X} . Néanmoins, la matrice de covariance exprimée par une telle équation est généralement non diagonale ce qui implique que le bruit \mathbf{w} est coloré.

D'après la démonstration que nous avons établie dans l'annexe D, le critère **VNRVI** garantit son minimum en $\kappa = (m - q)$ CPs si :

$$\frac{d_{m-q+1}}{d_m} \leq \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i} \quad \text{pour } \kappa \geq m - q \quad (3.135)$$

et

$$d_{m-q} \geq \left(1 + \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i} \right) d_{m-q+1} \quad \text{pour } \kappa < m - q \quad (3.136)$$

où $\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\kappa)}$ et $\tilde{\mathbf{G}}_q \in \mathbb{R}^{m \times q}$ sont deux matrices constituées respectivement par les $(m - \kappa)$ et les q derniers vecteurs propres de la matrice \mathbf{G} . Notamment, nous pouvons réécrire les deux inégalités précédentes en fonction des valeurs propres de la matrice Σ . Selon l'équation (3.121), elles se transforment respectivement comme suit :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_q} \leq \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i} \quad \text{pour } \kappa \geq m - q \quad (3.137)$$

et

$$\lambda_q \geq \left(1 + \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i} \right) \lambda_{q+1} \quad \text{pour } \kappa < m - q \quad (3.138)$$

L'interprétation de l'inégalité (3.138) impose que la variance d'un signal quelconque doit être plus grande que celle du bruit, ce qui représente une condition très ordinaire. Cependant, la contrainte exprimée dans (3.137) signifie que les valeurs propres les plus significatives ($\lambda_1, \dots, \lambda_q$) doivent avoir des valeurs très proches les unes des autres. Toutefois, la présence des variables indépendantes et/ou quasi-indépendantes peut alléger une telle contrainte en garantissant un minimum du critère **VNRVI** en $(m - q)$ CPs pour $\kappa \geq m - q$. Cette déduction est affirmée grâce à la démonstration de l'annexe A qui est également valable pour ce nouveau critère. Une telle démonstration prouve que ces variables sont toujours considérées comme des CPs résiduelles. Effectivement, l'intérêt de notre approche par la proposition de la matrice \mathbf{Y} est d'avoir contrairement au cas classique, un sous-espace résiduel inversé dont les premières CPs que constituant un tel sous-espace représentent ce type de variables suivies par les CPs les plus significatives dans \mathbf{X} . Cette particularité du critère **VNRVI** peut garantir une sélection optimale des CPs tout en considérant les variables indépendantes et quasi-indépendantes.

3.5 Résultats de simulation

Afin d'illustrer les résultats obtenus par les critères proposés, nous avons considéré le même exemple du deuxième chapitre. Nous rappelons qu'un tel exemple représente quatre ensembles de variables \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} dont chacun a été généré selon trois cas différents d'un bruit *i.i.d.* En s'appuyant sur l'analyse et les interprétations menées dans le chapitre précédent, nous avons conclu que ces ensembles de variables sont constitués respectivement de 5, 6, 7 et 8 CPs malgré le changement considérable de la variance du bruit.

Notamment, les critères proposés dans ce chapitre se basent sur des minimisations par rapport au nombre de CPs pour la détermination du modèle optimal. Exceptionnellement, les critères \mathbf{VNR}_φ et \mathbf{VNR}_ψ dépendent également d'un seuil de signification α . Puisqu'on dispose d'une connaissance *a priori* sur les nombres optimaux des CPs constituant chaque ensemble des données, nous avons réalisé une étude de performance plus particulièrement pour ces deux critères par rapport à 100 réalisations en variant le niveau de confiance $(1 - \alpha)$ dans l'intervalle $[1, 99]\%$ avec un pas de 1%. Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 affichent les pourcentages de sélections correctes des nombres appropriés des CPs dans les bases des données étudiées respectivement pour les trois différents cas de bruit *i.i.d.* Nous remarquons que le critère \mathbf{VNR}_φ sélectionne dans plus de 80% des réalisations les nombres désirés des CPs avec des valeurs de niveau de confiance généralement proches de 20%. En revanche, il montre parfois une allure fluctuante surtout lors d'un bruit de faibles variances. En comparant les courbes des deux critères, nous observons clairement que celui du \mathbf{VNR}_ψ est beaucoup plus performant. Sa minimisation par rapport à ℓ converge vers les nombres corrects des CPs en considérant des valeurs habituelles pour le seuil de signification α . Il montre ainsi une amélioration prometteuse par rapport au critère \mathbf{VNR}_φ .

En considérant des seuil de signification α égaux à 80% pour \mathbf{VNR}_φ et 2% pour \mathbf{VNR}_ψ , les figures 3.4 et 3.5 illustrent les allures en ℓ de ces deux critères appliqués sur les ensembles $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ respectivement pour un bruit *i.i.d.* de faible variance ($\sigma^2 = 0.002$). Ces deux critères peuvent déterminer une dimension optimale d'un modèle ACP sous la contrainte d'un choix très approprié des valeurs de leurs seuils de signification.

Face à la difficulté d'une telle tâche, le troisième nouveau critère \mathbf{VNRVI} montre une efficacité très avantageuse en évitant les problèmes des quantiles par la considération d'un autre principe totalement différent. Selon les dernières courbes illustrées dans les premières et deuxièmes colonnes des figures 3.4 et 3.5, les minima d'un tel critère correspondent à $\kappa_{op} = 7$ CPs dans toutes les bases des données transformées qui sont associées à celles de \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} . Ainsi, les nombres des variables m dans ces ensembles sont respectivement 12, 13, 14 et 15. En se basant sur l'équation (3.129), nous pouvons déduire que les nombres optimaux des CPs dans les ensembles \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} sont respectivement 5, 6, 7 et 8 CPs.

Puisque le bruit de mesures est représenté par des variables aléatoires, une simple réalisation ne peut pas valider ces résultats. De la même manière qu'au chapitre précédent, nous avons calculé un pourcentage par rapport à 1500 réalisations des nombres de CPs retenues à l'aide du critère \mathbf{VNRVI} en se référant à l'équation (3.129). En considérant un nombre d'observations $N = 1500$ dans les trois différents cas de bruit *i.i.d.*, le tableau 3.2 prouve qu'un tel critère a déterminé dans 100% des réalisations les nombres désirés

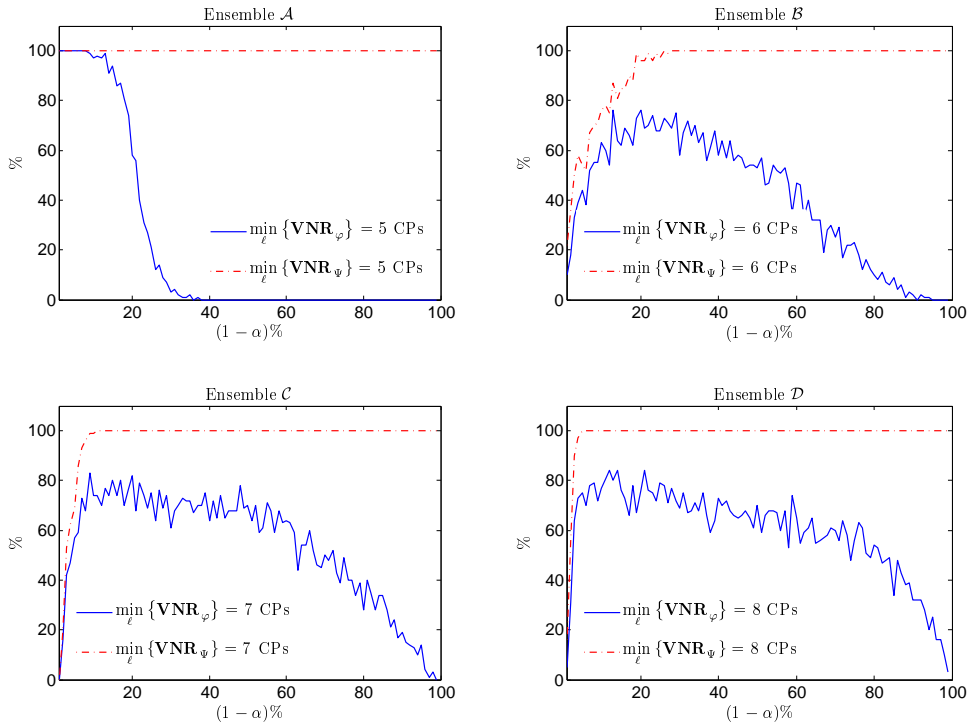


FIGURE 3.1 – Pourcentages de sélections correctes en fonction de $(1 - \alpha)$ par \mathbf{VNR}_{φ} et \mathbf{VNR}_{ψ} sur tous les ensembles des variables avec un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.002$

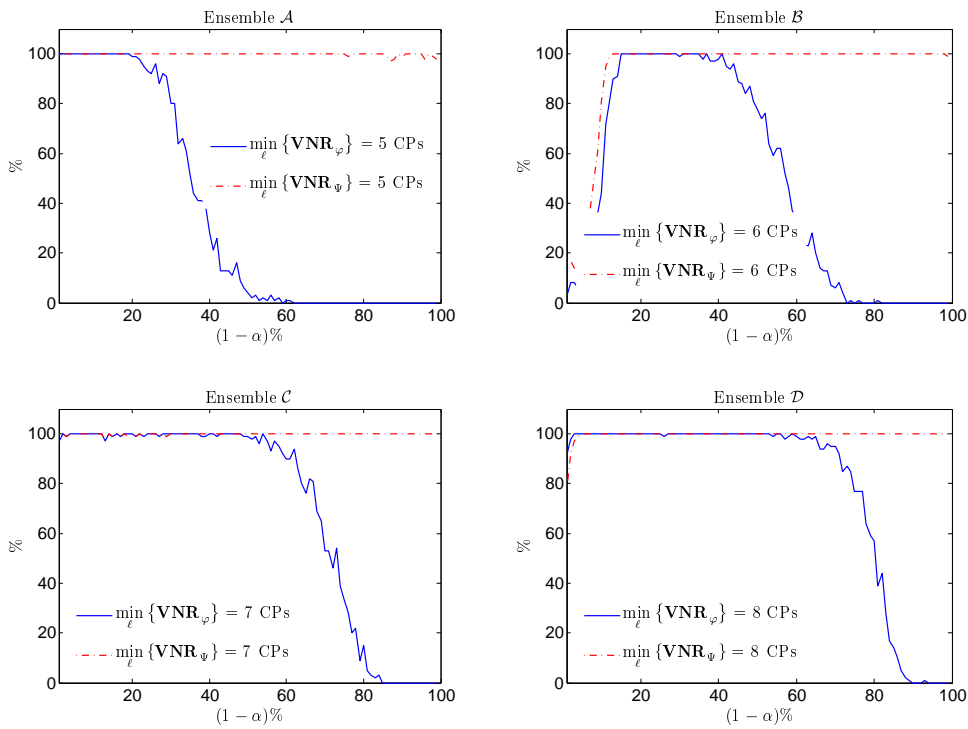


FIGURE 3.2 – Pourcentages de sélections correctes en fonction de $(1 - \alpha)$ par \mathbf{VNR}_{φ} et \mathbf{VNR}_{ψ} sur tous les ensembles des variables avec un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.2$

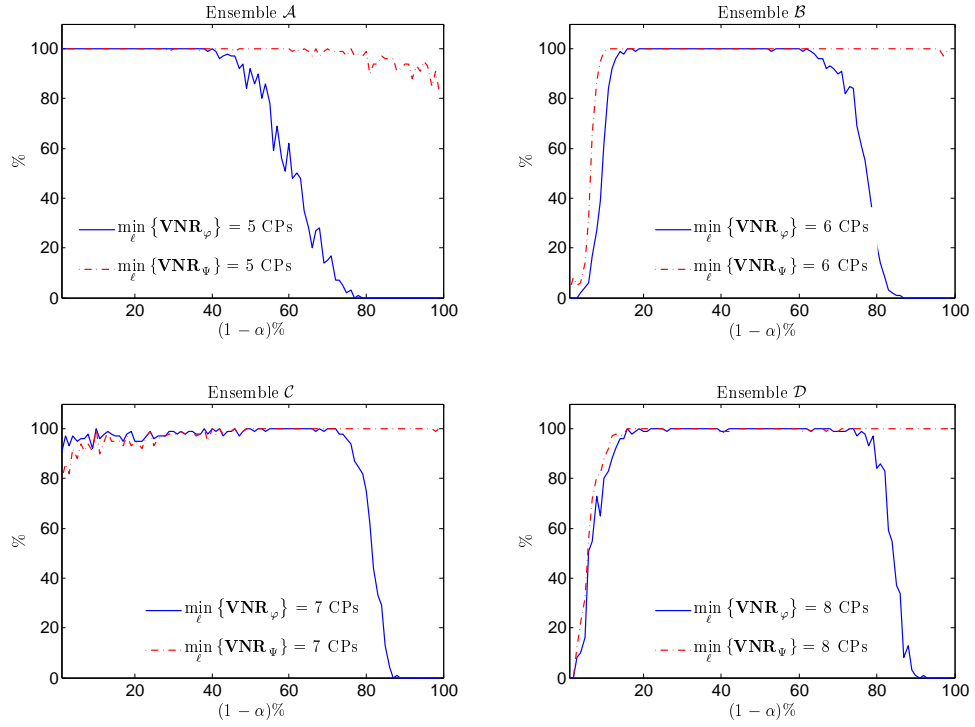


FIGURE 3.3 – Pourcentages de sélections correctes en fonction de $(1 - \alpha)$ par \mathbf{VNR}_{φ} et \mathbf{VNR}_{ψ} sur tous les ensembles des variables avec un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.5$

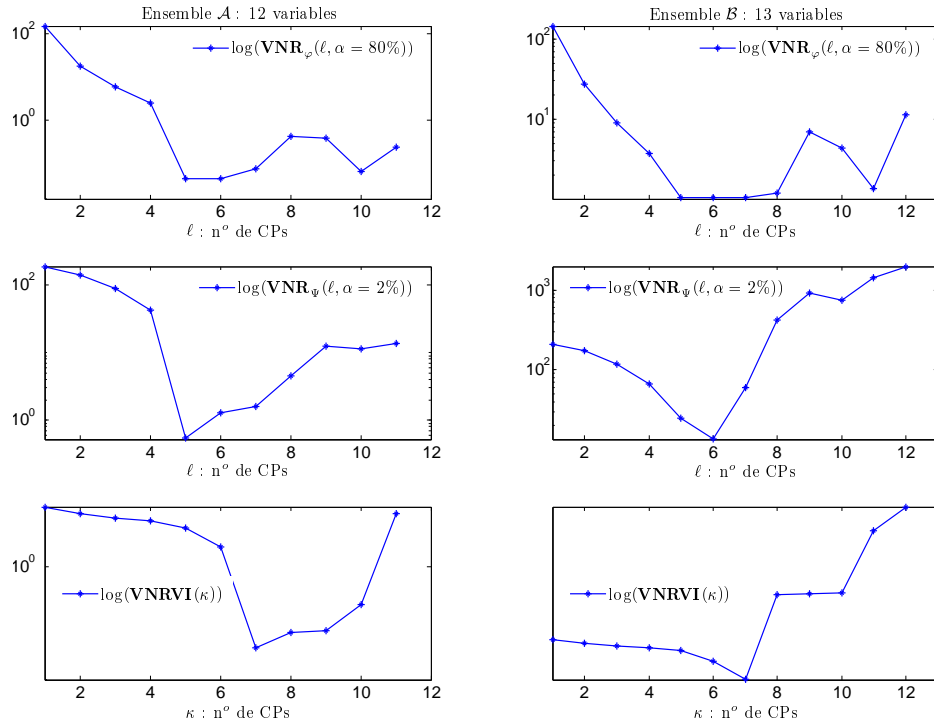


FIGURE 3.4 – Allures des nouveaux critères appliquées sur les ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} , respectivement en 1^{ère} et 2^{ème} colonne, en considérant un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.002$

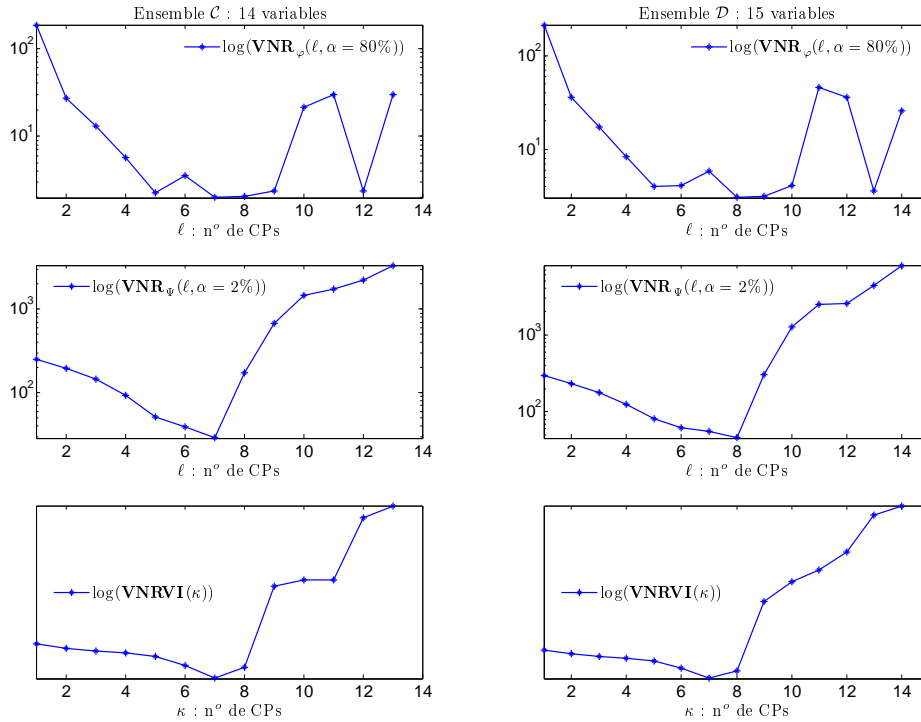


FIGURE 3.5 – Allures des nouveaux critères appliquées sur les ensembles \mathcal{C} et \mathcal{D} , respectivement en 1^{ère} et 2^{ème} colonne, en considérant un bruit *i.i.d.* de variance $\sigma^2 = 0.002$

	Ensemble \mathcal{A}	Ensemble \mathcal{B}	Ensemble \mathcal{C}	Ensemble \mathcal{D}
Critère :	VNRVI	VNRVI	VNRVI	VNRVI
Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.002$				
5 CPs (%)	100			
6 CPs (%)		100		
7 CPs (%)			100	
8 CPs (%)				100
Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.2$				
5 CPs (%)	100			
6 CPs (%)		100		
7 CPs (%)			100	
8 CPs (%)				100
Bruit <i>i.i.d.</i> : $\sigma^2 = 0.5$				
5 CPs (%)	100			
6 CPs (%)		100		
7 CPs (%)			100	
8 CPs (%)				100

TABLE 3.2 – Pourcentage, par rapport à 1500 réalisations, des nombres de CPs sélectionnées dans les ensembles des données en se basant sur le critère **VNRVI** ($N = 1500$ observations générées selon trois différents cas de bruit *i.i.d.*)

des CPs. Son efficacité présente un avantage prometteur par rapport aux efficacités des autres critères de sélection présentés dans cette thèse.

Avec le critère **VNRVI**, l'optimalité de sélection est assurée par un nombre d'observations N assez inférieur à celui exigé pour le critère **MDL** présenté au deuxième chapitre. En comparant les résultats des tableaux 3.2 et 2.7, nous distinguons clairement la différence au niveau du nombre d'observations considérées. Dans ce contexte, le paramètre N est exprimé implicitement dans l'expression du **VNRVI** car il influe sur les valeurs et vecteurs propres considérés. Ainsi, cette influence sera négligeable voire nulle pour un nombre N suffisant et fini dans le sens où la matrice de covariance des données demeure constante.

3.6 Conclusion

Ce chapitre présente nos contributions dans le thème d'une modélisation optimale par ACP en utilisant le principe de la variance non reconstruite. Face à l'abondance des critères de sélection disponibles dans la littérature et qui ont montré effectivement une divergence remarquable dans les résultats obtenus, nous avons motivé théoriquement l'importance de la précision dans le choix d'une structure adaptée du modèle ACP. Dans la mesure où celui-ci n'est pas optimal, une conséquence évidente est prouvée sur la détectabilité de défauts et qui aura sans doute un effet également sur l'isolabilité de défauts.

En partant du principe de la variance de l'erreur de reconstruction, nous avons établi une expression généralisée pour une telle variance valable pour tout un indice de détection ayant une forme quadratique. Dans ce cadre, nous avons présenté les indices de détection proposés dans la littérature. Ainsi, nous avons établi pour chacun de ces indices sa variance non reconstruite en s'appuyant sur celle généralisée.

Cela nous a permis de conclure suite à une étude théorique des différentes variances obtenues que la plupart, exceptant quelques-unes, sont inutiles pour le choix du modèle. Plus particulièrement, nous avons montré que la variance relative à l'indice SPE n'est autre que celle exprimée par le critère **VNR** étudié dans le deuxième chapitre. Ainsi, notre contribution dans ce cadre est introduite par la variance non reconstruite (\mathbf{VNR}_φ) associée à l'indice combiné. Celle-ci dépend du nombre des CPs considérées dans le modèle ainsi qu'un seuil de signification qui caractérise les limites de contrôle des indices de détection. Malheureusement, l'étude de ce critère n'a pas abouti à une consistance théorique de son comportement. En effet, seule l'expérience prouve qu'il est capable de déterminer la dimension du modèle en se référant à un choix très approprié du seuil de signification considéré. Dans ce contexte, nous avons proposé un deuxième nouveau critère (\mathbf{VNR}_ψ) basé sur une nouvelle distance combinée. L'objectif étant de faciliter la tâche du choix de la valeur d'un tel seuil. Le nouveau critère montre des résultats plus efficaces et mieux stationnaires que ceux du \mathbf{VNR}_φ . Toutefois, ils restent dans leurs globalités incertains aussi faut-il disposer d'une connaissance *a priori* ou d'une expertise pour prendre la décision convenable. En effet, nous avons considéré que ces critères sont empiriques car ils s'appuient uniquement sur l'expérience.

La limitation qui a été prouvée théoriquement dans le chapitre précédent pour le critère **VNR**, a été un avantage d'une nouvelle proposition. Cette dernière est inspirée du

principe des problèmes inverses en proposant un changement de représentation des données. Nous avons supposé que les données normalisées de \mathbf{X} observées réellement peuvent être en réalité des dérivées linéaires d'autres données de \mathbf{Y} . Une ACP utilisant les nouvelles données de \mathbf{Y} engendre les mêmes CPs que celles de \mathbf{X} mais de variances inversées. Pour cela, la nouvelle approche est appelée ACPVI. En s'appuyant sur le principe de la variance de l'erreur de reconstruction, nous avons proposé un nouveau critère **VNRVI**. En effet, la détermination du nombre optimal des CPs dans \mathbf{Y} en utilisant ce critère sert à déduire celui de \mathbf{X} en considérant évidemment les variables indépendantes et quasi-indépendantes. En outre, nous avons établi théoriquement les conditions garantissant l'optimalité de sélection par un tel critère. Les résultats de simulation ont validé notre théorie en prouvant que le critère **VNRVI** apporte un avantage et une efficacité considérables par rapport à tous les critères présentés dans le deuxième chapitre pour le choix de la structure adaptée du modèle ACP.

4

Théorie d'un diagnostic de défauts par ACP

Sommaire

4.1	Introduction	97
4.2	Isolation et isolabilité de défauts par reconstruction	98
4.2.1	Généralisation de l'isolation et l'isolabilité de défauts	98
4.2.1.1	Isolation de défauts	98
4.2.1.2	Isolabilité de défauts	101
	Isolabilité par reconstruction de l'indice <i>SPE</i>	102
	Isolabilité par reconstruction de l'indice <i>SWE</i>	103
	Isolabilité par reconstruction de l'indice <i>T2</i> de Hotelling	103
	Isolabilité par reconstruction de l'indice de Mahalanobis	104
	Isolabilité par reconstruction de l'indice combiné	105
4.2.2	Analyse d'isolabilité par reconstruction de l'indice combiné versus celles de <i>SPE</i> et <i>T2</i> de Hotelling	105
4.3	Diagnostic de défauts simples par les contributions	107
4.3.1	Contributions par décomposition complète : <i>CDC</i>	109
4.3.2	Contributions par décomposition partielle : <i>PDC</i>	109
4.3.2.1	<i>PDC</i> à l'indice <i>T2</i> de Hotelling	109
4.3.2.2	<i>PDC</i> à l'indice <i>SPE</i> basée sur les résidus	110
4.3.2.3	<i>PDC</i> à l'indice <i>SPE</i> basée sur les CPs résiduelles	111
4.3.2.4	<i>PDC</i> à un indice quadratique	111
4.3.3	Contributions diagonales : <i>DC</i>	112
4.3.4	Contributions par reconstruction : <i>RBC</i>	112
4.3.5	Contributions par angle : <i>ABC</i>	113
4.3.6	Analyse de diagnosticabilité	113
4.3.6.1	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>CDC</i>	114
4.3.6.2	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>PDC</i>	114
4.3.6.3	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>DC</i>	114
4.3.6.4	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>RBC</i>	115

4.4	Nouvelles approches pour un diagnostic de défauts multiples	115
4.4.1	Contributions par reconstruction multidimensionnelle	116
4.4.2	<i>RBC ratio</i>	117
4.5	Exemple de synthèse	119
4.5.1	Diagnostic d'un défaut simple	122
4.5.2	Diagnostic de défauts multiples	123
4.6	Conclusion	131

4.1 Introduction

La détection et le diagnostic de défauts sur les processus forment une démarche essentielle afin de leur assurer un fonctionnement sûr et efficace. Selon [Kariwala et al. \(2010\)](#) et [Kourti \(2005\)](#), une telle démarche peut se baser généralement sur des modèles quantitatifs, des modèles qualitatifs ou l'historique de processus qui représente l'intérêt de cette thèse. Dans ce contexte, le contrôle statistique de processus a reçu une attention ainsi qu'un succès considérables aux niveaux des applications. Ce succès peut être attribué à la disponibilité en permanence d'une grande quantité de données collectées lors du fonctionnement normal de processus. Ainsi, ces données favorisent le développement des modèles statistiques qui peuvent atteindre une grande précision dans la détection de toutes déviations par rapport à un fonctionnement normal. Dans ce cadre, l'ACP est une approche très adaptée pour un contrôle statistique de processus. Ainsi, elle a été intensément explorée dans le suivi et le diagnostic de plusieurs processus ([Nomikos et MacGregor, 1995](#); [Qin, 2003](#); [Tharrault et al., 2008](#)).

Dans la littérature, le thème du diagnostic de défauts a quand même reçu une attention moins considérable que celui de la détection de défauts. L'approche la plus classique et en même temps très populaire pour un diagnostic est basée sur l'analyse des contributions ([Nomikos et MacGregor, 1995](#); [Yue et Qin, 2001](#); [Qin, 2003](#); [Alcala et Qin, 2009](#); [Kariwala et al., 2010](#); [Alcala et Qin, 2011](#)). Le principe des contributions s'appuie généralement sur la quantification de la part de chaque variable dans le calcul d'un indice de détection donné. Dans ce cadre, nous avons proposé une nouvelle forme de contribution par décomposition partielle de l'indice *SPE* ([Mnassri et al., 2008b, 2009b](#)). Une analyse de diagnosticabilité de défauts basée sur les contributions montre que celles-ci garantissent un diagnostic correct uniquement si les défauts sont simples (unidimensionnels) et de grandes amplitudes. Dans le cas contraire, les approches des contributions peuvent généralement considérer d'autres variables en défaut. Ainsi, il sera difficile d'isoler celles réellement en défaut. En outre, les contributions ne permettent pas d'isolation des défauts multiples où plusieurs variables sont simultanément en défaut en raison de la corrélation entre les variables. Cette corrélation a été la clé d'un diagnostic mieux décisif basé sur l'approche de reconstruction des indices de détection ([Dunia et al., 1996](#); [Dunia et Qin, 1998b,c,a](#); [Yue et Qin, 2001](#); [Qin, 2003](#); [Alcala et Qin, 2009, 2011](#)). Le principe d'une telle méthode s'est fondé sur l'élimination de l'influence de défauts sur l'indice de détection par une reconstruction des variables à l'aide d'un modèle ACP.

Le succès de l'utilisation de l'ACP pour le diagnostic de défauts sur les processus en utilisant l'approche de reconstruction a été enrichi par le développement d'un concept fondamental qui représente l'isolabilité de défauts. On définit l'isolabilité comme étant la capacité d'un diagnostic à retrouver les origines de défauts. Dans la littérature, un tel concept a été négligemment étudié dans le cadre de l'ACP en le développant uniquement pour une reconstruction de l'indice *SPE* ([Dunia et Qin, 1998b,c,a](#); [Qin, 2003](#)). Ce chapitre a pour objectif d'étendre et d'unifier un tel concept à tout indice de détection ayant une forme quadratique. Ainsi, cette idée nous a permis la réalisation d'une analyse théorique d'isolabilité de défauts par reconstruction de la distance combinée versus celles des indice que combine en mettant en avant l'avantage que peut jouer une telle distance dans l'isolation de défauts plus complexes ([Mnassri et al., 2012a](#)).

La contribution par reconstruction (*reconstruction based contribution : RBC*) a été récemment proposée pour diagnostiquer les défauts simples ayant de grandes amplitudes (Alcala et Qin, 2009, 2011). On note qu'une telle approche fait partie des méthodes des contributions. Mnassri et al. (2012b) ont étendu cette approche afin d'assurer un diagnostic de défauts multiples. Pour cela, nous proposons dans ce chapitre une analyse de diagnosticabilité montrant que la nouvelle contribution multidimensionnelle garantit un diagnostic correct de défauts multiples de grandes amplitudes. Afin de ne pas se limiter uniquement à ce type de défauts, l'objectif de ce chapitre représente également la proposition d'une nouvelle méthode basée sur celle de *RBC* pour garantir une identification et isolation de défauts détectables plus complexes. Généralement, l'isolation de ce type de défauts s'appuie sur des seuils de validation. Pour cela, nous avons proposé une approche dite *RBC ratio (RBCr)* (Mnassri et al., 2012b). Une diagnosticabilité de défauts basée sur cette nouvelle méthode prouve une garantie d'un diagnostic correct sous la contrainte que les amplitudes de tels défauts satisfont une condition suffisante d'isolabilité.

4.2 Isolation et isolabilité de défauts par reconstruction

En suivant une démarche semblable à celle de la détectabilité de défauts évoquée dans la section 3.2 du troisième chapitre, nous pouvons ainsi généraliser l'étude d'isolation et isolabilité de défauts par reconstruction d'un indice de détection quelconque ayant une forme quadratique.

4.2.1 Généralisation de l'isolation et l'isolabilité de défauts

En s'appuyant sur l'approche de reconstruction, nous notons que les défauts simples (unidimensionnels) représentent un cas particulier. Pour cela, nous envisageons une étude plus généralisée en considérant des défauts multiples (multidimensionnels). Nous avons supposé à partir de l'équation (2.59) qu'un \mathcal{J} ème ensemble composé de r variables est théoriquement affecté par un défaut réel noté $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$. Dans la pratique, un tel défaut est inconnu ce qui a suscité une démarche pour son isolation.

4.2.1.1 Isolation de défauts

Afin d'identifier et isoler le défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ qui est par hypothèse inconnu, le principe de l'approche de reconstruction présume un défaut supposé ou assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ affectant un \mathcal{I} ème ensemble composé de r variables supposées en défaut. Ainsi, des reconstructions d'état en se basant les indices de détection et un modèle ACP peuvent conduire à l'isolation du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$. Nous rappelons que la reconstruction consiste à estimer un vecteur $\mathbf{x}_{\mathcal{I}}$ de données reconstruites censées être insensibles au défaut assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) &= \mathbf{x}(k) - \Xi_{\mathcal{I}}\mathbf{f}(k) \\ &= \mathbf{x}(k) - \Xi_{\mathcal{I}}\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k)$ est une estimation optimale de $\mathbf{f}(k)$ qui représente le vecteur d'amplitudes des composants du défaut dans les directions des variables constituant le \mathcal{I} ème ensemble. Une telle estimation est obtenue par une minimisation d'un indice de détection $\gamma_{\mathcal{I}}$ insensible à un tel défaut :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k) = \arg \min_{\mathbf{f}(k)} \{\gamma_{\mathcal{I}}(k)\} \quad (4.2)$$

où

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\|^2 \quad (4.3)$$

On peut déduire que l'estimé du vecteur d'amplitudes du défaut supposé ainsi que le vecteur de données reconstruites projeté dans le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice \mathcal{M} de γ sont respectivement donnés par :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k) = (\Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M} \Xi_{\mathcal{I}})^{-1} \Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) = (\mathbf{I}_m - \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} (\Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M} \Xi_{\mathcal{I}})^{-1} \Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \quad (4.5)$$

Le \mathcal{I} ème ensemble de variables n'est reconstructible que si la matrice $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}$ est de plein rang colonne. Cela implique que les variables constituant un tel ensemble ne doivent pas être colinéaires.

Dans le but d'une simplification d'écritures, une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}$ mène au résultat suivant :

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} = \Xi_{\mathcal{I}}^o \mathbf{D}_{\mathcal{I}} \mathbf{V}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.6)$$

où $\Xi_{\mathcal{I}}^o \in \mathbb{R}^{m \times r}$ et $\mathbf{V}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ sont deux matrices orthonormées. $\mathbf{D}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice diagonale contenant les r valeurs propres de la matrice $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}$. Ainsi, l'équation (4.5) peut être réécrite comme suit :

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) = (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \quad (4.7)$$

On note que $(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})$ est une matrice idempotente. Par conséquent, l'indice de détection insensible au défaut supposé peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{I}}(k) &= \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \\ &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Puisque le numéro \mathcal{I} correspond à un ensemble composé de r variables supposées en défaut, il représente alors un numéro combinatoire de scénarii de défauts à considérer :

$$\mathcal{I} = \left\{1, \dots, \frac{m!}{r!(m-r)!}\right\} \quad (4.9)$$

où ! représente l'opérateur factoriel. Dans le cas de défauts simples, $\mathcal{I} = i = \{1, \dots, m\}$.

En considérant le vecteur d'observation de l'équation (2.59) qui est composé du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, l'indice de détection insensible au défaut supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ pourra être exprimé en fonction de celui réel comme suit :

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \Xi_{\mathcal{J}} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}(k)\|^2 \quad (4.10)$$

A partir de cette expression, deux déductions sont envisageables :

- i. Si la direction de reconstruction $\Xi_{\mathcal{I}}$ est celle du défaut réel, i.e. $\mathcal{I} = \mathcal{J}$, on peut montrer que :

$$\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^o \Xi_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 \leq \Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2 \quad (4.11)$$

où $\Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2$ est un seuil de contrôle défini de la même manière que celui exprimé dans l'équation (4.13).

L'expression de l'indice $\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}$ implique que l'influence du défaut réel est complètement annulée. Egalement, les valeurs d'un tel indice reconstruit sont inférieures au seuil de détection Γ^2 donné par l'équation (3.2).

- ii. Si la direction de reconstruction $\Xi_{\mathcal{I}}$ est différente de celle du défaut réel $\Xi_{\mathcal{J}}$ alors l'indice reconstruit est probablement supérieur à un seuil de contrôle approprié. Autrement dit, le principe de reconstruction assure qu'un défaut assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ ne peut pas être identifié comme un candidat si :

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 > \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \quad (4.12)$$

$\Gamma_{\mathcal{I}}^2$ représente une limite de contrôle pour l'indice reconstruit $\gamma_{\mathcal{I}}$. Puisque ce dernier est caractérisé par une forme quadratique, l'expression appropriée d'un tel seuil peut être déterminée en s'appuyant sur les travaux de Box (1954) :

$$\Gamma_{\mathcal{I}}^2 = g_{\gamma_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{\gamma_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.13)$$

avec

$$g_{\gamma_{\mathcal{I}}} = \frac{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^2]}{\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}]} \quad (4.14)$$

et

$$h_{\gamma_{\mathcal{I}}} = \frac{(\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}])^2}{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^2]} \quad (4.15)$$

Ainsi, tout défaut supposé ne vérifiant pas l'inégalité (4.12) est identifié avec celui du défaut réel. Par conséquent, on peut soupçonner des variables outre celles réellement en défaut. Selon l'indice γ avec lequel la reconstruction est réalisée, les ensembles $\hat{\mathcal{I}}_{\gamma}$ de variables considérées en défaut sont déterminés en obéissant à l'argument suivant :

$$\hat{\mathcal{I}}_{\gamma} = \arg_{\mathcal{I} \in \mathfrak{J}} \{ \gamma_{\mathcal{I}}(k) \leq \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \} \quad (4.16)$$

où \mathfrak{J} représente l'ensemble des combinaisons des directions de reconstructions possibles.

L'isolation du défaut réel consiste dans la réduction de l'ensemble $\hat{\mathcal{I}}_{\gamma}$ en le rendant composé uniquement de l'ensemble des variables réellement en défaut. Pour cela, plusieurs facteurs entrent en vigueur tels que l'amplitude du défaut lui-même, l'ampleur de la corrélation entre les variables ainsi que l'indice de détection considéré. Par conséquent, l'élaboration d'un concept de performance qui représente l'isolabilité de défauts semblerait cruciale.

4.2.1.2 Isolabilité de défauts

Dans le cadre de l'isolabilité, l'amplitude du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ doit être suffisamment importante afin de garantir que les valeurs de $\gamma_{\mathcal{I}}$ soient supérieures à $\Gamma_{\mathcal{I}}^2$. Cette contrainte peut nous mener à la détermination d'une condition suffisante d'isolabilité de défauts.

Puisque le défaut réel étant $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, on peut alors en se référant aux équations (4.7) et (3.5) déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)) \\ &= (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.17)$$

Celle-ci peut nous permettre d'écrire

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\| \geq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \quad (4.18)$$

Puisque $(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})$ est une matrice idempotente, on peut donc montrer en se basant sur l'équation (3.7) que :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \leq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})\| \times \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \leq \Gamma \quad (4.19)$$

Ainsi, la substitution de (4.19) dans (4.18) en considérant la positivité de la norme euclidienne mène à l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\| \geq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma \geq 0 \quad (4.20)$$

Afin que le défaut actuel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ soit suffisamment isolable de celui assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, la condition nécessaire donnée par l'inégalité (4.12) doit être satisfaite. Par conséquent, l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\|^2 \geq (\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma)^2 > \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \quad (4.21)$$

Ainsi, on déduit que l'amplitude du défaut réel doit satisfaire la condition suivante :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > \Gamma + \Gamma_{\mathcal{I}} \quad (4.22)$$

Néanmoins, le concept de l'isolabilité d'un défaut doit être établi une fois que le défaut lui-même est garanti détectable. En considérant l'idempotence de la matrice $(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})$, on montre que :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \leq \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \quad (4.23)$$

En se référant à l'inégalité (4.22), on peut déduire que :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > \Gamma + \Gamma_{\mathcal{I}} \quad (4.24)$$

D'après l'annexe E, nous montrons d'une manière générale que $\Gamma \geq \Gamma_{\mathcal{I}}$. En s'appuyant sur une telle relation ainsi que l'inégalité (3.10), la condition exprimée par (4.24) prouve que le défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ n'est pas garanti détectable. Cela signifie que la condition nécessaire

donnée par (4.12) est insuffisante pour garantir l'isolabilité d'un défaut. Pour cela, on doit imposer l'hypothèse suivante :

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) > \Gamma^2 \quad (4.25)$$

Celle-ci représente la nouvelle condition nécessaire qui doit être considérée plutôt que celle de donnée par l'inégalité (4.12). Après reformulation du problème en considérant une telle condition, le défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti isolable de celui assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ par reconstruction d'un indice quadratique γ quelconque si

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\Gamma \quad (4.26)$$

L'inégalité précédente représente la condition suffisante de l'isolabilité d'un défaut tout en satisfaisant également sa détectabilité. Evidemment, elle représente une expression unifiée vérifiant tout indice de détection ayant une forme quadratique (Mnassri et al., 2012a).

En s'appuyant sur cette généralisation, nous pouvons aisément développer dans la suite le concept d'isolation et isolabilité de défauts relatif à chacun des indices de détection présentés dans le tableau 3.1.

Isolabilité par reconstruction de l'indice SPE En présence d'un défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ détectable par l'indice SPE , i.e. $SPE(k) > \delta^2$, tout ensemble de variables $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ est considéré en défaut par reconstruction d'un tel indice si :

$$SPE_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \delta_{\mathcal{I}}^2 = g_{SPE_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{SPE_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.27)$$

où les paramètres $g_{SPE_{\mathcal{I}}}$ et $h_{SPE_{\mathcal{I}}}$ sont déterminés en utilisant respectivement les équations (4.14) et (4.15) et en remplaçant les matrices $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ et $\Xi_{\mathcal{I}}^o$ respectivement par $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$. Notamment, cette dernière est calculée en se basant sur l'équation (4.6), i.e.

$$\tilde{\mathbf{C}} \Xi_{\mathcal{I}} = \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.28)$$

Le développement des expressions correspondantes aux paramètres $g_{SPE_{\mathcal{I}}}$ et $h_{SPE_{\mathcal{I}}}$, nous a permis de déduire que :

$$g_{SPE_{\mathcal{I}}} = \frac{\text{tr}[\tilde{\Lambda}^2] - 2 \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}] + \text{tr}[(\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})^2]}{\text{tr}[\tilde{\Lambda}] - \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}]} \quad (4.29)$$

et

$$h_{SPE_{\mathcal{I}}} = \frac{(\text{tr}[\tilde{\Lambda}] - \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}])^2}{\text{tr}[\tilde{\Lambda}^2] - 2 \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}] + \text{tr}[(\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})^2]} \quad (4.30)$$

Par déduction de l'inégalité (4.26), le défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti isolable de celui supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ par l'indice SPE si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{C}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\delta \quad (4.31)$$

Nous rappelons qu'une telle condition d'isolabilité de défauts par reconstruction de l'indice SPE est l'unique proposée dans la littérature par Dunia et Qin (1998b,c,a) et Qin (2003). Dans ce cadre et grâce à l'équation (4.26), nous avons pu étendre une telle étude au reste des indices (Mnassri et al., 2012a,b).

Isolabilité par reconstruction de l'indice SWE Lorsque l'indice SWE détecte la présence du défaut $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ qui est supposé inconnu, i.e. $SWE(k) > \epsilon^2$, des reconstructions successives d'un tel indice peuvent conduire à l'isolation du défaut. En revanche, il considère tout ensemble de variables $\mathcal{I} \in \mathfrak{J}$ en défaut si :

$$SWE_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \epsilon_{\mathcal{I}}^2 = g_{SWE_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{SWE_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.32)$$

Les coefficients $g_{SWE_{\mathcal{I}}}$ et $h_{SWE_{\mathcal{I}}}$ peuvent être calculés en se référant respectivement aux équations (4.14) et (4.15) et en substituant les matrices $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ et $\Xi_{\mathcal{I}}^o$ respectivement par $\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T$ et $\tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$. En se basant sur l'équation (4.6), la matrice $\tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$ est déterminée comme suit :

$$\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{I}} = \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.33)$$

Ainsi, on peut montrer que :

$$g_{SWE_{\mathcal{I}}} = 1 \quad (4.34)$$

et

$$h_{SWE_{\mathcal{I}}} = m - \ell - r \quad (4.35)$$

où r représente le nombre des variables constituant l'ensemble \mathcal{I} .

D'après l'inégalité (4.26), l'indice SWE garantit l'isolation du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ de celui supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\epsilon \quad (4.36)$$

Isolabilité par reconstruction de l'indice $T2$ de Hotelling Un défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ ayant une amplitude qui satisfait la condition donnée par l'inégalité (3.16) est nécessairement détecté par l'indice $T2$ de Hotelling. Si à la *kème* observation on a $T2(k) > \tau^2$, alors tout ensemble de variables $\mathcal{I} \in \mathfrak{J}$ est considéré responsable d'une telle situation si :

$$T2_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \tau_{\mathcal{I}}^2 = g_{T2_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{T2_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.37)$$

De la même manière qu'aux autres indices, les coefficients $g_{T2_{\mathcal{I}}}$ et $h_{T2_{\mathcal{I}}}$ sont calculés en se basant sur les équations (4.14) et (4.15) respectivement et en remplaçant les matrices $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ et $\Xi_{\mathcal{I}}^o$ respectivement par $\hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T$ et $\check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$. Cette dernière est déterminée à partir de l'équation (4.6) comme suit :

$$\hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{I}} = \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \check{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.38)$$

Une simplification dans les expressions des deux coefficients permet de montrer que :

$$g_{T2_{\mathcal{I}}} = 1 \quad (4.39)$$

et

$$h_{T2_{\mathcal{I}}} = \ell - r \quad (4.40)$$

Par définition, l'équation précédente représente le nombre de degrés de liberté relatifs à l'indice $T2$ où r variables ont été reconstruites. Un tel nombre doit être positif ou nul,

ce qui implique que le nombre maximal des variables qui peuvent être reconstruites simultanément en utilisant la statistique $T2$ de Hotelling doit respecter l'inégalité suivante :

$$r \leq \ell \quad (4.41)$$

D'autre part, ℓ représente le nombre optimal des CPs constituant le modèle ACP. Un tel nombre est généralement très inférieur au nombre des variables du processus. Cela peut limiter l'utilisation d'un tel indice dans la procédure d'isolation de défauts plus particulièrement lorsque le nombre de variables qui sont simultanément en défaut est plus grand que ℓ .

Selon l'inégalité (4.26), l'indice $T2$ de Hotelling peut garantir l'isolation du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ de celui supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\tau \quad (4.42)$$

Isolabilité par reconstruction de l'indice de Mahalanobis En se basant sur l'inégalité (3.39), tout défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ ayant une amplitude qui peut satisfaire une telle inégalité est garanti détectable par l'indice D de Mahalanobis. Le moment où cette distance détecte l'existence d'un défaut, i.e. $D(k) > \varrho^2$, alors tout ensemble de variables $\mathcal{I} \in \mathfrak{J}$ est considéré en défaut lorsque :

$$D_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \varrho_{\mathcal{I}}^2 = g_{D_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{D_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.43)$$

En s'appuyant sur l'équation (4.6), la matrice $\check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$ est calculée comme suit :

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} = \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \check{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.44)$$

Les paramètres $g_{D_{\mathcal{I}}}$ et $h_{D_{\mathcal{I}}}$ sont déterminés en utilisant respectivement les équations (4.14) et (4.15) et en remplaçant les matrices $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ et $\Xi_{\mathcal{I}}^o$ respectivement par $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ et $\check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$. Cela nous a permis de déduire que :

$$g_{D_{\mathcal{I}}} = 1 \quad (4.45)$$

et

$$h_{D_{\mathcal{I}}} = m - r \quad (4.46)$$

Selon l'équation précédente, nous remarquons que le seul indice de détection permettant une reconstruction simultanée d'un maximum de nombre des variables ($r \leq m$) est celui de Mahalanobis. Etant donné que le défaut réel est $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, celui-ci est garanti isolable de celui assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ au travers un tel indice si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\varrho \quad (4.47)$$

Isolabilité par reconstruction de l'indice combiné Outre que la reconstruction de la distance de Mahalanobis, la reconstruction de l'indice combiné peut être également utilisée pour l'isolation des défauts en se basant sur l'ensemble de l'espace. Lorsque le processus est détecté en fonctionnement anormal à la *k*ème observation par la distance combinée, i.e. $\varphi(k) > \beta^2$, alors tout ensemble de variables $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ vérifiant l'inégalité suivante est identifié en défaut :

$$\varphi_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \beta_{\mathcal{I}}^2 = g_{\varphi_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{\varphi_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.48)$$

Evidemment, la matrice orthonormée $\bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \in \mathbb{R}^{m \times r}$ est obtenue en vérifiant selon (4.6) l'équation suivante :

$$(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \bar{\Xi}_{\mathcal{I}} = \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \bar{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.49)$$

En substituant dans les équations (4.14) et (4.15) les matrices $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ et $\Xi_{\mathcal{I}}^o$ respectivement par $(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T)$ et $\bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$, on peut déterminer les expressions associées aux paramètres $g_{\varphi_{\mathcal{I}}}$ et $h_{\varphi_{\mathcal{I}}}$ comme suit :

$$g_{\varphi_{\mathcal{I}}} = \frac{\text{tr}[(\Sigma(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T))^2]}{\text{tr}[\Sigma(\delta^{-2} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})]} \quad (4.50)$$

et

$$h_{\varphi_{\mathcal{I}}} = \frac{(\text{tr}[\Sigma(\delta^{-2} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})])^2}{\text{tr}[(\Sigma(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T))^2]} \quad (4.51)$$

D'après la condition généralisée d'isolabilité exprimée dans l'inégalité (4.26), un défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti isolable de celui supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ par reconstruction de l'indice combiné lorsque :

$$\|(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \bar{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\beta \quad (4.52)$$

4.2.2 Analyse d'isolabilité par reconstruction de l'indice combiné versus celles de *SPE* et *T2* de Hotelling

L'avantage majeur le plus communément connu par l'utilisation de l'indice combiné se résume dans la surveillance de processus à travers un seul indicateur en considérant le sous-espace principal ainsi que celui résiduel. Néanmoins, nous ignorons encore d'autres avantages que peut présenter une telle distance. Evidemment, cette dernière combine l'indice *SPE* et celui du *T2* de Hotelling. L'intérêt d'une telle combinaison est négligemment justifié théoriquement. Dans ce cadre, Mnassri et al. (2011b, 2012a) ont montré à travers une analyse théorique que la reconstruction de l'indice combiné peut bénéficier d'un atout plus avantageux dans la détection et l'isolation de défauts que les statistiques *SPE* et *T2*. Plus précisément, les travaux de Mnassri et al. (2011b) représentent une analyse de détectabilité de défauts par l'indice combiné versus celles des indices que combine. Puisque l'isolabilité de défauts représente un concept plus généralisé que celui de la détectabilité,

nous limitons dans cette thèse à une analyse d'isolabilité par reconstruction de l'indice combiné versus celles de SPE et $T2$ de Hotelling.

A partir des inégalités (4.31), (4.42) et (4.52), on peut poser les vecteurs $\tilde{\mathbf{u}}(k)$, $\check{\mathbf{u}}(k)$ et $\bar{\mathbf{u}}(k)$ dont les normes conditionnent à la k ème observation l'isolabilité du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ de celui supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ par reconstruction des indices SPE , $T2$ et φ respectivement :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{C}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \\ &= (\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{u}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \\ &= (\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \check{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) (\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \\ &= (\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \bar{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.55)$$

Dans ce cadre, Mnassri et al. (2012a) ont montré que :

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \delta^{-1} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \tau^{-1} \check{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{u}(k) \quad (4.56)$$

avec

$$\mathbf{u}(k) = (\delta^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT} \tilde{\Xi}_{\mathcal{J}} + \tau^{-1} \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT} \check{\Xi}_{\mathcal{J}} - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT} \bar{\Xi}_{\mathcal{J}}) \mathbf{f}(k) \quad (4.57)$$

En montrant également qu'à tout instant k , les vecteurs $\tilde{\mathbf{u}}$, $\check{\mathbf{u}}$ et \mathbf{u} sont orthogonaux deux à deux :

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) \perp \check{\mathbf{u}}(k), \quad \tilde{\mathbf{u}}(k) \perp \mathbf{u}(k) \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{u}}(k) \perp \mathbf{u}(k) \quad (4.58)$$

D'après (4.58), (4.56) et (4.52), la garantie d'isolabilité du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ de celui assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ par reconstruction de la distance combinée peut être réécrite de la manière suivante :

$$\|\bar{\mathbf{u}}(k)\|^2 = (\delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\|)^2 + (\tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\|)^2 + \|\mathbf{u}(k)\|^2 > (2\beta)^2 \quad (4.59)$$

Puisque la norme euclidienne est positive ou nulle, le domaine de définition de l'inégalité précédente représente la zone externe d'un quart de sphère de rayon 2β et caractérisée par ses trois variables principales telles que $\delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\|$, $\tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\|$ et $\|\mathbf{u}(k)\|$ (voir figure 4.1). Ainsi, le vecteur $\bar{\mathbf{u}}(k)$ peut être exprimé dans une base orthonormée \mathbb{B} d'un espace vectoriel euclidien \mathbb{E}_3 de dimension 3 comme suit :

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \begin{bmatrix} \delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\| \\ \tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\| \\ \|\mathbf{u}(k)\| \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Autrement dit, tout défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti isolable de celui supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ par reconstruction de l'indice combiné si le point correspondant ayant comme coordonnées celles du vecteur (4.60) est situé en dehors du quart de la sphère (figure 4.1). En particulier, un tel défaut n'est garanti isolable ni par l'indice SPE ni par la distance $T2$ de Hotelling si $\delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\| \leq 2$ et $\tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\| \leq 2$ respectivement. Lorsqu'un tel point est situé dans la

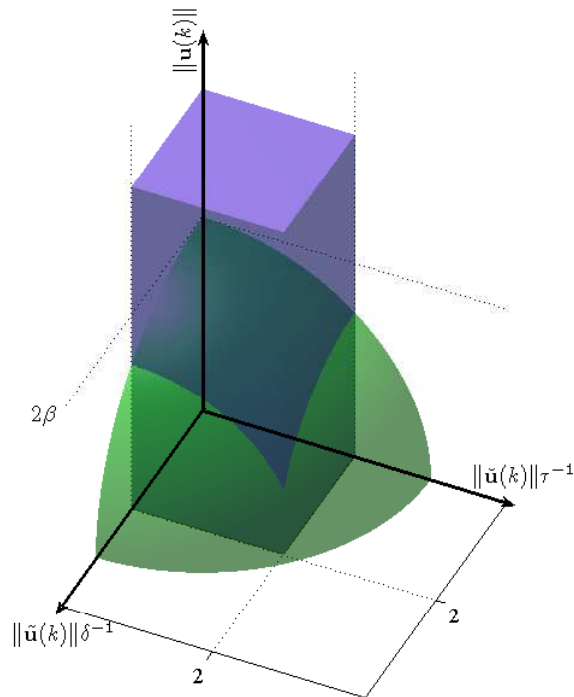


FIGURE 4.1 – Sous-espace d’isolabilité de défauts par reconstruction de l’indice combiné en fonction de ceux des indices *SPE* et *T2* de Hotelling

zone bleue en dessus du quart de la sphère de la figure 4.1, cela implique que le défaut considéré est isolable uniquement par reconstruction de l’indice combiné. Par conséquent, on peut déduire qu’il peut exister des défauts qui ne sont isolables ni par l’indice *SPE* ni par celui de *T2* de Hotelling mais ils sont isolables par la distance combinée. Si $\beta \leq 1$ et le défaut est garanti isolable par reconstruction de l’indice *SPE* et/ou *T2*, alors le même défaut est également garanti isolable par reconstruction de l’indice combiné.

Bien qu’un tel indice combine les statistiques *SPE* et *T2* de Hotelling, on constate théoriquement que son avantage en terme d’isolabilité de défauts par reconstruction ne dépend pas de ceux des indices que combine. En outre, la distance combinée peut encore être privilégiée dans ce cadre lorsque sa limite de contrôle β est faible.

4.3 Diagnostic de défauts simples par les contributions

Les approches les plus classiques et largement utilisées dans le cadre de l’ACP pour un diagnostic de défauts se fondent sur le calcul des contributions (MacGregor et Kourti, 1995; Westerhuis et al., 2000a; Kourti, 2005; Conlin et al., 2000). Le principe de ces méthodes consiste à calculer les contributions des différentes variables aux indicateurs utilisés pour la détection de défauts. Ainsi, la variable ayant la plus grande contribution est probablement en défaut. Bien entendu, les contributions sont dédiées au diagnostic de

Méthode	Indice			
	<i>SPE</i>	<i>T2</i>	φ	γ
<i>CDC</i>	Miller et al. (1998)	Wise et al. (2006)	Alcala et Qin (2011)	
<i>PDC</i>	Mnassri et al. (2008b, 2009b)	Nomikos et MacGregor (1995)	Alcala et Qin (2011)	
<i>DC</i>	Alcala et Qin (2011)	Qin et al. (2001)	Cherry et Qin (2006)	Alcala et Qin (2011)
<i>RBC</i>	Alcala et Qin (2009)			
<i>ABC</i>	Raich et Çinar (1996) et Yoon et MacGregor (2001)		Alcala et Qin (2011)	

TABLE 4.1 – Différentes méthodes de contributions

défauts uniquement de type simple.

Dès leurs apparitions, les contributions n'ont pas cessé d'avoir une diversité dans leurs expressions bien qu'elles n'aient eu ni définitions ni types uniques qui font l'unanimité. Dans ce contexte, Alcala et Qin (2011) ont publié récemment un travail très intéressant dans lequel ils ont distingué cinq principales familles de contributions. Les intérêts majeurs d'un tel travail représentent le regroupement des contributions ainsi que l'appellation des différents groupes ou familles distingués, la reformulation des expressions de telles contributions sous une notation vectorielle simple ainsi que leur généralisation à tout indice de détection ayant une forme quadratique.

Les différents groupes des contributions qui ont été distingués comprennent les contributions par décomposition complète (*complete decomposition contributions* : *CDC*), les contributions par décomposition partielle (*partial decomposition contributions* : *PDC*), les contributions diagonales (*diagonal contributions* : *DC*), les contributions par reconstruction (*reconstruction-based contributions* : *RBC*) et les contributions par angle (*angle-based contributions* : *ABC*).

Dans le but de généraliser les contributions à tout indice de détection ayant une forme quadratique, Alcala et Qin (2011) se sont positionnés tout d'abord par rapport à ce qui existe dans la littérature en mentionnant dans un tableau les auteurs ainsi que les indices de détection sur lesquels se sont basées les différentes contributions existantes dans chaque famille. Dans ce cadre, nous voudrions rectifier et compléter les informations contenues dans un tel tableau en précisant que la contribution par décomposition partielle de l'indice *SPE* et qui fait partie des contributions de type *PDC* a été initialement proposée et appliquée à de différents exemples par Mnassri et al. (2008b,a). Puis, cette contribution a été reformulée sous une autre forme par Mnassri et al. (2009b,a). Sous cette optique, nous proposons à travers le tableau 4.1 un récapitulatif sur les différentes contributions existantes dans la littérature, leurs auteurs ainsi que les indices de détection sur lesquels ont été basées.

Avant d'entamer les descriptions théoriques de ces approches, nous précisons qu'elles ont été proposées pour un diagnostic de défauts simples. Autrement dit, on doit supposer qu'il ne peut y exister qu'une seule variable en défaut au *kème* instant. Notons par \mathcal{F}_j un défaut réel affectant la *jème* variable à un tel instant, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \xi_j f(k) \quad (4.61)$$

où ξ_j représente la j ème colonne de la matrice identité indiquant la direction du défaut. $f(k)$ est un scalaire qui vaut l'amplitude du défaut à la k ème observation.

De la même manière que pour l'approche de reconstruction, un tel défaut est réellement inconnu. Afin de le localiser en utilisant les approches des contributions, on calcule la contribution de la i ème variable tout en considérant que celle ayant la plus grande contribution est probablement en défaut.

4.3.1 Contributions par décomposition complète : CDC

Un indice de détection donné peut être interprété comme une sommation des contributions de toutes les variables suite à une décomposition complète. Ce type des contributions est largement utilisé dans l'industrie. Elles ont été initialement proposées par Miller et al. (1998) en décomposant l'indice SPE ensuite par Wise et al. (2006) en décomposant la distance $T2$ de Hotelling. Récemment, Alcalá et Qin (2011) ont généralisé ce type de décomposition à tout indice de détection ayant une forme quadratique en montrant d'après (3.1) qu'un tel indice peut s'écrire comme suit :

$$\gamma(k) = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \right)^2 = \sum_{i=1}^m CDC_i^\gamma(k) \quad (4.62)$$

où ξ_i représente la i ème colonne de la matrice identité. Ainsi, la contribution de type CDC de la i ème variable à l'indice γ au k ème instant est la suivante :

$$CDC_i^\gamma(k) = \left(\xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \right)^2 = \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \quad (4.63)$$

4.3.2 Contributions par décomposition partielle : PDC

La contribution par décomposition partielle décompose partiellement un indice de détection. Cette notion de décomposition a été initialement proposée par Nomikos et MacGregor (1995) pour l'indice $T2$ de Hotelling.

4.3.2.1 PDC à l'indice $T2$ de Hotelling

En effet, la distance $T2$ peut se décomposer de la façon suivante :

$$T2(k) = \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{a=1}^{\ell} \frac{t_a(k)}{\lambda_a} p_{ai} x_i(k) \right) \quad (4.64)$$

où ℓ est le nombre des CPs constituant le sous-espace principal. $t_a(k)$ représente la k ème mesure de la a ème CP. λ_a est la a ème valeur propre. p_{ai} désigne le i ème élément du a ème vecteur propre. $x_i(k)$ représente la k ème mesure de la i ème variable.

Posons $c_i^{(t_a/\lambda_a^{1/2})^2}$ comme étant la contribution de la i ème variable dans le calcul du carré de la a ème CP normalisée :

$$c_i^{(t_a/\lambda_a^{1/2})^2}(k) = \frac{t_a(k)}{\lambda_a} p_{ai} x_i(k) \quad (4.65)$$

On peut déduire que :

$$PDC_i^{T^2}(k) = \sum_{a=1}^{\ell} c_i^{(t_a/\lambda_a^{1/2})^2}(k) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{t_a(k)}{\lambda_a} p_{ai} x_i(k) \quad (4.66)$$

Puisque une telle contribution peut avoir des valeurs négatives, [Nomikos et MacGregor \(1995\)](#) ont proposé d'annuler toutes les valeurs négatives données par (4.65) car leurs signes sont opposés aux signes des carrés des CPs normalisées.

Dans ce cadre, nous avons constaté qu'il est possible de proposer selon deux façons différentes une contribution de type *PDC* à l'indice *SPE*. Nous notons que leurs expressions sans la négligence des valeurs négatives aboutissent à des résultats identiques. En revanche, la différence se manifeste dans la manière d'éviter telles valeurs. En se basant sur le fait que la statistique *SPE* peut être exprimée en fonction des résidus, la première forme de contribution est calculée relativement à ces résidus ([Mnassri et al., 2008b,a](#)). Également, on peut exprimer la même statistique en fonction des CPs résiduelles. Par conséquent, la deuxième forme de cette contribution est déterminée en s'appuyant sur ces CPs ([Mnassri et al., 2009b,a](#)).

4.3.2.2 *PDC* à l'indice *SPE* basée sur les résidus

En partant du principe que :

$$SPE(k) = \|\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k)\|^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i^2(k) = \sum_{i=1}^m (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2 \quad (4.67)$$

on remarque qu'une variable donnée contribue dans le calcul de son propre résidu ainsi qu'aux résidus des autres ($m - 1$) variables. Ainsi, on peut montrer que la i ème variable contribue dans le carré de son propre résidu par :

$$C_i^{\tilde{x}_i^2}(k) = x_i(k)\tilde{x}_i(k)(1 - \hat{c}_{ii}) = x_i(k)\tilde{x}_i(k)\tilde{c}_{ii} \quad (4.68)$$

D'autre part, la même variable contribue dans le calcul du carré du résidu d'une autre variable $n \neq i$ par :

$$c_i^{\tilde{x}_n^2}(k) = -x_i(k)\tilde{x}_n(k)\hat{c}_{ni} = x_i(k)\tilde{x}_n(k)\tilde{c}_{ni} \quad (4.69)$$

D'après l'expression précédente, nous remarquons que :

$$C_i^{\tilde{x}_i^2}(k) = c_i^{\tilde{x}_n^2}(k) \quad (4.70)$$

Par conséquent, la i ème variable contribue par décomposition partielle de l'indice *SPE* en se basant sur les résidus par la quantité suivante :

$$PDC_i^{SPE}(k) = C_i^{\tilde{x}_i^2}(k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^m c_i^{\tilde{x}_n^2}(k) = \sum_{n=1}^m c_i^{\tilde{x}_n^2}(k) = \sum_{n=1}^m x_i(k)\tilde{x}_n(k)\tilde{c}_{ni} \quad (4.71)$$

où \tilde{c}_{ni} représente le n ème élément de la i ème colonne de la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$. $\tilde{x}_n(k)$ est la n ème mesure du vecteur résiduel $\tilde{\mathbf{x}}(k)$.

Notamment, une telle contribution peut avoir des valeurs négatives. Pour cela, [Mnassri et al. \(2008b,a\)](#) ont décidé d'annuler toute valeur négative donnée par $c_i^{\tilde{x}_n^2}(k)$ (4.69) afin qu'elle ne soit pas opposée au signe du carré du résidu correspondant.

4.3.2.3 PDC à l'indice SPE basée sur les CPs résiduelles

En utilisant le même principe que celui utilisé par [Nomikos et MacGregor \(1995\)](#) pour le calcul d'une contribution à l'indice $T2$ de Hotelling, on note que la statistique SPE peut être exprimée en fonction des CPs résiduelles. Ainsi, elle peut être décomposée comme suit :

$$SPE(k) = \|\tilde{\mathbf{t}}(k)\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{a=\ell+1}^m t_a(k) p_{ai} x_i(k) \right) \quad (4.72)$$

Dans ce cadre, [Mnassri et al. \(2009b,a\)](#) ont montré que la contribution de la i ème variable dans le calcul du carré de la a ème CP résiduelle est donnée par :

$$c_i^{t_a^2}(k) = t_a(k) p_{ai} x_i(k) \quad (4.73)$$

Par conséquent, la contribution de la i ème variable par décomposition partielle de l'indice SPE en se basant sur les CPs résiduelles est exprimée comme suit :

$$PDC_i^{SPE}(k) = \sum_{a=\ell+1}^m c_i^{t_a^2}(k) = \sum_{a=\ell+1}^m t_a(k) p_{ai} x_i(k) \quad (4.74)$$

Afin qu'une telle contribution soit positive ou nulle, [Mnassri et al. \(2009b,a\)](#) ont proposé d'annuler toute valeur négative donnée par l'expression (4.73) car elle est opposée au signe du carré de la CP correspondante.

4.3.2.4 PDC à un indice quadratique

D'après l'équation (4.66), [Alcala et Qin \(2011\)](#) ont montré que la contribution à l'indice $T2$ de Hotelling peut s'écrire sous une forme vectorielle comme suit :

$$PDC_i^{T2}(k) = \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.75)$$

On remarque qu'avec une telle écriture on ne peut pas appliquer le principe d'annulation des contributions négatives par rapport à une CP normalisée.

Pour les deux formes de contributions proposées par décomposition partielle de l'indice SPE en s'appuyant sur les résidus (4.71) ou sur les CPs résiduelles (4.74), nous avons montré d'après l'annexe F qu'elles sont identiques. Toutefois, la différence dans leurs résultats apparaîtra quand on annule les contributions négatives d'une variable donnée relativement à un résidu ou à une CP résiduelle selon le principe de la technique utilisée. Sans considération de ces annulations, nous avons montré que :

$$PDC_i^{SPE}(k) = \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{C}} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.76)$$

D'après les équations (4.75) et (4.76), on peut déduire que tout indice de détection γ ayant une forme quadratique peut se décomposer partiellement comme suit :

$$\gamma(k) = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.77)$$

Ainsi, [Alcala et Qin \(2011\)](#) ont eu l'idée de déduire que la *ième* variable contribue par décomposition partielle d'un indice quelconque ayant une forme quadratique par :

$$PDC_i^\gamma(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.78)$$

On note que ce type des contributions peut donner des valeurs négatives.

4.3.3 Contributions diagonales : *DC*

La contribution diagonale par bloc a été initialement proposée par [Qin et al. \(2001\)](#) en décomposant l'indice *T2* de Hotelling afin d'assurer une surveillance de processus par multi-blocs. Evidemment, les blocs sont indépendants les uns des autres. Dans ce cadre, [Cherry et Qin \(2006\)](#) ont étendu cette idée en utilisant la distance combinée.

Dans le cas particulier où chaque bloc est constitué d'une seule variable, l'indice *T2* de Hotelling correspondant est considéré comme une contribution diagonale qui peut être définie de la manière suivante :

$$DC_i^{T2}(k) = \mathbf{x}^T(k) \xi_i \xi_i^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.79)$$

Une telle contribution a été utilisée pour la surveillance d'un bloc donné qui est supposé indépendant des autres blocs. Par conséquent, les contributions diagonales se réduisent à une surveillance univariée. Dans le cas où un processus n'est pas décomposable en des blocs, ces contributions ne sont pas recommandées pour une détection de défaut car elles ignorent les corrélations entre les variables. Cependant, elles peuvent être utilisées comme des techniques d'analyse des contributions pour un diagnostic de défauts.

D'après [Alcala et Qin \(2011\)](#), la contribution diagonale de la *ième* variable à un indice γ ayant une forme quadratique peut se présenter comme suit :

$$DC_i^\gamma(k) = \mathbf{x}^T(k) \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.80)$$

4.3.4 Contributions par reconstruction : *RBC*

Parmi les méthodes dédiées au diagnostic de défauts, [Alcala et Qin \(2009\)](#) ont récemment proposé une approche de contributions par reconstruction. Elle est basée sur une utilisation simultanée du principe de la contribution et celui de la reconstruction. Une telle méthode est exceptionnellement proposée pour diagnostiquer les défauts simples.

Le principe de la contribution par reconstruction considère la quantité reconstruite d'un indice de détection le long d'une direction d'une variable donnée comme étant la contribution d'une telle variable. Dans le cas particulier où le défaut supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est de type simple ou unidimensionnel, i.e. $\mathcal{I} = i$ et $\Xi_{\mathcal{I}} = \xi_i$, l'équation (4.8) correspond à l'indice insensible à un tel défaut se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_i(k) &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \xi_i^o \xi_i^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \\ &= \gamma(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i^o \xi_i^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \\ &= \gamma(k) - \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \hat{f}_i(k)\|^2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

où f_i est une estimation optimale de l'amplitude du défaut dans la direction de la $i^{\text{ème}}$ variable par reconstruction de l'indice γ . Le vecteur ξ_i^o est déterminé en utilisant le principe de l'équation (4.6).

Selon [Alcala et Qin \(2009\)](#), la contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable par reconstruction de l'indice γ représente le carré de la norme de l'amplitude estimée du défaut comme suit :

$$\begin{aligned} RBC_i^\gamma(k) &= \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \hat{f}_i(k)\|^2 \\ &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i (\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i)^{-1} \xi_i^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k) \\ &= \frac{\mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k)}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} \end{aligned} \quad (4.82)$$

4.3.5 Contributions par angle : ABC

Dans le but d'extraire plus d'informations utiles sur les défauts, [Raich et Çinar \(1996\)](#) et [Yoon et MacGregor \(2001\)](#) ont suggéré une contribution basée sur le calcul d'un angle permettant ainsi un diagnostic plus facile. La contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable est liée à l'angle entre le vecteur d'observation $\mathbf{x}(k)$ et le vecteur ξ_i qui représente la direction d'une telle variable après qu'ils ont été projetés dans le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ de l'indice de détection. Cette contribution n'est autre que le carré du cosinus d'un tel angle comme suit :

$$\begin{aligned} ABC_i^\gamma(k) &= \left(\frac{\left(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \right)^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)}{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\| \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|} \right)^2 = \frac{\mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k)}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \mathbf{x}(k)} \\ &= \frac{RBC_i^\gamma(k)}{\gamma(k)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

On note que la contribution par reconstruction et celle par angle ne diffèrent que par une constante près qui est l'indice γ . Ce dernier est indépendant de la $i^{\text{ème}}$ variable. Par conséquent, les résultats d'un diagnostic de défauts basé sur ces deux approches sont identiques. Dans le reste du chapitre, seule la contribution par reconstruction sera considérée.

4.3.6 Analyse de diagnosticabilité

Afin d'analyser la diagnosticabilité de défauts en utilisant les méthodes des contributions, on peut considérer un type de défauts le plus simple et qui peut arriver souvent dans un processus. Dans ce cas, l'utilisation de l'une de ces méthodes des contributions pour un diagnostic de défauts de ce type doit nécessairement pointer vers la variable réellement en défaut. Si la méthode désignée n'est pas en mesure d'accomplir cette tâche, alors il n'y a aucune garantie qu'elle peut diagnostiquer correctement des défauts complexes.

En effet, les défauts les plus simples représentent souvent des biais. Puisque le défaut réel affecte la $j^{\text{ème}}$ variable (4.61), on peut supposer que son amplitude est très grande

par rapport aux mesures obtenues lors du fonctionnement normal. Ainsi, le vecteur d'observation en défaut se réécrit comme suit :

$$\mathbf{x}(k) \approx \xi_j f(k) \quad (4.84)$$

4.3.6.1 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *CDC*

La substitution de l'équation (4.84) dans celle de (4.63) mène aux résultats suivants :

$$CDC_i^\gamma(k) = \begin{cases} (\xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 f^2(k) & \text{pour } i \neq j \\ (\xi_j^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 f^2(k) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.85)$$

Ainsi, le diagnostic d'un tel défaut est garanti correct par l'utilisation de l'approche *CDC* si :

$$(\xi_j^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 \geq (\xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 \quad (4.86)$$

Malheureusement, une telle inégalité n'est pas toujours vérifiée. Par conséquent, la méthode *CDC* ne peut pas garantir un diagnostic correct de défauts.

4.3.6.2 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *PDC*

En remplaçant l'équation (4.84) dans celle de (4.78), on peut montrer ce qui suit :

$$PDC_i^\gamma(k) = \begin{cases} \xi_j^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \xi_j f^2(k) = 0 & \text{pour } i \neq j \\ \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j f^2(k) \geq 0 & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.87)$$

où $\xi_j^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \xi_j f^2(k) = 0$ car $\xi_i^T \xi_j = 0 \forall i \neq j$.

D'après les résultats de l'équation précédente, on remarque que les variables qui ne sont pas réellement en défaut ne contribuent pas. Ainsi, seule la variable en défaut qui contribue. Puisque $\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j \geq 0$, nous constatons également qu'une telle variable contribue positivement. Par conséquent, l'approche *PDC* garantit un diagnostic correct de défauts simples de grandes amplitudes.

4.3.6.3 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *DC*

En s'appuyant sur le même principe utilisé avec les autres approches, la substitution de l'expression de l'équation (4.84) dans celle de (4.80) nous permet de montrer que :

$$DC_i^\gamma(k) = \begin{cases} \xi_j^T \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \xi_j f^2(k) = 0 & \text{pour } i \neq j \\ \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j f^2(k) \geq 0 & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.88)$$

D'après cette équation, on constate que seule la variable réellement en défaut qui contribue. Cela implique qu'une telle approche garantit un diagnostic correct de défauts simples de grandes amplitudes.

4.3.6.4 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *RBC*

La considération de l'équation (4.82) en tenant en compte de l'expression donnée par l'équation (4.84) nous permet de déduire que :

$$RBC_i^\gamma(k) = \begin{cases} \frac{(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f^2(k) & \text{pour } i \neq j \\ \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j f^2(k) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.89)$$

Evidemment, un diagnostic de défauts par l'approche *RBC* est garanti correct si $RBC_{i=j}^\gamma(k) \geq RBC_{i \neq j}^\gamma(k)$. Pour cela, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} &= \left(\frac{(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^T (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i)}{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\|} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j\| \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\|}{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\|} \right)^2 = \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j \end{aligned} \quad (4.90)$$

Cette inégalité implique que les défauts simples d'importantes amplitudes sont garantis correctement diagnosticables en utilisant la méthode *RBC*.

Pour un tel type de défauts, et selon les équations (4.87), (4.88) et (4.89), les contributions qui correspondent à la variable réellement en défaut sont identiques en utilisant les approches *PDC*, *RBC* et *DC*. En outre, les variables qui ne sont pas en défaut ne contribuent pas en se basant plus particulièrement sur les deux méthodes *PDC* et *DC*. Une telle propriété présente un avantage car la variable en défaut peut se distinguer plus facilement des autres variables en utilisant ces deux approches plutôt que la *RBC*.

4.4 Nouvelles approches pour un diagnostic de défauts multiples

En analysant toutes les formes des contributions présentées dans ce chapitre, nous constatons qu'elles ont été toutes exceptant celle de *RBC* déterminées par décomposition d'un indice de détection. Ainsi et pour chaque type de contribution, la somme des contributions individuelles de toutes les variables doit reconstituer l'indice décomposé.

Néanmoins, les défauts peuvent être de type multiple. Par conséquent, l'utilisation de ces approches des contributions pour un diagnostic de défauts multiples mène certainement à des résultats erronés. Ainsi, la solution envisageable est d'étendre ces contributions aux cas multidimensionnels. Cependant, une décomposition multidimensionnelle d'un indice de détection et qui doit également reconstituer la valeur d'un tel indice n'est pas faisable. Puisque l'approche *RBC* n'est pas fondée sur le principe de décomposition, nous nous sommes rendus compte qu'il est possible de l'étendre pour un diagnostic de défauts multiples.

4.4.1 Contributions par reconstruction multidimensionnelle

Avant de commencer la présentation de la nouvelle approche multidimensionnelle, il semblerait utile de montrer théoriquement l'invalidité d'un diagnostic basé sur la *RBC* classique lors de la présence d'un défaut multiple. Pour cela, nous considérons le cas le plus simple de défauts multidimensionnels en supposant que leurs amplitudes sont largement supérieures aux mesures collectées lors du fonctionnement normal. L'équation (2.59) peut être approximée par :

$$\mathbf{x}(k) \approx \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \quad (4.91)$$

Sans perte de généralité, nous supposons également que seules deux variables sont réellement en défaut. Dans ce cadre, l'équation précédente peut se réécrire comme suit :

$$\mathbf{x}(k) \approx \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} \xi_{j_1} & \xi_{j_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{j_1}(k) \\ f_{j_2}(k) \end{bmatrix} = \xi_{j_1} f_{j_1}(k) + \xi_{j_2} f_{j_2}(k) \quad (4.92)$$

où les vecteurs ξ_{j_1} et ξ_{j_2} représentent respectivement les j_1 ème et j_2 ème colonnes de la matrice identité. Les scalaires $f_{j_1}(k)$ et $f_{j_2}(k)$ correspondent aux amplitudes des composants du défaut réel dans les directions de la j_1 ème et la j_2 ème variable respectivement.

La substitution de l'équation (4.92) dans celle de (4.82) nous permet de déduire que :

$$RBC_{i \neq \{j_1, j_2\}}^{\gamma}(k) = \frac{(\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f_{j_1}^2(k) + 2 \frac{\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_i \xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_i}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f_{j_1}(k) f_{j_2}(k) + \frac{(\xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f_{j_2}^2(k) \quad (4.93)$$

$$RBC_{i=j_1}^{\gamma}(k) = \xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_1} f_{j_1}^2(k) + 2 \xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2} f_{j_1}(k) f_{j_2}(k) + \frac{(\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2})^2}{\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_1}} f_{j_2}^2(k) \quad (4.94)$$

$$RBC_{i=j_2}^{\gamma}(k) = \xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_{j_2} f_{j_2}^2(k) + 2 \xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2} f_{j_1}(k) f_{j_2}(k) + \frac{(\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2})^2}{\xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_{j_2}} f_{j_1}^2(k) \quad (4.95)$$

Les équations (4.93), (4.94) et (4.95) représentent les contributions par reconstructions unidimensionnelles respectivement de la i ème variable qui n'est pas en défaut, de la j_1 ème et la j_2 ème variable réellement toutes les deux en défaut. Malgré que le défaut est caractérisé par une grande amplitude, l'analyse de la relation entre ces équations montre que les contributions des variables en défaut ne peuvent pas être garanties supérieures à celles des variables saines. Par conséquent, la contribution par reconstruction unidimensionnelle ne garantit pas un diagnostic correct de défauts multiples.

Puisque le défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est inconnu, on adopte le même principe que dans la deuxième section de ce chapitre en supposant un défaut assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ affectant un \mathcal{I} ème ensemble de variables. D'après l'équation (4.8), l'indice insensible à un tel défaut peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{I}}(k) &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \\ &= \gamma(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Par déduction, [Mnassri et al. \(2012b\)](#) ont proposé que la contribution du $\mathcal{I}^{\text{ème}}$ ensemble de variables par reconstruction multidimensionnelle de l'indice γ est la suivante :

$$\begin{aligned} RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) &= \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} \hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k)\|^2 = \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \\ &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Afin d'établir une analyse de diagnosticabilité de défauts multiples de grandes amplitudes en utilisant cette approche, la considération du défaut réel exprimé par l'équation (4.91) nous a permis de montrer que :

$$RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) = \begin{cases} \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|^2 & \text{pour } \mathcal{I} \neq \mathcal{J} \\ \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|^2 & \text{pour } \mathcal{I} = \mathcal{J} \end{cases} \quad (4.98)$$

Puisque $\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \leq \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|$, alors :

$$RBC_{\mathcal{J}}^{\gamma}(k) \geq RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) \quad (4.99)$$

Cette inégalité implique que l'approche proposée garantit un diagnostic correct de défauts multiples ayant de grandes amplitudes.

4.4.2 *RBC ratio*

D'après les analyses de diagnosticabilité, les approches des contributions peuvent garantir un diagnostic correct que dans le cas de défauts de grandes amplitudes. En revanche, les défauts sont en réalité plus complexes. Autrement dit, ils peuvent avoir des faibles amplitudes comme ils peuvent être difficilement isolables les uns des autres (colinéarités entre les variables). Pour cela, la comparaison d'un indicateur qui a pour objectif un diagnostic de défauts par rapport à un seuil de décision ou de contrôle semblerait une solution avantageuse.

Dans ce cadre, [Alcala et Qin \(2009\)](#) ont proposé une limite de contrôle pour la *RBC* unidimensionnelle en se basant sur le fait qu'une telle approche dispose d'une forme quadratique. Cependant, ils ont mentionné que ce seuil ne peut malheureusement pas être utilisé pour l'identification de la variable en défaut à cause de l'effet de propagation de celui-ci dans le calcul des contributions des autres variables. Ils ont montré comment le défaut se propage dans les contributions sans pour autant montrer ses conséquences pour une utilisation de la limite de contrôle.

Pour cette raison, nous avons établi théoriquement dans l'annexe G une condition sur l'amplitude du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ permettant de garantir le dépassement de la *RBC* d'un $\mathcal{I}^{\text{ème}}$ ensemble de variables son correspondant seuil de contrôle. Une telle condition prouve qu'à partir d'une amplitude donnée, il est possible d'identifier tous les ensembles de variables comme étant en défaut si on choisit un diagnostic par l'approche *RBC* comparée à ses limites de contrôle. Par conséquent, l'utilisation d'une telle approche afin de diagnostiquer les défauts demeure valide uniquement par évaluation de l'ampleur des contributions des ensembles de variables.

Afin de remédier aux problèmes de diagnostic liés aux défauts complexes, nous avons proposé une nouvelle approche de diagnostic plus performante en s'appuyant sur la *RBC* multidimensionnelle comme suit :

$$RBCr_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) = \frac{\gamma(k)}{RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) + \Gamma_{\mathcal{I}}^2} \quad (4.100)$$

avec $\Gamma_{\mathcal{I}}^2$ représente le seuil de contrôle (4.13) de l'indice insensible au défaut supposé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.

Nous avons appelé cette méthode par *RBC ratio* (Mnassri et al., 2012b) car elle dispose de l'indice γ au numérateur comme un facteur commun pour les *RBC ratio* de tous les ensembles de variables. Cependant, les termes de son dénominateur dont principalement la *RBC* dépendent de l'ensemble de variables étudiées.

La théorie d'une diagnosticabilité de défauts en se basant sur cette méthode se déroulera en deux étapes. Pour cet objectif, il est possible d'exprimer la *RBCr* en fonction des indices γ et $\gamma_{\mathcal{I}}$ comme suit :

$$RBCr_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - \gamma(k) + RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) + \Gamma_{\mathcal{I}}^2} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2)} \quad (4.101)$$

- 1^{er} cas : $\mathcal{I} = \mathcal{J}$

A partir de l'inégalité (4.11), nous pouvons montrer que :

$$\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2) \geq \gamma(k) \quad (4.102)$$

Puisque $\gamma(k) \geq 0$, l'inégalité suivante est vraie

$$\frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2)} \leq \frac{\gamma(k)}{\gamma(k)} = 1 \quad (4.103)$$

ainsi

$$RBCr_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^{\gamma}(k) \leq 1 \quad (4.104)$$

- 2^{ème} cas : $\mathcal{I} \neq \mathcal{J}$

L'inégalité (4.25) présente la condition nécessaire afin que le défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ soit garanti isolable de celui assumé $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. Par conséquent, on peut montrer que :

$$0 \leq \Gamma^2 - \Gamma_{\mathcal{I}}^2 < \gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \leq \gamma(k) \quad (4.105)$$

Celle-ci nous permet de déduire que :

$$0 \leq \gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2) < \gamma(k) - (\Gamma^2 - \Gamma_{\mathcal{I}}^2) \leq \gamma(k) \quad (4.106)$$

Puisque $\gamma(k) \geq 0$, alors

$$\frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2)} > \frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\Gamma^2 - \Gamma_{\mathcal{I}}^2)} \geq \frac{\gamma(k)}{\gamma(k)} = 1 \quad (4.107)$$

ce qui implique que

$$RBCr_{\mathcal{I} \neq \mathcal{J}}^{\gamma} > 1 \quad (4.108)$$

Il est clair que la limite de contrôle de l'approche proposée est égale à l'unité. La diagnosticabilité de défauts par une telle méthode montre que les valeurs de la $RBCr$ des variables réellement en défaut sont garanties inférieures à un tel seuil. Autrement dit, le défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ est garanti identifiable. En outre, elle garantit de rejeter la possibilité qu'un défaut assumé soit identifié comme un candidat si la condition nécessaire d'isolabilité de défauts de l'inégalité (4.25) est satisfaite. Nous rappelons qu'une telle condition est équivalente à celle déduite dans l'inégalité (4.26). Par conséquent, les défauts complexes et qui sont détectables sont garantis identifiables par l'approche $RBCr$. Ainsi, ils sont garantis isolables si leurs amplitudes vérifient l'inégalité (4.26). Entre autre, tout ensemble de variables $\mathcal{I} \in \hat{\mathcal{I}}_{RBCr}$ est considéré en défaut par l'approche $RBCr$ avec $\hat{\mathcal{I}}_{RBCr}$ vérifie l'argument suivante :

$$\hat{\mathcal{I}}_{RBCr} = \arg_{\mathcal{I} \in \mathfrak{J}} \{RBCr_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) \leq 1\} \quad (4.109)$$

où \mathfrak{J} représente l'ensemble de toutes les combinaisons des directions de reconstructions possibles.

4.5 Exemple de synthèse

Afin d'illustrer l'étude théorique de ce chapitre, nous avons considéré la simulation d'un exemple de processus dont les variables sont décrites par leurs équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(k) &= 1 + u(k)^2 + \sin\left(\frac{k}{3}\right) \quad \text{avec} \quad u(k) \sim \mathcal{N}(0, (0.02)^2) \\ \dot{x}_2(k) &= 2 \sin\left(\frac{k}{6}\right) \cos\left(\frac{k}{4}\right) \exp\left(-\frac{k}{N}\right) \\ \dot{x}_3(k) &= \log(\dot{x}_2(k)^2) \\ \dot{x}_4(k) &= \dot{x}_1(k) + \dot{x}_2(k) \\ \dot{x}_5(k) &= \dot{x}_1(k) - \dot{x}_2(k) \\ \dot{x}_6(k) &= 2\dot{x}_1(k) + \dot{x}_2(k) \\ \dot{x}_7(k) &= \dot{x}_1(k) + \dot{x}_3(k) \\ \dot{x}_8(k) &\sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned} \quad (4.110)$$

On note que u et \dot{x}_8 représentent deux variables aléatoires normales centrées et d'écart types de 0,02 et 1 respectivement. Un bruit blanc \mathbf{v} constitué de 8 variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyennes nulles et d'écart types identiques de 0,7 a été superposé aux variables de l'équation (4.110). Ainsi, le k ème vecteur d'observation à 8 composantes est généré de la façon suivante :

$$\mathbf{x}(k) = \dot{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (4.111)$$

où

$$\dot{\mathbf{x}}(k) = [\dot{x}_1(k), \dots, \dot{x}_8(k)]^T \quad (4.112)$$

et

$$\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_8, (0.7)^2 \mathbf{I}_8) \quad (4.113)$$

\mathbf{I}_8 représente une matrice identité d'ordre 8.

Une matrice de données \mathbf{X} a été constituée de $N = 3000$ observations dont les 1500 premières qui représentent un fonctionnement normal du processus ont été réservées pour

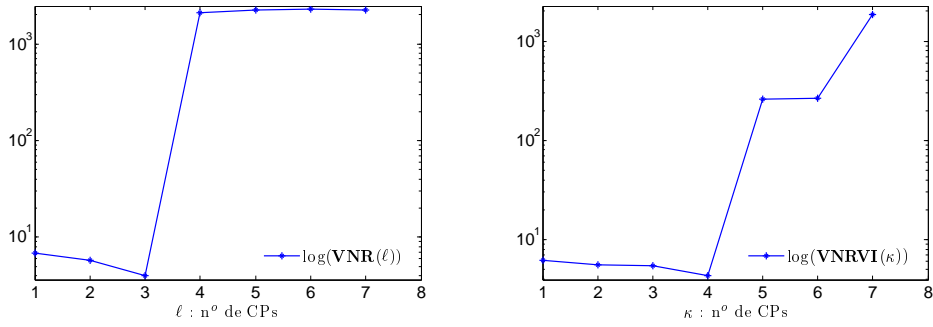


FIGURE 4.2 – Sélection du nombre optimal des CPs

la construction d'un modèle ACP. Notamment, les données d'une telle matrice sont centrées et réduites en utilisant les moyennes et les écarts types des données réservées au modèle. Selon la figure 4.2, un tel modèle doit être constitué de 4 CPs. Le minimum du critère **VNR** correspond à 3 CPs, ce qui implique l'existence de 3 importantes sources de corrélation. Ainsi, le critère **VNRVI** indique l'existence d'une variable indépendante. En effet, son minimum a été atteint pour $\kappa_{op} = 4$ CPs dans les données transformées de \mathbf{Y} , ce qui signifie selon le principe d'un tel critère que le nombre optimal des CPs dans les données de \mathbf{X} est $q = 8 - \kappa_{op} = 4$ CPs.

Dans le but d'illustrer un diagnostic de défauts en utilisant les différentes méthodes décrites dans ce chapitre, trois défauts sont introduits aux données de la matrice \mathbf{X} . Le premier noté $\mathcal{F}_{\{3\}}$ représente un défaut simple ayant une forme d'une dérive affectant la troisième variable (x_3) entre les instants 1550 et 1800 :

$$\mathcal{F}_{\{3\}} = \xi_3 f_{x_3}(k) \quad (4.114)$$

Le vecteur ξ_3 représente la troisième colonne de la matrice identité. Ainsi, le scalaire $f_{x_3}(k)$ désigne l'amplitude d'un tel défaut à la k ème observation :

$$f_{x_3}(k) = 0.1(k - 1550) \quad \text{pour } 1550 \leq k \leq 1800 \quad (4.115)$$

Le deuxième et le troisième défaut notés respectivement $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ et $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ sont de type multiple ayant également des formes de dérives. $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ a été ajouté entre les observations 2000 à 2400 simultanément pour la première et la septième variable :

$$\mathcal{F}_{\{1,7\}} = \Xi_{\{1,7\}} \mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1}(k) \\ f_{x_7}(k) \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

où $\Xi_{\{1,7\}}$ est une matrice orthonormée composée de la première (ξ_1) et la septième (ξ_7) colonne de la matrice identité. $\mathbf{f}(k)$ est un vecteur constitué de $f_{x_1}(k)$ et $f_{x_7}(k)$ qui représentent les amplitudes au k ème instant des composants du défaut dans les directions des variables correspondantes, avec :

$$\begin{cases} f_{x_1}(k) = 0.3(k - 2000) & \text{pour } 2000 \leq k \leq 2400 \\ f_{x_7}(k) = 0.02(2k - 2000) & \text{pour } 2000 \leq k \leq 2400 \end{cases} \quad (4.117)$$

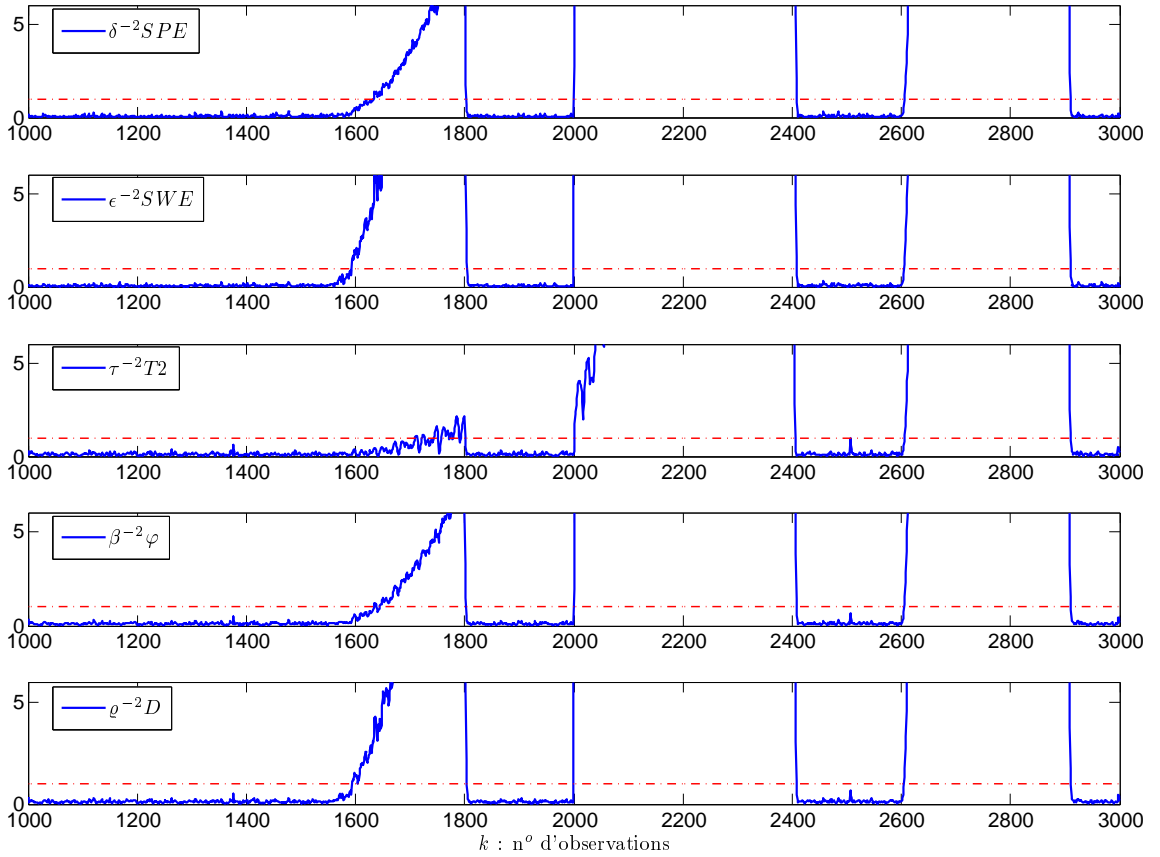


FIGURE 4.3 – Détection des défauts avec les différents indices

Le troisième défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ est introduit simultanément dans la sixième et la huitième variable entre les instants 2600 et 2900 :

$$\mathcal{F}_{\{6,8\}} = \Xi_{\{6,8\}} \mathbf{f}(k) = [\xi_6 \quad \xi_8] \begin{bmatrix} f_{x_6}(k) \\ f_{x_8}(k) \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Les amplitudes des composants d'un tel défaut dans les directions des variables correspondantes sont identiques :

$$f_{x_6}(k) = f_{x_8}(k) = k - 2600 \quad \text{pour } 2600 \leq k \leq 2900 \quad (4.119)$$

Pour une interprétation plus facile des résultats, nous suggérons que tout indicateur ayant pour objectifs la détection ou l'isolation d'un défaut suite à une comparaison par rapport à un seuil soit pondéré par la valeur d'un tel seuil afin que la comparaison s'effectue par rapport à l'unité. Pour les méthodes des contributions, l'affichage de leurs courbes pour toutes les variables est très encombrant rendant ainsi la distinction d'une courbe parmi d'autres très difficile voire impossible dans la même figure. Puisque nous avons une connaissance *a priori* sur les défauts, nous proposons d'afficher dans les figures les différences entre la contribution de la variable réellement en défaut et celles des autres variables :

$$Cont_j^\gamma(k) - Cont_i^\gamma(k) \quad (4.120)$$

où $Cont_j^l$ représente une contribution donnée. Dans le cas des défauts simples, j représente le numéro de la variable réellement en défaut. En revanche et pour le cas des défauts multiples, l'index j devient \mathcal{J} afin d'exprimer l'ensemble des variables réellement en défaut. Si l'équation (4.120) aboutit à des valeurs négatives, cela implique que la contribution de la (l'ensemble des) variable(s) réellement en défaut n'est pas la plus grande.

A partir de la figure 4.3, on constate que les défauts $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ et $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ ont été remarquablement détectés dès leurs apparitions par tous les indices de détection. Cependant, celui du $\mathcal{F}_{\{3\}}$ qui représente un défaut simple a été détecté avec des retards. Sa détection a commencé à partir des instants 1634, 1593, 1645 et 1593 respectivement par les indicateurs SPE , SWE , φ et D . L'amplitude de ce défaut n'a pas permis celui-ci d'être détectable en très grande partie plus particulièrement par l'indice $T2$ de Hotelling.

4.5.1 Diagnostic d'un défaut simple

En interprétant les résultats obtenus par les approches dont l'objectif étant l'isolation des défauts en se basant sur une comparaison de leurs valeurs par rapport à des seuils de contrôle comme la reconstruction des indices de détection et la $RBCr$, le défaut simple $\mathcal{F}_{\{3\}}$ est non isolable en utilisant les statistiques SPE , SWE et $T2$ (figures 4.4, 4.5 et 4.6 respectivement). D'après ces deux approches exprimées avec de tels indices de détection, la septième variable est également considérée en défaut. Cela s'explique par une forte colinéarité dans les sous-espaces engendrés par les vecteurs colonnes des matrices de tels indices entre la variable x_7 et celle réellement en défaut (x_3). En se basant sur l'indice combiné et celui de Mahalanobis (figures 4.7 et 4.8 respectivement), le défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ devient isolable dans une grande partie d'observations. Une telle situation illustre clairement l'analyse théorique d'isolabilité de défauts réalisée dans la sous-section 4.2.2 en montrant que la reconstruction de la distance combinée peut jouer un rôle plus avantageux dans l'isolation de défauts que des reconstructions séparées des indices que combine.

En se référant aux figures 4.4, 4.5 et 4.6, un diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ mené par l'approche CDC en utilisant les indices SPE , SWE et $T2$ n'est pas en mesure d'être correct. Selon les courbes qui représentent les différences des contributions en respectant l'équation (4.120), on remarque l'existence des valeurs négatives durant les observations défectueuses. Cela implique que la contribution de la variable réellement en défaut par décomposition complète de tels indices ne présente pas des valeurs plus supérieures que les contributions des autres variables. Néanmoins, l'utilisation de cette approche en se basant sur des décompositions de l'indice combiné ainsi que la distance de Mahalanobis a permis une identification correcte de la variable en défaut à partir de la 1643^{ième} observation (figures 4.7 et 4.8 respectivement). Dans le cadre de ce défaut simple, l'interprétation des résultats d'un diagnostic utilisant la méthode de contribution par reconstruction unidimensionnelle RBC est la même que celle de CDC .

D'autre part, les contributions par décomposition partielle PDC et diagonale DC de tous les indices de détection sans exception ont abouti à un diagnostic correct en identifiant la variable réellement en défaut à partir de la 1643^{ième} observation (figures 4.4 jusqu'à 4.8). Selon les analyses théoriques de diagnosticabilité, cela signifie que l'amplitude de ce défaut a été considérée importante dès cette observation.

D'après les figures correspondantes, on déduit qu'un diagnostic basé sur une évaluation

Défaut	Indice				
	SPE	SWE	$T2$	φ	D
$\mathcal{F}_{\{1,7\}}$	{1, 7} et {1, 3}		{1, 7}, {1, 3} et {3, 7}	{1, 7}	{1, 7}
$\mathcal{F}_{\{6,8\}}$	{1, 6}, {2, 6}, {3, 6}, {4, 6}, {5, 6}, {6, 7} et {6, 8}		{6, 8}	{6, 8}	{6, 8}

TABLE 4.2 – Ensembles des variables identifiés responsables des défauts multiples correspondants par l’approche de reconstruction et la $RBCr$ relativement aux indices

de l’ampleur des contributions peut conduire à des résultats erronés. Cela s’est justifiée plus particulièrement par les contributions PDC et DC en utilisant les indices SPE , SWE et D et les contributions CDC et RBC basées sur l’indice D . Ces indices de détection ont détecté l’existence du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ plus tôt avant que celui-ci ne soit correctement identifié par de telles contributions. Cependant, la méthode de reconstruction des indices et celle de la $RBCr$ garantissent une identification correcte de la variable en question dès l’apparition du défaut. Tout dépend de la nature et de l’amplitude d’un tel défaut, celui-ci peut ne pas être isolable. En effet, ces deux méthodes peuvent identifier également d’autres variables en défaut.

4.5.2 Diagnostic de défauts multiples

En considérant les défauts multiples, les approches des contributions telles que CDC , PDC et DC ne sont plus valables. En effet, seules la RBC multidimensionnelle, la reconstruction des indices et la $RBCr$ peuvent être considérées.

Nous rappelons que le deuxième défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ a été introduit entre les instants 2000 et 2400 simultanément dans les directions des variables x_1 et x_7 . En investiguant les figures 4.9, 4.10 et 4.11, l’approche de reconstruction ainsi que la $RBCr$ ont correctement identifié le défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ en utilisant les indices SPE , SWE et $T2$ de Hotelling. Néanmoins, un tel défaut est non isolable car l’ensemble des variables $\{1, 3\}$ est également identifié en défaut par ces deux méthodes en se basant sur les mêmes indices. En outre, ces deux approches ont aussi identifié l’ensemble $\{3, 7\}$ comme un candidat au défaut correspondant en considérant exceptionnellement l’indice $T2$ de Hotelling (figure 4.11). Le défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ a été correctement isolé par les deux méthodes en utilisant l’indice combiné ainsi que la distance de Mahalanobis (figures 4.12, 4.13 respectivement).

On note que dans le cas des défauts multiples, l’affichage de toutes les courbes dans les figures correspondantes est parfois illisible. Pour cette raison, nous avons proposé le tableau récapitulatif 4.2 présentant les résultats de ces deux approches pour les cas des défauts multiples.

Un diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ par évaluation de l’ampleur de la contribution RBC basée sur les indices SPE , SWE et $T2$ n’est pas garanti correct (figures 4.9, 4.10 et 4.11 respectivement). En effet, l’utilisation de l’équation (4.120) a engendré des valeurs négatives entre les instants 2000 et 2400, ce qui implique que l’ensemble des variables réellement en défaut ne dispose pas de la plus grande contribution. D’après les figures

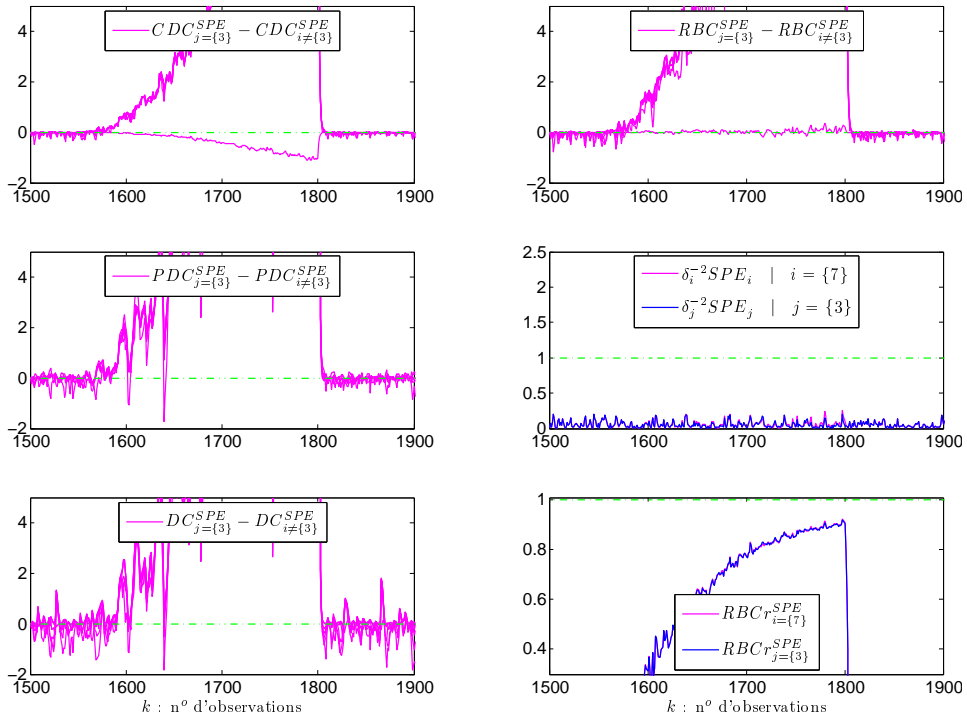


FIGURE 4.4 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice SPE

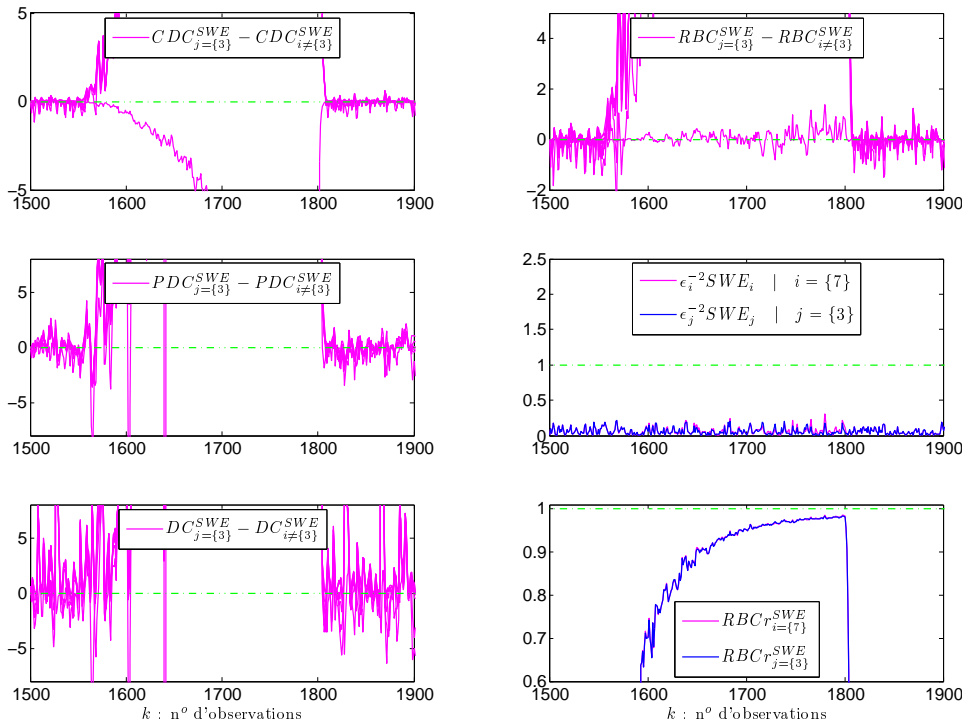


FIGURE 4.5 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice SWE

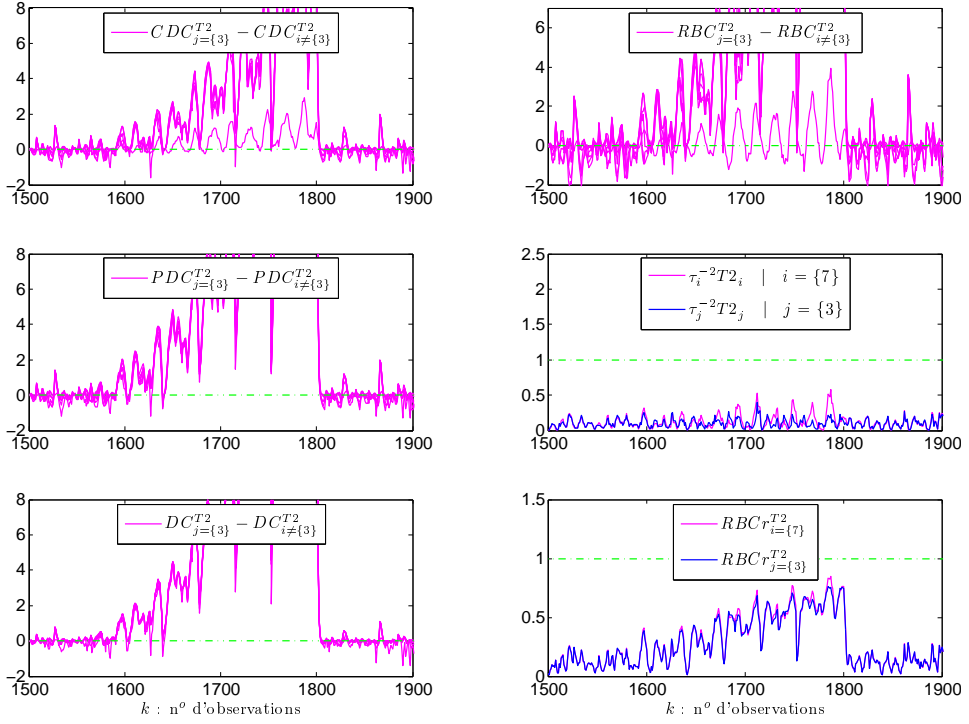


FIGURE 4.6 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice T_2

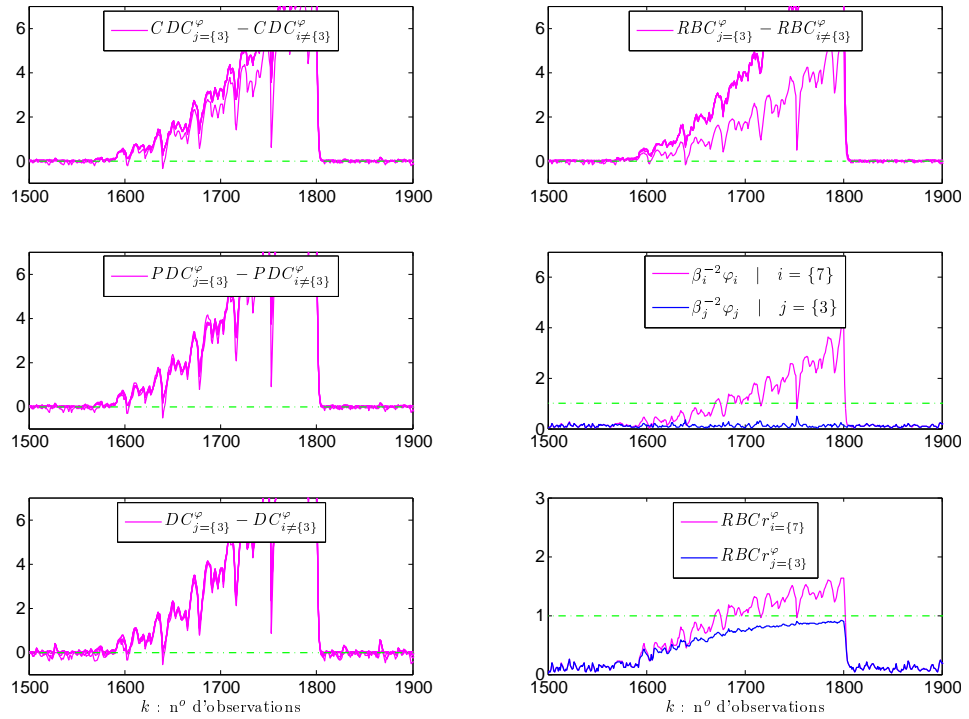


FIGURE 4.7 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice φ

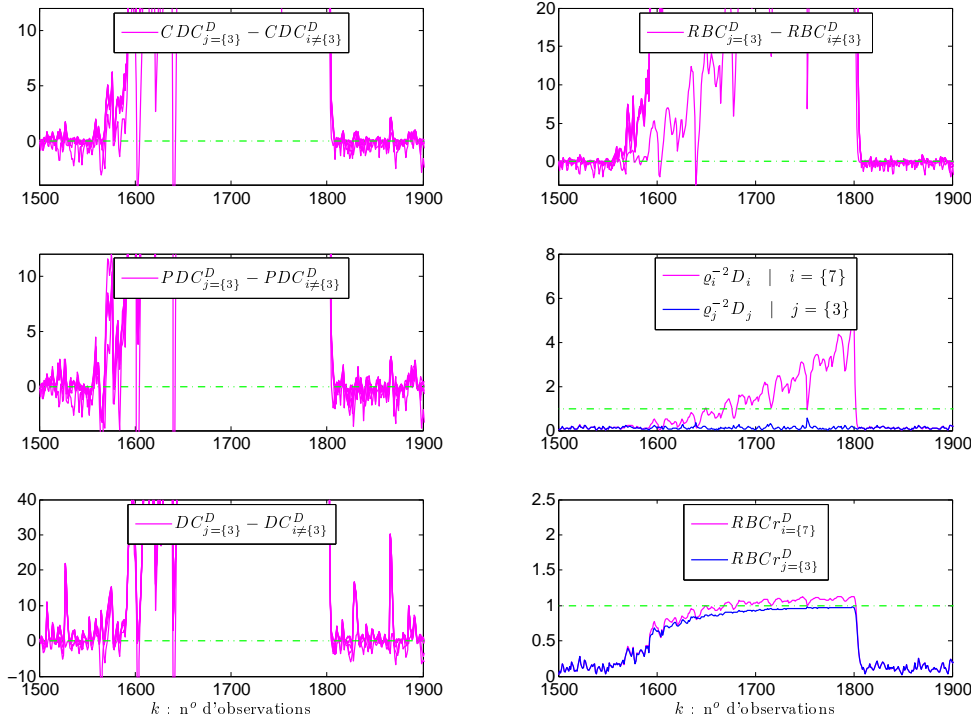


FIGURE 4.8 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{3\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice D

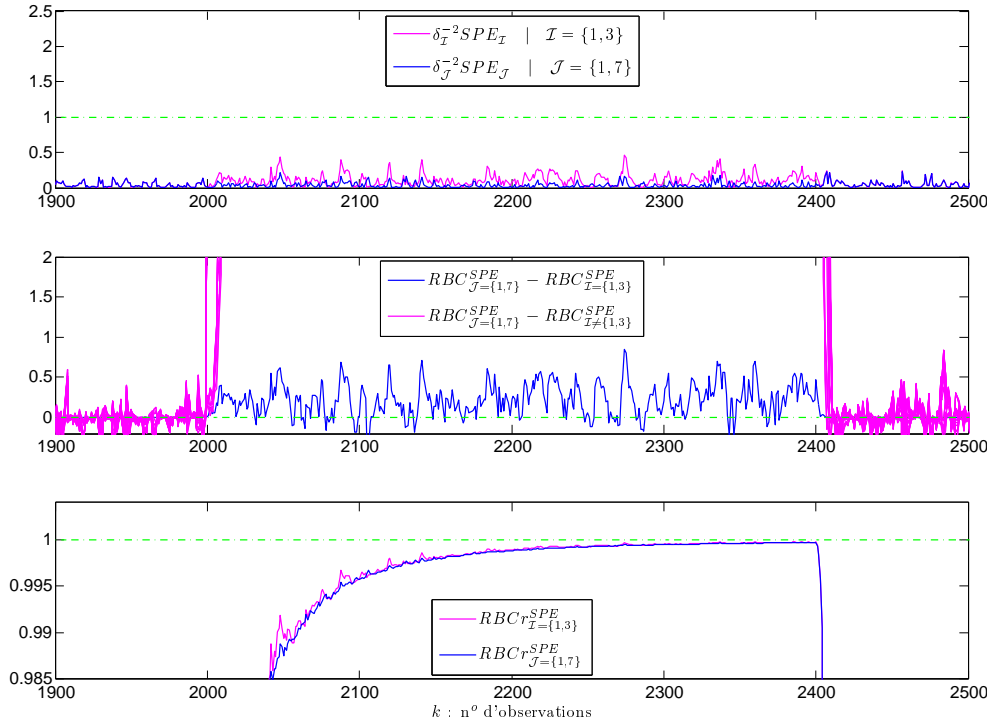


FIGURE 4.9 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice SPE

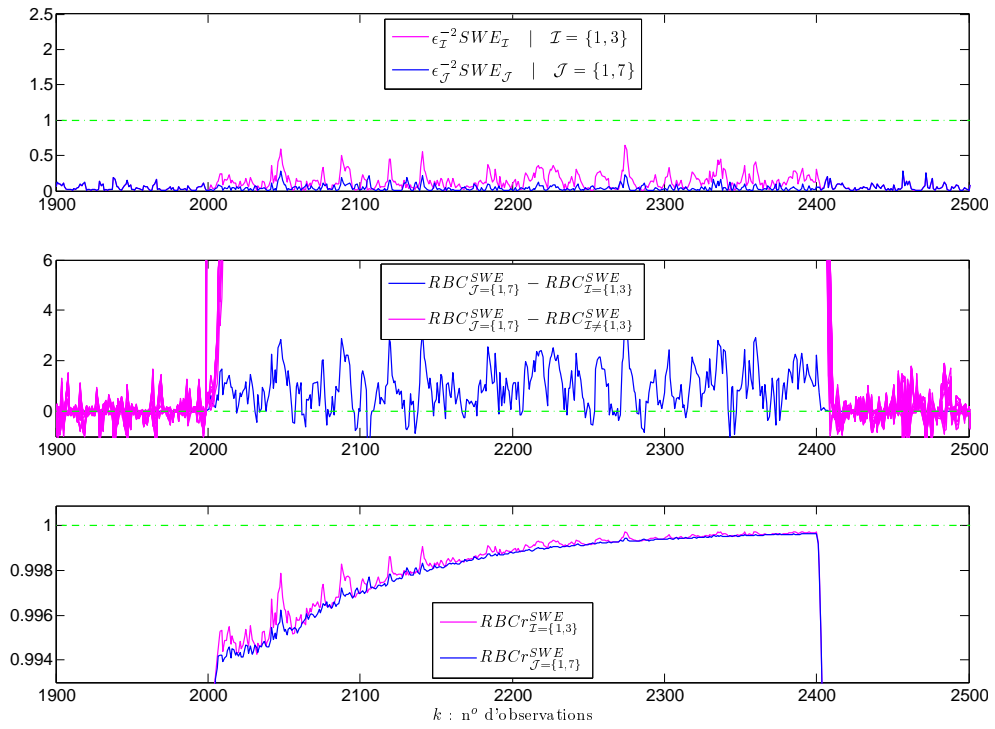


FIGURE 4.10 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice SWE

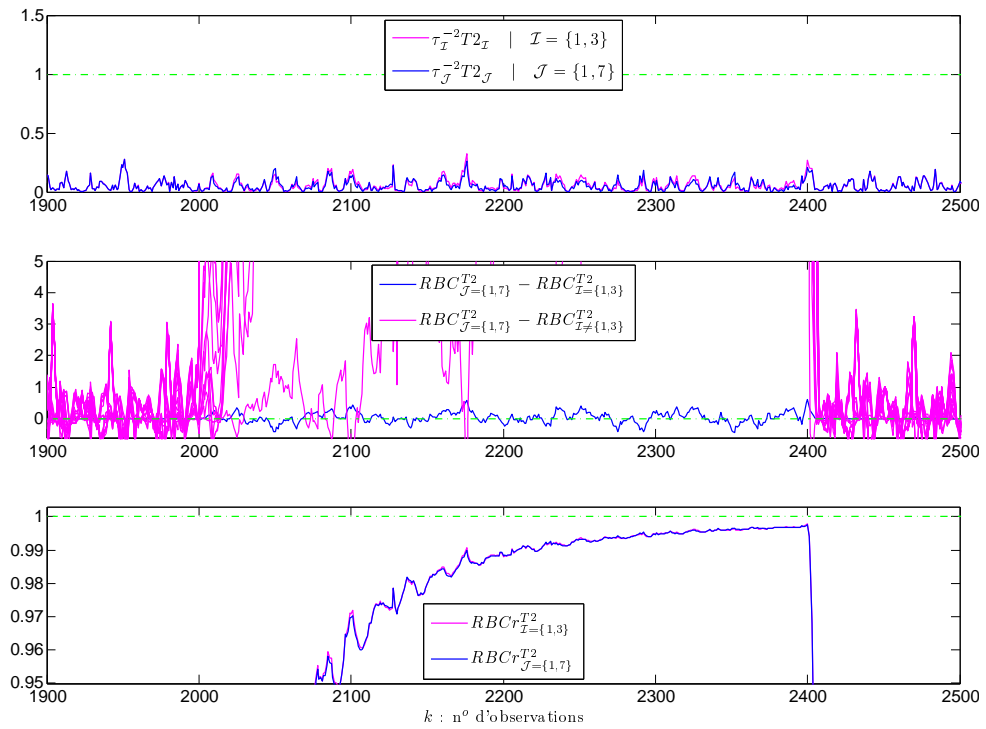


FIGURE 4.11 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice $T2$

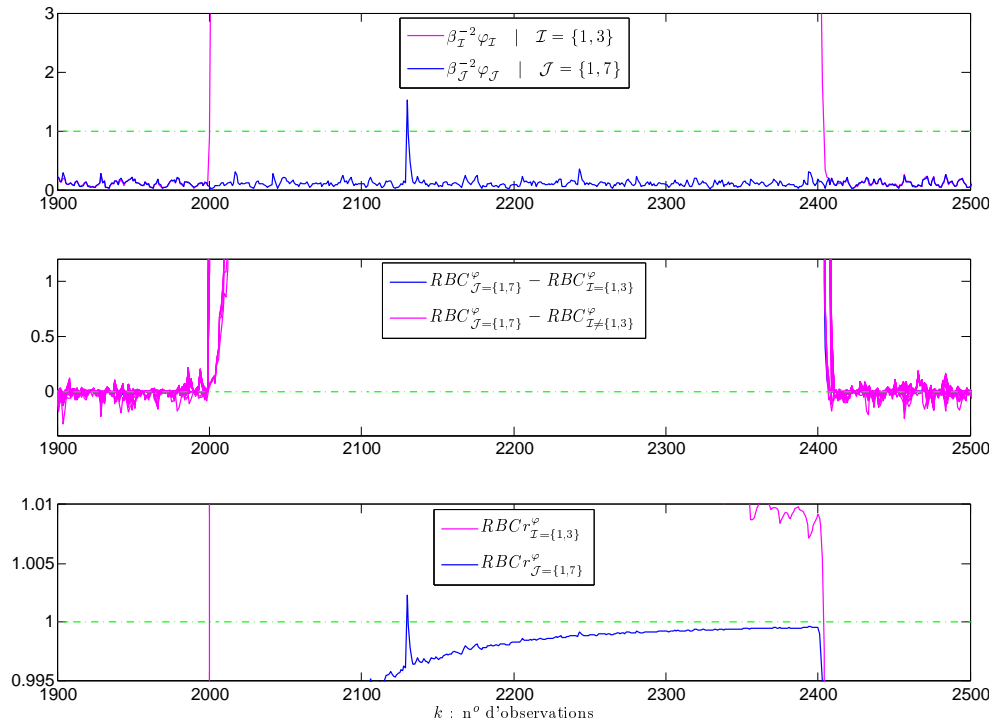


FIGURE 4.12 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice φ

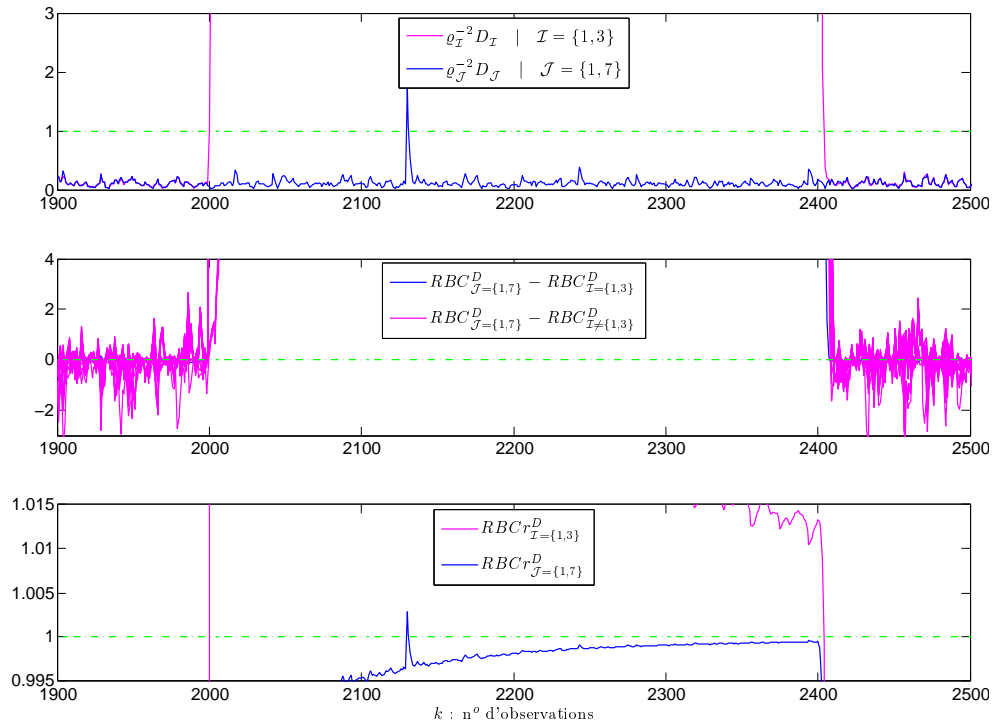


FIGURE 4.13 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice D

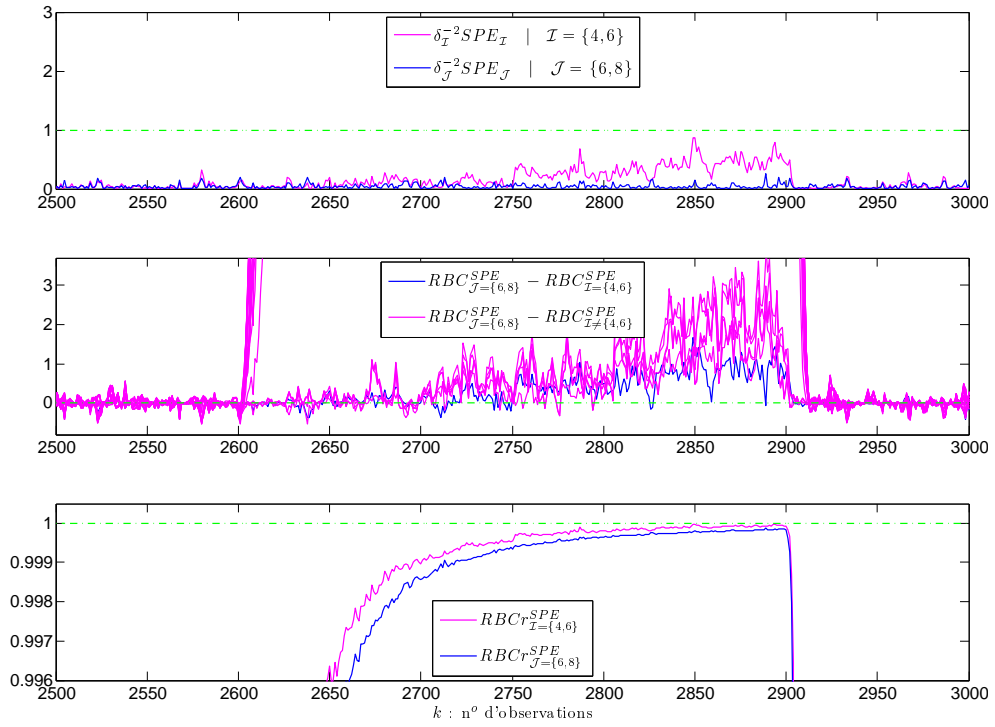


FIGURE 4.14 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice SPE

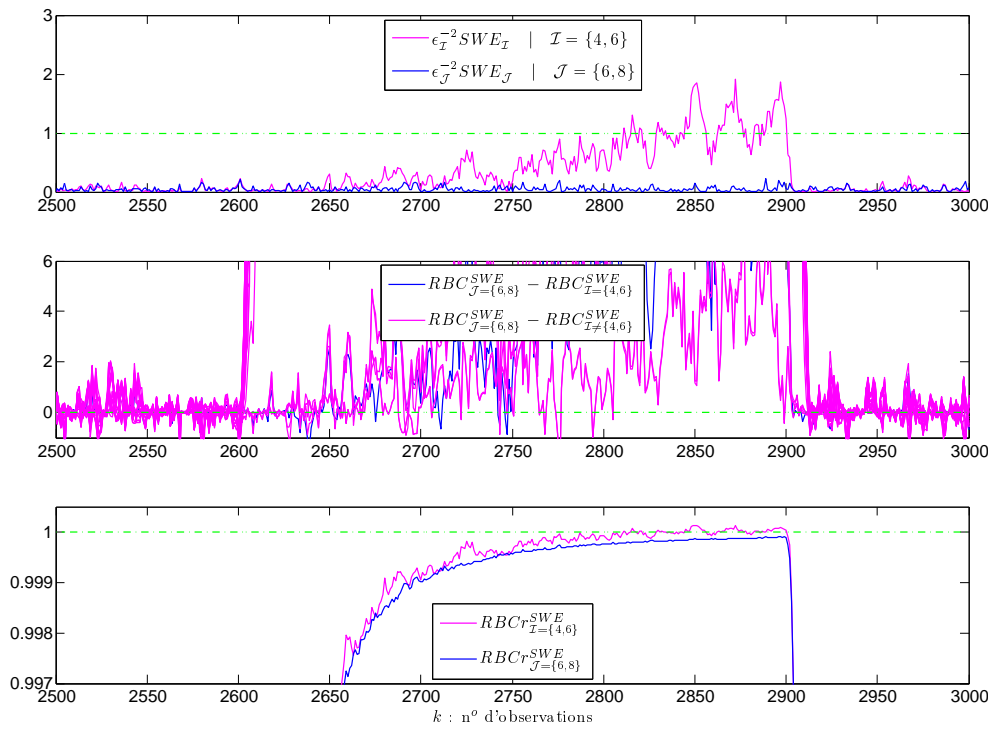


FIGURE 4.15 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice SWE

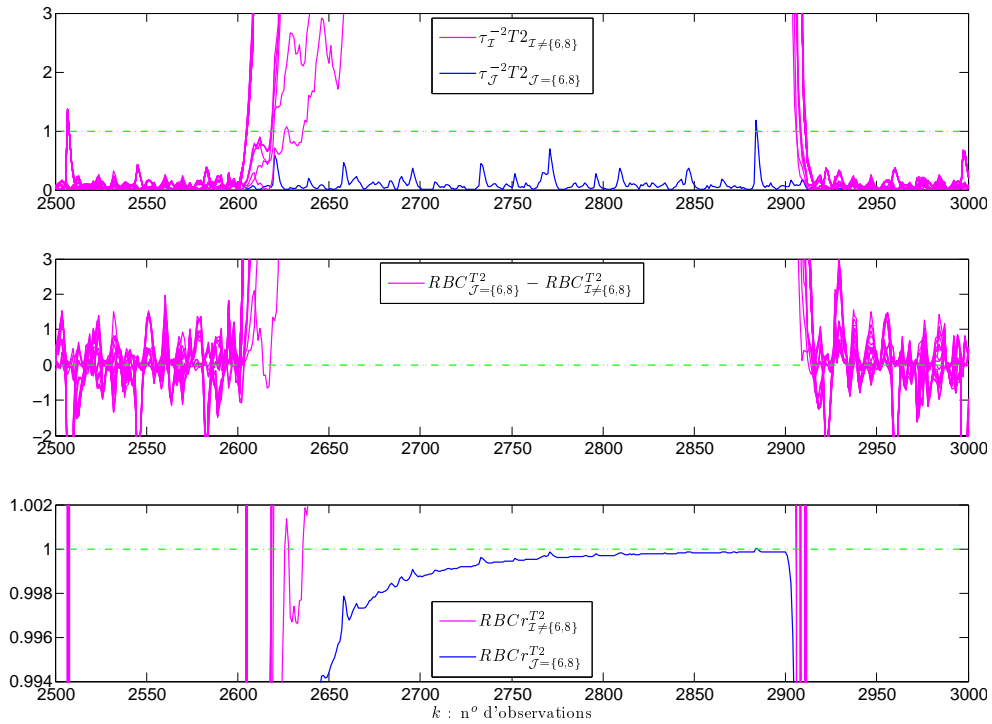


FIGURE 4.16 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice T^2

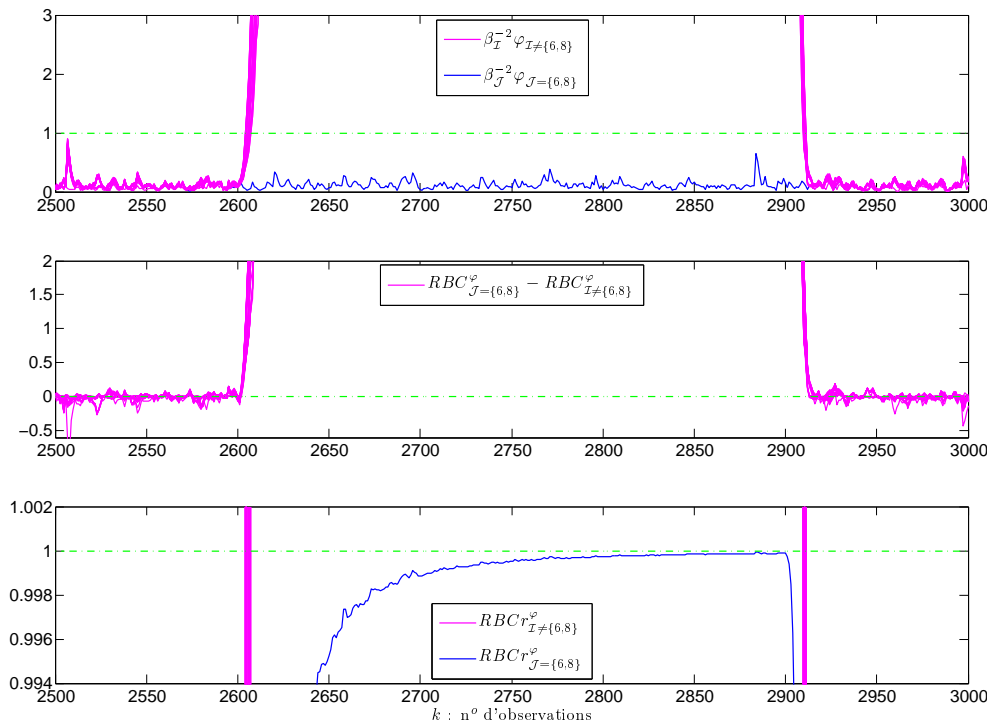


FIGURE 4.17 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice φ

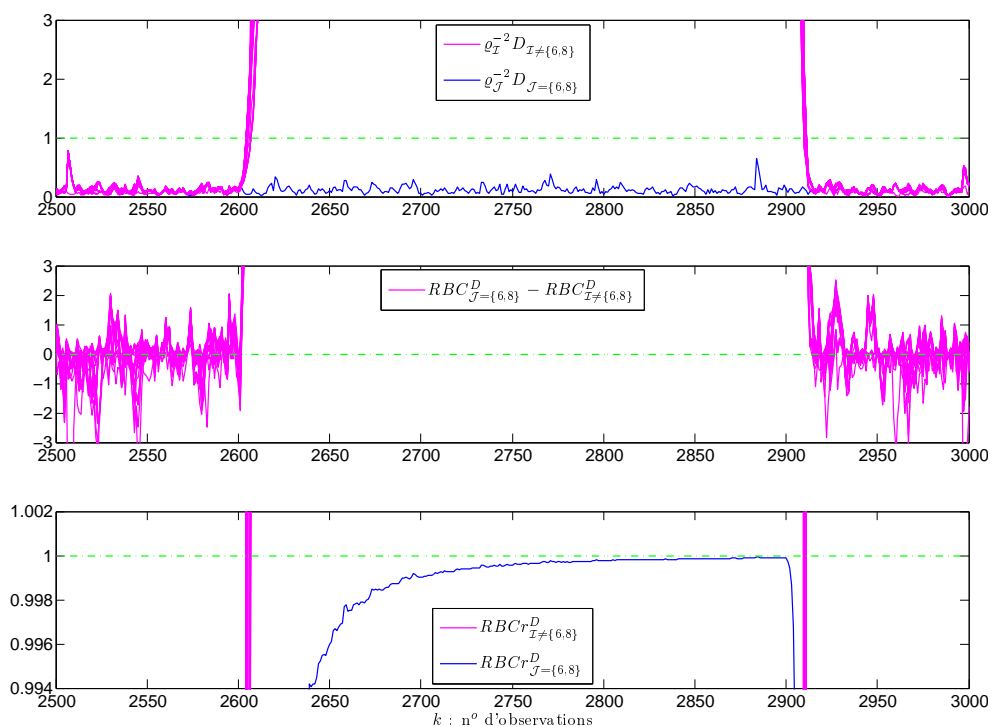


FIGURE 4.18 – Diagnostic du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ par différentes méthodes basées sur l'indice D

4.12, 4.13, nous constatons que cette méthode a assuré une plus grande contribution pour l'ensemble des variable $\{1, 7\}$, ce qui signifie que le défaut $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$ est correctement identifié par la RBC en utilisant les indices φ et D .

D'après le tableau 4.2 ainsi que les figures 4.16, 4.17 et 4.18, le défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ qui a été introduit aux niveaux des variables x_6 et x_8 a été correctement localisé par les trois approches en utilisant les indices T^2 de Hotelling, φ et D . Par ailleurs, l'investigation de ce défaut avec l'approche de reconstruction et la $RBCr$ en s'appuyant sur les indices SPE et SWE a abouti à l'identification de sept ensembles de variables en défaut (voir tableau 4.2). Les figures 4.14 et 4.15 montrent que l'ensemble $\{6, 8\}$ composé des variables réellement en défaut ainsi qu'à titre d'exemple l'ensemble $\{4, 6\}$ disposent des courbes qui sont au dessous de l'unité en particulier avec l'indice SPE . En se référant à l'équation (4.120), l'approche de contribution multidimensionnelle (RBC) utilisant les indices SPE et SWE a assuré des valeurs positives exceptionnellement durant les dernières observations du défaut (figures 4.14 et 4.15). D'après l'analyse de diagnosticabilité, l'amplitude du défaut $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$ durant ces quelques dernières observations est importante permettant ainsi à la RBC de garantir un diagnostic correct.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu le concept d'isolabilité de défauts par l'approche de reconstruction à tout indice de détection ayant une forme quadratique. Une telle généralisation nous a permis d'élaborer une analyse théorique d'isolabilité de défauts par

reconstruction de l'indice combiné versus celles des indices SPE et $T2$ de Hotelling. Cette analyse a mis en avant l'avantage que peut jouer la distance combinée dans l'isolation des défauts affectant plus particulièrement des variables colinéaires. Malgré qu'une telle distance combine les indices SPE et $T2$ de Hotelling, les propriétés qui peuvent caractériser l'un comme l'autre de ces deux indices ne font pas nécessairement partie de celles de l'indice combiné. En effet, il peut y exister des défauts qui ne sont garantis isolables ni par l'indice SPE ni par celui du $T2$, mais ils peuvent être garantis isolables par la distance combinée.

Les contributions sont parmi les approches les plus classiquement utilisées pour un diagnostic de défauts plus particulièrement de type simple. Dans ce cadre, nous avons proposé une nouvelle forme de contribution basée sur la décomposition de l'indice SPE et qui fait partie des contributions de type PDC . En considérant des défauts simples ayant de grandes amplitudes, l'analyse de diagnosticabilité basée sur les approches des contributions montre que seule la contribution de type CDC ne peut pas garantir un diagnostic correct.

Puisque les défauts simples représentent un cas particulier, nous avons étendu la méthode RBC au cas multidimensionnel en montrant que la nouvelle forme garantit un diagnostic correct de défauts multiples de grandes amplitudes. Néanmoins, les défauts peuvent être réellement beaucoup plus complexes (faibles amplitudes, colinéarités entre des variables, etc.). Dans ce cas, un diagnostic basé sur l'évaluation de l'ampleur des contributions aboutit sans doute à des conclusions erronées. Ainsi, les méthodes qui sembleraient plus avantageuses représentent celles qui s'appuient sur des seuils de contrôle pour conclure une décision comme l'approche de reconstruction des indices de détection.

Afin d'exploiter la méthode RBC pour un diagnostic de défauts complexes, nous avons proposé une nouvelle approche appelée $RBCr$ dont le seuil de contrôle est égale à l'unité. La diagnosticabilité théorique basée sur une telle méthode montre qu'un défaut détectable est garanti identifiable. Cependant, il est garanti isolable si son amplitude vérifie la même condition suffisante d'isolabilité établie pour la méthode de reconstruction des indices de détection.

En se basant sur un exemple simulé, toutes les approches présentées garantissent un diagnostic correct dans le cas des défauts de grandes amplitudes. En revanche, les défauts les plus complexes et qui sont détectables sont garantis uniquement identifiables par la méthode de reconstruction des indices ainsi que la $RBCr$. L'approche RBC ne peut pas garantir un diagnostic correct de ce type de défauts. Nous avons constaté également que ces défauts ont été plus particulièrement mieux isolables en utilisant l'indice combiné ainsi que celui de Mahalanobis. Dans ce cadre, on peut conclure que la méthode de reconstruction des indices de détection et la $RBCr$ sont plus avantageuses que l'approche RBC afin d'aboutir à un diagnostic de défauts mieux décisif. Toutefois, la prise en considération des résultats de toutes les approches peut conduire à distinguer les défauts.

Conclusion générale & perspectives

L'analyse de données multivariées pour l'identification des états de fonctionnement d'un processus présente des résultats intéressants pour les systèmes où il est difficile voire impossible de leur établir un modèle complet. En effet, l'utilisation des méthodes statistiques pour un diagnostic de défauts de processus est une alternative plus prometteuse qu'une utilisation des méthodes qui se basent sur un modèle mathématique. Puisque l'objectif d'un diagnostic est de constater l'apparition de défauts puis d'en trouver les causes, l'analyse des mesures des variables de processus permet d'identifier les causes car les états de défaillances sont directement liés aux variables. Dans ce contexte, les méthodes basées sur l'analyse en composantes principales (ACP) sont très intéressantes pour la mise en évidence des corrélations linéaires entre les variables du processus sans pour autant formuler de façon explicite un modèle entrées/sorties du système.

En présentant le principe fondamental de l'ACP, cette dernière est prouvée comme étant une approche de modélisation des relations linéaires entre les différentes variables d'un processus. Ainsi, les paramètres du modèle représentent tout simplement les valeurs et les vecteurs propres de la matrice de corrélation ou de covariance des données collectées lors du fonctionnement normal du processus. Puisque les derniers vecteurs propres sont associés à des composantes principales (CPs) généralement non porteuses d'informations significatives, la tâche principale de l'ACP s'articule autour d'un choix d'une structure adaptée du modèle ACP. Autrement dit, un tel modèle doit être constitué uniquement par les quelques premières CPs les plus significatives. Dans ce cadre, nous avons réalisé qu'en l'absence de bruit de mesures, le modèle ACP est composé de toutes les CPs ayant des variances non nulles. Dans la pratique (présence de bruit), une détermination optimale de la structure d'un tel modèle est beaucoup plus compliquée. Pour cette raison, plusieurs critères de choix du nombre optimal des CPs ont été présentés et comparés pour une évaluation de leurs performances vis-à-vis de plusieurs enjeux comme le bruit de mesures, les types des variables considérées et le nombre d'observations utilisées pour la modélisation. Notre choix des critères porte sur deux principales familles. La première présente des critères heuristiques qui se basent sur des seuils jugés subjectifs pour le choix du nombre optimal des CPs. Malgré leur popularité, nous avons conclu à travers un exemple simulé que ces critères demeurent très subjectifs et largement restreints en termes de décision et efficacité respectivement.

La deuxième catégorie est constituée par des critères de minimisation par rapport au nombre de CPs sélectionnées. Autrement dit, le numéro de la CP qui correspond au minimum d'un critère donné représente le nombre des CPs constituant le modèle ACP. Une telle famille a été composée de quatre critères qui sont **AIC**, **MDL**, **IE** et **VNR**.

Les trois premiers sont utilisables uniquement avec des données non normalisées entachées par un bruit blanc. Le quatrième critère qui représente la variance non reconstruite est originairement conçu afin qu'il soit valable indépendamment de la nature des données. Toutefois, il est préférable que ces données soient exprimées dans la même échelle pour une meilleure mise en évidence d'une ACP. Puisque le critère **VNR** est en relation directe avec les paramètres fournis par l'ACP, nous avons étudié son comportement vis-à-vis des données normalisées contrairement aux trois autres critères.

A partir des résultats de simulation, nous avons constaté que le critère **AIC** surestime souvent le nombre utile des CPs. En s'appuyant sur une comparaison approfondie des résultats de tous les critères présentés, le **MDL** semble être le critère le plus efficace. Néanmoins, sa précision dans le choix de la dimension du modèle est fortement liée au nombre N d'observations considérées pour la modélisation. Une sélection basée sur le **MDL** converge vers le nombre correct des CPs lorsque le nombre d'observations est assez important. En effet, le paramètre N entre en vigueur d'une façon explicite dans l'expression d'un tel critère. Ainsi, l'optimalité est assurée d'un point de vue mathématique lorsque N tend vers l'infini. Dans la pratique, un système est généralement représenté par un nombre fini d'observations qui peut être pour autant insuffisant afin que le critère **MDL** exprime convenablement le nombre nécessaire des CPs. Par conséquent, on ne peut pas savoir si un tel critère converge finalement vers le nombre correct des CPs. D'après les résultats de simulation et pour un nombre insuffisant d'observations, nous avons constaté que ce critère ne retient pas souvent les CPs associées aux variables indépendantes de faibles variances.

Le critère **IE** abandonne souvent les CPs de faibles variances bien qu'elles soient théoriquement supposées être retenues dans le modèle. Cet inconvénient a été montré théoriquement dans le cadre de cette thèse. L'avantage dans l'utilisation du critère **VNR** étant dans la considération des données normalisées, ce qui signifie que toutes les variables sont exprimées dans la même échelle. Malgré cette caractéristique, nous avons remarqué qu'un tel critère ne prend pas en compte les variables indépendantes et quasi-indépendantes bien qu'en l'absence de bruit de mesures ces variables se transforment en des CPs dont les variances sont non nulles. Dans ce stade, nous avons également contribué par une démonstration théorique confirmant la limitation de ce critère. En effet, nous avons montré que le nombre des CPs qui correspond au minimum d'un tel critère est invariant en l'addition des variables indépendantes et quasi-indépendantes. Autrement dit, le critère **VNR** est insensible à la présence de ce type de variables. Ainsi, son minimum correspond au nombre des CPs uniquement pour les variables qui sont linéairement corrélées les unes aux autres. En outre, une telle démonstration met en évidence l'inefficacité d'un tel critère en considérant des données non normalisées présentant des variables indépendantes. La synthèse d'une telle étude comparative nous a permis de conclure que seuls les critères **MDL** et **VNR** peuvent être considérés intéressants à l'égard de leur comportement et principe respectivement. Cependant, ils présentent des inconvénients rendant souvent les décisions incertaines.

Dans le but d'exploiter le principe du critère **VNR** tout en comptant les variables indépendantes et quasi-indépendantes, nous avons établi à travers une généralisation la variance de l'erreur de reconstruction d'un indice quelconque ayant une forme quadratique. Celle-ci a pour objectif de révéler la variance non reconstruite de chacun des indices de

détection connus dans le cadre de l'ACP. Notamment, la variance de l'erreur de reconstruction de l'indice SPE n'est autre que le classique critère **VNR**. Les variances non reconstruites relatives aux restes des indices représentent des nouveaux critères présentés dans cette thèse. Une analyse théorique des comportements de tels critères nous a permis de déduire que les variances non reconstruites des indices SWE , $T2$ de Hotelling ainsi que la distance de Mahalanobis ne peuvent pas être utilisées pour le choix d'un modèle ACP. Par ailleurs, la particularité est constatée dans la variance de l'erreur de reconstruction de l'indice combiné. Une telle variance dépend du nombre des CPs ainsi qu'un seuil de signification introduit implicitement dans les limites de contrôle des indices que combine la distance combinée. Dans ce cadre, il est difficile d'établir une consistance théorique de ce nouveau critère. Par contre, les résultats de simulation ont montré qu'il est capable de déterminer le nombre optimal des CPs en s'appuyant sur un choix très approprié et non ordinaire du seuil de signification. Nous avons également constaté qu'il présente parfois des résultats non stationnaires. Pour remédier à ces inconvénients, nous avons proposé une variance non reconstruite relative à un nouvel indice combiné. L'objectif étant de faciliter la tâche du choix de la valeur du seuil de signification. Le nouveau critère montre des résultats plus efficaces et mieux stationnaires. Néanmoins, les deux critères proposés demeurent dans leurs globalités incertains, aussi faut-il disposer d'une connaissance *a priori* ou d'une expertise pour prendre la décision convenable. En effet, les deux critères sont considérés comme étant empiriques car ils s'appuient uniquement sur l'expérience.

L'originalité principale dans nos contributions pour un choix optimal du modèle ACP est introduite par la proposition d'un troisième critère noté **VNRVI**. Celui-ci représente la variance de l'erreur de reconstruction relative à des nouvelles données. En s'appuyant sur un changement de représentation des données, nous avons supposé que ces données qui sont normalisées et observées réellement sont en réalité issues d'une transformation linéaire d'autres données mieux exploitables en présence des variables indépendantes et quasi-indépendantes. En se basant sur ce nouveau critère, la détermination du nombre optimal des CPs des nouvelles données sert à déduire celui des données réellement observées en comptant évidemment ce type des variables. Dans ce cadre, nous avons établi théoriquement les conditions garantissant l'optimalité de sélection à travers un tel critère. Les résultats de simulation ont validé notre théorie en prouvant ainsi qu'un tel critère étant plus efficace qu'aux autres critères présentés dans cette thèse.

Dans l'objectif d'un diagnostic de défauts par l'approche de reconstruction, la première contribution était élaborée par une généralisation du concept d'isolabilité de défauts à tout indice de détection ayant une forme quadratique. Cette généralisation nous a permis en conséquence de réaliser une analyse théorique d'isolabilité de défauts par reconstruction de l'indice combiné versus celles des indices que combine (SPE et $T2$ de Hotelling). Une telle analyse a mis en avant l'avantage que peut jouer la distance combinée dans l'isolation des défauts caractérisant plus particulièrement les variables colinéaires. Ainsi, il peut y exister des défauts qui ne sont garantis isolables ni par l'indice SPE ni par celui du $T2$ par contre ils peuvent être garantis isolables uniquement par la distance combinée.

Dans le cadre d'un diagnostic de défauts basé sur les approches des contributions, celles-ci sont dédiées pour diagnostiquer plus particulièrement les défauts simples. Ainsi, nous avons proposé une nouvelle méthode de contribution par décomposition partielle de l'indice SPE . Une analyse de diagnosticabilité de défauts basée sur une telle approche ga-

rantit un diagnostic correct de défauts simples ayant de grandes amplitudes. L'exclusivité révélée par la présente thèse dans le domaine du diagnostic se manifeste également par l'extension d'une approche de contribution dite *RBC* au diagnostic de défauts multiples. Ainsi, l'analyse de diagnosticabilité de défauts en s'appuyant sur la nouvelle approche montre que celle-ci garantit un diagnostic correct de défauts multiples de grandes amplitudes. Afin de considérer la réalité complexe de défauts (faibles amplitudes, colinéarités entre les variables), nous avons exploité la nouvelle approche *RBC* pour proposer une nouvelle méthode de diagnostic appelée *RBCr* qui se base sur un seuil de contrôle égale à l'unité. Nous avons montré théoriquement qu'un défaut détectable est garanti identifiable par la présente méthode. Ainsi, ce défaut est garanti isolable si son amplitude satisfait une condition d'isolabilité qui est identique à celle établie pour l'approche de reconstruction des indices.

Les résultats de simulation montrent que toutes les approches présentées garantissent un diagnostic correct dans le cas des défauts de grandes amplitudes, tandis que les défauts complexes et qui sont détectables sont garantis uniquement identifiables par la méthode de reconstruction des indices ainsi que la *RBCr*. Entre autre, l'approche *RBC* multidimensionnelle ne peut pas garantir un diagnostic correct de ce type de défauts. Nous avons constaté également que ces défauts ont été mieux isolables avec ces méthodes en utilisant plus particulièrement l'indice combiné ainsi que celui de Mahalanobis. Sous cette optique, nous avons pu conclure que la méthode de reconstruction des indices et celle de *RBCr* sont généralement plus avantageuses que l'approche *RBC* afin d'aboutir à un diagnostic concluant de défauts multiples. Il n'empêche que la prise en considération des résultats de toutes les approches peut aider à l'isolation des défauts réels.

Dans un premier temps, les perspectives à envisager sont de tester expérimentalement les méthodes proposées dans cette thèse sur des données expérimentales fournies par la société STMicroelectronics afin de valider leur performance pour une possible mise en œuvre industrielle.

Au niveau théorique, l'ACP robuste ainsi que celle à noyaux disposent en partie des mêmes principes que l'ACP classique. Dans ce cadre, nous envisageons une extension de nos travaux de recherche qui s'articulent autour d'un choix optimal du modèle ACP ainsi qu'un diagnostic de défauts en considérant ces deux méthodes.



Limitation du critère **VNR**

Nous supposons qu'on dispose d'une matrice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ composée de N mesures pour m variables qui sont toutes linéairement corrélées. Ainsi,

$$\Sigma = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (\text{A.1})$$

représente leur matrice de covariance ou de corrélation dans le cas où les données sont normalisées. \mathbf{P} et Λ représentent respectivement les matrices des vecteurs et valeurs propres de Σ .

En présence d'un bruit de variance non nulle, il existe alors un nombre optimal de q CPs assurant le minimum de la variance non reconstruite de chaque variable. En considérant une matrice de corrélation donc les données sont normalisées, le minimum du critère **VNR** est atteint pour $\ell = q$:

$$q = \arg \min_{\ell} \{\mathbf{VNR}(\ell)\} \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\mathbf{VNR}(\ell) = \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j}{(\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j)^2} \quad (\text{A.3})$$

où $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T$ et $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)}$ est une matrice composée des $(m - \ell)$ vecteurs propres de la matrice \mathbf{P} . Puisque le modèle optimal est engendré par les q premières CPs, une subdivision appropriée de \mathbf{P} nous permet d'écrire :

$$\mathbf{P} = [\hat{\mathbf{U}} \quad \tilde{\mathbf{U}}] \quad (\text{A.4})$$

$\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ et $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-q)}$ sont deux matrices respectivement constituées des q premiers et $(m - q)$ derniers vecteurs propres de \mathbf{P} .

Supposons qu'une nouvelle variable indépendante ou quasi-indépendante est ajoutée à la matrice \mathbf{X} . Cela nous permet de calculer une nouvelle matrice de corrélation, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(m+1)^2}$, dont on peut montrer qu'elle peut avoir la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Sigma & \epsilon \\ \epsilon^T & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \quad (\text{A.5})$$

avec $\epsilon \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur caractérisé par une norme qui tend vers zéro puisque la variable ajoutée est indépendante. Ce vecteur est composé des coefficients de corrélation d'une telle variable avec les autres. \mathbf{V} et \mathbf{D} représentent respectivement les matrices des vecteurs et valeurs propres de \mathbf{M} .

En considérant la condition d'indépendance de la variable ajoutée, $\|\epsilon\| \approx 0$, la matrice \mathbf{V} peut être exprimée approximativement en fonction de \mathbf{P} en appliquant des subdivisions appropriées :

$$\mathbf{V} \approx \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \phi_2 & \tilde{\mathbf{U}} \\ \phi_1^T & \omega & \phi_3^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

où $\phi_1 \in \mathbb{R}^q$, $\phi_2 \in \mathbb{R}^m$ et $\phi_3 \in \mathbb{R}^{(m-q)}$ sont des vecteurs dont les normes tendent respectivement vers des zéros ou également $\|\phi_1\| \ll |\omega|$, $\|\phi_2\| \ll |\omega|$ et $\|\phi_3\| \ll |\omega|$. Puisque \mathbf{V} est une matrice orthonormée, cela implique que $|\omega|$ est proche de l'unité.

Notons par F et \hbar respectivement la nouvelle variance non reconstruite globale et le nouveau paramètre qui désigne le nombre des CPs exprimés dans la nouvelle base de données en prenant en considération la variable ajoutée :

$$F(\hbar) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\xi_i^T \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \xi_i}{(\xi_i^T \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \xi_i)^2} \quad (\text{A.7})$$

avec $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1-\hbar)}$ est constituée des $(m+1-\hbar)$ derniers vecteurs propres de la matrice \mathbf{V} .

Afin d'étudier le comportement du critère F en utilisant les approximations proposées, trois cas peuvent être illustrés :

1^{er} cas : $\hbar \leq q$ La prise en considération de ce cas implique que la matrice \mathbf{V} doit encore subir une décomposition comme suit :

$$\mathbf{V} \approx \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_1 & \hat{\mathbf{U}}_2 & \phi_2 & \tilde{\mathbf{U}} \\ \phi_{11}^T & \phi_{12}^T & \omega & \phi_3^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

où $\hat{\mathbf{U}}_1 \in \mathbb{R}^{m \times \hbar}$ et $\hat{\mathbf{U}}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (q-\hbar)}$ sont respectivement composées des \hbar premiers et $(q-\hbar)$ derniers vecteurs de la matrice $\hat{\mathbf{U}}$. $\phi_{11} \in \mathbb{R}^{\hbar}$ et $\phi_{12} \in \mathbb{R}^{(q-\hbar)}$ sont deux vecteurs respectivement constitués des \hbar premiers et $(q-\hbar)$ derniers éléments du vecteur ϕ_1 .

Cette décomposition nous permet d'exprimer la matrice $\tilde{\mathbf{V}}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_2 & \phi_2 & \tilde{\mathbf{U}} \\ \phi_{12}^T & \omega & \phi_3^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

En considérant les approximations présentées au départ, nous montrons que :

$$\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \approx \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T + \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T & \theta \\ \theta^T & \omega^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

et

$$\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \approx \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T \Sigma \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T + \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T \Sigma \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T & \psi \\ \psi^T & \omega^4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

où $\theta \in \mathbb{R}^m$ et $\psi \in \mathbb{R}^m$. D'après ces deux dernières équations ainsi que celle de (A.7), le critère F peut être exprimé comme suit :

$$F(\hbar \leq q) \approx 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^T \left[\hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T \Sigma \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T + \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T \Sigma \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T \right] \xi_i}{(\xi_i^T \left[\hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T + \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T \right] \xi_i)^2} \quad (\text{A.12})$$

En outre, et pour $\ell = \hbar$, la matrice résiduelle $\tilde{\mathbf{P}}$ est composée de tous les vecteurs de la matrice $\tilde{\mathbf{U}}$ ainsi que les $(q - \hbar)$ derniers vecteurs de $\hat{\mathbf{U}}$, d'où :

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\hat{\mathbf{U}}_2 \quad \tilde{\mathbf{U}}] \quad (\text{A.13})$$

Puisque $\hat{\mathbf{U}}_2$ et $\tilde{\mathbf{U}}$ sont orthogonales, nous montrons que le deuxième terme de l'équation (A.12) représente l'expression du critère $\mathbf{VNR}(\ell)$ avec $\ell = \hbar \leq q$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^T \left[\hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T \Sigma \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T + \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T \Sigma \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T \right] \xi_i}{(\xi_i^T \left[\hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^T + \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T \right] \xi_i)^2} &= \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \Sigma \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_i}{(\xi_i^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_i)^2} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \Sigma \tilde{\mathbf{C}} \xi_j}{(\xi_j^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_j)^2} \\ &= \mathbf{VNR}(\ell \leq q) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Ceci implique que :

$$F(\hbar \leq q) \approx 1 + \mathbf{VNR}(\ell = \hbar) \quad (\text{A.15})$$

2^{ème} cas : $\hbar = q + 1$ Ce cas représente le calcul du critère F lorsque le nombre des CPs sélectionnées correspond à la variable intercalée. Autrement dit, cette dernière qui représente toute seule une CP sera considérée dans le sous-espace principal. D'après l'équation (A.9), la matrice $\tilde{\mathbf{V}}$ aura la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \phi_3^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Ainsi, on peut déduire que :

$$\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T & \tilde{\mathbf{U}} \phi_3 \\ \phi_3^T \tilde{\mathbf{U}}^T & \phi_3^T \phi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Puisque $\tilde{\mathbf{U}}$ est une matrice orthonormée, c'est à dire $\tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_{(m-q)}$, nous pouvons calculer ce qui suit :

$$\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^T \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^T + \tilde{\mathbf{U}} \phi_3 \phi_3^T \tilde{\mathbf{U}}^T & \tilde{\mathbf{U}} \phi_3 + \tilde{\mathbf{U}} \phi_3 \phi_3^T \tilde{\mathbf{U}}^T \\ \phi_3^T \tilde{\mathbf{U}}^T + \phi_3^T \phi_3 \phi_3^T \tilde{\mathbf{U}}^T & \phi_3^T \phi_3 + (\phi_3^T \phi_3)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Puisque $\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T$ représente une matrice idempotente, i.e. :

$$\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T \quad (\text{A.19})$$

l'identification entre les termes des équations (A.17) et (A.18), nous mène à déduire que $\tilde{\mathbf{U}}\phi_3$ est un vecteur nul. Egalement, $\phi_3^T\phi_3$ représente un scalaire qui tend vers zéro, ce qui implique que $(\phi_3^T\phi_3)^2$ est très négligeable devant $\phi_3^T\phi_3$. Ainsi, $\phi_3^T\phi_3 \approx \phi_3^T\phi_3 + (\phi_3^T\phi_3)^2$. Ces déductions nous permettent d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T\mathbf{M}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T\Sigma\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T & \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T\epsilon\phi_3^T\phi_3 \\ \phi_3^T\phi_3\epsilon^T\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T & \phi_3^T\phi_3 + (\phi_3^T\phi_3)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

D'après (A.7),

$$F(\hbar = q + 1) \approx 1 + \frac{1}{\phi_3^T\phi_3} + \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^T\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T\Sigma\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T\xi_i}{(\xi_i^T\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^T\xi_i)^2} \quad (\text{A.21})$$

En revanche, le troisième terme de l'équation précédente représente le critère **VNR** pour $\ell = q$ CPs, ce qui implique :

$$F(\hbar = q + 1) \approx 1 + \frac{1}{\phi_3^T\phi_3} + \mathbf{VNR}(\ell = q) \quad (\text{A.22})$$

En notant que $(\phi_3^T\phi_3)^{-1}$ tend vers l'infini.

3^{ème} cas : $\hbar > q + 1$ Ce cas sera représenté par une matrice résiduelle $\tilde{\mathbf{V}}$ composée des $(m + 1 - \hbar)$ dernières colonnes de la matrice \mathbf{V} de l'équation (A.6) ou également (A.16). Une décomposition appropriée du dernier bloc de \mathbf{V} comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \phi_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1 & \tilde{\mathbf{U}}_2 \\ \phi_{13}^T & \phi_{23}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

nous permet de déduire que :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_2 \\ \phi_{23}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

où $\tilde{\mathbf{U}}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m+1-\hbar)}$ est composée des $(m + 1 - \hbar)$ derniers vecteurs propres de la matrice \mathbf{P} de l'équation (A.4). $\phi_{23} \in \mathbb{R}^{(m+1-\hbar)}$ est un vecteur constitué des $(m + 1 - \hbar)$ éléments de ϕ_3 . En appliquant les approximations nécessaires de la même manière qu'au deuxième cas, nous pouvons montrer que :

$$\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_2\tilde{\mathbf{U}}_2^T & \tilde{\mathbf{U}}_2\phi_{23}^T \\ \phi_{23}^T\tilde{\mathbf{U}}_2^T & \phi_{23}^T\phi_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

et

$$\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T\mathbf{M}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^T \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_2\tilde{\mathbf{U}}_2^T\Sigma\tilde{\mathbf{U}}_2\tilde{\mathbf{U}}_2^T & \tilde{\mathbf{U}}_2\tilde{\mathbf{U}}_2^T\epsilon\phi_{23}^T\phi_{23} \\ \phi_{23}^T\phi_{23}\epsilon^T\tilde{\mathbf{U}}_2\tilde{\mathbf{U}}_2^T & \phi_{23}^T\phi_{23} + (\phi_{23}^T\phi_{23})^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

ainsi

$$F(\hbar > q + 1) \approx 1 + \frac{1}{\phi_{23}^T \phi_{23}} + \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^T \tilde{\mathbf{U}}_2 \tilde{\mathbf{U}}_2^T \Sigma \tilde{\mathbf{U}}_2 \tilde{\mathbf{U}}_2^T \xi_i}{(\xi_i^T \tilde{\mathbf{U}}_2 \tilde{\mathbf{U}}_2^T \xi_i)^2} \quad (\text{A.27})$$

Notamment, le troisième terme de cette équation correspond au critère **VNR** pour $\ell = (\hbar - 1)$ CPs, d'où :

$$F(\hbar > q + 1) \approx 1 + \frac{1}{\phi_{23}^T \phi_{23}} + \mathbf{VNR}(\ell = \hbar - 1) \quad (\text{A.28})$$

où $(\phi_{23}^T \phi_{23})^{-1}$ croissant en \hbar et qui tend vers l'infini.

Le regroupement des équations (A.15), (A.22) et (A.28) montre que le critère F s'écrit comme suit :

$$F(\hbar) \approx \begin{cases} 1 + \mathbf{VNR}(\hbar) & \text{pour } \hbar \leq q \\ 1 + (\phi_3^T \phi_3)^{-1} + \mathbf{VNR}(q) & \text{pour } \hbar = q + 1 \\ 1 + (\phi_{23}^T \phi_{23})^{-1} + \mathbf{VNR}(\hbar - 1) & \text{pour } \hbar > q + 1 \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Nous notons d'après (A.23) que $(\phi_{23}^T \phi_{23})^{-1} \geq (\phi_3^T \phi_3)^{-1}$. Selon l'hypothèse de l'équation (A.2), le minimum du critère **VNR** correspond à q CPs. Par conséquent, l'équation (A.29) montre que :

$$\arg \min_{\hbar} \{F(\hbar)\} = \arg \min_{\ell} \{\mathbf{VNR}(\ell)\} = q \quad (\text{A.30})$$

Cela implique que la variance non reconstruite ne prend plus en considération les variables indépendantes et quasi-indépendantes. En effet, elle est insensible à leurs présences. Le nombre des CPs qui correspondent au minimum du critère **VNR** appliqué sur des données normalisées représente tout simplement le nombre des CPs uniquement entre les variables corrélées.

B

Limitation du critère **IE**

En présence d'un bruit *i.i.d* de variance identique σ^2 non nulle et d'après (2.71), les valeurs propres de la matrice de covariance Σ représentent les éléments diagonaux de la matrice suivante :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} + \sigma^2 \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{m-q} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

où $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ est la matrice diagonale donnée par (2.32). Elle est constituée par les q valeurs propres non nulles de la matrice de covariance des variables étudiées sans la présence du bruit de mesures.

Selon Malinowski (1977), le critère **IE** est supposé être efficace uniquement dans le cas d'une matrice de covariance de données entachées par un bruit indépendant et identiquement distribué. Par conséquent, l'étude d'un tel critère se base principalement sur l'équation (B.1). Afin d'établir une consistance théorique, Malinowski (1977) s'est limité à l'étude du comportement de la fonction **IE** en montrant sa croissance au-delà de la $q^{\text{ème}}$ CPs. Une telle propriété est justifiable car, d'après (B.1) et (2.52), ce critère peut s'écrire pour un nombre de CPs supérieure ou égale à q comme suit :

$$\mathbf{IE}(\ell \geq q) = \left(\frac{\ell \sigma^2}{Nm} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.2})$$

Cependant, l'interprétation correcte de l'équation (B.2) implique que le critère **IE** ne surestime plus le nombre des CPs en considérant de telle hypothèse sur la distribution du bruit. Afin d'assurer que le minimum de ce critère corresponde à q CPs, il faut analyser son comportement pour toutes valeurs de ℓ . Autrement dit, il faut prouver ou établir une condition nécessaire garantissant la décroissance de ce critère en ℓ pour $\ell \leq q$. Sous cette condition, nous pouvons montrer que le critère **IE** peut s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{IE}(\ell \leq q) = \left(\frac{\ell}{Nm(m-\ell)} \sum_{a=\ell+1}^q \lambda_a + \frac{\ell \sigma^2}{Nm} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3})$$

Puisque **IE** présente des valeurs positives ou nulles, on peut alors vérifier le signe de la différence suivante pour étudier son comportement :

$$(\mathbf{IE}(\ell - 1))^2 - (\mathbf{IE}(\ell))^2 = \frac{(m - \ell) \left((\ell - 1)\mathring{\lambda}_\ell - (m - \ell + 1)\sigma^2 \right) - m \sum_{a=\ell+1}^q \mathring{\lambda}_a}{Nm(m - \ell + 1)(m - \ell)} \quad (\text{B.4})$$

Notamment, le dénominateur de l'équation précédente est positif. Par conséquent, le critère **IE** est monotone décroissant en ℓ pour $\ell \leq q$ si :

$$\mathring{\lambda}_\ell - \frac{m}{(m - \ell)(\ell - 1)} \sum_{a=\ell+1}^q \mathring{\lambda}_a \geq \left(\frac{m - \ell + 1}{\ell - 1} \right) \sigma^2 \quad (\text{B.5})$$

Cette inégalité représente la condition nécessaire et suffisante pour que le critère **IE** admette un minimum en q CPs. Nous notons qu'une telle condition n'a pas été établie auparavant dans la littérature. Elle représente une consistance théorique qui nous permettra de mettre en évidence l'inconvénient du critère **IE**. Dans le cas particulier où $\ell = q$, la condition donnée par (B.5) nous permet de déduire que :

$$\mathring{\lambda}_q \geq \left(\frac{m - q + 1}{q - 1} \right) \sigma^2 \quad (\text{B.6})$$

Malgré que la $q^{\text{ème}}$ CP dispose d'une variance ($\mathring{\lambda}_q$) non nulle en l'absence du bruit de mesures, l'inégalité précédente prouve qu'une telle CP ne peut pas être retenue par le critère **IE** si $\mathring{\lambda}_q$ ne satisfait pas une telle condition.

En outre, une telle condition est paramétrée en fonction du nombre des variables m ainsi que le nombre q , ce qui représente un inconvénient majeur pour ce critère. A titre d'exemple, on peut supposer une augmentation du nombre m de variables sans changement de la valeur de q . Par conséquent, le terme à droite de l'inégalité (B.6) sera plus sévère, ce qui augmentera la chance de l'élimination de la $q^{\text{ème}}$ CP.

C

Démonstration de la décroissance d'une fonction

Puisque κ représente la dimension du modèle ACP dans l'espace de représentation de \mathbf{Y} , le sous-espace résiduel est alors engendré par les $(m - \kappa)$ derniers vecteurs propres constituant la matrice résiduelle :

$$\tilde{\mathbf{G}} = [\mathbf{g}_{\kappa+1}, \dots, \mathbf{g}_m] \quad (\text{C.1})$$

En augmentant la dimension du sous-espace principal par l'addition d'une CP supplémentaire, celle-ci va être retranchée du sous-espace résiduel. Ainsi, la nouvelle matrice réduite des vecteurs propres résiduels aura la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{G}}_r = [\mathbf{g}_{\kappa+2}, \dots, \mathbf{g}_m] \quad (\text{C.2})$$

On peut alors déduire que :

$$\tilde{\mathbf{G}} = [\mathbf{g}_{\kappa+1}, \tilde{\mathbf{G}}_r] \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, les mêmes remarques sont également valables pour les valeurs propres :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} d_{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{D}}_r \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

D'après les deux équations précédentes, celle de (3.130) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^2(\kappa) &= \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \Sigma^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{Z}} \zeta_i} = \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i \left(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i \right)^{-1} \\ &= \left(d_{\kappa+1} \zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i + \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{D}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \right) \left(\zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i + \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Afin de développer le terme inversé, nous avons utilisé la propriété suivante :

$$(a + b)^{-1} = a^{-1} - a^{-1} (a^{-1} + b^{-1})^{-1} a^{-1} \quad (\text{C.6})$$

en posant

$$a = \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \quad \text{et} \quad b = \zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i \quad (\text{C.7})$$

Par conséquent, et après simplifications, nous montrons que :

$$\tilde{u}_i^2(\kappa) = \left(\tilde{u}_i^2(\kappa+1) + d_{\kappa+1} \frac{\zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i} \right) \left(\frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i}{\zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i + \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i} \right) \quad (\text{C.8})$$

avec

$$\tilde{u}_i^2(\kappa+1) = \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{D}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \left(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \right)^{-1} \quad (\text{C.9})$$

Ce qui permet de calculer la différence suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^2(\kappa) - \tilde{u}_i^2(\kappa+1) &= \left(\frac{\zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i}{\left(\zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i + \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \right) \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i} \right) \\ &\quad \times \left(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \left(d_{\kappa+1} \mathbf{I}_r - \tilde{\mathbf{D}}_r \right) \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

où \mathbf{I}_r est une matrice identité de même dimension que celle de $\tilde{\mathbf{D}}_r$. Il est clair que :

$$\left(\frac{\zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i}{\left(\zeta_i^T \mathbf{g}_{\kappa+1} \mathbf{g}_{\kappa+1}^T \zeta_i + \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \right) \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i} \right) \geq 0 \quad (\text{C.11})$$

En outre, $\left(d_{\kappa+1} \mathbf{I}_r - \tilde{\mathbf{D}}_r \right)$ est une matrice diagonale ayant la forme suivante :

$$d_{\kappa+1} \mathbf{I}_r - \tilde{\mathbf{D}}_r = \begin{bmatrix} d_{\kappa+1} - d_{\kappa+2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{\kappa+1} - d_{\kappa+3} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{\kappa+1} - d_m \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{C.12})$$

En conséquence, la forme quadratique suivante est positive ou nulle :

$$\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_r \left(d_{\kappa+1} \mathbf{I}_r - \tilde{\mathbf{D}}_r \right) \tilde{\mathbf{G}}_r^T \zeta_i \geq 0 \quad (\text{C.13})$$

Donc

$$\tilde{u}_i^2(\kappa) \geq \tilde{u}_i^2(\kappa+1) \quad (\text{C.14})$$

Celle-ci prouve que la fonction \tilde{u}_i^2 est monotone décroissante en κ .

D

Consistance théorique du critère **VNRVI**

D'après l'équation (3.126) et pour un nombre κ de CPs, la variance non reconstruite de la $i^{\text{ème}}$ variable de la matrice \mathbf{Y} est réécrite comme suit :

$$\sigma_i^2(\kappa) = \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \quad (\text{D.1})$$

avec : $\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\kappa)}$ est composée par les $(m-\kappa)$ derniers vecteurs propres de la matrice \mathbf{G} de l'équation (3.120). Ainsi, $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{(m-\kappa)^2}$ est constituée des $(m-\kappa)$ dernières valeurs propres de la matrice \mathbf{D} de l'équation (3.121).

Notons par $\tilde{\mathbf{G}}_q \in \mathbb{R}^{m \times q}$ et $\tilde{\mathbf{D}}_q \in \mathbb{R}^{q \times q}$ deux matrices composées par les q derniers vecteurs et valeurs propres respectivement de \mathbf{G} et \mathbf{D} . Pour $\kappa = m - q$, on peut écrire ce qui suit :

$$\sigma_i^2(\kappa = m - q) = \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{D}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i)^2} \leq \frac{d_{m-q+1}}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i} \quad (\text{D.2})$$

1^{er} cas : $\kappa \geq m - q$ Dans ce cas, on peut montrer que :

$$\sigma_i^2(\kappa) = \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \geq \frac{d_m}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i} \quad (\text{D.3})$$

Afin que σ_i^2 soit monotone croissante, i.e. $\sigma_i^2(\kappa \geq m - q) \geq \sigma_i^2(\kappa = m - q)$, il faut que :

$$\frac{d_{m-q+1}}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i} \leq \frac{d_m}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i} \quad (\text{D.4})$$

Ce qui implique que :

$$\frac{d_{m-q+1}}{d_m} \leq \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i} \quad (\text{D.5})$$

2^{ème} cas : $\kappa < m - q$ En considérant ce cas, les matrices $\tilde{\mathbf{G}}$ et $\tilde{\mathbf{D}}$ peuvent être décomposées respectivement comme suit :

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1 & \tilde{\mathbf{G}}_q \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}_q \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

où $\tilde{\mathbf{G}}_1 \in \mathbb{R}^{m \times (m - \kappa - q)}$ et $\tilde{\mathbf{D}}_1 \in \mathbb{R}^{(m - \kappa - q)^2}$. Les matrices $\tilde{\mathbf{G}}_q$ et $\tilde{\mathbf{D}}_q$ sont celles utilisées dans le 1^{er} cas. Puisque $\tilde{\mathbf{G}}_1$ et $\tilde{\mathbf{G}}_q$ sont orthogonales, on peut déduire que :

$$\sigma_i^2(\kappa < m - q) = \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\mathbf{D}}_1 \tilde{\mathbf{G}}_1^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} + \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{D}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \quad (\text{D.8})$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(\kappa < m - q) - \sigma_i^2(\kappa = m - q) &= \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{D}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i \left(\frac{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i)^2 - (\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2 (\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i)^2} \right) \\ &\quad + \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\mathbf{D}}_1 \tilde{\mathbf{G}}_1^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \\ &\geq -\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{D}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i \left(\frac{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2 - (\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i)^2}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2 (\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i)^2} \right) \\ &\quad + d_{m-q} \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\mathbf{G}}_1^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \\ &= \left(d_{m-q} - \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{D}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i + \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \right) \\ &\quad \times \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\mathbf{G}}_1^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \\ &\geq \left(d_{m-q} - d_{m-q+1} \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i + \zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i)^2} \right) \\ &\quad \times \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\mathbf{G}}_1^T \zeta_i}{(\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i)^2} \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

Pour garantir que $\sigma_i^2(\kappa < m - q) \geq \sigma_i^2(\kappa = m - q)$, il faut que le terme à droite de la dernière inégalité soit positif ou nul ce qui implique que :

$$d_{m-q} \geq \left(1 + \frac{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T \zeta_i}{\zeta_i^T \tilde{\mathbf{G}}_q \tilde{\mathbf{G}}_q^T \zeta_i} \right) d_{m-q+1} \quad (\text{D.10})$$

E

Relation entre un seuil de contrôle et celui reconstruit

En supposant que la direction de reconstruction $\Xi_{\mathcal{I}}$ est la même que celle du défaut réel et d'après l'équation (4.11), l'indice reconstruit $\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}$ ne dépend plus du vecteur d'amplitudes \mathbf{f} du défaut. En outre, la zone de contrôle appropriée pour un tel indice demeure la même indépendamment de \mathbf{f} . Par conséquent, on peut calculer *a priori* la limite de contrôle $\Gamma_{\mathcal{I}}^2$ en l'absence de défauts sur toutes les directions possibles $\Xi_{\mathcal{I}}$ où $\{\mathcal{I} = 1, 2, \dots\}$. De telles limites de contrôle demeurent également valides même en présence de défauts.

On pose $\gamma_{\mathcal{I}}^*$ l'indice reconstruit dans la direction de $\Xi_{\mathcal{I}}$ en l'absence de défauts :

$$\gamma_{\mathcal{I}}^*(k) = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 \leq \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \quad (\text{E.1})$$

La forme d'un tel indice est équivalente à celle de $\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}$ lorsque la direction de reconstruction est la même que celle d'un défaut réel. Ainsi, son expression peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{I}}^*(k) &= \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 - \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 \\ &= \gamma^*(k) - \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

où γ^* représente l'indice de détection exprimé avec des mesures prélevées sous des conditions normales en l'absence de défauts. D'après (3.7), on peut déduire que :

$$\gamma^*(k) = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 \leq \Gamma^2 \quad (\text{E.3})$$

ainsi,

$$\gamma_{\mathcal{I}}^*(k) \leq \Gamma^2 - \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 \quad (\text{E.4})$$

Etant donné que $\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2$ représente une quantité aléatoire, la considération de la moyenne de l'équation (E.2) donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\gamma^*(k) - \gamma_{\mathcal{I}}^*(k)\} &= \mathbb{E}\{\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2\} \\ &= \text{tr}\{\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\{\mathbf{x}^*(k) \mathbf{x}^{*T}(k)\} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}\} \\ &= \text{tr}\{\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M} \Sigma\} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Par conséquent, la réduction prévue dans l'indice γ^* due à la reconstruction dans $\Gamma_{\mathcal{I}}^2$ est identique à $\text{tr}\{\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M} \Sigma\}$. Ce résultat peut être utilisé pour estimer la limite de contrôle de $\gamma_{\mathcal{I}}^*$ lorsque celle-ci est caractérisée par la même loi de probabilité que celle de γ^* ,

$$\Gamma_{\mathcal{I}}^2 = \Gamma^2 - \text{tr}\{\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M} \Sigma\} \quad (\text{E.6})$$

Une telle équation implique que :

$$\Gamma^2 \geq \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \quad (\text{E.7})$$

F

Démonstrations d'unification

Sous une notation vectorielle, les paramètres de l'équation (4.69) sont déterminés comme suit :

$$x_i(k) = \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (\text{F.1})$$

$$\tilde{x}_n(k) = \xi_n^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \quad (\text{F.2})$$

$$\tilde{c}_{ni} = \xi_n^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_i = \xi_i^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_n \quad (\text{F.3})$$

où les vecteurs ξ_i et ξ_n représentent respectivement la *i*ème et la *n*ème colonne de la matrice identité.

Puisque ces équations représentent des scalaires, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i^{\tilde{x}_n^2}(k) &= x_i(k) \tilde{x}_n(k) \tilde{c}_{ni} \\ &= \xi_i^T \mathbf{x}(k) \xi_n^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \xi_n^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_i \\ &= \mathbf{x}^T(k) \xi_i \xi_i^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_n \xi_n^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{C}} \xi_n \xi_n^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Ainsi, l'équation (4.71) peut se réécrire en rappelant que $\tilde{\mathbf{C}}$ est une matrice idempotente comme suit :

$$\begin{aligned} PDC_i^{SPE}(k) &= \sum_{n=1}^m x_i(k) \tilde{x}_n(k) \tilde{c}_{ni} \\ &= \sum_{n=1}^m \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{C}} \xi_n \xi_n^T \tilde{\mathbf{C}} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{C}} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Concernant la contribution par décomposition partielle de l'indice *SPE* basée sur les CPs résiduelles, on peut écrire les scalaires de l'équation (4.73) sous une forme vectorielle comme suit :

$$t_a(k) = \zeta_a^T \tilde{\mathbf{t}}(k) = \zeta_a^T \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) \quad (\text{F.6})$$

$$p_{ai} = \xi_i^T \tilde{\mathbf{P}} \zeta_a = \zeta_a^T \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_i \quad (\text{F.7})$$

avec $\zeta_a \in \mathbb{R}^{m-\ell}$ est un vecteur qui représente la a ème colonne d'une matrice identité d'ordre $(m - \ell)$.

Par conséquent, l'équation (4.73) peut être exprimée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} c_i^{t_a^2}(k) &= t_a(k) p_{ai} x_i(k) \\ &= \zeta_a^T \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) \zeta_a^T \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{P}} \zeta_a \zeta_a^T \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

D'après l'équation (4.74), on peut alors déduire que :

$$\begin{aligned} PDC_i^{SPE}(k) &= \sum_{a=\ell+1}^m c_i^{t_a^2}(k) \\ &= \sum_{a=\ell+1}^m \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{P}} \zeta_a \zeta_a^T \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{C}} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

On peut conclure que les contributions par décomposition partielle de l'indice SPE en se basant sur les résidus (F.5) ou sur les CPs (F.9) sont théoriquement identiques. En revanche, leurs résultats seront nécessairement différents lorsqu'on annule les contributions négatives d'une variable donnée relativement à un résidu ou à une CP résiduelle selon le principe de la méthode considérée.



Invalidité d'un diagnostic par comparaison des RBC à leurs seuils de contrôle

D'après l'équation (4.97), l'expression de la RBC se caractérise par une forme quadratique. Sous des conditions normales, les seuils de contrôle des RBC peuvent être déterminés en s'appuyant sur les travaux de Box (1954) comme suit :

$$\eta_{RBC_I^\gamma}^2 = g_{RBC_I^\gamma} \chi_{(h_{RBC_I^\gamma}, \alpha)}^2 \quad (G.1)$$

avec

$$g_{RBC_I^\gamma} = \frac{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^2]}{\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}]} \quad (G.2)$$

et

$$h_{RBC_I^\gamma} = \frac{(\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}])^2}{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^2]} \quad (G.3)$$

Dans le cas des défauts complexes, les mesures qui représentent le fonctionnement normal ne peuvent pas être négligées, ce qui implique que l'équation (2.59) est reconsidérée de nouveau. Selon l'équation (4.97), le vecteur qui mène à calculer la RBC du $\mathcal{I}^{\text{ème}}$ ensemble de variables peut être réécrit comme suit :

$$\Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) = \Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + \Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_I \mathbf{f}(k) \quad (G.4)$$

ce qui peut nous permettre d'écrire :

$$\|\Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\| \geq \|\Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_I \mathbf{f}(k)\| - \|\Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \quad (G.5)$$

On note que $\Xi_I^o \Xi_I^{oT}$ est une matrice idempotente. En se référant à l'équation (3.7), on peut montrer que :

$$\|\Xi_I^o \Xi_I^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \leq \|\Xi_I^o \Xi_I^{oT}\| \times \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \leq \Gamma \quad (G.6)$$

Ainsi, la substitution de (G.6) dans (G.5) en considérant la positivité de la norme euclidienne mène à l'inégalité suivante :

$$\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\| \geq \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma \geq 0 \quad (\text{G.7})$$

Afin d'assurer que l'effet de propagation du défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ étant capable de rendre les contributions des autres ensembles \mathcal{I} de variables supérieures à leurs limites de contrôle, il faut que $RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) > \eta_{RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}}^2$. En revanche et dans le but qu'un tel défaut soit également garanti détectable, on doit supposer que :

$$RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) > \Gamma^2 \quad (\text{G.8})$$

En s'appuyant sur le principe utilisé dans l'annexe E, on peut montrer que :

$$\Gamma^2 > \eta_{RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}}^2 \quad (\text{G.9})$$

Pour que l'inégalité (G.8) soit satisfaite, il est nécessaire d'imposer ce qui suit :

$$\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \geq (\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma)^2 > \Gamma^2 \quad (\text{G.10})$$

Ainsi, la résolution de l'inégalité précédente contraint que :

$$\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\Gamma \quad (\text{G.11})$$

On déduit alors que tout défaut réel $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ dont l'amplitude satisfait une telle inégalité garantit que la RBC du $\mathcal{I}^{\text{ème}}$ ensemble de variables soit supérieure au seuil de contrôle correspondant. Si l'amplitude d'un tel défaut est importante, il est possible d'identifier tous les ensembles de variables comme responsables en procédant à un diagnostic de défauts par l'approche RBC comparée à ses seuils de contrôle.

Références bibliographiques

- Acosta, G., González, C.A., et Pulido, B. (2001). Basic tasks for knowledge-based supervision in process control. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 14(4), 441–455.
- Adrot, O. (2000). *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Second International Symposium on Information Theory*, 267–281. Tsahkadsor, Armenian SSR.
- Alcala, C.F. et Qin, S.J. (2009). Reconstruction-based contribution for process monitoring. *Automatica*, 45(7), 1593–1600.
- Alcala, C.F. et Qin, S.J. (2011). Analysis and generalization of fault diagnosis methods for process monitoring. *Journal of Process Control*, 21(3), 322–330.
- Alt, F.B. (1982). *Bonferroni Inequalities and Intervals*. In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, S. Kotz and N.L. Johnson, volume 1. John Wiley & Sons, Inc.
- Anderson, T.W. (1963). Asymptotic Theory for Principal Component Analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 34(1), 122–148.
- Bartlett, M.S. (1954). A Note on the Multiplying Factors for Various χ^2 Approximations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 16(2), 296–298.
- Basseville, M. et Nikiforov, I.V. (1993). *Detection of Abrupt Changes : Theory and Application*. Prentice-Hall, Inc.
- Besse, P. et Ferré, L. (1993). Sur l'usage de la validation croisée en analyse en composantes principales. *Revue de Statistique Appliquée*, 41(1), 71–76.
- Box, G.E.P. (1954). Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification. *Ann. Math. Statist.*, 25(2), 290–302.
- Breuker, J. et Van De Velde, W. (1994). *CommonKADS Library for expertise modelling : reusable problem solving components*. IOS Press.

- Cattell, R.B. (1966). The Scree Test For The Number Of Factors. *Multivariate Behavioral Research*, 1(2), 245–276.
- Chen, J., Bandoni, A., et Romagnoli, J.A. (1996). Robust statistical process monitoring. *Computers & Chemical Engineering*, 20, Supplement 1, S497–S502.
- Cheng, S.W. et Thaga, K. (2006). Single Variables Control Charts : an Overview. *Quality and Reliability Engineering International*, 22(7), 811–820.
- Cherry, G.A. et Qin, S.J. (2006). Multiblock principal component analysis based on a combined index for semiconductor fault detection and diagnosis. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 19(2), 159–172.
- Choi, S.W., Lee, C., Lee, J.M., Park, J.H., et Lee, I.B. (2005). Fault detection and identification of nonlinear processes based on kernel PCA. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 75(1), 55–67.
- Cinar, A., Palazoğlu, A., et Kayihan, F. (2007). *Chemical process performance evaluation*. CRC Press.
- Conlin, A.K., Martin, E.B., et Morris, A.J. (2000). Confidence limits for contribution plots. *Journal of Chemometrics*, 14(5-6), 725–736.
- Duncan, A.J. (1956). The Economic Design of \bar{x} Charts Used to Maintain Current Control of the Process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228–242.
- Dunia, R. et Qin, S.J. (1998a). A unified geometric approach to process and sensor fault identification and reconstruction : The unidimensional fault case. *Computers & Chemical Engineering*, 22(7-8), 927–943.
- Dunia, R. et Qin, S.J. (1998b). Joint diagnosis of process and sensor faults using principal component analysis. *Control Engineering Practice*, 6(4), 457–469.
- Dunia, R. et Qin, S.J. (1998c). Subspace Approach to Multidimensional Fault Identification and Reconstruction. *AIChE Journal*, 44(8), 1813–1831.
- Dunia, R., Qin, S.J., Edgar, T.F., et McAvoy, T.J. (1996). Identification of faulty sensors using principal component analysis. *AIChE Journal*, 42(10), 2797–2812.
- Eastment, H.T. et Krzanowski, W.J. (1982). Cross-Validatory Choice of the Number of Components from a Principal Component Analysis. *Technometrics*, 24(1), 73–77.
- Elbakkaye, Z. (1993). *Maîtrise de la qualité totale : outils de la maîtrise statistique des processus (MSP ou SPC)*. Hermes, Paris, France.
- Feigenbaum, A.V. (1983). *Total quality control*. McGraw-Hill.
- Fortuna, L., Graziani, S., Rizzo, A., et Xibilia, M.G. (2006). *Soft Sensors for Monitoring and Control of Industrial Processes (Advances in Industrial Control)*. Springer-Verlag New York, Inc.

-
- Gentil, S. (2007). *Supervision des procédés complexes*. Hermes Science Publications.
- Gerlter, J.J. (1998). *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. Marcel Dekker.
- Guttman, L. (1954). Some necessary conditions for common-factor analysis. *Psychometrika*, 19(2), 149–161.
- Harkat, M.F. (2003). *Détection et Localisation de Défauts par Analyse en Composantes Principales*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Harkat, M.F., Djelel, S., Doghmane, N., et Benouaret, M. (2007). Sensor Fault Detection, Isolation and Reconstruction Using Nonlinear Principal Component Analysis. *International Journal of Automation and Computing*, 4(2), 149–155.
- Harkat, M.F., Mourot, G., et Ragot, J. (2002). Différentes méthodes de localisation de défauts basées sur les dernières composantes principales. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*. Nantes, France.
- Harkat, M.F., Mourot, G., et Ragot, J. (2005). Diagnostic de fonctionnement de capteurs d'un réseau de surveillance de la qualité de l'air par analyse en composantes principales. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 39(4), 417–436.
- Harkat, M.F., Mourot, G., et Ragot, J. (2006). An improved PCA scheme for sensor FDI : Application to an air quality monitoring network. *Journal of Process Control*, 16(6), 625–634.
- Hawkins, D.M. (1974). The Detection of Errors in Multivariate Data Using Principal Components. *Journal of the American Statistical Association*, 69(346), 340–344.
- Hawkins, D.M. et Maboudou-Tchao, E.M. (2008). Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix. *Technometrics*, 50(2), 155–166.
- Hayter, A.J. et Tsui, K.L. (1994). Identification and Quantification In Multivariate Quality Control Problems. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 197–208.
- Healy, J.D. (1987). A Note on Multivariate CUSUM Procedures. *Technometrics*, 29(4), 409–412.
- Hernández-De-León, H.R. (2006). *Supervision et diagnostic des procédés de production d'eau potable*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.
- Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24(7), 498–520.
- Hotelling, H. (1947). *Selected Techniques of Statistical Analysis for Scientific and Industrial Research and Production and Management Engineering*, chapter Multivariate Quality Control, Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights, 111–184. McGraw-Hill Book Company.

- Huang, Y., Gertler, J., et McAvoy, T.J. (2000). Sensor and actuator fault isolation by structured partial PCA with nonlinear extensions. *Journal of Process Control*, 10(5), 459–469.
- Hubert, M., Rousseeuw, P.J., et Branden, K.V. (2005). ROBPCA : A New Approach to Robust Principal Component Analysis. *Technometrics*, 47(1), 64–79.
- Hunter, J.S. (1986). The exponentially weighted moving average. *Journal of Quality Technology*, 18(4), 203–210.
- Isermann, R. (1997). Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods – An introduction. *Control Engineering Practice*, 5(5), 639–652.
- Isermann, R. (2005). Model-based fault-detection and diagnosis – status and applications. *Annual Reviews in Control*, 29(1), 71–85.
- Isermann, R. (2011). *Fault Diagnosis Applications : Model Based Condition Monitoring, Actuators, Drives, Machinery, Plants, Sensors, and Fault-tolerant Systems*. Springer.
- Isermann, R. et Ballé, P. (1997). Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control Engineering Practice*, 5(5), 709–719.
- Jackson, J.E. (1980). Principal Components and Factor Analysis : Part I - Principal Components. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 201–213.
- Jackson, J.E. (1991). *A User's Guide to Principal Components*. John Wiley & Sons Inc.
- Jackson, J.E. et Mudholkar, G.S. (1979). Control Procedures for Residuals Associated with Principal Component Analysis. *Technometrics*, 21(3), 341–349.
- Jia, F., Martin, E.B., et Morris, A.J. (1998). Non-linear Principal Components Analysis for Process Fault Detection. *Computers & Chemical Engineering*, 22, Supplement 1, S851–S854.
- Jolliffe, I.T. (2002). *Principal Component Analysis*. Springer-Verlag, 2nd edition.
- Kaiser, H.F. (1961). A note on Guttman's lower bound for the number of common factors. *British Journal of Statistical Psychology*, 14(1), 1–2.
- Kariwala, V., Odiowei, P.E., Cao, Y., et Chen, T. (2010). A branch and bound method for isolation of faulty variables through missing variables analysis. *Journal of Process Control*, 20(10), 1198–1206.
- Kourti, T. (2005). Application of latent variable methods to process control and multivariate statistical process control in industry. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 19(4), 213–246.
- Kourti, T. et MacGregor, J.F. (1995). Process analysis, monitoring and diagnosis, using multivariate projection methods. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 28(1), 3–21.

-
- Kourti, T. et MacGregor, J.F. (1996). Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring. *Journal of Quality Technology*, 28(4), 409–428.
- Kourti, T., Nomikos, P., et MacGregor, J.F. (1995). Analysis, monitoring and fault diagnosis of batch process using multiblock and multiway PLS. *Journal of Process Control*, 5(4), 277–284.
- Kresta, J.V., MacGregor, J.F., et Marlin, T.E. (1991). Multivariate statistical monitoring of process operating performance. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 69(1), 35–47.
- Lawley, D.N. (1956). Tests of Significance for the Latent Roots of Covariance and Correlation Matrices. *Biometrika*, 43(1/2), 128–136.
- Lee, J.M., Yoo, C., Choi, S.W., Vanrolleghem, P.A., et Lee, I.B. (2004). Nonlinear process monitoring using kernel principal component analysis. *Chemical Engineering Science*, 59(1), 223–234.
- Li, W. et Qin, S.J. (2001). Consistent dynamic PCA based on errors-in-variables subspace identification. *Journal of Process Control*, 11(6), 661–678.
- Lowry, C.A., Woodall, W.H., Champ, C.W., et Rigdon, S.E. (1992). A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Technometrics*, 34(1), 46–53.
- MacGregor, J.F. et Kourti, T. (1995). Statistical process control of multivariate processes. *Control Engineering Practice*, 3(3), 403–414.
- Malinowski, E.R. (1977). Determination of the number of factors and the experimental error in a data matrix. *Analytical Chemistry*, 49(4), 612–617.
- Mason, R.L., Tracy, N.D., et Young, J.C. (1995). Decomposition of T₂ for Multivariate Control Chart Interpretation. *Journal of Quality Technology*, 27(2), 109–119.
- Mason, R.L., Tracy, N.D., et Young, J.C. (1996). Monitoring a Multivariate Step Process. *Journal of Quality Technology*, 28(1), 39–50.
- Miller, P., Swanson, R.E., et Heckler, C.E. (1998). Contribution plots : A missing link in multivariate quality control. *Applied Mathematics and Computer Science*, 8(4), 775–792.
- Mnassri, B., Ananou, B., El Adel, E.M., Ouladsine, M., et Gasnier, F. (2008a). Détection et localisation de défauts des Wafers par des approches statistiques multivariées et calcul des contributions. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*. Bucarest, Roumanie.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., Ananou, B., et Ouladsine, M. (2009a). Détection et Identification de défauts par Analyse en Composantes Principales. In *3èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS*. Angers, France.

- Mnassri, B., El Adel, E.M., Ananou, B., et Ouladsine, M. (2009b). Fault Detection and Diagnosis Based on PCA and a New Contribution Plots. In *7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, 834–839. Barcelona, Spain.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., Ananou, B., et Ouladsine, M. (2010a). A Generalized Variance of Reconstruction Error Criterion for Determining the Optimum Number of Principal Components. In *18th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 868–873. IEEE, Marrakech, Morocco.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., Ananou, B., et Ouladsine, M. (2010b). Selection of the Number of Principal Components Based on the Fault Reconstruction Approach Applied to a New Combined Index. In *49th IEEE Conference on Decision and Control*, 3307–3312. Atlanta, Georgia, USA.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., et Ouladsine, M. (2008b). Fault Localization Using Principal Component Analysis Based on a New Contribution to the Squared Prediction Error. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 65–70. IEEE, Ajaccio, France.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., et Ouladsine, M. (2010c). New VRE Criterion to Select the Optimum Number of PCs. In *11th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, 1–13. Monastir, Tunisia.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., et Ouladsine, M. (2011a). Inverse-Variance Weighting PCA-based VRE criterion to select the optimal number of PCs. In *18th IFAC World Congress*, 2851–2856. Milano, Italy.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., et Ouladsine, M. (2011b). Une généralisation sur les conditions suffisantes de détectabilité de défauts multidimensionnels par ACP. In *Conférence Méditerranéenne sur l'Ingénierie Sûre des Systèmes Complexes*. Agadir, Maroc.
- Mnassri, B., El Adel, E.M., et Ouladsine, M. (2012a). Unified Sufficient Conditions for PCA-based Fault Detectability and Isolability. In *8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, 421–426. Mexico City, Mexico.
- Mnassri, B., Ouladsine, M., et El Adel, E.M. (2012b). Diagnostic de défauts par l'approche *RBC ratio*. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, 114–119. Grenoble, France.
- Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to statistical quality control*. John Wiley.
- Nenes, G. et Tagaras, G. (2007). The economically designed two-sided Bayesian control chart. *European Journal of Operational Research*, 183(1), 263–277.
- Niang, N. et Saporta, G. (1995). Période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées pour le contrôle du centrage d'un procédé. *Revue de Statistique Appliquée*, 43(3), 5–20.

-
- Nomikos, P. (1996). Detection and diagnosis of abnormal batch operations based on multi-way principal component analysis. *ISA transactions*, 35(3), 259–266.
- Nomikos, P. et MacGregor, J.F. (1994). Monitoring Batch Processes Using Multiway Principal Component Analysis. *AIChE Journal*, 40(8), 1361–1375.
- Nomikos, P. et MacGregor, J.F. (1995). Multivariate SPC Charts for Monitoring Batch Processes. *Technometrics*, 37(1), 41–59.
- Page, E.S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, 41(1/2), 100–115.
- Pearson, K. (1901). On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. *Philosophical Magazine*, 2(6), 559–572.
- Ploix, S. (1998). *Diagnostic des systèmes incertains : Approche bornante*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré.
- Qin, S.J. (2003). Statistical process monitoring : basics and beyond. *Journal of Chemometrics*, 17(8–9), 480–502.
- Qin, S.J. et Dunia, R. (2000). Determining the number of principal components for best reconstruction. *Journal of Process Control*, 10(2), 245–250.
- Qin, S.J., Valle, S., et Piovoso, M.J. (2001). On unifying multiblock analysis with application to decentralized process monitoring. *Journal of Chemometrics*, 15(9), 715–742.
- Raich, A. et Çinar, A. (1996). Statistical Process Monitoring and Disturbance Diagnosis in Multivariable Continuous Processes. *AIChE Journal*, 42(4), 995–1009.
- Ripoll, P. (1999). *Conception d'un système de diagnostic flou appliqué au moteur automobile*. Thèse de doctorat, Université de Savoie.
- Rissanen, J. (1978). Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14(5), 465–471.
- Roberts, S.W. (1959). Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics*, 1(3), 239–250.
- Schölkopf, B., Smola, A., et Müller, K.R. (1998). Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem. *Neural Computation*, 10(5), 1299–1319.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464.
- Shao, R., Jia, F., Martin, E.B., et Morris, A.J. (1999). Wavelets and non-linear principal components analysis for process monitoring. *Control Engineering Practice*, 7(7), 865–879.
- Shewhart, W.A. (1931). *Economic control of quality of manufactured product*. American Society for Quality Control.

- Shrager, R.I. et Hendler, R.W. (1982). Titration of individual components in a mixture with resolution of difference spectra, pKs, and redox transitions. *Analytical Chemistry*, 54(7), 1147–1152.
- Smilde, A.K., Bro, R., et Geladi, P. (2004). *Multi-way analysis with applications in the chemical sciences*. J. Wiley.
- Sun, R., Tsung, F., et Qu, L. (2007). Evolving kernel principal component analysis for fault diagnosis. *Computers & Industrial Engineering*, 53(2), 361–371.
- Tamura, M. et Tsujita, S. (2007). A study on the number of principal components and sensitivity of fault detection using PCA. *Computers & Chemical Engineering*, 31(9), 1035–1046.
- Tharrault, Y. (2008). *Diagnostic de fonctionnement par analyse en composantes principales : Application à une station de traitement des eaux usées*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Tharrault, Y., Mourot, G., Ragot, J., et Maquin, D. (2008). Fault detection and isolation with robust principal component analysis. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 18(4), 429–442.
- Tiplica, T. (2002). *Contributions à la Maîtrise Statistique des Processus Industriels Multivariés*. Thèse de doctorat, Université d'Angers.
- Valle, S., Li, W., et Qin, S.J. (1999). Selection of the Number of Principal Components : The Variance of the Reconstruction Error Criterion with a Comparison to Other Methods. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 38(11), 4389–4401.
- Vargas, V.C.C., Lopes, L.F.D., et Souza, A.M. (2004). Comparative study of the performance of the CuSum and EWMA control charts. *Computers & Industrial Engineering*, 46(4), 707–724.
- Vellemans, P. (2006). *Contribution à la conception d'un outil adapté à l'Opérateur Humain pour la reconstruction d'une traçabilité « approchée »*. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne.
- Verron, S., Tiplica, T., et Kobi, A. (2008). Fault detection and identification with a new feature selection based on mutual information. *Journal of Process Control*, 18(5), 479–490.
- Wang, H., Zhou, H., et Hang, B. (2004). Number selection of principal components with optimized process monitoring performance. In *43th IEEE Conference on Decision and Control*, 4726–4731. Paradise Island, Bahamas.
- Wax, M. et Kailath, T. (1985). Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(2), 387–392.

-
- Westerhuis, J.A., Gurden, S.P., et Smilde, A.K. (2000a). Generalized contribution plots in multivariate statistical process monitoring. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 51(1), 95–114.
- Westerhuis, J.A., Gurden, S.P., et Smilde, A.K. (2000b). Standardized Q-statistic for improved sensitivity in the monitoring of residuals in MSPC. *Journal of Chemometrics*, 14(4), 335–349.
- Wise, B.M., Gallagher, N.B., Bro, R., Shaver, J.M., Windig, W., et Koch, R.S. (2006). *PLS Toolbox User Manual*. Eigenvector Research, Inc., Wenatchee, USA.
- Wold, S. (1978). Cross-Validatory Estimation of the Number of Components in Factor and Principal Components Models. *Technometrics*, 20(4), 397–405.
- Woodall, W.H. et Ncube, M.M. (1985). Multivariate CUSUM Quality-Control Procedures. *Technometrics*, 27(3), 285–292.
- Woodward, R.H. et Goldsmith, P.L. (1964). *Cumulative sum techniques*. Oliver & Boyd.
- Yeomans, K.A. et Golder, P.A. (1982). The Guttman-Kaiser Criterion as a Predictor of the Number of Common Factors. *The Statistician*, 31(3), 221–229.
- Yoon, S. et MacGregor, J.F. (2001). Fault diagnosis with multivariate statistical models part I : using steady state fault signatures. *Journal of Process Control*, 11(4), 387–400.
- Yue, H.H. et Qin, S.J. (2001). Reconstruction-Based Fault Identification Using a Combined Index. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 40(20), 4403–4414.
- Zaïdi, A. (1989). *SPC : Concepts, méthodologies et outils*. Technique et Documentation, Paris, France.
- Zwingelstein, G. (1995). *Diagnostic des défaillances : théorie et pratique pour les systèmes industriels*. Traité des nouvelles technologies. Série Diagnostic et maintenance. Hermès.

Résumé

Ce mémoire de thèse présente une étude fondamentale enrichie par des contributions qui sont articulées autour de la modélisation de processus ainsi qu'un diagnostic de défauts en utilisant l'analyse en composantes principales (ACP).

Dans l'objectif d'un choix optimal du modèle ACP, une étude comparative de quelques critères connus dans la littérature nous a permis de conclure que le problème rencontré est souvent lié à une ignorance des variables indépendantes et quasi-indépendantes. Dans ce cadre, nous avons réalisé deux démonstrations mettant en évidence les limitations de deux critères en particulier la variance non reconstruite (**VNR**). En s'appuyant sur le principe d'une telle variance, nous avons proposé trois nouveaux critères. Parmi eux, deux ont été considérés comme étant empiriques car seule l'expérience permettra de prouver leur efficacité. Le troisième critère noté **VNRVI** représente un remède à la limitation du critère **VNR**. Une étude de sa consistance théorique a permis d'établir les conditions garantissant l'optimalité de son choix. Les résultats de simulation ont validé une telle théorie en prouvant ainsi que le critère **VNRVI** étant plus efficace que ceux étudiés dans cette thèse.

Dans le cadre d'un diagnostic de défauts par ACP, l'approche de reconstruction des indices de détection ainsi que celle des contributions ont été utilisées. A travers une étude de généralisation, nous avons étendu le concept d'isolabilité de défauts par reconstruction à tout indice quadratique. Une telle généralisation nous a permis d'élaborer une analyse théorique d'isolabilité de défauts par reconstruction de la distance combinée versus celles des indices *SPE* et *T2* de Hotelling en mettant en avant l'avantage de l'utilisation d'une telle distance. D'autre part, nous avons proposé une nouvelle méthode de contribution par décomposition partielle de l'indice *SPE*. Cette approche garantit un diagnostic correct de défauts simples ayant de grandes amplitudes. Nous avons également étendu une méthode de contribution classiquement connue par la *RBC* au cas multidimensionnel. Ainsi, la nouvelle forme garantit un diagnostic correct de défauts multiples de grandes amplitudes. En considérant la complexité de défauts, nous avons exploité la nouvelle approche de contribution *RBC* afin de proposer une nouvelle qui s'appelle *RBCr*. Cette dernière s'appuie sur un seuil de tolérance pour l'isolation de défauts. Une analyse de diagnosticabilité basée sur la *RBCr* montre que celle-ci garantit l'identification des défauts détectables. Ces derniers sont garantis isolables si leurs amplitudes satisfont les mêmes conditions d'isolabilité établies pour l'approche de reconstruction des indices.

Mots-clés : ACP, modélisation de processus, variance non reconstruite, détection et détectabilité de défauts, isolation et isolabilité de défauts, reconstruction, contribution, diagnostic.

Abstract

This thesis presents a fundamental study enhanced by some contributions that are focused on process modelling and fault diagnosis using principal components analysis (PCA).

In order to find an optimal PCA model, we have concluded through a comparative study of some popular criteria that the problem is often related to an ignorance of the independent and quasi-independent variables. In this framework, we have performed two demonstrations highlighting the limitations of two selection criteria in particular the unreconstructed variance (**VNR**). Based on the principle of **VNR** approach, we have proposed three new criteria, among them two methods were considered as empirical criteria because only the experience will prove their effectiveness. However the third one which is noted **VNRVI** represents a cure for the limitation of the classical **VNR** criterion. Thus, the conditions that ensure an optimal selection were derived according to a theoretical consistency study of the **VNRVI** approach. The simulation results have successfully validated the **VNRVI** criterion by proving that is more effective than the other studied criteria in the present thesis.

The reconstruction and contributions approaches were used for fault diagnosis using PCA. According to a unified study, we have extended the fault isolability concept based on the reconstruction method to any detection index which has a quadratic form. Such generalization has allowed us to develop a theoretical fault isolability analysis based on the reconstruction of the combined index versus those of *SPE* and *T2* indices. This analysis has highlighted the advantage of using the combined index for fault isolation. On the other hand, we have proposed a new contribution approach by applying a partial decomposition of the *SPE* index. This approach guarantees correct diagnosis of simple faults with large magnitudes. We have also extended the classical contribution method of *RBC* to the multidimensional faults cases. Therefore, the new approach guarantees correct diagnosis of multiple faults with large magnitudes. In order to consider the more complex faults, we have proposed a new diagnosis method called *RBCr*. Based on a theoretical diagnosability analysis, such method guarantees the identification of detectable complex faults. These faults are guaranteed isolable if their magnitudes satisfy the same fault isolability conditions that are established for the reconstruction approach.

Keywords: PCA, process modelling, unreconstructed variance, fault detection and detectability, fault isolation and isolability, reconstruction, contribution, diagnosis.

