



**HAL**  
open science

# Vers une source de paires de photons intriqués en polarisation de spectre étroit à 1550 nm

Jean-Loup Smirr

► **To cite this version:**

Jean-Loup Smirr. Vers une source de paires de photons intriqués en polarisation de spectre étroit à 1550 nm. Physique Quantique [quant-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. NNT : . tel-00745192

**HAL Id: tel-00745192**

**<https://theses.hal.science/tel-00745192>**

Submitted on 24 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 10003

## THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Physique

par

**Jean-Loup Smirr**

### **Vers une source de paires de photons intriqués en polarisation de spectre étroit à 1550 nm**

Soutenue le 3 novembre 2010 devant le jury composé de :

M.	Thomas COUDREAU	(Rapporteur)
M.	Thierry DEBUISSCHERT	
M.	Robert FREY	
M.	Philippe GRANGIER	(Président)
M.	Jean-François ROCH	(Rapporteur)
Mme	Isabelle ZAQUINE	(Directeur de thèse)



Thèse préparée au  
**Laboratoire de Traitement et Communication de l'Information**  
TÉLÉCOM ParisTech  
Département Traitement du Signal et des Images  
46 rue Barrault  
75013 Paris

## Résumé

L'avenir des communications quantiques réside dans le développement de répéteurs pour lesquels une mémoire quantique est nécessaire et permet de chaîner plusieurs transferts d'intrication. Ces mémoires exigent une largeur spectrale très étroite ( $< 100$  MHz), ce qui impose des contraintes fortes sur la qualité des sources de paires de photons intriqués.

Dans le cadre de cette faible largeur spectrale, nous étudions les performances des sources de photons jumeaux basées sur la fluorescence paramétrique dans un cristal non-linéaire. Pour assurer la propagation sur de longues distances, les photons sont émis à 1550 nm et couplés dans des fibres optiques. Pour les besoins de synchronisation, nous nous intéressons au cas de sources impulsionnelles. Après une étude de l'effet de leurs différents degrés de liberté sur leurs performances, nous apportons deux contributions utiles à la réalisation de sources optimales.

La première, basée sur une étude théorique confirmée par l'expérience, est un résultat nouveau et général donnant les conditions optimales d'interaction paramétrique en vue de maximiser non pas la brillance de la source, mais l'efficacité d'extraction des paires, critique du point de vue de la qualité.

La seconde contribution consiste en une technique originale de mesure directe de cette efficacité d'extraction. Outre les mesures de taux de détection (coups simples et coïncidences) effectuées par exemple lors d'une mesure de Bell, cette technique ne fait appel qu'à la connaissance de la forme spectrale du filtrage des photons jumeaux.

Ces résultats théoriques de portée générale, et la technique simple développée, constituent deux éléments d'une étude détaillée des sources basée sur la fluorescence paramétrique.

**Mots-clefs** : Optique quantique, optique non-linéaire, intrication, fluorescence paramétrique, information quantique, sources de photons jumeaux.

---

TOWARDS A NARROW-BAND SOURCE OF POLARIZATION-ENTANGLED PHOTONS AT 1550 NM

## Abstract

The future of quantum communications lies in the realization of repeaters for which a quantum memory is necessary and allows chaining multiple entanglement swappings. Such memories require photons with very narrow linewidths ( $< 100$  MHz), making it challenging to preserve the quality of entangled photon pair sources.

Within this framework, we study the performances of twin photon sources based on spontaneous parametric down-conversion (SPDC) in nonlinear crystals. To allow for long-distance propagation, photons are created around 1550 nm and coupled into optical fibres. To anticipate synchronization requirements, we focus on pulsed sources. After studying the consequences of various degrees of freedom on the source performance, we make two contributions that can be used to develop optimal SPDC sources.

The first contribution, based on an experimentally-verified theoretical study, is a new general result giving the optimal conditions of parametric interaction that maximize the pair extraction efficiency, as opposed to the mere source brightness.

The second contribution is an original technique for directly measuring the pair extraction efficiency. Apart from standard single and coincidence count rates measurements, used for instance in Bell state measurements, this technique only requires the knowledge of the spectral shapes of the filters.

These large scope theoretical results and this simple experimental technique are both part of a wider, detailed study on SPDC sources.

**Keywords** : Quantum optics, nonlinear optics, entanglement, spontaneous parametric down-conversion, quantum information, twin-photon sources.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Rappels et état de l'art</b>	<b>13</b>
<b>1 Éléments d'optique quantique</b>	<b>15</b>
1.1 Électromagnétisme classique . . . . .	15
1.2 Champ électromagnétique quantifié et photon . . . . .	17
1.3 Champ monomode et champ multimode . . . . .	23
1.4 Photodetection . . . . .	25
1.5 Cohérence et corrélations . . . . .	27
<b>2 Processus non-linéaires dans les cristaux massifs</b>	<b>29</b>
2.1 Susceptibilité non linéaire et couplage des champs . . . . .	29
2.2 Génération de seconde harmonique en ondes planes . . . . .	31
2.3 Quasi-accord de phase . . . . .	32
2.4 Génération de seconde harmonique en faisceaux gaussiens . . . . .	35
2.5 Fluorescence paramétrique . . . . .	37
<b>3 Intrication</b>	<b>49</b>
3.1 États intriqués . . . . .	49
3.2 Réalisme, localité, séparabilité . . . . .	51
3.3 Quelle observable? . . . . .	57
<b>4 Sources de lumière non-classique</b>	<b>63</b>
4.1 Différentes techniques de production de photons uniques . . . . .	63
4.2 Photons annoncés . . . . .	65
4.3 Sources de paires de photons intriqués . . . . .	67
4.4 Conclusion . . . . .	76
<b>II Conception des sources fibrées de paires de photons basées sur la fluorescence paramétrique</b>	<b>79</b>
<b>5 Limites à la qualité d'une source de photons jumeaux</b>	<b>81</b>
5.1 Principe . . . . .	82
5.2 Calcul des probabilités . . . . .	86
5.3 Analyse de l'influence des paramètres de la source . . . . .	90
5.4 Performances maximales d'une source . . . . .	94
5.5 Performances maximales en présence de bruit . . . . .	97
5.6 Conclusion . . . . .	100

<b>6</b>	<b>Théorie de la fluorescence paramétrique pour un couplage optimal dans une fibre optique</b>	<b>103</b>
6.1	Cas général . . . . .	104
6.2	Application à la génération dans un cristal massif avec filtrage étroit . . . . .	125
6.3	Conclusion . . . . .	144
 <b>III Réalisation et optimisation d'une source de photons intriqués de spectre étroit</b>		<b>145</b>
<b>7</b>	<b>Source fibrée de photons jumeaux compatible avec un spectre étroit</b>	<b>147</b>
7.1	Dispositif envisagé . . . . .	147
7.2	Montage de base en espace libre . . . . .	161
7.3	Optimisation de la collection de la fluorescence dans la fibre . . . . .	176
7.4	Conclusion . . . . .	180
<b>8</b>	<b>Mesure <i>in situ</i> et en temps réel des performances d'une source ou d'un lien quantique</b>	<b>185</b>
8.1	Dispositif considéré . . . . .	185
8.2	Calcul des probabilités de coup et de coïncidence après le filtre . . . . .	187
8.3	Grandeurs expérimentales et lien avec la théorie . . . . .	189
8.4	Visibilité attendue pour quelques solutions de filtrage . . . . .	191
8.5	Application de la méthode à notre source . . . . .	196
8.6	Optimisation fine de la collection dans une fibre optique . . . . .	200
8.7	Conclusion . . . . .	202
<b>9</b>	<b>Proposition de source de photons intriqués en polarisation</b>	<b>205</b>
9.1	Double passage cohérent . . . . .	205
9.2	Fluorescence en cavité résonante . . . . .	210
9.3	Conclusion . . . . .	212
 <b>Conclusion</b>		<b>213</b>
 <b>Annexes</b>		<b>217</b>
<b>A Conventions utilisées pour la transformée de Fourier</b>		<b>217</b>
<b>B Taux de coïncidences dans le cas monomode spatial avec une pompe impulsionnelle &amp; filtrage spectral</b>		<b>219</b>
B.1	Etat de la paire de photons . . . . .	219
B.2	Evolution de l'opérateur champ électrique . . . . .	220
B.3	Filtrage spectral et pertes . . . . .	221
B.4	Coupleur . . . . .	222
B.5	Expression du taux de coïncidences . . . . .	222
B.6	Calcul . . . . .	222
B.7	Discussion . . . . .	224
 <b>Bibliographie</b>		<b>225</b>

# Remerciements

J'ai eu le plaisir d'effectuer ma thèse à Télécom ParisTech, au département Traitement du Signal et des Images (TSI), attaché au Laboratoire de Traitement et Communication de l'Information (LTCI) du CNRS. Je remercie l'école doctorale Ondes & Matière de l'université d'Orsay pour m'avoir octroyé l'allocation de recherche qui a rendu cette thèse possible.

Par-dessus tout, je tiens à remercier ma directrice de thèse, Isabelle Zaquine, pour avoir bien voulu faire de moi son thésard pendant ces années, et avoir toujours endossé le rôle d'encadrante comme n'importe quel doctorant pourrait l'espérer, avec un suivi et un investissement sans faille dans l'ensemble des projets. Ses conseils ont été précieux, tout autant que sa constante confiance. Je remercie également Robert Frey, qui a été une source intarissable d'idées et qui s'est engagé continuellement pour que ma thèse s'en fasse l'écho de la meilleure manière qui soit, tout en respectant et en soutenant en permanence ma propre démarche. Grâce à eux, ce travail de thèse fut stimulant, enrichissant, et je leur en suis profondément reconnaissant.

Je suis également très reconnaissant vis-à-vis de Thomas Coudreau et de Jean-François Roch pour avoir accepté de consacrer un temps précieux à être les rapporteurs de ce long manuscrit, ainsi qu'à Philippe Grangier pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Merci aussi à Thierry Debuisschert pour avoir également accepté d'en faire partie. Leurs questions et leurs critiques à tous ont été précieuses pour valoriser mon travail de thèse.

À Télécom ParisTech, la majorité des membres sont informaticiens, mathématiciens. Je tiens donc à remercier Henri Maitre, directeur du LTCI, pour avoir bien voulu donner à la physique la place qu'elle mérite. Également, je remercie Yves Grenier, directeur du département TSI, pour l'écoute dont il a fait preuve lorsque nous le sollicitons pour nos coûteux équipements. J'aimerais leur signifier l'importance que leurs décisions ont eue pour mes travaux de thèse.

Parmi les contributeurs à ma thèse, je souhaite mentionner Gérard Mouret et Patrick Busch, qui ont travaillé avec moi sur les aspects électroniques de l'expérience et dont les réalisations ont été précieuses et le seront probablement pour un bon moment encore. Pour la belle mécanique, merci à Alain Croullebois, qui s'est avéré être bien plus disponible qu'il voulait bien le faire croire... « À bientôt! Si si. » Merci aussi à Eleni Diamanti et Romain Alléaume pour leurs conseils, en espérant que la collaboration entre les deux équipes perdure fructueusement. Au sujet des collaborations, je souhaite bien sûr le meilleur à Thierry Chanelière du LAC et Sébastien Tanzilli du LPMC, à leurs thésards, ainsi qu'aux autres membres du projet ANR e-Quanet.

Certaines personnes, de passage à Télécom, ont laissé des traces. Je voudrais adresser un remerciement particulier à Matthieu Deconinck, qui manie les équations avec un sens physique et une assurance hors pair et dont l'aide m'a été très utile, tout comme celles d'Yves Menesguen et Clément Bourdarias. Dans un autre genre, merci également à Nicolas Waisbord pour m'avoir éveillé pour pas cher au Secret de la pizza. Merci à tous, en tous cas, pour ces petits moments partagés dans l'antichambre du labo, à l'époque où le thé tranquille n'était pas encore remplacé par le café du temps qui file. Celui des derniers mois, que connaissent ou connaîtront bientôt les thésards qui m'ont tenu compagnie au labo : Qiong He, Sofiane Ouanezar, Joe Ghabouni, Sylvain Guilbaud. Bonne chance, et surtout bon courage à eux pour la suite. Et à tous ceux qui sont



ou seront de passage à TSI, n'abusez pas trop de la gentillesse et de la disponibilité de Patricia Friedrich ; c'est vrai qu'on y prend goût.

On est habituellement tellement irrité par l'informatique qu'on en finit par oublier de la remercier. Merci donc à Gilbert Papalia pour avoir toujours su m'expliquer d'où venait le problème, ainsi qu'à Sophie-Charlotte Barrière et Bahman Nabati.

Parmi mes voisins non-informaticiens se trouvaient deux personnalités aux engagements très honorables et communicatifs. D'abord Alain Maruani, toujours prêt à partager ses points de vue originaux et pédagogiques sur les grands sujets de la physique (mais pas seulement), au point même de prendre parfois le temps de poser sa valise. Et bien sûr, Christian Darlot, chantre du bon sens généralisé, qui pousse son sens du devoir jusqu'à se retenir de bouleverser les idées reçues en dehors des heures de repas ou de thé. Je me souviendrai longtemps de ces discussions enrichissantes, et j'espère qu'il daignera encore les partager quand nous l'aurons enfin élu président à vie.

En me penchant sur la question pendant ma thèse, j'ai fait la découverte d'un genre de coïncidences à la fois accidentelles et vraies, que j'appellerai les escapades en  $a^{\text{TM}}$ . Zuzanna, Illana, Alyona, Kamilla, merci d'avoir donné leur cohérence à Czestochowa, Haïfa ou Makhatchkala. Mais certains compagnons et compagnes ne riment pas non plus à rien, loin de là : Manu, Stéphane, Ruchi, Qian. . . Que les trois petits points ne m'en veuillent pas de vouloir faire court – pour une fois. On y trouverait un prénom libanais en  $a$  qui ne voyage pas, un roqueur-banquier expatrié, des camarades de Master, des voisines, des amis lointains, des partenaires de lettre et de boisson. . .

Vivre et travailler à Paris comporte ses avantages – faut-il les énumérer ? – mais aussi un inconvénient de taille au quotidien : les mètres carrés n'y ont pas la même conception de leur propre valeur que leurs compatriotes. Qui plus est, pour mieux se faire désirer, il leur arrive de s'affubler de sept (soit presque autant que les-dits mètres carrés) étages d'escaliers décrépis sans ascenseur grâce auxquels il est possible, sans investir un centime ni la moindre minute ennuyeuse dans un club de gym, de ne prendre que 5 kg pendant ses derniers mois de thèse. À ce propos, je me joins à plusieurs générations d'étudiants pour remercier à mon tour la pâte à tartiner aux noisettes, qui a toujours su m'accompagner dans les moments difficiles mais qui serait bienvenue de se montrer moins possessive, et si possible plus riche en oméga-3. Mais il faudra bien qu'elle admette qu'elle commence à faire pâle figure devant les innombrables autres plaisirs de la vie (cf. supra, « les avantages de Paris » et « les escapades en  $a$  »).

Je ne terminerai pas sans un mot qui peut paraître évident – mais ça va mieux en le disant – pour mes professeurs, de physique en particulier, qui en ont soi-disant traumatisé plus d'un mais pas moi. Et si ce qu'ils m'ont donné à penser a été suffisamment bien accueilli pour me mener jusque là, c'est grâce à cette atmosphère à la fois paisible, honnête et exigeante qui a dû sacrément convenir à ma petite personne et m'a *laissé* penser. Mes frères et mes parents, autant volontairement qu'inconsciemment, ont une grande part de responsabilité dans cette affaire. . . Cette thèse leur est donc dédiée de tout cœur.

# Introduction

Depuis que l'information quantique est considérée comme un domaine technologiquement prometteur, les physiciens sont encouragés à exprimer leur intérêt pour certains phénomènes quantiques dans la perspective d'en créer de nouvelles applications. Heureusement pour le physicien, création est synonyme de compréhension, donc de réjouissance : comme il était encore écrit sur le tableau noir de R. Feynman au lendemain de sa vie, *What I cannot create, I do not understand*.

L'optique joue un rôle central dans ces applications. D'une part, le photon est le support idéal pour transmettre de l'information quantique sur de longues distances en raison de sa masse nulle qui en fait un *bit quantique volant* naturel. Ainsi, l'optique est au cœur de la cryptographie quantique, l'application de l'information quantique la plus mûre à ce jour et qui consiste à garantir le secret de l'échange de clés cryptographiques par les lois de la mécanique quantique. D'autre part, l'optique est indispensable au contrôle d'autres supports d'information quantique matériels comme les atomes.

Le protocole le plus simple de cryptographie quantique, BB84 [BB<sup>+</sup>84], fait appel à des photons dits « uniques ». Rencontrer de tels états de la lumière est l'exception plutôt que la règle, et trouver des moyens toujours plus performants et fiables de les produire constitue un sujet de recherche très actif. Une manière approximative, mais efficace, de le faire consiste à les produire par paire afin que la détection de l'un annonce la présence de l'autre de manière quasi-certaine.

Une source de photons jumeaux n'est pas qu'une manière indirecte de produire des photons uniques. Les photons émis par paires peuvent en outre être intriqués dans un ou plusieurs degrés de liberté. Cette particularité de la mécanique quantique, sans équivalent en théorie classique, ouvre la voie non seulement vers des phénomènes défiant l'intuition — comme l'impossibilité de considérer deux objets éloignés comme deux objets séparés — mais également vers d'autres protocoles de cryptographie [Eke91] plus perfectionnés.

Un degré de liberté couramment employé pour coder l'information quantique portée par le photon est sa polarisation. En vertu du principe de superposition, la polarisation porte non pas un simple bit d'information, mais une superposition quantique de ces bits, appelée *qubit*. Mais les autres degrés de liberté du photon doivent également être contrôlés, avec plus ou moins de contraintes selon la manière dont on souhaite les utiliser. Le spectre du photon en particulier, c'est à dire son énergie, détermine fortement son interaction avec la matière. Or l'avenir des communications quantiques réside dans le contrôle de telles interactions pour aller au-delà des limites actuelles.

## Vers un réseau de communications quantiques

Les implémentations actuelles des protocoles de cryptographie quantique souffrent d'une limitation qui les éloigne pour l'instant d'une utilisation plus généralisée : elles ne consistent pour l'instant qu'en des liens point à point entre deux interlocuteurs, traditionnellement appelés Alice et Bob. L'étape suivante consisterait à mettre au point un réseau de communications quantiques où les membres pourraient s'échanger deux à deux des clés secrètes. Réaliser un réseau suppose

de savoir router l'information ; cela présuppose à son tour de savoir répéter une information reçue. Dans un premier temps, un répéteur présente déjà en tant que tel l'utilité de prolonger la distance de communication, qui est limitée par l'atténuation lors de la propagation. En physique classique, un signal peut simplement être répété en le mesurant et en le réémettant à l'identique. En mécanique quantique, non seulement une mesure n'apporte qu'une connaissance partielle sur un système, mais aucune mesure ultérieure ne saurait apporter l'information complémentaire, en vertu du principe de réduction du paquet d'ondes qui implique la modification irréversible du système d'origine par la mesure. Tout nœud d'un réseau quantique doit en conséquence consister en une interaction purement quantique, réversible.

L'élément central d'un tel nœud est une mémoire quantique, à savoir un système matériel capable d'interagir avec la lumière pour contrôler son stockage et sa restitution sans effectuer de mesure. C'est à ce stade que le contrôle des propriétés du photon devient critique. Les protocoles de transfert d'information quantique entre un photon et un système atomique sont très exigeants en termes de largeur spectrale. Une largeur de moins de 100 MHz est actuellement nécessaire pour que l'interaction soit efficace.

Une avancée importante des recherches en communications quantiques consisterait à réaliser une source offrant une telle finesse spectrale. Pour permettre une application hors du laboratoire, une telle source devra émettre des paires de photons avec un débit suffisant et aux longueurs d'onde des télécommunications afin de bénéficier de la technologie des fibres optiques. Or, les systèmes matériels actuellement identifiés comme candidats aux mémoires quantiques fonctionnent à des longueurs d'onde plutôt proches de 800 nm. La seule manière de conjuguer les contraintes de la propagation et du stockage est d'insérer une interface quantique de conversion de longueur d'onde qui aurait la capacité de préserver l'intrication en polarisation entre le photon converti et son jumeau. Par ailleurs, la mémoire quantique devra elle aussi être capable de préserver cette intrication lors du stockage et de la restitution.

## Le projet e-Quanet

Plusieurs laboratoires (L'équipe de N. GISIN au GAP de l'Université de Genève, et celle de J. SHAPIRO au MIT à Boston par exemple) ont entrepris des recherches dans cette direction, même si pour l'instant aucun résultat n'a été publié. Le Laboratoire de Traitement et Communication de l'Information (LTCI, Paris), associé au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée (LPMC, Nice) et au Laboratoire Aimé Cotton (LAC, Orsay) s'est aussi lancé dans cette voie avec un projet ANR blanc nommé « e-Quanet ». Ce projet propose la réalisation d'un embryon de réseau de communications quantiques incluant une source de paires de photons intriqués en polarisation fonctionnant aux longueurs d'onde des télécommunications autour de 1550 nm, le stockage dans une mémoire quantique d'un des photons de la paire et sa restitution sans destruction de l'intrication. La mémoire quantique, basée sur l'ion Thulium dans une matrice de YAG, a une transition située à 793 nm [CRB<sup>+</sup>10]. Le projet e-Quanet utilisera donc une interface quantique fondée sur le principe de la somme de fréquence pour changer la longueur d'onde des photons infrarouge sans détruire l'intrication quantique de la paire [TTH<sup>+</sup>05]. De plus, une telle mémoire ne pourra à court terme interagir efficacement qu'avec des photons de largeur spectrale de l'ordre de quelques dizaines de mégahertz, ce qui suppose de concevoir la source de photons intriqués en conséquence et de faire en sorte que l'interface de changement de longueur d'onde préserve cette finesse spectrale.

Il est important de remarquer que pour des applications aux communications quantiques fondées sur les tests de Bell, la fidélité de l'état produit par la source vis à vis de l'état intriqué souhaité doit être très élevée (mieux que 71 % en théorie, beaucoup plus en pratique). Cela implique de prendre grand soin que tous les éléments nécessaires pour atteindre la faible largeur spectrale imposée dégradent aussi peu que possible cette fidélité.

Le travail de thèse présenté dans ce document est dédié à la réalisation d'une source permettant d'atteindre la meilleure fidélité possible en tenant compte des contraintes du projet e-Quanet. Pour parvenir à cette fin, il nous a paru indispensable de procéder à une étude systématique des limites imposées par la technique retenue pour la génération de photons intriqués, à savoir la fluorescence paramétrique dans un cristal non-linéaire. La réalisation expérimentale de la source est donc précédée d'une étude théorique pour permettre une conception optimale.

## Organisation de ce document

Ce manuscrit est composé de trois parties, elles-mêmes subdivisées en chapitres. La **partie I** rappelle les éléments de base utiles à la compréhension des parties suivantes, et se termine par un état de l'art des sources de photons intriqués en lien avec notre projet. La lecture des rappels n'est pas indispensables au lecteur familier des sujets abordés, d'autant que les **parties II** (conception) et **III** (réalisation et optimisation), qui présentent le travail de thèse à proprement parler, y font abondamment référence lorsque cela s'avère utile. Nous détaillons ci-après la structure de ces différentes parties.

La **partie I** comporte quatre chapitres traitant respectivement de l'optique quantique, de l'optique non-linéaire, du phénomène de l'intrication quantique et des différentes sources de lumière non-classique.

Dans le **1<sup>er</sup> chapitre**, nous rappelons les particularités quantiques de la lumière qui seront au cœur de ce document. Ce chapitre est aussi l'occasion de définir des notations qui seront autant que possible consistantes dans tout ce document.

Le **chapitre 2** est consacré aux processus de mélange à trois ondes qui se produisent dans les milieux non-linéaires. L'ensemble du travail de thèse présenté dans les parties suivantes repose sur de telles interactions.

L'intrication fait l'objet du **chapitre 3**. Partant du débat épistémologique suscité par cette propriété quantique, nous terminons par une présentation de différentes observables possibles pour l'intrication afin de justifier le choix de la polarisation pour le projet e-Quanet.

Le **chapitre 4** constitue une revue des sources d'états non-classiques de la lumière. Après une rapide présentation de différentes techniques de production de photons uniques, jumeaux ou intriqués, nous nous intéressons plus particulièrement aux sources basées sur la fluorescence paramétrique dans des cristaux non-linéaires, technique utilisée dans ce travail de thèse.

La **partie II** rassemble deux chapitres qui ont pour but de donner les éléments permettant la conception optimale d'une source impulsionnelle fibrée de paires de photons jumeaux. Les conclusions de ces chapitres seront utilisées dans la partie **III**.

Dans le **chapitre 5**, à travers un modèle idéal de source de photons jumeaux basée sur la fluorescence paramétrique pompée de manière impulsionnelle, nous exprimons de manière générale les compromis qui nous sont imposés en termes de performances (brillance, qualité de l'état produit) en fonction de divers paramètres (pertes, bande passante, mode de séparation des photons jumeaux vers les deux voies de détection). Nous en déduisons des contraintes inévitables sur la source que nous nous proposons de réaliser dans la partie **III**.

Au **chapitre 6**, nous présentons une théorie quantique de la fluorescence paramétrique, suffisamment générale pour s'appliquer avec peu d'approximations à une grande variété de configurations. Outre le fait de donner les conditions expérimentales pour un rendement optimal, le traitement local de l'interaction permet de quantifier précisément le taux de couplage attendu

des paires de photons produites dans une fibre optique. Les résultats d'un calcul appliqué au cas d'une bande étroite s'ajoutent aux conclusions du chapitre 5 pour donner les bases de la réalisation d'une source pour le projet e-Quanet.

La **partie III** rassemble trois chapitres qui constituent l'avancement expérimental du projet e-Quanet. Ces chapitres décrivent respectivement un montage de base qui satisfait les contraintes globales du projet, une méthode expérimentale d'optimisation, et les pistes à suivre pour concrétiser la source fibrée de photons intriqués en bande très étroite.

Ainsi, le **chapitre 7** décrit la réalisation d'une source fibrée de photons jumeaux qui prend en compte les résultats de la partie II et répond à l'ensemble des contraintes du projet e-Quanet. Il est l'occasion de justifier les solutions techniques retenues et de vérifier grossièrement les prédictions du chapitre 6.

Mais pour quantifier plus précisément les performances obtenues, en particulier le taux de couplage, nous prolongeons dans le **chapitre 8** la théorie vue au chapitre 5 pour développer une méthode de mesure en temps réel de ces performances, applicable aussi bien à une source qu'à un lien quantique complet en fonctionnement. Cette méthode simple, valable en régime impulsionnel, ne nécessite que la mesure des probabilités de détection des photons sur chacune des voies et celle de leur coïncidence.

Enfin, le **chapitre 9** présente plusieurs perspectives pour la mise en œuvre de l'intrication et du filtrage étroit. Nous terminons par la solution proposée pour la suite du projet e-Quanet.

Première partie

Rappels et état de l'art



# Chapitre 1

## Éléments d'optique quantique

Il nous a paru utile, avant d'entrer en détails dans l'étude des sources de photons uniques, jumeaux ou intriqués, de rappeler dans un premier temps ce qu'on entend à travers la notion de photon.

Le concept apparait lorsqu'on quantifie le champ électromagnétique. Il existe de nombreux ouvrages [Lou73, WM06, MW95, GC08, SZ97, AG05] traitant ce problème de façon détaillée et selon différents points de vue. Dans ce chapitre, nous développons une démarche inspirée de celle adoptée entre autres par C. Fabre dans un cours donné à l'école de Physique des Houches [Fab07], qui permet de manière concise d'apporter les concepts essentiels et les notations utiles à la compréhension de ce manuscrit pour les non spécialistes de l'optique quantique.

Pour finir, nous rappellerons quelques éléments de la théorie quantique de la photodétection et nous expliquerons comment caractériser les états classiques et non-classiques de la lumière, en particulier comment mesurer les corrélations.

### 1.1 Électromagnétisme classique

#### 1.1.1 Equations de Maxwell

Dans le vide, en l'absence de charge électrique, le champ électromagnétique est décrit par les équations de Maxwell couplant les champs électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1)$$

On peut introduire le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  qui, en jauge de Coulomb, est lié à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  par les relations

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2)$$

En combinant les ensembles d'Équations (1.1) et (1.2), on parvient aux relations suivantes pour le potentiel vecteur :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

#### 1.1.2 Champ analytique

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  sont des champs physiques vectoriels à valeur réelle. En suivant les conventions de l'Annexe A, la transformée de Fourier temporelle du potentiel vecteur s'écrit

$$\check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$



soit réciproquement

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Puisque  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  est une fonction à valeurs réelles, on a la relation  $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, -\omega) = (\check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega))^*$ . Ainsi, on peut associer une fonction  $\mathbf{A}^{(+)}$ , dite « analytique »<sup>1</sup> restreinte aux fréquences positives de  $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega)$  mais qui contient toute l'information réelle sur  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.4)$$

Sous réserve de l'absence de champ statique ( $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega = 0) = 0$ ), on recompose  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  par

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad \text{où } \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t))^*$$

### 1.1.3 Base des ondes planes transverses

On considère des conditions aux limites périodiques dans un volume fini de taille arbitraire  $L^3$ . Le champ peut alors se décomposer en autant de modes qu'il y a de combinaisons de  $\ell = (n_x, n_y, n_z, m)$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$ ,  $m = 1, 2$  :

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\ell} \mathcal{A}_{\ell}(t) \vec{\epsilon}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.5)$$

Un mode  $\ell$  désigne un vecteur d'onde  $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \frac{2\pi}{L}$  et une des deux polarisations orthogonales transverses  $\vec{\epsilon}_m$ . Cet ensemble de modes forme une base orthogonale statique dans le temps ; c'est la composante  $\mathcal{A}_{\ell}$  de la projection de  $\mathbf{A}^{(+)}$  sur chacun d'eux qui évolue selon la relation (1.3). Récrivons cette équation en fonction de l'expression de  $\mathcal{A}_{\ell}(t)$ , qui n'est autre qu'un coefficient de la série de Fourier (1.5) :

$$\mathcal{A}_{\ell}(t) = \frac{1}{L^3} \int_{L^3} d^3\mathbf{r} \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \vec{\epsilon}_{\ell} e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}}$$

On obtient un ensemble d'équations pour chaque  $\ell$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{A}_{\ell}(t)}{dt^2} &= -c^2 |\mathbf{k}_{\ell}|^2 \mathcal{A}_{\ell}(t) \\ &= -\omega_{\ell}^2 \mathcal{A}_{\ell}(t) \quad \text{où on définit } \omega_{\ell} = c |\mathbf{k}_{\ell}| \end{aligned} \quad (1.6)$$

Des deux solutions possibles  $\mathcal{A}_{\ell}(t) = \mathcal{A}_{\ell}(0) e^{\pm i\omega_{\ell} t}$ , seule celle en  $e^{-i\omega_{\ell} t}$  permet, avec notre convention pour la transformée de Fourier, d'être conforme à la restriction que nous avons précédemment appliquée aux composantes fréquentielles de  $\mathbf{A}^{(+)}$  (Eq. 1.4)<sup>2</sup>.

Au besoin, on peut à partir des équations (1.2) et (1.5) reconstruire les champs  $\mathbf{E}^{(+)}$  et  $\mathbf{B}^{(+)}$  à l'aide de  $\mathcal{A}_{\ell}(t)$  :

$$\mathbf{E}^{(+)} = \sum_{\ell} \mathbf{E}_{\ell}^{(+)} = i \sum_{\ell} \omega_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} \mathcal{A}_{\ell}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \quad \mathbf{B}^{(+)} = \sum_{\ell} \mathbf{B}_{\ell}^{(+)} = i \sum_{\ell} (\mathbf{k}_{\ell} \times \vec{\epsilon}_{\ell}) \mathcal{A}_{\ell}(t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.7)$$

1. Au sens de « représentation analytique » d'un signal en traitement du signal, pas au sens des « fonctions analytiques » en analyse complexe.

2. En l'absence de la solution en  $e^{+i\omega_{\ell} t}$ , il est remarquable que l'équation qui régit  $\mathcal{A}_{\ell}(t)$  se rapporte alors à une équation du premier ordre de type Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\mathcal{A}_{\ell}(t)}{dt} = \hbar\omega_{\ell} \mathcal{A}_{\ell}(t)$$

Les valeurs réelles  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  s'expriment alors en additionnant leurs complexes conjugués  $\mathbf{E}^{(-)}$ ,  $\mathbf{B}^{(-)}$  à  $\mathbf{E}^{(+)}$ ,  $\mathbf{B}^{(+)}$ .

L'énergie totale  $\mathcal{H}$  du champ s'écrit en fonction de la moyenne temporelle  $\langle \cdot \rangle$  des densités d'énergie électromagnétique  $u_\ell = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \mathbf{E}_\ell^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_\ell^2 \right)$  de chaque mode :

$$\mathcal{H} = \int_{L^3} d^3\mathbf{r} \sum_\ell \langle u_\ell \rangle = \int_{L^3} d^3\mathbf{r} \sum_\ell \langle \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \rangle = \sum_\ell 2\epsilon_0 L^3 \omega_\ell^2 |\mathcal{A}_\ell|^2 = \sum_\ell \mathcal{H}_\ell \quad (1.8)$$

Avec la représentation introduite dans cette section, on a affaire à un ensemble de modes  $\ell$  constitués d'ondes planes transverses monochromatiques, superposées avec un poids  $\mathcal{A}_\ell$ . Ces modes sont découplés et chacun d'eux accumule avec le temps une phase  $\omega_\ell t$ . Leurs énergies respectives  $\mathcal{H}_\ell$  sont stables en optique linéaire et contribuent additivement à l'énergie totale en fonction de leurs poids  $\mathcal{A}_\ell$  et de leurs fréquences  $\omega_\ell$ .

Cette écriture du champ électromagnétique en termes de modes découplés possédant chacun leur énergie propre mènera naturellement, après l'opération dite de « quantification », au concept de photon.

## 1.2 Champ électromagnétique quantifié et photon

### 1.2.1 Variables canoniques conjuguées

L'opération de quantification consiste à attribuer des propriétés de non-commutativité aux variables appropriées d'un système. Le choix de ces variables n'est pas arbitraire : il correspond à des paires de variables conjuguées  $(p_\ell, q_\ell)$  au sens des équations d'Hamilton-Jacobi pour un système régi par l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  :

$$\frac{dq_\ell}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\ell} \quad \frac{dp_\ell}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\ell} \quad (1.9)$$

On associe alors aux variables  $(p_\ell, q_\ell)$  les opérateurs  $(\hat{p}_\ell, \hat{q}_\ell)$  en leur imposant la relation  $[\hat{p}_\ell, \hat{q}_{\ell'}] = \hat{p}_\ell \hat{q}_{\ell'} - \hat{q}_{\ell'} \hat{p}_\ell = i\hbar \delta_{\ell\ell'}$

Pour identifier les variables du champ électromagnétique aux variables canoniques des équations d'Hamilton-Jacobi, on introduit les grandeurs suivantes :

$$\mathcal{A}_{q_\ell}(t) = \Re\{\mathcal{A}_\ell(t)\} \quad \mathcal{A}_{p_\ell}(t) = \Im\{\mathcal{A}_\ell(t)\}$$

de telle sorte que  $\mathcal{A}_\ell(t) = \mathcal{A}_{q_\ell}(t) + i\mathcal{A}_{p_\ell}(t)$ . L'Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \sum_\ell 2\epsilon_0 L^3 \omega_\ell^2 \left( \mathcal{A}_{q_\ell}^2 + \mathcal{A}_{p_\ell}^2 \right) \quad (1.10)$$

et l'équation d'évolution (1.6) se sépare en parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_{q_\ell} &= \omega_\ell \mathcal{A}_{p_\ell} \\ \frac{d}{dt} \mathcal{A}_{p_\ell} &= -\omega_\ell \mathcal{A}_{q_\ell} \end{aligned}$$

Par identification avec l'équation de Hamilton-Jacobi (1.9) pour l'Hamiltonien (1.10), les variables conjuguées sont

$$\sqrt{4\epsilon_0 L^3 \omega_\ell} \mathcal{A}_{q_\ell}(t) \quad \text{et} \quad \sqrt{4\epsilon_0 L^3 \omega_\ell} \mathcal{A}_{p_\ell}(t)$$

On associe alors des opérateurs  $\hat{\mathcal{A}}_{q\ell}(t)$  et  $\hat{\mathcal{A}}_{p\ell}(t)$  tels que

$$\left[ \sqrt{4\epsilon_0 L^3 \omega_\ell} \hat{\mathcal{A}}_{q\ell}, \sqrt{4\epsilon_0 L^3 \omega_{\ell'}} \hat{\mathcal{A}}_{p\ell'} \right] = i\hbar \delta_{\ell\ell'}$$

### 1.2.2 Observables de champs et d'énergie

Pour exprimer les grandeurs observables  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  quantifiées au moyen d'opérateurs, il est souhaitable d'introduire l'opérateur  $\hat{\mathcal{A}}_\ell$  associé à la grandeur complexe  $\mathcal{A}_\ell$  :

$$\hat{\mathcal{A}}_\ell = \hat{\mathcal{A}}_{q\ell} + i\hat{\mathcal{A}}_{p\ell}$$

Mais on peut préférer le remplacer par son équivalent adimensionnel  $\hat{a}_\ell$  :

$$\hat{a}_\ell = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 L^3 \omega_\ell}{\hbar}} \hat{\mathcal{A}}_\ell \quad (1.11)$$

qui conduit à une relation de commutation simple

$$[\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'} \quad (1.12)$$

Alors on exprime les opérateurs champs électrique et magnétique ainsi :

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)} = i \sum_{\ell} \sqrt{\frac{\hbar \omega_\ell}{2\epsilon_0 L^3}} \vec{\epsilon}_\ell \hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} \quad \hat{\mathbf{B}}^{(+)} = i \sum_{\ell} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega_\ell}} (\mathbf{k}_\ell \times \vec{\epsilon}_\ell) \hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}}$$

L'opérateur Hamiltonien correspondant à l'observable énergie du champ s'écrit à l'aide des opérateurs  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$  :

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\ell} 2\epsilon_0 L^3 \omega_\ell^2 (\hat{\mathcal{A}}_{p\ell}^2 + \hat{\mathcal{A}}_{q\ell}^2) = \sum_{\ell} \hbar \omega_\ell \left( \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\ell} \hat{\mathcal{H}}_\ell$$

### 1.2.3 Concept de photon

Les états propres associés aux valeurs propres de  $\hat{\mathcal{H}}_\ell$  constituent les états stationnaires du champ. Or, ceux-ci sont également les états propres de l'opérateur  $\hat{N}_\ell = \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell$ .

Sans supposer quoi que ce soit d'autre sur  $\hat{N}_\ell$  ou  $\hat{a}_\ell$  que la relation de commutation (1.12), on peut montrer que le spectre de  $\hat{N}_\ell$  est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls. On note  $|n_\ell\rangle$  l'état propre associé à la valeur propre  $n_\ell \in \mathbb{N}$  :

$$\hat{N}_\ell |n_\ell\rangle = n_\ell |n_\ell\rangle \quad (1.13)$$

sous la condition  $\hat{a}|0\rangle = 0$ . En raison de l'ensemble décrit par les valeurs propres (l'ensemble  $\mathbb{N}$  des nombres entiers), on appelle les états  $|n_\ell\rangle$  des « états nombre » et l'opérateur  $\hat{N}_\ell$  l'« opérateur nombre ». Mais un nombre *de quoi*? Récrivons (1.13) sous forme de la solution de l'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_\ell = \hbar \omega_\ell \left( \hat{N}_\ell + \frac{1}{2} \right)$  :

$$\hat{\mathcal{H}}_\ell |n_\ell\rangle = \hbar \omega_\ell \left( n_\ell + \frac{1}{2} \right) |n_\ell\rangle$$

Le mode  $\ell$  est dans l'état  $|n_\ell\rangle$  lorsque son énergie associée est la somme de  $n_\ell + \frac{1}{2}$  « quanta » d'énergie  $\hbar \omega_\ell$ . C'est en raison du fait que  $n_\ell$  est non pas réel mais entier naturel qu'on parle de quanta, et on appelle ceux-ci « photon ».  $\hat{N}_\ell$  désigne donc l'opérateur « nombre de photons » et a pour valeur propre  $n_\ell$  lorsque le champ est « dans un état à  $n_\ell$  photons »  $|n_\ell\rangle$ .

Plus que la simple énergie qu'il porte, on attribue au photon toutes les caractéristiques du mode auquel il est associé. Ainsi, outre une énergie  $\hbar\omega_\ell$ , un photon « dans le mode  $\ell$  » possède une impulsion  $\hbar\mathbf{k}_\ell$  et une polarisation  $\vec{\epsilon}_\ell$  (associé à un moment cinétique  $\hbar\sigma_\ell$ <sup>3</sup>).

Un photon peut être annihilé sous l'action de  $\hat{a}$  ou créé sous l'action de  $\hat{a}^\dagger$ , ce qui diminue ou augmente, quantum par quantum, l'énergie du champ électromagnétique :

$$\begin{aligned}\hat{a}_\ell|n_\ell\rangle &= \sqrt{n_\ell}|n_\ell - 1\rangle \\ \hat{a}_\ell^\dagger|n_\ell\rangle &= \sqrt{n_\ell + 1}|n_\ell + 1\rangle\end{aligned}$$

Les états nombre forment une base orthonormale complète de l'espace de Fock [Foc32] :

$$\begin{aligned}\langle n_\ell|n_{\ell'}\rangle &= \delta_{\ell\ell'} \\ \sum_{n_\ell=0}^{\infty} |n_\ell\rangle\langle n_\ell| &= 1\end{aligned}$$

En cela, on les appelle également « états de Fock ».

Cette description des photons comme excitation d'un mode délocalisé est donc bien éloignée de l'image corpusculaire d'un flux de particules de lumière voyageant d'un point à un autre de l'espace à une vitesse  $c$  déterminée.

### 1.2.4 Obscurité et vide quantique

Pour chaque mode, l'absence de photon  $|0\rangle$  est parfois appelée  $|\text{vide}\rangle$  ou  $|\text{obscurité}\rangle$  dans le contexte de l'optique. C'est un état à part entière du champ, bien différent du vecteur nul  $0$ , et qui présente une énergie  $\frac{1}{2}\hbar\omega_\ell$  pour chaque mode, traduisant la présence de fluctuations à l'origine de certains phénomènes spontanés comme la fluorescence paramétrique, décrite au § 2.5 et centrale dans les travaux présentés dans ce documents.

Remarquons que la somme des énergies du vide sur un ensemble infini de modes peut entraîner des infinis sans signification physique. C'est le cas par exemple pour la décomposition en ondes planes. Mais on peut prendre l'énergie du vide comme zéro de l'énergie du système et récrire  $\hat{\mathcal{H}}_\ell = \hbar\omega_\ell\hat{N}_\ell$ .

### 1.2.5 Quantification dans un milieu diélectrique dispersif

Pour simplifier la présentation du concept de photon et des différentes notations, nous avons considéré la quantification du champ électromagnétique dans le vide. Lorsque le volume de quantification est un milieu diélectrique, c'est à dire un ensemble de dipôles interagissant avec le champ, les résultats sont différents.

Dans le cas d'un milieu diélectrique linéaire, anisotrope, non magnétique, mais dispersif, on introduit classiquement dans les équations de Maxwell la permittivité relative  $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = \eta^2(\omega)$ , où  $\chi(\omega)$  est la susceptibilité diélectrique linéaire du matériau et  $\eta(\omega)$  l'indice de réfraction<sup>4</sup>.

3. On rappelle ici qu'une onde peut présenter un moment cinétique orbital (lorsque le front d'onde est hélicoïdal [PA00]) que nous ne considérons pas ici, ainsi qu'un moment cinétique associé au spin des photons. L'équivalence entre spin et polarisation circulaire se comprend ([BLP82] §. 8, [Mes59] §. XXI-28) dans le cadre de la théorie relativiste des champs : à cause de la masse nulle d'un photon (donc de sa vitesse  $c$ ), son spin entier ne peut prendre qu'une composante selon l'axe de propagation. Puisqu'un seul axe est possible, la composante de l'observable de spin selon cet axe ne peut avoir une valeur nulle ; seulement  $\pm\hbar$ , correspondant aux deux états de polarisations circulaires  $|\odot\rangle$  et  $|\oslash\rangle$ . Une onde polarisée linéairement est constituée de photons dans une superposition linéaire de spins :  $|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\odot\rangle + |\oslash\rangle)$ .

4. Nous avons utilisé ici la notation  $\eta$  pour l'indice de réfraction pour éviter la confusion avec le nombre de photons  $n$ . Dans la suite du document, l'indice de réfraction sera noté  $n$ .

Une manière de prendre en compte la dispersion consiste, pour le calcul de l'Hamiltonien (Eq. 1.8), à remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  dans l'expression de la densité d'énergie et à utiliser la relation de dispersion  $\omega_\ell = \frac{c}{\eta_\ell} |\mathbf{k}_\ell|$  ( $\eta_\ell = \eta(\omega_\ell)$ ) :

$$u_\ell = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_\ell \cdot \mathbf{D}_\ell + \mathbf{B}_\ell \cdot \mathbf{H}_\ell) = \frac{1}{2} \left( \epsilon \mathbf{E}_\ell^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_\ell^2 \right) = \epsilon_0 \eta_\ell^2 \mathbf{E}_\ell^2$$

Alors, en suivant la même démarche de quantification que précédemment, l'amplitude du potentiel vecteur pour le mode  $\ell$  diffère d'un facteur  $\eta_\ell$  par rapport à l'Equation 1.11 :

$$\hat{a}_\ell = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \eta_\ell L^3 \omega_\ell}{\hbar}} \hat{A}_\ell \quad (1.14)$$

En réalité, cette manière d'introduire l'indice de réfraction du milieu est incorrecte dans le cas général d'un continuum ou quasi-continuum de modes en raison des couplages par le milieu. Elle n'est rigoureuse que lorsque, pour deux modes  $\ell$  et  $\ell'$  excités, les fréquences  $\omega_\ell$  et  $\omega_{\ell'}$  sont suffisamment différentes, c'est à dire dans le cas d'une superposition d'ondes quasi-monochromatiques de fréquences éloignées. Il faut également que cette quasi-monochromaticité permette de négliger la dispersion du milieu dans le calcul de la vitesse de groupe.

Lorsque le paquet d'onde n'est pas assez monochromatique pour qu'il soit possible de négliger cette dispersion, alors l'expression (1.14) devient :

$$\hat{a}_\ell = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \eta_\ell c L^3 \omega_\ell}{\hbar v_g(\omega_\ell)}} \hat{A}_\ell$$

où  $v_g(\omega_\ell) = \frac{d\omega_\ell}{d|\mathbf{k}_\ell|}$  est la vitesse de groupe. La description du champ n'est alors pas découplée de celle du matériau ; on parle alors de photon « habillé » [GC08, p.94]. K. J. BLOW & R. LOUDON [BLPS90] ainsi que P. W. MILONNI [Mil95] ont proposé une démarche de quantification applicable à une onde quasi-monochromatique, c'est à dire d'un paquet d'ondes de fréquences voisines de  $\omega_\ell$ , en introduisant la dispersion sous forme d'un développement limité de la vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Cette forme reste également valable dans le cas de superpositions d'ondes quasi-monochromatiques de fréquences éloignées par rapport à leur étalement spectral. Dans la limite où le paquet d'onde tend à devenir purement monochromatique, la vitesse de groupe égale la vitesse de phase et le formalisme rejoint le résultat présenté aux paragraphes précédents et on peut utiliser (1.14). On peut consulter un article de J. C. GARRISON [GC04] pour une synthèse de la question.

### 1.2.6 États cohérents

Nous avons montré (§ 1.2.3) que les états nombre formaient une base du champ électromagnétique, mais il est possible de construire d'autres bases. Les états cohérents  $|\alpha\rangle$ , par exemple, sont définis comme les états propres de l'opérateur annihilation  $\hat{a}$  :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Ils permettent de décrire des états « quasi-classiques », c'est à dire les ondes monochromatiques dont un faisceau laser est la réalisation physique la plus proche. Pour comprendre l'intérêt de la description d'un champ sous la forme d'états cohérents, on peut exprimer ceux-ci sur la base des états nombre :

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

Puisque  $\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n}|n\rangle$ , on a la relation de récurrence suivante :

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\langle n-1|\hat{a}|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0 \quad (1.15)$$

Afin que l'état soit normalisé, il faut que  $\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} c_0^2 = 1$ , soit  $c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$ . On obtient l'expression suivante :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.16)$$

On peut lire cette équation en termes de distribution poissonnienne de probabilités : le module au carré du  $n$ -ième terme correspond à la probabilité que  $n$  évènements se produisent lorsqu'il s'en produit  $|\alpha|^2$  en moyenne. On en déduit qu'un état cohérent  $|\alpha\rangle$  de valeur propre  $\alpha$  décrit un mode de champ dans une superposition cohérente de différentes populations de photons dont l'effectif moyen est  $\bar{n} = |\alpha|^2$ . Effectivement, cette valeur correspond à la valeur moyenne de l'opérateur « nombre de photons »  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  :  $\langle \alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$ . Puisque  $\langle \alpha|\hat{N}|\alpha\rangle$  exprime l'intensité du champ,  $\alpha$  est donc directement lié à l'amplitude  $A$  d'un champ classique.<sup>5</sup> À titre d'illustration, la Figure 1.1 présente la distribution de population pour trois différents nombres moyens de photons. On remarque que plus celui-ci est faible, plus la dispersion l'est aussi. On peut en effet montrer que l'écart-type de cette distribution vaut  $\sqrt{\bar{n}}$  lorsque le nombre moyen de photons est  $\bar{n}$ .

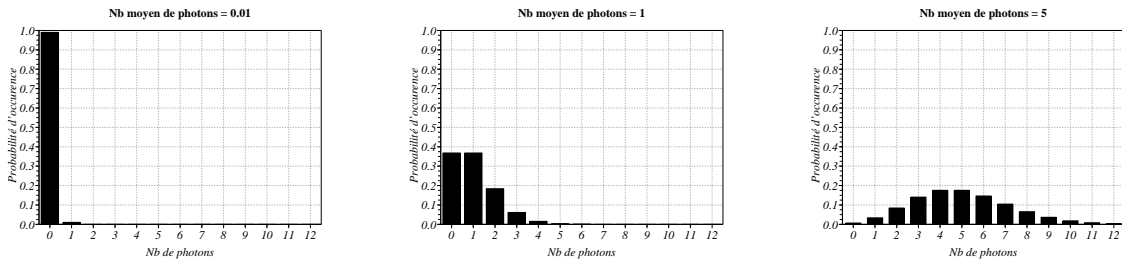


FIGURE 1.1 – Distribution de probabilité de présence de  $n$  photons dans un mode de champ contenant en moyenne  $\bar{n} = 0,01$  (gauche),  $\bar{n} = 1$  (centre) ou  $\bar{n} = 5$  (droite) photons. Remarquons que la dispersion évolue en  $\sqrt{\bar{n}}$ . En particulier, on obtient un  $|\text{vide}\rangle$  parfait lorsque  $\bar{n} \rightarrow 0$ , et une distribution tendant vers une gaussienne centrée sur  $\bar{n}$  lorsque  $\bar{n}$  augmente suffisamment.

Un résultat remarquable est la loi qui régit la probabilité de trouver, en présence de  $\bar{n}$  photons en moyenne, une paire de photons générée de manière simultanée par rapport à celle de trouver deux photons successifs. La première probabilité sera notée  $p_2$ , et la deuxième  $p_1^2$ , puisque la probabilité de deux évènements successifs indépendants est le produit des probabilités de chaque évènement :

$$\frac{p_2}{p_1^2} = \frac{|\langle 2|\alpha\rangle|^2}{|\langle 1|\alpha\rangle|^4} = \frac{e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^4}{2}}{\left(e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2\right)^2} = \frac{e^{|\alpha|^2}}{2} = \frac{e^{\bar{n}}}{2}$$

Pour s'approcher d'un régime de photons « uniques », il est donc important de réduire  $\bar{n}$  au maximum. Pour diminuer  $\bar{n}$ , on peut réduire la durée de l'intervalle de temps considéré ou atténuer le faisceau. Mais là encore, on n'atteint asymptotiquement qu'un régime où  $\frac{p_2}{p_1^2} = \frac{1}{2}$  :

$$\frac{p_2}{p_1^2} \xrightarrow{\bar{n} \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad (1.17)$$

Ainsi, même atténuée à l'infini, une source d'états cohérents, comme un laser, ne tend pas rigoureusement vers une source de photons uniques. On peut considérer une telle source cohérente

5.  $\alpha = \iota \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \eta^2 L^3}{\hbar \omega}} A$  si  $\eta$  est l'indice de réfraction du milieu et  $A$  l'amplitude du champ électrique

atténuée comme une source de photons uniques perturbée, en première approximation, par la présence de paires de photons, ce qui n'est en général pas souhaitable pour les protocoles de l'information quantique requérant des états nombre.

### 1.2.7 États chaotiques

Les états nombre et les états cohérents sont deux bases possibles pour décrire des états purs du champ électromagnétique. Mais la lumière ne se trouve pas toujours dans un état pur. Les états chaotiques (autrement appelés « thermiques ») sont justement des formes d'états du champ mélangés, c'est à dire en superposition au plus partiellement cohérente. Pour décrire ce type de superposition d'états, il faut faire appel au formalisme de la matrice densité  $\hat{\rho}$ . Si l'on choisit une base d'états purs  $\{|\psi_i\rangle\}$ , la matrice densité suivante décrit un système dans un mélange d'états avec la probabilité  $p_i$  que le système soit dans l'état  $|\psi_i\rangle$  :

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

On s'intéresse à l'état  $\hat{\rho}_{\text{th}}$  d'un mode de corps noir peuplé en moyenne de  $\bar{n}$  photons :

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{th}} \hat{N}) = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{th}} \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \bar{n} \quad (1.18)$$

où  $\bar{n}$  est régi par la distribution de Bose-Einstein ( $\nu$  étant la fréquence du mode considéré,  $T$  la température à l'équilibre, et  $k_B$  la constante de Boltzmann) :

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Cette formule décrit la distribution statistique du nombre de photons dans un système à l'équilibre thermique. Ainsi, les états chaotiques sont également appelés « états thermiques ». Sous cette contrainte, pour déterminer  $\hat{\rho}_{\text{th}}$ , on cherche le maximum de l'entropie de Von Neumann définie par

$$S = -k_B \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{th}} \ln \hat{\rho}_{\text{th}}) \quad (1.19)$$

Pour exprimer la distribution du nombre de photons dans ce mode de corps noir, on choisit d'exprimer  $\hat{\rho}_{\text{th}}$  sur la base des états de Fock  $\{|n\rangle\}$

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$$

L'expression de l'entropie  $S$  est alors

$$S = -k_B \sum_n p_n \ln p_n$$

On peut montrer que la fonction suivante maximise  $S$  et satisfait (1.18) :

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}$$

Ainsi, un mode de corps noir peuplé de  $\bar{n}$  photons en moyenne est décrit par le mélange statistique

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} |n\rangle \langle n| \quad (1.20)$$

Calculons  $p_2/p_1^2$  comme nous l'avons fait pour les états cohérents :

$$\frac{p_2}{p_1^2} = \frac{\bar{n}^2}{(1+\bar{n})^3} = 1 + \bar{n}$$

$$\xrightarrow{\bar{n} \rightarrow 0} 1$$

Lorsqu'on considère un très petit nombre de photons, ce rapport vaut 1, c'est à dire deux fois plus que dans le cas des états cohérents.

### 1.3 Champ monomode et champ multimode

Nous venons de traiter la quantification d'un champ électromagnétique quelconque dans un volume  $L^3$ , en l'exprimant sur une base d'ondes planes transverses. Nous avons introduit la notion de photon dans le mode  $\ell$ , en le décrivant comme une excitation élémentaire, portant une énergie  $\hbar\omega_\ell$ , de l'onde plane  $\ell$ . En toute généralité, un champ est donc peuplé de multiples photons, éventuellement dans des modes différents. On note

Les états propres  $|n_\ell\rangle, |n_{\ell'}\rangle$  correspondent à des modes  $\ell \neq \ell'$  découplés, donc à des sous-espaces de Hilbert orthogonaux. On écrit donc l'équation aux valeurs propres pour l'énergie de la manière suivante :

$$\hat{\mathcal{H}} \otimes_{\ell} |n_\ell\rangle = \sum_{\ell} \hbar\omega_\ell \left( n_\ell + \frac{1}{2} \right) \otimes_{\ell} |n_\ell\rangle$$

où  $\otimes$  désigne le produit tensoriel, qui permet de décrire l'état du champ *multimode* par les états de chacun des modes. Cet état multimode s'inscrit dans un espace de Hilbert constitué de la somme directe des sous-espaces de Hilbert associés à chaque mode.

#### 1.3.1 Notations

En toute généralité un état pur  $|\psi\rangle$  défini par  $M$  modes du champ électromagnétique ( $M$  étant éventuellement infini) et une composante  $|\text{reste}\rangle$  non liée au champ s'écrit sous la forme :

$$|\psi\rangle = |1 : n_1\rangle \otimes |2 : n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |M : n_M\rangle \otimes |\text{reste}\rangle$$

où  $|i : n_i\rangle$  désigne le nombre  $n_i$  de photons peuplant le mode  $i$  du champ.

En vertu du principe de superposition, tout système quantique peut être dans un état superposé  $|S\rangle$

$$\begin{aligned} |S\rangle &= c|\psi\rangle + c'|\psi'\rangle + \cdots && (c, c' \in \mathbb{C}) \\ &= c(|1 : n_1\rangle \otimes |2 : n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |M : n_M\rangle \otimes |\text{reste}\rangle) \\ &\quad + c'(|1 : n'_1\rangle \otimes |2 : n'_2\rangle \otimes \cdots \otimes |M : n'_M\rangle \otimes |\text{reste}'\rangle) \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

Pour ce qui nous concerne, nous ne nous intéresserons pas aux termes non liés au champ, si bien que nous omettrons  $|\text{reste}\rangle$ . L'interaction du champ avec un autre système quantique ou l'environnement consistera toujours en une mesure (une détection de photons par exemple), et nous ne nous intéresserons pas à l'état quantique de l'appareil de mesure après l'interaction. De plus, nous nous limiterons en général à peu de modes. Par exemple pour quatre modes, nous



aurons

$$\begin{aligned} |S\rangle &= c(|1 : n_1\rangle \otimes |2 : n_2\rangle \otimes |3 : n_3\rangle \otimes |4 : n_4\rangle) \\ &\quad + c'(|1 : n'_1\rangle \otimes |2 : n'_2\rangle \otimes |3 : n'_3\rangle \otimes |4 : n'_4\rangle) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

que nous noterons souvent, pour plus de concision

$$|S\rangle = c|n_1 n_2 n_3 n_4\rangle + c'|n'_1 n'_2 n'_3 n'_4\rangle + \dots$$

### 1.3.2 Modes de faisceaux gaussiens, modes de fibre

Nous avons déterminé la base des états nombre à partir d'une quantification du champ décomposé en ondes planes transverses (§ 1.1.3). Ce choix présente l'avantage d'être directement lié au formalisme de la transformée de Fourier. Il nous a permis de dégager simplement certaines notions utiles et reste un outil adapté dans le cas d'un champ quelconque analysé dans cette décomposition, ou si l'on approxime un faisceau par une onde plane progressive.

Cependant, cette décomposition n'est pas toujours la plus appropriée, ou l'approximation des ondes planes suffisante. Un faisceau réel, même monochromatique, ne présente pas un front d'ondes parfaitement plan car cela supposerait une étendue transverse infinie. Lorsque le profil d'intensité du faisceau est gaussien, on peut montrer [KL66] que celui-ci présente lors de sa propagation une divergence due à la diffraction. L'évolution du profil (en amplitude) d'un tel faisceau lors de sa propagation est régie par l'équation suivante :

$$u(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{-i\phi(z)} \quad (1.21)$$

tel que  $\int_{\mathbb{R}^2} |u(x, y, z)|^2 dx dy = 1$  et où

$$\begin{aligned} z_R &= \frac{\pi w_0^2}{\lambda} && \text{(longueur de Rayleigh)} \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} && \text{(demi-largeur du faisceau à } 1/e^2 \text{ en intensité)} \\ R(z) &= z + \frac{z_R^2}{z} && \text{(rayon de courbure du front d'onde)} \\ \phi(z) &= \arctan \frac{z}{z_R} && \text{(phase de Gouy)} \end{aligned}$$

Cette forme s'applique à une onde  $\mathbf{A}(x, y, z, t) = A_0 u(x, y, z) \vec{\epsilon} e^{i(kz - \omega t)} + c.c.$

- se propageant dans le vide selon l'axe  $z$
- monochromatique de pulsation  $\omega$
- de profil transverse gaussien, de demi-largeur  $w = w_0$  à l'intensité  $I_{\max}/e^2$  en  $z = 0$
- soumise à la diffraction
- dont on suppose que le profil transverse varie peu lors de sa propagation à l'échelle de sa longueur d'onde (approximation paraxiale)

On peut également utiliser la forme suivante, qui peut s'avérer utile pour les calculs :

$$u(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} \frac{1}{1 + i\xi} e^{-\frac{x^2+y^2}{(1+i\xi)w^2(z)}} \quad \text{où} \quad \xi = \frac{z}{z_R} \quad (1.22)$$

Le profil gaussien présente donc un très bon couplage dans une fibre monomode. Idéalement, une fibre monomode à gradient d'indice parfaitement parabolique posséderait un mode propre fondamental de profil exactement gaussien[GT98]. En pratique, le diamètre d'une fibre étant limité, une fibre dite « à gradient d'indice » réelle possède en fait un profil d'indice parabolique tronqué. Le profil du mode propre effectif reste très proche d'un profil gaussien idéal. Les fibres standard (comme la fibre Corning SMF-28 pour la bande des télécommunications) sont plutôt constituées d'un cœur de haut indice, uniforme, et d'une gaine d'indice inférieur : ce sont des fibres à saut d'indice. Pourtant, là encore, le profil du mode propre de ces fibres se rapproche d'un profil gaussien[GT98, p. 151]. Une caractéristique essentielle d'une telle fibre est son « diamètre de mode » (*MFD*, pour *Mode Field Diameter*) qui correspond précisément à  $2w$ ,  $w$  étant l'étalement du profil gaussien d'intensité  $\propto e^{-r^2/w^2}$  le plus proche de celui du mode propre réel de la fibre. Réciproquement, le faisceau issu d'une fibre optique à saut d'indice est très proche d'un faisceau gaussien décrit par l'équation (1.21) avec, en sortie de fibre,  $w(z=0) = \text{MFD}/2$ .

La désignation d'un mode de fibre est élémentaire : lorsqu'un photon se propage dans une fibre monomode, sa direction  $\mathbf{k}$  sera en tout point colinéaire à la fibre. Ainsi, un photon de pulsation  $\omega$  et de polarisation  $\vec{\epsilon}$  empruntant une fibre A sera dit « dans le mode  $(A, \omega, \vec{\epsilon})$  » : le mode spatial  $A$  reste celui du mode propre de la fibre tout au long de la propagation. Ainsi, un état monomode à  $n$  photons en entrée de fibre est conservé en sortie de fibre, si ce n'est que la direction de propagation  $\mathbf{k}$  peut être changée en un  $\mathbf{k}'$  arbitraire, en orientant la sortie de fibre dans la direction voulue. Notons que dans une fibre optique, les variations de polarisation peuvent généralement être compensés expérimentalement. La dépolarisation et l'absorption peuvent être négligées sur de courtes distances.

## 1.4 Photodétection

### 1.4.1 Expression quantique de la photodétection

La question de la détection de photons uniques est particulière. Nous avons précédemment insisté sur le fait que le photon était un objet délocalisé du champ. Il ne s'agit donc pas de considérer la photodétection comme l'impact d'un quantum d'énergie sur une surface, produisant un signal électrique signalant la présence du photon. Il faut concevoir la photodétection en un point  $\mathbf{r}$  à un instant  $t$  comme l'évènement correspondant à la réduction du paquet d'ondes délocalisé d'au moins un photon constituant le champ électromagnétique. Comme toute mesure sur un système quantique, le résultat n'est pas déterministe et on ne peut que mesurer la densité de probabilité que cet évènement se produise, proportionnelle à (voir [Gla65]) :

$$p(\mathbf{r}, t) = \alpha \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle \quad (1.23)$$

où  $|\psi\rangle$  désigne l'état du champ avant la mesure et  $\alpha$  une grandeur dépendant du détecteur, qui est constante si le processus de détection ne dépend pas de  $\mathbf{r}$ ,  $t$  ou de la fréquence du champ.

On parvient à cette expression en considérant que le détecteur (supposé parfaitement localisé en  $\mathbf{r}$  et de réponse instantanée) fait passer le champ de l'état initial  $|\psi\rangle$  à un des quelconques états possibles  $\{|\psi_f\rangle\}$  possédant un photon de moins

$$\langle \psi_f | \hat{N} | \psi_f \rangle = \langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle - 1$$

Pour un champ électrique décrit par l'opérateur  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ , l'amplitude de probabilité d'une telle transition vaut  $\langle \psi_f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle$ . C'est en effet le champ électrique qui interagit avec un photodétecteur. La probabilité qu'un photon soit détecté correspond à la somme des probabilités

des transitions  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi_f\rangle$

$$p(\mathbf{r}, t) = \alpha \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle \right|^2 = \alpha \sum_f \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle$$

ce qui, en utilisant la relation de fermeture  $\sum_f |\psi_f\rangle \langle \psi_f| = 1$ , mène bien au résultat (1.23).

Remarquons que l'équivalent classique de (1.23) est l'intensité, où les champs  $\mathbf{E}^{(-)}$  et  $\mathbf{E}^{(+)}$  commutent<sup>6</sup>. Pour un faible nombre de photons, où la quantification du champ est nécessaire, ce n'est pas le cas des opérateurs  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  et  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$  : le problème de la photodétection quantique est donc en général différent d'une photodétection classique. On peut distinguer, entre autres

- le cas proprement quantique des expériences avec des photons uniques où  $|\psi\rangle$  désigne une combinaison d'états nombres, éventuellement dans plusieurs modes,
- le cas quasi-classique où le résultat est indépendant de l'ordre des opérateurs  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  et  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ . C'est le cas des états cohérents (§ 1.2.6) qui sont états propres de  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  et  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ .

Pour des états de lumière plus généraux, comme de la lumière chaotique ou tout mélange statistique, il faut avoir recours au formalisme de la matrice densité. Alors, si  $\hat{\rho}$  décrit l'état du champ, le signal de photodétection s'écrit

$$p(\mathbf{r}, t) = \alpha \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right\}$$

### 1.4.2 Efficacité quantique de détection

En posant  $\hat{\mathbf{e}}^{(+)} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\hbar\omega}} \hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ , on adimensionnalise les expressions, et on peut écrire pour un détecteur de photons uniques le taux de comptage  $r$ , c'est à dire le nombre de photons détectés par seconde :

$$r(\mathbf{r}, t) = \eta \langle \psi | \hat{\mathbf{e}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle$$

où  $\eta$  est alors le « rendement quantique » du détecteur, ou « efficacité quantique de détection », c'est à dire la probabilité pour qu'une réduction de paquet d'onde soit effectivement signalée par le détecteur.

Pour un détecteur sensible à tous les modes  $\ell$  du champ (*i.e.* tous les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_\ell$ , toutes les fréquences  $\omega_\ell$  et toutes les polarisations  $\vec{\epsilon}_\ell$ ),  $\hat{\mathbf{e}}^{(+)}$  s'écrirait, en notant  $\hat{a}_\ell^\dagger$  l'opérateur création d'un photon dans le mode  $\ell$  :

$$\hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_\ell \vec{\epsilon}_\ell \frac{e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)}}{\sqrt{V}} \hat{a}_\ell^\dagger$$

En général, un détecteur n'est pas sensible identiquement à tous les modes du champ. L'opérateur de photodétection est en général restreint par une fonction  $\mathcal{O}(\mathbf{k}, \omega, \vec{\epsilon})$  :

$$\hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_\ell \vec{\epsilon}_\ell \mathcal{O}(\mathbf{k}_\ell, \omega_\ell, \vec{\epsilon}_\ell) \frac{e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)}}{\sqrt{V}} \hat{a}_\ell^\dagger \quad (1.24)$$

Par exemple, il peut s'agir d'un filtrage spectral ( $\mathcal{O}(\omega)$ ) ou angulaire ( $\mathcal{O}(\mathbf{k})$ ) placé avant la détection et agissant sur l'amplitude du champ détecté.

Dans le cas où le détecteur placé en  $\mathbf{r}$  n'interagit qu'avec un seul mode du champ caractérisé par l'opérateur création  $\hat{a}^\dagger$ , on a :

$$r(t) = \eta \langle \psi | \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) | \psi \rangle = \eta \langle \psi | \hat{N}(t) | \psi \rangle = \eta \bar{n}(t)$$

---

6.  $I(\mathbf{r}, t) \propto |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$

où  $\hat{a}^\dagger(t)$  est l'expression de l'opérateur création en représentation de Heisenberg :  $\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}$ .

En pratique, un détecteur n'a pas une réponse instantanée et possède en outre un temps mort après une détection. L'expression ci-dessus, faisant intervenir une simple constante  $\eta$  n'est donc valable que dans un régime où le nombre moyen de photons  $\bar{n}$  est petit devant 1.

Remarquons cependant que des détecteurs capable de résoudre le nombre de photons existent [KTYH99, FS05] en particulier depuis les travaux de MILLER *et al.* en 2003 sur les détecteurs supraconducteurs [MNMS03, RLMN05]. KARDINAL et ses collaborateurs [KYS08] ont également récemment montré qu'il était possible de résoudre le nombre de photons avec une photodiode à avalanche standard.

## 1.5 Cohérence et corrélations

Le terme conventionnel de cohérence en optique classique désigne la faculté qu'ont deux champs à interférer, produisant des franges de contraste plus ou moins grand. Deux champs possédant une relation de phase stable, donc susceptibles d'interférer en un point  $\mathbf{r}$ , de manière parfaitement constructive (ou destructive), sont dits cohérents. Classiquement, lorsque leur superposition en un point  $\mathbf{r}$  ne produit pas de phénomène d'interférence, on dit qu'on a affaire à deux champs incohérents.

### 1.5.1 Conception moderne de la cohérence : fonction de corrélation de Glauber

Roy GLAUBER a généralisé le concept de cohérence [Gla63, Gla65] en l'étendant aux ordres supérieurs, à des valeurs de champs en des points  $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'' \dots$  et des instants  $t, t', t'' \dots$  et en l'adaptant au formalisme quantique, montrant ainsi qu'un ensemble de fonctions de corrélation sont autant de caractérisations du champ, utiles pour quantifier de nombreux phénomènes. Plutôt que de parler de « cohérence entre deux ondes », on peut parler de « cohérence d'ordre  $n$  en  $(\mathbf{r}, t)_1, (\mathbf{r}, t)_2, \dots, (\mathbf{r}, t)_{2n}$  d'un champ », quantifiée par la fonction de corrélation générale<sup>7</sup> :

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1 \cdots \mathbf{r}_{2n} t_{2n}) = \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \cdots \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) | \psi \rangle \quad (1.25)$$

On définit également la fonction de corrélation normalisée

$$g^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1 \cdots \mathbf{r}_{2n} t_{2n}) = \frac{G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1 \cdots \mathbf{r}_{2n} t_{2n})}{\prod_{i=1}^{2n} \sqrt{G^{(1)}(\mathbf{r}_i t_i, \mathbf{r}_i t_i)}} \quad (1.26)$$

### 1.5.2 Photodétection et cohérence

Dans le cas particulier de fonctions de corrélation qui décrivent une coïncidence de  $n$  photodétections en  $(\mathbf{r}, t)_1, (\mathbf{r}, t)_2, \dots, (\mathbf{r}, t)_n$ , on utilise la fonction  $G^{(n)}$  particulière, symétrique en  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  et  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$  :

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1, \dots, \mathbf{r}_n t_n, \mathbf{r}_n t_n, \dots, \mathbf{r}_1 t_1) = \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_n, t_n) \cdots \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | \psi \rangle$$

7. Pour un état pur  $|\psi\rangle$ . Pour un mélange statistique décrit par une matrice densité  $\hat{\rho}$ , on écrit

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1 \cdots \mathbf{r}_{2n} t_{2n}) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \cdots \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \}$$

En particulier,  $G^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}t)$  caractérise l'intensité du champ en  $\mathbf{r}t$ , et peut s'exprimer en terme de nombre de photons par seconde en adimensionnalisant l'expression.

Remarquons que si un signal de photodétection s'écrit comme une fonction de corrélation symétrique, celle-ci peut s'exprimer comme une combinaison de fonctions de corrélation en d'autres points  $\{\mathbf{r}_i, t_i\}$  non nécessairement symétriques. Par exemple, dans la résolution du problème classique des fentes d'Young (voir WALLS & MILBURN, [WM06, § 3.3] ou KLYSHKO, [Kly88, § 1.4]), l'expression de l'intensité à l'aide de  $G^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}t)$  peut, après développement, faire apparaître une fonction  $G^{(1)}$  en d'autres coordonnées, non symétriques, qui quantifie le contraste des franges d'interférence.

Les fonctions de corrélation d'ordre 1 non symétriques, en effet, caractérisent la cohérence classique d'une onde : cohérence temporelle si  $G^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}t') \neq 0$ , cohérence spatiale si  $G^{(1)}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t) \neq 0$ . Mais elles ne sont pas accessibles directement par la photodétection.

Aux ordres supérieurs, les fonctions de corrélation peuvent rendre compte de phénomènes non classiques. Par exemple, des interférences quantiques à  $N$  photons cohérents peuvent produire des franges d'interférence plus fines ( $\frac{\lambda}{N}$ ), ce qui ouvre [WPA<sup>+</sup>04] des perspectives d'amélioration technologique en termes de mesures interférométriques optiques.

### 1.5.3 Coïncidences

La fonction  $G^{(2)}(\mathbf{r}_1t, \mathbf{r}_2t, \mathbf{r}_2t, \mathbf{r}_1t)$  est liée à la probabilité de coïncidence de deux photons en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  au même instant  $t$ . En pratique, en plaçant deux détecteurs de rendement quantique  $\eta_1$  et  $\eta_2$  en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , le taux de coïncidences mesuré (ou taux de « coups » ou « clics ») vaut

$$\begin{aligned} R(t) &= \eta_1 \eta_2 \alpha G^{(2)}(\mathbf{r}_1t, \mathbf{r}_2t, \mathbf{r}_2t, \mathbf{r}_1t) \\ &= \eta_1 \eta_2 \alpha \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) | \psi \rangle \\ &= \eta_1 \eta_2 \langle \psi | \hat{\mathbf{e}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{\mathbf{e}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) | \psi \rangle \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est une constante de dimension appropriée, et où on a utilisé l'expression de  $\hat{\mathbf{e}}^{(+)}$  définie par l'Eq. (1.24).

Lorsque la lumière ne présente pas de caractère proprement quantique, la fonction  $G^{(2)}$  peut s'exprimer comme un produit de fonctions  $G^{(1)}$ . On voit que la fonction  $g^{(2)}$  peut alors, telle qu'elle est définie (Eq. 1.26), quantifier le caractère non-classique d'un état de lumière : elle exprime le rapport entre l'expression générale de la cohérence d'ordre 2 (qui tient compte des corrélations quantiques) et son expression classique (produit de cohérences d'ordre 1).

En 1967, R. L. PFLIEGOR et L. MANDEL [PM67] ont démontré le rôle important de la photodétection dans le processus de comptage des coïncidences : en considérant deux photons provenant de deux lasers atténués, *a priori* incohérents entre eux, ils ont observé des interférences dont seul peut rendre compte l'effet de la photodétection. C'est l'étalement spatial des détecteurs, de surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , qui permet de supprimer une information de discernabilité entre deux chemins qui causent les interférences. Dans ce cas, le caractère ponctuel ne peut être pris en compte et le taux de coïncidences s'exprime par

$$R(t) = \eta_1 \eta_2 \int_{S_1} d^2 \boldsymbol{\rho}_1 \int_{S_2} d^2 \boldsymbol{\rho}_2 \langle \psi | \hat{\mathbf{e}}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t) \hat{\mathbf{e}}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t) \hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t) \hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t) | \psi \rangle$$

De même, on peut prendre en compte l'incertitude temporelle  $\Delta t$  sur l'instant de détection :

$$\begin{aligned} R(t) &= \eta_1 \eta_2 \int_{S_1} d^2 \boldsymbol{\rho}_1 \int_{S_2} d^2 \boldsymbol{\rho}_2 \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} dt_1 \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} dt_2 \\ &\quad \times \langle \psi | \hat{\mathbf{e}}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1) \hat{\mathbf{e}}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2) \hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2) \hat{\mathbf{e}}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1) | \psi \rangle \end{aligned}$$

## Chapitre 2

# Processus non-linéaires dans les cristaux massifs

L'optique non-linéaire permet de faire subir à la lumière des transformations qui ne sont pas permises par les éléments rencontrés en optique linéaire. Les « mélanges d'onde », ou couplages des champs permettent de générer de nouvelles longueurs d'ondes. Les couplages liés aux non-linéarités d'ordre deux, ou mélange à trois ondes, permettent par exemple de générer avec une excellente efficacité un faisceau de fréquence double d'un faisceau incident. Par un processus quasiment inverse, la fluorescence paramétrique permet de produire des photons par paires qui manifestent des corrélations largement exploitées par les sources de lumière non-classiques. Nous verrons dans la partie III que nous ferons appel à ces deux processus non-linéaires pour ce travail.

Tous ces processus se produisent d'autant plus significativement que le milieu d'interaction présente une forte susceptibilité non-linéaire et que les conditions, dites d'accord de phase, sont réunies pour rendre constructives les contributions issues de l'ensemble du volume d'interaction. Nous aborderons cette question, puis nous présenterons particulièrement le quasi-accord de phase, technique qui a été retenue dans nos réalisations expérimentales.

### 2.1 Susceptibilité non linéaire et couplage des champs

Dans le vide, l'évolution du champ électromagnétique est linéaire. En vertu du principe de superposition, deux ondes se superposant en un point  $\mathbf{r}$  n'échangent pas d'énergie. En présence d'un milieu matériel, les dipôles du matériau sont excités par le champ, ce qui donne lieu à une polarisation macroscopique  $\mathbf{P}$ . Outre une polarisation linéaire  $\mathbf{P}^{(1)}$  dont les composantes dépendent de la fréquence (dispersion)

$$\check{\mathbf{P}}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \bar{\chi}^{(1)}(\omega) \check{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.1)$$

l'oscillation du champ peut engendrer une réponse non-linéaire des dipôles, qui se traduit par l'apparition d'un terme non-linéaire  $\mathbf{P}^{(\text{NL})}$  dans l'expression de la polarisation :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(\text{NL})}$$

La présence de la non-linéarité  $\mathbf{P}^{(\text{NL})}$  couple les composantes fréquentielles du champ électrique et en fait apparaître de nouvelles. Bien que des couplages non-linéaires d'ordres supérieurs puissent avoir lieu, nous nous limiterons ici au terme d'ordre 2, prépondérant<sup>1</sup>. Ainsi, pour chaque

---

1. dans un milieu dont la symétrie autorise les ordres pairs, comme dans un cristal non centrosymétrique

couple  $(\omega_1, \omega_2)$  de composantes fréquentielles du champ, une nouvelle composante fréquentielle de polarisation apparaît à la fréquence somme :

$$\check{\mathbf{P}}^{(2)}(\mathbf{r}, \omega_1 + \omega_2) = 2\epsilon_0 \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) \check{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_1) \check{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_2)$$

où le facteur 2 provient de la symétrie de  $\overline{\overline{\chi}}^{(2)}$  ( $\overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_2, \omega_1)$ ) qui permet de prendre en compte aussi bien l'apport du couple  $\check{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_1) \check{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_2)$  que du couple  $\check{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_2) \check{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_1)$  à la polarisation non-linéaire.

La susceptibilité non-linéaire  $\overline{\overline{\chi}}^{(2)}$  est donc un tenseur d'ordre 3 qui caractérise la polarisabilité du matériau sous l'effet d'un champ. Afin d'obtenir une expression simple dans l'espace temporel ( $\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ ), nous ne considérerons par la suite que deux composantes du champ :  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ , oscillant à des fréquences voisines de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement. De plus, le spectre de ces champs sera suffisamment peu dispersé autour de ces deux fréquences pour qu'on puisse y considérer  $\overline{\overline{\chi}}^{(2)}$  constant, et ainsi écrire simplement

$$\mathbf{P}_3^{(2)}(\mathbf{r}, t) = 2\epsilon_0 \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$$

où  $\mathbf{P}_3^{(2)}(\mathbf{r}, t)$  est sous-entendu ne présenter qu'une composante fréquentielle voisine de  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . On considère également que le milieu ne présente pas d'absorption.

Nous allons nous intéresser au champ électrique  $\mathbf{E}_3$  rayonné à son tour par la polarisation induite  $\mathbf{P}_3^{(2)}$ . Le milieu nous impose la relation constitutive suivante entre  $\mathbf{E}_3$ , la polarisation totale  $\mathbf{P}_3$  et l'induction électrique  $\mathbf{D}_3$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_3 &= \epsilon_0 \mathbf{E}_3 + \mathbf{P}_3 \\ &= \epsilon_0 \mathbf{E}_3 + \mathbf{P}_3^{(1)} + \mathbf{P}_3^{(2)} \end{aligned}$$

Tous ces champs oscillent au voisinage de  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_3 &= \epsilon_0 \mathbf{E}_3 + \epsilon_0 \overline{\overline{\chi}}^{(1)}(\omega_3) \mathbf{E}_3 + \mathbf{P}_3^{(2)} \\ &= \epsilon_0 n_3^2 \mathbf{E}_3 + 2\epsilon_0 \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \end{aligned}$$

où on a noté  $n_3^2 = 1 + \chi^{(1)}(\omega_3)$ , avec  $\overline{\overline{\chi}}^{(1)} = \overline{\overline{\mathbb{I}}} \chi^{(1)}$ .

En incorporant cette relation constitutive dans les équations de Maxwell, on obtient l'équation de propagation suivante :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_3 - \frac{n_3^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_3}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_3^{(2)}}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{c^2} 2 \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \end{aligned}$$

Considérons des champs identiquement polarisés selon  $\vec{\epsilon}$ , et plaçons nous formellement dans le cadre de l'approximation monochromatique évoquée plus haut en exprimant les champs de la façon suivante :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \check{E}_i^{(+)}(\mathbf{r}, \omega_i) \vec{\epsilon} e^{i\omega_i t} + \text{c.c.}$$

On obtient, avec  $\chi^{(2)} = \vec{\epsilon} \overline{\overline{\chi}}^{(2)} \vec{\epsilon} \vec{\epsilon}$  :

$$\nabla^2 \check{E}_3^{(+)} + \frac{\omega_3^2}{c^2} n_3^2 \check{E}_3^{(+)} = -\frac{\omega_3^2}{c^2} 2 \chi^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \check{E}_1^{(+)} \check{E}_2^{(+)} \quad (2.2)$$

L'objet de cette section sur les processus non linéaires est d'étudier l'interaction de *faisceaux*

se propageant selon une direction privilégiée  $Oz$ , non un champ quelconque. Ceci nous permet de nous placer dans le cadre de l'approximation paraxiale (voir § 1.3.2) et d'écrire

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_i(\mathbf{r})\vec{\epsilon}_i e^{\iota k_i z - \omega_i t}$$

Selon l'expression donnée à  $\mathcal{E}_i(\mathbf{r})$ , on pourra traiter des faisceaux de type différents :

- Des faisceaux gaussiens si  $\mathcal{E}_i(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_i(\rho, z)$  décrit une amplitude de profil gaussien
- Des ondes planes si  $\mathcal{E}_i(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_i(z)$  ( $\mathcal{E}_i$  est alors invariant transversalement)

Nous allons voir comment la polarisation non-linéaire induite dans le milieu peut, sous condition dite « d'accord de phase », faire naître un nouveau faisceau intense à la fréquence somme  $\omega_1 + \omega_2$ . Nous nous intéresserons en particulier au cas où  $\omega_1 = \omega_2$ , qui correspond au phénomène de génération de seconde harmonique.

Nous traiterons dans un premier temps le cas des ondes planes, puis nous verrons quelles corrections sont à apporter aux résultats dans le cas de faisceaux gaussiens.

Nous finirons ces rappels par une introduction à d'autres phénomènes non-linéaires voisins, comme la somme de fréquences ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ) et la fluorescence paramétrique dont le chapitre 6 détaille un approfondissement théorique et le chapitre 7 une étude expérimentale.

## 2.2 Génération de seconde harmonique en ondes planes

On suppose ici que le champ se décompose sous forme d'une onde plane ( $\mathcal{E}_i$  uniquement dépendant de  $z$ ) :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_i(z)\vec{\epsilon}_i e^{\iota k_i z - \omega_i t} \quad (2.3)$$

L'équation 2.2 se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3}{\partial z^2} + \frac{\omega_3^2}{c^2} n_3^2 \mathcal{E}_3 &= -\frac{\omega_3^2}{c^2} 2\chi^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \\ \frac{d^2 \mathcal{E}_3(z)}{dz^2} + 2\iota k_3 \frac{d\mathcal{E}_3(z)}{dz} + \left( \frac{\omega_3^2}{c^2} n_3^2 - k_3^2 \right) \mathcal{E}_3(z) &= -\frac{\omega_3^2}{c^2} 2\chi^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \mathcal{E}_1(z) \mathcal{E}_2(z) e^{\iota(k_1 + k_2 - k_3)z} \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le cas de la génération de seconde harmonique : nous ne sommes plus en présence de deux faisceaux de fréquences différentes et d'intensité  $|\mathcal{E}_1|^2$  et  $|\mathcal{E}_2|^2$ , mais d'un seul faisceau dit « de pompe », d'intensité  $|\mathcal{E}_p|^2$ . Pour conserver la forme de notre expression, on peut considérer qu'on a affaire à une superposition de deux faisceaux identiques d'intensité  $|\mathcal{E}_p|^2/2$ . On peut donc remplacer dans les expressions :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(z) e^{\iota k_1 z} &\longrightarrow \frac{\mathcal{E}_p(z)}{\sqrt{2}} e^{\iota k_p z} \\ \mathcal{E}_2(z) e^{\iota k_2 z} &\longrightarrow \frac{\mathcal{E}_p(z)}{\sqrt{2}} e^{\iota k_p z} \\ \mathcal{E}_3(z) e^{\iota k_3 z} &\longrightarrow \mathcal{E}(z) e^{\iota k z} \\ \omega_1, \omega_2 &\longrightarrow \omega_p \\ \omega_3 &\longrightarrow 2\omega_p \\ \chi^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) &\longrightarrow \chi^{(2)}(2\omega_p; \omega_p, \omega_p) = \chi^{(2)} \end{aligned}$$

avec

$$k_p = \frac{n(\omega_p)\omega_p}{c} \quad k = \frac{n(2\omega_p)2\omega_p}{c}$$



Ces relations de dispersion fixent la vitesse de propagation des ondes dans le milieu non-linéaire.

En utilisant l'approximation de l'enveloppe lentement variable ( $|\frac{d^2\mathcal{E}}{dz^2}| \ll |k\frac{d\mathcal{E}}{dz}|$ ) et en introduisant le désaccord de phase  $\Delta k = 2k_p - k$ , on obtient une équation différentielle du premier ordre décrivant la propagation du champ harmonique généré :

$$\frac{d\mathcal{E}(z)}{dz} = \iota \frac{\omega_p \chi^{(2)}}{n(2\omega_p)c} \mathcal{E}_p^2(z) e^{\iota \Delta k z} \quad (2.4)$$

À ce stade, on pourrait considérer un rendement de génération faible et supposer que  $\mathcal{E}_p$  reste quasi-constant, ce qui donnerait l'évolution suivante :

$$\mathcal{E}(z) = \iota \frac{\omega_p \chi^{(2)}}{n(2\omega_p)c} \mathcal{E}_p^2 z \frac{\sin \frac{\Delta k z}{2}}{\frac{\Delta k z}{2}} \quad (2.5)$$

Le rendement diverge pour  $\Delta k = 0$ , donc il est nécessaire de corriger le résultat pour qu'il soit valide pour des rendements non négligeables, où on ne peut pas considérer le champ de pompe constant. Il faut alors reprendre le raisonnement précédent afin d'écrire l'équation symétrique de (2.4), c'est à dire celle qui décrit la variation de l'amplitude  $\mathcal{E}_p(z)$  de la pompe sous l'effet de la polarisation non-linéaire induite par le champ harmonique  $\mathcal{E}(z)$  :

$$\frac{d\mathcal{E}_p(z)}{dz} = \iota \frac{\omega_p \chi^{(2)}}{n(\omega_p)c} \mathcal{E}(z) \mathcal{E}_p^*(z) e^{-\iota \Delta k z} \quad (2.6)$$

On peut montrer [Boy08] que, lorsque le désaccord de phase est nul ( $\Delta k = 0$ ), les deux équations (2.4) et (2.6) couplées permettent d'obtenir la solution suivante pour les deux inconnues  $\mathcal{E}(z)$  et  $\mathcal{E}_p(z)$  :

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(z)| &= \sqrt{\frac{n(\omega_p)}{n(\omega_p)}} |\mathcal{E}_p(0)| \tanh \gamma_0 z \\ |\mathcal{E}_p(z)| &= |\mathcal{E}_p(0)| \operatorname{sech} \gamma_0 z \end{aligned} \quad (2.7)$$

où on a noté  $\gamma_0$  le coefficient de gain défini par :

$$\gamma_0 = \frac{\omega_p \chi^{(2)}}{n(\omega_p)c} \sqrt{\frac{I_0}{2\epsilon_0 c n(2\omega_p)}} \quad (2.8)$$

Le rendement de conversion s'exprime donc par

$$\eta(z) = \tanh^2 \gamma_0 z \quad (2.9)$$

La longueur caractéristique  $\ell = \frac{1}{\gamma_0}$  correspond à un rendement de 58 %.

## 2.3 Quasi-accord de phase

Nous avons supposé, dans le paragraphe précédent, que l'accord de phase pouvait être réalisé ( $\Delta k = 0$ ), c'est à dire que les dipôles excités par le champ à  $\omega_p$  pouvaient rayonner tous en phase à la fréquence  $2\omega_p$ . Cette condition n'est pas naturellement satisfaite en général, car cela suppose l'égalité des vitesses de phase  $v_\phi$  à  $\omega_p$  et à  $2\omega_p$  :

$$\Delta k = 2k_p - k = \frac{2n(\omega_p)\omega_p}{c} - \frac{n(2\omega_p)2\omega_p}{c}$$

Pour que  $\Delta k = 0$ , il faudrait que  $n(\omega_p) = n(2\omega_p)$ , c'est à dire  $v_\phi(\omega_p) = v_\phi(2\omega_p)$ . Mais le milieu est en général dispersif, et cette égalité n'est pas satisfaite.

Pour réaliser l'accord de phase, il existe une méthode tirant partie de la biréfringence naturelle de certains cristaux, bien décrite par exemple dans la référence [Boy08]. Cette méthode d'accord de phase présente certains inconvénients :

- En raison de la nature tensorielle de l'indice de réfraction, elle impose une propagation selon une direction appropriée par rapport à l'axe optique du cristal, ainsi que des polarisations bien définies. Ces direction et polarisation ne sont *a priori* pas celles qui favorisent une non-linéarité maximale, celle-ci étant également de nature tensorielle.
- La biréfringence cause un décalage<sup>2</sup> entre des faisceaux polarisés différemment, en raison du fait que le vecteur de Poynting n'est généralement pas parallèle au vecteur d'onde. Le recouvrement spatial diminue avec la longueur d'interaction, ce qui limite l'efficacité du processus. Cette solution d'accord de phase est donc limitée aux cas où une petite longueur d'interaction est suffisante.

La méthode du « quasi-accord de phase », que nous allons maintenant voir, pallie ces inconvénients et se révélera plus adaptée aux expériences décrites dans la suite de ce document.

Dans un processus non-linéaire de génération de seconde harmonique où l'accord de phase n'est pas satisfait, l'amplitude du faisceau harmonique n'est pas croissante avec  $z$  de façon monotone comme dans l'équation (2.7). On peut montrer qu'elle présente une périodicité caractérisée par une longueur de cohérence  $L_c$  après laquelle l'échange d'énergie dominant s'inverse : l'harmonique perd de l'énergie au profit de la pompe. La démonstration analytique de l'effet d'une telle périodicité dans le cas d'un fort rendement a été faite par Armstrong et collaborateurs [ABDP62] et nous nous contenterons ici de montrer son effet dans l'approximation de la pompe constante. La période optimale est identique dans les deux régimes.

L'idée du quasi accord de phase est qu'il suffit d'inverser le signe de la susceptibilité non-linéaire  $\chi^{(2)}$  lorsque le couplage d'énergie change de sens et se fait au détriment de l'harmonique, c'est à dire à partir de  $L_c$ , puis tous les  $2L_c$  (voir Fig. 2.1), de sorte que l'amplitude du faisceau d'harmonique soit toujours croissante. Le résultat obtenu sur cette figure serait obtenu avec une inversion parfaite correspondant à une fonction créneau :

$$\chi_{\text{QAP}}^{(2)}(z) = \chi^{(2)} \text{signe} \left( \cos 2\pi \frac{z}{2L_c} \right)$$

qu'on peut écrire sous la forme d'une série de Fourier :

$$\chi_{\text{QAP}}^{(2)}(z) = \chi_Q^{(2)} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} e^{imKz} = \chi_Q^{(2)} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impair}}}^{\infty} x_m e^{imKz} + c.c. = \chi_{\text{QAP}+}^{(2)}(z) + \chi_{\text{QAP}-}^{(2)}(z)$$

où on a posé

$$\chi_Q^{(2)} = \frac{2}{\pi} \chi^{(2)} \quad ; \quad K = \frac{2\pi}{2L_c} \quad ; \quad x_m = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \quad ; \quad \chi_{\text{QAP}-}^{(2)} = \left( \chi_{\text{QAP}+}^{(2)} \right)^*$$

et remarqué que  $x_{-m} = x_m$ .

L'équation différentielle (2.2) à partir de laquelle on obtient les équations couplées pour les amplitudes non réelles  $\mathcal{E}$  ne s'applique pas au terme complexe conjugué  $\chi_{\text{QAP}-}^{(2)}$ . Dans cette même équation, si  $\chi^{(2)} = \chi_{\text{QAP}}^{(2)}$ , il faut récrire les équations couplées avec  $\chi_{\text{QAP}+}^{(2)}$ . Si l'on ne s'intéresse

---

2. *walk-off* spatial

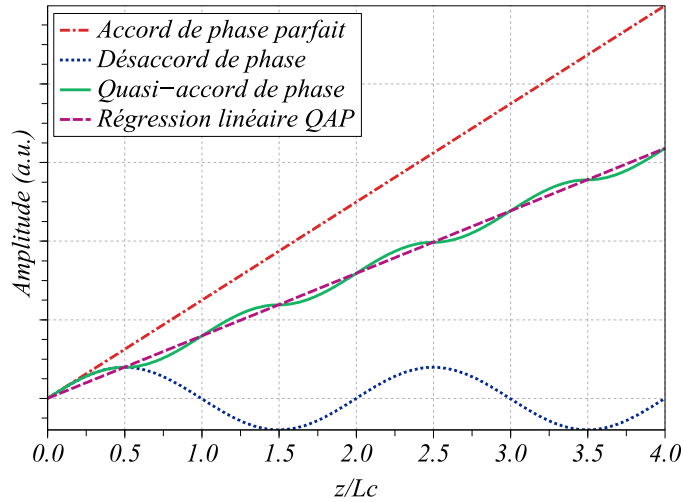


FIGURE 2.1 – Idée sous-jacente au quasi-accord de phase : l'inversion de  $\chi^{(2)}$  afin de rendre croissante l'énergie du faisceau généré.

qu'à la composante de degré  $m$ , on obtient

$$\frac{d\mathcal{E}(z)}{dz} = \iota \frac{\omega_p \chi_Q^{(2)} x_m}{n(\omega)c} \mathcal{E}_p(z)^2 e^{-\iota(\Delta k + mK)z} \quad (2.10)$$

Selon l'ordre  $m$ , une valeur  $K$  différente permet de satisfaire l'accord de phase. Cependant, comme  $|x_m| \propto \frac{1}{m}$ , il est préférable d'optimiser  $K$  pour le premier ordre afin d'avoir le couplage optimal. Pour  $m = 1$ , la période du motif d'inversion de la susceptibilité est donc de  $\frac{2\pi}{K}$ , c'est à dire  $2L_c$ , ce qui rejoint l'idée intuitive que nous avons suggérée au début de cette section.

Idéalement, il faudrait donc réaliser un motif d'inversion de  $\chi^{(2)}$  sinusoïdal. En pratique, les diverses solutions existantes ne le permettent pas parfaitement : historiquement, elles ont consisté d'abord en un simple empilement de lames de cristal polies et assemblées (de CdTe [PCS76], GaAs [SHS76] ou LiNbO3 [TMA76] par exemple), et plus récemment en une inversion des domaines ferroélectriques du niobate de lithium lors de la croissance du cristal [FK85]. Un brevet, déposé en 1993 par Yamada *et al.* [YK93] décrit une méthode pour retourner les domaines après la croissance en appliquant une tension intense entre des électrodes juxtaposées, polarisées alternativement avec le pas souhaité. Cette technique d'inversion se traduit par le préfixe *Periodically Poled-* (PP) utilisé pour différents types de cristaux ferroélectriques (PPLN pour le PP-LiNbO<sub>3</sub>, PPKTP, PPSLT, etc.).

Le motif résultant n'étant pas sinusoïdal (voir Figure 2.2), il existe des couplages entre onde de pompe et harmonique liés aux ordres supérieurs du motif, qui participent également au processus d'échange d'énergie, mais de manière non constructive puisqu'ils ne satisfont pas  $\Delta k - mK = 0$  pour  $m > 1$ . Leur contribution est donc sans effet notable par rapport à l'ordre 1 après une longueur  $z$  suffisamment grande.

La méthode du quasi-accord de phase présente l'avantage de pouvoir s'appliquer à tout matériau dont on sait orienter la susceptibilité non-linéaire. Elle permet de privilégier le choix d'une valeur élevée de cette susceptibilité, avec beaucoup moins de contraintes que pour l'accord de phase par biréfringence : la direction de propagation et la polarisation des faisceaux peuvent être choisies de sorte à utiliser la plus grande valeur du tenseur  $\overline{\chi}^{(2)}$ , et si le cristal ne présente pas de biréfringence dans cette configuration, l'absence de décalage transverse entre les faisceaux

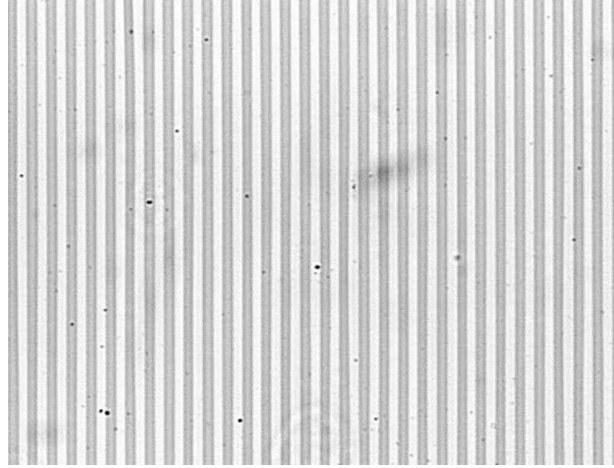


FIGURE 2.2 – Photo d'une zone d'un cristal de PPLN illustrant la forme du motif d'inversion du signe de sa susceptibilité non-linéaire. (Image tirée de <http://www.srico.com/node/8>, société SRICO)

(*walk-off*) autorise à utiliser une grande longueur d'interaction, favorisant de forts rendements. Le coefficient  $\frac{2}{\pi}$  entre la susceptibilité naturelle  $\chi^{(2)}$  et la susceptibilité effective  $\chi_Q^{(2)}$  constitue un inconvénient largement compensé par tous ces avantages.

## 2.4 Génération de seconde harmonique en faisceaux gaussiens

Le quasi accord de phase permet de réaliser des processus non-linéaires sur de grande longueurs d'interaction. Pourquoi un processus comme la génération de seconde harmonique ne pourrait-il pas alors atteindre dans tous les cas un rendement de 1 en augmentant suffisamment cette longueur ?

Nous avons vu précédemment (§ 1.3.2) que l'onde plane transverse exprimée par 2.3 correspond à un faisceau idéal qui ne peut avoir de sens physique que dans le cadre d'une approximation locale. Sur une grande longueur, ce formalisme ne peut pas rendre compte des phénomènes car il ne rend pas compte de la divergence du faisceau.

L'amplitude d'un faisceau réel, de profil transverse gaussien et focalisé en  $z = 0$  (que la focalisation soit forte ou non) est très bien décrite par la forme

$$\mathcal{E}(\rho, z) = \hat{\mathcal{E}}(z)u(\rho, z)\sqrt{\frac{\pi}{2}}w_0 \quad (2.11)$$

où  $u(\rho, z)$  est définie par l'équation (1.22) page 24, et le facteur  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}w_0$  est introduit de sorte que  $\hat{\mathcal{E}}(z)$  désigne l'amplitude maximum du champ, c'est à dire son amplitude au point de focalisation ( $\rho = 0, z = 0$ )<sup>3</sup>.

L'équation (2.9) indique que le rendement de génération de seconde harmonique dépend de l'intensité du faisceau de pompe (à travers le gain  $\gamma_0$ ) aussi bien que de la longueur d'interaction  $L$ . À puissance de pompe donnée (qui est une contrainte matérielle), l'intensité est inversement proportionnelle à la section du faisceau ( $I = P/S$ ). L'exigence de grande intensité impose donc une forte focalisation, qui engendre une forte divergence en contradiction avec la nécessité d'une grande longueur d'interaction. L'optimisation du rendement procède donc d'un compromis entre longueur d'interaction et intensité.

3.  $\int |u|^2$  est normalisée en intensité ;  $u(0,0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}w_0 = 1$ . Remarque : bien que  $\hat{\mathcal{E}}$  dépende de  $z$ , il désigne bien l'amplitude au waist ( $z = 0$ ) d'un faisceau spatialement décrit par  $u$ . La variation de  $\hat{\mathcal{E}}$  en  $z$  est uniquement due à l'amplification non-linéaire, et pas à la divergence du faisceau avec  $z$  qui elle est comprise dans  $u$ .

Le problème de l'accord de phase empêche de simplement corriger les résultats obtenus en ondes planes en considérant, par exemple, une section moyenne dans la longueur d'interaction. En raison de la divergence, donc de la présence de vecteurs d'ondes multiples et non colinéaires, l'accord de phase ne peut être simplement obtenu en tout point  $\mathbf{r}$  du volume d'interaction. Contrairement au cas de l'équation en ondes planes (2.7) où on pouvait considérer  $\Delta k(\mathbf{r}) \equiv 0, \forall \mathbf{r}$  et obtenir une expression analytique exacte, on doit en faisceaux gaussiens considérer que le désaccord de phase n'est non seulement pas nul, mais aussi non homogène.

**Forme du faisceau d'harmonique** — Avant même de résoudre quantitativement le problème, que peut-on dire de la forme du faisceau gaussien harmonique ? Les paramètres  $(z_R, w_0)$  étant liés par  $\lambda$ , dans quelle mesure l'un ou l'autre change-t-il lorsque  $\lambda$  est divisée par deux ? Lorsque la longueur de Rayleigh est conservée ( $z'_R = z_R$ ), les conditions suivantes sont réunies :

- $R'(z) = R(z)$  : sur toute la longueur d'interaction, le rayon de courbure des fronts d'onde des deux faisceaux est identique
- $\psi'(z) = \psi(z)$  : sur toute la longueur d'interaction, le déphasage de Gouy des deux faisceaux est identique
- $w'(z) = \frac{w(z)}{\sqrt{2}}$  : sur toute la longueur d'interaction, le faisceau harmonique est plus fin d'un facteur  $\sqrt{2}$  constant

Les deux premiers points assurent les conditions d'accord de phase optimales. Le troisième est compatible avec le fait que l'amplitude de l'harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude du fondamental : un profil gaussien d'écart-type  $w$  élevé au carré est un profil d'écart-type  $\frac{w}{\sqrt{2}}$ .

Outre son intensité liée au rendement de conversion et sa longueur d'onde moitié, c'est donc naturellement que les caractéristiques du faisceau d'harmonique prendront celles d'un faisceau de même longueur de Rayleigh et de même divergence, focalisé au même point que le fondamental.

**Les conditions de Boyd & Kleinman** — Dans un article paru en 1968, BOYD et KLEINMAN [BK68] sont parvenus à des conditions simples permettant d'atteindre un rendement optimal en régime de faisceaux gaussiens pour une longueur de cristal  $L$  donnée :

$$\frac{L}{2z_r} = 2,84 \quad \Delta k L = 3,2 \quad (2.12)$$

Cela fixe les conditions expérimentales optimales en terme de focalisation (à travers la longueur de Rayleigh  $z_r$ ) pour cette longueur de cristal. Le rendement n'évolue plus proportionnellement à  $\tanh^2 \gamma_0 L$  comme dans le cas des ondes planes, mais d'une manière plus complexe car lorsque  $L$  change, la configuration expérimentale doit changer également pour rester dans ces conditions optimales, ce qui modifie les paramètres en jeu dans la valeur de  $\gamma_0$ .

**Discussion de l'optimalité des conditions de Boyd & Kleinman** — Les conditions de Boyd & Kleinman permettent une solution optimale en faisceaux gaussiens, mais avec une correction seulement globale de la phase de Gouy. La phase de Gouy représente le déphasage du faisceau gaussien par rapport à une onde plane (voir § 1.3.2). Une valeur de  $\Delta k$  fixe, c'est à dire un déphasage linéaire en  $z$ , permet de compenser une phase de Gouy linéaire. Pour la phase de Gouy, le déphasage n'est approximativement linéaire qu'aux faibles focalisations. La Figure 2.3 représente le déphasage accumulé au cours de la propagation dans le cristal. On constate que pour le paramètre de focalisation recommandé par Boyd & Kleinman, contrairement à ce qu'on rencontre en focalisation faible ( $\frac{L}{2z_R} = 1$  par exemple), la phase de Gouy s'approche peu d'une fonction linéaire. Le désaccord de phase qu'ils préconisent (en pointillés) compense en moyenne la phase de Gouy, ce qui leur permet de parvenir au rendement optimal.

En 2008, Major et ses collaborateurs [MGS08] ont proposé de compenser plus exactement la phase de Gouy dans le cadre du quasi-accord de phase en faisant varier le pas d'inversion de la susceptibilité non-linéaire au long du cristal. Ceci leur a permis d'atteindre un rendement optimal pour une focalisation plus forte ( $\frac{L}{2z_R} = 3,32$ ). Mais le rendement n'est meilleur que de 3,5 % par rapport aux conditions de Boyd & Kleinman.

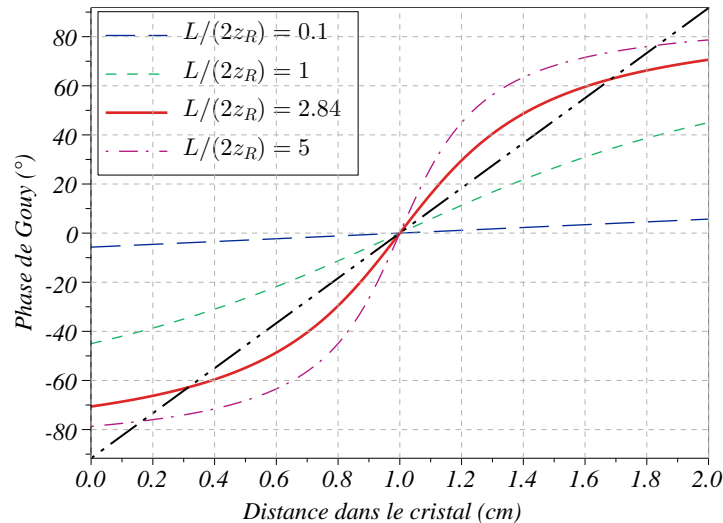


FIGURE 2.3 – Phase de Gouy d'un faisceau gaussien pour différents paramètres de focalisation  $\frac{L}{2z_R}$  dans un cristal de longueur 2 cm. La droite représente le déphasage accumulé de  $\Delta k = 3,2/L$  que préconisent BOYD & KLEINMAN [BK68] pour un paramètre de focalisation de 5,68. On constate qu'elle ne compense qu'en moyenne la phase de Gouy (courbe en traits pleins) effective avec cette condition de focalisation.

On peut également se demander, avant de conclure ce paragraphe sur la génération de seconde harmonique en faisceaux gaussiens, s'il serait possible d'atteindre un meilleur rendement avec un profil autre que gaussien. C'est la question que s'est posée Magni en 2000 [Mag00]. Sa conclusion est qu'il existe un profil non-gaussien, mais quasi-gaussien, qui offre un rendement supérieur de 2 % seulement par rapport à un profil gaussien, avec les conditions d'accord de phase les plus adaptées. Ce gain est à comparer aux importants efforts expérimentaux qui seraient nécessaires pour travailler avec ce type de faisceaux.

## 2.5 Fluorescence paramétrique

### 2.5.1 Principe

La fluorescence paramétrique est le phénomène symétrique de la somme de fréquences : une onde à une fréquence  $\omega_3$  donne lieu à deux ondes de fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dont la somme vaut  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ .

On rappelle les relations suivantes valables pour une onde plane monochromatique dans le

mode  $\ell$  :  $(\omega_\ell, \mathbf{k}_\ell, \vec{\epsilon}_\ell)$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \vec{\epsilon}_\ell \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} && \text{potentiel vecteur complexe} \\
\mathbf{E}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \vec{\epsilon}_\ell \mathcal{E}_\ell(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} && \text{champ électrique complexe} \\
&= \iota \omega_\ell \vec{\epsilon}_\ell \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} \\
\mathcal{E}_\ell(\mathbf{r}) &= \iota \omega_\ell \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) && \text{amplitude du champ électrique} \\
a_\ell(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2\epsilon_0 n_\ell^2 \omega_\ell L^3}{\hbar}} \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) && \text{amplitude adimensionnelle du champ électromagnétique}
\end{aligned}$$

Les équations couplées non-linéaires classiques, qui portent sur l'amplitude du champ électrique  $\mathcal{E}_\ell$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} &= \iota \frac{\omega_1 \chi^{(2)}}{n_1 c} \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_3 e^{-i\Delta k z} \\
\frac{d\mathcal{E}_2}{dz} &= \iota \frac{\omega_2 \chi^{(2)}}{n_2 c} \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_3 e^{-i\Delta k z} \\
\frac{d\mathcal{E}_3}{dz} &= \iota \frac{\omega_3 \chi^{(2)}}{n_3 c} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{i\Delta k z}
\end{aligned}$$

En utilisant les relations précédentes, on obtient les équations portant sur la variable adimensionnelle  $a_\ell$  :

$$\begin{aligned}
\frac{c}{n_1} \frac{da_1}{dz} &= \gamma a_2^* a_3 e^{-i\Delta k z} \\
\frac{c}{n_2} \frac{da_2}{dz} &= \gamma a_1^* a_3 e^{-i\Delta k z} \\
\frac{c}{n_3} \frac{da_3}{dz} &= -\gamma a_1 a_2 e^{i\Delta k z}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

avec le facteur de couplage  $\gamma = \chi^{(2)} \sqrt{\frac{\hbar \omega_1 \omega_2 \omega_3}{2\epsilon_0 L^3 n_1^2 n_2^2 n_3^2}}$ .

Contrairement à la génération de seconde harmonique qui est un processus classique apparaissant directement à partir de ces équations couplées, la fluorescence paramétrique relève d'un processus spontané qui ne peut être entièrement décrit que dans le cadre de la théorie quantique. Louisell, Yariv et Siegman ont montré en 1961 comment, en l'absence d'onde initiale à  $\omega_1$  ou  $\omega_2$ , ce processus pouvait être initié par les fluctuations quantiques du vide [LYS61], ce qu'on peut comprendre en quantifiant ces équations en adoptant le point de vue de Heisenberg.

**Résolution en représentation de Heisenberg** — Après quantification, les variables  $a_\ell$  sont remplacées les opérateurs  $\hat{a}_\ell$  satisfaisant la relation de commutation (cf. § 1.2 p.17)

$$a_\ell \longrightarrow \hat{a}_\ell \quad \left[ \hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^\dagger \right] = \delta_{\ell\ell'}$$

et le système 2.13 devient :

$$\begin{aligned}
\frac{c}{n_1} \frac{d\hat{a}_1}{dz} &= \gamma \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 e^{-i\Delta k z} \\
\frac{c}{n_2} \frac{d\hat{a}_2}{dz} &= \gamma \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 e^{-i\Delta k z} \\
\frac{c}{n_3} \frac{d\hat{a}_3}{dz} &= -\gamma \hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{i\Delta k z}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

À moins de stimuler le processus paramétrique en injectant un signal faible à  $\omega_1$  ou  $\omega_2$  (on parle alors d'*amplification paramétrique* par différence de fréquences) ou en plaçant le dispositif en cavité résonante pour le mode qu'on souhaite stimuler et/ou son complémentaire (*oscillation paramétrique* présentant un effet de seuil), le rendement de génération reste très faible, si bien qu'on peut considérer le faisceau de pompe non dépeuplé de ses photons, c'est à dire sous forme d'un état cohérent d'amplitude  $\alpha_3 = |\alpha_3| e^{-i\omega_3 t}$ . En supposant l'accord de phase parfait ( $\Delta k = 0$ ), le système 2.14 se réécrit

$$\begin{aligned}\frac{c}{n_1} \frac{d\hat{a}_1}{dz} &= \gamma \alpha_3 \hat{a}_2^\dagger \\ \frac{c}{n_2} \frac{d\hat{a}_2}{dz} &= \gamma \alpha_3 \hat{a}_1^\dagger\end{aligned}$$

et a pour solution

$$\begin{aligned}\hat{a}_1(z) &= \hat{a}_1(0) \cosh(gz) + \hat{a}_2^\dagger(0) \sinh(gz) \\ \hat{a}_2(z) &= \hat{a}_2(0) \cosh(gz) + \hat{a}_1^\dagger(0) \sinh(gz)\end{aligned}$$

avec  $g = \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{c} \gamma |\alpha_3|$

L'opérateur nombre de photons dans le mode 1 s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{N}_1(z) &= \hat{a}_1^\dagger(z) \hat{a}_1(z) \\ &= \hat{N}_1(0) \cosh^2(gz) + \left( \hat{N}_2(0) + 1 \right) \sinh^2(gz) \\ &\quad + \left[ \hat{a}_1^\dagger(0) \hat{a}_2^\dagger(0) - \hat{a}_1(0) \hat{a}_2(0) \right] \cosh(gz) \sinh(gz)\end{aligned}$$

et de même pour le mode 2.

Lorsqu'il n'y a initialement aucun photon dans les modes 1 et 2, le nombre de photons dans chaque mode  $\ell = 1, 2$  vaut, au bout d'une longueur d'interaction  $z$

$$\langle \hat{N}_\ell(z) \rangle = \langle 0_1 0_2 | \hat{N}_\ell(z) | 0_1 0_2 \rangle = \sinh^2(gz)$$

Pour de faibles efficacités ( $gz \ll 1$ ), on a

$$\langle \hat{N}_\ell(z) \rangle \approx g^2 z^2 = |\mathcal{E}_3|^2 \frac{\omega_1 \omega_2}{n_1 n_2 c^2} \left( \chi^{(2)} \right)^2 z^2$$

Ce résultat non nul provient de la non-commutativité des opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ , c'est à dire directement de l'opération de quantification des équations couplées classiques.

Pour obtenir une description explicite de l'état du système lors d'une interaction paramétrique, il est nécessaire de passer en représentation de Schrödinger.

**Résolution en représentation de Schrödinger** — En faisant le changement de variable  $z = ct/n_\ell$ , les équations couplées 2.14 deviennent

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}_1}{dt} &= \gamma \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 \\ \frac{d\hat{a}_2}{dt} &= \gamma \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 \\ \frac{d\hat{a}_3}{dt} &= -\gamma \hat{a}_1 \hat{a}_2\end{aligned}$$



et peuvent s'écrire sous la forme d'une équation d'évolution de Heisenberg

$$\frac{d\hat{a}_\ell}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_\ell, \hat{\mathcal{H}}]$$

avec un Hamiltonien d'interaction :

$$\hat{\mathcal{H}} = i\hbar\gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger) = i\hbar\gamma \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + H.c. \quad (2.15)$$

ou encore, en considérant l'onde de pompe dans un état cohérent d'amplitude  $\alpha_3$  :

$$\hat{\mathcal{H}} = i\hbar\gamma |\alpha_3\rangle (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{-i\omega_3 t} - \hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{i\omega_3 t})$$

Dans l'approximation de l'onde tournante, l'Hamiltonien est le suivant :

$$\hat{\mathcal{H}}' = i\hbar\gamma |\alpha_3\rangle (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2)$$

En l'absence de photons dans les modes 1 et 2 à l'état initial, l'état après un temps d'interaction  $t$  est :

$$|\psi\rangle = e^{\frac{\hat{\mathcal{H}}' t}{i\hbar}} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = e^{\gamma |\alpha_3| t (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2)} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$$

Cette expression se simplifie en faisant appel à un théorème de désintrication [ACGT72] [Pop05] initialement énoncé par Feynman [Fey51] en 1951 :

$$e^{\theta (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2)} = e^{\Gamma \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - g (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1)} e^{-\Gamma \hat{a}_1 \hat{a}_2} \quad (2.16)$$

où  $\Gamma = \tanh \theta$  et  $g = \ln \cosh \theta$ .

L'état final s'écrit alors :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= e^{-g} e^{\Gamma \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\ &= \cosh^{-1}(\gamma |\alpha_3| t) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(\gamma |\alpha_3| t) |n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dans le cas où  $\gamma |\alpha_3| t \ll 1$ , les termes en  $\sinh^n$  ( $n > 1$ ) sont négligeables. L'expression se réduit alors à :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &\approx |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \sinh(\gamma |\alpha_3| t) |1\rangle_1 |1\rangle_2 \\ &\approx |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \gamma |\alpha_3| t |1\rangle_1 |1\rangle_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

ce qu'on retrouve simplement en ne conservant que les premiers termes des développements limités de  $e^{\gamma |\alpha_3| t \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger}$  et  $e^{-\gamma |\alpha_3| t \hat{a}_1 \hat{a}_2}$ , qui interviennent sous forme de produit :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &\approx (\mathbf{1} + \gamma |\alpha_3| t \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger) (\mathbf{1} - \gamma |\alpha_3| t \hat{a}_1 \hat{a}_2) |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\approx (\mathbf{1} + \gamma |\alpha_3| t \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \gamma |\alpha_3| t \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \gamma^2 |\alpha_3|^2 t^2 \hat{N}_1 \hat{N}_2) |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\approx |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \gamma |\alpha_3| t |1\rangle_1 |1\rangle_2 \end{aligned}$$

Cette expression s'interprète comme la superposition d'une absence de génération avec une probabilité proche de 1 et d'une création de paire avec une probabilité proche de  $(\gamma |\alpha_3| t)^2$ , c'est à dire proportionnelle à l'intensité de l'onde de pompe et au carré du temps d'interaction. Lorsque  $\gamma |\alpha_3| t$  n'est pas petit, des paires multiples sont produites avec les probabilités  $p_n$  non négligeables (calculées au § 4.2), et ce développement n'est plus valable. Toutefois, celui-ci rend

compte simplement du cas généralement souhaitable pour les applications, où l'on cherche à éviter la présence de paires multiples.

**Interprétation corpusculaire** — L'Hamiltonien 2.15 s'interprète comme la concurrence de deux phénomènes conjugués :

- l'annihilation d'un photon 3 et la création des photons 1 et 2,
- l'annihilation des photons 1 et 2 et la création d'un photon 3.

Le photon de pompe est ici le photon « 3 », c'est à dire dans le mode  $(\omega_3, \mathbf{k}_3, \vec{\epsilon}_3)$  d'énergie  $\hbar\omega_3$ , d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}_3$  et de polarisation  $\vec{\epsilon}_3$ . Un processus de scission en deux photons dans les modes  $(\omega_1, \mathbf{k}_1, \vec{\epsilon}_1)$  et  $(\omega_2, \mathbf{k}_2, \vec{\epsilon}_2)$  (ainsi que le processus conjugué, réciproque) peut se produire à condition de satisfaire trois relations de conservation :

- conservation de l'énergie
- conservation de l'impulsion
- conservation du moment cinétique

Le milieu d'interaction joue un rôle dans le respect de ces trois principes. L'interaction paramétrique dans ce milieu est élastique : la conservation de l'énergie s'écrit  $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$ . Des conditions d'accord de phase bien choisies assurent la conservation de l'impulsion : dans le cas de l'accord de phase par biréfringence, la conservation est naturellement satisfaite lorsque le cristal est bien choisi et bien orienté ( $\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{k}_3$ ). Pour un quasi-accord de phase, la variation spatiale de la susceptibilité non-linéaire effective  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}$  constitue un réseau qui apporte un vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  au bilan de l'interaction non-linéaire de sorte que la conservation de l'impulsion s'écrit  $\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 + \hbar\mathbf{K} = \hbar\mathbf{k}_3$ . En ce qui concerne le moment cinétique<sup>4</sup>, c'est la nature tensorielle de la susceptibilité non-linéaire qui assure le lien entre les trois polarisations  $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$  : on a  $\vec{\epsilon}_3 \overline{\chi}^{(2)} \vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_2 = \chi_{123}^{(2)}$ . En effet, les transitions dipolaires (virtuelles, puisque nous nous plaçons dans le cadre de fluorescence *paramétrique*) sont possibles pour différentes combinaisons de polarisation. La valeur de la composante  $\chi_{123}^{(2)}$  rend compte de la probabilité de cette séquence de transitions dipolaires (qui dépend également des trois fréquences), c'est à dire de la faculté du milieu à coupler ces trois polarisations.

**Généralisation au cas d'une génération multimode** — Tandis que la génération de seconde harmonique est un processus stimulé où tous les photons générés sont émis dans un même mode, la fluorescence, en tant que phénomène spontané, est naturellement multimode et tout autre couplage sous un Hamiltonien du type  $\hat{\mathcal{H}}' = i\hbar\gamma'\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\alpha_3 + H.c.$  est possible, avec une valeur du facteur de couplage  $\gamma'$  différente.<sup>5</sup> De manière générale, l'Hamiltonien de couplage prend plutôt la forme [HM85] :

$$\hat{\mathcal{H}} = i\hbar \sum_{\ell_1, \ell_2} \gamma(\omega_{\ell_1}, \omega_{\ell_2}, \omega_3; \vec{\epsilon}_{\ell_1}, \vec{\epsilon}_{\ell_2}, \vec{\epsilon}_3) \alpha_3 \hat{a}_{\ell_1}^\dagger \hat{a}_{\ell_2}^\dagger + H.c$$

Mais ce sont surtout les conditions d'accord de phase qui limitent les modes possibles en imposant des contraintes en termes d'impulsion et de spectre. C'est ce que nous allons voir ci-après dans le cadre d'une illustration en quasi-accord de phase où les photons de pompe proviendront d'une onde plane monochromatique.

4. Voir note 3, page 19

5. En s'éloignant de  $\Delta\omega$  autour de la dégénérescence  $\omega_0 = \omega_3/2$ , le facteur de couplage  $g \propto \chi^{(2)}\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3}$  augmente :

$$(\omega_0 + \Delta\omega)(\omega_0 - \Delta\omega)2\omega_0 = 2\omega_0^3(1 + (\Delta\omega/\omega_0)^2) > 2\omega_0^3$$

Mais d'autre part,  $\chi^{(2)}(2\omega_0; \omega_0 + \Delta\omega, \omega_0 - \Delta\omega)$  diminue plus rapidement avec  $\Delta\omega$ , ce qui rend en général  $g$  plus grand à la dégénérescence.

Remarquons que l'approximation monochromatique est valable dans le cas d'une pompe continue ou d'impulsions longues. On pourra se reporter à l'étude de Ou en 1997 [Ou97] pour le cas d'une onde de pompe plane dont le spectre est significativement élargi par la brièveté des impulsions.

Le caractère fortement multimode de l'émission spontanée soulève le problème essentiel de la collection d'un tel rayonnement ; en particulier de son couplage dans une fibre optique. Le problème de la recherche d'une collection optimale, critique pour les applications de la fluorescence paramétrique à des sources de paires de photons jumeaux (cf. Chap. 5), nécessite un traitement approfondi. Le chapitre 6 de ce document présentera une étude que nous avons effectuée en ce sens. Cette fois, le faisceau de pompe n'y sera pas considéré comme une onde plane mais comme un faisceau gaussien, et la multiplicité des vecteurs d'onde y sera pleinement prise en compte, dans une description locale de l'interaction paramétrique. Le caractère impulsionnel de la pompe y sera aussi considéré.

### 2.5.2 Effet du désaccord de phase : illustration en quasi-accord de phase

Contrairement à la génération de seconde harmonique, les photons à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne sont pas nécessairement dans le même mode. En modifiant les conditions d'accord de phase par rapport à la génération de seconde harmonique, on peut les rendre non-dégénérés ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ), ou non-colinéaires ( $\mathbf{k}_1 \nparallel \mathbf{k}_2$ ). Nous illustrons ici, dans le cadre du quasi-accord de phase, comment une perturbation des conditions d'accord de phase influe sur un processus initialement dégénéré et colinéaire. On considère ici que le milieu permet l'interaction de trois ondes identiquement polarisées. On considère également que le photon de pompe à  $\omega_3$  provient d'une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_3$ .

Lorsque le quasi-accord de phase est réalisé, nous avons la relation générale suivante :

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{K} = \mathbf{k}_3 \quad (2.19)$$

qui s'écrit, projetée sur l'axe de propagation de la pompe  $\mathbf{k}_3$  :

$$\omega_3 n_3 - \omega_1 n_1 \cos \theta_1 - \omega_2 n_2 \cos \theta_2 - Kc = 0 \quad (2.20)$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont définis sur la Figure 2.4.

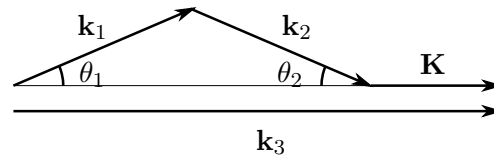


FIGURE 2.4 – Notations pour un accord de phase dans le cas général : colinéaire si  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , non colinéaire sinon.

On considère cette condition satisfaite à une température de cristal  $T_0$  pour un processus colinéaire et dégénéré en fréquence :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = \omega_0 = \omega_3/2 \\ n_1 &= n_2 = n_0 = n(\omega_0, T_0) \\ \theta_1 &= \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

alors  $K$  doit valoir  $K = \frac{2\omega_0}{c} [n(2\omega_0, T_0) - n(\omega_0, T_0)]$  et restera fixé par la suite.

Pour modifier les conditions d'accord de phase, on fait varier la température du cristal. On prend à titre d'exemple un cristal de niobate de lithium dopé à 5% d'oxyde de magnésium

(5 %MgO :LiNbO<sub>3</sub>) dont l'indice de réfraction dépend de la fréquence et de la température d'après les coefficients de Sellmeier déterminés par Gaye et ses collaborateurs [GOS<sup>+</sup>08] en 2008 et illustrés par la Figure 2.5.

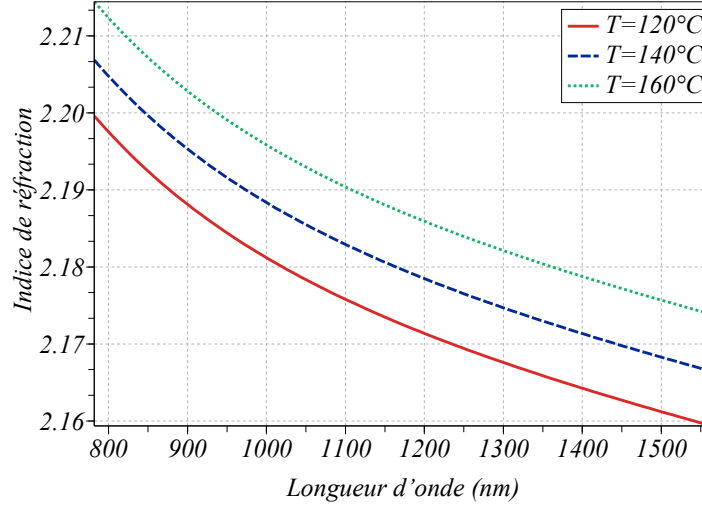


FIGURE 2.5 – Indice de réfraction du 5%MgO :LiNbO<sub>3</sub> en fonction de la longueur d'onde à différentes températures selon Gaye et al. [GOS<sup>+</sup>08]

Pour une température  $T'$  différente de  $T_0$ , on a, en notant par un « prime » les paramètres susceptibles de changer :

$$\begin{aligned} \omega_3 n'_3 - \omega'_1 n'_1 \cos \theta'_1 - \omega'_2 n'_2 \cos \theta'_2 - Kc &= 0 \\ n'_i &= n(\omega_i, T') \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

On cherche à savoir deux choses :

1. Est-il toujours possible de trouver une paire de photons dégénérée en fréquence ? Quelle direction suivent-ils ?
2. Est-il toujours possible de trouver une paire de photons dans l'axe de propagation ? A quelles fréquences ?

Ces deux questions ne s'excluent pas ; elles supposent de voir le problème de deux points de vue différents :

**Point de vue 1 : lieu de la dégénérescence** — Dans ce point de vue, on considère que  $\omega'_1 = \omega_0$  et  $\omega'_2 = \omega_0$ .

$$2\omega_0 n(2\omega_0, T') - \omega_0 n(\omega_0, T') (\cos \theta'_1 + \cos \theta'_2) - Kc = 0$$

La projection sur un axe orthogonal à  $\mathbf{k}_3$  donne  $\omega_0 n'_0 \sin \theta'_1 + \omega_0 n'_0 \sin \theta'_2 = 0$ , c'est à dire  $\theta'_2 = -\theta'_1 = -\theta'$ .

$$\begin{aligned} n(2\omega_0, T') - n(\omega_0, T') \cos \theta' - \frac{Kc}{2\omega_0} &= 0 \\ \theta' &= \arccos \left[ \frac{n(2\omega_0, T') - \frac{Kc}{2\omega_0}}{n(\omega_0, T')} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$\theta'$  indique dans quelle direction par rapport à l'axe rencontrer un photon à la fréquence de dégénérescence  $\omega_0$  lorsque la température du cristal est différente de  $T_0$ . L'autre photon de la paire est dirigé dans une direction symétrique par rapport à l'axe  $\mathbf{k}_3$  de la pompe. La Figure 2.6 montre que pour une température inférieure à  $T_0$ , l'émission de paires de photons dégénérés est non colinéaire. Pour une température supérieure à  $T_0$ , l'équation 2.21 n'a pas de solution : le processus est impossible dans ces conditions et on ne trouve pas de paires de photons dégénérés en fréquence. Dans le paragraphe suivant, où l'on se place du point de vue colinéaire, nous analyserons la forme du spectre émis dans la direction de la pompe pour différentes températures.

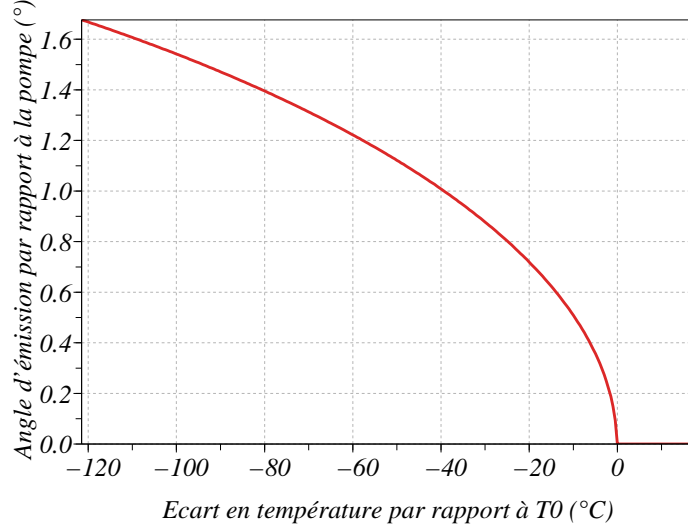


FIGURE 2.6 – Évolution de l'angle d'émission des photons à la fréquence de dégénérescence ( $\omega_0 = \omega_3/2$ ) en fonction de l'écart à la température  $T_0$  définie comme la température de cristal permettant l'accord de phase dégénéré colinéaire. À une température supérieure, aucun photon n'est émis à la dégénérescence, quelle que soit la direction.

Remarquons que si l'on souhaite produire des paires de photons de façon non-colinéaire, on peut le concevoir en choisissant un pas de quasi-accord de phase plus petit.

**Point de vue 2 : spectre en émission colinéaire** — Dans ce point de vue, on considère que  $\omega'_1 = \omega_0 + \Delta\omega$  et  $\omega'_2 = \omega_0 - \Delta\omega$  (symétrie requise par la conservation de l'énergie) et que  $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$ . Alors :

$$2\omega_0 n(2\omega_0, T') - (\omega_0 + \Delta\omega)n(\omega_0 + \Delta\omega, T') - (\omega_0 - \Delta\omega)n(\omega_0 - \Delta\omega, T') - Kc = 0$$

L'écart relatif à la dégénérescence s'exprime par :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2n(2\omega_0, T') - \frac{Kc}{\omega_0} - [n(\omega_0 + \Delta\omega, T') + n(\omega_0 - \Delta\omega, T')]}{n(\omega_0 + \Delta\omega, T') - n(\omega_0 - \Delta\omega, T')} \quad (2.22)$$

La valeur de  $\Delta\omega$  en fonction de  $T'$  peut être obtenue par une méthode numérique de résolution. Mais pour de petits  $\Delta\omega$ , on a la relation approximative suivante :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2n(2\omega_0, T') - 2n(\omega_0, T') - \frac{Kc}{\omega_0}}{\omega_0 \left. \frac{\partial n}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}}} \quad (2.23)$$

La Figure 2.7 représente un exemple de solution pour un cristal de niobate de lithium pompé au voisinage de 800 nm.

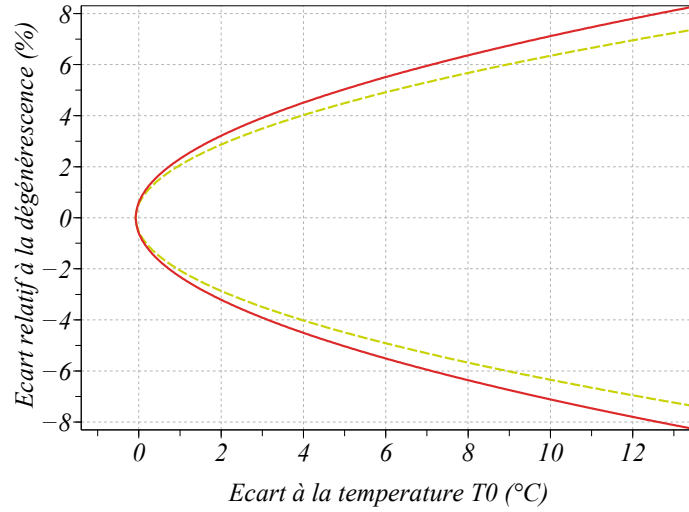


FIGURE 2.7 – Écart relatif à la fréquence de dégénérescence lorsqu'on change la température du cristal. Traits pleins : résolution exacte d'après (2.22). Pointillés : solution approchée d'après (2.23). (Exemple pour un cristal de  $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$  de coefficients de Sellmeier donnés par [GOS<sup>+</sup>08]. Dégénérescence à 1563,75 nm obtenue à 141,4°.)

Finalement, dans l'axe de propagation du faisceau de pompe, on distingue deux cas :

- si  $T' > T_0$ , on trouve toujours des paires de photons issus de la fluorescence paramétrique, mais à des fréquences symétriques par rapport à la dégénérescence  $\omega_0$ .
- si  $T' < T_0$ , aucune production de paires de photons n'est possible par l'accord de phase.

### 2.5.3 Illustration en accord de phase par biréfringence

Nous venons de voir dans le cas du quasi-accord de phase qu'il était possible de modifier la répartition angulaire du spectre de fluorescence en ajustant la valeur de  $\Delta k - K$  autour d'une valeur nulle. La même chose est possible dans le cas de l'accord de phase par biréfringence où  $K = 0$ . Alors que nous nous étions restreints dans le paragraphe précédent au cas où les deux photons générés étaient de même polarisation, nous allons ici distinguer les cas suivants :

- Accord de phase de type I : les deux photons émis ont la même polarisation
- Accord de phase de type II : les photons émis ont des polarisations orthogonales, notées  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$

**Type I** — Pour une paire de photons générés lors d'un processus de fluorescence paramétrique en accord de phase de type I, les deux photons présentent la même polarisation : le même raisonnement s'applique indifféremment pour chacun d'eux.

Comme pour l'exemple précédent du quasi-accord de phase (Eq. 2.20), à chaque fréquence  $\omega_1$  d'un des photons générés correspond un angle  $\theta_1$  entre son vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  et le vecteur d'onde de pompe  $\mathbf{k}_3$ . Par invariance dans le plan orthogonal à  $\mathbf{k}_3$ , aucun plan d'interaction n'est privilégié, et le cône d'ouverture  $\theta_1$  axé sur le faisceau de pompe est donc le lieu d'émission des photons à la fréquence  $\omega_1$ . De même, le cône d'ouverture  $\theta_2$  est le lieu d'émission des photons à la

fréquence  $\omega_2$ . La relation entre l'angle et la fréquence dépend des conditions d'accord de phase, c'est à dire, pour un cristal donné, de l'angle entre son axe optique et  $\mathbf{k}_3$ .

Pour deux photons jumeaux, issus d'une même interaction, la conservation de l'impulsion impose cependant que l'un et l'autre soient émis dans un plan qui contient l'axe de la pompe ( $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  sont coplanaires). La Figure 2.8 illustre cette configuration, deux symboles identiques indiquent des photons jumeaux.

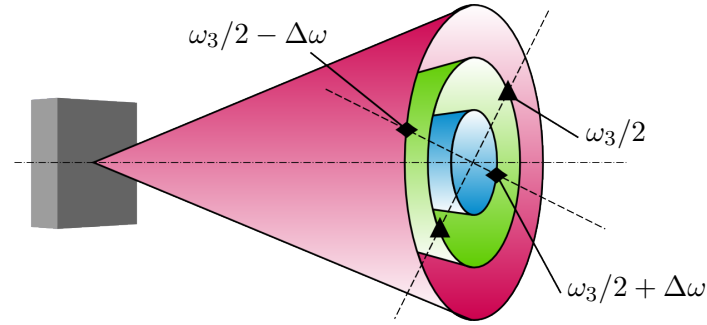


FIGURE 2.8 – Fluorescence en accord de phase de type I : deux symboles identiques indiquent des photons jumeaux, issus du même photon de pompe

**Type II** — Dans cette situation, la différence de polarisation rend différents les trajets des deux photons générés. Pour une fréquence donnée, l'angle d'émission du photon polarisé selon  $\vec{\epsilon}_2$  n'est pas le même que pour le photon polarisé selon  $\vec{\epsilon}_1$  : le lieu d'émission des photons est décrit par deux ensembles de cônes, comme l'illustre la Figure 2.9. On pourra consulter les articles publiés en 1994 par Kwiat *et al.* [KESC94] et par Rubin *et al.* [RKSS94] pour un calcul rigoureux des conditions d'accord de phase dans cette configuration, ou l'article de Kurtsiefer *et al.* de 2001 [KOW01] pour un résumé. Comme en Type I, des symboles identiques désignent des photons jumeaux.

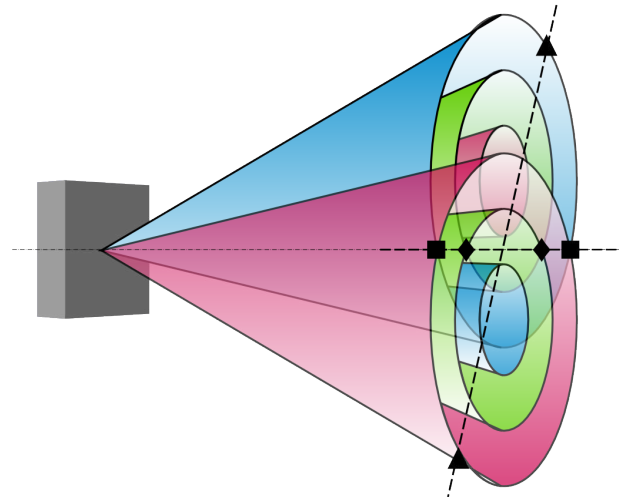


FIGURE 2.9 – Fluorescence en accord de phase de type II : deux symboles identiques indiquent des photons jumeaux, issus du même photon de pompe. Les ▲ indiquent le cas général de photons jumeaux. Les ■ indiquent une paire de photons intriqués de fréquence différente. Les ◆ indiquent une paire de photons intriqués et indiscernables en fréquence.

La particularité de l'accord de phase de type II par rapport au type I est qu'il existe des directions particulières aux intersections des cônes : pour un couple de photons jumeaux à  $\omega_+ = \omega_3/2 + \Delta\omega$  et  $\omega_- = \omega_3/2 - \Delta\omega$ , les intersections correspondent à des directions  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$  où chaque

photon est dans une superposition des polarisations ordinaire et extraordinaire. Cette situation est repérée par les symboles ■ ou ♦ sur la Figure 2.9. L'état global de la paire s'écrit

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\omega_+, \mathbf{k}, \vec{\epsilon}_1\rangle |\omega_-, \mathbf{k}', \vec{\epsilon}_2\rangle + |\omega_-, \mathbf{k}, \vec{\epsilon}_2\rangle |\omega_+, \mathbf{k}', \vec{\epsilon}_1\rangle) \quad (2.24)$$

On ne peut pas factoriser l'état de la paire en deux sous-systèmes associés aux directions  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ . Nous allons voir dans la section suivante que cette expression décrit un état « intriqué ».

Parmi ces directions de photons intriqués, deux (indiquées par un ♦) sont singulières : elles correspondent à des photons également indiscernables en fréquence. Ceci leur assure la cohérence nécessaire à l'observation d'interférences de nature spécifiquement quantique. Les sources de photons intriqués de type II sont parmi les sources les plus efficaces actuellement pour observer ce genre d'interférences, dont nous allons voir maintenant qu'elles remettent en cause certaines intuitions physiques classiques.





# Chapitre 3

## L'intrication quantique

Malgré une littérature abondante au sujet de l'intrication, nous avons tenu à en rappeler quelques définitions. Nous souhaitons également évoquer comment un théorème, conçu initialement par J. Bell pour mettre fin à un débat épistémologique, s'est transformé en un outil de caractérisation fondamental pour les applications en information quantique. Nous présentons également quelques exemples concrets d'observables utilisées dans les expériences.

### 3.1 États intriqués

#### 3.1.1 Définition

En physique quantique, le concept d'intrication recouvre une propriété précise d'un système à plusieurs particules, par rapport à une observable donnée : la non-factorisabilité de l'état du système global à plusieurs particules en termes d'états de chaque sous-système associé à chacune des particules.

Considérons, pour cette introduction, un système  $S$  formé de deux sous-systèmes identiques  $S_1$  et  $S_2$ . On s'intéresse à l'observable  $\mathcal{O}_i$  de  $S_i$  possédant deux valeurs propres associées aux états propres  $|\phi_i\rangle$  et  $|\varphi_i\rangle$ .

Si  $S_1$  et  $S_2$  sont dans un état propre de  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ , on peut toujours écrire l'état  $|S\rangle$  du système  $S$  sous forme factorisée :

$$|S\rangle = |S_1\rangle \otimes |S_2\rangle = \begin{cases} |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \\ \text{ou} & |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \\ \text{ou} & |\phi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \\ \text{ou} & |\varphi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \end{cases}$$

En revanche, si les sous-systèmes sont dans une superposition d'états propres de  $\mathcal{O}_i$ , le système ne peut pas toujours s'écrire sous la forme factorisable précédente :

$$|S\rangle \neq (\alpha_1|\phi_1\rangle + \beta_1|\varphi_1\rangle) \otimes (\alpha_2|\phi_2\rangle + \beta_2|\varphi_2\rangle) \neq |S_1\rangle \otimes |S_2\rangle \quad (3.1)$$

avec  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ ,  $|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1$ .

Il prend en général une forme non-factorisable, comme par exemple :

$$|S\rangle = \alpha|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle + \beta|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1) \quad (3.2)$$

qui exprime la superposition du système *total* dans deux états  $|S'\rangle$  et  $|S''\rangle$  :

$$|S\rangle = \alpha|S'\rangle + \beta|S''\rangle$$

ce qu'il est en effet toujours permis d'écrire en vertu du principe de superposition.

Cette forme générale, qui peut s'étendre à plus de deux particules et à une observable à plus de deux états propres, est dite « intriquée ». Elle remet en cause certaines intuitions classiques, comme celle de séparabilité. La non-factorisabilité se traduit en effet par la non-séparabilité des deux sous-systèmes, ce qui est *a priori* paradoxal si les deux sous-systèmes décrivent des objets différents.

En pratique, des systèmes à deux niveaux et deux particules, tels que celui décrit par l'état (3.2), sont les plus simples à produire et à manipuler, et permettent déjà d'observer des phénomènes de corrélation proprement quantiques.

### 3.1.2 Etats maximalement intriqués

Quelles que soient les valeurs (non nulles) de  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'Equation (3.2), l'état est intriqué. Cependant, les corrélations quantiques qui en découlent sont plus ou moins fortes en fonction de ces paramètres. Elles sont maximales lorsque  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$  car dans ce cas, l'information sur chaque particule indépendamment est minimale (les états  $|\phi_i\rangle$  et  $|\varphi_i\rangle$  sont équiprobables, l'entropie est maximale), tandis que l'information conditionnelle sur l'état de l'un connaissant l'état de l'autre est totale<sup>1</sup>. Ainsi, on dit de l'état  $|S_{\max}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle + |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle)$  qu'il est *maximalement intriqué*. Une bonne source de particules intriquées, au sens de l'information quantique, doit produire ce type d'état, afin qu'elle puisse être utilisée pour observer des corrélations quantiques aussi importantes que possibles.

Tout autre état qui peut être transformé en  $|S_{\max}\rangle$  par une combinaison d'opérateurs d'évolution unitaires locaux (*i.e.* agissant sur chaque particule) est également maximalement intriqué. En particulier, pour des photons, les opérations de déphasage ou de rotation de la polarisation sont de tels opérateurs. Alors, on peut écrire que les états de la forme suivante sont maximalement intriqués :

$$|\Phi(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle + e^{i\theta}|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle) \quad (3.3)$$

$$|\Psi(\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle|\varphi_2\rangle + e^{i\theta}|\varphi_1\rangle|\phi_2\rangle) \quad (3.4)$$

On peut choisir quatre de ces états maximalement intriqués comme base de l'espace des états d'un système à deux particules, intriquées ou non :

$$|\Phi_+\rangle = |\Phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle + |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle) \quad (3.5)$$

$$|\Phi_-\rangle = |\Phi(\pi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle - |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle) \quad (3.6)$$

$$|\Psi_+\rangle = |\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle|\varphi_2\rangle + |\varphi_1\rangle|\phi_2\rangle) \quad (3.7)$$

$$|\Psi_-\rangle = |\Psi(\pi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle|\varphi_2\rangle - |\varphi_1\rangle|\phi_2\rangle) \quad (3.8)$$

Ces états maximalement intriqués particuliers sont connus sous le nom d'« états de Bell », du nom du théoricien qui permit à l'information quantique de naître, lorsqu'il offrit le moyen de

1. Pour un état pur décrit par (3.2) ; ce n'est pas le cas pour un état mixte, dont nous ne parlons pas ici

transposer au domaine expérimental le débat qui, comme nous allons le voir maintenant, n'était jusque-là que d'ordre philosophique.

## 3.2 Réalisme, localité, séparabilité

### 3.2.1 Le paradoxe EPR : réalisme contre positivisme

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY et N. ROSEN (EPR) ont publié en 1935 un article intitulé « La description de la réalité par la mécanique quantique peut-elle être considérée complète ? » [EPR35]. Qu'ils aient choisi cette formulation, plutôt que simplement « La mécanique quantique peut-elle être considérée complète ? », est significatif d'une certaine position philosophique qui alimente depuis le congrès Solvay de 1927 un grand débat entre certains physiciens (Einstein, De Broglie, Schrödinger...) et d'autres, représentatifs de l'école de Copenhague (Bohr, Heisenberg...). Un échange célèbre lors de ce congrès résume deux positions bien différentes à propos des relations d'incertitude de Heisenberg qui sont, aux côtés du principe de superposition et de réduction du paquet d'onde, le sujet principal de discussion :

- *God doesn't play dice.*
- *Einstein, stop telling God what to do.* (Bohr)

Dans leur article, EPR postulent l'existence d'une réalité physique indépendante de l'observateur<sup>2</sup> que le physicien aurait pour tâche de découvrir. Peut-être inspirés par les très récents travaux de K. POPPER sur la réfutabilité comme critère de scientificité [Pop34], EPR proposent un critère permettant de juger de la présence d'un « élément de réalité » :

« If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (*i.e.*, with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity. » [EPR35]

De ce point de vue, si un élément de réalité existe et que la mécanique quantique n'en rend pas compte, celle-ci doit être considérée comme incomplète :

« Whatever the meaning assigned to the term *complete*, the following requirement for a complete theory seems to be a necessary one : *every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*. We shall call this the condition of completeness. » [EPR35]

Pour certains physiciens, dont EPR, ce postulat est admis : on les dit *réalistes*<sup>3</sup>. EPR ne remettent pas en cause la justesse de la théorie (son accord avec l'expérience) mais affirment que la mécanique quantique ne peut être « satisfaisante » que si elle n'est pas seulement « correcte » mais également « complète », ce qui, de leur point de vue réaliste, n'est pas le cas.

Des physiciens *positivistes*, au contraire, n'ont pas besoin du postulat de réalité indépendante de l'observateur et considèrent qu'une théorie qui fournit des prédictions avec une précision suffisante

2. J.S. BELL ironisera [Bel90], à propos de l'idée que ce soit une mesure R qui révèle un élément de réalité décrit, avant cette mesure, comme une superposition : « Fallait-il attendre qu'il y ait des êtres humains sur terre pour que l'opération R apparaisse ? Ou fallait-il attendre qu'il y ait des gens munis d'un doctorat ? »

3. J. BRICMONT remarque [Bri95] qu'il ne faut pas confondre cette définition du réalisme et une autre, aussi appelée *réalisme naïf*, qui consiste à dire que le monde est tel qu'il apparaît et que la théorie doit simplement rendre compte des phénomènes. Qu'Einstein, bien qu'il se considérât réaliste, ait défendu la théorie de la relativité qui était contraire à certaines intuitions, illustre bien cette nuance. Mais cet argument, certainement trop tentant, fût tout de même utilisé par Bohr dans sa réponse à l'article d'EPR [Boh35].

et qui n'est pas contredite par les données de l'expérience n'a pas de raison d'être considérée comme incomplète. C'est la position qu'adopte Niels BOHR dans un article homonyme à celui d'EPR [Boh35] mais qui en réfute les arguments. Dans cet article, BOHR soulève une « ambiguïté » dans la formulation par EPR du « critère de réalité ». Après avoir ainsi démuni EPR de leur critère de réalité, il propose, en bon positiviste, de résoudre le problème en rappelant son concept de *complémentarité* — qu'il avait déjà introduit plus tôt [Boh34] — à savoir par exemple que le produit non nul des incertitudes sur la position  $x$  et l'impulsion  $p$ <sup>4</sup> rend simplement compte du fait qu'un objet quantique doit être vu soit comme une particule (alors  $x$  est bien défini et son mouvement  $p$  incertain), soit comme une onde (de vecteur d'onde bien défini proportionnel à  $p$  mais délocalisée), *en fonction des conditions de mesure*.

### 3.2.2 Le paradoxe EPR : non-localité et non-séparabilité

Mais en s'attachant à démontrer l'« ambiguïté » du critère de réalité proposé par EPR afin de montrer que la mécanique quantique n'a pas besoin de cela pour être complète, BOHR passe à côté d'un des aspects de l'intrication soulevé par EPR.

Certes, la question centrale pour EPR est celle du réalisme et BOHR y répond. Mais le « paradoxe » qu'énoncent EPR à propos de l'intrication pose également le problème de la non-localité, absent de la réponse de BOHR.

Reprenons une remarque d'EPR et simplifions-là (ce qui n'en réduit pas les conséquences) en l'appliquant à l'état décrit par l'équation (3.2)<sup>5</sup> : si les deux particules  $S_1$  et  $S_2$  constituant le système  $S$  décrit par l'état  $|S\rangle$  sont dirigées vers deux appareils de mesure éloignés pouvant donner les résultats  $\phi_i$  ou  $\varphi_i$  selon que la particule  $i$  est dans l'état  $|\phi_i\rangle$  ou  $|\varphi_i\rangle$ , cette équation — permise par la mécanique quantique — pose le problème suivant :

Avant la mesure, l'état de chaque particule est indéterminé. Après une mesure sur la particule 1, le résultat peut valoir  $\phi_1$  ou  $\varphi_1$  (avec, ici, une probabilité égale) ce qui réduit le paquet d'onde de la particule 1 respectivement dans l'état  $|\phi_1\rangle$  ou  $|\varphi_1\rangle$ . Outre la question de la réduction du paquet d'onde propre à cette particule qui, comme nous l'avons vu plus haut, pose problème à Einstein et aux autres réalistes en raison de la présence d'aléa, la forme de  $|S\rangle$  implique que la particule 2 se trouve elle aussi réduite en l'état  $|\phi_2\rangle$  ou  $|\varphi_2\rangle$ . Il semble là s'agir d'une action à distance « qui fait froid dans le dos »<sup>6</sup> à Einstein.

Plus encore, la mesure sur la particule 1 ne fait pas que *déclencher* la réduction du paquet d'onde de la particule 2, elle en *détermine* l'état :  $|\phi_2\rangle$  si la mesure sur la particule 1 donne  $\phi_1$  ;  $|\varphi_2\rangle$  si la mesure sur la particule 1 donne  $\varphi_1$ . On peut conclure à l'une des trois conséquences suivantes :

1. soit il existe un médiateur entre les deux particules, qui détient l'information de la mesure sur la première, et qui la transmet à la seconde, de façon à la projeter sur l'état correspondant,
2. soit la mécanique quantique est une théorie à causalité non-locale,
3. soit il existe une « variable cachée », partagée par les deux particules lors du processus qui leur est à l'origine, et qui n'est pas décrite par la mécanique quantique.

Le problème, dans le premier cas, est que non seulement la mécanique quantique ne prédit pas l'existence d'un tel médiateur, mais elle ne dit rien non plus sur le temps qui sépare la projection

4.  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ , qui est une conséquence directe de la non-commutativité des opérateurs associés à ces variables conjuguées

5. EPR utilisait une superposition continue sur les observables impulsion et position plutôt qu'une superposition à deux états discrets

6. « *spukhafte Fernwirkung* » dicit Einstein dans une lettre [Ein71] à M. BORN, expression autrement connue sous le nom « *spooky action at distance* »

de la particule mesurée de la projection de l'autre particule. Soit la théorie est incomplète car elle ne dit rien à propos d'un tel intervalle de temps, soit il est permis que ces deux projections soient parfaitement simultanées, grâce à une information provenant de la particule 1 atteignant de façon instantanée la particule 2, ce qui est contraire à la théorie de la relativité qui fixe une vitesse limite  $c$  à tout déplacement dans l'espace.

Si l'on suppose qu'il n'existe pas un tel médiateur, c'est à dire si l'on se borne à ce que dit la mécanique quantique, on admet que celle-ci est non-locale, c'est à dire qu'une cause au point  $\mathbf{r}_1$  où se situe la particule 1 peut avoir un effet *direct* au point  $\mathbf{r}_2$  où se trouve la particule 2. C'est l'interprétation « orthodoxe » défendue par BOHR et l'école de Copenhague, en vertu d'un point de vue positiviste, mais rejetée par les réalistes.

Les réalistes, dont Einstein, suggèrent donc la troisième hypothèse, à savoir l'existence d'une variable cachée qui assure la corrélation des deux mesures par « cause commune dans le passé », ce qui serait satisfaisant mais dont la mécanique quantique ne rend pas compte, la rendant dès lors incomplète.

Jusqu'à la mort d'Einstein et de Bohr, et même ensuite, la question resta d'ordre philosophique, aucune expérience permettant de trancher en faveur de l'une ou l'autre hypothèse n'ayant été réalisée. Les positivistes, considérant la mécanique quantique complète puisque non remise en cause par l'expérience, se satisfaisaient de la seconde hypothèse, et les réalistes défendaient la première ou la troisième, avec pour conclusion, dans les deux cas, que la mécanique quantique est incomplète.

Pourtant, un certain point de vue, que note J. BRICMONT [Bri95], suggère une manière de réconcilier les attitudes positiviste et réaliste : la présence éventuelle de variables cachées n'impliquerait pas, comme l'affirment EPR, l'incomplétude de la mécanique quantique. Que de telles variables existent mais soient, même fondamentalement, inaccessibles à la connaissance n'est pas contradictoire avec une certaine conception du réalisme. Le fait que la mécanique quantique ne les inclue pas dans son formalisme n'est donc pas rédhibitoire pour un réaliste. La véritable contradiction résiderait dans le fait que la mécanique *interdise* l'existence de telles variables cachées. Justement, en 1964, soit 6 ans après la mort d'Einstein et 2 après celle de Bohr, J. S. BELL, alors en séjour sabbatique d'un an détaché du CERN de Genève, publie un article qui revient sur le paradoxe EPR et aborde cette question.

### 3.2.3 Inégalité de Bell

Dans son article « On the Einstein Podolsky Rosen paradox » [Bel64], J. S. BELL prend au mot EPR et introduit l'« élément de réalité » supposé et non décrit par la mécanique quantique, sous forme de la « variable cachée »  $\lambda$  partagée par les deux particules dès leur création et qui assurerait la complétude de la mécanique quantique, en portant l'information sur le résultat de mesure. Bell ne suppose rien à propos de ce paramètre. En particulier, il précise qu'il peut être « une simple variable, un ensemble ou même un ensemble de fonctions ». Bien que ce paramètre puisse prendre des valeurs « tout aussi bien discrètes que continues », il le suppose, sans perte de généralité, à valeurs continues.

Bell considère deux particules de spin  $\frac{1}{2}$  (respectivement  $\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$ ) se déplaçant librement en deux directions opposées. Sur la particule 1, une mesure de type Stern et Gerlach orientée selon la direction  $\vec{a}$  peut donner deux résultats équiprobables :  $A = +1$  ou  $A = -1$  pour la composante de spin  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ . La même expérience réalisée sur la particule 2 selon l'orientation  $\vec{b}$  peut donner les mêmes résultats  $B = +1$  ou  $B = -1$  pour la composante  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ .

Dans une théorie à causalité locale, le résultat  $A$  peut dépendre de  $\vec{a}$  mais il est exclu qu'il dépende de  $\vec{b}$ ; de même  $B$  ne dépend pas de  $\vec{a}$ . C'est donc sous la forme suivante qu'est introduite

la variable cachée  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} A(\vec{a}, \lambda) &= \pm 1 \\ B(\vec{b}, \lambda) &= \pm 1 \end{aligned}$$

c'est à dire un paramètre partagé issu de leur interaction passée, qui serait susceptible de rendre compte des corrélations. La distribution de probabilité de  $\lambda$  est  $\rho(\lambda)$  (qui vérifie  $\rho(\lambda) \geq 0$  et  $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$ ). Alors, l'espérance mathématique du produit des deux résultats de mesure peut s'exprimer par

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda$$

Bell montre, en troisième partie de son article, qu'à l'aide d'une fonction  $\rho$  appropriée, une variable cachée introduite sous cette forme peut parfaitement rendre compte des prédictions quantiques de résultats de mesure entre deux spins  $\frac{1}{2}$  dans l'état intriqué

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$$

à savoir une anticorrélation parfaite ( $A = +1$  lorsque  $B = -1$  et inversement) lorsque les appareils de mesure sont identiquement orientés ( $\vec{a} = \vec{b}$ ), et une absence totale de corrélation lorsque les appareils sont orientés de manière orthogonale ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ).

Ainsi, pour des configurations de mesure particulières, les prédictions de la mécanique quantique peuvent s'expliquer dans le cadre d'une théorie locale à variables cachées. Mais dans le cas général, Bell montre que, quelles que soient les orientations  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$ , l'inégalité suivante doit être satisfaite :

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \quad (3.9)$$

Or il existe des configurations (par exemple  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) où les prédictions quantiques ne satisfont pas cette inégalité.

La mécanique quantique semble donc bien être incompatible avec l'existence de variables cachées, et le point de vue de Copenhague confirmé. C'est du moins la conclusion qu'entraînerait une confirmation expérimentale de la violation de l'inégalité de Bell. Une telle confirmation supposerait de réaliser une succession de mesures de  $A(\vec{a})$  et  $B(\vec{b})$  sur le système dans l'état  $|\psi\rangle$  et de réaliser une estimation statistique  $E(\vec{a}, \vec{b})$  de la valeur de  $P(\vec{a}, \vec{b})$ , en comptant les probabilités d'occurrence des différentes coïncidences suivantes :

$$\begin{aligned} R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) &: \text{ Mesure de } +1 \text{ pour les deux particules} \\ R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) &: \text{ Mesure de } -1 \text{ pour les deux particules} \\ R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) &: \text{ Mesure de } +1 \text{ pour la particule 1 et } -1 \text{ pour la particule 2} \\ R_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) &: \text{ Mesure de } -1 \text{ pour la particule 1 et } +1 \text{ pour la particule 2} \end{aligned}$$

cela pour différentes combinaisons de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . Alors l'espérance  $E(\vec{a}, \vec{b})$  vaut :

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{-+}(\vec{a}, \vec{b})$$

On peut calculer que, selon les prédictions de la mécanique quantique, on a :

$$R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) = R_{++}(\alpha, \beta) = \cos^2(\beta - \alpha) \quad (3.10)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les angles que font respectivement  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  avec une orientation de référence quelconque. Il s'agit donc de réaliser une expérience de mesure des  $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $R_{\pm\pm}(\vec{b}, \vec{c})$ ,  $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{c})$  qui teste l'inégalité (3.9) pour vérifier ou invalider l'hypothèse de l'existence de variables cachées.

### 3.2.4 Inégalité de Clauser, Horne, Shimony et Holt

Pendant les huit années qui suivirent la publication de l'article de Bell, aucune expérience ne fut réalisée. Pour cela, il fallut attendre que J. CLAUSER, M. HORNE, A. SHIMONY et R. A. HOLT publient [CHSH69] en 1969 une forme dérivée de l'inégalité de Bell, la forme dite « CHSH » :

$$-2 \leq S \leq 2 \quad \text{avec} \quad S = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}') \quad (3.11)$$

où  $\vec{a}, \vec{a}'$  sont deux orientations différentes de l'appareil de mesure sur la particule 1 et  $\vec{b}, \vec{b}'$  deux orientations différentes de l'appareil de mesure sur la particule 2.

Il existe certaines orientations pour lesquelles cette inégalité n'est pas vérifiée par les prédictions quantiques sur le système dans l'état  $|\psi\rangle$ . Par exemple si  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}') = (\vec{a}', \vec{b}') = \frac{\pi}{8}$ , alors  $S$  vaut  $2\sqrt{2} > 2$ .

Sous la forme CHSH, l'inégalité de Bell est plus facilement testable expérimentalement. La plupart des premières expériences réalisées la violaient, confirmant les prédictions de la mécanique quantique (dont, par exemple, S. FRIEDMAN et J. CLAUSER [FC72] en 1972 ainsi que E. FRY et R. THOMPSON [FT76] en 1976) mais se basaient sur des suppositions supplémentaire affaiblissant la valeur de leurs conclusions.<sup>7</sup>

La première preuve considérée comme non ambiguë est attribuée à l'équipe d'A. ASPECT avec une série d'expériences datant du début des années 1980.

### 3.2.5 Expériences d'Aspect

Les « expériences d'Aspect » regroupent trois expériences de violation de l'inégalité de Bell. Par rapport à l'expérience originale imaginée par Bell, et comme l'ont suggéré D. BOHM et Y. AHARONOV [BA57] dès 1957, les particules de spin 1/2 sont remplacés par des photons (ce qui était déjà le cas dans les expériences précédentes). La superposition de deux polarisations orthogonales remplace la superposition de spins, et les appareils de Stern et Gerlach sont remplacés par des polariseurs.

A. Aspect et ses collaborateurs utilisent l'intrication de deux photons générés dans le domaine visible par cascade radiative dans des atomes de Calcium pompés par absorption à deux photons issus de deux lasers (à ions Krypton, et à colorant : Rhodamine 6G).

La première expérience, décrite dans un article publié en 1980 [AGR81] est la première à violer de manière claire l'inégalité de Bell. La Figure 3.1, qui représente le taux de comptage  $R_{++}$  en fonction de l'angle entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  témoigne de l'excellent accord obtenu entre leur expérience et la théorie (Eq. 3.10), aux pertes et aux fausses détections près.

Mais cette première expérience n'utilisait qu'un détecteur par voie de mesure, de sorte que c'est par l'absence de détection correspondant à la valeur + qu'était extrapolée (à partir du rendement de détection) la présence d'un photon donnant le résultat - : les grandeurs  $R_{+-}$ ,  $R_{-+}$  et  $R_{--}$  n'étaient pas directement accessibles. La seconde expérience [AGR82], en utilisant quatre détecteurs et un séparateur de polarisation plutôt qu'un simple polariseur, se rapprochait ainsi davantage de l'expérience de pensée de Bohm et Aharonov [BA57] et de l'idée originale de Bell.

Cela comble un certain aspect de la « faille de détection »<sup>8</sup> qui peut s'énoncer de la façon suivante : *Un phénomène inconnu<sup>9</sup> sélectionnerait quels photons ne sont pas détectés, de manière*

7. *i.e.* inefficacité des polariseurs en raison de la longueur d'onde des photons utilisés, faible taux de génération de paires de particules ayant pour conséquence un long temps d'intégration donc une forte variance, inégalités dérivées de CHSH de manière inexacte

8. Voir par exemple [MSRP98] ou [RKM<sup>+</sup>01] pour des progrès récents à ce sujet.

9. Une sorte de « démon de Maxwell » [Max72] ou de « malin génie » cartésien.



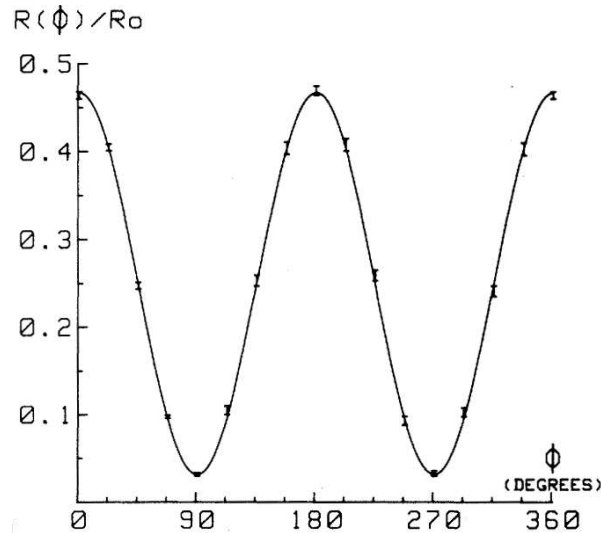


FIGURE 3.1 – Taux de coïncidences  $R(\phi)$  en fonction de  $\phi = (\vec{a}, \vec{b})$  normalisé au taux de coïncidences  $R_0$  en l'absence d'analyseurs. La courbe n'est pas un ajustement à partir des points mais les prédictions de la mécanique quantique ; les barres d'erreur correspondent à l'écart-type sur les mesures. (Figure tirée de [AGR81])

à biaiser les mesures en faveur de la violation de l'inégalité de Bell. Cependant, il est bien sûr supposé que cette sélection est parfaitement aléatoire, ce qui revient à nier l'existence d'un tel phénomène. Mais toute amélioration du rendement de détection est recherchée pour clore cette faille totalement.

La troisième expérience d'Aspect [ADR82] a pour but de résoudre une autre faille, la « faille de localité »<sup>10</sup> : pour être conforme à l'hypothèse de localité de Bell, il est nécessaire que  $A$  (resp.  $B$ ) ne dépende que de  $\lambda$  et  $\vec{a}$  (resp.  $\vec{b}$ ), c'est à dire

$$\begin{aligned} A(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) \\ B(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) \end{aligned}$$

Pour cela, les auteurs de l'expérience s'assurent que la détermination des orientations  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  a lieu après la création de la paire intriquée. Deux polariseurs sont préparés sur chaque voie, orientés différemment. Un défecteur acousto-optique est introduit sur le chemin des photons afin de diriger ceux-ci vers l'un ou l'autre des deux polariseurs. Chacun des deux défecteurs est modulé avec une période différente, mais voisine, et deux fois plus courte que le temps de parcours entre la source et les polariseurs, de sorte que le choix final de l'orientation a nécessairement lieu après l'instant d'émission.

### 3.2.6 Perspectives

La série des trois expériences d'Aspect décrite précédemment constitua un argument décisif en faveur de la non-localité de la mécanique quantique, puisqu'il s'agit de la seule alternative à une théorie réaliste locale à variables cachées, que la violation expérimentale claire de l'inégalité de Bell exclut définitivement. Depuis, l'interprétation orthodoxe de Copenhague et l'attitude positiviste continuent donc de prévaloir auprès des physiciens.

Cependant, la recherche d'une interprétation réaliste n'est pas abandonnée. Nous n'allons pas détailler ici les différentes alternatives à l'interprétation de l'école de Copenhague, mais il convient de remarquer que J. S. Bell lui-même n'a pu se résoudre à accepter que cette interprétation soit

10. Dont on trouve de plus récents développements. [WJS<sup>+</sup>98, Asp99]

la seule valable. Elle n'est que la dernière de quatre positions qu'il juge tenables en l'absence de théorie locale à variable cachée, et qu'il présente en conclusion en 1981 lors d'un colloque sur « Les implications conceptuelles de la Physique Quantique » [Bel81] réunissant également A. Shimony et A. Aspect, où ce dernier présente les résultats de sa première expérience, quelques semaines avant la soumission de son article à *Physical Review*. Quelques années plus tard, lors du symposium de la Fondation Nobel de 1986 [Bel86], il prononcera une conférence intitulée « Six possible Worlds of Quantum Mechanics »<sup>11</sup>, reprise dans un ouvrage [BA87] rassemblant de nombreuses réflexions sur la question EPR.

Admettre la non-localité a pour conséquence d'admettre la non-séparabilité du système constitué des deux particules intriquées. Ainsi, en raison de ces corrélations fortes, de nombreux physiciens parlent de « biphoton » [Shi03, KWS06], même lorsque les deux photons peuvent être séparés de plus de 10 km [TBZG98].

Remarquons que si l'hypothèse de non-localité apparaît nécessaire par la violation des inégalités de Bell, elle n'est pas suffisante. S. GRÖBLACHER et A. ZEILINGER ont suggéré [GPK<sup>+</sup>07] que non seulement la localité, mais qu'également « certains aspects intuitifs devaient être abandonnés », d'après un théorème énoncé par A. LEGGETT [Leg03] confirmé par leur expérience.

La violation de l'inégalité de Bell est couramment utilisée comme preuve d'intrication<sup>12</sup>. Bien qu'elle ne soit pas la seule possible [Har93, HGBL05]<sup>13</sup>, elle est cependant la seule, d'après N. GISIN à présenter un caractère universel [GT07, AGM06], indépendant d'une connaissance *a priori* sur la dimension du système intriqué.

### 3.3 Quelle observable ?

#### 3.3.1 Spin et polarisation

Historiquement, la formulation du paradoxe EPR par J. S. BELL portait sur des particules de spin  $\frac{1}{2}$ . En tant que telles, elles faisaient appel à une mesure basée sur le principe de l'expérience de Stern et Gerlach.

D. BOHM et Y. AHARONOV, à la recherche d'une expérience réalisable en pratique [BA57], proposèrent de transposer le problème au photon, particule de spin 1. En général, l'observable associé à une mesure de la projection de spin pour une particule de spin 1 possède trois valeurs propres :  $-1, 0, +1$ . Le cas du photon est particulier puisque, en tant que particule sans masse de vitesse  $c$ , seules les valeurs  $-1$  et  $1$  sont permises<sup>14</sup>, ce qui rend du point de vue de l'intrication le problème analogue à celui du spin  $\frac{1}{2}$ . Pour obtenir la même expression de l'état intriqué avec une polarisation linéaire qu'avec un spin  $\frac{1}{2}$ , il suffit de décrire les états propres sur la base des superpositions de polarisations circulaires  $\{| \odot \rangle \pm | \ominus \rangle\}$ .

Mais l'inégalité de Bell s'applique aussi à certains états intriqués de particules de spin 1 comme l'état :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1, -1\rangle - |0, 0\rangle + |-1, 1\rangle)$$

11. Remarquons que parmi ces six interprétations possibles selon J. S. Bell figure une théorie développée dès 1952 par D. Bohm [Boh52], très impliqué dans la question EPR, ami d'Einstein et fervent partisan de la recherche d'une formulation réaliste, déterministe mais explicitement non-locale de la mécanique quantique.

12. *Entanglement witness*

13. Tomographie quantique [JKMW01], entropie d'intrication pour un état pur ou intrication distillable pour un état mixte, en sont d'autres. On peut consulter la référence [PV07] pour une introduction détaillée.

14. Puisque la vitesse  $c$  est atteinte, d'après la théorie de la relativité, toute projection de son spin transverse à sa direction de propagation est nulle. Comme le spin total ne peut être nul, la valeur 0 est interdite pour la composante longitudinale du spin.

La théorie quantique prédit pour cet état un paramètre de Bell égal à  $S = 2,55$  inférieur à  $2\sqrt{2}$  mais supérieur à la limite classique de 2.

Un état intriqué formellement semblable a été réalisé [HLLB02] à l'aide d'états à quatre photons (double paire stimulée) intriqués en polarisation : par une post-sélection, on peut simuler la violation de l'inégalité de Bell pour l'état ci-dessus grâce à l'état

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|2H, 2V\rangle - |HV, VH\rangle + |2V, 2H\rangle)$$

Cet exemple illustre bien l'indépendance fondamentale de l'intrication vis-à-vis de l'observable : il suffit de concevoir un système de mesure qui est capable de distinguer, sur chaque voie, la polarisation de deux photons et qui les classe en trois catégories : tous deux polarisés horizontalement, tous deux verticalement, ou chacun différemment. Ceci peut être généralisé à un nombre arbitraire de photons intriqués [MH04], par exemple 9 pour un spin entier entre  $-4$  et  $4$ .

### 3.3.2 Particules massives

Des vérifications expérimentales de violation des inégalités de Bell ont également été réalisées avec des particules massives, sur l'observable saveur : paires de mésons K (kaons) [AAB<sup>+</sup>98, GG01] (*étrangeté*), paires de mésons B [Go04] (*beauté*) ou autres, dont on peut trouver une revue [MMM<sup>+</sup>08] récente par MATSUKEVICH *et al.* qui y démontrent une violation de l'inégalité de Bell par des ions  $\text{Yb}^+$ .

### 3.3.3 Position-impulsion

En 1992, après le succès des expériences d'Aspect, K. POPPER remarqua [Pop82], que le paradoxe EPR tel qu'il fut énoncé par leurs auteurs portait sur les observables position et impulsion, pas sur le spin, la polarisation ou toute autre observable à valeurs propres discrètes, et considéra que le problème n'était pas clos.

Cependant, en 2004, J. C. HOWELL, R. W. BOYD et leurs collaborateurs quantifièrent [HBBB04] la non-séparabilité de deux photons intriqués en position-impulsion lors d'un processus paramétrique de type II (par une méthode différente d'une violation d'une inégalité de Bell).

### 3.3.4 Phase-impulsion

L'expérience qui marque le début des tests d'inégalité de Bell avec des variables continues est celle de RARITY & TAPSTER [RT90], qui démontrèrent la violation des inégalités de Bell basée sur la phase et l'impulsion, variables liés aux variables temps-énergie.

### 3.3.5 Temps-énergie

Un couple de variables conjuguées continues très étudié dans le cadre des tests d'inégalité de Bell est le couple temps-énergie.

Considérons un système quantique à trois niveaux comme sur la Figure 3.2. Les valeurs  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les durées de vie respectives des niveaux supérieur et intermédiaire. Lorsqu'un faisceau de pompe de pulsation  $\omega_3$  place le système dans le niveau supérieur, un retour à l'état fondamental se produit spontanément, en passant par le niveau intermédiaire, sous la forme de deux transitions radiatives émettant successivement un photon à  $\omega_1$  et à  $\omega_2$  tels que  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ . Le temps  $\tau_2$

est très court par rapport à  $\tau_1$ , si bien qu'on considère l'émission des photons à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  quasi-simultanée, mais incertaine à  $\tau_1$  près dans le temps. On peut écrire le système de deux particules sous la forme<sup>15</sup>

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\tau_1} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{t-t_0}{\tau_1}} |1_{\omega_1}(t)\rangle \otimes |1_{\omega_2}(t)\rangle dt$$

où  $t_0$  est l'instant où le système est placé dans le niveau supérieur.  $|1_{\omega}(t)\rangle$  désigne un état à un photon émis à l'instant  $t$  à la fréquence  $\omega$ . La somme des fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  vaut  $\omega_3$ . Cette corrélation en fréquence est liée à la corrélation en instant d'émission :  $\omega_1 = \omega_3/2 \pm \Delta\omega$  et  $\omega_2 = \omega_3/2 \mp \Delta\omega$ , avec  $\Delta\omega \propto 1/\tau_2$ .

Cette expression est bien l'expression d'un état intriqué, mais pour une observable à spectre continu (la pulsation).

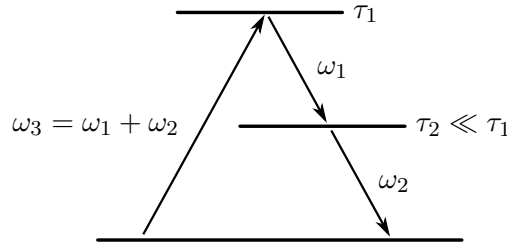


FIGURE 3.2 – Système à trois niveaux considéré pour l'intrication en temps-énergie

En 1989, après que Horne et Zeilinger eurent remarqué [HZ86] que les inégalités de Bell étaient applicables à des états intriqués plus généraux que des observables binaires (comme le spin ou la polarisation), FRANSON proposa [Fra89] d'utiliser un tel état intriqué pour réaliser un test de Bell. L'année suivante, Ou *et al.* [OZWM90] et Kwiat *et al.* [KVH<sup>+</sup>90] réalisèrent indépendamment l'expérience et confirmèrent les prédictions quantiques.

Comment Franson propose-t-il, à partir d'un espace des états de dimension infinie (car associé à l'observable « instant de détection » de spectre continu), de réduire le problème à un sous-espace à deux dimensions ? Il suffit de catégoriser les instants de détection en deux classes orthogonales et de concevoir une méthode de mesure qui ne fait la distinction qu'entre ces deux classes. Expérimentalement, on dirige chaque photon vers deux voies (notées 1 et 2) et on introduit sur chacune un pseudo-interféromètre de Mach-Zehnder dont les longueurs de bras sont déséquilibrées d'une valeur  $\Delta L$ , introduisant un retard  $\Delta T = \Delta L/c$  (dans l'air). La longueur d'un bras par rapport à l'autre est contrôlée à une fraction de la longueur d'onde près, avec un retard de phase ajustable  $\phi_1$  en voie 1 et  $\phi_2$  en voie 2 (Fig. 3.3). On détecte chaque photon en sortie (l'une ou l'autre) des interféromètres et on s'intéresse plus précisément au retard de l'un par rapport à l'autre. Afin d'éviter les interférences d'un photon avec lui-même (*i.e.* s'assurer de l'absence d'effets des cohérences d'ordre 1), on veille à choisir  $\Delta T \gg \tau_2$ . C'est à ce titre qu'on ne peut pas parler d'un véritable interféromètre de Mach-Zehnder<sup>16</sup>. En revanche, si par ailleurs  $\Delta T \ll \tau_1$ , on s'attend à des corrélations liées à une cohérence d'ordre 2 : des interférences entre les différents chemins possibles pour les deux photons.

Franson calcula que la fonction de corrélation d'ordre deux exprimant la coïncidence à l'instant  $t$  d'un photon en  $\mathbf{r}_1$  (détecteur  $D_1^+$ ) et d'un photon en  $\mathbf{r}_2$  (détecteur  $D_2^+$ ) vaut :

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t) \propto \cos^2 \left[ \frac{\omega_3 \Delta T + \phi_1 + \phi_2}{2} \right] = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

où les notations  $\varphi_1 = \phi_1/2$  et  $\varphi_2 = -(\phi_2 + \omega_3 \Delta T)/2$  permettent de faire apparaître la similitude avec les expressions entrant en jeu dans l'inégalité de Bell (3.10).

15. L'expression est simplifiée en considérant que les photons 1 et 2 sont émis de façon rigoureusement simultanée, tandis qu'un temps moyen  $\tau_2 \ll \tau_1$  les sépare.

16. On pourrait parler d'interféromètre de Mach-Zehnder à deux photons, ou d'ordre deux.

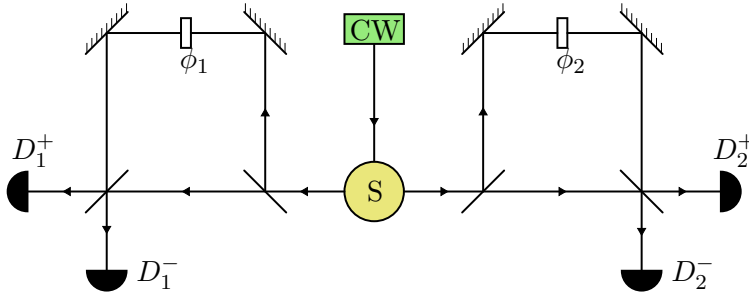


FIGURE 3.3 – Montage proposé par FRANSON [Fra89] pour réaliser des mesures de Bell avec des états intriqués en temps-énergie : une source émet en continu (CW) de paires de photons dans deux directions opposées. Chaque photon entre dans un interféromètre de Mach-Zehnder de déséquilibre de bras  $\Delta L$  identique à une phase près  $\phi_1$  pour l'un,  $\phi_2$  pour l'autre. Une paire de détecteurs ( $D_1^+$  et  $D_2^+$ ), ou deux, mesurent les corrélations entre les voies de sorties de l'interféromètre.

Bien que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  puissent varier de manière importante d'une détection à l'autre (leur incertitude  $\Delta\omega \propto 1/\tau_2$  est grande), la figure d'interférence est stable car seule la somme  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  (dont l'incertitude est proportionnelle à  $1/\tau_1 \ll 1/\tau_2$ ) intervient dans l'expression. À ce titre, on dit que le dispositif présente une cohérence d'ordre 2 en temps, liée à l'intrication temps-énergie.

Les interférences liées à cette cohérence d'ordre 2 peuvent se comprendre également en termes de chemins indiscernables au sens de Feynman :

Pour chaque photon, l'instant de détection peut correspondre

- soit à un temps  $T_0$  si le photon est passé par le bras court de l'interféromètre. On dit alors que le photon était dans l'état  $|c\rangle$  ;
- soit au temps  $T_0 + \Delta T$  si le photon est passé par le bras long. On dit que le photon était dans l'état  $|l\rangle$ .

Si l'on s'intéresse au retard du photon de la voie 2 par rapport au photon de la voie 1, différents résultats de mesures sont possibles :

- ( $lc$ ) : un retard  $-\Delta T$  si le photon 1 était dans l'état  $|l\rangle$  et le photon 2 dans l'état  $|c\rangle$ ,
- ( $cl$ ) : un retard  $\Delta T$  si le photon 1 était dans l'état  $|c\rangle$  et le photon 2 dans l'état  $|l\rangle$ ,
- ( $cc + ll$ ) : un retard nul dans les deux autres cas : les deux photons dans l'état  $|c\rangle$  ou les deux photons dans l'état  $|l\rangle$ .

Puisque  $\Delta T \ll \tau_1$ , les amplitudes de probabilité liées aux chemins ( $cc$ ) et ( $ll$ ) s'additionnent. En faisant varier  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , il est possible de rendre les interférences plus ou moins constructives et faire apparaître des franges.

### 3.3.6 Time-bin

Dans le cas évoqué jusque là, l'indiscernabilité des chemins ( $cc$ ) et ( $ll$ ) résidait dans l'incertitude fondamentale sur l'instant de création de la paire de photons. Lorsque la pompe n'est plus continue, la paire de photons est créée à un instant  $t_0$  connu à la durée d'impulsion  $\Delta t$  près. Cette information supplémentaire rend ces chemins discernables si  $\Delta t$  n'est pas grand devant  $\Delta T$  et détruit les interférences ( $\omega_3$  varie d'une détection à l'autre).

En 1999, BRENDÉL et ses collaborateurs de Genève [BGTZ99] proposèrent d'utiliser une pompe impulsionnelle de  $\delta t = 300$  ps, inférieure à un déséquilibre de l'interféromètre de  $\Delta T = 1,2$  ns. Afin de rétablir des chemins indiscernables, on ajoute un degré de liberté temporel en plaçant un interféromètre semblable aux précédents sur le chemin de l'impulsion de pompe, afin de dupliquer celle-ci en deux impulsions séparées de  $\Delta T$  (voir Figure 3.4). Ainsi, la production des paires de

photons peut avoir lieu soit à l'instant  $t_0$  soit à l'instant  $t_0 + \Delta T$ . Chaque photon est ensuite dirigé vers un interféromètre, comme dans l'expérience de Franson.

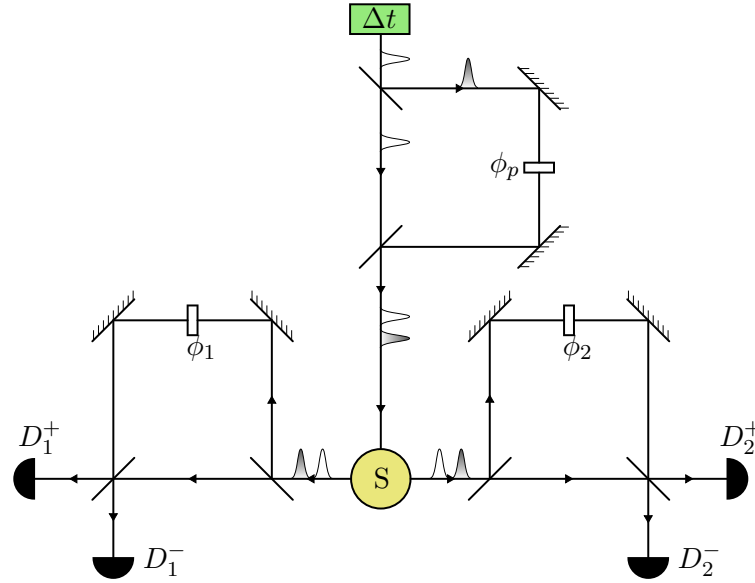


FIGURE 3.4 – Montage utilisé par BRENDÉL *et al.* [BGTZ99] pour l'intrication en *time-bin*

On définit des modes temporels discrets, appelés *time-bins* (ou créneaux temporels) :

- le premier créneau correspond à une impulsion de pompe non retardée dans l'interféromètre de préparation ni dans l'interféromètre d'analyse,
- le second créneau correspond à l'accumulation d'un retard  $\Delta T$  dû à un passage dans un bras long (interféromètre de préparation ou d'analyse)
- le troisième créneau correspond à l'accumulation d'un retard  $2\Delta T$  dû à un passage dans les bras longs de chaque interféromètre.

Autrement dit, ces trois créneaux sont trois valeurs propres d'une mesure d'instant de détection auxquelles on peut associer des états propres :

- $|cc\rangle$  pour le premier créneau,
- $|cl\rangle$  ou  $|lc\rangle$  pour le deuxième créneau,
- $|ll\rangle$  pour le troisième créneau.

La deuxième valeur propre est associée à deux états propres qui correspondent à deux chemins indiscernables pouvant interférer.

Lorsque le photon de pompe est préparé dans l'état<sup>17</sup>  $|\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|c\rangle + e^{i\phi_p}|l\rangle)$ , une paire de photons peut être produite dans l'état intriqué  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|c\rangle|c\rangle + e^{i\phi_p}|l\rangle|l\rangle)$  qui devient, après passage dans chacun des bras d'analyse :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |cc\rangle|cc\rangle + e^{i\phi_1}|cl\rangle|cc\rangle + e^{i\phi_2}|cc\rangle|cl\rangle + e^{i(\phi_1+\phi_2)}|cl\rangle|cl\rangle \\ + e^{i\phi_p}|lc\rangle|lc\rangle + e^{i(\phi_p+\phi_1)}|ll\rangle|lc\rangle + e^{i(\phi_p+\phi_2)}|lc\rangle|ll\rangle + e^{i(\phi_p+\phi_1+\phi_2)}|ll\rangle|ll\rangle \}$$

Deux de ces termes correspondent à des états ayant la même valeur propre : un instant de détection dans le deuxième time-bin. Par une post-sélection des événements (les coïncidences dans ce time-bin), on peut réduire l'état à

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{i(\phi_1+\phi_2)}|cl\rangle|cl\rangle + e^{i\phi_p}|lc\rangle|lc\rangle \}$$

17. Cette forme est la forme générale d'un *qubit*

On peut montrer [MdRT<sup>+</sup>02] qu’une mesure de coïncidences pour un tel état donne lieu à des franges d’interférence en fonction de  $\phi_1 + \phi_2 - \phi_p$ .

Remarquons que ces expériences (time-bin tout comme temps-énergie) n’étaient pas basées sur des systèmes à trois niveaux réels, mais sur un processus de fluorescence paramétrique (voir §. 2.5). Le temps  $\tau_1$  correspond alors au temps de cohérence du faisceau de pompe, et le temps  $\tau_2$  au temps de cohérence de chaque photon généré. Ces deux temps caractéristiques ne sont pas directement liés aux durées de vie de niveaux réels (les niveaux sont virtuels), mais sont liés aux caractéristiques temporelles et fréquentielles des photons en jeu :

- $\tau_2 = \frac{1}{\Delta\omega_{1,2}}$  où  $\Delta\omega_{1,2}$  est la largeur spectrale du photon 1 (resp. 2) généré par fluorescence paramétrique. Cette largeur spectrale est, sauf filtrage postérieur, fixée par les conditions d’accord de phase. Elle est naturellement grande, donc en l’absence de filtrage spécifique,  $\tau_2$  est très court.
- $\tau_1 = \frac{1}{\Delta\omega_3}$  où  $\Delta\omega_3$  est la largeur spectrale de l’onde de pompe, qui est liée par une relation de Fourier à  $\Delta t$ , la durée de l’impulsion de pompe.

L’intrication en time-bin présente l’avantage d’être robuste lors de la propagation :  $\Delta T$  peut être rendue suffisamment grand pour que l’état soit insensible à l’éventuel étalement temporel des impulsions lors de la propagation. De plus, les fluctuations de polarisation ne dégradent pas la cohérence. Ainsi, comme l’ont montré Y. MARCIKIC et ses collaborateurs [MdRT<sup>+</sup>04], il est possible d’observer des corrélations quantiques même après 50 km de fibre optique standard, et même d’utiliser un réseau industriel existant pour des communications quantiques [LvHB<sup>+</sup>07].

Cependant, la nécessité que le déséquilibre entre le bras long et le bras court des interféromètres soit grand devant la longueur de cohérence de chaque photon ( $\Delta T \gg \tau_2$ ) pose un problème lorsque ces photons doivent avoir une grande finesse spectrale : le temps de cohérence étant proportionnel à l’inverse de la largeur spectrale, il devient très difficile techniquement de stabiliser la longueur optique des bras de l’interféromètre lorsque le spectre des photons est très étroit : par exemple, une largeur spectrale de 10 MHz impliquerait<sup>18</sup> une longueur de bras à la fois très supérieure à 9 m (dans le cas d’un interféromètre fibré à 1550 nm) et précise à une fraction de longueur d’onde près, soit de l’ordre de 1 pour  $10^8$ . C’est la raison pour laquelle, malgré les avantages de l’intrication en time-bin, le projet de source de photons intriqués de très faible largeur spectrale dans lequel s’inscrit cette thèse se base sur l’intrication en polarisation.

---

18.  $\Delta T \Delta\nu = \frac{2 \ln 2}{\pi} \approx 0,44$  pour des largeurs à mi-hauteur mesurées en intensité

## Chapitre 4

# Sources de lumière non-classique

L'avènement du laser, par ses propriétés de contrôle cohérent de la matière, signe les débuts de l'optique quantique. Mais la frontière est véritablement franchie lorsqu'il devient possible de produire des états comprimés ou des états nombres. Ce chapitre a pour but de présenter rapidement une partie de cette deuxième catégorie de sources d'états non-classiques de la lumière, qui sont des éléments essentiels aux expériences d'optique quantique en régime de comptage de photons.

Il n'existe pas de source de lumière non-classique idéale pour l'ensemble de ces expériences, d'où l'abondance et la variété de la recherche en la matière. C'est pourquoi, avant de présenter un état de l'art sur le type de source qui a été choisi pour le projet e-Quanet, à savoir les sources de paires de photons intriqués en polarisation basées sur la fluorescence paramétrique dans un cristal non-linéaire, nous allons passer en revue quelques autres types de source, qui ont leurs avantages spécifiques dans le contexte de l'information quantique.

### 4.1 Différentes techniques de production de photons uniques

La réalisation de sources de photons déclenchées<sup>1</sup> repose sur le principe suivant : un « émetteur de lumière » (que nous précisons ensuite) initialement au repos (qui n'émet pas de lumière) est placé dans un état excité à la demande, revient spontanément dans l'état initial en émettant un photon. La qualité d'une telle source est liée :

- à la capacité d'isoler un émetteur unique,
- au contrôle de son excitation,
- au contrôle de son retour dans l'état fondamental (efficacité radiative, directivité, spectre),
- aux conditions de fonctionnement d'une telle source (température, par exemple)

**Atomes froids et ions piégés** — Le modèle idéal d'un tel émetteur est celui de l'atome froid ou de l'ion piégés, dont les transitions sont bien connues et contrôlées. Leur émission spontanée, comme pour tout dipôle, est fortement non-directive, ce qui peut être compensé en les plaçant dans une cavité de grande finesse pour exalter l'émission dans le mode de la cavité par effet Purcell (atome : [MBB<sup>+</sup>04], ion : [MBR<sup>+</sup>04]). Lorsque le couplage entre le dipôle et le mode de cavité est suffisamment fort, on parle d'électrodynamique en cavité [LK97] et il est alors aussi possible de produire des états à  $n$  photons de façon déterministe [BVW01].

Mais la complexité expérimentale de tels systèmes les réserve à des applications exigeant des propriétés qu'on ne peut obtenir par d'autres méthodes.

---

1. Pour plus de détails sur les sources de photons uniques déclenchées, on pourra se référer à [GRK02] et [Gra04].



**Molécules uniques** — Une méthode plus simple utilise des molécules uniques (dibenznhtantrène [BLTO99], rhodamines, carbocyanine [All04]) pompées optiquement, qui peuvent même fonctionner à température ambiante (terrylène dans un cristal de para-terphényl [LM00]). Leur spectre de fluorescence peut être large de plusieurs dizaines de nm [All04]. Leur inconvénient principal est leur propension au photoblanchiment, c'est à dire à la perte irréversible d'efficacité de fluorescence après irradiation.

**Boîtes quantiques semiconductrices** — Plus stables de ce point de vue car inertes chimiquement, les boîtes quantiques auto-organisées dans les cristaux semiconducteurs constituent une première alternative. Une méthode courante pour créer des boîtes quantiques est d'effectuer une croissance cristalline par épitaxie par jet moléculaire (EJM) ou en phase vapeur aux organométalliques (PVOM) à partir d'un substrat de GaAs sur lequel est déposée une couche de mouillage d'InAs de quelques épaisseurs atomiques ( $\sim 2$ ). La contrainte résultant de la différence des paramètres de maille engendre la formation spontanée et aléatoire d'« îlots » dont le rôle est de relaxer les contraintes. Cette méthode de croissance a été imaginée en 1938 [SK38] mais est toujours appliquée à la réalisation de boîtes quantiques.

La taille (10 nm–50 nm) de ces boites assure un confinement tridimensionnel des porteurs de charge électrique qui conduit à une densité d'états discrète, apportant localement au semiconducteur des propriétés analogues à celles d'un atome : en particulier, la réduction du taux de relaxation non-radiative des porteurs favorise les transitions radiatives, et ainsi l'observation de fluorescence en réponse à un pompage optique d'énergie supérieure au *gap*. La dynamique complexe des porteurs et l'inhomogénéité de leur structure rend les propriétés des boîtes quantiques plus difficiles à contrôler que celles des atomes, mais la non-nécessité d'utiliser un « refroidissement » par laser et autre piégeage facilite grandement les expériences. Toutefois, les expériences sur les boîtes quantiques nécessitent souvent un refroidissement à l'Hélium (4 K).

Le grand avantage des boîtes quantiques est qu'on peut naturellement les insérer, lors de la croissance, dans des microcavités (voir [Vah03] pour une revue). Comme pour l'électrodynamique en cavité avec des atomes, l'émission est alors favorisée dans le mode de la cavité, ce qui augmente à la fois l'efficacité de génération et de collection. Le produit de ces deux efficacités reste toutefois faible, estimé de l'ordre de 1 % [All04].

Différents types de cavité sont possibles, comme par exemple des microcavités Fabry-Pérot basées sur des miroirs de Bragg constitués d'un empilement de couches semi-conductrices et gravées sous forme de micropiliers, des membranes de cristaux photoniques 2D, ou des microdisques (Fig. 4.1)

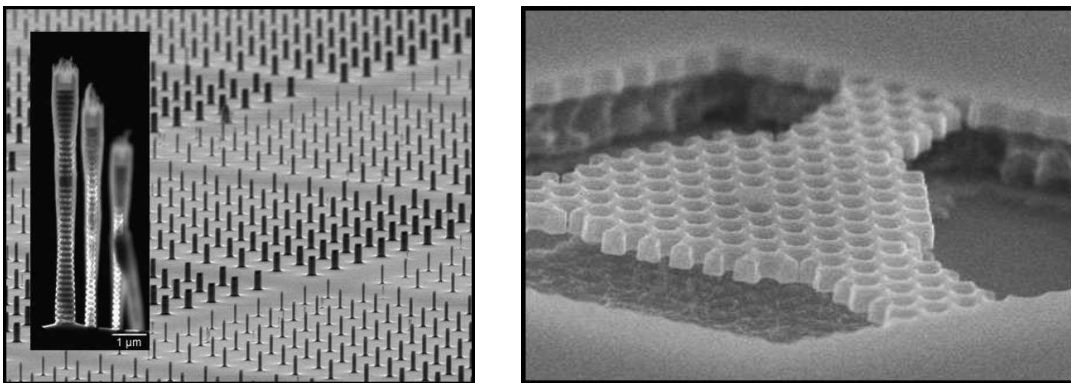


FIGURE 4.1 — Deux type de cavités possibles pour une boîte quantique : Micropiliers (à gauche), Membrane de cristal photonique 2D [LVLG+05] (à droite). Photos : Laboratoire de Photonique et de Nanostructures

**Centres colorés du diamant** — Les centres colorés du diamant, en particulier les centres N-V [BBPG00] (pour *Nitrogen-Vacancy*) ont un fonctionnement semblable à celui des molécules mais sont bien plus photostables, même à température ambiante [BBPG01]. Parmi les diverses impuretés que le diamant présente naturellement en très faible densité, on trouve des atomes d'azote. Lorsque le diamant est irradié par un faisceau d'électrons suffisamment énergétiques, des lacunes se forment dans sa structure cristallographique. Elles sont naturellement immobiles à température ambiante. En procédant à un recuit aux alentours de 800 °C, les lacunes migrent préférentiellement vers les impuretés et créent des centres « N-V », qui présentent des propriétés de photoluminescence. Lorsque le flux d'irradiation est suffisamment faible, la faible densité de centres N-V permet de les isoler les uns des autres et de les utiliser comme émetteurs uniques qu'il est possible de déclencher sur demande.

Sous forme de nanocristaux [BBG<sup>+</sup>01, BKB<sup>+</sup>02], ils présentent de très bonnes caractéristiques pour les applications en cryptographie quantique [BBG<sup>+</sup>02, ATM<sup>+</sup>04] avec le protocole BB84 [BB<sup>+</sup>84] et pour réaliser des tests fondamentaux de la mécanique quantique.

En particulier, l'expérience démontrant rigoureusement la dualité onde-corpuscule, réalisée initialement à l'aide de cascades atomiques [GRA86] par Ph. GRANGIER en 1986, a été de nouveau réalisée avec les centres N-V par V. JACQUES et ses collaborateurs [JWT<sup>+</sup>05]. Les excellentes performances de la source en termes de dégroupement de photons et de brillance leur ont permis de présenter les résultats sous une forme particulièrement convaincante puisque l'apparition progressive des franges d'interférences entre photons uniques, mesurée par une matrice CCD en régime de comptage de photons placée après un biprisme de Fresnel, a été filmée en temps réel.

Pour clore la faille selon laquelle le choix du comportement corpusculaire ou ondulatoire pourrait être déterminé par une information sur la nature de la mesure, V. JACQUES et son équipe ont réalisé pour la première fois [JWG<sup>+</sup>07] l'expérience de pensée que J. WHEELER proposa en 1978 : déterminer le type de mesure (anticorrélation ou interférence) après que le photon unique a traversé la lame séparatrice. Pour anéantir tout lien de causalité imaginable –ou non–, les expérimentateurs ont utilisé la source d'aléa la plus aléatoire disponible actuellement : un générateur quantique de nombres aléatoires, dont la valeur détermine le type de mesure, et ont séparé l'évènement de passage par la lame séparatrice de l'évènement du choix du type de mesure par un intervalle du genre espace au sens de la relativité restreinte.

Ces expériences montrent le grand progrès qu'a été la mise au point de telles sources, mais il est important de remarquer qu'aucun état intriqué n'a encore été produit par des centres N-V, bien que des propositions existent en utilisant deux centres NV distants [BK10]. Par ailleurs, ces sources présentent un spectre d'émission très large ( $\approx 70$  nm de pleine largeur à mi-hauteur [All04]), ce qui n'est pas compatible avec des mémoires quantiques. Et contrairement aux sources basées sur la fluorescence paramétrique, dont nous allons parler maintenant, un filtrage spectral très restrictif après émission ne peut être compensé par une augmentation de la brillance : la cadence d'émission d'un centre N-V est limitée, et un émetteur constitué de plusieurs centres ferait perdre les caractéristiques qui font l'intérêt de cette méthode (indiscernabilité, dégroupement).

## 4.2 Photons annoncés

Outre les états à un photon émis de manière déterministe par les sources que nous venons d'évoquer, il est possible de générer des états à un photon qui sont émis à des instants aléatoires, à condition de produire les photons par paires, de façon corrélée. Dans ce cas, la détection d'un des deux photons de la paire annonce la présence du deuxième dans un mode déterminé. On parle de photons jumeaux. Nous allons illustrer cela en prenant l'exemple de la fluorescence paramétrique, vue au paragraphe 2.5 page 37, qui est une façon de produire des paires de photons jumeaux.

L'état (Eq. 2.17) d'une paire de photons générée par fluorescence paramétrique a été calculé en représentation de Schrödinger. Il peut se récrire, en notant  $x = \sinh^2 g\tau$  :

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}} |nn\rangle \quad (4.1)$$

La matrice densité associée à cet état pur n'a qu'un seul terme, elle se réduit à un projecteur :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Considérons la détection d'un des deux photons uniquement. Par exemple, s'ils ne le sont pas déjà, séparons spatialement les modes 1 et 2 vers deux directions distinctes. Ceci peut se faire avec un filtre dichroïque s'ils sont discernables spectralement, ou avec un séparateur de polarisation si leurs polarisations sont orthogonales<sup>2</sup>. Laissons le photon dans le mode 2 interagir librement avec son environnement, et plaçons un détecteur<sup>3</sup> en chemin du photon dans le mode 1. Une telle étude partielle du système nécessite d'introduire l'opérateur densité réduit correspondant au sous-espace associé au mode 1. Il s'exprime par la trace partielle de l'opérateur densité global par rapport au mode 2 :

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2 \{ \hat{\rho} \}$$

Les composantes de  $\hat{\rho}_1$  sont définies, sous cette opération, par

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{\rho}_1 | m \rangle &= \sum_k \langle nk | \hat{\rho} | mk \rangle \\ &= \langle nm | \frac{x^m}{(1+x)^{m+1}} | mm \rangle \\ &= \delta_{nm} \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi, on a une probabilité  $p_n = \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}$  de détecter  $n$  photons dans le mode 1. Il est remarquable (voir [YP87]) que cette distribution de probabilité est identique à celle des états chaotiques de la lumière (Eq. 1.20), si l'on considère  $x = \sinh^2 \gamma\tau = \bar{n}$ , le nombre moyen de photons dans l'intervalle de temps considéré pour la mesure. On peut donc associer un nombre moyen de photons produits à une interaction paramétrique définie précédemment (cf. Chap 2, Eq. (2.18) page 40) par l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  d'intensité de couplage  $\gamma$  pendant une durée  $t$ .

Que se passe-t-il maintenant si, au lieu de laisser le photon dans le mode 2 interagir librement avec l'environnement, on conditionne la détection du photon dans le mode 1 à une détection d'un photon dans le mode 2? Ce cas revient à effectuer deux mesures successives : une première sur le photon 2, une seconde sur le photon 1.

La détection d'un photon dans le mode 2 correspond à la présence dans ce mode d'*au moins* un photon. On projette donc l'état  $|\psi\rangle$  dans le sous-espace associé au mode 1.

L'état du système après projection est

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}} |n\rangle_1$$

2. La séparation des deux photons par une lame semi-réfléchissante est possible mais transforme l'état pur du champ en un mélange statistique : les deux photons ne sont pas toujours séparés ; dans un cas sur deux, ils prennent la même direction, ce qui rend le problème formellement plus complexe. Pour un approfondissement de cette question, on pourra se reporter au chapitre 5.

3. On considère ici un détecteur idéal, d'efficacité 1 et sans temps mort, permettant de discerner  $n$  photons quel que soit le temps qui les sépare. Dans la suite du document, ce ne sera pas le cas.

où  $C$  est un coefficient permettant la renormalisation de l'état après mesure, valant

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}} = \frac{1}{1+x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^n - 1 \right) = \frac{1}{1+x} \left( \frac{1}{1-\frac{x}{1+x}} - 1 \right) = \frac{x}{1+x}$$

En reprenant le fait que  $x = \bar{n}$ , l'état final du photon dans le mode 1 est finalement

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left( \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n} |n\rangle_1$$

Calculons maintenant le rapport  $p_2/p_1^2$  pour cet état :

$$\frac{p_2}{p_1^2} = \frac{\frac{\bar{n}}{(1+\bar{n})^2}}{\left( \frac{1}{1+\bar{n}} \right)^2} = \bar{n} \xrightarrow{\bar{n} \rightarrow 0} 0$$

Avec une telle source de paires de photons, on s'aperçoit que dans le cas où on conditionne la détection d'un des deux photons à la pré-détection de l'autre, il est possible de rendre la présence de photons multiples aussi improbable qu'on veut, à condition de produire en moyenne suffisamment peu de paires. Lorsque cette moyenne s'approche de zéro, et avec des détecteurs idéaux, la source ainsi produite s'approcherait d'une source idéale de photons uniques.

### 4.3 Sources de paires de photons intriqués

Si les premières sources ayant permis d'observer des corrélations de polarisation entre paires de photons intriqués étaient basées sur l'annihilation électron-positron [WS50, KUW75], c'est avec des cascades radiatives atomiques qu'ont été réalisées les premières violations expérimentales de l'inégalité de Bell (voir § 3.2.5 p. 55). Cependant, la faible « efficacité d'extraction », c'est à dire la proportion de paires utiles parmi les paires générées, ainsi que la complexité des expériences limitaient le développement rapide de nouvelles expériences. C'est avec l'utilisation de sources basées sur la fluorescence paramétrique dans des milieux non-linéaires qu'il a été possible d'explorer, de manière de plus en plus simple et efficace, les propriétés de corrélation et d'intrication en optique quantique. Nous allons présenter un rapide panorama de ce type de sources, puis insister davantage sur les récentes réalisations.

#### Les précurseurs : intrication *a posteriori* par une lame semi-réfléchissante avec post-sélection

**Type I non-colinéaire** — Les premières sources de paires de photons intriqués en polarisation basées sur la génération paramétrique dans un cristal non-linéaire datent de l'année 1988, lorsque deux équipes (SHIH & ALLEY [SA88] puis OU & MANDEL [OM88], voir Fig. 4.2) utilisèrent, indépendamment, un cristal de KDP<sup>4</sup> pour produire de façon non colinéaire des paires de photons dégénérés en fréquence, qui sont ensuite intriqués en polarisation par passage à travers une lame semi-réfléchissante. Ce dispositif, beaucoup plus simple expérimentalement que les autres sources existantes, permit aux auteurs de violer l'inégalité de Bell par 3 écarts-types pour les premiers et par 6 écarts-types pour les seconds. La brillance spectrale de la source, à savoir le taux de paires de photons produites dans la bande passante par unité de puissance de pompe (qu'on exprimera par la suite en Hz/mW/MHz) n'est, dans les deux cas, pas renseignée : il ne s'agissait pas encore de rechercher une bonne efficacité, mais de prouver que des sources basées

4. DKDP chez Shih & Alley

sur la fluorescence paramétrique permettant de produire des états présentant des corrélations quantiques.

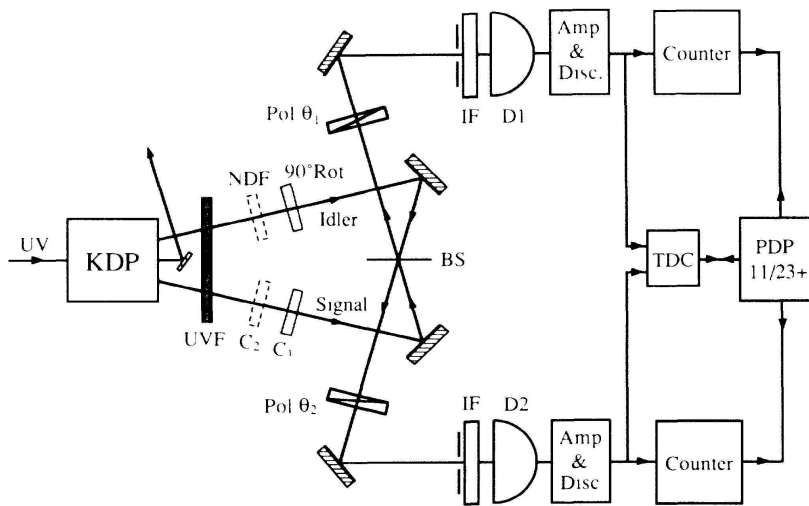
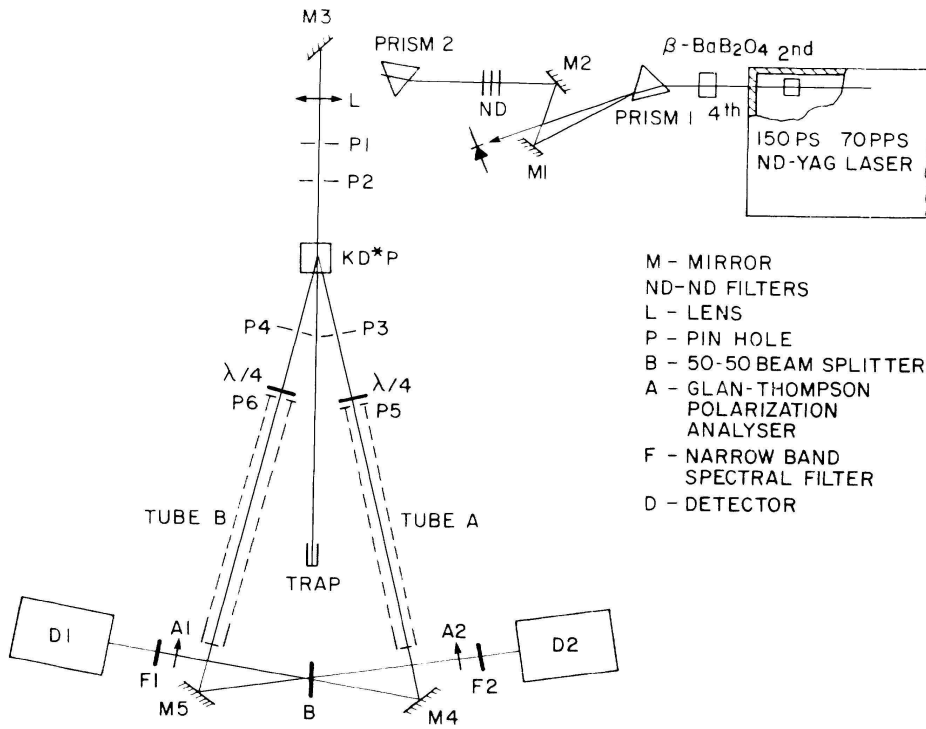


FIGURE 4.2 – Montages des expériences de SHIH & ALLEY (en haut, tiré de [SA88]) et de OU & MANDEL (en bas, tiré de [OM88]), 1988

Dans ces expériences, l'accord de phase est de type I : les deux photons sont générés avec la même polarisation, mais celle d'un des deux photons est tournée de 90°<sup>5</sup> avant la lame semi-réfléchissante qui produit l'intrication.

**Type II colinéaire** — L'accord de phase de type II permet un résultat similaire tout en simplifiant les conditions expérimentales [SSR<sup>+</sup>94, RKSS94]. La superposition d'un photon or-

5. Dans le cas de polarisations linéaires. Shih & Alley transforment également les états linéaires générés en polarisations circulaires et observent aussi des corrélations

dinairement polarisé et de son jumeau extraordinairement polarisé au sein d'un même faisceau, dirigé vers un des deux ports d'entrée d'une lame séparatrice, se sépare en un faisceau transmis et un faisceau réfléchi. La polarisation sur chaque voie est aléatoire mais l'anti-corrélation est totale. Contrairement au type I non-colinéaire où le recouvrement des deux photons nécessite un ajustement précis, il est immanent en type II colinéaire.

Le défaut fondamental de ce type de sources, que ce soit en type I non-colinéaire ou type II colinéaire, est lié au fait que cette intrication en polarisation a lieu *a posteriori* à partir d'un état non-intriqué vis-à-vis de cette observable. L'état total après la lame reste un état séparable ; il ne devient intriqué que par une post-sélection des termes donnant lieu à des coïncidences sur deux détecteurs<sup>6</sup>

Comme il a été remarqué [KESC94, DCG94], une source d'intrication pure basée sur la fluorescence paramétrique doit faire appel à une autre méthode.

### Intrication intrinsèque en accord de phase de Type II

Si l'on met à part l'expérience de J. RARITY et P. TAPSTER [RT90] en 1990 qui ne se basait pas sur l'intrication en polarisation, P. G. KWIAT et ses collaborateurs furent les premiers à proposer [KESC94] en 1994 un dispositif expérimental n'exigeant pas de post-sélection (voir Fig. 4.3). Ce dispositif consistait à générer, par fluorescence de type II dans deux cristaux séparés mais pompés par des impulsions cohérentes, des paires de photons de polarisations orthogonales. En recombinant les amplitudes de probabilité de création des deux paires sur une lame séparatrice, l'état de sortie est un état directement intriqué.

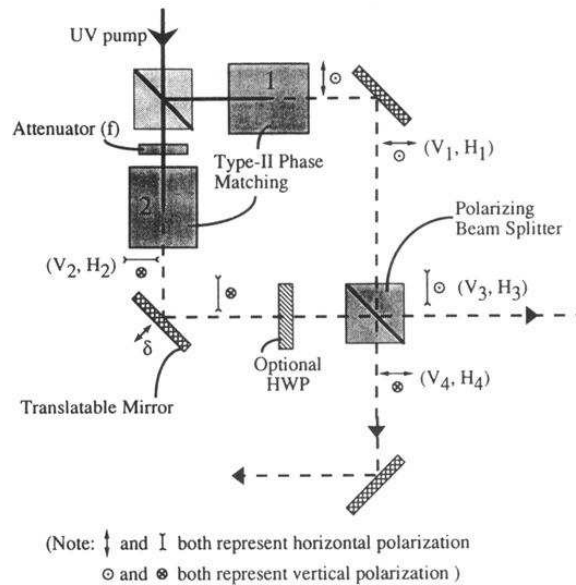


FIGURE 4.3 – Montage de l'expérience de KWIAT *et al.* de 1994 (tiré de [KESC94])

Pourtant, l'expérience que réalisa le même P. Kwiat<sup>7</sup> un an plus tard [KMW<sup>+</sup>95] pour pallier la faille de la post-sélection se basait sur un principe différent. Lorsque l'orientation de l'axe optique

6. L'état de sortie de la lame est :

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{2} (|H\rangle_3 + \iota |H\rangle_4) (\iota |V\rangle_3 + |V\rangle_4) \\
 &= \frac{1}{2} \left( |H\rangle_3 |V\rangle_4 - |V\rangle_3 |H\rangle_4 \right) + \iota |V\rangle_3 |H\rangle_3 + \iota |V\rangle_4 |H\rangle_4
 \end{aligned}$$

où 1,2 désignent les ports d'entrée de la lame séparatrice et 3,4 ses ports de sortie.

7. cette fois-ci avec ses collaborateurs de l'autre côté de l'atlantique, à Innsbruck

du cristal par rapport à l'axe du faisceau de pompe est bien choisie, les cônes de polarisation ordinaire et extraordinaire de même fréquence peuvent présenter une intersection. Comme nous l'avons déjà remarqué au Chapitre 2, §. 2.5.3, dans les deux directions d'intersection, l'état produit par fluorescence est intrinsèquement intriqué.

Par la brillance obtenue ( $1500 \text{ Hz}$ ,  $6 \times 10^{-5} \text{ Hz/mW/MHz}$ ) et l'amplitude de violation de l'inégalité de Bell permise (plus de 100 écarts-types), ce type de source fut longtemps privilégié, d'autant qu'il permet de produire chacun des quatre états de Bell. Ses qualités fondamentales et sa relative simplicité de mise en œuvre en font une source privilégiée pour l'enseignement [TSB<sup>+</sup>04, MSP<sup>+</sup>08, Jac].

Mentionnons également que c'est au cours de la même période que naissent les premières expériences concluantes de mesure de corrélations quantiques à l'aide de photons intriqués en temps-énergie (cf. §. 3.3.5) [TRO94, TBG<sup>+</sup>98].

### Intrication à posteriori en type I non-colinéaire

La principale limitation de la source de Kwiat est la restriction des paires utiles aux deux directions particulières permettant l'intrication. Une grande proportion des paires produites ne sont pas à la fois indiscernables en fréquence et corrélées en polarisation.

Ce problème fut partiellement contourné par Kwiat lui-même [KWW<sup>+</sup>99], en 1999, à l'aide de deux cristaux successifs orientés de  $90^\circ$  l'un par rapport à l'autre, et où l'accord de phase est réalisé en type I (voir Fig. 4.4). Le faisceau de pompe est polarisé de manière à ce qu'une composante de sa polarisation participe au processus dans le premier cristal, et l'autre composante au processus dans le second cristal.

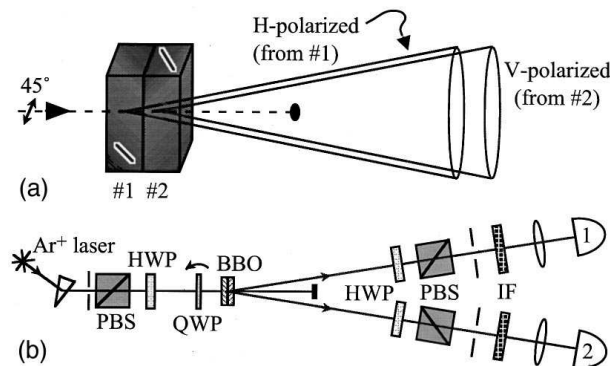


FIGURE 4.4 – Montage de l'expérience de Kwiat *et al.* de 1999 (tiré de [KWW<sup>+</sup>99])

Sous des contraintes de temps de cohérence et de diamètre de focalisation du faisceau de pompe, les deux processus de conversion peuvent être cohérents et l'état de la paire être défini par la superposition des états que chacun produirait indépendamment. Cette superposition se produit pour toutes les directions décrites par un cône de fréquence particulière, et non plus deux directions d'intersection.

Cette source, qui fut l'objet d'un dépôt de brevet [KEW02] en 2002, a permis de violer l'inégalité de Bell de manière plus significative encore que la source du même auteur en 1995 (242 écarts-types) en presque deux fois moins de temps de mesure. La brillance obtenue est environ 300 fois supérieure, à savoir  $2 \times 10^{-2} \text{ Hz/mW/MHz}$ .

Mais cette brillance est évaluée sur toutes les directions décrivant le cône. En pratique, il n'est possible d'exploiter qu'un angle solide limité, en raison des contraintes géométriques de collection (sur la surface d'un détecteur, ou par une fibre optique [KOW01]), et surtout en raison de la perte de cohérence des paires de photons lorsque, pour de trop grandes ouvertures, le cône issu

du premier cristal ne se confond plus avec celui du second. Cela atténue les progrès apportés par cette source en terme de brillance par rapport à la source précédente de type II, mais le grand choix de directions possibles facilite l'expérience.

Notons que, en 2002, Y. NAMBU et ses collaborateurs ont appliqué ce dispositif à des impulsions de durée femtoseconde, et publié un article [NUT<sup>+</sup>02] où leurs résultats sont accompagnés d'une étude théorique approfondie.

Avec une ouverture plus grande que ce qu'il est permis en type II [KMW<sup>+</sup>95], il est certes possible de collecter une fraction plus importante du cône, mais la fidélité se dégrade fortement en raison d'une perte de cohérence. Ce n'est que six ans plus tard, en 2005, que J. B. ALTEPETER et P. G. KWIAT proposèrent une méthode [AJK05] pour compenser cette décohérence et permettre l'utilisation d'ouvertures plus grandes sans perte significative de fidélité. Là où, en doublant le diamètre d'ouverture de 4 à 8 mm, la fidélité aurait chuté de 5% sans compensation, elle ne diminue que de 0,5% avec compensation. En prenant en compte les conditions de collection permettant une fidélité de 97,7%, la brillance *utile* de cette source est de  $2 \times 10^{-3}$  Hz/mW/MHz, ce qui est 100 fois inférieur à la brillance *totale* de la source de 1999<sup>8</sup>. Une violation de l'inégalité de Bell significativement plus nette a été observée, en un temps encore plus court.

## Apport du quasi-accord de phase

Les nouvelles sources paramétriques ont bénéficié de la technologie relativement récente du quasi-accord de phase (voir §. 2.3) permettant beaucoup plus de flexibilité que l'accord de phase par biréfringence de type I ou II. En particulier, il était devenu simple de générer des paires de photons colinéaires, dégénérées aussi bien que fortement non-dégénérées en fréquence [MAKW02], par un choix approprié de pas de retournement de sa susceptibilité non-linéaire et un contrôle de la température du cristal (cf. §. 2.5.2 p.42).

Deux cristaux sont principalement utilisés pour le quasi-accord de phase : le niobate de lithium (PPLN) [GdCSS<sup>+</sup>06] et le phosphate de potassium et de titanyle (PPKTP) [KMWS02, FMK<sup>+</sup>03, KFM<sup>+</sup>04, FKW05]. Le premier possède une plus grande susceptibilité non-linéaire et produit des paires de photons identiquement polarisés. Le second produit des paires de polarisations orthogonales.

M. FIORENTINO, G. MESSIN *et al.* [FMK<sup>+</sup>04], utilisèrent le PPKTP pour réaliser une variante de l'expérience « interférométrique » proposée par P. Kwiat en 1994 [KESC94] utilisant la recombinaison de paires issues de deux cristaux pompés de manière cohérente (cf. §. 4.3). Par rapport à une expérience très proche de la proposition originelle [KCK<sup>+</sup>01] utilisant deux cristaux de BBO, les auteurs ont utilisé un seul cristal de PPKTP en double pompage contrapropagatif (cf. Fig. 4.5), ce qui leur permet à la fois de tirer partie de la longueur et de la non-linéarité du PPKTP, et de s'abstraire de la dégradation de fidélité (76% [KCK<sup>+</sup>01]) causée par la discernabilité des deux chemins traversant deux cristaux non parfaitement identiques. En raison de la non-reproductibilité parfaite du motif de quasi-accord de phase, cette discernabilité aurait pu être plus importante encore avec deux PPKTP. Fiorentino et son équipe parvinrent à une fidélité de 90% pour une brillance de  $8 \times 10^{-3}$  Hz/mW/MHz, quatre fois plus que la meilleure source basée sur la fluorescence de type II non-colinéaire [AJK05] qui fut pourtant publiée un an après.

Mentionnons également une expérience de 2006, où H. GUILLET DE CHATTELUS [GdCSS<sup>+</sup>06] tira partie des possibilités du quasi-accord de phase pour générer une paire de photons fortement non-dégénérés en fréquence, en utilisant deux processus concurrents dans un seul cristal de PPLN. L'un des deux processus, produisant des paires polarisées extraordinairement, est rendu

8. 20 fois inférieur si l'on rapporte les brillances aux longueurs des cristaux, mais il est impossible de faire cette extrapolation car le couple ouverture/fidélité dépend fortement de la longueur des cristaux



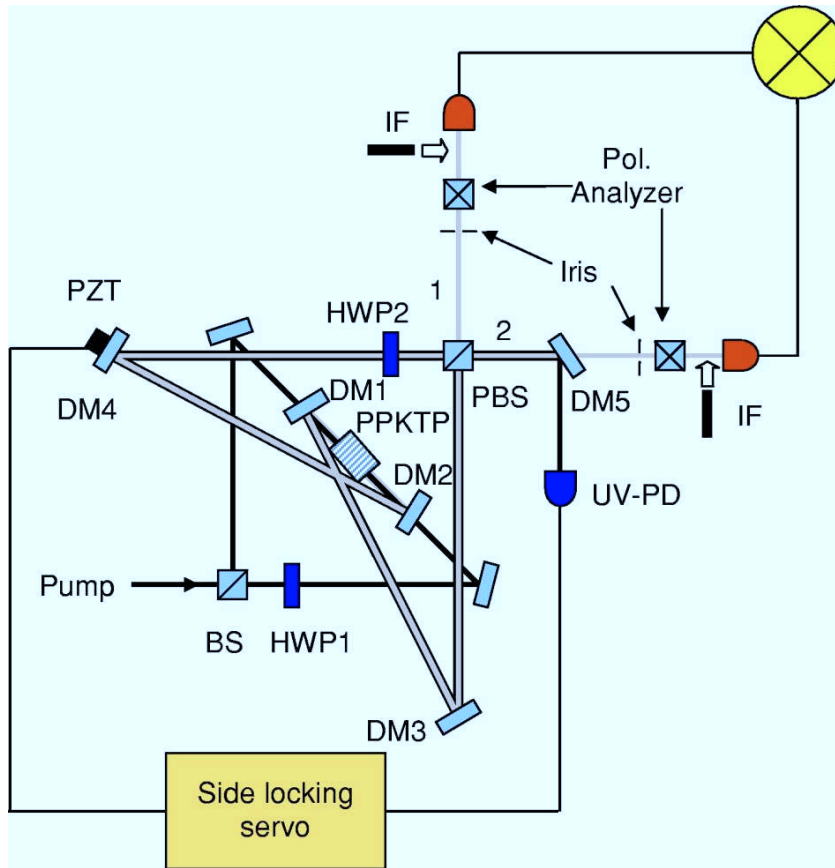


FIGURE 4.5 – Montage de l'expérience de M. FIORENTINO *et al.* de 2004 (tiré de [FMK<sup>+</sup>04])

constructif par quasi-accord de phase tandis que l'autre, produisant des paires polarisées ordinairement, est naturellement en accord de phase, c'est à dire qu'il fait intervenir l'ordre zéro du motif. Par un ajustement en température, les cônes – à 1550 nm d'une part, et à 800 nm d'autre part – associés à chaque processus peuvent être superposés, ce qui définit des directions d'intrication à ces longueurs d'onde. En équilibrant le rendement des deux processus, l'équipe parvint à violer l'inégalité de Bell, avec cependant une visibilité de 75 % assez faible en raison de la complexité expérimentale. Mais ce travail est représentatif des possibilités offertes par l'utilisation du quasi-accord de phase.

Ainsi, la flexibilité du quasi-accord de phase, en particulier les possibilités offertes en configuration colinéaire (contrôle du spectre et utilisation de cristaux longs) font que la majorité des sources produites depuis lors utilisent cette technologie. Cependant, son usage prometteur en cavité, comme dans la source de Fiorentino et Messin [FMK<sup>+</sup>04], pose un problème en terme de fidélité, celle-ci étant limitée par la difficulté de stabiliser la phase entre les deux processus contra-propagatifs cohérents. Un asservissement actif est nécessaire et son efficacité s'avère imparfaite.

### L'interféromètre de type Sagnac

En 2004, B. S. SHI et A. TOMITA résolurent [ST04] le problème de la stabilisation de la phase de l'état intriqué en plaçant le cristal de fluorescence non pas dans un interféromètre de Mach-Zehnder activement asservi comme chez Fiorentino et Messin, mais dans un interféromètre semblable à ceux permettant d'observer l'effet Sagnac. Dans un tel interféromètre, la propagation bidirectionnelle assure naturellement une phase constante entre les états créés dans un sens et les états créés dans l'autre. Bien que, en partie à cause de l'usage d'un cristal de BBO, l'efficacité de la source fût faible ( $\approx 2$  coïncidences par seconde mesurées, visibilité des interférences de 71 %

dans la base non-naturelle), la démonstration du principe fut un succès et donna lieu à d'autres réalisations intéressantes.

En 2006, T. KIM, M. FIORENTINO et F. WONG [KFW06a, KFW06b] utilisèrent ce principe pour une expérience bien plus performante. Reprenant le principe de l'expérience de Fiorentino et Messin ([FMK<sup>+</sup>04], Figure 4.5), ils remplacèrent l'interféromètre de Mach-Zehnder par un interféromètre de Sagnac. Comme prévu, ce changement de type d'interféromètre rendit l'asservissement en phase inutile. Le gain en stabilité apporta un gain de visibilité des interférences (96,8 % au lieu de 90 %) pour une brillance supérieure (30 %). Ces performances furent quelques mois après encore améliorées par la même équipe [WSK06] (brillance deux fois supérieure, soit  $2,1 \times 10^{-2}$  Hz/mW/MHz pour une visibilité elle aussi supérieure à 98 %). La largeur spectrale des photons produits est de 1 nm, déterminée par un filtre interférentiel.

Remarquons qu'en 2008, O. KUZUCU et F. WONG réalisèrent [KW08] une version impulsionnelle (régime picoseconde) de la source précédente, par rapport à laquelle il n'est pas pertinent de comparer les performances en raison de la différence de régime temporel. La largeur spectrale des photons générés est de 0,15 nm, c'est à dire proche du minimum que permet la relation d'incertitude temps-fréquence en régime picoseconde si l'on veut assurer la cohérence du biphoton.

En 2007, A. FEDRIZZI et ses collaborateurs de Vienne [FHP<sup>+</sup>07] améliorèrent encore les performances en régime continu d'un facteur 28 en terme de brillance, à savoir 0,6 Hz/mW/MHz, et avec une visibilité d'interférences atteignant 99,5 % dans la base non-naturelle. Cette source présente également la particularité de pouvoir être accordée sur une plage de  $\pm 26$  nm. Pour démontrer l'intérêt d'une source présentant de telles performances, Fedrizzi et son groupe réalisèrent *in situ* [FUH<sup>+</sup>09], entre les îles de Tenerife et La Palma, une expérience de transmission d'intrication sur 144 km en espace libre. Malgré la turbulence et l'atténuation du milieu atmosphérique, ils parvinrent à réaliser sur une île la mesure de Bell d'un état intriqué généré sur l'autre île et transmis par un système optique classique. La violation par 5,4 écarts-types de l'inégalité de Bell consacra les progrès très rapides réalisés en vingt ans, depuis les premières sources de photons intriqués basées sur la fluorescence paramétrique de SHIH & ALLEY [SA88] et OU & MANDEL [OM88].

Notons que, depuis, l'intérêt de l'interféromètre de Sagnac a conduit M. HENTSCHEL et ses collaborateurs à mettre en œuvre son principe sous la forme d'un dispositif compact [HHPZ09], intégré sur un support monobloc de 5 cm de côté. Ce dispositif, reproduit en Figure 4.6, dispose de tous les éléments optiques nécessaires pour accueillir un cristal de PPKTP de 3 cm de longueur. La conception monobloc assure une excellente stabilité, qui a permis aux auteurs d'obtenir une brillance de 1,13 Hz/mW/MHz pour une fidélité de 97,5 %. De plus, la source est fibrée et l'un des photons est produit à la longueur d'onde de 1550 nm. La largeur spectrale, quant à elle, est de 0,4 nm.

## Contraintes pour l'applications aux communications quantiques

D'un point de vue fondamental, les exemples de sources présentées jusqu'ici ont démontré leurs excellentes performances en terme de fidélité d'intrication, de violation des inégalités de Bell, et d'efficacité par rapport aux sources basées sur des cascades radiatives atomiques. Mais dans la perspective d'applications au domaine des communications quantiques, en récent développement, certaines propriétés nécessaires ne sont pas atteintes.

**Propagation fibrée** — Toutes les sources mentionnées jusque là, exception faite de la dernière [HHPZ09], fonctionnent à des longueurs d'onde voisines de 800 nm, ce qui permet d'utiliser des détecteurs en silicium, dont les performances sont excellentes. Mais cela implique une propagation en espace libre en vis-à-vis, ou une propagation fibrée [KOW01] sur de courtes distances en raison de l'atténuation importante à cette longueur d'onde.

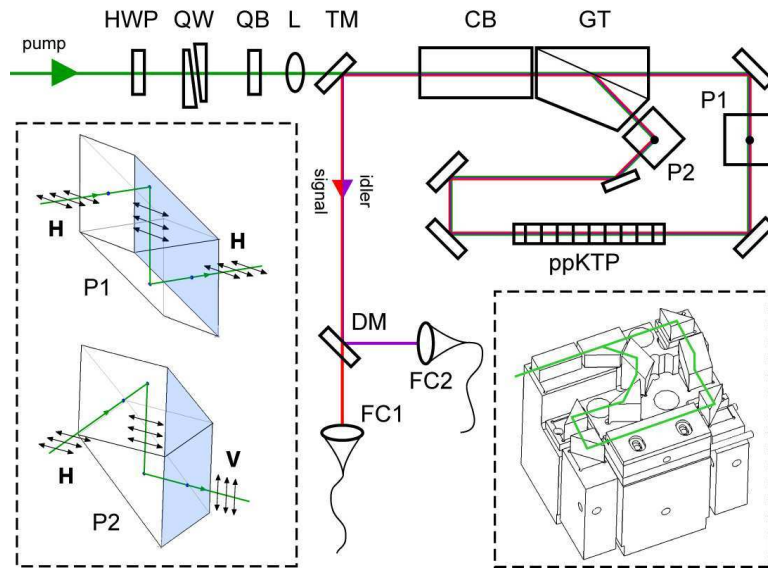


Fig. 2. Schematic of the source: half-wave plate (HWP), quartz wedges (QW), quartz block (QB), focusing lens (L), trichroic mirror (TM), calcite block (CB), Glan-Thompson polarizer (GT), parallel-faced periscope (P1), cross-faced periscope (P2), periodically poled Potassium Titanium Oxide Phosphate crystal (ppKTP), dichroic mirror (DM), fiber couplers (FC1 & FC2). Insert left: principle of operation of the two periscopes. Insert right: 3-dimensional view of the implemented interferometer.

FIGURE 4.6 – Dispositif intégré d'interféromètre de Sagnac pour l'intégration dans une expérience de génération de paires de photons intriqués en polarisation. (tiré de [HHPZ09])

Des sources dont un des photons est créé à 1550 nm ont donc gagné en intérêt. L'un des photons, voisin de 800 nm, est mesuré localement tandis que l'autre est injecté dans une fibre monomode standard pour être distribué à distance. Citons par exemple l'expérience déjà mentionnée (cf. §. 4.3) de H. GUILLET DE CHATTELUS [GdCSS+06], ou celle de D. LJUNGGREN [LTMP06], qui utilise deux cristaux de PPKTP orientés de manière orthogonale, comme dans l'expérience de Kwiat de 1999 [KWW+99], à la différence que, grâce au quasi-accord de phase, l'émission est rendue colinéaire et non-dégénérée en fréquence. Les performances obtenues sont comparables en termes de brillance aux meilleures sources en espace libre [FHP+07], à savoir 0,55 Hz/mW/MHz, mais la visibilité est inférieure ( $\sim 90\%$ ).

Mentionnons également la proposition de S. SAUGE [SSAS+07] et ses collaborateurs suédois d'intégrer une telle source dans un environnement WDM pour une transmission quantique sur de longues distances. La mesure de Bell est réalisée localement sur la voie à 800 nm, mais l'information classique de cette mesure, ainsi que des informations de synchronisation, sont multiplexées en longueur d'onde dans la même fibre qui porte l'information quantique à 1550 nm. La brillance obtenue est de 1,2 Hz/mW/MHz à la source, et la largeur spectrale relativement faible (0,5 nm) permet de maintenir une fidélité brute de 85% après 27 km de fibre. Il s'agit d'un exemple de réalisation concrète d'un lien quantique fibré point à point sur une longue distance avec intrication en polarisation. Une expérience proche [HVL+07], plus performante mais moins sophistiquée, fut soumise à la même revue simultanément par une équipe partenaire autrichienne.

Dans ces exemples, les photons à 800 nm et à 1550 nm sont collectés dans des fibres, mais le spectre des photons reste large (plusieurs nm).

**Finesse spectrale** — Or, une faible largeur spectrale est synonyme de faible dispersion chromatique dans la fibre optique, ce qui réduit la dégradation de la fidélité au cours de la propagation. Il en va de même de la dépolarisation<sup>9</sup>, autre source de dégradation de fidélité dans le cas d'in-

9. Dispersion des modes de polarisation

trication en polarisation, qui est également minimisée pour de faibles largeurs spectrales.

Par ailleurs, même sans dispersion, la fidélité se dégrade dans des fibres avec la distance en raison de l'atténuation. Il est donc nécessaire, pour démultiplier la distance de communication, de concevoir des répéteurs quantiques, qui se basent sur des mémoires quantiques contraignantes en terme de finesse spectrale (quelques dizaines de MHz). Outre la réalisation de répéteurs, les mémoires quantiques permettraient à terme de réaliser des fonctions réseau complexes, comme le routage de qubits dans un réseau multipoint.

L'équipe de J. SHAPIRO, par exemple, proposa en 2002 [Sha02] pour son équipe du MIT un projet allant dans ce sens, dont sont issues certaines des sources que nous venons d'évoquer. Le travail présenté dans cette thèse s'intègre également dans ce type de projet.

F. KÖNIG, de l'équipe de J. Shapiro, réalisa en 2005 une source [KMWA05] relativement plus étroite spectralement que les précédentes, à savoir 50 GHz, avec une brillance de 0,3 Hz/mW/MHz. Là encore, un photon est produit à 795 nm et l'autre à 1609 nm. Pour les auteurs, la brillance obtenue permettrait un débit de paires de photons adapté aux expériences avec des mémoires quantiques si la largeur spectrale est voisine de 50 MHz. Cependant, cette extrapolation masque les difficultés expérimentales pour atteindre une telle finesse spectrale. En effet, ni un filtre interférentiel, ni un filtrage spatial adapté dans une fibre monomode – deux solutions utilisées dans l'article – ne permettraient d'atteindre les quelques dizaines de MHz requises pour les mémoires quantiques.

Il a été montré dès 1999 par Z. Y. OU et Y. J. LU [OL99] que la largeur spectrale des paires de photons générés par fluorescence paramétrique pouvait être drastiquement réduite par une mise en cavité résonante à la longueur d'onde des photons produits. Après qu'il fut montré qu'il était possible d'appliquer cette idée à la génération d'états intriqués en polarisation (J. SHAPIRO & N.C. WONG [SW00] et M. OBERPERLEITER & H. WEINFÜRTER [OW00], les premiers insistant sur le bénéfice spectral et les seconds sur le gain en efficacité), H. WANG, T. HORIKIRI et T. KOBAYASHI [WHK04] réalisèrent l'expérience avec succès en 2004 avec deux cristaux de KNbO<sub>3</sub> fonctionnant en type I, juxtaposés et orientés orthogonalement. Ils obtinrent une brillance de 0,12 Hz/mW/MHz avec une largeur spectrale aussi petite que 18 MHz, mais une fidélité de seulement 68 %.

C. KUKLEWICZ et ses collaborateurs réalisèrent en 2006 la première source fonctionnant en type II [KWS06] basée sur le même principe, mais avec un seul cristal de PPKTP en cavité surtendue, dont les modes ont une largeur de 22 MHz. Un filtre interférentiel supplémentaire de bande passante 1 nm restreint le nombre de modes à environ 400. Il s'agit d'une amélioration de la source réalisée en 2004 [FMK<sup>+</sup>04] par la même équipe et évoquée précédemment (4.3, Figure 4.5). La mise en cavité résonante permet d'obtenir une brillance de 0,7 Hz/mW/MHz, soit 80 fois plus, bien que cette nouvelle source soit couplée à une fibre optique monomode. La visibilité des interférences, si elle reste faible (77 %), est en progrès et dépasse le seuil de violation de l'inégalité de Bell. Cependant, l'objectif annoncé de l'article n'était pas de produire une grande qualité d'intrication, mais de proposer une méthode originale de mesure de la biréfringence d'un matériau. En effet, les auteurs observèrent une modulation dans la corrélation temporelle entre les deux photons qui dépend de la biréfringence du cristal initialement inséré dans la cavité pour compensation.

Ces deux sources sont multimodes (modes longitudinaux de cavité) : les paires de photons sont émises dans un peigne fréquentiel. Sans filtrage supplémentaire pour isoler une résonance unique, ces sources présentent certes les corrélations attendues mais sont inadaptées à l'interaction avec les mémoires quantiques constituées d'un grand nombre de résonances inhomogènement distribuées. En effet, les mémoires quantiques en matrice cristalline comme celles basées sur le CRIB (*Controlled Reversible Inhomogeneous Broadening*), privilégiées pour leur simplicité de mise en œuvre, peuvent avoir une largeur inhomogène d'acceptance spectrale bien plus large [TAC<sup>+</sup>10]

(plusieurs GHz) que la largeur effective de la mémoire<sup>10</sup>. À moins que l'intervalle spectral libre de la cavité soit très grand devant cette largeur inhomogène, ce type de source est donc incompatible avec de telles mémoires. À titre d'exemple, pour une largeur inhomogène de 10 GHz et une largeur effective de 10 MHz, une cavité d'une finesse de l'ordre de 1000 est donc nécessaire, ce qui est difficilement réalisable en pratique.

En revanche, même sans produire d'états intriqués mais seulement des paires de photons jumeaux, elles peuvent permettre une intéressante étude des statistiques de photons [NNNT<sup>+</sup>07] en comparant les corrélations entre certains modes. Par exemple, un photon annoncé par son jumeau dans le mode centré sur la fréquence de dégénérescence présente la statistique de photons uniques (cf. §. 4.2) tandis que, pour un mode sélectionné autre, la détection d'un photon déclenchée par la mesure d'un autre présentera une statistique chaotique (cf. §. 1.2.7, page 22).

Une autre source, réalisée par F. WOLFGRAMM *et al.* en 2008 [WXC<sup>+</sup>08], produit également des paires de photons indiscernables mais non intriqués en polarisation avec une brillance spectrale dans chaque mode (large de 7 MHz) de deux ordres de grandeur supérieure à celle de C. Kuklewicz *et al.* en 2006, à savoir 70 Hz/mW/MHz. La visibilité des interférences est de plus de 90%. Cependant, aucun filtrage permettant d'isoler un mode unique n'est réalisé. Il est donc plus correct de comparer avec les autres sources la brillance moyenne dans une bande plus grande que l'intervalle spectral libre, qui est de 0,95 Hz/mW/MHz (450 000 Hz/mW/nm). L'auteur destine ce type de source à des interactions avec des transitions atomiques très sélectives en fréquence. Ainsi, l'absence de filtrage des modes non résonants avec la transition ne constitue pas un inconvénient puisque ceux-ci n'interagissent pas avec le système.

Pour une raison différente, mais voisine, la même remarque pourrait s'appliquer à la source développée par A. HAASE *et al.* [HPEM09]. Ici, la génération n'est pas produite en cavité résonante et le filtrage est réalisé de manière externe. Mais le photon destiné à interagir avec une transition atomique n'est pas filtré spectralement. L'atome n'interagit qu'avec les photons de longueur d'onde comprise dans sa gamme d'acceptance. Le deuxième photon, dont le rôle est d'annoncer le premier, est lui filtré avec une largeur de 22 MHz par une succession de cavités Fabry-Pérot activement stabilisées. Si la fréquence de filtrage correspond à la fréquence de la transition atomique, le photon filtré déclenche la mesure du premier photon (il l'annonce) de manière fiable.

X. H. BAO et ses collaborateurs ont également réalisé une source en cavité résonante [BQY<sup>+</sup>08], et ont mesuré ses caractéristiques après un filtrage spectral isolant le mode unique situé à la fréquence de dégénérescence. Ils ont obtenu une fidélité avec un état maximalelement intriqué de 94%, pour une brillance de 6 Hz/mW/MHz. Une mesure de corrélation temporelle (Fig. 4.7), dont la forme en  $e^{-2\pi\Delta\nu|t|}$  est la signature d'un filtrage lorentzien caractéristique d'une cavité Fabry-Pérot, indique une largeur spectrale  $\Delta\nu$  égale à 9,6 MHz. La réjection des autres résonances a été obtenue par une combinaison d'étalons Fabry-Pérot de finesse et d'intervalle spectral libre appropriés.

## 4.4 Conclusion

Toutes les sources de spectre étroit présentées dans le paragraphe précédent, bien qu'elles soient pour la plupart fibrées, produisent des paires photons au voisinage de 800 nm. Elles sont conçues pour interagir directement avec des transitions atomiques fonctionnant dans leur gamme de longueur d'onde. Lorsqu'une grande finesse spectrale est visée, l'objectif n'est plus la transmission sur de longues distances.

Nous nous proposons, dans ce manuscrit, de réaliser une étude des caractéristiques d'une source qui permettrait de conjuguer les objectifs encore non atteints simultanément que sont une

10. Cette largeur effective, de quelques dizaines de MHz correspond à l'élargissement par effet Stark de la résonance étroite (quelques kHz) d'un atome [TAC<sup>+</sup>10].

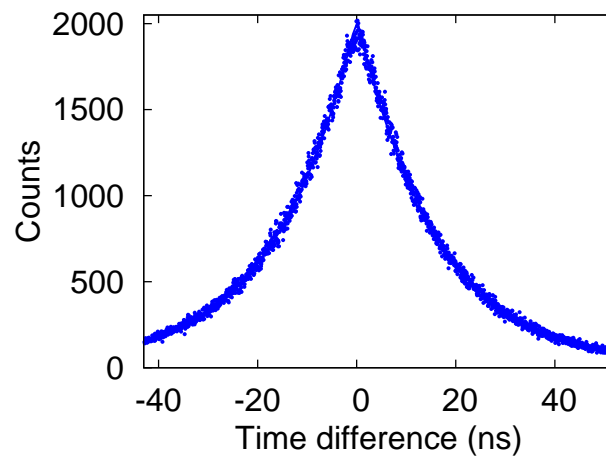


FIGURE 4.7 – Mesure de corrélation en temps pour la source de M. BAO *et al.* de 2008. Cette forme est la transformée de Fourier d'une fonction lorentzienne, montrant que le spectre est déterminé par un mode d'une cavité résonante de type Fabry-Pérot. La largeur spectrale obtenue est de 9,6 MHz. (tiré de [BQY+08])

très faible largeur spectrale dans un mode unique, une propagation sur de longues distances à 1550 nm dans une fibre optique monomode standard, avec une brillance et une fidélité suffisantes pour les communications quantiques. La source sera également impulsionnelle, dans la perspective de l'intégrer dans un réseau où le régime impulsionnel apporte une information de synchronisation temporelle indispensable.

Pour s'assurer de concevoir une telle expérience dans les meilleures conditions possibles, nous avons entrepris une étude théorique préalable, présentée dans la partie suivante, avant d'en venir à la réalisation expérimentale d'une source et son optimisation dans la partie III.



## Deuxième partie

# Conception des sources fibrées de paires de photons basées sur la fluorescence paramétrique





## Chapitre 5

# Limites à la qualité d'une source de photons jumeaux

Dans les expériences d'optique quantique en régime de comptage de photons, les contraintes de stabilité expérimentale et les imperfections des détecteurs imposent une brillance (nombre de paires de photons produites) minimale pour la réussite des mesures. Pour une source impulsionnelle, cette brillance  $B$  est proportionnelle à la probabilité  $p_0\Delta\nu$  de générer une paire par impulsion dans la bande passante  $\Delta\nu$  et au taux de répétition  $f_0$  :  $B \propto p_0\Delta\nu \times f_0$ .

Le processus de fluorescence paramétrique peut être utilisé pour produire des paires de photons jumeaux (cf. § 4.2). Mais il produit également, de manière inhérente, des paires multiples dans une proportion d'autant plus grande que  $p_0$  est grand. Cela limite intrinsèquement la qualité d'éventuelles mesures de corrélations quantiques reposant sur une telle source car l'état produit par la source n'est pas parfaitement fidèle à un état à deux photons.

Pour des sources de grande bande passante, un faible rendement est suffisant pour atteindre une brillance totale satisfaisante. En revanche, lorsqu'un projet comme eQuanet contraint la source à une très faible bande passante, la brillance spectrale nécessaire rend le problème des paires multiples particulièrement critique :

- Le taux de répétition  $f_0$  est limité : une faible bande passante implique une largeur spectrale de pompe étroite, donc une durée d'impulsions longue (cf. Annexe B.7.3 ou Chap. 6, Eq. 6.34). Or la période de répétition doit être supérieure à cette durée pour éviter le recouvrement des impulsions.
- Le degré de liberté restant pour augmenter la brillance,  $p_0$  qu'on fait varier *via* la puissance de pompe, influence directement la proportion de paires multiples, donc la qualité de la source.

L'objectif de ce chapitre<sup>1</sup> est de comprendre l'influence des divers paramètres d'une source impulsionnelle complète sur la manière dont les paires multiples dégradent sa qualité. Ces paramètres, outre la puissance de pompe (le rendement de génération  $p_0$ ), sont les pertes en aval de la génération, y compris dues à la détection, les caractéristiques du filtrage, le mode de séparation des photons d'une paire, et la présence de bruit.

Nous commençons par présenter le principe de la source idéale considérée, puis nous donnons une expression quantitative de la qualité qu'il est possible d'atteindre en fonction de chacun des paramètres de la source. Puis, après avoir analysé dans quelle mesure ceux-ci dégradent la qualité, nous déterminons le compromis entre qualité et brillance qu'il est permis d'atteindre en fonction de ces paramètres.

---

1. Cette étude a fait l'objet d'un article à paraître dans la revue *Journal of the Optical Society of America B* [SFD<sup>+</sup>11].

Nous souhaitons ainsi que cette étude soit utile autant à l'étape de la conception, pour anticiper les performances atteignables, qu'à l'étape de l'optimisation expérimentale, pour juger si les réglages ont effectivement permis d'atteindre les performances prévues.

## 5.1 Principe

Le dispositif considéré est présenté en Figure 5.1.

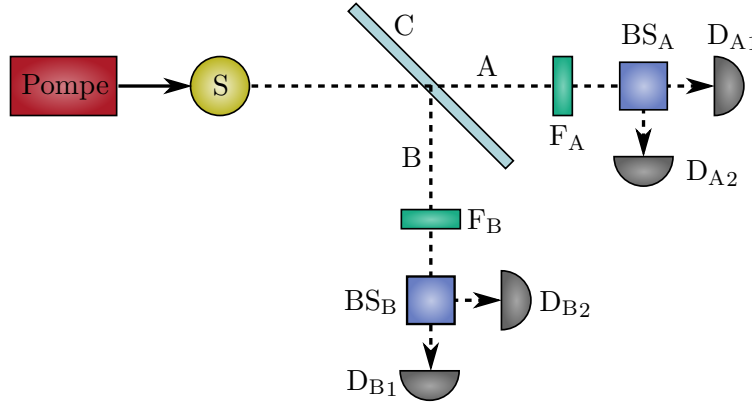


FIGURE 5.1 – Dispositif considéré pour l'analyse de l'effet du filtrage sur une source de paires de photons intriqués. S : Source paramétrique, F : filtre spectral, C : lame séparatrice ou coupleur, BS : analyseur de Bell, D : détecteur

### 5.1.1 Une source paramétrique idéale

La source émet uniquement des paires de photons de fréquences  $\nu_s$  et  $\nu_i$  par fluorescence paramétrique. La présence de bruit optique sera également analysée au paragraphe 5.5.1. Elle est pompée par une source impulsionnelle de fréquence  $\nu_p = \nu_s + \nu_i$  avec un taux de répétition  $f_0$ .

On considère indifféremment une source en espace libre jusqu'à la détection, ou une source fibrée, c'est à dire dont les photons sont collectés dans des fibres optiques et qui utilise des composants de l'optique guidée.

### 5.1.2 Séparation des photons vers deux voies de détection

Une lame séparatrice C sépare les deux photons d'une paire vers deux voies de détection A et B. Nous distinguons deux cas :

- une séparation *déterministe* — où C est par exemple un miroir dichroïque lorsque les deux photons d'une paire sont non-dégénérés en fréquence ( $\nu_s \neq \nu_i$ ). La répartition des photons après la lame est toujours identique quelle que soit la paire produite. Les cas d'une génération non-colinéaire et de photons générés avec des polarisations orthogonales entrent également dans cette catégorie.
- une séparation *statistique* — où C est une lame semi-réfléchissante ou un coupleur fibré. Une telle séparation est nécessaire lorsque les photons de la paire sont colinéaires et quasi-dégénérés en fréquence ( $\nu_i \approx \nu_s \approx \frac{\nu_p}{2}$ ) et qu'il n'est pas possible d'utiliser un séparateur de polarisations ou toute autre méthode déterministe. La répartition des photons après la lame varie d'une paire à l'autre, de manière aléatoire.

### 5.1.3 Filtrage spectral et pertes

Les voies A et B subissent un filtrage spectral dont le profil est supposé idéal (voir Figure 5.2), c'est-à-dire de transmission nulle en dehors de la bande passante et constante à l'intérieur de celle-ci. En voie A, le filtre  $F_A$  est centré sur  $\nu_A$ ; en voie B, le filtre  $F_B$  est centré sur  $\nu_B$ , tel que  $\nu_A + \nu_B = \nu_p$ . Les bandes passantes  $\Delta\nu_A$  et  $\Delta\nu_B$  peuvent éventuellement être différentes.

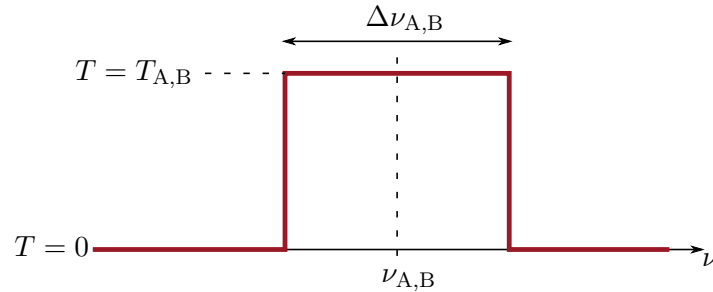


FIGURE 5.2 – Spectre de transmission des filtres idéaux.

Les transmissions  $T_A$  et  $T_B$  des filtres tiennent compte non seulement des pertes des filtres eux-mêmes, mais aussi de toutes les autres pertes des voies A et B. Cela inclut :

- pertes en espace libre après la génération par fluorescence paramétrique (propagation, lentilles, miroirs) ;
- pertes éventuelles par couplage dans une fibre optique ;
- pertes dues aux transmission/réflexion imparfaites de la lame séparatrice (ou du coupleur fibré) ;
- pertes d'insertion des analyseurs en voies A et B ;
- pertes par d'éventuels raccords entre composants fibrés et par ces composants eux-mêmes.

On suppose que, dans la bande passante des filtres, ces pertes sont indépendantes de la fréquence des photons.

### 5.1.4 Détecteurs

Après les analyseurs placés sur chaque voie, on installe deux détecteurs  $D_{A1}, D_{A2}$  supposés identiques<sup>2</sup> de rendements quantiques  $\eta_A$  en voie A et deux détecteurs identiques  $D_{B1}, D_{B2}$  de rendements quantiques  $\eta_B$  en voie B. Les calculs supposent dans un premier temps un bruit d'obscurité nul. Celui-ci ne sera pris en compte qu'ultérieurement dans ce chapitre (§ 5.5.2).

### 5.1.5 Efficacité d'extraction

Dans notre contexte, nous définissons l'efficacité d'extraction comme la proportion de photons détectés parmi les photons produits lors du processus de fluorescence. Nous considérons ici l'efficacité d'extraction dans la bande passante de la source et différencions celle de la voie A ( $X_A$ ) de celle de la voie B ( $X_B$ ).

La baisse d'efficacité d'extraction peut être due à plusieurs facteurs :

- le rendement quantique imparfait des détecteurs utilisés :  $\eta_A, \eta_B < 1$  ;

2. Il est généralement possible de calibrer leur rendement quantique de manière à les évaluer, et on supposera alors, au besoin, que leur bruit d'obscurité est égal.

- le caractère aléatoire du passage de la lame séparatrice, dans le cas d'une séparation statistique :  $R_A, R_B < 1$  ( $R_A + R_B = 1$ ) ;
- les autres pertes incluses dans les facteurs  $T_A, T_B < 1$ .

Ainsi, l'efficacité d'extraction en voie  $i$  vaut :

$$\begin{aligned} X_i &= T_i \eta_i && \text{pour une séparation déterministe} \\ X_i &= R_i T_i \eta_i && \text{pour une séparation statistique} \end{aligned}$$

En effet, l'influence du rendement quantique d'un détecteur est analogue à celui de la transmission sur la voie considérée. Un rendement inférieur à 1 n'est qu'une autre source de pertes dont on peut montrer qu'elle intervient mathématiquement de manière identique dans les calculs<sup>3</sup>. Il en va de même pour  $R_i$ .

Les effets de  $R_i$ ,  $T_i$  et  $\eta_i$ , bien que similaires, seront analysés séparément (§ 5.3) car ils recouvrent des paramètres physiques qui interviennent à des étapes différentes lors de la conception d'une source. Cependant, en raison de leur rôle mathématique analogue, la Section 5.2, où est effectué le calcul des probabilités de détection simple et en coïncidence, ne fera appel qu'aux  $X_i$  pour plus de simplicité.

### 5.1.6 Clics simples et coïncidences

Pour le dispositif de la Figure 5.1, nous calculerons la probabilité  $P_A = P_{A1} + P_{A2}$  qu'un photon soit détecté en voie A (en  $D_{A1}$  ou  $D_{A2}$ ), ainsi que la probabilité  $P_B = P_{B1} + P_{B2}$  qu'un photon soit détecté en voie B (en  $D_{B1}$  ou  $D_{B2}$ ).

De plus, trois types de coïncidences entre voies A et B peuvent survenir entre deux détecteurs quelconques  $D_{A_i}$  et  $D_{B_j}$  ( $i, j = 1, 2$ ) :

- Des coïncidences « vraies » (probabilité totale  $P_{CV} = \sum_{i,j} P_{CVij}$ ) : le photon en voie A provient de la même paire que le photon en voie B. Les deux photons satisfont la conservation de l'énergie. La valeur des  $P_{CVij}$ , donc de  $P_{CV}$ , dépend du réglage des analyseurs de Bell.
- Des coïncidences « accidentelles » (probabilité totale  $P_{CA} = \sum_{i,j} P_{CAij}$ ) : le photon en voie A et celui en voie B proviennent de deux paires différentes, incohérentes entre elles, émises lors d'une même impulsion de pompe.
- Des coïncidences de bruit (probabilité totale  $P_{CB} = \sum_{i,j} P_{CBij}$ ), liées au bruit électronique des détecteurs ou à la présence d'un bruit optique. Elles incluent les coïncidences entre un clic de bruit sur une voie et une détection de photon sur l'autre, aussi bien que des coïncidences entre deux clics de bruit. On ne les prendra en compte qu'ultérieurement, dans la Section 5.5.

3. On pourra s'en convaincre lors de la lecture du § 5.2 p.86 en montrant que, par exemple :

$$P_A^{(S)} = p_0 \Delta \nu_A \left\{ \mathbb{P}_1^{(S)}(2, 0) + \mathbb{P}_1^{(S)}(1, 1) + \mathbb{P}_1^{(S)}(1, 0) \right\} \quad \text{avec } X_i = R_i T_i \eta_i \quad (\text{Eq. 5.11})$$

equivaut à :

$$P_A^{(S)} = p_0 \Delta \nu_A \left\{ \mathbb{P}_1^{(S)}(2, 0) [\eta_A + (1 - \eta_A)\eta_A] + \left[ \mathbb{P}_1^{(S)}(1, 1) + \mathbb{P}_1^{(S)}(1, 0) \right] \eta_A \right\} \quad \text{avec } X_i = R_i T_i$$

où le facteur  $[\eta_A + (1 - \eta_A)\eta_A]$  correspond à la détection du premier photon *ou* la détection du deuxième photon associée à la non-détection du premier.  $\mathbb{P}_N^{(S)}(n_A, n_B)$  (Eq. 5.10) est la probabilité d'avoir  $n_A$  photons en voie A et  $n_B$  photons en voie B en présence de  $N$  paires produites.

Puisque nous avons supposé identiques les détecteurs  $D_{A_1}$  et  $D_{A_2}$  d'une part, et les détecteurs  $D_{B_1}$  et  $D_{B_2}$  d'autre part, et que les probabilités de coïncidences ne dépendent pas du réglage des analyseurs, nous avons les relations :

$$P_{CA} = 4P_{CAij} \quad \forall i, j = 1, 2 \quad (5.1)$$

$$P_{CB} = 4P_{CBij} \quad \forall i, j = 1, 2 \quad (5.2)$$

Pour les vraies coïncidences en revanche, la présence de corrélations impose les relations  $P_{CV11} = P_{CV22}$  et  $P_{CV12} = P_{CV21}$ . On a donc

$$P_{CV} = 2(P_{CVi1} + P_{CVi2}) \quad \forall i = 1, 2 \quad (5.3)$$

### 5.1.7 Quantification de la qualité de la source : Visibilité

La qualité d'une source se traduit par le degré de corrélations quantiques qu'elle permet d'observer. Cela se quantifie généralement par une mesure de visibilité, ou contraste, de franges d'interférences à deux photons.

La nature des corrélations observées dépend de l'expérience réaliser. Par exemple, on peut distinguer :

1. une mesure de Bell (§ 3.2.5) ; cela suppose de produire des états intriqués à partir de la source de photons jumeaux considérée dans ce chapitre. On mesure alors le contraste des franges d'interférence à deux photons en fonction du réglage relatif des analyseurs (polariseurs ou interféromètre de Franson par exemple). Pour une visibilité maximale, l'état doit être maximalelement intriqué (§ 3.1.2).
2. un *HOM-dip* [HOM87]. On mesure alors le contraste de franges d'interférences à deux photons en fonction du recouvrement temporel de leurs paquets d'onde sur une lame séparatrice. Pour une visibilité maximale, les discernabilités spatiale, spectrale et de polarisation des photons produits par la source doivent être parfaitement corrigées.
3. une simple mesure de corrélations temporelles, directement réalisable à partir de la source impulsionnelle de photons jumeaux. La probabilité maximale de coïncidences entre les voies A et B est alors obtenue lorsque celles-ci sont mesurées au sein de la même impulsion ; la probabilité minimale est obtenue en mesurant des « coïncidences retardées », c'est à dire la détection d'un photon en voie A lors de l'impulsion  $n$  et d'un photon en voie B lors d'une impulsion  $n' \neq n$ .

Dans le 1<sup>er</sup> cas, on mesure la visibilité  $v_{ij} = (P_{ij}^{\max} - P_{ij}^{\min}) / (P_{ij}^{\max} + P_{ij}^{\min})$  entre la probabilité  $P_{ij}^{\min}$  de coïncidences totales entre les détecteurs  $D_{A_i}$  et  $D_{B_j}$ , obtenue lorsque les analyseurs sont réglés de sorte que  $P_{CVij} = 0$ , et la probabilité  $P_{ij}^{\max}$ , obtenue lorsque les analyseurs sont réglés de manière à maximiser  $P_{CVij}$  :

$$\begin{aligned} P_{ij}^{\min} &= P_{CAij} + P_{CBij} \\ P_{ij}^{\max} &= P_{CVij}^{\max} + P_{CAij} + P_{CBij} \end{aligned}$$

Or lorsque  $P_{CVij} = P_{CVij}^{\max}$ , on a nécessairement  $P_{CVij'} = 0$  ( $j' \neq j$ ). En utilisant la relation (5.3), la probabilité de vraies coïncidences entre deux détecteurs  $D_{A_i}$  et  $D_{B_j}$  s'exprime alors en fonction des vraies coïncidences totales  $P_{CV}$  :  $P_{CVij} = P_{CV}/2$ . En utilisant également les relations (5.1) et (5.2), on obtient finalement une visibilité  $V = v_{ij}$  indépendante de  $i$  et  $j$  :

$$V = \frac{1}{1 + \frac{P_{CA} + P_{CB}}{P_{CV}}} \quad (5.4)$$

Le fait que cette visibilité ne dépende que du nombre total de coïncidences entre  $D_{A1}$  ou  $D_{A2}$  d'une part et  $D_{B1}$  ou  $D_{B2}$  d'autre part traduit le fait que ce chapitre a pour but d'étudier les limites à la qualité d'une source, indépendamment des imperfections de la mesure de Bell.

La visibilité idéale considérée ainsi ne prend en compte que la dégradation due à la présence inévitable des paires multiples et la présence éventuelle de bruit. Elle ne considère pas les imperfections de la mesure de Bell, la non-maximalité de l'intrication ou les éventuelles discernabilités, qui ne sont pas intrinsèques à la génération des paires de photons et peuvent donc en théorie être corrigées. Cette visibilité constitue donc une borne supérieure très utile pour anticiper la valeur qu'il est possible d'atteindre dans la pratique en fonction des divers paramètres du système.

Nous allons dans la section qui suit calculer  $P_{CV}$  et  $P_{CA}$  en fonction ces paramètres, afin de déterminer leur effet sur la visibilité *nette*, qui suppose un bruit nul ( $P_{CB} = 0$ ) et ne rend compte que de l'effet des paires multiples. La visibilité brute, avec  $P_{CB} \neq 0$ , sera évaluée dans la Section 5.5.

## 5.2 Calcul des probabilités

La densité spectrale de probabilité qu'une paire soit produite à une fréquence  $\nu$  vaut  $p_0(\nu)$ . Cette valeur est supposée uniforme dans les bandes passantes des filtres  $F_A$  et  $F_B$  et égale pour les deux (voir Figure 5.3). Ainsi, on omettra d'explicitier sa dépendance en  $\nu$  par la suite.

De manière générale, la probabilité de créer  $n + 1$  paires est significativement plus faible que celle d'en générer  $n$  (voir Chapitre 4, § 4.2). Ainsi, on se limitera, pour le calcul des coïncidences vraies, à la contribution des paires simples. En revanche, les coïncidences accidentelles sont dues à la présence de paires multiples. Mais pour la même raison, on ne prendra en compte que les doubles paires.

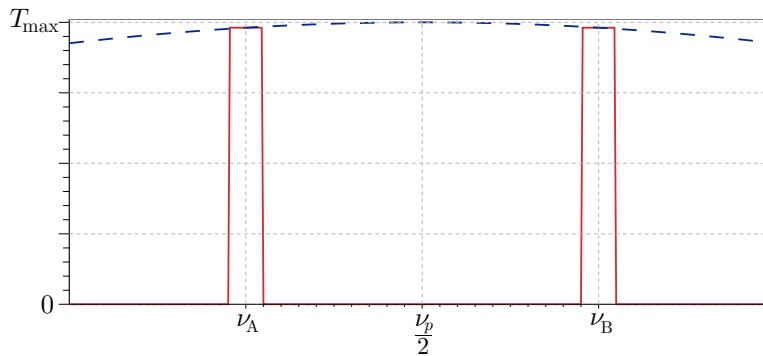


FIGURE 5.3 – Représentation de  $p_0(\nu)$ , la densité spectrale de probabilité de génération de paires de photons par fluorescence paramétrique. Cette densité varie faiblement dans les bandes des filtres  $F_A$  et  $F_B$ .

Ces doubles paires peuvent être incohérentes entre elles (deux émissions d'états à deux photons ; l'état de la paire sera noté  $|2 \times 2\rangle$ ) ou cohérentes (états à quatre photons, soit une paire stimulée par l'émission de la première ; l'état de la double paire sera noté  $|4\rangle$ ). La contribution de chacun de ces deux états à la densité spectrale de probabilité  $p_2$  de génération de doubles paires a été discutée dans des travaux de H. DE RIEDMATTEN, V. SCARANI, N. GISIN et leurs collaborateurs [RSM<sup>+</sup>04, SdRM<sup>+</sup>05]. Elle est donnée par :

$$p_2 = \frac{1}{2} p_0^2 [J_2^2 + J_4]$$

où  $J_2$ ,  $J_2^2$  sont respectivement les distributions spectrales normalisées de paires, doubles paires, et  $J_4$  la contribution supplémentaire liée à la cohérence entre les deux paires. On peut montrer<sup>4</sup> que  $J_4 \leq J_2^2$ . Ainsi, on peut introduire le paramètre  $\chi \in [0, 1]$  tel que

$$J_4 = \chi J_2^2$$

Dans le cadre de notre approximation d'un spectre uniforme dans les bandes passantes, on a  $J_2 \equiv 1$  et l'expression générale de la densité spectrale de probabilité de doubles paires s'écrit donc

$$p_2(\chi) = \frac{1}{2} p_0^2 [1 + \chi] \quad (5.5)$$

Ainsi, la densité spectrale de probabilité de générer deux paires incohérentes ( $\chi = 0$ ), notée  $p_{2_I}$ , suit bien la statistique d'émission des photons de pompe, à savoir une loi poissonnienne :  $p_{2_I} = p_0^2/2$ . Nous avons vu au Chapitre 1, § 1.2.6 comment cette statistique était liée au fait que le faisceau de pompe était dans un état cohérent. La densité de probabilité  $p_{2_C}$  de générer deux paires cohérentes ( $\chi = 1$ ) vaut  $p_{2_C} = p_0^2$ . On peut montrer [ORW99]<sup>5</sup> que lorsque l'impulsion de pompe est longue devant le temps de cohérence des photons générés, la production de paires incohérentes est dominante, ce qui se traduit par  $\chi \rightarrow 0$ , de sorte que  $p_2 \rightarrow p_{2_I}$ . Dans le cas contraire d'une impulsion de pompe courte, les paires multiples générées sont principalement cohérentes entre elles : alors  $\chi \rightarrow 1$ , c'est à dire  $p_2 \rightarrow p_{2_C}$ .

Les calcul de la distribution de photons dépend de la manière de séparer vers les voies A et B les deux photons d'une paire (cf. § 5.1.2). Les deux sections suivantes décrivent le calcul spécifique à ces deux modes de séparation.

### 5.2.1 Cas d'une séparation déterministe

La séparation est opérée au moyen d'un miroir dichroïque possédant un maximum de transmission à la fréquence  $\nu_A$  et un maximum de réflexion à la fréquence  $\nu_B$ . Les pertes par transmission et par réflexion sont incluses dans les facteurs  $X_A$  et  $X_B$ , par l'intermédiaire de  $T_A$  et  $T_B$ . La probabilité qu'un photon d'une paire soit produit dans la bande passante du filtre en voie A (resp. B) vaut  $p_0 \Delta \nu_A$  (resp.  $p_0 \Delta \nu_B$ ).

La probabilité  $\mathbb{P}_N^{(D)}(n_A, n_B)$  de détecter  $n_A$  photons en voie A et  $n_B$  photons en voie B en présence de  $N$  paires produites s'écrit :

$$\mathbb{P}_N^{(D)}(n_A, n_B) = \left[ C_N^{N-n_A} X_A^{n_A} (1 - X_A)^{N-n_A} \right] \left[ C_N^{N-n_B} X_B^{n_B} (1 - X_B)^{N-n_B} \right] \quad (5.6)$$

où  $C_n^p = n!/(p!(n-p)!)$  désigne le coefficient binomial, c'est à dire le nombre de sous-ensembles à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

Cette équation traduit la transmission déterministe (avec probabilité unité) de la moitié des photons vers la voie A et l'autre moitié vers la voie B, et la perte aléatoire d'une partie des photons sur chaque voie  $i = A, B$  avec la probabilité  $1 - X_i$ .

Ainsi, pour chaque paire produite, on trouve les probabilités suivantes pour la détection d'un photon sur les voies A et B :

$$\begin{aligned} P_A^{(D)} &= p_0 \Delta \nu_A \left[ \mathbb{P}_1^{(D)}(1, 0) + \mathbb{P}_1^{(D)}(1, 1) \right] = p_0 \Delta \nu_A X_A \\ P_B^{(D)} &= p_0 \Delta \nu_B \left[ \mathbb{P}_1^{(D)}(0, 1) + \mathbb{P}_1^{(D)}(1, 1) \right] = p_0 \Delta \nu_B X_B \end{aligned}$$

4. par le théorème de Schwartz

5. Dans cet article,  $\chi = \mathcal{E}/\mathcal{A}$



La probabilité de vraies coïncidences vaut, en négligeant la contribution des doubles paires :

$$P_{CV}^{(D)} = p_0 \min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B) \mathbb{P}_1^{(D)}(1, 1) = p_0 \min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B) X_A X_B \quad (5.7)$$

où l'on a remarqué que c'est dans la bande passante la plus petite des deux voies que peuvent avoir lieu des coïncidences. En dehors de celle-ci, les photons passants sur la voie la plus large sont privés de leurs jumeaux sur l'autre voie.

De même, une double paire entraîne la présence de deux photons sur chaque voie. Mais les doubles paires cohérentes ne donnent pas lieu à des coïncidences accidentelles. Seules les doubles paires incohérentes y participent, dans la moitié des cas (voir Figure 5.4) :

$$\begin{aligned} P_{CA}^{(D)} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} p_0^2 \Delta\nu_A \Delta\nu_B \left[ \mathbb{P}_2^{(D)}(2, 2) + \mathbb{P}_2^{(D)}(2, 1) + \mathbb{P}_2^{(D)}(1, 2) + \mathbb{P}_2^{(D)}(1, 1) \right] \\ &= \frac{1}{4} p_0^2 \Delta\nu_A \Delta\nu_B X_A X_B (2 - X_A) (2 - X_B) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ainsi, comme l'ont remarqué V. SCARANI *et al.* [SdRM<sup>+</sup>05], les coïncidences accidentelles ne dépendent pas de la cohérence des doubles paires, dans le cas d'une séparation déterministe.

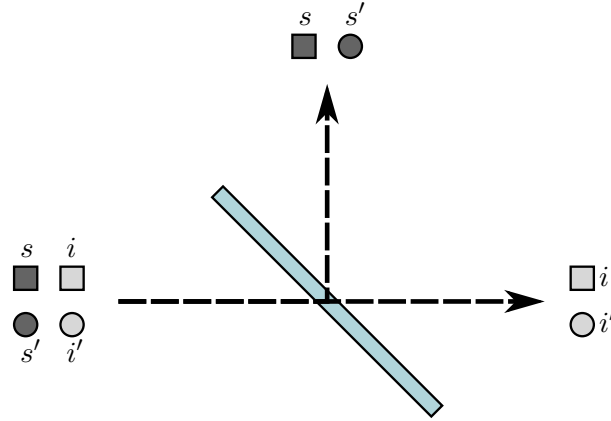


FIGURE 5.4 – Distribution de photons  $s, i$  et  $s', i'$  provenant de deux paires (■□ / ●○) non-dégénérées en fréquence (■, ● :  $\nu_A$ , □, ○ :  $\nu_B$ ) après un miroir dichroïque. Dans le cas où les deux paires sont cohérentes entre elles (état  $|4\rangle$ ), toutes les combinaisons donnent lieu à de vraies coïncidences. Dans le cas incohérent (état  $|2 \times 2\rangle$ ),  $s - i'$  et  $s' - i$  donnent lieu à des coïncidences accidentelles.

On trouve alors le résultat suivant pour la visibilité définie par l'Eq. 5.4 :

$$V^{(D)} = \frac{1}{1 + p_0 \max(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B) (2 - X_A) (2 - X_B) / 4} \quad (5.9)$$

### 5.2.2 Cas d'une séparation statistique

C'est maintenant une lame partiellement réfléchissante de coefficients de transmission  $R_A$  et de réflexion  $R_B$  qui réalise la séparation des photons vers les deux voies A et B. Comme dans le cas d'une séparation déterministe, on intégrera les pertes potentielles de cette lame aux pertes globales  $X_A, X_B$  de sorte que  $R_A + R_B = 1$ . Contrairement au cas du miroir dichroïque, la séparation s'opère désormais de manière statistique et l'expression de la distribution des photons sur les deux voies diffère de la formule (5.6). Ici, on obtient :

$$\mathbb{P}_N^{(S)}(n_A, n_B) = C_{2N}^{2N - n_A - n_B} (1 - X_A - X_B)^{2N - n_A - n_B} C_{n_A + n_B}^{n_A} X_A^{n_A} X_B^{n_B} \quad (5.10)$$

Cette expression s'interprète comme la perte de  $2N - n_A - n_B$  photons avec une probabilité individuelle  $1 - X_A - X_B$ , et la distribution des photons restants vers les voies A et B avec les probabilités individuelles  $X_A$  et  $X_B$  respectivement. Le facteur  $C_{2N}^{2N-n_A-n_B}$  exprime le nombre de combinaisons possibles pour la perte de  $2N - n_A - n_B$  photons, tandis que le facteur  $C_{n_A+n_B}^{n_A}$  exprime le nombre de combinaisons possibles à  $n_A$  photons en voie A (les photons restants empruntant donc la voie B).

Alors, la probabilité d'avoir au moins un photon en voie A ou B vaut, en négligeant la contribution des doubles paires :

$$P_A^{(s)} = p_0 \Delta\nu_A \left[ \mathbb{P}_1^{(s)}(2, 0) + \mathbb{P}_1^{(s)}(1, 1) + \mathbb{P}_1^{(s)}(1, 0) \right] = p_0 \Delta\nu_A X_A (2 - X_A) \quad (5.11)$$

$$P_B^{(s)} = p_0 \Delta\nu_B \left[ \mathbb{P}_1^{(s)}(0, 2) + \mathbb{P}_1^{(s)}(1, 1) + \mathbb{P}_1^{(s)}(0, 1) \right] = p_0 \Delta\nu_B X_B (2 - X_B) \quad (5.12)$$

La probabilité d'obtenir une coïncidence vraie vaut

$$P_{CV}^{(s)} = p_0 \min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B) \mathbb{P}_1(1, 1) = 2p_0 \min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B) X_A X_B \quad (5.13)$$

En ce qui concerne les coïncidences accidentelles, contrairement au cas d'une séparation déterministe, les doubles paires cohérentes peuvent elles aussi y contribuer dans certains cas. Commençons tout d'abord par écrire la probabilité de coïncidences totales en présence de doubles paires, qui dépend de  $\chi$  à travers  $p_2(\chi)$  (Eq. 5.5) :

$$P_C^{(s)}(\chi) = p_2(\chi) \Delta\nu_A \Delta\nu_B \left[ \mathbb{P}_2^{(s)}(3, 1) + \mathbb{P}_2^{(s)}(1, 3) + \mathbb{P}_2^{(s)}(2, 2) + \mathbb{P}_2^{(s)}(2, 1) + \mathbb{P}_2^{(s)}(1, 2) + \mathbb{P}_2^{(s)}(1, 1) \right]$$

La probabilité de coïncidences totales  $P_C^{(s)}$  dépend de  $\chi$ , mais la proportion de coïncidences accidentelles également : lorsque les paires sont incohérentes, seules les combinaisons  $s-i$  et  $s'-i'$  donnent lieu à de vraies coïncidences, tandis que dans les cas cohérent, les combinaisons  $s-i'$  et  $s'-i$  en donnent également. La Table 5.1 synthétise les différentes distributions possibles et leur associe la probabilité qu'un photon en voie A et un photon en voie B donnent lieu à une vraie coïncidence. Dans le cas cohérent, deux tiers des coïncidences sont considérées comme de vraies coïncidences, et un tiers dans le cas incohérent. En termes de probabilités conditionnelles, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{CA} \mid \text{incoh}) &= \frac{2}{3} && (\text{proba. de coïnc. accidentelle due à l'incohérence d'une double paire}) \\ \mathbb{P}(\text{CA} \mid \text{coh}) &= \frac{1}{3} && (\text{proba. de coïnc. accidentelle due à la cohérence d'une double paire}) \end{aligned}$$

D'autre part, on note de la manière suivante les probabilités de contribuer aux coïncidences en tant que double paire incohérente ou cohérente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{incoh}) &= \frac{1}{1 + \chi} && (\text{contribution comme double paire incohérente}) \\ \mathbb{P}(\text{coh}) &= \frac{\min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B)}{\max(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B)} \frac{\chi}{1 + \chi} && (\text{contribution comme double paire cohérente}) \end{aligned}$$

Notons que les probabilités ci-dessus n'expriment pas la probabilité que l'état de la double paire soit  $|2 \times 2\rangle$  ou  $|4\rangle$ , mais la probabilité de contribuer aux coïncidences accidentelles selon la statistique incohérente ( $p_2 = p_{2_I}$ ) ou cohérente ( $p_2 = p_{2_C}$ ).

Distribution		Coïncidences	
Voie A	Voie B	$ 4\rangle$	$ 2\times 2\rangle$
$ss'$	$ii'$	4/4	2/4
$si'$	$s'i$	2/4	2/4
$si$	$s'ii'$	2/4	0/4
$s$	$s'ii'$	2/3	1/3
$s'$	$sii'$	2/3	1/3
$i$	$ss'i$	2/3	1/3
$i'$	$ss'i'$	2/3	1/3
Moyenne		2/3	1/3

TABLE 5.1 – Cas de la séparation statistiques des photons : Proportion de vraies coïncidences en présence de doubles paires cohérentes ( $|4\rangle$ ) ou incohérentes ( $|2\times 2\rangle$ ) en fonction de la distribution de photons sur chaque voie.  $s, i$  désignent les photons d'une paire et  $s', i'$  ceux de l'autre.

Finalement, la probabilité de coïncidences accidentelles s'écrit :

$$\begin{aligned}
P_{CA}^{(S)}(\chi) &= [\mathbb{P}(CA | \text{incoh}) \cdot \mathbb{P}(\text{incoh}) + \mathbb{P}(CA | \text{coh}) \cdot \mathbb{P}(\text{coh})] P_C^{(S)}(\chi) \\
&= \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\chi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B)}{\max(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B)} \frac{\chi}{1+\chi} \right] \\
&\quad \times \frac{1}{2} p_0^2 [1+\chi] \Delta\nu_A \Delta\nu_B X_A X_B \left[ 6 - 6(X_A + X_B) + 2(X_A^2 + X_B^2) + 3X_A X_B \right] \\
&= 2p_0^2 \Delta\nu_A \Delta\nu_B X_A X_B K
\end{aligned} \tag{5.14}$$

où

$$K = (1 + r(\chi)) \left[ 2 - 2(X_A + X_B) + \frac{2}{3}(X_A^2 + X_B^2) + X_A X_B \right] \tag{5.15}$$

Le terme  $r(\chi) = \frac{\chi}{2} \frac{\min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B)}{\max(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B)}$ , qui exprime la dépendance du résultat à la cohérence des paires, est compris entre 0 et 0,5. L'effet de cette cohérence est donc sinon négligeable, du moins secondaire. En pratique, il est possible de diminuer suffisamment la cohérence des doubles paires pour rendre  $r(\chi)$  petit devant 1, en choisissant une pompe de temps de cohérence suffisamment grande devant celle des paires. Lorsque ces temps sont identiques (c'est à dire leur largeur spectrale égale), et que la bande passante est identique sur les deux voies,  $\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  [RSM+04], c'est à dire  $r \approx 0,35$ . Lorsque le temps de cohérence de la pompe est deux fois plus grand que celui des photons,  $r \approx 0,22$ .

Ainsi, dans le cas d'une séparation statistique, la visibilité vaut :

$$V^{(S)} = \frac{1}{1 + p_0 \max(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B) K} \tag{5.16}$$

### 5.3 Analyse de l'influence des paramètres de la source

Dans cette section, nous nous intéressons à la variation de visibilité en fonction de la densité spectrale de probabilité de génération pour différentes valeurs de deux paramètres : l'asymétrie des bandes passantes en voies A et B ainsi que les pertes, supposées égales, sur chaque voie. Nous étudierons les cas des deux modes de séparation : déterministe et statistique. Afin de ne pas complexifier l'étude, nous ne considérerons généralement dans ce dernier cas que la présence de doubles paires incohérentes ( $\chi = 0$ ), en raison de la faible contribution  $r(\chi)$  de la cohérence des

doubles paires aux coïncidences accidentelles. Cependant nous discuterons à nouveau de l'effet de  $\chi$  au § 5.3.3.

### 5.3.1 Influence de l'asymétrie des bandes passantes en voies A et B

Nous étudions ici l'effet d'asymétries importantes entre les deux voies : des facteur allant jusqu'à 100. Il peut sembler discutabile de tirer des conclusions sur l'effet de l'asymétrie en étudiant des valeurs arbitraires. Mais ce choix de valeurs étudié est guidé par la recherche d'éventuelles simplifications expérimentales. Choisir une valeur différente de 1 aurait pour intérêt de simplifier la technique de filtrage sur une des deux voies. Passer d'un rapport 1 à un rapport 2, par exemple, modifie peu les contraintes expérimentales. Passer d'un facteur 1 à 10, en revanche, pourrait cesser de rendre nécessaire une stabilisation du filtrage. Passer à un facteur 100 pourrait, par exemple, autoriser de passer d'une technologie Fabry-Pérot à une technologie de filtrage moins fine mais plus confortable d'utilisation, par exemple un filtre passe-bande basé sur des dépôts de couches minces diélectriques, ce qui permet de s'affranchir des multiples résonances Fabry-Pérot.

La Figure 5.5 montre l'évolution de la visibilité en fonction de la probabilité de génération de paires dans une bande  $\Delta\nu_A$  pour différentes largeurs  $\Delta\nu_B$ .

Les calculs ont été effectués pour un système sans pertes en utilisant les formules (5.9) et (5.16) avec  $T_A\eta_A = T_B\eta_B = 1$ , selon le cas : séparation déterministe (a) ou statistique (b). Les trois courbes correspondent respectivement à  $\Delta\nu_B/\Delta\nu_A = 1, 10$  et 100.

On constate que, en raison des pertes nulles, la visibilité reste très bonne ( $> 90\%$ ) lorsque les largeurs des filtres sont équilibrées, même pour des probabilités de génération de paires élevées (10%). En revanche, lorsque ce déséquilibre s'accroît sensiblement, la visibilité chute rapidement avec la probabilité de génération de paires. Cette chute de la visibilité avec l'asymétrie des bandes passantes s'explique par le nombre important de photons en voie B qui ne contribuent qu'aux coïncidences accidentelles, puisque leurs jumeaux en voie A sont éliminés par un filtrage plus étroit.

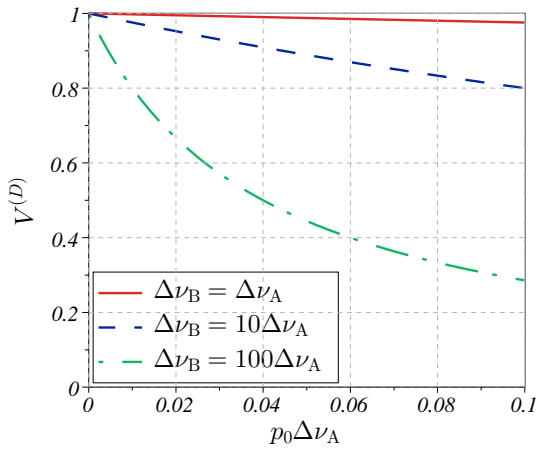
La comparaison des Figures 5.5 (a) et (b) montre aussi que, toutes choses égales par ailleurs, l'asymétrie des bandes passantes a un effet moindre avec une séparation déterministe qu'avec une séparation statistique. Surtout, dans ce dernier cas, la chute de visibilité est importante dès les petites probabilités de génération. Ceci sera davantage analysé plus loin (§ 5.3.3).

Nous allons maintenant comparer cette dégradation de visibilité par l'asymétrie avec celle que les pertes globales induisent.

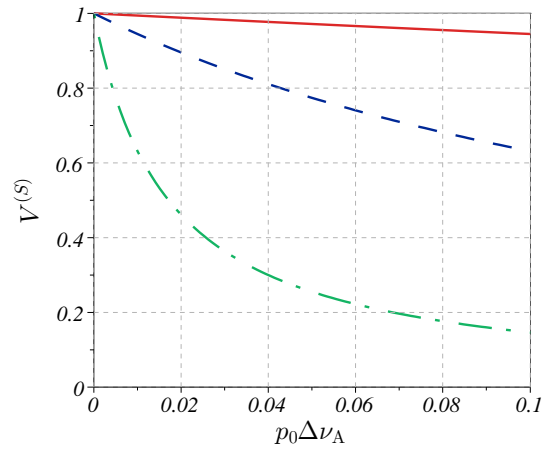
### 5.3.2 Influence des pertes

Nous nous intéressons, pour un dispositif symétrique ( $\Delta\nu_B = \Delta\nu_A$ ,  $T_A = T_B = T$ ,  $\eta_A = \eta_B = \eta$ ), à l'effet des pertes totales ( $T \times \eta$ ) pour plusieurs combinaisons typiques de  $T$  et  $\eta$  :

1.  $T\eta = 1$  : le cas idéal de pertes nulles étudié dans le paragraphe précédent ;
2.  $T\eta = 0,5$  : des pertes modérées ( $T \approx 0,6^6$ ) et un détecteur Silicium ( $\eta \approx 0,8$ ) ;
3.  $T\eta = 0,1$  : des pertes importantes ( $T \approx 0,1$ ) et un détecteur Silicium, ou des pertes modérées et un détecteur InGaAs calibré pour un rendement quantique important ( $\eta \approx 0,2$ ) ;
4.  $T\eta = 0,02$  : des pertes importantes et un détecteur InGaAs.

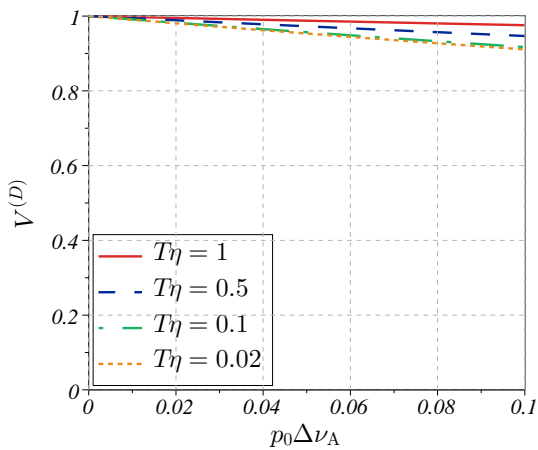


(a) Séparation déterministe

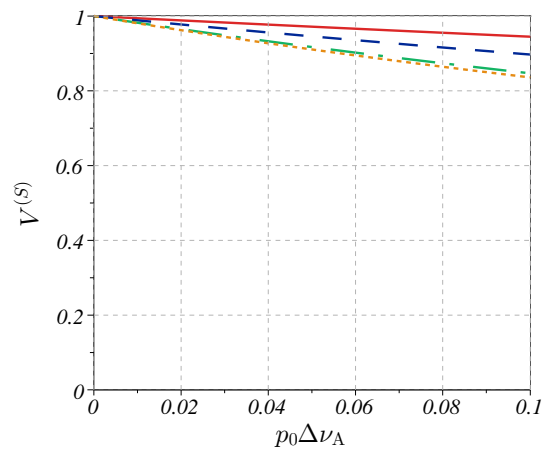


(b) Séparation statistique

FIGURE 5.5 – Visibilité en fonction de la probabilité de générer une paire dans une bande  $\Delta \nu_A$ . Les différentes courbes correspondent à différents déséquilibres bande passante entre les filtres des voies A et B. Le calcul est effectué pour  $T_A \eta_A = T_B \eta_B = 1$  et  $R_A = R_B = 0,5$ .



(a) Séparation déterministe



(b) Séparation statistique

FIGURE 5.6 – Visibilité en fonction de la probabilité de générer une paire dans une bande  $\Delta \nu_A$ . Les différentes courbes correspondent à différents coefficients de transmission, illustrant l'effet des pertes sur les voies A et B. Le calcul est effectué pour  $\Delta \nu_A = \Delta \nu_B$  et  $R_A = R_B = 0,5$ .

La Figure 5.6 montre l'évolution de la visibilité en fonction de la probabilité de génération de paires pour ces différents coefficients de transmissions. Les calculs se basent sur les formules (5.9) et (5.16) selon qu'on s'intéresse à une séparation déterministe (a) ou statistique (b).

On remarque que, dans la gamme réaliste considérée ici, l'effet néfaste des pertes sur la visibilité peut être fort (cas 4), mais il est bien plus progressif que l'effet de l'asymétrie spectrale du filtrage entre les voies A et B (Fig. 5.5). Cela suggère la possibilité de compenser les pertes par une baisse du rendement de fluorescence, dans une bien moindre mesure que ce qui serait nécessaire pour compenser l'asymétrie des bandes passantes.

De même, la baisse relative de visibilité entre séparation déterministe et statistique est bien moindre que celle observée avec l'asymétrie du filtrage. Elle reste modérée ( $< 10\%$ ) à forte probabilité de génération ( $p_0\Delta\nu_A = 0,1$ ), et est même négligeable ( $< 8\%$ ) à plus faible probabilité ( $p_0\Delta\nu_A = 0,01$ ).

Il est important de remarquer qu'il serait prématuré d'en déduire que les pertes jouent un rôle mineur. En effet, celles-ci diminuent le nombre de paires détectables (paires *utiles*, liées à la brillance de la source) contrairement à l'augmentation de l'asymétrie du filtrage. Il est donc important, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, de tenir compte de la brillance obtenue lorsqu'on cible une visibilité donnée. Cette analyse fera l'objet de la Section 5.4.

Mais tout d'abord, concluons cette analyse de l'influence des paramètres d'une source en approfondissant les différences entre une séparation déterministe et une séparation statistique.

### 5.3.3 Influence du mode de séparation des photons

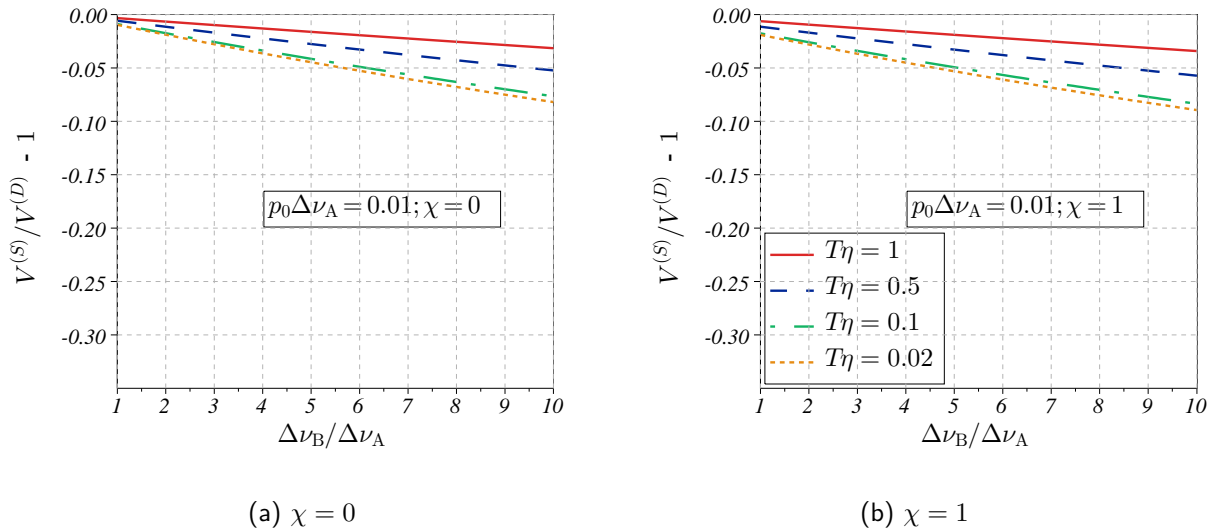


FIGURE 5.7 – Baisse relative de visibilité avec une séparation statistique par rapport à une séparation déterministe ( $V^{(S)}/V^{(D)} - 1$ ) pour  $p_0\Delta\nu_A = 0,01$  en fonction de l'asymétrie du filtrage ( $\Delta\nu_B/\Delta\nu_A$ ). Les différentes courbes correspondent aux transmissions  $T\eta = 1$ ,  $T\eta = 0,5$ ,  $T\eta = 0,1$ ,  $T\eta = 0,02$

Les Figures 5.7 et 5.8 illustrent la dégradation relative de visibilité obtenue dans le cas d'une séparation statistique par rapport au cas déterministe, lorsque les différents paramètres sont égaux par ailleurs. Elles représentent l'effet de trois paramètres ( $T \times \eta$ ,  $\frac{\Delta\nu_B}{\Delta\nu_A}$  et  $\chi$ ), pour une probabilité de génération dans la bande du filtre  $F_A$  de 1% (Fig. 5.7) et de 10% (Fig. 5.7).

6. Il s'agit d'une valeur typique rencontrée expérimentalement dans le cadre d'un montage fibré complexe comme celui présenté au Chapitre 7.

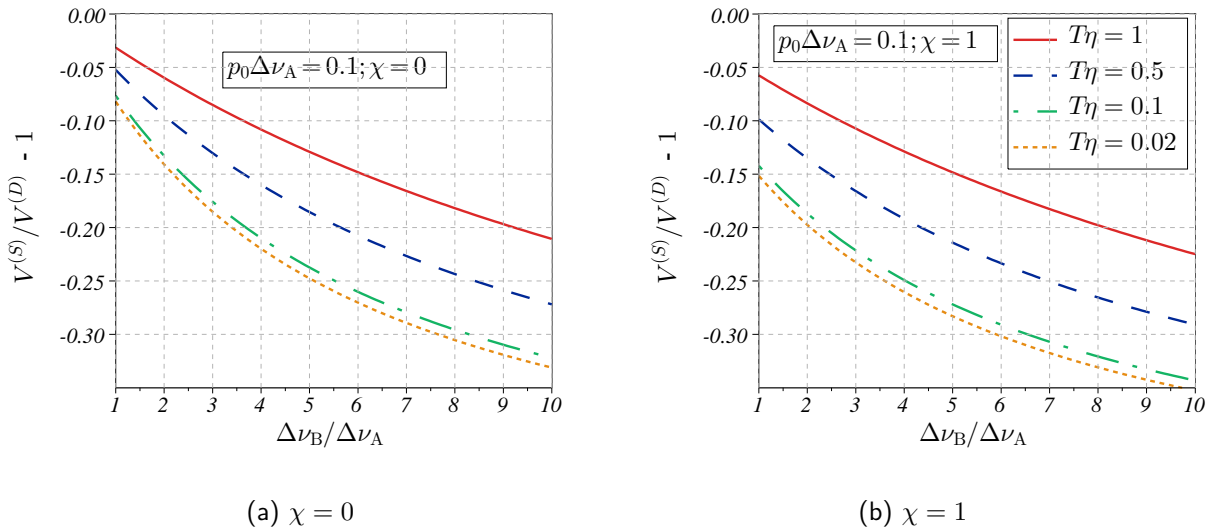


FIGURE 5.8 – Baisse relative de visibilité avec une séparation statistique par rapport à une séparation déterministe ( $V^{(S)}/V^{(D)} - 1$ ) pour  $p_0\Delta\nu_A = 0,1$  en fonction de l'asymétrie du filtrage ( $\Delta\nu_B/\Delta\nu_A$ ). Les différentes courbes correspondent aux transmissions  $T\eta = 1$ ,  $T\eta = 0,5$ ,  $T\eta = 0,1$ ,  $T\eta = 0,1$

Le paramètre  $\frac{\Delta\nu_B}{\Delta\nu_A}$  est varié sur l'axe des abscisses et nous l'avons limité à l'intervalle  $[1; 10]$  pour examiner plus précisément les propriétés de la source dans des gammes de visibilité supérieure à la limite de Bell ( $\approx 71\%$ ). Les différentes transmissions (de  $T\eta = 0,02$  à  $T\eta = 1$ ) sont représentées par différentes courbes au sein d'une même figure. Le paramètre  $\chi$ , traduisant la cohérence des doubles paires, vaut 0 à gauche et 1 à droite.

En comparant ces deux séries de figures, une première observation est la dégradation nettement plus importante pour une probabilité de génération grande que pour une probabilité faible. Avec les valeurs extrêmes représentées sur ces figures ( $T\eta = 0,02$  et  $\frac{\Delta\nu_B}{\Delta\nu_A} = 10$ ), cette dégradation atteint 35 % pour  $p_0\Delta\nu_A = 0,1$  tandis qu'elle est limitée à environ 8 % pour  $p_0\Delta\nu_A = 0,01$ .

D'autre part, il apparaît clairement, en comparant les figures de droite avec celles de gauche, que le paramètre  $\chi$  n'influence pas significativement la visibilité. Nous justifions ainsi de restreindre le reste de l'analyse au cas de doubles paires incohérentes. Si le régime des impulsions ne permet pas de supposer  $\chi = 0$ , les formules données dans la Section 5.2 permettraient de réaliser la même analyse pour une valeur de  $\chi$  différente.

Finalement, si la séparation déterministe de photons non-dégénérés semble à privilégier, notons qu'il peut être préférable de n'avoir qu'un seul filtre à stabiliser autour de  $\nu_p/2$  plutôt que deux filtres à stabiliser l'un par rapport à l'autre de sorte que  $\nu_A + \nu_B = \nu_p$  car les fluctuations sont deux fois moindres. Cela peut être décisif en bande très étroite, lorsque les fluctuations de la fréquence centrale des filtres deviennent non négligeables par rapport à leur bande passante. Dans ce cas, les faiblesses d'une séparation statistique peuvent être peu importantes par rapport au gain que permet l'usage d'un filtre unique.

## 5.4 Performances maximales d'une source

Les paramètres pertinents pour une source de paires de photons basée sur la fluorescence paramétrique sont, en termes d'applications à l'information quantique, la probabilité de vraies coïncidences (liée à la brillance) et la visibilité (liée à la qualité). Le taux de production de paires, lié à  $p_0$ , est simplement ajustable par une variation de la puissance de pompe. Plutôt

que risquer de mal le dimensionner *a priori* lors de la conception, on peut le déduire d'un couple Visibilité/Probabilité de vraies coïncidences souhaité. Ces deux paramètres sont liés entre eux par les équations (5.7) et (5.9) (dans le cas d'une séparation déterministe) ou par les équations (5.13) et (5.16) (dans le cas d'une séparation statistique). Leur relation s'écrit, dans chacun des cas :

$$P_{CV}^{(D)} = \frac{1}{C^{(D)}} \cdot \left( \frac{1}{V^{(D)}} - 1 \right) \quad \text{pour une séparation déterministe}$$

$$P_{CV}^{(S)} = \frac{1}{C^{(S)}} \cdot \left( \frac{1}{V^{(S)}} - 1 \right) \quad \text{pour une séparation statistique}$$

où  $C^{(D)}$  et  $C^{(S)}$  sont des constantes dépendantes du dispositif, mais indépendantes du processus de génération, c'est à dire de  $p_0$ . Elles sont définies par :

$$C^{(D)} = \frac{P_{CA}^{(D)}}{\left(P_{CV}^{(D)}\right)^2} = \frac{\Delta\nu_B (2 - X_A)(2 - X_B)}{\Delta\nu_A 4X_A X_B}$$

$$C^{(S)} = \frac{P_{CA}^{(S)}}{\left(P_{CV}^{(S)}\right)^2} = \frac{1}{4} \frac{\Delta\nu_B}{\Delta\nu_A} \frac{K}{2X_A X_B}$$

Éliminer ainsi le paramètre  $p_0$  permet de le déduire plus tard, une fois le compromis  $V/P_{CV}$  déterminé en fonction des autres paramètres, c'est à dire en fonction des performances effectives (qualité/brillance) de la source.

Nous allons successivement étudier les influences de l'asymétrie des bandes passantes et des pertes sur le compromis entre visibilité  $V$  et la probabilité de vraies coïncidences  $P_{CV}$ , autrement dite la probabilité de « paires utiles ».

#### 5.4.1 Influence de l'asymétrie des bandes passantes en voies A et B

La Figure 5.9 montre la probabilité de générer des paires utiles en fonction de la visibilité désirée en fonction de  $\Delta\nu_B/\Delta\nu_A$ .

Les calculs ont été effectués pour un système sans pertes ( $T_A\eta_A = T_B\eta_B = 1$ ) dans le cas d'une séparation statistique (Fig. 5.9.a) et dans le cas d'une séparation déterministe (Fig. 5.9.b). Les trois courbes correspondent respectivement à  $\Delta\nu_B/\Delta\nu_A = 1, 10$  et  $100$ .

Bien que la visibilité puisse être arbitrairement grande quelle que soit l'asymétrie des bandes passantes, la probabilité de paires utiles permise chute fortement lorsqu'on s'approche d'une visibilité idéale ( $> 95\%$ ) particulièrement recherchée pour les applications à l'information quantique. En outre, la probabilité de paires utiles décroît fortement avec cette asymétrie (un ordre de grandeur pour  $\Delta\nu_B/\Delta\nu_A = 10$ , deux ordres de grandeur pour  $\Delta\nu_B/\Delta\nu_A = 100$ , etc.) quelle que soit la visibilité considérée.

En comparant les deux figures, on voit aussi que, dans les mêmes conditions de filtrage, la probabilité de paires utiles est environ 4 à 5 fois plus importante dans le cas d'une séparation déterministe que dans le cas d'une séparation statistique.

#### 5.4.2 Influence des pertes

La Figure 5.10 représente la probabilité de génération de paires en fonction de la visibilité désirée pour différents coefficients de transmissions. Les calculs ont été effectués pour un système symétrique ( $\Delta\nu_A = \Delta\nu_B$ ,  $T_A = T_B = T$ ,  $\eta_A = \eta_B = \eta$ ) avec des transmissions comprises entre  $T\eta = 0,02$  et  $T\eta = 1$ . A gauche (a), la séparation des photons est déterministe ; à droite (b) elle est statistique.



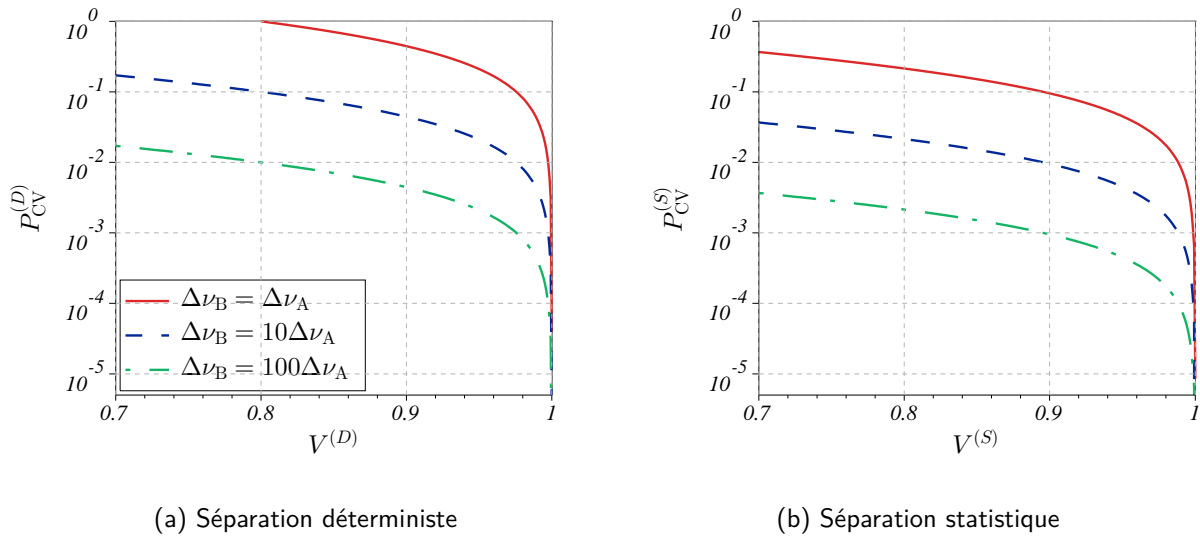


FIGURE 5.9 – Probabilité de paires utiles ( $P_{CV}$ ) en fonction de la visibilité désirée. Les différentes courbes correspondent à différents déséquilibres de largeur spectrale entre les voies A et B.

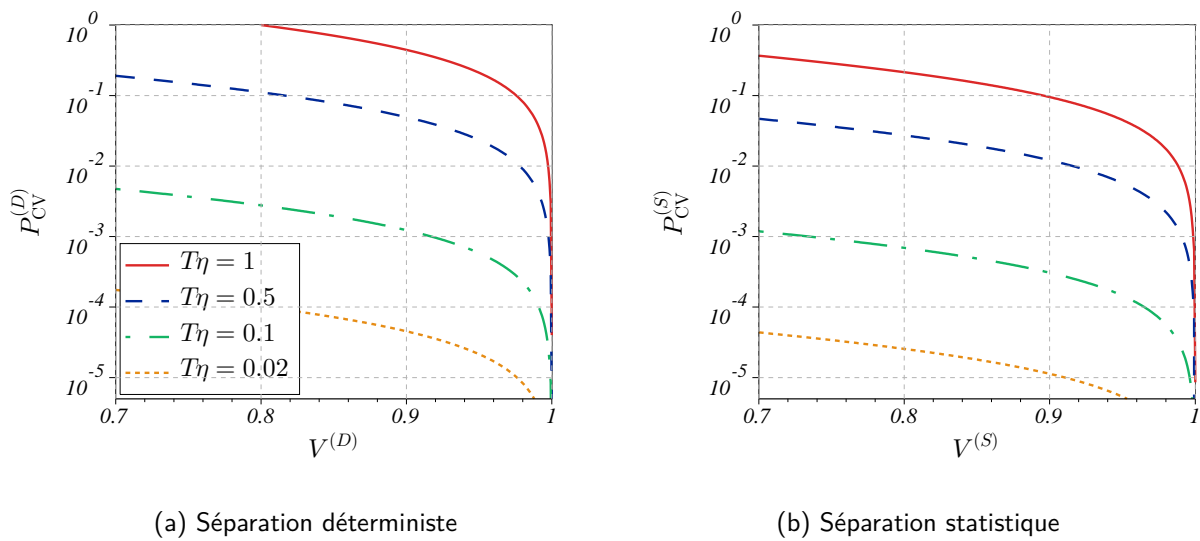


FIGURE 5.10 – Probabilité de paires utiles ( $P_{CV}$ ) en fonction de la visibilité désirée. Les différentes courbes correspondent à différents coefficients de transmission.

On observe que les pertes ne modifient pas l'évolution des paires utiles en fonction de la visibilité. Tout comme l'asymétrie du filtrage, elles réduisent en revanche globalement la probabilité de paires utiles possibles pour une visibilité donnée, d'environ un ordre de grandeur à chaque fois que les pertes doublent.

Ainsi, l'effet des pertes devient comparable à l'effet de l'asymétrie des bandes passantes, lorsqu'on considère le compromis Paires utiles/Visibilité, tandis qu'ils étaient très différents lorsqu'on s'intéressait à la dégradation de la visibilité à probabilité de génération donnée. Par exemple, la courbe  $P_{CV}(V)$  pour  $\Delta\nu_B = \Delta\nu_A$  et  $T\eta = 0,5$  est quasiment identique à celle que nous avons obtenue pour  $\Delta\nu_B = 10\Delta\nu_A$  et  $T\eta = 1$  (Fig. 5.9).

De même, un facteur 4 à 5 est perdu sur la probabilité de paires utiles entre séparation déterministe et séparation statistique. Le facteur 4, lié à la présence de la lame séparatrice, ne serait asymptotiquement atteint qu'associé à des pertes infinies.

## 5.5 Performances maximales en présence de bruit

Dans la section précédente, il était toujours possible d'atteindre une visibilité de 100% en réduisant la probabilité de paires utiles  $P_{CV}$  autant que nécessaire en réduisant le rendement de génération paramétrique. La visibilité considérée alors n'était qu'une visibilité *nette*, c'est à dire calculée sans prendre en compte le bruit du système, mais uniquement l'effet des paires multiples.

Nous allons maintenant corriger les formules déterminées dans la Section 5.2 afin de prendre en compte successivement deux types de bruit : un bruit optique proportionnel à la puissance de pompe, par exemple issu d'un processus parasite dans le cristal de conversion paramétrique, et le bruit d'obscurité des détecteurs, de valeur constante. La visibilité ainsi déterminée est dite brute : elle prend en compte les coïncidences bruit-bruit ou bruit-photon de fluorescence se produisant entre les voies A et B, dont la probabilité totale est notée  $P_{CB}$ .

### 5.5.1 Influence d'un bruit optique proportionnel à la puissance de pompe

Supposons la présence additionnelle d'un bruit blanc optique de densité spectrale de probabilité  $p_b$  proportionnelle à la puissance de pompe. On notera  $RBS = p_b/p_0$  le rapport bruit/signal.

La probabilité de coïncidences de bruit  $P_{CB}$ , utilisée dans le calcul de la visibilité brute va maintenant être calculée pour chaque mode de séparation des photons.

#### 5.5.1.1 Cas d'une séparation déterministe

Le photon de bruit peut être détecté en voie A avec une probabilité  $p_b\Delta\nu_A X_A$  ou en voie B avec la probabilité  $p_b\Delta\nu_B X_B$ . Cela entraîne des coïncidences de bruit avec une probabilité

$$\begin{aligned} P_{CB(O)}^{(D)} &= P_A^{(D)} \cdot p_b\Delta\nu_B X_B + P_B^{(D)} \cdot p_b\Delta\nu_A X_A + p_b^2\Delta\nu_A\Delta\nu_B X_A X_B \\ &= p_0^2\Delta\nu_A\Delta\nu_B X_A X_B (RBS^2 + 2RBS) \end{aligned}$$

Le premier terme entre parenthèse correspond aux coïncidences bruit-bruit ; le deuxième aux coïncidences entre un photon de fluorescence en voie A et un bruit en voie B (ou réciproquement).

### 5.5.1.2 Cas d'une séparation statistique

Dans ce cas, trois photons se répartissent statistiquement sur les voies A et B. Seules les coïncidences impliquant le photon de bruit – c'est à dire deux tiers des couples de photons possibles en voie A et B – contribuent aux coïncidences de bruit :

$$\begin{aligned} P_{\text{CB(O)}}^{(S)} &= P_A^{(S)} \cdot p_b \Delta\nu_B X_B (2 - X_B) \\ &\quad + P_B^{(S)} \cdot p_b \Delta\nu_A X_A (2 - X_A) \\ &\quad + p_b^2 \Delta\nu_A \Delta\nu_B X_A X_B (2 - X_A)(2 - X_B) \\ &= p_0^2 \Delta\nu_A \Delta\nu_B X_A X_B (2 - X_A)(2 - X_B) \left[ \text{RBS}^2 + 2\text{RBS} \right] \end{aligned}$$

### 5.5.1.3 Analyse

Nous comparons ici trois niveaux de rapports bruit-signal :

- RBS = 1 : absence de bruit optique ;
- RBS = 0,1 : pour un faible bruit optique, les coïncidences bruit-bruit sont négligeables. Seules les coïncidences bruit-photon de fluorescence jouent un rôle significatif ;
- RBS = 1 : le bruit optique comprend autant de photons que la fluorescence. Les coïncidences bruit-bruit ne sont plus négligeables.

On se place en configuration symétrique ( $\Delta\nu_A = \Delta\nu_B$ ,  $T_A \eta_A = T_B \eta_B = T\eta$ ), et on considère deux valeurs typiques de la transmission globales avec détecteurs de type InGaAs : pertes modérées ( $T\eta = 0,1$ ) et pertes fortes ( $T\eta = 0,02$ ).

Les Figures 5.11 et 5.12 montrent, pour des pertes modérées et fortes respectivement, le compromis entre paires utiles et visibilité pour les trois niveaux de bruit considérés. Les modes de séparation déterministe et statistique sont représentés à gauche et à droite respectivement.

Comme attendu, pour une visibilité donnée, la probabilité d'une paire utile diminue quand le rapport bruit/paires générées augmente. Toutefois, cette diminution reste modeste : moins de 20 % pour RBS = 0,1. Lorsque le niveau de bruit égale celui des photons de fluorescence, le nombre de paires utiles n'est réduit que d'un facteur 4 environ. L'effet est semblable dans le cas d'une séparation déterministe et dans le cas statistique.

Ainsi, un bruit proportionnel à la puissance de pompe ne modifie pas fondamentalement le compromis Paires utiles/Brillance. En revanche, comme il est connu en information quantique, il n'en est pas de même pour le bruit d'obscurité, constant, des détecteurs.

## 5.5.2 Influence du bruit d'obscurité des détecteurs

Les détecteurs présentent un bruit électronique intrinsèque qui provoque des fausses détections qui ne sont pas déclenchées par l'absorption de photons. En ce sens, on appelle ce bruit « bruit d'obscurité ».

Si  $P_{D_A}$  et  $P_{D_B}$  sont respectivement les probabilités d'un coup de bruit sur les détecteurs A et B, on a une probabilité de mesurer une coïncidence de bruit d'obscurité égale à :

$$P_{\text{CB(D)}} = P_{D_A} P_A + P_{D_B} P_B + P_{D_A} P_{D_B}$$

Le bruit d'obscurité  $P_{D_A}$ ,  $P_{D_B}$  ne dépend pas du mode de séparation des photons. Seuls changent les probabilités de détection des photons de fluorescence en voie  $i$  :  $P_i = P_i^{(D)}$  dans le cas déterministe et  $P_i = P_i^{(S)}$  dans le cas statistique.

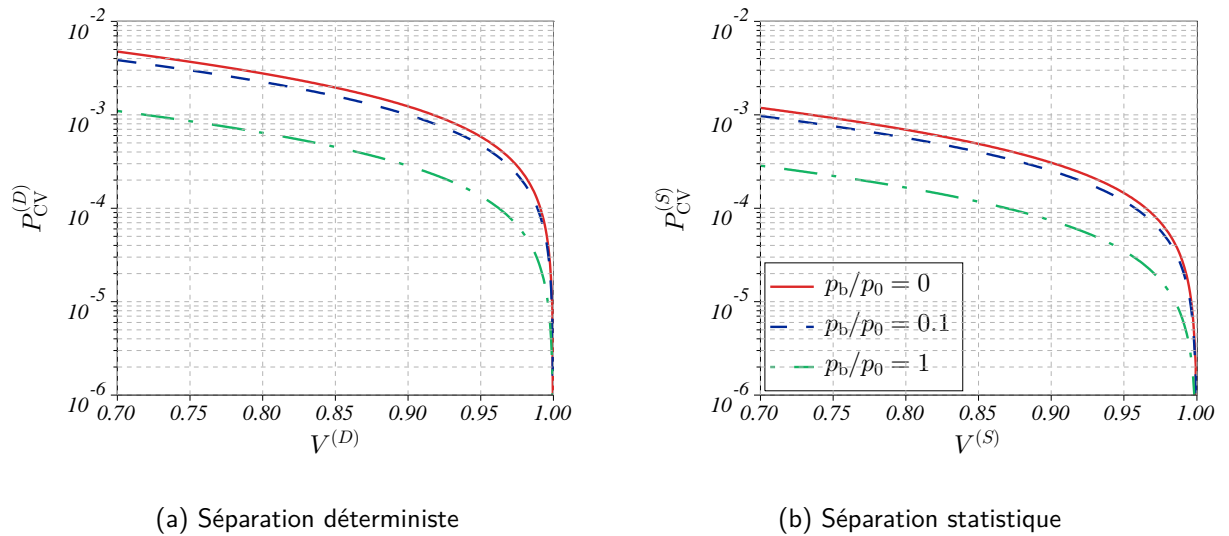


FIGURE 5.11 – Probabilité de paires utiles ( $P_{CV}$ ) en fonction de la visibilité désirée dans le cas de pertes modérées ( $T\eta = 0,1$ ). Les différentes courbes correspondent à différents rapports bruit/signal.

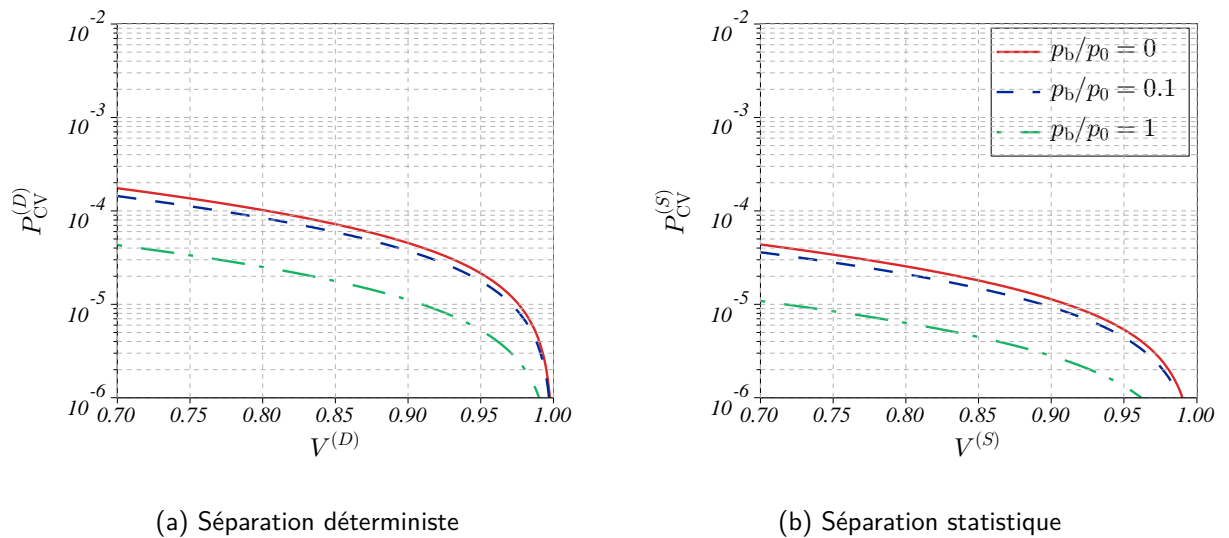


FIGURE 5.12 – Probabilité de paires utiles ( $P_{CV}$ ) en fonction de la visibilité désirée dans le cas de pertes fortes ( $T\eta = 0,02$ ). Les différentes courbes correspondent à différents rapports bruit/signal.

Les Figures 5.13 et 5.14 montrent, pour des pertes modérées et fortes respectivement, le compromis entre paires utiles et visibilité pour trois niveaux de bruit d’obscurité :  $P_{D_A} = P_{D_B} = P_D = 0, 2 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}$  et  $10^{-3}$ . Les deux modes de séparation des photons sont respectivement représentés à gauche et à droite.

On observe que non seulement la visibilité décroît aux grandes valeurs de  $P_{CV}$ , comme c’était le cas jusqu’alors en raison des paires multiples, mais elle décroît également aux petites valeurs de  $P_{CV}$  en raison du bruit constant des détecteurs. En conséquence, la visibilité devient bornée, à une valeur d’autant plus basse que le bruit est important. Mais cette borne s’abaisse également lorsque les pertes augmentent. Il est donc critique non seulement de choisir des détecteurs de faible bruit, mais également de réduire les pertes autant que possible.

Le mode de séparation des photons joue également un rôle significatif sur la valeur de cette borne : à transmission globale donnée, elle est plus élevée avec une séparation déterministe.

Remarquons que le problème d’un bruit optique constant (*i.e.* indépendant de la puissance de pompe), non abordé dans la section 5.5.1, se traiterait de la même façon que le bruit d’obscurité considéré ici.

## 5.6 Conclusion

Pour des applications aux communications quantiques ou à l’information quantique en général, la visibilité maximale des franges d’interférences que peut produire une source de paires de photons est une qualité essentielle. Lorsque ces paires de photons sont produites par fluorescence paramétrique, cette visibilité est plus ou moins dégradée par la présence de paires multiples. S’il est connu qu’une diminution du débit de la source permet de compenser une baisse de visibilité en réduisant la proportion de paires multiples, nous avons choisi dans ce chapitre d’étudier de manière quantitative comment quatre paramètres d’une source complète amplifient l’effet néfaste des paires multiples : les pertes globales, le mode de séparation des photons vers deux voies distinctes, la largeur spectrale du filtrage sur chacune d’elles, ainsi que la présence d’un bruit extrinsèque.

Si les pertes, même importantes, semblent en tant que telles jouer un rôle mineur sur la baisse de visibilité par rapport à une forte asymétrie des bandes passantes sur chaque voie de détection, cela s’avère faux lorsqu’on raisonne non plus à rendement de conversion paramétrique constant mais à débit de paires utiles, détectables, constant. Alors, les effets de ces deux paramètres sont du même ordre dans les gammes réalistes considérées.

Nous avons étudié quantitativement le bénéfice d’une séparation déterministe des photons d’une paire vers chaque voie (séparation par une lame dichroïque de photons non-dégénérés en fréquence) par rapport à une séparation statistique (à l’aide d’une lame partiellement réfléchissante ou un coupleur fibré). Si, toutes choses égales par ailleurs, le premier cas permet toujours de meilleures performances, le gain reste limité ( $< 10\%$ ) pour une probabilité de conversion paramétrique dans la bande passante de l’ordre de  $1\%$  – ordre de grandeur que nous avons montré souhaitable. Certes, du point de vue des paires utiles, leur probabilité est réduite d’un facteur 4 à visibilité donnée à cause de la lame séparatrice. Mais ces inconvénients pourraient devenir mineurs pour des bandes passantes très étroites, lorsqu’un filtrage stable devient significativement plus difficile à deux fréquences distinctes, mais liées par la conservation de l’énergie (photons non-dégénérés), qu’à une fréquence unique.

Nous avons également montré que la présence d’un bruit optique proportionnel à la puissance de pompe, quoique néfaste, n’est pas rédhibitoire tant que sa densité spectrale de probabilité reste inférieure à celle des paires de photons jumeaux.

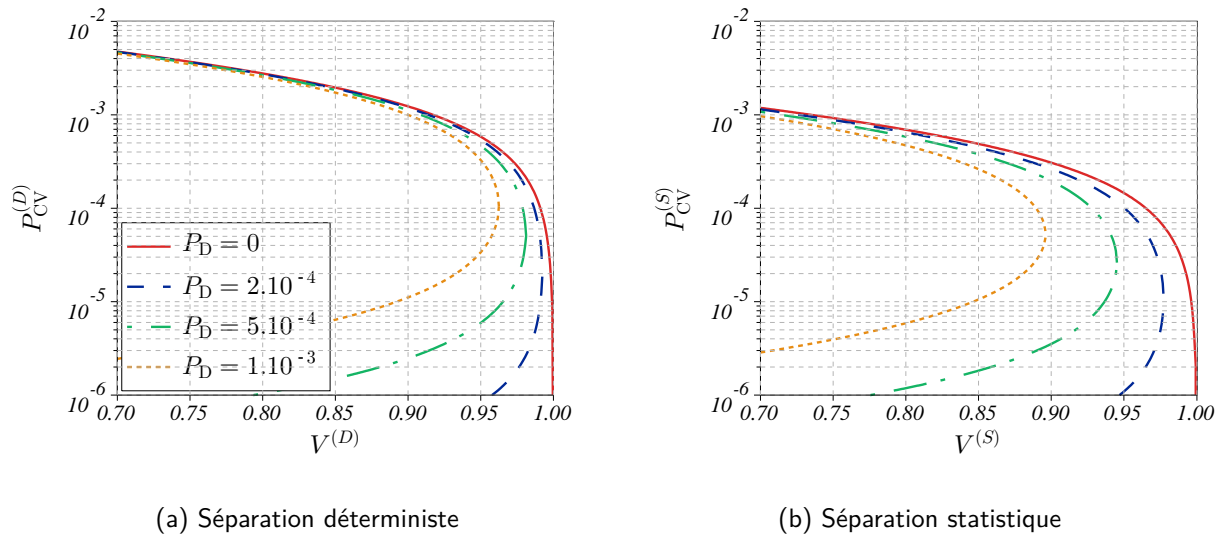


FIGURE 5.13 – Probabilité de paires utiles ( $P_{CV}$ ) en fonction de la visibilité désirée dans le cas de pertes modérées ( $T\eta = 0,1$ ). Les différentes courbes correspondent à différents rapports bruit/signal.

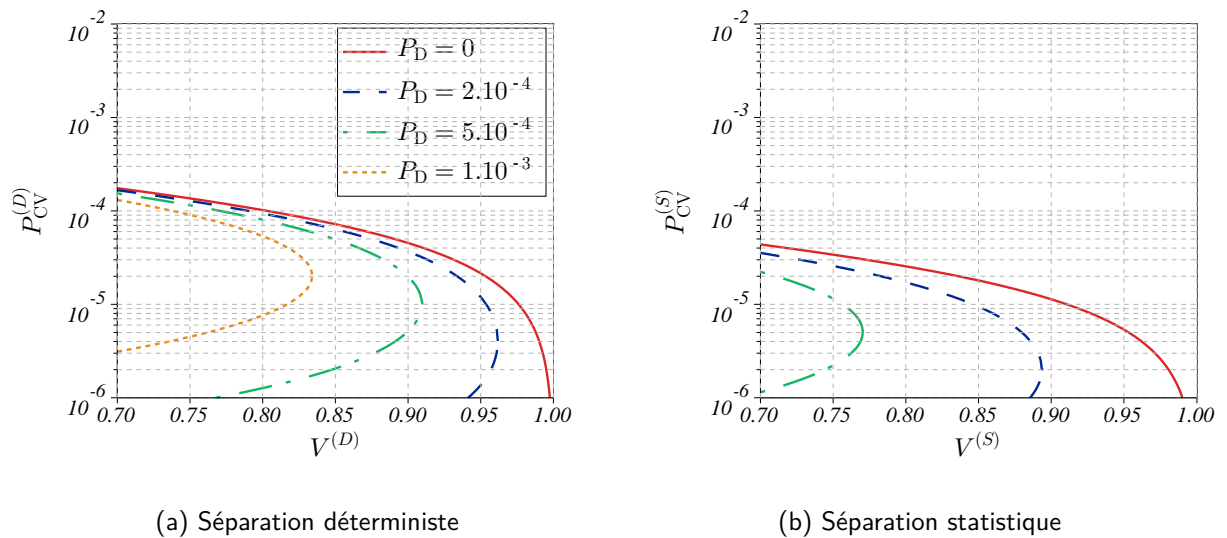


FIGURE 5.14 – Probabilité de paires utiles ( $P_{CV}$ ) en fonction de la visibilité désirée dans le cas de pertes fortes ( $T\eta = 0,02$ ). Les différentes courbes correspondent à différents rapports bruit/signal.

Le bruit d'obscurité des détecteurs, constant, fixe un plafond de visibilité qui est non seulement dépendant de la quantité de bruit, mais également des autres paramètres. Ce point confirme l'importance d'optimiser la conception du système (filtrage, pertes), non seulement pour permettre un plus grand débit de photons, mais également pour améliorer le plafond de visibilité.

Nous verrons au Chapitre 7 comment ces résultats nous ont permis de faire des choix de conception pour la source du projet eQuanet. Mais tout d'abord, nous nous intéressons dans le chapitre suivant à une cause importante de pertes : le couplage des paires de photons dans une fibre optique. La connaissance théorique de l'efficacité de couplage maximale se situe dans le prolongement de l'idée développée dans ce chapitre, à savoir anticiper les performances atteignables pour une source donnée. Comme nous allons le voir, le calcul de cette efficacité requiert une étude approfondie de l'interaction paramétrique.

## Chapitre 6

# Théorie de la fluorescence paramétrique pour un couplage optimal dans une fibre optique

Dans ce chapitre<sup>1</sup>, nous abordons un aspect important de notre projet qui concerne l’optimisation de la fluorescence et de sa collection.

Depuis les travaux pionniers de W. H. LOUISEL et A. YARIV [LYS61] sur l’émission spontanée induite par les fluctuations quantiques lors d’une interaction paramétrique, et ceux de l’équipe de L. MANDEL [HM85, GM87, Ou88, Man99] sur les corrélations quantiques qu’elle engendre, un important effort théorique a été développé pour tenter d’améliorer les performances et la qualité des sources réalisées expérimentalement. La plupart de ces études ont été menées en vue d’optimiser un dispositif particulier en ce qui concerne le faisceau de pompe (monochromatique ou de spectre large, considéré comme une onde plane ou focalisé), les polarisations en jeu (accord de phase de type I ou II [RKSS94, KR97] par exemple), la bande passante des photons générés (prise en compte de filtrage spectral additionnel ou non), la configuration d’émission (colinéaire ou non-colinéaire) et le mode de collection des paires de photons (diaphragmes [JST94, PSK+96] ou fibres optiques).

Si, dès 2001, C. KURTSIEFER [KOW01] proposa une méthode pour optimiser la collection de paires de photons dans une fibre dans le cas de la génération de type II, une publication plus récente de D. LJUNGGREN [LT05], de portée plus générale, fait actuellement référence en la matière. Mais bien qu’elle donne des indications précieuses sur les caractéristiques des photons collectés en terme de spectre et d’efficacité, cette publication ne tient pas compte de la non-monochromaticité d’une pompe impulsionnelle.

Sans s’intéresser au problème du couplage dans une fibre optique, T. B. PITTMAN [PSK+96] a cherché à étudier l’effet de la focalisation du faisceau de pompe sur la géométrie d’émission des paires de photons, mais toujours en considérant son spectre monochromatique. Au contraire, certains articles [KR97, GW97, ORW99] traitent le cas de pompe non-monochromatique, mais dans l’approximation de l’onde plane. À notre connaissance, aucune théorie n’a été publiée qui rend compte de distributions spectrale et temporelle arbitraires, ainsi que de focalisations quelconques, forte autant que nulle (faisceau parallèle).

Nous proposons ici de considérer le cas particulier d’un faisceau de pompe focalisé, de distribution spectrale et d’enveloppe temporelle quelconques, et d’étudier le rendement de production de paires de photons jumeaux en tenant compte de la multiplicité des vecteurs d’onde de pompe dans chaque zone du cristal. Nous décrirons les paires de photons ainsi produites sans supposer

---

1. L’étude décrite dans ce chapitre fait l’objet d’un article en préparation [SDF+11].



quoi que ce soit *a priori* sur leurs caractéristiques (mode spatial, polarisation) et nous calculerons de manière absolue leur couplage dans une fibre optique en présence d'un filtrage du spectre d'émission.

Nous prendrons en compte, avant la collection, tous les éléments représentés sur la Figure 6.1 qui sont nécessaires en pratique pour réaliser une source conforme à nos besoins : filtrage spectral, système de lentilles imageantes entre la génération et la fibre, coupleur 50/50 séparant les paires de photons vers deux voies fibrées distinctes.

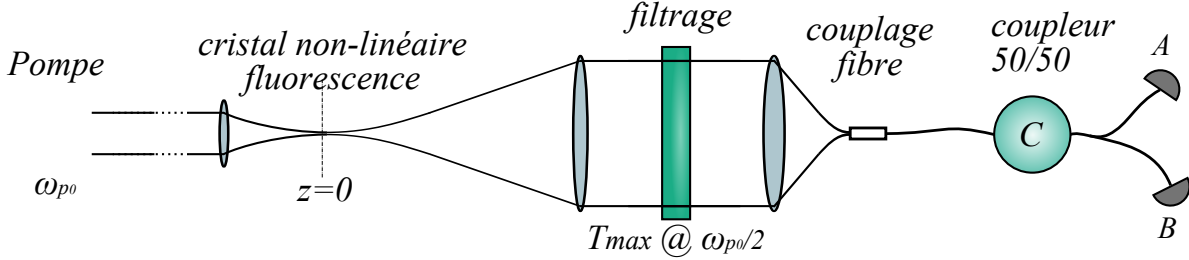


FIGURE 6.1 – Schéma du dispositif de génération paramétrique de paires de photons.

Après s'être placés, pour prolonger les expressions analytiques, dans le cadre d'une pompe de distribution spectrale et d'enveloppe temporelle gaussiennes, nous appliquerons une méthode numérique permettant de déterminer la configuration optimale de l'expérience du point de vue du rendement et du taux de couplage dans la fibre optique.

## 6.1 Cas général

### 6.1.1 Principe du calcul

La fluorescence paramétrique a été présentée au Chapitre 2, mais des hypothèses fortes y ont été utilisées, comme un faisceau de pompe continu considéré comme une onde plane purement monochromatique.

Dans cette section, nous commencerons par décrire précisément les éléments du système qui entrent en jeu dans l'interaction elle-même : le faisceau de pompe et le cristal. Puis nous écrirons l'Hamiltonien qui régit de manière locale le processus de génération de paires par fluorescence paramétrique. Nous en déduirons la contribution de cette interaction locale à l'état quantique d'une paire de photons. Puis nous exprimerons la résultante globale de ces interactions locales, ce qui permettra d'introduire rigoureusement les conditions d'accord de phase.

Nous nous intéresserons au problème du couplage des paires de photons dans une fibre optique. Nous verrons que ce couplage correspond à un filtrage spatial qui a des conséquences sur le spectre des photons collectés. Nous verrons également comment prendre en compte l'effet d'un filtrage spectral additionnel.

### 6.1.2 Le champ de pompe

Le champ de pompe est supposé être un faisceau gaussien (voir §. 1.3.2) impulsif de fréquence centrale  $\omega_{p0}$ , de polarisation dirigée selon  $\vec{e}_x$  qui se propage dans la direction  $z$ . On considère le faisceau non atténué par le cristal (rendement faible) et on néglige la dispersion de sa vitesse de groupe. Le champ complexe s'écrit :

$$\mathbf{E}_p^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \vec{e}_x \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{gp}}} e^{i(k_{p0}z - \omega_{p0}t)} G_T\left(t - \frac{z}{v_{gp}}\right) G_{\perp}(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (6.1)$$

où  $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sont les coordonnées spatiales transverses à l'axe de propagation  $z$ . La position s'écrit  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ z \end{pmatrix}$ .

De plus,

- $n_p = n(\omega_{p_0})$  est l'indice du cristal à la fréquence de pompe  $\omega_{p_0}$ ,  $\omega_{p_0} = k_{p_0} \frac{c}{n_p}$  ;
- $v_{g_p}$  est la vitesse de groupe à  $\omega_{p_0}$  ; on la considère égale à la vitesse de phase  $v_{\phi_p} = \frac{c}{n_p}$
- $\mathcal{E}_p$  est l'énergie de l'impulsion de pompe ;
- $G_T$  décrit l'enveloppe temporelle de l'impulsion de pompe ;
- $G_{\perp}$  décrit son enveloppe spatiale.

Nous considérerons dans la suite de ce chapitre les fonctions  $G_T$  et  $G_{\perp}$  suivantes :

$$G_T(t) = \frac{1}{(\pi\Delta t^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{t^2}{2\Delta t^2}} \quad G_{\perp}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(1 + \iota \frac{z}{z_R})(\pi w_0^2/2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{(1 + \iota \frac{z}{z_R})w_0^2}}$$

L'expression de  $G_T$  correspond à une impulsion gaussienne de demi-largeur  $\Delta t$  à  $1/e$  en intensité. L'expression de  $G_{\perp}$  correspond à la distribution transverse d'un faisceau gaussien (voir Chapitre 1, Eq. (1.22)) de waist  $w_0$  et de longueur de Rayleigh  $z_R = k_{p_0} w_0^2/2$ , c'est à dire de demi-largeur  $w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$  à  $1/e^2$  en intensité.

Ces deux fonctions sont normalisées en intensité :

$$\int |G_T(t)|^2 dt = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |G_{\perp}(\boldsymbol{\rho}, z)|^2 d^2\boldsymbol{\rho} = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} |G_{\perp}(\rho, \theta, z)|^2 \rho d\rho d\theta = 1$$

où  $\rho, \theta$  sont les coordonnées polaires :  $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix}$

Nous aurons besoin par la suite de l'expression des transformées de Fourier du champ de pompe. En utilisant les conventions de l'Annexe A, et en notant  $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ k_z \end{pmatrix}$ , elles s'écrivent :

$$\mathbf{E}_p^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \vec{\epsilon}_x \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} e^{\iota k_{p_0} z - \omega_{p_0} t} G_T(t - \frac{z}{v_{g_p}}) G_{\perp}(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (6.2)$$

$$\mathbf{E}_p^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \vec{\epsilon}_x \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} e^{\iota(k_{p_0} + \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{g_p}})z} \check{G}_T(\omega - \omega_{p_0}) G_{\perp}(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{E}_p^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}, z, \omega) = \vec{\epsilon}_x \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} e^{\iota(k_{p_0} + \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{g_p}})z} \check{G}_T(\omega - \omega_{p_0}) (2\pi w_0^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{4} w_0^2 (1 + \iota \frac{z}{z_R})} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{E}_p^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}, k_z, \omega) = \vec{\epsilon}_x \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} 2\pi \delta\left(k_z - \left(k_{p_0} + \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{g_p}} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2k_{p_0}}\right)\right) \check{G}_T(\omega - \omega_{p_0}) \check{G}_{\perp}(\boldsymbol{\kappa}, 0) \quad (6.5)$$

avec

$$\check{G}_T(\omega) = (4\pi\Delta t^2)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \Delta t^2}{2}} \quad \check{G}_{\perp}(\boldsymbol{\kappa}, z = 0) = (2\pi w_0^2)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2 w_0^2}{4}}$$

Contrairement aux autres grandeurs de ce chapitre dont la transformée de Fourier sera signalée par un «  $\check{\cdot}$  », les fonctions correspondant à la grandeur physique  $\mathbf{E}_p^{(+)}$  seront notées de la même façon dans les espaces de Fourier spatial et temporel, afin d'éviter de surcharger les notations par des symboles différenciant les quatre expressions (6.2) à (6.5).

### 6.1.3 Le milieu d'interaction

Le milieu d'interaction est constitué d'un cristal non-linéaire de longueur  $L$  dans la direction  $z$ . On suppose ses dimensions transverses grandes devant l'étendue transverse du faisceau ( $\sim w(z)$ ).

L'interaction du cristal avec le champ sera décrite de manière locale : à chaque élément de volume  $d^3\mathbf{r}_0$  situé en  $\mathbf{r}_0$ , on associe un Hamiltonien élémentaire  $\hat{h}(\mathbf{r}_0) d^3\mathbf{r}_0$ .  $\hat{h}(\mathbf{r}_0)$  correspond à la densité volumique d'énergie d'interaction champ-cristal exprimée sous forme quantifiée. On s'intéressera à la contribution de chaque élément  $d^3\mathbf{r}$  du cristal à l'état global du système. Celui-ci est délocalisé et sa dépendance spatiale sera décrite par la coordonnée  $\mathbf{r}$ , à différencier de la coordonnée « source »  $\mathbf{r}_0$ .

Le cristal possède une susceptibilité non-linéaire d'ordre deux  $\overline{\chi}^{(2)}$  qui entrera en jeu dans l'expression de la densité d'énergie d'interaction en tant que facteur de couplage des divers mode de champ en jeu dans le processus. Nous considérerons cette susceptibilité d'abord dans toute sa généralité, puis nous l'appliquerons à l'exemple d'un cristal périodiquement retourné. Nous ne considérerons pas les non-linéarités d'ordres supérieurs.

### 6.1.4 Les états localisés du champ

Dans la perspective d'une description locale du processus de fluorescence paramétrique, la description du photon présentée dans le Chapitre 1 (§ 1.2.3, p.18) comme excitation délocalisée du champ électromagnétique paraît insuffisante. La représentation naïve qu'on souhaiterait adopter pourrait être énoncée de la manière suivante : *Un photon de pompe traversant le cristal se scinde spontanément, en  $\mathbf{r}_0$ , en une paire de photons. Quelle est la contribution de ces deux photons au champ en un point  $\mathbf{r}$  de l'espace ? Est-il possible de se rapprocher d'une telle description ? Cela pose la question de la localisabilité du photon.*

En 1949, dans une tentative de formuler les propriétés d'états quantiques localisés, NEWTON et WIGNER [NW49] sont arrivés à la conclusion :

A consideration has been carried out also for equations with zero mass. [...] For higher and finite spins, beginning with  $s = 1$  (i.e. Maxwell's equations), we found that no localized states [in our sense] exist. This is an unsatisfactory, if not unexpected, feature of our work. [NW49]

Aucun opérateur, donc aucun état propre, n'existe pour la position d'un photon, du moins selon les axiomes posés par les auteurs. Bien que des démonstrations existent [Haw99b, Haw99a] qui contredisent cette conclusion, il est généralement admis [MW95, GC08] qu'un tel opérateur n'existe pas.

En revanche, comme l'a développé L. MANDEL en 1966 [Man66] il est possible de définir un état comme une superposition d'états propres de l'énergie du champ. Comme nous l'avons vu au Chapitre 1, il s'agit des états nombre, ou états de Fock, propres à chaque mode du champ :

$$|1_\ell\rangle$$

Nous faisons abstraction de la polarisation  $\vec{\epsilon}_\ell$  pour l'instant. Nous considérons que le mode  $\ell$  désigne un mode spatial  $\mathbf{k}$

$$|1_{\mathbf{k}}\rangle$$

L'ensemble des modes  $\{|1_{\mathbf{k}}\rangle\}$  forme une base de l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}$  des états à un photon. Un état quelconque à un photon  $|\psi\rangle$  s'écrit de manière générale comme une superposition cohérente

d'excitations des différentes modes (voir [Man66]) :

$$|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} |1_{\mathbf{k}}\rangle$$

où la suite  $\psi_{\mathbf{k}}$  est telle que  $|\psi\rangle$  est normalisé :  $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{k}} |\psi_{\mathbf{k}}|^2 = 1$ .

On définit un ensemble d'états  $\{|1_{\mathbf{r}}\rangle\}$  lié à la base  $\{|1_{\mathbf{k}}\rangle\}$  de  $\mathbb{H}$  par la relation suivante [Man66] :

$$|1_{\mathbf{r}}\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} |1_{\mathbf{k}}\rangle \quad (6.6)$$

On peut montrer [Man66] que les états  $\{|1_{\mathbf{r}}\rangle\}$  forment une famille génératrice orthogonale complète, mais non normalisée, de  $\mathbb{H}$ . On a alors la relation réciproque :

$$|1_{\mathbf{k}}\rangle = \int_V d^3\mathbf{r} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} |1_{\mathbf{r}}\rangle$$

Dans la base  $\{|1_{\mathbf{r}}\rangle\}$ ,  $|\psi\rangle$  s'exprime alors par

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} \int_V d^3\mathbf{r} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} |1_{\mathbf{r}}\rangle \\ &= \int_V d^3\mathbf{r} \left[ \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \right] |1_{\mathbf{r}}\rangle \\ &= \int_V d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) |1_{\mathbf{r}}\rangle \end{aligned}$$

où la fonction  $\psi(\mathbf{r})$  est définie comme la fonction continue dont les valeurs  $\psi_{\mathbf{k}}$  sont les coefficients de sa décomposition en série de Fourier dans l'espace de quantification  $V$  (dont on a supposé, comme il se fait, les conditions aux limites périodiques). Elle est formellement analogue à une fonction d'onde spatiale comme on en peut en associer à l'opérateur position de l'électron. En effet, la densité de probabilité de mesurer le photon en  $\mathbf{r}$  s'écrit :

$$p(\mathbf{r}) = |\langle 1_{\mathbf{r}}|\psi\rangle|^2 = |\psi(\mathbf{r})|^2$$

Cependant, en raison de l'absence de localisabilité véritable du photon, cette description n'a de sens que si cette densité de probabilité est intégrée sur un volume  $\mathcal{V}$  suffisamment grand : chacune des trois dimensions de  $\mathcal{V}$  doit être grande devant la longueur d'onde [Man66], de sorte qu'on n'évalue la localisation qu'approximativement. La probabilité que le photon soit situé dans un tel volume  $\mathcal{V}$  vaut :

$$P(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} p(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2$$

On vérifie bien que

$$P(V) = \int_V d^3\mathbf{r} p(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{k}} |\psi_{\mathbf{k}}|^2 = 1.$$

Dans le problème qui concerne ce chapitre, les dimensions caractéristiques les plus petites sont celle du waist d'un faisceau focalisé dans le cristal d'une part ( $\sim$  quelques dizaines de  $\mu\text{m}$ ), et le diamètre de mode d'une fibre monomode d'autre part (10,4  $\mu\text{m}$ ), ce qui est encore bien supérieur à la longueur d'onde qui est d'environ 1,55  $\mu\text{m}$ .

Nous utiliserons parfois, par simplicité, le terme de « fonction d'onde » pour les photons, ce qui sera une manière de désigner une fonction  $\psi(\mathbf{r})$  ou sa duale  $\psi_{\mathbf{k}}$ .

**Passage au continu dans un grand volume de quantification** — Dans la limite où le volume de quantification  $V$  est grand devant les dimensions du problème toutes les quantités physiques sont indépendantes de  $V$ . Dans le cadre de cette limite, les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  sont proches les uns des autres et on peut rendre leurs valeurs continues en utilisant le changement suivant :

$$\sqrt{V}\psi_{\mathbf{k}} \longrightarrow \psi(\mathbf{k})$$

Alors, les sommes deviennent des intégrales :

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$$

On a finalement :

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} \longleftrightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \psi(\mathbf{k})$$

**Rappel sur les états à  $n$  photons** — Les états à plusieurs photons s'écrivent comme superposition de produits tensoriels d'états à un photon. Ainsi, l'état « le premier photon est en  $\mathbf{r}_1$ , le second en  $\mathbf{r}_2$ , ..., et le dernier en  $\mathbf{r}_n$  » s'écrit :

$$|\psi\rangle = |1_{\mathbf{r}_1}\rangle \otimes |1_{\mathbf{r}_2}\rangle \otimes \dots \otimes |1_{\mathbf{r}_n}\rangle = |1_{\mathbf{r}_1}; 1_{\mathbf{r}_2}; \dots; 1_{\mathbf{r}_n}\rangle$$

L'état ainsi décrit ne correspond pas à un état physique car l'état d'un ensemble de bosons doit être symétrique par échange de deux particules. Seul l'état « il y a un photon en  $\mathbf{r}_1$ , un en  $\mathbf{r}_2$ , ..., et un en  $\mathbf{r}_n$  » existe physiquement et il est décrit par le vecteur obtenu par symétrisation du vecteur ci-dessus : on le note  $|n_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n}\rangle$ .

Ainsi, par exemple, l'état « il y a 2 photons en  $\mathbf{r}_1$  et un photon en  $\mathbf{r}_2$  » est noté :

$$|3_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1_{\mathbf{r}_1}; 1_{\mathbf{r}_1}; 1_{\mathbf{r}_2}\rangle + |1_{\mathbf{r}_1}; 1_{\mathbf{r}_2}; 1_{\mathbf{r}_1}\rangle + |1_{\mathbf{r}_2}; 1_{\mathbf{r}_1}; 1_{\mathbf{r}_1}\rangle)$$

## 6.1.5 Hamiltonien du système

### 6.1.5.1 Hamiltonien du champ libre

Nous avons vu au chapitre 1 comment quantifier le champ électromagnétique libre dont l'évolution est donnée par les équations de Maxwell dans le vide. Nous avons décrit (§ 1.2.5) comment modifier les expressions pour prendre en compte la réponse linéaire d'un matériau diélectrique dispersif, non-magnétique, sans perte.

Ainsi, l'Hamiltonien décrivant le champ libre est

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \left( \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} + \frac{1}{2} \right)$$

qu'on préfère récrire en prenant l'énergie du vide comme origine des énergies

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} \quad (6.7)$$

Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, l'origine de la fluorescence paramétrique réside dans le couplage des fluctuations quantiques du vide à un champ intense de pompe, lié aux non-linéarités du matériau. Nous allons étudier ce couplage à partir de l'Hamiltonien d'interaction champ-cristal que nous allons, quant à lui, exprimer de façon locale.

### 6.1.5.2 Hamiltonien d'interaction lumière-matière

**L'énergie d'interaction champ-cristal** — Dans le cas général, l'énergie d'interaction non-linéaire d'un mode  $\ell$  du champ par élément de volume de cristal s'écrit ainsi [Boy08] :

$$h_{I,\ell}(\mathbf{r}_0) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+1} \cdot 2\Re \left[ \mathbf{E}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_\ell) \cdot \mathbf{P}_\ell^{(-)(n)}(\mathbf{r}_0, \omega_\ell) \right]$$

où  $\mathbf{E}_\ell^{(+)}$  est le champ électrique (complexe) dans le mode  $\ell$  et  $\mathbf{P}_\ell^{(+)(n)} = \left( \mathbf{P}_\ell^{(-)(n)} \right)^*$  la polarisation non-linéaire d'ordre  $n$  (complexe) du milieu dans le mode  $\ell$ .

Dans le cas qui nous préoccupe, seul l'ordre 2 a une influence significative. L'expression pour la densité volumique d'énergie, tous modes confondus, s'écrit alors :

$$h_I(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{3} \sum_{\ell} \mathbf{E}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_\ell) \cdot \mathbf{P}_\ell^{(-)(2)}(\mathbf{r}_0, \omega_\ell) + c.c. \quad (6.8)$$

Le champ est ici un tout indivisible. Pour rendre ce résultat utilisable, il faut l'exprimer à l'aide des composantes identifiées du champ, à savoir un terme de pompe et des termes associés à la paire de photons. Ces composantes du champ occupent un ensemble de modes distincts :

Parmi l'ensemble des modes  $\ell$  possibles, on distingue les sous-ensembles  $\ell_p, \ell_s, \ell_i$  de la manière suivante :

- les modes de la pompe désignés par  $\ell_p$  : ces modes ont une pulsation proche de  $\omega_{p_0}$  et une polarisation  $\vec{\epsilon}_x$ ,
- les modes de la paire désignés par  $\ell_s$  ou  $\ell_i$  : ces modes ont une pulsation comprise entre 0 et  $\omega_{p_0}$  quelle que soit leur polarisation. Des restrictions supplémentaires s'appliqueront avec les conditions d'accord de phase,
- les autres modes, qui n'interviennent pas dans le calcul.

Nous supposons que ces trois ensembles sont disjoints ; on pourra vérifier *a posteriori* que peu de photons sont créés dans les modes proches de  $\omega_{p_0}$  comparativement aux autres modes.

Cette hypothèse donne un sens aux termes « champ de pompe » et « champ de la paire » : le premier sera la somme des champs dans les modes de la pompe et le second la somme des champs dans les modes de la paire :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) + \mathbf{E}_i^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) + \mathbf{E}_s^{(+)}(\mathbf{r}_0, t)$$

avec

$$\mathbf{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) = \sum_{\ell_p} \mathbf{E}_{\ell_p}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{i,s}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) = \sum_{\ell_{i,s}} \mathbf{E}_{\ell_{i,s}}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t)$$

Dans l'équation 6.8, le produit  $\mathbf{E}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_\ell) \cdot \mathbf{P}_\ell^{(-)(2)}(\mathbf{r}_0, \omega_\ell)$  s'écrit, en ne gardant que les termes permis par le principe de conservation de l'énergie ( $\omega_p = \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}$ ) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\ell_p, \ell_i, \ell_s \\ \omega_{\ell_i} + \omega_{\ell_s} = \omega_{\ell_p}}} \mathbf{E}_{\ell_p}^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_p}) \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_{\ell_p}; \omega_{\ell_s}, \omega_{\ell_i}) \mathbf{E}_{\ell_s}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s}) \mathbf{E}_{\ell_i}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_i}) + c.c. \\ & + \sum_{\substack{\ell_s, \ell_p, \ell_i \\ \omega_{\ell_p} - \omega_{\ell_i} = \omega_{\ell_s}}} \mathbf{E}_{\ell_s}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s}) \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_{\ell_s}; \omega_{\ell_p}, -\omega_{\ell_i}) \mathbf{E}_{\ell_p}^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_p}) \mathbf{E}_{\ell_i}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_i}) + c.c. \\ & + \sum_{\substack{\ell_i, \ell_p, \ell_s \\ -\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_p} = \omega_{\ell_i}}} \mathbf{E}_{\ell_i}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_i}) \overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\omega_{\ell_i}; -\omega_{\ell_s}, \omega_{\ell_p}) \mathbf{E}_{\ell_s}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s}) \mathbf{E}_{\ell_p}^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_p}) + c.c. \end{aligned}$$

Comme les fréquences en jeu sont bien en-deçà des fréquences de résonances du milieu,  $\overline{\chi}^{(2)}$  vérifie la symétrie de Kleimann :

$$\overline{\chi}_{a;b,c}^{(2)}(\omega_a; \omega_b, \omega_c) = \overline{\chi}_{\sigma(a); \sigma(b), \sigma(c)}^{(2)}(\omega_{\sigma(a)}; \omega_{\sigma(b)}, \omega_{\sigma(c)}) = \overline{\chi}_{a;b,c}^{(2)}$$

où  $\sigma$  est une permutation de  $S_3$ .

D'où

$$h_{I,\ell}(\mathbf{r}_0) = \epsilon_0 \sum_{\substack{\ell_i, \ell_s \\ \omega_{\ell_i} + \omega_{\ell_s} = \omega_{\ell}}} \mathbf{E}_{\ell}^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell}) \overline{\chi}^{(2)} \mathbf{E}_{\ell_s}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s}) \mathbf{E}_{\ell_i}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_i}) + c.c.$$

### 6.1.5.3 Quantification du champ

**Quantification complète** — Pour quantifier l'Hamiltonien, il suffit, pour chaque mode  $\ell$ , de remplacer le champ électrique  $\mathbf{E}_{\ell}^{(+)}(\mathbf{r}_0)$ , par l'opérateur champ électrique  $\hat{\mathbf{E}}_{\ell}^{(+)}(\mathbf{r}_0)$

$$\hat{h}_I(\mathbf{r}_0) = \epsilon_0 \sum_{\substack{\ell_i, \ell_s, \ell_p \\ \omega_{\ell_i} + \omega_{\ell_s} = \omega_{\ell_p}}} \hat{\mathbf{E}}_{\ell_p}^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_p}) \overline{\chi}^{(2)} \hat{\mathbf{E}}_{\ell_s}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s}) \hat{\mathbf{E}}_{\ell_i}^{(-)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_i}) + c.c.$$

On peut récrire cette expression sous la forme :

$$\hat{h}_I(\mathbf{r}_0) = \epsilon_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_p^{(+)}(\mathbf{r}_0) \overline{\chi}^{(2)} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_0) + c.c.$$

où  $\hat{\mathbf{E}}_p^{(+)}(\mathbf{r}_0)$  s'obtient en sommant les opérateurs champs dans les modes de pompe et  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_0)$  en sommant les opérateurs champs dans les modes de la paire ; on note la disparition des indices  $s$  et  $i$ , ces champs étant identiques.

**Approximation de la pompe intense non-déplétée** — On suppose que le champ pompe est classique. Ceci implique que l'état du champ de pompe

- n'est pas intriqué avec les états des autres champs,
- est un état propre de l'opérateur champ électrique, c'est à dire un état cohérent.

Formellement, l'état  $|\psi(t)\rangle$  du système se factorise en l'état du sous-système « pompe » et l'état du sous-système « paire de photons » :

$$|\psi(t)\rangle = |\phi_p(t)\rangle \otimes |\psi_{s,i}(t)\rangle$$

où  $|\phi_p(t)\rangle$  est un état propre de  $\hat{\mathbf{E}}_p^{(+)}(\mathbf{r})$ , la valeur propre associée étant par définition  $\mathbf{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  dont l'expression est donnée par l'Équation 6.1 page 104).

On peut donc, sans perte d'information sur le système, effectuer une trace partielle (c'est à dire prendre la valeur moyenne) par rapport à l'état de la pompe :

$$\hat{h}_I(\mathbf{r}_0) \longrightarrow \langle \phi_p(t) | \hat{h}_I(\mathbf{r}_0) | \phi_p(t) \rangle$$

L'Hamiltonien devient

$$\hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) \overline{\chi}^{(2)} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_0) + c.c.$$

Pour conclure cette section, insistons sur le fait que cet Hamiltonien d'interaction a une action locale, contrairement à l'Hamiltonien du champ libre (Eq. 6.7). De plus, il dépend du temps, puisque le faisceau de pompe a été explicitement considéré comme impulsionnel.

### 6.1.6 État des paires émises par fluorescence paramétrique

Nous disposons désormais de l'Hamiltonien qui nous permet de décrire l'évolution du champ. Nous allons calculer cette évolution à partir d'un état vide de photons. Nous allons procéder de manière perturbative en  $\hat{h}_I$  par rapport à  $\hat{\mathcal{H}}_0$ ; le calcul sera effectué à l'ordre 1.

#### 6.1.6.1 Expression du problème dans différentes représentations

Précisons tout d'abord les notations qui seront utilisées par la suite, selon la représentation (Schrödinger, Heisenberg ou Interaction) adoptée :

##### Représentation de Schrödinger

Opérateur champ pour un mode  $\ell$  :  $\hat{\mathbf{E}}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}) = \vec{\varepsilon}_\ell A(\mathbf{k}_\ell) e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_\ell$   
 État :  $|\psi_{\mathbf{r}_0, S}(t)\rangle$   
 État initial :  $|\psi_{\mathbf{r}_0, S}(0)\rangle = |0\rangle$   
 Évolution : selon l'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{r}_0, t) = \hat{\mathcal{H}}_0 + \int_{\mathcal{V}_0} d^3\mathbf{r}_0 \hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t)$

##### Représentation d'interaction

Opérateur champ pour un mode  $\ell$  :  $\hat{\mathbf{E}}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \vec{\varepsilon}_\ell A(\mathbf{k}_\ell) e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} \hat{a}_\ell$   
 État :  $|\psi_{\mathbf{r}_0, I}(t)\rangle$   
 État initial :  $|\psi_{\mathbf{r}_0, I}(0)\rangle = |\psi_{\mathbf{r}_0, S}(0)\rangle = |0\rangle$   
 Évolution : selon l'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_I(\mathbf{r}_0, t) = \int_{\mathcal{V}_0} d^3\mathbf{r}_0 \hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t)$   
 L'état en représentation de Schrödinger s'obtient par la relation :  $|\psi_{\mathbf{r}_0, S}(t)\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} |\psi_{\mathbf{r}_0, I}(t)\rangle$

##### Représentation de Heisenberg

Opérateur champ pour un mode  $\ell$  :  $\hat{\mathbf{E}}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ . Inconnue dont on cherche l'évolution.  
 Opérateur initial : champ du vide :  $\hat{\mathbf{E}}_\ell^{(+)}(\mathbf{r}, 0) = \vec{\varepsilon}_\ell A(\mathbf{k}_\ell) e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_\ell + c.c.$   
 Évolution : équation de Heisenberg / équations de Maxwell

#### 6.1.6.2 Préliminaire : état d'un photon généré par un petit élément de volume

Afin de valider le formalisme utilisé, nous allons commencer par traiter un phénomène plus simple que celui de la fluorescence paramétrique : la génération spontanée de photons dans un petit élément de volume. Pour cela il suffit de remplacer l'Hamiltonien décrivant la fluorescence par l'Hamiltonien suivant :

$$\hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t) \longrightarrow \epsilon_0 \mathbf{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) \bar{\chi}^{(1)} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_0) + c.c.$$

L'Hamiltonien  $\hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t) d^3\mathbf{r}_0$  décrit en effet la diffusion de la pompe par l'élément de volume  $d^3\mathbf{r}_0$  : l'absorption d'un photon pompe accompagnée de la réémission d'un photon de même énergie avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de direction indéterminée. Dans la pratique, les conditions d'accord de phase sont naturellement satisfaites pour  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$  : elles rendent constructif le mode spatial de la pompe : la fréquence étant conservée, les photons générés dans le mode de pompe ont une vitesse de phase identique à celle des photons de pompe.

Remarquons d'autre part que l'émission spontanée est largement minoritaire par rapport à l'émission stimulée qui, dans le cas paramétrique de transitions virtuelles, revient à une absence d'interaction. En effet, la probabilité est faible que la transition – même courte puisque virtuelle – se désexcite spontanément avant l'interaction avec un nouveau photon de pompe qui stimule l'émission.



L'étude de cet Hamiltonien est donc purement formelle puisque celui-ci rend compte d'un phénomène identique à l'absence de phénomène.

On se place en représentation d'interaction. L'équation de Schrödinger a pour solution :

$$|\psi_{\mathbf{r}_0, I}(t)\rangle = \hat{T} e^{\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t')} |0\rangle$$

où  $\hat{T}$  est l'opérateur qui ordonne les opérateurs dans le temps.

Dans la limite où la probabilité d'être dans l'état  $|0\rangle$  reste proche de 1, on peut utiliser la méthode des perturbations. À l'ordre 1 en  $\hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t)$ , cette expression devient :

$$\begin{aligned} |\psi_{\mathbf{r}_0, I}(t)\rangle &= |0\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t') |0\rangle \\ &= |0\rangle + \frac{\epsilon_0}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \sum_{\ell} E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, t') A(\ell) \chi(\ell) e^{-i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_{\ell} t')} |1_{\ell}\rangle \end{aligned}$$

où  $\chi(\ell) = \vec{\epsilon}_x \cdot \vec{\chi}^{(1)} \vec{\epsilon}_{\ell}$  et  $A(\ell) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\ell}}{2\epsilon_0 V n^2(\mathbf{k}_{\ell})}}$

Si on ne s'intéresse qu'aux temps  $t$  postérieurs au passage de l'impulsion pompe, on écrit :

$$\begin{aligned} |\psi_{\mathbf{r}_0, I}(t)\rangle &= |0\rangle + \frac{\epsilon_0}{i\hbar} \sum_{\ell} A(\ell) \chi(\ell) e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, t') e^{i\omega_{\ell} t'} |1_{\ell}\rangle \\ &= |0\rangle + \frac{\epsilon_0}{i\hbar} \sum_{\ell} A(\ell) \chi(\ell) e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}_0} E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell}) |1_{\ell}\rangle \end{aligned}$$

On passe en représentation de Schrödinger :

$$|\psi_{\mathbf{r}_0, S}(t)\rangle = |0\rangle + \frac{\epsilon_0}{i\hbar} \sum_{\ell} A(\ell) \chi(\ell) e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}_0} E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell}) e^{-i\omega_{\ell} t} |1_{\ell}\rangle$$

Selon cette expression, chaque photon de pompe de fréquence  $\omega_{\ell}$  crée dans chaque direction de l'espace un photon dont la norme du vecteur d'onde est donnée par la relation de dispersion. L'amplitude de probabilité de cette création est, à pulsation de pompe donnée, proportionnelle à  $A(\ell)\chi(\ell)$  où  $A(\ell)$  apporte une dépendance en pulsation, et  $\chi(\ell)$  une dépendance en polarisation et en fréquence. Autrement dit, le voisinage de  $\mathbf{r}_0$  absorbe un photon pompe et le rayonne par émission spontanée dans tout l'espace (de manière *a priori* anisotrope en raison de la forme de  $\chi(\ell)$ ). On peut également constater qu'un seul photon a été créé, ce qui résulte du fait que le calcul n'est mené qu'à l'ordre 1.

À partir de cet état, on peut calculer toutes les quantités qui décrivent le champ : par exemple, la densité volumique de probabilité qu'un photon soit créé en un point  $\mathbf{r}_0$  du cristal,  $p(\mathbf{r}_0)$ ; la densité volumique de probabilité qu'un photon créé en  $\mathbf{r}_0$  soit en  $\mathbf{r}$  au bout d'un temps  $t$ <sup>2</sup>,  $\dot{P}(\mathcal{V}, \mathbf{r}_0, t)$ ; la densité volumique de probabilité qu'un photon créé en  $\mathbf{r}_0$  soit dans un volume  $\mathcal{V}$  au bout d'un temps  $t$ ; ou la probabilité qu'un photon créé dans un volume  $\mathcal{V}_0$  soit dans un volume

2. On notera que  $d^3\mathbf{r}$  et  $d^3\mathbf{r}_0$  ne représentent absolument pas la même quantité; le premier fait référence au volume dans lequel on peut trouver le photon créé et le second à la portion de cristal dans laquelle ce photon a été généré

$\mathcal{V}$  après un temps  $t$  :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}_0, t) &= \sum_{\ell} |\langle 1_{\ell} | \psi_{\mathbf{r}_0, S}(t) \rangle|^2 \\ \dot{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) &= |\langle 1_{\mathbf{r}} | \psi_{\mathbf{r}_0, S}(t) \rangle|^2 \\ \dot{P}(\mathcal{V}, \mathbf{r}_0, t) &= \int_{\mathcal{V}} |\langle 1_{\mathbf{r}} | \psi_{\mathbf{r}_0, S}(t) \rangle|^2 d^3\mathbf{r} \\ P(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0, t) &= \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}_0} |\langle 1_{\mathbf{r}} | \psi_{\mathbf{r}_0, S}(t) \rangle|^2 d^3\mathbf{r}_0 d^3\mathbf{r} \end{aligned}$$

Calculons  $P(\mathcal{V}, \mathbf{r}_0, t)$  dans un cas simplifié qui a pour but d'illustrer la dépendance spatiale de la fonction d'onde. On se place en dimension 1 pour les coordonnées spatiales et la pompe est prise suffisamment étroite spectralement pour que  $A(\ell)$  ne varie pas significativement sur le domaine où  $E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell})$  est non nul. De plus, on suppose que les photons ne peuvent qu'être polarisés selon  $\vec{\epsilon}_x$ , ainsi un mode est entièrement défini par son vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$  :

$$\begin{aligned} \dot{P}(\mathcal{L}, z_0, t) &= \int_{\mathcal{L}} \left| \frac{\epsilon_0 \chi(\vec{\epsilon}_x)}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{p_0}}{2\epsilon_0 \mathcal{L} n_p^2}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} \sum_{k_z} E_p^{(+)}(z_0, \omega_{k_z}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i k_z (z - z_0)} \right|^2 dz \\ &= \int_{\mathcal{L}} \left| \frac{\epsilon_0 \chi(\vec{\epsilon}_x)}{i\hbar v_{g_p}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{p_0}}{2\epsilon_0 n_p^2}} \frac{v_{g_p}}{\mathcal{L}} \sum_{\omega} E_p^{(+)}(z_0, \omega) \left[ e^{-i\omega(t - (z - z_0)/c)} + e^{-i\omega(t + (z - z_0)/c)} \right] \right|^2 dz \end{aligned}$$

En passant à la limite continue ( $\frac{v_{g_p}}{\mathcal{L}} \sum_{\omega} \rightarrow \int \frac{d\omega}{2\pi}$ ), on reconnaît une transformée de Fourier :

$$\dot{P}(\mathcal{L}, z_0, t) = \frac{\epsilon_0 \omega_{p_0}}{2\hbar} \left( \frac{\chi(\vec{\epsilon}_x)}{n_p v_{g_p}} \right)^2 \int_{\mathcal{L}} \left| E_p^{(+)}(z_0, t - (z - z_0)/c) + E_p^{(+)}(z_0, t + (z - z_0)/c) \right|^2 dz$$

De plus cette expression n'est valable que pour les temps ultérieurs au passage de l'impulsion, donc :

$$\begin{aligned} \dot{P}(\mathcal{L}, z_0, t) &= \frac{\epsilon_0 \omega_{p_0}}{2\hbar} \left( \frac{\chi(\vec{\epsilon}_x)}{n_p v_{g_p}} \right)^2 \int_{\mathcal{L}} \left| E_p^{(+)}(z_0, t - |z - z_0|/c) \right|^2 dz \\ &= \gamma \int_{\mathcal{L}} I_p(z_0, t - |z - z_0|/c) dz \end{aligned}$$

où  $I_p(z, t)$  est l'intensité de la pompe.

Ainsi le photon est créé en  $z_0$  avec une probabilité d'autant plus importante que la pompe est intense en  $z_0$  ; il est composé de deux paquets d'onde de même durée que celle de la pompe : un qui se propage dans le sens des  $z$  positifs et un qui se propage dans le sens des  $z$  négatifs. Conformément à la mécanique quantique, il n'est pas possible de mesurer les deux paquets à la fois comme s'il s'agissait de deux impulsions : une fois qu'on en a détecté un, il y a réduction du paquet d'ondes par projection sur l'état mesuré.

Si on n'avait pas limité la propagation à la direction  $z$  mais au plan  $(yOz)$ , le photon créé se serait propagé dans toutes les directions de ce plan : la densité de photons aurait formé dans le plan  $(yOz)$  un cercle de centre  $\mathbf{r}_0$  d'épaisseur gaussienne  $c\Delta t$  et de rayon croissant avec le temps. Si enfin, on avait autorisé les mouvements dans tout l'espace, un élément de volume  $d^3\mathbf{r}_0$  aurait rayonné une densité de photon semblable au champ rayonné par un dipôle orienté selon  $\vec{\epsilon}_x$ . Dans le cas général, toutes les polarisations pour le photon émis sont autorisées : le volume  $d^3\mathbf{r}_0$  se comporte comme trois dipôles orientés selon les trois directions de l'espace et dont le champ émis est pondéré respectivement par  $\chi(\vec{\epsilon}_x)$ ,  $\chi(\vec{\epsilon}_y)$  et  $\chi(\vec{\epsilon}_z)$ .

Le calcul ainsi effectué à l'ordre 1 est formellement identique à la génération de paires. Pour

passer du cas simple de la génération d'un photon à celui de la génération d'une paire il suffira de remplacer les états à un photon  $|1_\ell\rangle$  par les états à une paire de photons  $|1_{\ell_i}; 1_{\ell_s}\rangle$ .

### 6.1.6.3 Etat d'une paire de photons générée par un petit élément de volume

Rappelons l'état calculé pour la génération d'un photon :

$$|\psi_{\mathbf{r}_0, S}(t)\rangle = |0\rangle + \frac{\epsilon_0}{i\hbar} \sum_{\ell} A(\ell) \chi(\ell) e^{-i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}_0} E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_\ell) e^{-i\omega_\ell t} \hat{a}_\ell^\dagger |0\rangle$$

Cette expression s'adapte au cas de la génération d'une paire en remplaçant le champ créé dans un mode unique  $\ell$  par une superposition de deux champs créés dans des modes  $\ell_s, \ell_i$  tels que  $\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}$  est la fréquence du photon de pompe :

$$|\psi_{\mathbf{r}_0, S}^{(1)}(t)\rangle = |0\rangle + \frac{\epsilon_0}{i\hbar} \sum_{\ell_s, \ell_i} A(\ell_s) A(\ell_i) \chi(\ell_s, \ell_i) e^{-i(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}) \cdot \mathbf{r}_0} E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}) e^{-i(\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})t} \hat{a}_{\ell_s}^\dagger \hat{a}_{\ell_i}^\dagger |0\rangle$$

où  $\chi(\ell_s, \ell_i) = \vec{\epsilon}_x \overline{\chi}^{(2)} \vec{\epsilon}_{\ell_s} \vec{\epsilon}_{\ell_i}$ .

Cette expression est symétrique par échange des deux photons. On peut la récrire en faisant apparaître cette symétrie (voir p.108) :

$$|\psi_{\mathbf{r}_0, S}(t)\rangle = \frac{\epsilon_0 \sqrt{2}}{i\hbar} \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} A(\ell_s) A(\ell_i) \chi(\ell_s, \ell_i) e^{-i(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}) \cdot \mathbf{r}_0} E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s, i}) e^{-i(\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})t} |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle$$

Le nouvel ensemble de sommation  $\{\ell_s, \ell_i\}$  désigne l'ensemble  $\ell_s, \ell_i$  privé des doublons indiscernables. Le facteur  $\sqrt{2}$  apparaît pour normaliser l'état symétrique si  $\ell_s \neq \ell_i$  où à cause de la double application de l'opérateur création si  $\ell_s = \ell_i$ .

La paire de photons créée au voisinage de  $\mathbf{r}_0$  est dans une superposition d'états à deux photons  $\{|2_{\ell_s, \ell_i}\rangle\}$ . La densité de probabilité de produire un état particulier  $|2_{\ell_s, \ell_i}\rangle$  est donnée par  $|\gamma(\mathbf{r}_0; \ell_s, \ell_i)|^2$ , avec

$$\gamma(\mathbf{r}_0; \ell_s, \ell_i) = \frac{\epsilon_0 \sqrt{2}}{i\hbar} A(\ell_s) A(\ell_i) \chi(\ell_s, \ell_i) E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}) e^{-i(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}) \cdot \mathbf{r}_0} \quad (6.9)$$

Remarquons les points suivants :

- La probabilité que la paire ait une fréquence donnée  $\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}$  est directement liée à l'intensité de la pompe à cette fréquence. Ceci traduit la conservation de l'énergie.
- Le terme  $A(\ell_s) A(\ell_i)$  contribue à la probabilité de génération de paires proportionnellement à  $\omega_{\ell_s} \omega_{\ell_i}$ .
- Le terme en  $\chi(\ell_s, \ell_i)$  donne la distribution en polarisation de la paire. Il renseigne donc également sur la distribution en direction de propagation. Par sa dépendance également fréquentielle, ce terme façonne aussi le spectre des paires émises.

Pour simplifier l'écriture, on notera  $\beta(\ell_s, \ell_i)$  la fonction de distribution en spectre et en polarisation d'une paire d'énergie  $\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}$  fixée par le photon de pompe :

$$\beta(\ell_s, \ell_i) = \frac{\sqrt{2} \epsilon_0}{i\hbar} A(\ell_s) A(\ell_i) \chi(\ell_s, \ell_i)$$

Pour terminer le calcul il reste à prendre en compte l'effet de l'ensemble du cristal et donc à intégrer l'état de la paire par rapport à la variable  $\mathbf{r}_0$ . Cette façon de sommer chaque contribution

locale pour déterminer l'état global est liée au fait que, à l'ordre 1, l'état est par définition linéaire avec l'Hamiltonien. Lors de l'intégration, les termes qui s'additionneront en phase resteront, les autres disparaîtront. En d'autres termes, nous en venons à l'étude des conditions d'accord de phase.

#### 6.1.6.4 Les conditions d'accord de phase

Nous supposons maintenant que la susceptibilité du cristal a une distribution spatiale de la forme suivante :

$$\overline{\overline{\chi}}^{(2)}(\mathbf{r}_0) = R(\mathbf{r}_0) \overline{\overline{\chi}}^{(2)}$$

où  $R(\mathbf{r}_0)$  est une fonction valant 0 à l'extérieur du cristal et donnant la variation de la susceptibilité à l'intérieur. Par exemple, dans un cristal périodiquement retourné (voir § 2.3), le signe de la susceptibilité non-linéaire est une fonction périodique de la position longitudinale dans le cristal.

L'Hamiltonien total s'écrit donc :

$$\hat{\mathcal{H}}_I(t) = \int_V R(\mathbf{r}_0) \hat{h}_I(\mathbf{r}_0, t) d^3\mathbf{r}_0$$

On effectue un calcul perturbatif comme précédemment. À l'ordre 1, l'évolution est linéaire avec l'Hamiltonien (en représentation d'interaction) donc l'état  $|\psi_I^{(1)}(t)\rangle$  décrivant la contribution de tout le cristal s'obtient par intégration par rapport à  $\mathbf{r}_0$  des états locaux  $|\psi_{\mathbf{r}_0, I}^{(1)}(t)\rangle$  :

$$|\psi_I^{(1)}(t)\rangle = \int d^3\mathbf{r}_0 R(\mathbf{r}_0) |\psi_{\mathbf{r}_0, I}^{(1)}(t)\rangle$$

Soit, en passant en représentation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} |\psi_S^{(1)}(t)\rangle &= \int d^3\mathbf{r}_0 R(\mathbf{r}_0) |\psi_{\mathbf{r}_0, S}^{(1)}(t)\rangle \\ &= \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \left[ \int d^3\mathbf{r}_0 e^{-i(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}) \cdot \mathbf{r}_0} R(\mathbf{r}_0) E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}) \right] \beta(\ell_s, \ell_i) e^{-i(\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})t} |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle \end{aligned}$$

où  $t$  est postérieur au passage de l'impulsion dans le milieu. En reconnaissant une transformée de Fourier spatiale, on peut récrire l'état sous la forme :

$$|\psi_S^{(1)}(t)\rangle = \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \check{R} * E_p^{(+)}(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}) \beta(\ell_s, \ell_i) e^{-i(\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})t} |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle \quad (6.10)$$

où  $\check{R}(\mathbf{k})$  est la transformée de Fourier de  $R(\mathbf{r}_0)$ .

Ce résultat s'interprète de la manière suivante : l'amplitude de probabilité que les deux photons d'une paire se trouvent dans deux modes  $(\ell_s, \ell_i)$  dépend, comme dans le cas local, de la valeur de  $\beta(\ell_s, \ell_i)$ , mais elle est de plus modulée par l'effet global de  $R(\mathbf{r}_0)$  sur les modes  $(\ell_s, \ell_i)$ . De même que  $E_p^{(+)}(\mathbf{r}_0, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})$  contraignait les couples  $\{\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}\}$  par la conservation de l'énergie, le terme  $\check{R} * E_p^{(+)}(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})$  contraint les vecteurs d'onde autorisés par sa dépendance vis-à-vis de la somme  $\{\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}\}$  : cette contrainte constitue les conditions d'accord de phase. Une fonction  $R(\mathbf{r}_0)$  qui permet de privilégier les modes choisis peut être recherchée. C'est ce que nous allons maintenant voir.

**Cas d'un cristal réel périodiquement retourné** — On suppose que le faisceau de pompe est transversalement entièrement contenu dans un cristal de longueur  $L$ . Ainsi on peut écrire, en prenant le centre du cristal comme origine des coordonnées :

$$R(\mathbf{r}_0) = \mathbb{1}_{[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} \cdot H(z)$$

où  $H(z)$  décrit la variation de  $\overline{\chi}^{(2)}$  dans le cristal. Ainsi, on a dans l'espace de Fourier spatial :

$$\check{R} = \check{H}(k_z) * L \operatorname{sinc}\left(k_z \frac{L}{2}\right)$$

On rappelle que  $E_p^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}, k_z, \omega)$ , transformée de Fourier (spatiale et temporelle) du champ de pompe, s'exprime (voir § 6.1.2) :

$$E_p^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}, k_z, \omega) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} 2\pi \delta\left(k_z - \left(k_{p_0} + \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{g_p}} - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2k_{p_0}}\right)\right) \check{G}_T(\omega - \omega_{p_0}) \check{G}_\perp(\boldsymbol{\kappa}, 0) \quad (6.11)$$

Tout d'abord, l'effet de la restriction du problème à la longueur limitée  $L$  du cristal fait apparaître un élargissement en sinus cardinal des vecteurs d'onde autorisés. Dans la limite où  $L$  tend vers l'infini, le sinus cardinal tend vers la distribution de Dirac de l'expression (6.11) précédente.

$$\begin{aligned} \check{R} * E_p^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}, k_z, \omega) &= H(k_z) \\ &* \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} L \operatorname{sinc}\left[\left(k_z - k_{p_0} - \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{g_p}} + \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2k_{p_0}}\right) \frac{L}{2}\right] \check{G}_T(\omega - \omega_{p_0}) \check{G}_\perp(\boldsymbol{\kappa}, 0) \end{aligned}$$

Voyons maintenant l'effet d'une structuration de la valeur de la susceptibilité le long du cristal. Comme  $H(z)$  est limité au cristal, on peut le développer en série de Fourier :

$$H(z) = \sum_n H_n e^{i2\pi n \frac{z}{L}}$$

ce qui donne

$$\check{H}(k_z) = \sum_n H_n 2\pi \delta\left(k_z - \frac{2\pi n}{L}\right)$$

Dans ce cas,  $\check{R} * E_p^{(+)}$  s'écrit (cf. Annexe A) :

$$\begin{aligned} \check{R} * E_p^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} \check{G}_T(\omega - \omega_{p_0}) \check{G}_\perp(\boldsymbol{\kappa}, 0) \\ &\times \sum_n H_n L \operatorname{sinc}\left[\left(k_z - k_{p_0} - \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{g_p}} + \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2k_{p_0}} - \frac{2\pi n}{L}\right) \frac{L}{2}\right] \quad (6.12) \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, § 2.3, on peut choisir une période de retournement  $\Lambda$  judicieuse qui permet un quasi-accord de phase. En général,  $\Lambda \ll L$ , de sorte qu'on peut trouver une valeur de  $\tilde{n}$  telle qu'on a quasiment  $\frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{2\pi\tilde{n}}{L}$ . Cet ordre  $\tilde{n}$  du développement général en série de Fourier contribue de manière dominante par rapport aux autres dans l'équation (6.12). En choisissant  $\tilde{n} = 1$ , alors, on a vu que  $H_1 = \frac{2}{\pi}$ , et on peut écrire :

$$\check{R} * E_p^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2}{\pi} L \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} \check{G}_T(\omega - \omega_{p_0}) \check{G}_\perp(\boldsymbol{\kappa}, 0) \operatorname{sinc}\left(\Delta K(\mathbf{k}, \omega) \frac{L}{2}\right) \quad (6.13)$$

avec

$$\Delta K(\mathbf{k}, \omega) = k_z - k_{p_0} - \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{g_p}} + \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2k_{p_0}} - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (6.14)$$

À travers la dépendance en  $\omega$  et en  $\boldsymbol{\kappa}$  respectivement, on constate que contrairement au cas d'un problème modélisé en ondes planes monochromatiques, les conditions d'accord de phase prennent en compte la non-monochromaticité de la pompe et des conditions de focalisation du faisceau.

### 6.1.6.5 Synthèse : état produit en sortie de cristal

L'état de la paire de photons générée vaut, juste avant l'interface cristal/air :

$$|\psi_S^{(1)}(t)\rangle = \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i) |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle$$

avec

$$\gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i) = \frac{\epsilon_0 \sqrt{2}}{i\hbar} \chi(\ell_s, \ell_i) A(\ell_s) A(\ell_i) \check{R} * E_p^{(+)}(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i}) e^{-i(\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})t} |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle$$

et

- $A(\ell_s), A(\ell_i)$  sont les amplitudes des champs associés aux photons signal et idler dans leurs modes respectifs :

$$A(\ell) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_\ell}{2\epsilon_0 V n^2(\omega_\ell)}}$$

- $\frac{\epsilon_0 \sqrt{2}}{i\hbar} \chi(\ell_s, \ell_i)$  est le terme traduisant la non-linéarité du cristal. Il dépend de la polarisation et de la fréquence

$$\chi(\ell_s, \ell_i) = \vec{\epsilon}_{\ell_p} \overline{\chi}^{(2)}(\omega_{\ell_p}; \omega_{\ell_s}, \omega_{\ell_i}) \vec{\epsilon}_{\ell_s} \vec{\epsilon}_{\ell_i}$$

- $\check{R} * E_p^{(+)}(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})$  correspond à l'effet global du champ de pompe dans le cristal. Il est défini au paragraphe précédent (Eq. 6.13). Il est remarquable qu'en introduisant les conditions d'accord de phase, les dépendances initialement spatiales de  $R$  et  $E_{pp}$  sont remplacées sous une forme aussi simple par une action dans l'espace de Fourier.
- $e^{-i(\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})t}$  est le terme de phase qui régit l'évolution temporelle de la paire en fonction des modes de chacun des photons qui la constitue.

### 6.1.7 Optique d'un état à deux photons

Maintenant que nous avons un état  $|\psi_S^{(1)}(t)\rangle$  (Eq. 6.10) décrivant une paire de photons dans une superposition de différents modes possibles  $|2_{\ell_s, \ell_i}\rangle$ , nous allons étudier son évolution à travers les divers éléments optiques du montage de la Figure 6.1 : lentilles, filtre spectral, fibre optique, coupleur fibré, détecteurs.

Le cas des lentilles est particulier car lié à la question du couplage dans la fibre optique. Les lentilles n'ont aucun autre effet sur l'état des paires de photons que de les imager sur la fibre de manière à optimiser leur couplage. Nous allons en pratique considérer le problème de façon inverse, c'est à dire connaissant le mode propre de la fibre optique – qui est très proche d'un mode de faisceau gaussien (voir Chap. 1, §. 1.3.2) – nous calculerons son image par le système de lentilles.

Le coupleur, bien que son principe de fonctionnement soit différent de celui d'une lame semi-réfléchissante en espace libre, peut être modélisé par les mêmes équations. On note  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  les opérateurs annihilation pour les voies d'entrée du coupleur (l'une d'entre elles n'étant pas toujours connectisée) et  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  ceux pour les voies de sortie. Pour un coupleur défini par une répartition en puissance  $r_A^2$  de  $\hat{a}$  vers  $\hat{A}$  et  $r_B^2$  de  $\hat{a}$  vers  $\hat{B}$  (coupleur «  $r_A^2/r_B^2$  »), on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= -r_A \hat{a} + r_B \hat{b} \\ \hat{B} &= r_B \hat{a} - r_A \hat{b} \end{aligned}$$

Le filtrage spectral et le couplage dans la fibre introduisent des pertes. Lorsque la transmission du filtre est ni nulle ni totale pour une fréquence donnée, une proportion de la composante des photons à cette fréquence est « perdue dans l'environnement ». De même pour le couplage dans une fibre optique, en raisonnant cette fois sur les vecteurs d'onde plutôt que sur la fréquence. Cela fait apparaître des mélanges statistiques d'états, qu'il faudra prendre en compte de manière adéquate pour avoir une description complète de la lumière mesurée par les détecteurs.

Ce traitement théorique complet devrait permettre d'estimer le taux de coïncidences de détection entre les deux photons, c'est à dire la cohérence en intensité d'ordre deux de la source, qui est une mesure de ses caractéristiques proprement quantiques (voir Chap. 1, §. 1.5).

Mais tout d'abord, il est nécessaire de résoudre le problème des changements d'indice au sein du volume de quantification du champ, qui interviennent aux interfaces cristal/air et air/fibre.

### 6.1.7.1 Les changements d'indice

Une fois la paire de photons créée, elle se propage et « quitte » le cristal. Formellement, ceci se traduit par  $P(\mathcal{V}, t) = \int_{\mathcal{V}_c} \int_{\mathcal{V}_c} |\langle 2_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} | \psi_S(t) \rangle|^2 d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \rightarrow 0$  pour des valeurs de  $t$  suffisamment grandes, où  $\mathcal{V}_c$  est le volume du cristal. En principe, cette évolution a déjà été prise en compte dans le calcul que nous avons effectué car elle correspond à un phénomène de propagation linéaire libre, sans perte, qui est décrit par  $\mathcal{H}_0$ . Mais nous sommes ici directement confrontés à une simplification que nous avons implicitement faite au §. 6.1.5 p.108 : le volume de quantification était constitué d'un milieu d'indice uniforme. Dans ce cas seulement, la partie spatiale d'un mode  $\ell$  pouvait être décrite par un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_\ell$  unique. Si l'indice du milieu vaut  $n_\ell$  pour le mode  $\ell$ , on a la relation de dispersion  $\omega_\ell = c|\mathbf{k}_\ell|/n_\ell$ .

Tant que le photon reste localisé dans le cristal, cette correspondance entre mode spatial et vecteur d'onde est valable. En revanche, elle ne l'est plus si l'on veut décrire la propagation des photons hors du cristal, dans le vide puis à travers d'autres éléments optiques.

On considère, sans perte de généralité sur les conclusions que nous allons faire, un champ à un photon.

Dans le cas où le volume de quantification  $V$  est entièrement occupé par un matériau homogène optiquement isotrope d'indice  $n^3$ , un mode  $\ell$  est caractérisé par une polarisation  $\vec{\epsilon}_\ell$  et un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_\ell$  orthogonaux. La valeur propre associée (l'énergie) est alors  $\hbar\omega_\ell$ , donnée par la relation de dispersion  $\omega_\ell = \frac{c|\mathbf{k}_\ell|}{n}$ . Ce mode se décompose de la façon suivante sur la base des états localisés :

$$|1_\ell^{(1)}\rangle = \int_V d^3\mathbf{r} \vec{\epsilon}_\ell \frac{e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} |1_{\mathbf{r}}\rangle$$

Dans le cas où  $V$  contient le vide et un solide d'indice  $n$ , le mode  $\ell$  est défini par un plus grand nombre de paramètres ; en effet le système n'est plus invariant par translation et le vecteur d'onde n'est plus un bon nombre quantique. Considérons par exemple un mode  $\ell$  d'énergie  $\hbar\omega_\ell$  qui correspond à une propagation selon un axe  $z$  orthogonal à une face du cristal : il serait défini par une polarisation et deux vecteurs d'onde colinéaires à  $\vec{\epsilon}_z$ ,  $\mathbf{k}_{\ell_v}$  et  $\mathbf{k}_{\ell_c}$  ; ces derniers correspondent respectivement au vecteur d'onde dans le cristal et dans le vide, *i.e.*  $|\mathbf{k}_{\ell_c}| = \frac{n\omega_\ell}{c}$  et  $|\mathbf{k}_{\ell_v}| = \frac{\omega_\ell}{c}$ . Le mode s'écrit alors :

$$|1_\ell^{(2)}\rangle = \int_V d^3\mathbf{r} \vec{\epsilon}_\ell \left[ K(\mathbf{r}) \frac{e^{i\mathbf{k}_{\ell_c} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} + (1 - K(\mathbf{r})) \frac{e^{i\mathbf{k}_{\ell_v} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} \right] |1_{\mathbf{r}}\rangle$$

où  $K(\mathbf{r})$  est une fonction qui vaut 1 dans le cristal et 0 ailleurs.

3. L'indice  $n$  est supposé égal pour tous les modes peuplés dans notre problème

Les modes non-orthogonaux aux faces du solide sont plus complexes à écrire car il faut tenir compte d'éventuelles réflexions et de la réfraction en plus du changement d'indice. Les différentes relations entre ces paramètres sont données par les lois de l'optique géométrique comme la loi de Snell-Descartes.

Lors du calcul que nous avons effectué dans la partie précédente (section 6.1.6 p.111) l'indice  $\ell$  se référerait aux modes de  $\hat{\mathcal{H}}_0$  c'est à dire à  $|1_\ell^{(2)}\rangle$  et non  $|1_\ell^{(1)}\rangle$ . C'est donc dans ces modes qui prennent en compte la présence du vide autour du cristal que l'émission spontanée s'est produite.

En conclusion, l'état de la paire a été calculé dans la base des vecteurs propres de  $\hat{\mathcal{H}}_0$ , c'est à dire les modes  $\ell$  dont l'expression est donnée par  $|1_\ell^{(2)}\rangle$ . Les effets du changement d'indice sont donc déjà pris en compte dans le fait qu'on désigne les états de base par leur mode  $\ell$  ( $|1_\ell\rangle$ ) et non simplement par leur vecteur d'onde local  $|1_{\mathbf{k}}\rangle$ . Tous les vecteurs d'onde qui apparaissent dans l'expression de l'état calculé dans la partie précédente sont reliés à la fréquence par l'indice  $n$  du cristal. Tout au long de l'évolution de l'état, même quand celui-ci n'est plus localisé dans le cristal, le module du vecteur d'onde reste lié par l'indice de réfraction local à la fréquence, et les composantes du vecteur d'onde sont données aux interfaces par les relations de Snell-Descartes, qui ne sont autre que les conditions de continuité aux limites.

### 6.1.7.2 Généralités sur les éléments optiques

**La traversée des éléments optiques** — Les éléments optiques comme la fibre ou le filtre sont situés à un endroit bien déterminé dans l'espace. Cependant, il arrive que leurs effets s'expriment dans l'espace de Fourier, comme pour le filtre spectral par exemple.

On suppose qu'à un instant  $t_0$  les photons sont entièrement « localisés » (au sens du §. 6.1.4) avant un élément optique  $A$  et qu'à un instant ultérieur  $t_1$  ils sont entièrement localisés après cet élément  $A$ . Ainsi, en représentation de Schrödinger, l'Hamiltonien qui décrit l'évolution de l'état s'écrit  $\hat{\mathcal{H}}_0$  pour  $t < t_0$  et  $t > t_1$  et  $\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_A(t)$  pour  $t_0 < t < t_1$ . En représentation d'interaction, cet Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{I,A}(t) = e^{\frac{-1}{i\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 \cdot t} \hat{\mathcal{H}}_A(t) e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 \cdot t}$$

entre  $t_0$  et  $t_1$ . L'effet de l'élément optique est donc entièrement défini par l'opérateur d'évolution

$$\hat{U}_A = \hat{T} e^{\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt \hat{\mathcal{H}}_{I,A}(t)}$$

qui permet de déduire  $|\psi_I(t_1)\rangle$  de  $|\psi_I(t_0)\rangle$ . En représentation de Schrödinger ceci devient :

$$|\psi_S(t' > t_1)\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 \cdot (t' - t)} \hat{U}_A |\psi_S(t < t_0)\rangle$$

ou encore

$$\sum_{\ell} e^{-i\omega_{\ell} t} \beta(\ell) |1_{\ell}\rangle \rightarrow \sum_{\ell} e^{-i\omega_{\ell} t'} \beta(\ell) \hat{U}_A |1_{\ell}\rangle$$

sous réserve que  $t < t_0$ ,  $t' > t_1$  ?

**Traitement des états mixtes** — Certains éléments optiques induisent des pertes : l'effet du filtre, par exemple, sera de projeter l'état de la paire de photons – composée d'états nombres à 2 photons – sur des états à 2, 1 ou 0 photon. L'absorption d'un photon correspond à une intrication de l'état du champ avec l'état quantique du filtre. Dans la mesure où nous ne tenterons pas ici de trouver une expression formelle d'un tel « état quantique du filtre », nous le considérerons comme partie de l' « environnement », c'est à dire source directe de décohérence. Ainsi, le filtre aura pour effet de transformer l'état pur initial du champ en une superposition incohérente de divers états plus ou moins probables : un mélange statistique.



Dès lors, il semblerait nécessaire d'utiliser le formalisme des matrices densités; cependant l'intérêt majeur de ce formalisme est d'étudier l'évolution temporelle des cohérences, ce qui ne nous intéresse pas ici. Nous nous priverons de cette information et nous adopterons un formalisme plus simple.

Si l'état du système est un mélange statistique d'états purs  $\{|\psi_i\rangle\}$  décrit par une distribution de probabilité  $\{p_i\}$ , on choisit de l'écrire :

$$\sqrt{p_1}|\psi_1\rangle \oplus \sqrt{p_2}|\psi_2\rangle \oplus \cdots = \bigoplus_i \sqrt{p_i}|\psi_i\rangle \quad (6.15)$$

La différence essentielle entre l'opération  $\oplus$  et l'opération  $+$  usuelle est que les termes qu'elle sépare ne peuvent pas interférer. Illustrons cela dans le cas de l'observable polarisation exprimée dans la base des polarisations orthogonales verticale  $|\uparrow\rangle$  et horizontale  $|\rightarrow\rangle$ . On se donne deux états : un état dans une superposition cohérente<sup>4</sup> :

$$|\text{Cohérent}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle)$$

et un état dans une superposition incohérente

$$|\text{Incohérent}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \oplus |\rightarrow\rangle)$$

Un filtre polariseur orienté à  $-45^\circ$  ( $\swarrow$ ) transmettrait chaque terme de l'un ou l'autre état avec une probabilité  $1/2$ , mais l'état  $|\text{Cohérent}\rangle$  n'est pas du tout transmis (interférences destructives) tandis que l'état  $|\text{Incohérent}\rangle$  est transmis avec une probabilité  $1/2$ .

### 6.1.8 Filtrage spectral

Le filtre spectral pourra être supposé gaussien de largeur  $\Delta\omega$ , et centré en  $\omega_F$ , fréquence proche de la dégénérescence des photons associée à la fréquence centrale de la pompe. Cependant, pour rester général, on pose que sa transmission en amplitude est donnée par une fonction  $\mathcal{F}(\omega)$ . Par souci de simplicité formelle, on considère le filtre situé en une position longitudinale  $z_1$  et d'étendue transverse infinie. Ainsi, on s'assure que ce filtre n'a pas d'action spatiale sur l'état et reste purement spectral, de sorte que la fonction  $\mathcal{F}(\omega)$  est son unique caractéristique.

On considère qu'il existe un temps  $t_0$  avant lequel l'état est localisée avant  $z_1$  et un temps  $t_1$  après lequel elle est localisée après  $z_1$ . Nous allons déterminer un opérateur  $\hat{U}_{\text{filtre}}$  qui va agir sur l'état pendant cet intervalle de temps. D'après la discussion précédente (§. 6.1.7.2 p.119) on peut exprimer cet opérateur sur la base des modes bien que ces derniers ne soient pas localisés avant ou après le filtre :  $|1_\ell(t)\rangle = |1_\ell\rangle$  si  $t < t_0$  et  $|1_\ell(t)\rangle = \hat{U}_{\text{filtre}}|1_\ell\rangle$  pour  $t > t_1$ . D'autre part, comme nous l'avons dit précédemment, on s'attend à ce que cet opérateur transforme l'état du système en un état mixte.

L'état du filtre est caractérisé par l'état  $|\phi\rangle$ . On choisi d'appeler  $|\phi_0\rangle$  l'état initial du filtre et  $|\phi_\ell\rangle$  l'état du filtre après qu'il a éventuellement absorbé un photon dans le mode  $\ell$ .

On appelle  $|\Psi_I(t)\rangle$  l'état du système formé par les photons et le filtre en représentation d'interaction. On a ainsi, dans le cas le plus simple d'un état initial du champ à 1 photon dans le mode  $\ell$  :

$$|\Psi_I(t_0)\rangle = |\phi_0\rangle \otimes |1_\ell\rangle$$

L'état du système après l'interaction est alors :

$$|\Psi_I(t_1)\rangle = \mathcal{F}(\omega_\ell)|\phi_0\rangle \otimes |1_\ell\rangle + \mathcal{G}(\omega_\ell)|\phi_\ell\rangle \otimes |0\rangle$$

4. Il ne s'agit bien sûr pas ici de l'état propre de l'opérateur champ électrique.

où  $|\mathcal{F}(\omega_\ell)|^2 + |\mathcal{G}(\omega_\ell)|^2 = 1$ . Les termes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  décrivent l'interaction entre le filtre et le champ entre les dates  $t_0$  et  $t_1$  ; il est alors clair que  $\mathcal{F}$  représente bien le facteur de transmission en champ. On ne s'intéresse pas à exprimer la phase relative de  $\mathcal{G}$ .

Le passage de  $|\Psi_I(t_0)\rangle$  à  $|\Psi_I(t_1)\rangle$  s'effectue par une évolution hamiltonienne (c'est à dire qu'elle conserve l'orthogonalité). L'expression de  $|\Psi_I(t_1)\rangle$  prouve donc que les  $|\phi_\ell\rangle$  sont orthogonaux entre eux et avec  $|\phi_0\rangle$ .

On prend maintenant comme état initial du champ un état à un photon dans une superposition quelconque des différents modes du champ :

$$|\Psi_I(t_0)\rangle = |\phi_0\rangle \otimes \sum_{\ell} \beta(\ell) |1_\ell\rangle$$

On a :

$$|\Psi_I(t_1)\rangle = |\phi_0\rangle \otimes \sum_{\ell} \beta(\ell) \mathcal{F}(\omega_\ell) |1_\ell\rangle + \sum_{\ell} \beta(\ell) \mathcal{G}(\omega_\ell) |\phi_\ell\rangle \otimes |0\rangle$$

Si on ne garde que l'information portée par la lumière, l'état devient<sup>5</sup> :

$$|\Psi_I(t_1)\rangle = \sum_{\ell} \beta(\ell) \mathcal{F}(\omega_\ell) |1_\ell\rangle \oplus \bigoplus_{\ell} \beta(\ell) \mathcal{G}(\omega_\ell) |0\rangle$$

qu'on peut récrire<sup>6</sup> :

$$|\Psi_I(t_1)\rangle = \sum_{\ell} \beta(\ell) \mathcal{F}(\omega_\ell) |1_\ell\rangle \oplus \sqrt{\sum_{\ell} |\beta(\ell) \mathcal{G}(\omega_\ell)|^2} |0\rangle$$

On adapte facilement ce raisonnement aux états à deux photons et on trouve que si

$$|\Psi_I(t_0)\rangle = |\phi_0\rangle \otimes \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \beta(\ell_s, \ell_i) |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle$$

alors

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t_1)\rangle &= |\phi_0\rangle \otimes \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \beta(\ell_s, \ell_i) \mathcal{F}(\omega_{\ell_s}) \mathcal{F}(\omega_{\ell_i}) |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle \\ &+ \sum_{\ell_s} |\phi_{\ell_s}\rangle \otimes \sum_{\ell_i} \beta(\ell_s, \ell_i) \mathcal{G}(\omega_{\ell_s}) \mathcal{F}(\omega_{\ell_i}) |1_{\ell_i}\rangle \\ &+ \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \beta(\ell_s, \ell_i) \mathcal{G}(\omega_{\ell_s}) \mathcal{G}(\omega_{\ell_i}) |\phi_{\ell_s, \ell_i}\rangle \otimes |0\rangle \end{aligned}$$

où  $|\phi_{\ell_s, \ell_i}\rangle$  est l'état du filtre après avoir absorbé 2 photons ; on a également que ces états sont orthogonaux entre eux et avec les états après absorption de 1 photon ou sans absorption.

En faisant abstraction du filtre, dont on ne se préoccupe pas de l'état, l'état du champ se récrit

5. Dans le formalisme des matrices densités on effectuerait la trace partielle par rapport à l'espace du filtre ; l'orthogonalité de la famille  $(|\phi_0\rangle, \{|\phi_\ell\rangle\})$  est indispensable à cette dérivation.

6. Cette expression revient à exprimer la probabilité totale de mesurer  $|0\rangle$  comme la somme des probabilités que tous les modes soient absorbés par le filtre. C'est en raison de l'absence de cohérence entre tous ces termes que cette formulation classique est possible.

de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t_1)\rangle &= \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \beta(\ell_s, \ell_i) \mathcal{F}(\omega_{\ell_s}) \mathcal{F}(\omega_{\ell_i}) |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle \\ &\oplus \bigoplus_{\ell_s} \sum_{\ell_i} \beta(\ell_s, \ell_i) \mathcal{G}(\omega_{\ell_s}) \mathcal{F}(\omega_{\ell_i}) |1_{\ell_i}\rangle \\ &\oplus \sqrt{\sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} |\beta(\ell_s, \ell_i) \mathcal{G}(\omega_{\ell_s}) \mathcal{G}(\omega_{\ell_i})|^2} |0\rangle \end{aligned}$$

### 6.1.9 Couplage dans une fibre optique

L'extrémité d'une fibre optique monomode d'indice effectif  $n_f$  est localisée en  $z_0$ . La fibre possède un mode propre de propagation guidé caractérisé, pour une fréquence  $\omega$ , par une distribution transverse normalisée  $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{\rho})$  et une constante de propagation  $k_f = n_f \omega / c$  selon l'axe ( $Oz$ ). Toutes les polarisations se couplent de manière identique à la fibre.

Le mode guidé constitue l'élément d'une base  $\{\mathcal{A}_{\omega, j}(\mathbf{r})\}$  bien choisie de modes sur lesquels peut se décomposer un champ quelconque. Une base adaptée à la décomposition du champ dans une fibre est la base de Laguerre-Gauss. Dans ce cas, le mode fondamental ( $j = 0$ ) correspond au mode guidé et le profil transverse de ce mode est décrit par  $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{\rho})$ . Une fois un champ donné décomposé sur cette base, le taux de couplage à la fibre est donné par le poids de la composante du champ dans le mode guidé. Les photons dans les autres modes sont perdus dans l'environnement.

La résolution des équations de Maxwell dans une fibre optique indique que ces modes s'écrivent [GT98] :

$$\mathcal{A}_{\omega, j}(\mathbf{r}) = \mathcal{A}_{\omega, j}^\perp(\boldsymbol{\rho}) e^{ik_f \omega, j z}$$

On a en particulier, pour une base dont le mode fondamental est gaussien comme la base de Laguerre-Gauss :

$$\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{A}_{\omega, j=0}^\perp(\boldsymbol{\rho}) \quad (6.16)$$

c'est-à-dire le profil transverse du mode guidé de la fibre.

Ces modes  $\mathcal{A}_{\omega, j}(\mathbf{r})$  sont normalisées dans le plan transverse mais pas sur la longueur  $\mathcal{L}$  selon l'axe  $z$  du volume de quantification ( $V = \mathcal{S} \times \mathcal{L}$ ) :

$$\begin{aligned} \int d^2 \boldsymbol{\rho} \mathcal{A}_{\omega, j'}^*(\boldsymbol{\rho}, z) \mathcal{A}_{\omega, j}(\boldsymbol{\rho}, z) &= \delta_{jj'} \\ \int_V d^3 \mathbf{r} \mathcal{A}_{\omega, j'}^*(\mathbf{r}) \mathcal{A}_{\omega, j}(\mathbf{r}) &= \mathcal{L} \delta_{jj'} \end{aligned}$$

Les états quantiques normalisés décrivant ces modes de fibre s'écrivent :

$$|\mathcal{A}_{\omega, j}\rangle = \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{A}_{\omega, j}^\perp(\boldsymbol{\rho}) \frac{e^{ik_f \omega, j z}}{\sqrt{\mathcal{L}}} |1_{\mathbf{r}}\rangle \quad (6.17)$$

où  $\langle \mathcal{A}_{\omega, j} | \mathcal{A}_{\omega, j'} \rangle = \delta_{jj'}$ .

Les modes du champ dans le volume  $V$  de quantification contenant le vide avant  $z_0$  et une fibre optique à partir de  $z_0$  s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} |1_{\ell, \text{vide-fibre}}\rangle &= \int d^3 \mathbf{r} f(\mathbf{r}) |1_{\mathbf{r}}\rangle \\ &= \int d^3 \mathbf{r} \left( \Theta(z_0 - z) \frac{e^{i\mathbf{k}_v \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} |1_{\mathbf{r}}\rangle + \Theta(z - z_0) \sum_j g_j(\ell) \mathcal{A}_{\omega, j}(\mathbf{r}) |1_{\mathbf{r}}\rangle \right) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{k}_{v,\ell}$  est le vecteur d'onde dans le vide du mode  $\ell$  ( $|\mathbf{k}_{v,\ell}| = \frac{\omega_\ell}{c}$ ),  $\Theta(z)$  la fonction de Heaviside et les  $g_j(\ell)$  sont choisis de manière à ce que la fonction  $f$  représente la propagation d'un champ classique à l'interface vide-fibre.

Pour déterminer  $g_j(\ell)$ , nous allons étudier les conditions aux limites de la fonction d'onde à cette interface. En  $z = z_0$ , on a égalité entre l'onde plane  $e^{i\mathbf{k}'_\ell \cdot \mathbf{r}}/\sqrt{V}$  avant couplage (mais dont le vecteur d'onde  $\mathbf{k}'_\ell$  du mode  $\ell$  est évalué dans la fibre) et son développement dans la base des modes de fibre :

$$\sum_j g_j(\ell) \mathcal{A}_{\omega_\ell, j}(\boldsymbol{\rho}, z_0) = \frac{e^{i\mathbf{k}'_\ell \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{ik'_{z,\ell} z_0}}{\sqrt{V}}$$

où  $\mathbf{k}'_\ell = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\kappa}'_\ell \\ k'_{z,\ell} \end{pmatrix}$  s'obtient à partir de  $\mathbf{k}_{v,\ell} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\kappa}_\ell \\ k_{z,\ell} \end{pmatrix}$  en utilisant les lois de la réfraction à l'interface entre le vide et le milieu d'indice  $n_f$  de la fibre ; notamment  $|\mathbf{k}'_\ell| = \frac{n_f(\omega_\ell)\omega_\ell}{c}$  ainsi que les relations de Snell-Descartes pour  $\boldsymbol{\kappa}'_\ell$ .

On en déduit, en multipliant par  $\mathcal{A}_{\omega, j}^*(\boldsymbol{\rho}, z_0)$  et en utilisant l'orthonormalité des fonctions  $\mathcal{A}_{\omega, k}(\boldsymbol{\rho}, z_0)$  :

$$g_j(\ell) = \int d^2\boldsymbol{\rho} \mathcal{A}_{\omega_\ell, j}^*(\boldsymbol{\rho}, z_0) \frac{e^{i\mathbf{k}'_\ell \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{ik'_{z,\ell} z_0}}{\sqrt{V}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik'_{z,\ell} z_0} \check{\mathcal{A}}_{\omega_\ell, j}^*(\boldsymbol{\kappa}'_\ell, z_0)$$

On peut maintenant décrire le couplage d'un état à la fibre. Pour commencer, on prend un état initial quelconque à un photon, localisé avant  $z_0$  :

$$\begin{aligned} |\Psi_S(t_0)\rangle &= \sum_\ell \beta(\ell) |1_{\ell; \text{vide-fibre}}\rangle \\ &= \sum_\ell \beta(\ell) |1_{\ell; \text{vide}}\rangle \end{aligned}$$

où la seconde égalité est trivialement vérifiée en faisant le produit scalaire avec les  $|1_{\mathbf{r}}\rangle$  pour  $z < z_0$ . En faisant de même pour  $z > z_0$ , l'état devient :

$$\begin{aligned} |\Psi_S(t_1)\rangle &= \sum_\ell \beta(\ell) e^{-i\omega_\ell(t_1-t_0)} |1_{\ell; \text{vide-fibre}}\rangle \\ &= \sum_j \sum_\ell \beta(\ell) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} e^{ik'_{z,\ell} z_0} \check{\mathcal{A}}_{\omega_\ell, j}^*(\boldsymbol{\kappa}'_\ell; z_0) e^{-i\omega_\ell(t_1-t_0)} |\mathcal{A}_{\omega_\ell, j}\rangle \end{aligned}$$

ce qu'on vérifie également en faisant le produit scalaire avec les  $|1_{\mathbf{r}}\rangle$ .

En représentation d'interaction, on récrit :

$$|\Psi_I(t_1)\rangle = \sum_j \sum_\ell \beta(\ell) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} e^{ik'_{z,\ell} z_0} \check{\mathcal{A}}_{\omega_\ell, j}^*(\boldsymbol{\kappa}'_\ell; z_0) |\mathcal{A}_{\omega_\ell, j}\rangle$$

Si on ignore la composante du photon qui n'est pas guidée dans la fibre, c'est à dire qui ne correspond pas au mode fondamental  $j = 0$ , l'expression s'écrit, en utilisant la notation  $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{\rho})$  définie par l'Equation 6.16

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t_1)\rangle &= \sum_\ell \beta(\ell) e^{ik'_{z,\ell} z_0} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \check{\mathcal{O}}_{\omega_\ell}^*(\boldsymbol{\kappa}'_\ell) |\mathcal{O}_{\omega_\ell}\rangle \\ &\oplus \bigoplus_{j \neq 0, \omega_\ell, \boldsymbol{\varepsilon}_\ell} \sum_{\boldsymbol{\kappa}'_\ell} \beta(\ell) e^{ik'_{z,\ell} z_0} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \check{\mathcal{A}}_{\omega_\ell, j}^*(\boldsymbol{\kappa}'_\ell; z_0) |0\rangle \end{aligned}$$

Pour un état à deux photons on a :

$$|\Psi_I(t_0)\rangle = \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \beta(\ell_s, \ell_i) |2_{\ell_s, \ell_i}\rangle$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t_1)\rangle &= \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \beta(\ell_s, \ell_i) e^{i(k'_{z, \ell_s} + k'_{z, \ell_i}) \cdot z_0} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \check{\mathcal{O}}_{\omega_{\ell_s}}^*(\mathbf{\kappa}'_{\ell_s}) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \check{\mathcal{O}}_{\omega_{\ell_i}}^*(\mathbf{\kappa}'_{\ell_i}) |\mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}} \mathcal{O}_{\omega_{\ell_s}}\rangle \\ &\oplus \bigoplus_{\substack{\omega_{\ell_s}, \vec{\epsilon}_{\ell_s} \\ j \neq 0}} \bigoplus_{\substack{\mathbf{k}'_{\ell_s} \\ \ell_i}} \sum \beta(\ell_s, \ell_i) e^{i(k'_{z, \ell_s} + k'_{z, \ell_i}) \cdot z_0} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \check{\mathcal{A}}_{\omega_{\ell_s}, j}^*(\mathbf{\kappa}'_{\ell_s}; z_0) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \check{\mathcal{O}}_{\omega_{\ell_i}}^*(\mathbf{\kappa}'_{\ell_i}) |\mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}}\rangle \\ &\oplus \gamma |0\rangle \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est une constante qui peut être calculée en écrivant la normalisation de l'état, mais qui n'interviendra pas dans la suite de ce manuscrit.

### 6.1.10 Résumé : l'état final du champ

L'état du champ s'exprime au bout d'un temps  $t$  après passage par le filtre et couplage à la fibre en représentation de Schrödinger :

$$|\psi_S^{(1)}(t)\rangle = |\psi_2\rangle \oplus |\psi_1\rangle \oplus |\psi_0\rangle$$

où  $|\psi_n\rangle$  est dans l'espace des vecteurs à  $n$  photons.

$$|\psi_S^{(1)}(t)\rangle = \sum_{\{\ell_s, \ell_i\}} \frac{1}{\mathcal{S}} \gamma_2(\ell_s, \ell_i) e^{-i(\omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})t} |\mathcal{O}_{\omega_{\ell_s}} \mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}}\rangle \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} &\oplus \bigoplus_{\ell_s} \bigoplus_{\ell_i} \sum \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \gamma_1^{(0)}(\ell_s, \ell_i) e^{-i\omega_{\ell_i}t} |\mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}}\rangle \\ &\oplus \bigoplus_{\substack{\omega_{\ell_s}, \vec{\epsilon}_{\ell_s} \\ j \neq 0}} \bigoplus_{\substack{\mathbf{k}'_{\ell_s} \\ \ell_i}} \sum \frac{1}{\mathcal{S}} \gamma_1^{(j)}(\ell_s, \ell_i) e^{-i\omega_{\ell_i}t} |\mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}}\rangle \\ &\oplus \gamma_0 |0\rangle \end{aligned} \quad (6.19)$$

TERME À 2 PHOTONS —  $\gamma_2$  décrit la distribution sur les états à deux photons dans les modes de la fibre  $|\mathcal{O}_{\omega_{\ell_s}} \mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}}\rangle$  :

$$\gamma_2(\ell_s, \ell_i) = \gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i) \gamma_{fs}(\ell_s, \ell_i) \gamma_{fo}(\ell_s, \ell_i) \quad (6.20)$$

où :

- $\gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i)$  est le terme de génération de la paire :

$$\gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i) = \beta(\ell_s, \ell_i) \check{R}^* E_p^{(+)}(\mathbf{k}_{\ell_s} + \mathbf{k}_{\ell_i}, \omega_{\ell_s} + \omega_{\ell_i})$$

- $\gamma_{fs}(\ell_s, \ell_i)$  est le terme de filtrage spectral :

$$\gamma_{fs}(\ell_s, \ell_i) = \mathcal{F}(\omega_{\ell_s}) \mathcal{F}(\omega_{\ell_i})$$

- $\gamma_{fo}(\ell_s, \ell_i)$  est le terme de couplage à la fibre (filtrage spatial) :

$$\gamma_{fo}(\ell_s, \ell_i) = e^{i(k'_{z, \ell_s} + k'_{z, \ell_i}) \cdot z_0} \check{\mathcal{O}}_{\omega_{\ell_s}}^*(\mathbf{\kappa}'_{\ell_s}; z_0) \check{\mathcal{O}}_{\omega_{\ell_i}}^*(\mathbf{\kappa}'_{\ell_i}; z_0)$$

TERMES À 1 PHOTON —

- $\gamma_1^{(0)}$  décrit la distribution sur les états à un photon dans les modes de la fibre  $|\mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}}\rangle$  issus de l'absorption d'un photon  $\ell_s$  par le filtre :

$$\gamma_1^{(0)}(\ell_s, \ell_i) = \gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i) \gamma'_{fs}(\ell_s, \ell_i) e^{i\mathbf{k}'_{z, \ell_i} \cdot z_0} \check{\mathcal{O}}_{\omega_{\ell_i}}^*(\boldsymbol{\kappa}'_{\ell_i}; z_0)$$

où  $\gamma'_{fs}$  est un terme de filtrage spectral :

$$\gamma'_{fs}(\ell_s, \ell_i) = \mathcal{F}(\omega_{\ell_i}) \sqrt{1 - |\mathcal{F}(\omega_{\ell_s})|^2}$$

- $\gamma_1^{(j)}$  décrit la distribution sur les états à un photon dans les modes de la fibre  $|\mathcal{O}_{\omega_{\ell_i}}\rangle$  issus de la perte d'un photon  $\ell_s$  dans le mode non-guidé  $j$  de la fibre :

$$\gamma_1^{(j)}(\ell_s, \ell_i) = \gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i) \gamma_{fs}(\ell_s, \ell_i) \gamma_{fo}^{(j)}(\ell_s, \ell_i)$$

où  $\gamma_{fo}^{(j)}$  est un terme de filtrage spatial :

$$\gamma_{fo}^{(j)}(\ell_s, \ell_i) = \beta(\ell_s, \ell_i) e^{i(\mathbf{k}'_{z, \ell_s} + \mathbf{k}'_{z, \ell_i}) \cdot z_0} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \check{\mathcal{A}}_{\omega_{\ell_s}, j}^*(\boldsymbol{\kappa}'_{\ell_s}; z_0) \check{\mathcal{O}}_{\omega_{\ell_i}}^*(\boldsymbol{\kappa}'_{\ell_i})$$

TERME DU VIDE —  $\gamma_0$  est une constante très proche de 1 qui peut être calculée à partir des autres  $\gamma$  en écrivant la normalisation de l'état.

## 6.2 Application à la génération dans un cristal massif avec filtrage étroit

Nous avons exprimé, dans la première partie de ce chapitre, l'état général d'une paire de photons jumeaux générés par fluorescence paramétrique dans un cristal non-linéaire, traversant des milieux d'indices de réfraction variés, subissant un filtrage spectral ainsi qu'un couplage dans une fibre optique.

Dans cette section, nous allons calculer la probabilité d'une coïncidence produite par cet état.

Nous commencerons par introduire l'hypothèse du filtre étroit, qui autorisera des simplifications permettant d'aller suffisamment loin dans le calcul analytique. Celles-ci faites, nous appliquerons les lois de Snell-Descartes pour prendre en compte la réfraction aux interfaces.

Après avoir explicité l'état de la paire de photons en utilisant les simplifications adaptées et quelques particularités de notre système, nous exprimerons la probabilité de coïncidence. Nous introduiront des paramètres adimensionnels qui nous permettront de rendre son expression indépendante des conditions expérimentales.

Un calcul, en partie numérique, permettra d'évaluer les conditions optimales pour obtenir le plus grand taux de coïncidences.

Après avoir analysé les résultats, nous évaluerons une grandeur essentielle à tout montage fibré, à savoir le taux de couplage des paires de photons dans une fibre optique.

### 6.2.1 Hypothèse du filtre étroit

L'usage d'un « filtre étroit » nous permettra de simplifier les calculs en supposant certains termes constants en fréquence, car leur variation pourra être considérée petite par rapport à d'autres termes en facteur. Plus précisément, on entend donc par « filtre étroit » un filtre qui permet les approximations suivante :

**Variation du module du vecteur d'onde transverse principalement due à la divergence** — On veut ici déterminer un critère qui permettra de considérer les variables  $\kappa$  et  $\omega$  indépendantes l'une de l'autre, alors qu'elles sont reliées par la relation  $\omega = \frac{c}{n}|\mathbf{k}| = \frac{c}{n} \frac{|\kappa|}{\sin \theta}$ ,  $\theta$  étant l'angle que forme  $\mathbf{k}$  avec l'axe de propagation et  $n$  l'indice du milieu. Sans cette approximation, on ne pourra par exemple pas écrire que  $\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\kappa)g(\omega)d\omega d^2\kappa \approx F(\kappa_2 - \kappa_1)[G(\omega_2) - G(\omega_1)]$ . Une telle approximation, qui simplifiera les calculs, ne sera possible que pour une « bande passante »  $\Delta\omega$  à l'intérieur de laquelle  $f$  varie beaucoup moins que  $g$  avec  $\omega$ . Nous allons déterminer un critère sur cette bande passante, que nous préférons exprimer en longueur d'onde ( $\Delta\lambda$ ).

Si  $\Delta_\lambda|\kappa| = \frac{\partial|\kappa|}{\partial\lambda}\Delta\lambda$  est la variation du module vecteur d'onde transverse due à la variation de fréquence et  $\Delta_\theta|\kappa| = \frac{\partial|\kappa|}{\partial\sin\theta}\Delta(\sin\theta)$  sa variation vis-à-vis de l'angle  $\theta$  fixant la direction de  $\mathbf{k}$ , on peut déterminer une bande passante telle que  $\Delta_\lambda|\kappa|$  est négligeable devant  $\Delta_\theta|\kappa|$  :

$$|\kappa| = |\mathbf{k}| \sin \theta = 2\pi \frac{n(\lambda_0)}{\lambda_0} \sin \theta \implies \begin{cases} \Delta_\lambda|\kappa| = 2\pi \frac{n(\lambda_0)}{\lambda_0^2} \Delta\lambda \sin \theta \\ \Delta_\theta|\kappa| = 2\pi \frac{n(\lambda_0)}{\lambda_0} \Delta(\sin \theta) \end{cases}$$

Pour être considéré « étroit » au sens défini précédemment, il faut donc que le filtre ait une bande passante de

$$\frac{\Delta_\lambda|\kappa|}{\Delta_\theta|\kappa|} \ll 1 \iff \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \ll \frac{\Delta(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

On considère qu'on a affaire à un faisceau d'angle de divergence  $\theta_0$ . La variation maximale de  $|\kappa|$  sous l'effet de  $\sin \theta$  correspond donc à  $\Delta(\sin \theta) = \sin \theta_0 - \sin 0$ . On veut déterminer la variation maximale de fréquence (c'est à dire la bande passante  $\Delta\lambda$  du filtre) qui assure que  $\Delta_\lambda|\kappa|$  reste petit par rapport aux variations  $\Delta_\theta|\kappa|$  de  $|\kappa|$  sur toute la gamme  $\Delta(\sin \theta)$ . Le cas le plus défavorable à examiner pour déterminer  $\Delta\lambda$  est le cas qui minore  $\frac{\Delta(\sin \theta)}{\sin \theta}$  ( $\Delta(\sin \theta) = \sin \theta_0$  étant fixé) c'est à dire qui majore  $\sin \theta$ . Cet angle maximum correspond aux vecteurs d'onde les plus divergents.  $\sin \theta = \sin \theta_0$  également. La condition sur la limite de bande passante revient donc à

$$\Delta\lambda \ll \lambda_0$$

Par exemple, un filtre de largeur spectrale inférieure à 1 nm satisfait cette condition. Ce sera le cas des filtres utilisés dans les calculs suivants.

**Pas de dispersion des indices de réfraction signal et idler** — Une autre conséquence d'une telle limitation de la bande passante est qu'on peut négliger la dispersion des indices de réfraction signal et idler :  $n(\omega_s) \approx n(\omega_i) \approx n(\omega_{p_0}/2)$ .

On notera tout de même  $n_s = n(\omega_s)$  et  $n_i = n(\omega_i)$  pour avoir des formules plus « expressives », bien que leurs valeurs puissent être supposées quasi-identiques. L'indice du cristal à la longueur d'onde de pompe sera quant à lui noté  $n_p = n(\omega_{p_0})$ .

De la même manière, on pourra supposer  $v_g(\omega_s) = v_{g_s} \approx v_g(\omega_i) = v_{g_i}$ . Puisque la bande passante est suffisamment étroite pour qu'on néglige la dispersion, ces vitesses de groupe seront égales aux vitesses de phase :  $v_g(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}$ .

### 6.2.2 Relation entre les vecteurs d'onde avant et après couplage

L'état  $|\psi\rangle$  (Eq. 6.18) dépend à la fois des vecteurs d'onde avant couplage ( $\mathbf{k}$ ) et des vecteurs d'onde après couplage ( $\mathbf{k}'$ ). Or nous avons déjà mentionné (§. 6.1.7.1) que ces deux vecteurs d'onde étaient reliés par les lois de l'optique géométrique, celle de Snell-Descartes en particulier. Nous allons donc supprimer cette redondance de paramètres en exprimant l'un en fonction de l'autre avant de réaliser les calculs.

Le milieu après couplage est la fibre optique, d'indice effectif  $n_f$  pour son mode guidé. Avant couplage, le photon est créé dans le cristal, dont l'indice vaut  $n^7$ , puis se propage dans l'air avant de se coupler au mode de fibre. Or, si une onde plane subit, lors d'une propagation libre, une double réfraction cristal-air-fibre, la relation entre son vecteur d'onde dans le cristal et dans la fibre est identique au cas d'une réfraction simple cristal-fibre. Il en va donc de même pour les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_\ell$  et  $\mathbf{k}'_\ell$  associés à chaque mode  $\ell$ .

**Egalité des composantes transverses** — On rappelle que, d'après la loi de Snell-Descartes, il y a conservation des nombres d'onde transverses ( $|\boldsymbol{\kappa}'| = |\boldsymbol{\kappa}|$ ) lors du passage de l'interface. En effet, on a les projections :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\kappa}| &= |\mathbf{k}| \sin \theta_c \\ |\boldsymbol{\kappa}'| &= |\mathbf{k}'| \sin \theta_f \end{aligned}$$

Puisque la relation de Snell-Descartes impose  $n_f \sin \theta_f = n \sin \theta_c$ , le rapport des nombres d'onde transverses vaut 1 :

$$\frac{|\boldsymbol{\kappa}'|}{|\boldsymbol{\kappa}|} = \frac{|\mathbf{k}'| \sin \theta_f}{|\mathbf{k}| \sin \theta_c} = \frac{\frac{\omega n_f}{c} \sin \theta_f}{\frac{\omega n}{c} \sin \theta_c} = \frac{n_f \sin \theta_f}{n \sin \theta_c} = 1$$

En invoquant des raisons de symétrie, on peut également dire que la direction des composantes transverses est conservée (pas de rotation dans le plan transverse).

**Changement de la composante longitudinale** — Les projections longitudinales s'écrivent :

$$\begin{aligned} k_z &= |\mathbf{k}| \cos \theta_c \\ k'_z &= |\mathbf{k}'| \cos \theta_f \end{aligned}$$

Leur rapport vaut approximativement  $n_f/n$  lorsque le faisceau est peu divergent :

$$\frac{k'_z}{k_z} = \frac{|\mathbf{k}'| \cos \theta_f}{|\mathbf{k}| \cos \theta_c} = \frac{n_f \cos \theta_f}{n \cos \theta_c} = \frac{\sin \theta_c \cos \theta_f}{\sin \theta_f \cos \theta_c} = \frac{\tan \theta_c}{\tan \theta_f} \approx \frac{n_f}{n}$$

On a alors

$$\begin{aligned} k'_z &= \frac{n_f}{n} k_z \\ &= \frac{n_f}{n} \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - |\boldsymbol{\kappa}|^2} \\ &= \frac{n_f}{n} |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{|\mathbf{k}|^2}} \end{aligned}$$

---

7. A titre d'exemple, pour un cristal de PPLN à 150° et une fibre Corning SMF-28, ces indices valent, à 1550 nm :  $n = 2,1705$ ,  $n_f = 1,4682$



Si  $|\boldsymbol{\kappa}| \ll |\mathbf{k}|$ , ce qui revient à se placer dans une approximation paraxiale, on a :

$$\begin{aligned} k'_z &\approx \frac{n_f}{n} |\mathbf{k}| \left( 1 - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2|\mathbf{k}|^2} \right) \\ &= \frac{n_f}{n} \left( |\mathbf{k}| - \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2|\mathbf{k}|} \right) \\ &= k_f - \frac{n_f c}{n^2 \omega} \frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2}{2} \end{aligned}$$

où  $k_f = \frac{n_f \omega}{c}$  est habituellement connu sous le nom de « constante de propagation » pour le mode fondamental d'une fibre d'indice effectif  $n_f$  pour ce mode.

Par ailleurs, si  $\omega$  peut être considéré constant et égal à  $\omega_{p0}/2$  (hypothèse  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ , cf. §. 6.2.1), on remarque que, pour un faisceau de pompe gaussien de longueur de Rayleigh  $z_R$  et de waist  $w_0$ , on a la relation

$$z_R = \frac{|\mathbf{k}_p| w_0^2}{2} = \frac{n(\omega_{p0})}{n(\frac{\omega_{p0}}{2})} |\mathbf{k}| w_0^2$$

$|\mathbf{k}_p| = n(\omega_p) \omega_p / c$  étant le module d'un vecteur d'onde de pompe, tous approximativement égaux à  $n(\omega_{p0}) \omega_{p0} / c = k_{p0}$  puisque le spectre de la pompe est étroit ( $\Delta\omega_p \ll \omega_{p0}$ ).

Alors, on peut écrire :

$$k'_z = k_f - \frac{n_f n_p}{n^2} \frac{w_0^2}{2z_R} |\boldsymbol{\kappa}|^2 \quad (6.21)$$

### 6.2.3 Etat de la paire

Maintenant qu'un certain nombre d'approximations ont été définies et que le nombre de variables est réduit, nous allons écrire l'état de la paire sous une forme facilitant les calculs. En particulier, nous allons nous abstraire du volume de quantification en le faisant tendre vers l'infini. Nous allons également justifier quelques simplifications qui seront utilisées.

On rappelle que l'état de la paire de photons jumeaux couplée dans une fibre dont le mode de propagation est associé à l'opérateur création  $\hat{\delta}^\dagger$  ( $\hat{\delta}^\dagger |0\rangle = |\mathcal{O}_\omega\rangle$ ) s'écrit :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell_s, \ell_i} \frac{1}{\mathcal{S}} \gamma_2(\ell_s, \ell_i) \hat{\delta}_{\omega_{\ell_s}}^\dagger \hat{\delta}_{\omega_{\ell_i}}^\dagger |0\rangle \quad (6.22)$$

où  $\gamma_2 = \gamma_{gp} \gamma_{fs} \gamma_{fo}$  est le produit des termes de génération de paire (cf. Eq. 6.20), filtrage spectral et de filtrage spatial par couplage dans la fibre optique, respectivement. Remarquons que l'état  $|\psi\rangle$  n'est pas normalisé car seuls les termes à deux photons de  $|\psi_S^{(1)}\rangle$  sont conservés, puisqu'ils sont les seuls susceptibles de générer des coïncidences. Cette expression, issue d'une quantification dans un volume fini fictif, devra être transposée au continu et être exprimée à l'aide d'intégrales.

$\hat{\delta}^\dagger$  est l'opérateur création pour le mode propre de la fibre, qui peut s'exprimer en fonction des opérateurs création  $\hat{a}^\dagger$  tels que  $\hat{a}^\dagger |0\rangle = |1_\ell\rangle$  par la relation :

$$\hat{\delta}_\omega^\dagger = \sum_j \frac{1}{V} \check{\mathcal{O}}_\omega(\boldsymbol{\kappa}'_j) \delta_{k_{z_j}, k_{f\omega}} \hat{a}_j^\dagger \quad (6.23)$$

c'est à dire les modes  $j$  dont, d'une part la composante transverse du vecteur d'onde correspond à la distribution  $\check{\mathcal{O}}_{\omega_\ell}$  permise par la fibre, et d'autre part, la composante longitudinale correspond à la constante de propagation de la fibre. Cette forme constitue l'expression dans l'espace réciproque de l'Equation (6.17) pour le mode  $j = 0$ . On l'a obtenue en utilisant l'expression de  $|1_r\rangle$  en fonction de  $|1_\ell\rangle$  (Eq. 6.6).

On suppose tous les photons de même polarisation  $\vec{\epsilon}_x$ . Un mode  $\ell$  décrit donc un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  avec sa fréquence associée  $\omega(\mathbf{k})$  donnée par la relation de dispersion. Le passage au continu dans un volume de quantification  $V = \mathcal{S} \times \mathcal{L}$  infiniment grand s'effectue à l'aide des transformations suivantes (voir par exemple [GC08, § 3.1.4]) :

- Le passage d'une somme discrète sur  $\mathbf{k}$  à une intégrale continue :

$$\sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathcal{S} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}}{(2\pi)^2} \quad \sum_{\omega} \longrightarrow \frac{\mathcal{L}}{v_g} \int \frac{d\omega}{2\pi}$$

- Le passage d'un ensemble discret de modes à un continuum normalisé :

$$\hat{\delta}_{\omega}^{\dagger} \longrightarrow \frac{\hat{\delta}_a^{\dagger}(\omega)}{\sqrt{\mathcal{L}/v_g}}$$

On note, à partir de maintenant, plus spécifiquement  $\hat{\delta}_a^{\dagger}$  le mode de la fibre dans laquelle est couplée la paire de photons. On souhaite récrire l'état  $|\psi\rangle$  (Eq. 6.22) en explicitant les dépendances en fréquence  $\omega$  d'une part et en vecteur d'onde transverse  $\boldsymbol{\kappa}$  d'autre part. A l'aide de l'expression de  $\gamma_2$  (Eq. 6.20) et de l'expression des composantes de  $\mathbf{k}'$  en fonction de celles de  $\mathbf{k}$  (§. 6.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{S} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \mathcal{S} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \frac{\mathcal{L}}{v_g} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \frac{\mathcal{L}}{v_g} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \frac{1}{\mathcal{S}} \gamma_2(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i, \omega_s, \omega_i) \frac{\hat{\delta}_a^{\dagger}(\omega_s)}{\sqrt{\mathcal{L}/v_{g_s}}} \frac{\hat{\delta}_a^{\dagger}(\omega_i)}{\sqrt{\mathcal{L}/v_{g_i}}} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V}{\sqrt{v_{g_s} v_{g_i}}} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \gamma_2(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i, \omega_s, \omega_i) \hat{\delta}_a^{\dagger}(\omega_s) \hat{\delta}_a^{\dagger}(\omega_i) |0\rangle \end{aligned}$$

$\gamma_2(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  étant proportionnel à  $1/V$  (à travers les termes  $A(\mathbf{k}_s)A(\mathbf{k}_i)$ ), la norme de  $|\psi\rangle$  est indépendante du volume de quantification.

En développant, on a :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V}{\sqrt{v_{g_s} v_{g_i}}} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \beta(\omega_s, \omega_i) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} \check{G}_T(\omega_s + \omega_i - \omega_{p_0}) \\ &\quad \times \mathcal{F}(\omega_s - \omega_F) \mathcal{F}(\omega_i - \omega_F) e^{i[k_f(\omega_s) + k_f(\omega_i)]z_0} \\ &\quad \times \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \check{G}_{\perp}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i, z_0) \check{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\kappa}_s) \check{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\kappa}_i) \\ &\quad \times e^{-i \frac{n_f n_p}{n^2} \frac{z_0}{2z_R} \omega_0^2 (|\boldsymbol{\kappa}_s|^2 + |\boldsymbol{\kappa}_i|^2)} \frac{2}{\pi} L \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta K L}{2}\right) \hat{\delta}_a^{\dagger}(\omega_s) \hat{\delta}_a^{\dagger}(\omega_i) |0\rangle \end{aligned}$$

où le désaccord de phase  $\Delta K$  est défini par l'Equation (6.14).

## 6.2.4 Simplifications

**Conditions d'accord de phase variant peu avec la fréquence** — Le désaccord de phase  $\Delta K$  dépend à la fois de  $\omega_s, \omega_i$  et  $\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i$  :

$$\Delta K = k_{z_s} + k_{z_i} - k_{p_0} - \frac{\omega_s + \omega_i - \omega_{p_0}}{v_{g_p}} + \frac{(|\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i|)^2}{2k_{p_0}} - \frac{2\pi}{\Lambda}$$

On note  $\Delta k_0$  le désaccord de phase colinéaire à la dégénérescence. Le désaccord induit par un écart à la dégénérescence vaut donc  $\Delta K - \Delta k_0$ . Nous allons maintenant voir comment évaluer ce

désaccord de phase. Pour cela,

Explicitons totalement cette dépendance en exprimant  $k_{zs}$  et  $k_{zi}$  en fonction de  $\omega_s, \omega_i$  et  $\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i$  :

$$k_{zs} = \sqrt{|\mathbf{k}_s|^2 - |\boldsymbol{\kappa}_s|^2} \approx |\mathbf{k}_s| - \frac{1}{2} \frac{|\boldsymbol{\kappa}_s|^2}{|\mathbf{k}_s|}$$

On a noté  $k_{s0}\mathbf{e}_z$  le vecteur d'onde signal, qui est colinéaire à la pompe à la dégénérescence. Son module est augmenté de  $\frac{\omega_s - \omega_{p0}/2}{v_{gs}}$  hors dégénérescence. On a donc  $|\mathbf{k}_s| = k_{s0} + \frac{\omega_s - \omega_{p0}/2}{v_{gs}}$ . Par ailleurs, on remarque que  $|\mathbf{k}_s| \approx \frac{v_{gs}}{n_p} \frac{|\mathbf{k}_p|}{2} = \frac{n_s}{n_p} \frac{z_R}{w_0^2}$ . On a donc :

$$k_{zs} = k_{s0} + \frac{\omega_s - \omega_{p0}/2}{v_{gs}} - \frac{n_p}{n_s} \frac{w_0^2}{2z_R} |\boldsymbol{\kappa}_s|^2$$

et de même pour  $k_{zi}$ .

En notant  $v_{gs} = v_{gi} = v_g$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Delta K &= \underbrace{k_{s0} + k_{i0} - k_{p0}}_{\Delta k_0} - \frac{2\pi}{\Lambda} + \frac{\omega_s + \omega_i - \omega_{p0}}{v_g} - \frac{\omega_s + \omega_i - \omega_{p0}}{v_{gp}} - \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{2z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s - \boldsymbol{\kappa}_i|^2) \\ &= \Delta k_0 + (\omega_p - \omega_{p0}) \left( \frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_{gp}} \right) + \frac{w_0^2}{4z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i|^2) - \frac{n_p}{n_s} \frac{w_0^2}{2z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s|^2 + |\boldsymbol{\kappa}_i|^2) \end{aligned}$$

où on a noté  $\Delta k_0 = k_{s0} + k_{i0} - k_{p0} - \frac{2\pi}{\Lambda}$  le désaccord de phase colinéaire à la dégénérescence.

Nous allons faire intervenir l'approximation suivante<sup>8</sup> : non seulement  $n_s \approx n_i$ , mais également  $n_s \approx n_i \approx n_p$ . Ainsi, on peut écrire que

$$\frac{w_0^2}{4z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i|^2) - \frac{n_p}{n_s} \frac{w_0^2}{2z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s|^2 + |\boldsymbol{\kappa}_i|^2) \approx -\frac{w_0^2}{4z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s - \boldsymbol{\kappa}_i|^2)$$

Par ailleurs, cela implique que

$$(\omega_p - \omega_{p0}) \left( \frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_{gp}} \right) = 0$$

puisque  $v_g = v_{gp}$ , ce qu'il est d'autant plus permis d'écrire qu'on a également  $\omega_p - \omega_{p0} \approx 0$  pour une pompe de spectre étroit.

On obtient finalement la forme simplifiée suivante pour le désaccord de phase :

$$\Delta K = \Delta k_0 - \frac{w_0^2}{4z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s - \boldsymbol{\kappa}_i|^2) \quad (6.24)$$

En raison des multiples vecteurs d'onde de pompe, l'accord de phase  $\Delta K$  ne peut pas être obtenu pour chaque paire  $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i$ . Il n'est possible d'optimiser l'accord de phase qu'en moyenne.

Par la suite, la période de retournement  $\Lambda$  sera fixée, et la température du cristal, influant sur l'indice de réfraction, pourra être ajustée pour que  $\Delta k_0$  soit optimal. Ce paramètre fera partie des paramètres de l'analyse.

Reste le terme  $-\frac{1}{2} \frac{w_0^2}{2z_R} (|\boldsymbol{\kappa}_s - \boldsymbol{\kappa}_i|^2)$  dont la contribution devra être prise en compte numériquement.

8. Pour un cristal de PPLN pompé à 782 nm, l'erreur introduite par cette approximation est de 1,8%.

**Les termes ne variant pas rapidement avec la fréquence sont considérés constants en fréquence** — Les termes limitant la contribution des fréquences possibles sont principalement les termes  $G_T$  et  $\mathcal{F}$ . À l'échelle des variations de  $G_T$  et  $\mathcal{F}$ , les termes proportionnels à  $\omega_s$  et  $\omega_i$  seront considérés lentement variables, proches de  $\omega_{s0} = \frac{2\pi c}{\lambda_s}$  et  $\omega_{i0} = \frac{2\pi c}{\lambda_i}$  ( $\lambda_s \approx \lambda_i \approx 2\lambda_p$ ) et pourront être extraits des intégrales. Il en est de même pour la susceptibilité non-linéaire  $\overline{\chi}^{(2)}(\omega_s, \omega_i)$ . Ainsi, la fonction  $\beta(\omega_s, \omega_i)$ , qui est proportionnelle à  $\sqrt{\omega_s \omega_i} \chi(\omega_s, \omega_i)$ , sera considérée constante et égale à  $\beta(\omega_{s0}, \omega_{i0})$ .

**Etat de la paire de photons après simplifications** — Les approximations énoncées précédemment permettent d'écrire l'état  $|\psi\rangle$  sous la forme suivante :

$$|\psi\rangle = \psi_0 \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \psi_{\omega}(\omega_s, \omega_i) \delta_a^\dagger(\omega_s) \delta_a^\dagger(\omega_i) |0\rangle$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V}{\sqrt{v_{g_s} v_{g_i}}} \beta(\omega_{s0}, \omega_{i0}) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2\epsilon_0 n_p^2 v_{g_p}}} e^{i2k_f z_0} \frac{2}{\pi} L \\ \psi_0 &= \frac{e^{i2k_f z_0}}{2l} \sqrt{\frac{(2\pi)^2 \mathcal{E}_p \chi_{\text{eff}}^2 L^2}{2\epsilon_0 c n_s n_i n_p \lambda_s \lambda_i}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) &= \check{G}_\perp(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i, z_0) \check{O}(\boldsymbol{\kappa}_s) \check{O}(\boldsymbol{\kappa}_i) \\ &e^{-i \frac{n_f n_p}{n^2} \frac{z_0}{2z_R} \omega_0^2 (|\boldsymbol{\kappa}_s|^2 + |\boldsymbol{\kappa}_i|^2)} \text{sinc} \left( \Delta K(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\psi_{\omega}(\omega_s, \omega_i) = \check{G}_T(\omega_s + \omega_i - \omega_{p0}) \mathcal{F}(\omega_s - \omega_F) \mathcal{F}(\omega_i - \omega_F) \quad (6.27)$$

$$(6.28)$$

où  $k_f = k_f(\omega_{p0}/2) = \frac{n(\frac{\omega_{p0}}{2}) \omega_{p0}}{c}$  et  $\chi_{\text{eff}} = \frac{2}{\pi} \vec{\epsilon}_x \overline{\chi}^{(2)} \vec{\epsilon}_x \vec{\epsilon}_x$ .

### 6.2.5 Probabilité de coïncidences par impulsion

Nous allons maintenant suivre la méthode décrite au Chapitre 1, §. 1.5.3, pour évaluer la probabilité de mesurer une coïncidence lorsque le champ est dans l'état  $|\psi\rangle$ .

On note  $\hat{E}_A^{(+)}, \hat{E}_B^{(+)}$  les opérateurs champ électrique normalisés<sup>9</sup> de photons de fréquence  $\omega$  dont les vecteurs d'onde correspondent aux mode guidés  $\hat{o}_A^\dagger$  et  $\hat{o}_B^\dagger$  des fibres optiques constituant les voies A et B, respectivement. Leur évolution (libre) dans la fibre au bout d'un temps  $t$  est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{E}_A^{(+)}(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} O(\omega) \hat{o}_A(\omega) e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_B^{(+)}(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} O(\omega) \hat{o}_B(\omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

où  $O(\omega)$  est la distribution des fréquences possibles dans le mode guidé de la fibre. Nous allons voir que cette fonction pourra être omise ( $\equiv 1$ ) dans le cas de la présence d'un filtre étroit, qui sera dominant dans la restriction des fréquences possibles.

9. En régime de comptage de photon, on omet le terme  $\iota \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0}}$  de sorte que  $P_{AB}$  représente la probabilité de détection de photons, indépendamment de la fréquence du champ électrique mesuré (voir HONG & MANDEL [HM85, §.II]). On aurait pu inclure le facteur  $\iota \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0}}$  avec  $\omega = \text{Cte} = \omega_{p0}/2$ , à condition que  $\eta_A$  et  $\eta_B$  soient des grandeurs de dimension appropriée et pas des rendements quantiques sans dimension.

La probabilité de coïncidences par impulsion s'écrit <sup>10</sup>

$$P_{AB} = \eta_A \eta_B \int dt_1 \int dt_2 \left\| \hat{E}_A^{(+)}(t_1) \hat{E}_B^{(+)}(t_2) |\psi\rangle \right\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme du vecteur d'état.  $\eta_A, \eta_B$  désignent les rendements quantiques des détecteurs sur les voies A et B.

La loi de transformation de l'opérateur champ électrique à travers un coupleur dont le coefficient de couplage est  $r_A^2$  en voie A et  $r_B^2$  en voie B entraîne :

$$\begin{aligned} \hat{E}_A^{(+)}(t_1) \hat{E}_B^{(+)}(t_2) = & -\nu r_A r_B \hat{E}_a^{(+)}(t_1) \hat{E}_a^{(+)}(t_2) - r_A^2 \hat{E}_a^{(+)}(t_1) \hat{E}_b^{(+)}(t_2) \\ & + r_B^2 \hat{E}_b^{(+)}(t_1) \hat{E}_b^{(+)}(t_2) - \nu r_A r_B \hat{E}_b^{(+)}(t_1) \hat{E}_a^{(+)}(t_2) \end{aligned}$$

où  $\hat{E}_a^{(+)}(t)$  et  $\hat{E}_b^{(+)}(t)$  sont respectivement les champs électriques normalisés dans les modes d'entrée  $a$  et  $b$  de la fibre, associés aux opérateurs création  $\hat{\delta}_a^\dagger$  et  $\hat{\delta}_b^\dagger$  :

$$\begin{aligned} \hat{E}_a^{(+)}(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} O(\omega) \hat{\delta}_a(\omega) e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_b^{(+)}(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} O(\omega) \hat{\delta}_b(\omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Le mode  $a$ , qui correspond à une des deux entrées du coupleur, est celui dans lequel la paire de photons  $|\psi\rangle$  est injectée. Le mode  $b$ , correspondant à l'autre entrée, est dépeuplé ( $|0\rangle$ ). En conséquence, seul le terme  $\hat{E}_a^{(+)}(t_1) \hat{E}_a^{(+)}(t_2)$  contribue à  $P_{AB}$ , on peut donc omettre les trois autres termes dans l'expression finale du taux de coïncidences :

$$P_{AB} = \eta_A \eta_B r_A^2 r_B^2 \int dt_1 \int dt_2 \left\| \hat{E}_a^{(+)}(t_1) \hat{E}_a^{(+)}(t_2) |\psi\rangle \right\|^2$$

Développée, cette expression mène à :

$$\begin{aligned} P_{AB} = \eta_A \eta_B R_A R_B |\psi_0|^2 \int dt_1 \int dt_2 \left\| \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \right. \\ \left. \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \psi_{\omega}(\omega_s, \omega_i) e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \right. \\ \left. \hat{\delta}_a(\omega_1) \hat{\delta}_a(\omega_2) \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_s) \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_i) |0\rangle \right\|^2 \end{aligned}$$

où  $R_A = r_A^2$ ,  $R_B = r_B^2$ . En raison du filtrage spectral étroit exprimé à travers le terme  $\psi_{\omega}$ , on a considéré  $O(\omega)$  constant dans la bande passante des filtres et égal à 1. En effet, cette bande passante, de l'ordre de 1 nm, est très inférieure à la largeur du spectre total collecté qui est de l'ordre de 100 nm. On peut se référer au Chapitre 7 page 147 (Fig. 7.18) pour une mesure d'un spectre collecté total.

On a la relation de commutation :

$$\hat{\delta}_a(\omega_1) \hat{\delta}_a(\omega_2) \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_s) \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_i) = \left[ \hat{\delta}_a(\omega_1) \hat{\delta}_a(\omega_2), \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_s) \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_i) \right] + \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_s) \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_i) \hat{\delta}_a(\omega_1) \hat{\delta}_a(\omega_2) \quad (6.29)$$

Appliqué à  $|0\rangle$ , le deuxième terme donne le vecteur nul :

$$\hat{\delta}_a^\dagger(\omega_s) \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_i) \hat{\delta}_a(\omega_1) \hat{\delta}_a(\omega_2) |0\rangle = 0$$

10. Il est immédiat de voir que cette expression peut tout aussi bien s'écrire  $P_{AB} = \eta_A \eta_B \int dt_1 \int dt_2 |\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) |\psi\rangle|^2$  avec  $|\mathcal{O}_A(t)\rangle = \hat{E}_A^{(-)}(t) |0\rangle$ , c'est à dire une projection sur le mode propre guidé de la fibre A (de même pour B),  $|\cdot|$  désigne le module.

et ceci, que les opérateurs création soient de même fréquence que l'un des opérateurs annihilation ( $\hat{\delta}_a^\dagger(\omega)\hat{\delta}_a(\omega)|0\rangle = \hat{N}(\omega)|0\rangle = 0$ ) ou pas ( $\hat{\delta}_a^\dagger(\omega)\hat{\delta}_a(\omega')|0\rangle = 0$ ).

Or, on rappelle que

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\delta}_a(\omega_1)\hat{\delta}_a(\omega_2), \hat{\delta}_a^\dagger(\omega_s)\hat{\delta}_a^\dagger(\omega_i) \right] &= (2\pi)^2\delta(\omega_1 - \omega_s)\delta(\omega_2 - \omega_i) \\ &+ (2\pi)^2\delta(\omega_1 - \omega_i)\delta(\omega_2 - \omega_s) \end{aligned}$$

La fonction  $\psi_\omega$  (Eq. 6.27) étant symétrique ( $\psi_\omega(\omega_2, \omega_1) = \psi_\omega(\omega_1, \omega_2)$ ), on obtient donc :

$$P_{AB} = \eta_A\eta_B R_A R_B |\psi_0|^2 \int dt_1 \int dt_2 \left| \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \psi_\kappa(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} 2\psi_\omega(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \right|^2$$

On remarque une transformée de Fourier sur la fonction à deux variables  $\psi_\omega$  :

$$P_{AB} = \eta_A\eta_B R_A R_B 4 |\psi_0|^2 \int dt_1 \int dt_2 \left| \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \psi_\kappa(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \text{TF}[\psi_\omega](t_1, t_2) \right|^2 \quad (6.30)$$

Puis, en appliquant le théorème de Plancherel, on obtient :

$$P_{AB} = \eta_A\eta_B R_A R_B 4 |\psi_0|^2 \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \left| \psi_\omega(\omega_s, \omega_i) \right|^2 \cdot \left| \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \psi_\kappa(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \right|^2 \quad (6.31)$$

qu'on note :

$$P_{AB} = \eta_A\eta_B R_A R_B 4 |\psi_0|^2 \cdot \tilde{F}_T \cdot \tilde{F}_\perp$$

Pour déterminer les paramètres qui maximisent le taux de coïncidences  $P_{AB}$ , il s'agit donc de calculer les grandeurs  $\tilde{F}_T$  et  $\tilde{F}_\perp$  suivantes :

$$\tilde{F}_T = \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \left| \psi_\omega(\omega_s, \omega_i) \right|^2 \quad (6.32)$$

$$\tilde{F}_\perp = \left| \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} \psi_\kappa(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \right|^2 \quad (6.33)$$

Le calcul du terme  $\tilde{F}_\perp$  nécessite de faire appel à une méthode numérique, que nous présenterons après avoir explicité ses différents termes (voir §. 6.2.7). En revanche, le terme  $\tilde{F}_T$  possède une forme analytique utile.

**Expression de la dépendance fréquentielle de la probabilité de coïncidence** — L'expression de  $\tilde{F}_T$  peut être explicitée en utilisant la variable fréquence de pompe  $\omega_p = \omega_s + \omega_i$  et en remarquant un double produit de convolution :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_T &= \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \left| \psi_\omega(\omega_p, \omega_s) \right|^2 \\ &= \int \frac{d\omega_p}{2\pi} |\check{G}_T(\omega_p - \omega_{p0})|^2 \int \frac{d\omega_s}{2\pi} |\mathcal{F}(\omega_s - \omega_F)|^2 |\mathcal{F}(\omega_p - \omega_s - \omega_F)|^2 \\ &= \int \frac{d\omega_p}{2\pi} |\check{G}_T(\omega_p - \omega_{p0})|^2 \int \frac{dW}{2\pi} |\mathcal{F}(W)|^2 |\mathcal{F}(\omega_p - 2\omega_F - W)|^2 \\ &= \int \frac{d\omega_p}{2\pi} |\check{G}_T(\omega_p - \omega_{p0})|^2 |\mathcal{F}|^2 * |\mathcal{F}|^2(\omega_p - 2\omega_F) \\ &= |G_T|^2 * |\mathcal{F}|^2 * |\mathcal{F}|^2(2\omega_F - \omega_{p0}) \end{aligned} \quad (6.34)$$

où on a utilisé à la dernière ligne le fait que  $\mathcal{F}$  est une fonction paire. Lorsque l'impulsion de pompe ainsi que les filtres sont de forme gaussienne, le calcul de ce produit de convolution est particulièrement simple. Il est alors également simple d'estimer les conséquences d'un filtre non parfaitement centré sur la fréquence de dégénérescence ( $\omega_F \neq \omega_{p0}/2$ ).

### 6.2.6 Expression de l'enveloppe de pompe, des filtres et du mode de fibre

**Enveloppe de pompe** — On rappelle que l'enveloppe temporelle du faisceau de pompe s'exprime, dans l'espace de Fourier (cf. §. 6.1.2) :

$$\check{G}_T(\omega) = \left(4\pi\Delta t^2\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{\omega^2\Delta t^2}{2}} \quad (6.35)$$

De même, l'enveloppe spatiale, s'écrit :

$$\check{G}_\perp(\boldsymbol{\kappa}, z_0) = \sqrt{2\pi w_0^2} \cdot e^{-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2 w_0^2}{4}} e^{ik_{p0}z_0} \quad (6.36)$$

On rappelle que  $\Delta t$  est définie comme la demi-largeur à  $1/\sqrt{e}$  en amplitude, et  $w_0$  la demi-largeur à  $1/e$  en amplitude. Le terme  $e^{ik_{p0}z_0}$  est valide dans notre approximation paraxiale.

**Filtres** — On prend pour cette application des filtres spectraux gaussiens de demi-largeur  $\Delta\omega_F$  à  $1/\sqrt{e}$  en amplitude :

$$\mathcal{F}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega_F^2}} \quad (6.37)$$

**Mode transverse de la fibre** — On considère un mode transverse de fibre gaussien normalisé, de rayon  $a_0$  à  $1/e$  en amplitude<sup>11</sup> :

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_0^2}} e^{-\frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{a_0^2}}$$

dont l'expression est la suivante dans l'espace de Fourier :

$$\check{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\kappa}) = \sqrt{2\pi a_0^2} e^{-\frac{|\boldsymbol{\kappa}|^2 a_0^2}{4}}$$

Remarquons que ces fonctions ne représentent pas nécessairement le mode transverse d'une fibre optique physique. Dans ce qui suit, par exemple, elles représenteront l'image du mode d'une fibre optique par un système de lentilles. Ainsi, en ajustant le facteur de grandissement du système optique, on peut facilement faire varier  $a_0$ . On peut également déplacer la position longitudinale  $z_0$  de l'image de la fibre qui, comme  $a_0$ , intervient dans l'expression de  $\check{F}_\perp$ . Contrairement à une fibre optique physique, cette fibre optique virtuelle pourra être positionnée *dans* le cristal, en particulier au voisinage du waist du faisceau de pompe.

11. On a alors  $2a_0$  égal au diamètre de mode tel qu'il est défini dans la littérature, c'est à dire de la même façon que le waist d'un faisceau gaussien.

### 6.2.7 Calcul à l'aide de paramètres normalisés

On introduit les paramètres normalisés suivants, qui permettent de découpler les degrés de liberté du problème :

$$\delta = \Delta\omega_F \Delta t \quad (\text{largeur du filtre relative à celle de la pompe}) \quad (6.38)$$

$$\rho = \frac{a_0}{w_0} \quad (\text{rayon de collection normalisé}) \quad (6.39)$$

$$\eta = \frac{L}{2z_R} \quad (\text{degré de focalisation de la pompe}) \quad (6.40)$$

$$\zeta = \frac{z_0}{L} \quad (\text{décentrage longitudinal de la collection}) \quad (6.41)$$

$$\varphi_0 = \Delta k_0 \frac{L}{2} \quad (\text{déphasage pour compenser la phase de Gouy}) \quad (6.42)$$

$$\varphi_{s_x} = \frac{w_0}{2} \boldsymbol{\kappa}_s \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{déphasage signal – composante } x) \quad (6.43)$$

$$\varphi_{s_y} = \frac{w_0}{2} \boldsymbol{\kappa}_s \cdot \mathbf{e}_y \quad (\text{déphasage signal – composante } y) \quad (6.44)$$

$$\varphi_{i_x} = \frac{w_0}{2} \boldsymbol{\kappa}_i \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{déphasage idler – composante } x) \quad (6.45)$$

$$\varphi_{i_y} = \frac{w_0}{2} \boldsymbol{\kappa}_i \cdot \mathbf{e}_y \quad (\text{déphasage idler – composante } y) \quad (6.46)$$

Par exemple, optimiser  $\rho$  permet d'exprimer  $a_0$  quel que soit le degré de focalisation choisi (et donc  $w_0$ ). Ce degré de focalisation peut être défini en optimisant le problème vis-à-vis de la variable  $\eta$ . L'optimisation de ces paramètres est indépendante de la longueur  $L$  du cristal. Il en va de même pour  $\zeta$  et  $\varphi_0$  qui sont également normalisés à  $L$ .

**Calcul de l'effet du filtrage spectral sur la probabilité de coïncidences** — A l'aide des expressions (6.35) et (6.37), la fonction  $\tilde{F}_T$  (6.34) devient

$$\tilde{F}_T = \frac{\Delta t \Delta \omega_F^2}{\sqrt{1 + 2\Delta t^2 \Delta \omega_F^2}} e^{-\frac{(2\omega_F - \omega_{p0})^2}{\Delta t^2 + 2\Delta \omega_F^2}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Delta \omega_F}{2\pi} F_T(\delta) e^{-\frac{(2\omega_F - \omega_{p0})^2}{2\Delta \omega_F^2 / F_T^2(\delta)}}$$

où on a introduit la fonction  $F_T$ , qui ne dépend que du paramètre normalisé  $\delta$ , varie de 0 à 1 lorsque  $\delta$  varie de 0 à l'infini :

$$F_T(\delta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{2\delta^2}}} \in [0, 1] \quad (6.47)$$

Cette fonction entre en jeu dans deux phénomènes physiques importants. Tout d'abord,  $P_{AB}$  est proportionnel à  $F_T$  lorsque le désaccord  $\delta\nu$  est nul ; il s'agit donc d'un facteur de pertes. Par ailleurs,  $F_T$  intervient également dans le terme  $\exp\left\{-\frac{(2\omega_F - \omega_{p0})^2}{2\Delta \omega_F^2 / F_T^2(\delta)}\right\}$ , c'est à dire celui qui dépend du désaccord entre les fréquences centrales de pompe et du filtre. Ce terme quantifie donc la sensibilité à ce désaccord, et on voit que celle-ci ne diminue pas simplement lorsque la largeur  $\Delta\omega_F$  du filtre augmente : le terme  $F_T$ , qui dépend aussi de  $\Delta\omega_F$  à travers  $\delta$ , vient apporter une correction.

**Calcul de l'effet du filtrage spatial sur la probabilité de coïncidences** — Comme nous l'avons dit, il est nécessaire de faire appel à une méthode d'intégration numérique pour évaluer  $\tilde{F}_\perp$  (Eq. 6.32). Nous allons implémenter une méthode de quadrature de Gauss.

En utilisant les paramètres normalisés, on peut écrire :

$$\psi_{\boldsymbol{\kappa}} = \psi_{\boldsymbol{\kappa}_0} \psi_{\boldsymbol{\kappa}_1} \psi_{\boldsymbol{\kappa}_2} \psi_{\boldsymbol{\kappa}_3} \psi_{\boldsymbol{\kappa}_4}$$



avec

$$\begin{aligned}
 \psi_{\kappa_0} &= \sqrt{2\pi w_0^2} \cdot 2\pi a_0^2 = (2\pi)^{\frac{3}{2}} w_0^3 \rho^2 \\
 \psi_{\kappa_1} &= \exp - \left\{ (\varphi_{s_x} + \varphi_{i_x})^2 + (\varphi_{s_y} + \varphi_{i_y})^2 \right\} \\
 \psi_{\kappa_2} &= \exp - \left\{ \rho^2 (\varphi_{s_x}^2 + \varphi_{s_y}^2 + \varphi_{i_x}^2 + \varphi_{i_y}^2) \right\} \\
 \psi_{\kappa_3} &= \exp - \left\{ 4 \frac{n_f n_p}{\eta^2} \eta \zeta (\varphi_{s_x}^2 + \varphi_{s_y}^2 + \varphi_{i_x}^2 + \varphi_{i_y}^2) \right\} \\
 \psi_{\kappa_4} &= \text{sinc} \left\{ \varphi_0 - \eta \left[ (\varphi_{s_x} - \varphi_{i_x})^2 + (\varphi_{s_y} - \varphi_{i_y})^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Alors  $\tilde{F}_\perp$  devient, puisque  $\iint \frac{d^2 \kappa_s}{(2\pi)^2} = \frac{4}{(2\pi)^2 w_0^2} \int d\varphi_{s_x} \int d\varphi_{s_y}$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_\perp &= \left| \left( \frac{4}{(2\pi)^2 w_0^2} \right)^2 \int d\varphi_{s_x} \int d\varphi_{s_y} \int d\varphi_{i_x} \int d\varphi_{i_y} \psi_\kappa(\varphi_{s_x}, \varphi_{s_y}, \varphi_{i_x}, \varphi_{i_y}) \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{\pi^4 w_0^4} \psi_{\kappa_0} \int d\varphi_{s_x} \int d\varphi_{s_y} \int d\varphi_{i_x} \int d\varphi_{i_y} \psi_{\kappa_1} \psi_{\kappa_2} \psi_{\kappa_3} \psi_{\kappa_4} \right|^2 \\
 &= \frac{16}{\pi^4} \frac{1}{L} \frac{n_p}{\lambda_p} F_\perp(\rho, \eta, \zeta, \varphi_0)
 \end{aligned}$$

où

$$F_\perp = \rho^4 \eta |I|^2$$

et  $I$  est l'intégrale sans dimension à évaluer numériquement par une méthode de quadrature de Gauss. On choisit la méthode de Gauss-Legendre, en limitant les bornes des intégrales à  $[-a, a]$ ,  $a$  étant fixé phénoménologiquement pour assurer une bonne approximation de l'intégrale indéfinie.

La méthode de quadrature de Gauss-Legendre consiste à effectuer une somme discrète de  $N$  termes pour chaque intégrale :

$$\begin{aligned}
 I &\approx \int_{-a}^{+a} d\varphi_{s_x} \int_{-a}^{+a} d\varphi_{s_y} \int_{-a}^{+a} d\varphi_{i_x} \int_{-a}^{+a} d\varphi_{i_y} \psi_{\kappa_1} \psi_{\kappa_2} \psi_{\kappa_3} \psi_{\kappa_4} \\
 &\approx a^4 \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N \sum_{i_4=1}^N \varpi_{i_1} \varpi_{i_2} \varpi_{i_3} \varpi_{i_4} \Psi(a x_{i_1}, a x_{i_2}, a x_{i_3}, a x_{i_4})
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

où  $\Psi = \psi_{\kappa_1} \psi_{\kappa_2} \psi_{\kappa_3} \psi_{\kappa_4}$  et  $x_j$  est la  $j$ -ème racine du polynôme de Legendre  $\mathcal{L}_N(x)$  de degré  $N$ . Les poids  $\varpi_j$  sont donnés par la formule :

$$\varpi_j = \frac{-2}{(N+1) \mathcal{L}'_N(x_j) \mathcal{L}_N(x_j)}$$

où  $\mathcal{L}'_N(x)$  est la dérivée de  $\mathcal{L}_N(x)$ .

**Expression de la probabilité de coïncidences par impulsion** — Finalement, la probabilité de détecter une coïncidence vaut :

$$P_{AB} = \eta_A \eta_B R_A R_B \frac{8}{\pi^{\frac{5}{2}}} \frac{\chi_{\text{eff}}^2 \mathcal{E}_p L \Delta\nu_F}{\epsilon_0 c n_s n_i \lambda_s \lambda_i \lambda_p} \cdot F_T(\delta) \cdot F_\perp(\rho, \eta, \zeta, \varphi_0) \tag{6.49}$$

**Application numérique** — Dans une expérience, on a un filtrage spectral de largeur  $\Delta\nu_F = 40$  MHz, identique à la largeur du spectre limité par Fourier de la pompe impulsionnelle ( $\delta = 1$ ). Le cristal de longueur  $L = 2$  cm a une susceptibilité non-linéaire effective  $\chi_{\text{eff}} = 31,8 \times 10^{-12}$  m/V.

Dans les conditions expérimentales optimales de focalisation et de collection (voir §. 6.2.9 ci-après), on a  $F_{\perp} = 6,5$ . Le faisceau de pompe à  $\lambda_p = 782$  nm a une puissance moyenne de 1,3 W et le taux de répétition des impulsions vaut 2 MHz.

Dans ces conditions, le calcul de  $P_{AB}$  donne une probabilité de générer une paire de photons jumeaux par impulsion de 2,6 % dans la bande  $\Delta\nu_F$ <sup>12</sup>.

En prenant  $R_A = R_B = 0,5$  (coupleur 50/50), un rendement quantique des détecteurs de  $\eta_A = \eta_B = 7\%$  et en tenant compte d'une transmission globale de  $T = 0,3$ , facteur de couplage mis à part, entre la génération et l'entrée du détecteur, le taux de coïncidences par seconde vaut 11,7 Hz<sup>13</sup>.

Il s'agit là de valeurs dont l'ordre de grandeur est tout à fait conformes à ce que nous rencontrerons expérimentalement avec le montage présenté au Chapitre 7.

Outre la prédiction du taux de coïncidences absolu, la théorie permet également de donner les conditions expérimentales optimales et d'estimer le taux de couplage dans une fibre optique. C'est ce que nous allons déterminer successivement dans les deux sections suivantes.

### 6.2.8 Optimisation des paramètres expérimentaux

On se donne un cristal de longueur  $L$  et de susceptibilité non-linéaire effective  $\chi$ , ainsi qu'un faisceau de pompe dont la puissance et le taux de répétition entraînent une énergie par impulsion de  $\mathcal{E}_p$ . Pour une enveloppe de pompe  $\Delta t$  et une largeur spectrale de filtrage  $\Delta\omega_F$  données,  $\delta$  donc  $F_T$  sont fixés. On peut voir en Figure 6.2 l'effet de la largeur spectrale relative du filtrage. L'optimisation des paramètres expérimentaux restants ne dépend que de  $F_{\perp}(\rho, \eta, \zeta, \varphi_0)$ , mais ces quatre paramètres sont interdépendants.

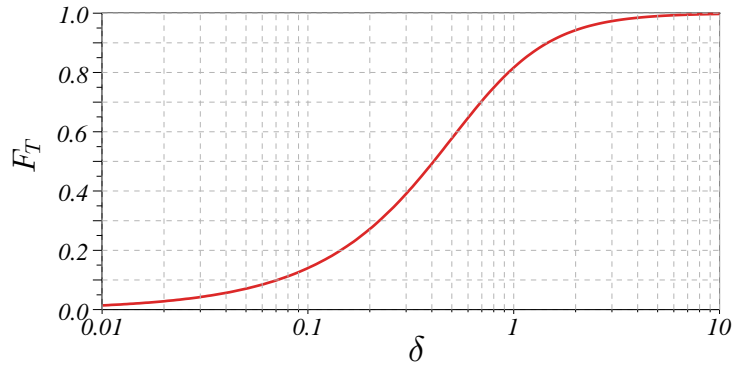
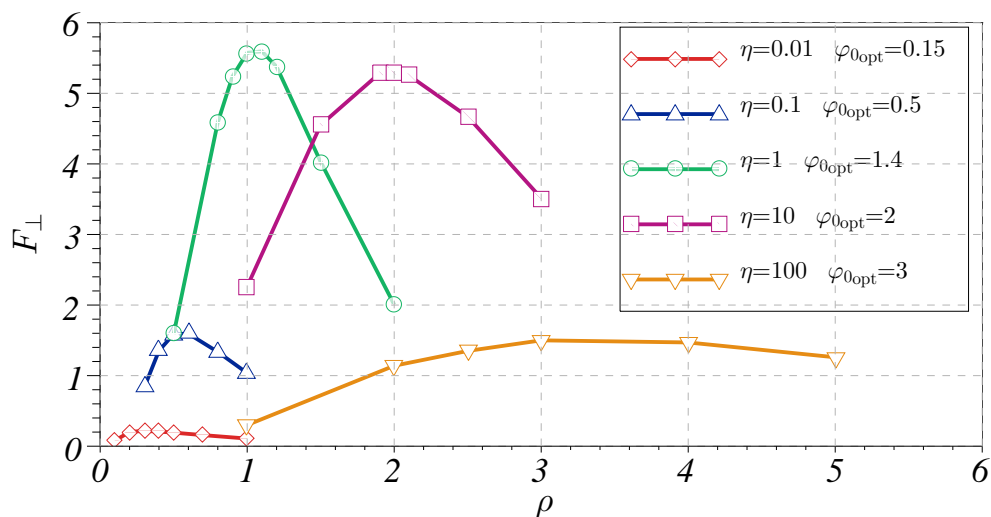


FIGURE 6.2 – Influence du paramètre  $\delta$  sur la valeur de  $F_T$ .

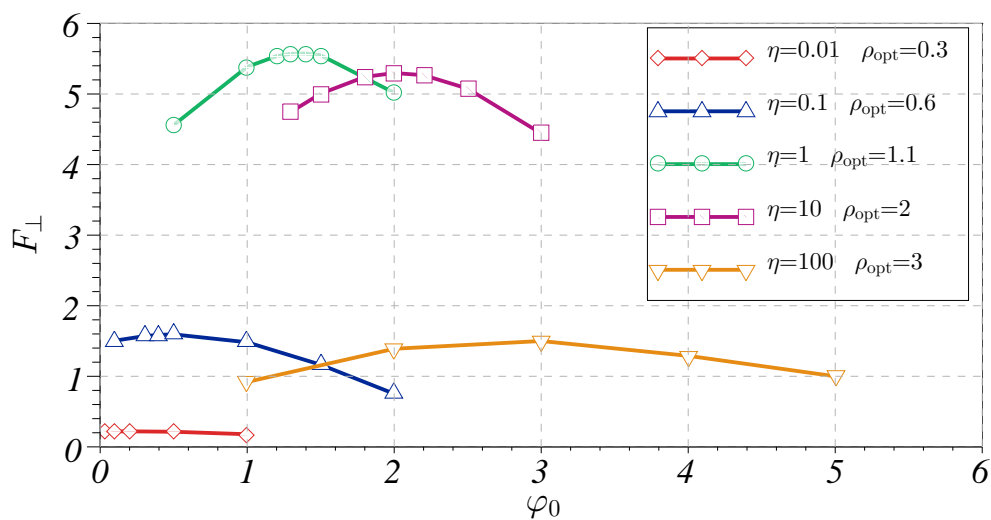
Nous allons parcourir grossièrement l'espace possible des paramètres  $\rho, \varphi_0, \eta$ . Il est intuité que le paramètre  $\zeta$  est optimal à zéro, c'est à dire lorsque le système de collection image le waist de la pompe à l'entrée de la fibre. Cette intuition sera confirmée *a posteriori* (cf Fig. 6.4 plus loin). Les résultats sont présentés en Figure 6.3. Chaque courbe correspond à un degré de focalisation  $\eta$  différent. Au sein d'une même courbe, l'un des deux paramètres ( $\rho$  pour la courbe (a) et  $\varphi_0$  pour la courbe (b)) est varié en abscisse, l'autre étant déterminé de manière heuristique afin de maximiser  $F_{\perp}$ .

12. Cette probabilité ne prend pas en compte l'effet du coupleur ; elle correspond à  $\frac{P_{AB}}{2\eta_A\eta_B R_A R_B}$  (voir Chap. 5 ou l'Annexe B).

13. On évalue ici  $P_{AB} \times T^2$ . Le Chapitre 5 permet de comprendre cette manière d'introduire les pertes dans le calcul.



(a) Influence de  $\varphi_0$



(b) Influence de  $\rho$

FIGURE 6.3 – Recherche des conditions expérimentales optimales : influence du rayon du mode de collection  $\rho$  (a) et du désaccord de phase  $\varphi_0$  (b) sur la valeur de  $F_T$ , pour différents degrés de focalisation  $\eta$ .

Tout d'abord, on constate que quel que soit  $\eta$ , il existe une paire de paramètres  $\rho_{\text{opt}}, \varphi_{0,\text{opt}}$  permettant d'atteindre un optimal. Cette série de simulations permet d'extrapoler une valeur optimale de  $\eta$  maximisant  $F_{\perp}$ . Cette valeur est proche de 3, ce qui est peu différent des conditions optimales que Boyd & Kleinman ont déterminées pour le processus de génération de seconde harmonique (§. 2.4) en faisceaux gaussiens. Lorsque le degré de focalisation est faible (dans la limite d'une onde plane), les conditions optimales sont plus strictes, surtout en termes d'injection dans la fibre. Au contraire, elles sont moins contraignantes pour une focalisation forte.

Nous avons effectué toutes ces simulations en choisissant *a priori*  $\zeta = 0$ . Cependant, nous avons vérifié (Figure 6.4) qu'au voisinage des conditions optimales pour  $\zeta = 0$ , un déplacement longitudinal du foyer  $\zeta \neq 0$  a un effet négatif, et ce pour différentes conditions de focalisation  $\eta$ . Il n'y a pas d'argument physique pour supposer qu'une valeur non-nulle de  $\zeta$  pourrait être avantageuse pour des conditions tout autres que celles que nous avons déterminées auparavant.

### 6.2.9 Estimation du taux de couplage des paires de photons dans une fibre optique

Estimer le taux de couplage pour un filtrage spectral donné revient à calculer le rapport entre la probabilité de détecter une paire de photons filtrés puis couplés à la fibre optique ( $P_{\text{AB}}$ ), et la probabilité de la détecter par un détecteur de surface supposée infinie, placé en une cote  $z = \frac{L}{2}$ , c'est à dire sur la face de sortie du cristal, mais immédiatement avant l'interface cristal/air de sorte qu'il est inutile de traiter la réfraction. On notera cette probabilité  $P'_{\text{AB}}$  :

$$P'_{\text{AB}} = \eta_A \eta_B \int dt_1 \int dt_2 \iint d^2 \boldsymbol{\rho}_1 \iint d^2 \boldsymbol{\rho}_2 p'_{\text{AB}}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1 = \frac{L}{2}, t_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2 = \frac{L}{2}, t_2)$$

où  $p'_{\text{AB}}$  est la densité de probabilité d'une coïncidence en deux points  $\boldsymbol{\rho}_1$  et  $\boldsymbol{\rho}_2$  du plan  $z = \frac{L}{2}$ , aux temps  $t_1$  et  $t_2$  :

$$p'_{\text{AB}}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1 = \frac{L}{2}, t_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2 = \frac{L}{2}, t_2) = \left\| \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, \frac{L}{2}, t_1) \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, \frac{L}{2}, t_2) |\psi'\rangle \right\|^2$$

Elle s'exprime par l'action de l'opérateur champ normalisé  $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  associé à tous les modes du volume de quantification

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}}{\sqrt{V}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \quad \omega_{\mathbf{k}} = \frac{c}{n(\mathbf{k})} |\mathbf{k}|$$

sur une paire de photons générés, filtrés mais non couplés, dans l'état  $|\psi'\rangle$  :

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell_s, \ell_i} \gamma'(\ell_s, \ell_i) \hat{a}_{\ell_s}^{\dagger} \hat{a}_{\ell_i}^{\dagger} |0\rangle$$

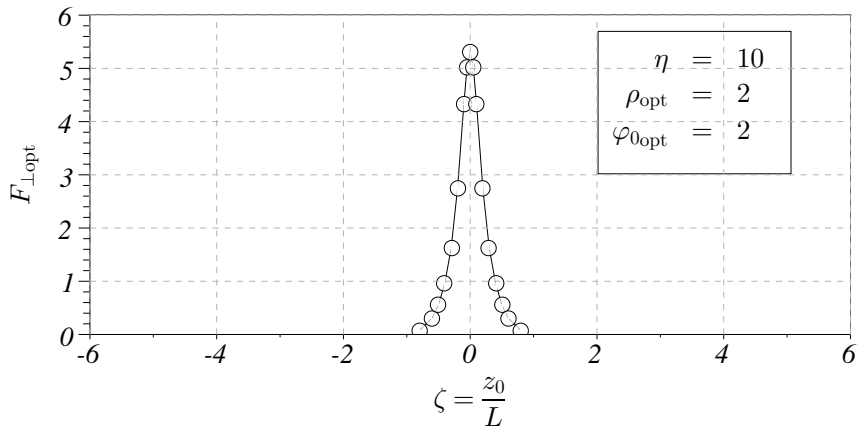
où  $\gamma'(\ell_s, \ell_i) = \gamma_{gp}(\ell_s, \ell_i) \gamma_{fs}(\omega_{\ell_s}, \omega_{\ell_i})$ , deux termes définis au paragraphe 6.1.10, Eq. (6.20).

Le problème étant indépendant de la polarisation, on peut récrire :

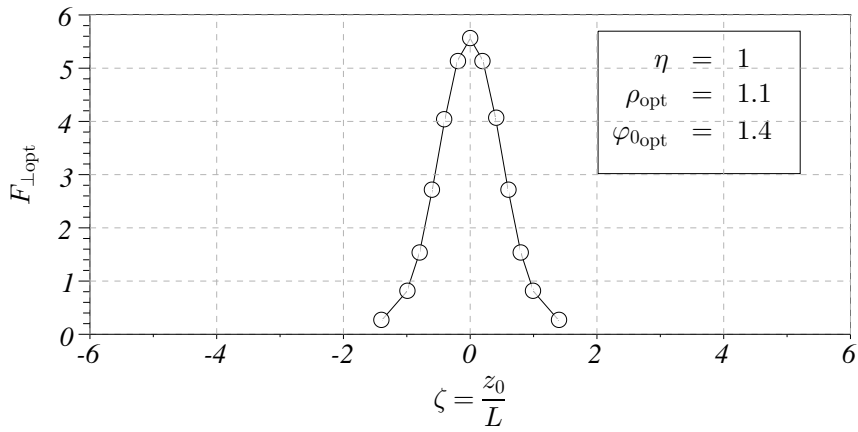
$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i} \gamma'(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i, \omega_{\mathbf{k}_s}, \omega_{\mathbf{k}_i}) \hat{a}_{\mathbf{k}_s}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^{\dagger} |0\rangle$$

Alors,  $P'_{\text{AB}}$  s'écrit :

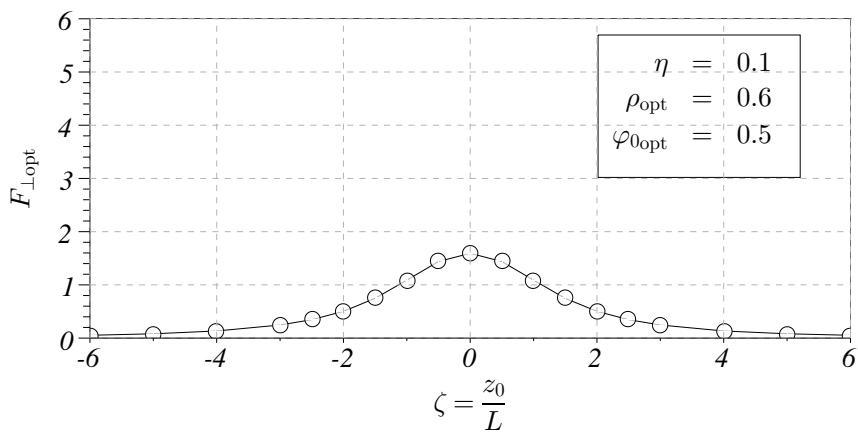
$$P'_{\text{AB}} = \left\| \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{k}_s} \sum_{\mathbf{k}_i} \gamma'(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_{\mathbf{k}_1} t_1)} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - \omega_{\mathbf{k}_2} t_2)} \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_s}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^{\dagger} |0\rangle \right\|^2$$



(a)  $\eta = 0,1$



(b)  $\eta = 1$



(c)  $\eta = 10$

FIGURE 6.4 – Influence du paramètre  $\zeta$  sur la valeur de  $F_{\perp}$ , pour plusieurs paramètres de focalisation  $\eta$ . Les autres paramètres ( $\rho$  et  $\varphi_0$ ) sont optimisés pour chaque

En utilisant les relations de commutation comme au paragraphe 6.29, on obtient :

$$p'_{AB} = \left| \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} 2\gamma'(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i(\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 - \omega_{\mathbf{k}_1} [t_1 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g(\mathbf{k}_1)}])} e^{i(\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2 - \omega_{\mathbf{k}_2} [t_2 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g(\mathbf{k}_2)}])} \right|^2$$

À l'aide de l'approximation paraxiale, qui permet d'écrire  $|\boldsymbol{\kappa}| \ll |\mathbf{k}|$ , donc  $k_z \approx |\mathbf{k}| = \frac{n}{c}\omega$ , on peut découpler les sommes sur  $\mathbf{k}$  en sommes sur  $\boldsymbol{\kappa}$  et sur  $\omega$ . Comme dans le début de cette section, on a supposé la dispersion de la vitesse de groupe négligeable, et la bande passante suffisamment étroite pour que  $v_g(\omega) = v_g = \frac{c}{n(\omega_{p0}/2)} \forall \omega$ . On obtient :

$$p'_{AB} = |\psi_0|^2 \left| \frac{v_g}{V} \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1} \sum_{\boldsymbol{\kappa}_2} \sum_{\omega_1} \sum_{\omega_2} 2\psi'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) \psi_{\omega}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 - \omega_1 [t_1 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g}])} e^{i(\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2 - \omega_2 [t_2 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g}])} \right|^2$$

où on a réintroduit les fonctions  $\psi_0$  et  $\psi_{\omega}$  définies comme pour le calcul de  $P_{AB}$  (Eqs. 6.25 et 6.27), mais on a maintenant une fonction  $\psi'_{\boldsymbol{\kappa}}$  différent :

$$\begin{aligned} 4|\psi_0|^2 &= \frac{(2\pi)^2 \mathcal{E}_p \chi_{\text{eff}}^2 L^2}{2\epsilon_0 c n_s n_i n_p \lambda_s \lambda_i} \\ \psi_{\omega}(\omega_s, \omega_i) &= \check{G}_T(\omega_s + \omega_i - \omega_{p0}) \mathcal{F}(\omega_s - \omega_F) \mathcal{F}(\omega_i - \omega_F) \\ \psi'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) &= \check{G}_{\perp}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \text{sinc} \left( \Delta K(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i) \frac{L}{2} \right) \end{aligned}$$

En récrivant  $p_{AB}$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} p'_{AB} &= 4|\psi_0|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}}} \sum_{\boldsymbol{\kappa}_2} \psi'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) e^{i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1} e^{i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2} \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\frac{v_g}{\mathcal{L}}} \sum_{\omega_1} \sqrt{\frac{v_g}{\mathcal{L}}} \sum_{\omega_2} \psi_{\omega}(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1(t_1 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g})} e^{-i\omega_2(t_2 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g})} \right|^2 \end{aligned}$$

on identifie des série de Fourier et on obtient, en notant  $\check{\psi}'_{\boldsymbol{\kappa}}$  la transformée de Fourier de  $\psi'_{\boldsymbol{\kappa}}$  et  $\check{\psi}_{\omega}$  celle de  $\psi_{\omega}$  :

$$p'_{AB} = 4|\psi_0|^2 \left| \check{\psi}'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \check{\psi}_{\omega} \left( t_1 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g}, t_2 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g} \right) \right|^2$$

La probabilité  $P'_{AB}$  peut se récrire à l'aide d'intégrales sur  $d\omega$  et  $d^2\boldsymbol{\kappa}$  en appliquant le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} P'_{AB} &= 4|\psi_0|^2 \eta_A \eta_B \int dt_1 \int dt_2 \iint d^2\boldsymbol{\rho}_1 \iint d^2\boldsymbol{\rho}_2 \left| \check{\psi}'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \check{\psi}_{\omega} \left( t_1 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g}, t_2 - \frac{L}{2} \frac{1}{v_g} \right) \right|^2 \\ &= 4|\psi_0|^2 \eta_A \eta_B \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} |\psi_{\omega}(\omega_s, \omega_i)|^2 \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} |\psi'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)|^2 \end{aligned}$$

où on a simplement remplacé les indices muets 1, 2 par les indices  $s, i$ .

On a, comme dans le cas du calcul de  $P_{AB}$  :

$$\int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} |\psi_{\omega}(\omega_s, \omega_i)|^2 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Delta\nu_F F_T(\delta) e^{-\frac{(2\omega_F - \omega_{p0})^2}{2\Delta\omega_F^2 / F_T^2(\delta)}}$$

En revanche, il faut maintenant calculer  $\iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} |\psi'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i)|^2$  :

$$\begin{aligned} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_s}{(2\pi)^2} \iint \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_i}{(2\pi)^2} |\psi'_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\kappa}_i)|^2 &= 2\pi w_0^2 \left( \frac{4}{(2\pi)^2 w_0^2} \right)^2 \int d\varphi_{s_x} \int d\varphi_{s_y} \int d\varphi_{i_x} \int d\varphi_{i_y} |\psi_{\boldsymbol{\kappa}_1} \psi_{\boldsymbol{\kappa}_4}|^2 \\ &= \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{w_0^2} \frac{1}{\eta} F'_{\perp}(\eta, \varphi_0) \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{L} \frac{n_p}{\lambda_p} F'_{\perp}(\eta, \varphi_0) \end{aligned}$$

où on a remarqué que  $\frac{2z_R}{w_0^2} = |\mathbf{k}_p| = \frac{2\pi n_p}{\lambda_p}$  et où

$$F'_{\perp}(\eta, \varphi_0) = \eta \int d\varphi_{s_x} \int d\varphi_{s_y} \int d\varphi_{i_x} \int d\varphi_{i_y} |\psi_{\boldsymbol{\kappa}_1} \psi_{\boldsymbol{\kappa}_4}|^2$$

est une grandeur adimensionnelle se calculant numériquement par la même méthode que pour  $F_{\perp}$  (Eq. 6.48).

Finalement, si on se place dans le cas où le filtre est parfaitement centré sur la fréquence de dégénérescence ( $\omega_F = \omega_{p0}/2$ ), la probabilité de détecter une coïncidence indépendamment du couplage, vaut :

$$\begin{aligned} P'_{AB} &= \eta_A \eta_B \frac{(2\pi)^2 \chi_{\text{eff}}^2 \mathcal{E}_p L^2}{2\epsilon_0 c n_s n_i n_p \lambda_s \lambda_i} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Delta\nu_F \cdot F_T(\delta) \cdot \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{L} \frac{n_p}{\lambda_p} F'_{\perp}(\eta, \varphi_0) \\ &= \eta_A \eta_B \frac{8}{\pi^{\frac{5}{2}}} \frac{\chi_{\text{eff}}^2 \mathcal{E}_p L \Delta\nu_F}{\epsilon_0 c n_s n_i \lambda_s \lambda_i \lambda_p} \cdot F_T(\delta) \cdot \frac{\pi^2}{4} F'_{\perp}(\eta, \varphi_0) \end{aligned} \quad (6.50)$$

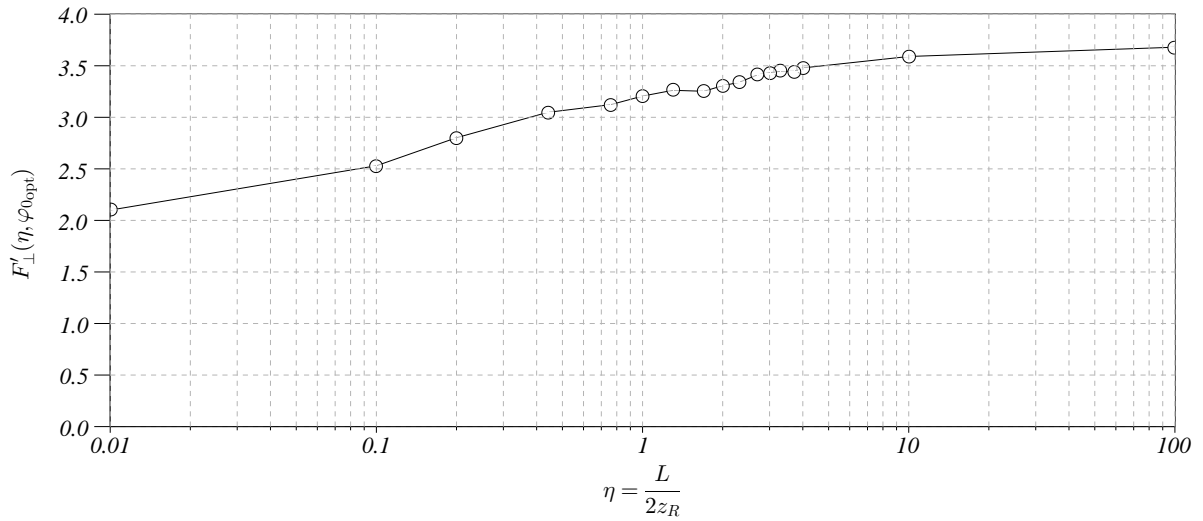
**Taux de couplage dans la fibre optique** — En faisant le rapport de la probabilité de coïncidences évaluée après couplage dans la fibre et de la probabilité de coïncidence évaluée dans tout l'espace, on obtient le taux de couplage  $\Gamma$  des paires de photons, à  $R_A R_B$  près qui correspond à l'effet du coupleur fibré. Ainsi, en calculant  $\frac{P_{AB}}{R_A R_B P'_{AB}}$ , on obtient :

$$\Gamma = \frac{4}{\pi^2} \frac{F_{\perp}(\rho, \eta, \zeta, \varphi_0)}{F'_{\perp}(\eta, \varphi_0)} \quad (6.51)$$

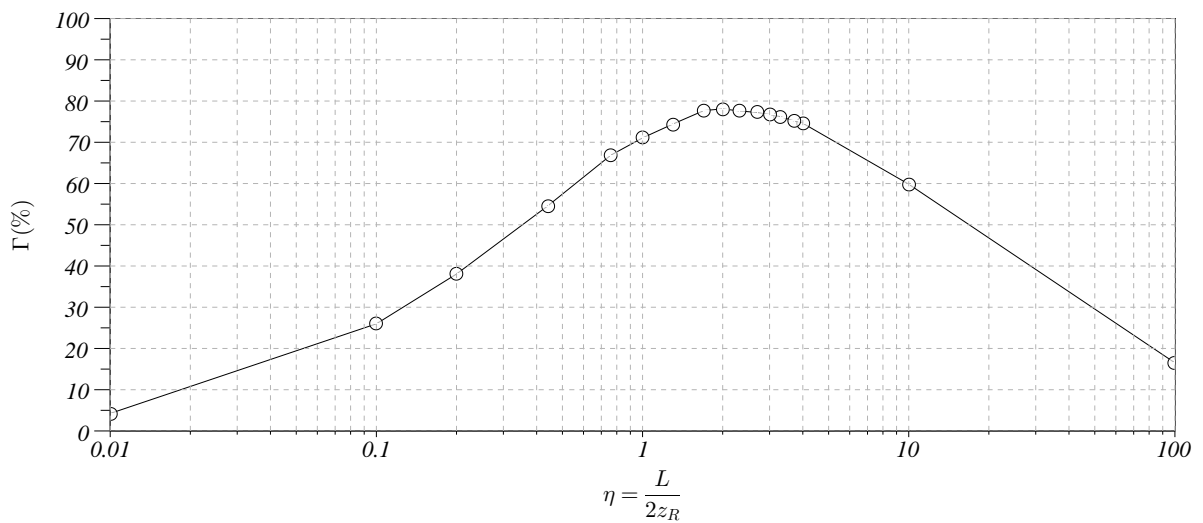
Évaluons ce taux de couplage pour différents degrés de focalisation  $\eta$ , en choisissant pour chacune de ces valeurs des paramètres ( $\rho, \varphi_0, \zeta$ ) qui permettent de maximiser  $\Gamma$  et que sa valeur est alors de  $\Gamma = 77\%$ . Les résultats sont données en Figure 6.5. Nous avons également représenté la valeur de  $F'_{\perp}(\eta, \varphi_0)$  pour  $\varphi_0$  optimal à la valeur de  $\eta$  fixée.

On constate qu'il existe bien une valeur optimale de  $\eta$  qui permet de maximiser  $\Gamma$ . Insistons sur le fait que, d'une valeur de  $\eta$  à l'autre, les autres paramètres ont changé. Par exemple, pour un cristal de longueur  $L$ , il est expérimentalement évident qu'en changeant le degré de focalisation  $z_R$ , il est nécessaire de modifier les conditions de collection ( $a_0$ ). Toutefois, ce qu'illustre le calcul présenté ici, c'est qu'il n'est pas toujours possible de compenser une variation de degré de focalisation par un changement des conditions de collection. Notre calcul permet en outre de quantifier ce phénomène.

Pourtant, au regard de l'évolution de  $F'_{\perp}$  en fonction de  $\eta$  (Fig. 6.5, en haut), il serait tentant de focaliser très fortement ( $\eta > 10$ ) pour obtenir un meilleur rendement de génération. Cependant, on voit qu'alors l'efficacité de collection se dégrade, quel que soit  $\rho$ . Si seule la brillance de la source importait, on pourrait rechercher un compromis entre rendement de génération et taux de couplage maximisant le nombre de photons détectés. Toutefois, pour les applications en



(a) Facteur spatial  $F'_\perp$



(b) Taux de couplage  $\Gamma$

FIGURE 6.5 – En bas, taux de couplage  $\Gamma$  dans la fibre optique, en fonction du degré de focalisation  $\eta$ . En haut, facteur spatial  $F'_\perp(\eta, \varphi_0)$  contribuant à la probabilité de génération d'une paire de photons, illustrant le fait qu'un taux de couplage optimal ne correspond pas à une efficacité de génération maximale.



information quantique, la recherche d'une fidélité optimale est essentielle<sup>14</sup>, et nous avons vu au chapitre précédent que celle-ci est directement dégradée par les pertes, qui augmentent lorsque le taux de couplage diminue.

## 6.3 Conclusion

L'étude développée dans le présent chapitre a permis d'obtenir l'expression de l'état quantique du champ généré par fluorescence, filtré puis couplé à une fibre optique, en n'utilisant qu'une approximation paraxiale et l'hypothèse d'un filtrage relativement étroit  $< 1$  nm. Ces hypothèses pourraient éventuellement être affaiblies en utilisant une méthode numérique plus tôt dans le calcul. Cette théorie constitue donc un résultat général, très utile pour quantifier les performances qu'il est possible d'obtenir, en termes de rendement de génération et d'efficacité de collection, avec un dispositif expérimental donné. Elle permet en outre de déterminer dans quelle configuration (degré de focalisation, système optique de collection) il est possible d'atteindre les meilleures performances.

Un résultat important car universel est que, pour des conditions optimales, la probabilité d'obtenir une paire de photons en sortie de fibre est proportionnelle à l'énergie de l'impulsion de pompe et à la longueur du cristal.

Un second résultat significatif est que le maximum de paires obtenues dans la fibre ne correspond pas rigoureusement au meilleur taux de couplage car il y a concurrence de deux facteurs : le rendement de génération et le taux de couplage. Ainsi, un taux de couplage non-optimal peut être compensé par un rendement de génération supérieur. Les conditions de focalisation dans le cristal doivent être orientées pour privilégier l'un ou l'autre. Certes, l'optimum de l'un n'est pas éloigné de l'optimum de l'autre, mais lorsque les pertes sont un élément critique d'une expérience, une optimisation classique consistant à maximiser le nombre de paires collectées n'est pas une bonne méthode. Cependant, une mesure indépendante du taux de couplage n'est pas évidente. Nous aborderons ce sujet au Chapitre 8 sur la base d'un montage que nous allons décrire dans le premier chapitre de la partie suivante, dédiée à la réalisation et à l'optimisation d'une source que la présente partie nous a permis de concevoir.

---

14. La « fidélité » est simplement définie ici comme la proportion du terme à deux photons par rapport à l'ensemble des termes.

## Troisième partie

# Réalisation et optimisation d'une source de photons intriqués de spectre étroit



## Chapitre 7

# Source fibrée de photons jumeaux compatible avec un spectre étroit

Lorsque l'intrication n'est pas intrinsèque au processus de fluorescence paramétrique comme elle le serait avec un accord de phase de Type II<sup>1</sup>, la démarche expérimentale peut consister dans un premier temps à optimiser la source en tant que source de paires de photons jumeaux, l'intrication étant réalisée *a posteriori*<sup>2</sup>.

Ce chapitre présente donc la réalisation de la source de photons jumeaux qui servira de base à la source finale du projet e-Quanet. Cette réalisation commence par une étude détaillée des contraintes théoriques liées au projet d'une part, et des contraintes que les possibilités matérielles nous imposent d'autre part. Nous en déduisons une solution possible dont nous décrivons toutes les étapes de sa mise en œuvre.

Nous allons voir qu'une étape expérimentale préliminaire consiste à produire le faisceau de pompe du processus de fluorescence par doublement de fréquence d'un laser commercial, et à éliminer tout photon résiduel à la fréquence d'origine.

Le processus de génération des paires de photons jumeaux par fluorescence paramétrique est ensuite mis en place. Le signal de fluorescence est caractérisé et optimisé classiquement, puis épuré à l'aide d'un système de filtrage suffisamment sévère pour supprimer tout photon parasite pouvant perturber les mesures en régime de comptage de photons, tout en permettant de maintenir autant que possible une qualité maximale de la source dans sa bande passante.

Une comparaison de ces mesures classiques avec les prédictions du Chapitre 6 permet d'observer une première confirmation de la théorie.

### 7.1 Dispositif envisagé

#### 7.1.1 Principe

Le dispositif envisagé est représenté schématiquement sur la Figure 7.1. La source repose sur la génération en espace libre de paires de photons par fluorescence paramétrique dans un cristal non linéaire. Les photons générés sont ensuite séparés du faisceau de pompe par un système de filtrage dichroïque avant d'être collectés dans une fibre monomode, mis en forme spectralement, puis répartis vers deux voies distinctes. Avant de rentrer dans les détails de sa réalisation, précisons à quelles contraintes notre système doit répondre.

---

1. Voir Chapitre 2, § 2.5.3.

2. Voir Chapitre 9.

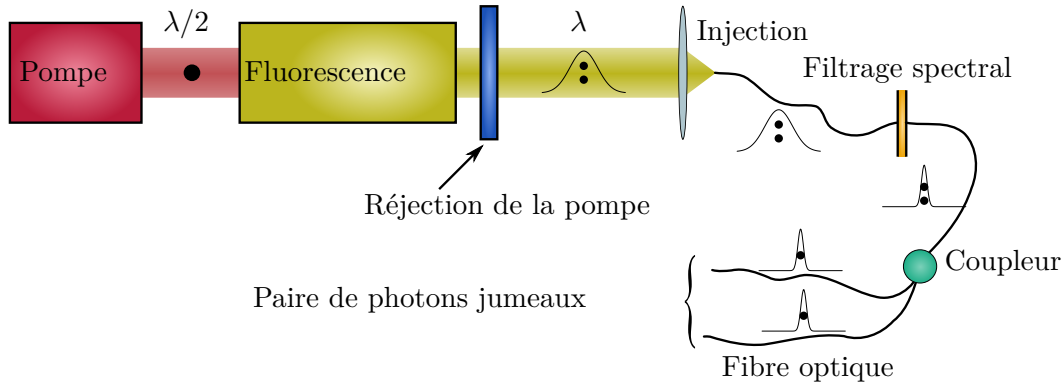


FIGURE 7.1 – Schéma simplifié des différentes étapes du montage

## 7.1.2 Contraintes

### 7.1.2.1 Contraintes de principe

**Source fibrée** — Bien que les mémoires quantiques pour lesquelles les études sont les plus avancées fonctionnent plutôt autour de 800 nm, il est inconcevable de produire une source à cette longueur d'onde si l'on souhaite communiquer sur de longues distances. Il est nécessaire que la propagation d'un qubit ait lieu aux longueurs d'ondes utilisées dans l'industrie des télécommunications afin qu'un éventuel réseau quantique puisse s'appuyer sur les technologies existantes. À ce titre, la propagation fibrée figure parmi les contraintes inévitables.

Si, peu après les premiers lasers He-Ne et grâce à d'importants travaux sur le guidage [KH66] (Charles K. KAO, prix Nobel 2009, avec G.A. HOCKAM, 1966) et la pureté des verres [JK69] (KAO & M.W. JONES, 1969), les premières technologies de fibres à faibles pertes ont pu apparaître, totalisant tout de même environ 17 dB/km (1970, Corning Glass Works [MKS73]), c'est avec l'utilisation des longueurs d'onde autour de 1310 et 1550 nm que les propagations sur de longues distances ont été permises. Ces deux longueurs d'onde sont maintenant très majoritairement utilisées, et présentent chacune leurs avantages : Au voisinage de 1310 nm, l'atténuation est très faible (environ 0,5 dB/km) mais surtout la dispersion chromatique s'annule [PG75] permettant de s'affranchir de l'étalement temporel des impulsions lumineuses, d'autant plus problématique que leur largeur spectrale est grande et qu'on cherche à atteindre des taux de répétition importants. Autour de 1550 nm, la dispersion chromatique est supérieure, mais l'atténuation est encore moindre (0,2 dB/km). Cette deuxième fenêtre de longueurs d'onde est donc à privilégier quand la dispersion chromatique n'est pas critique.

En ce qui concerne notre source, d'une part les pertes lors de la transmission des photons jumeaux sont critiques (voir Chapitre 5), d'autre part le spectre extrêmement étroit requis pour une interaction efficace avec les mémoires quantiques (quelques dizaines de MHz) minimise les problèmes de dispersion chromatique. Nous ferons donc le choix de fonctionner autour de 1550 nm, et plus particulièrement dans la bande C des télécommunications, bande dite « conventionnelle » qui s'étend de 1530 à 1565 nm environ. L'usage de cette bande particulière sera justifié plus loin lorsque nous aborderons les contraintes imposées par le matériel (§ 7.1.2.2).

Dans la perspective d'un répéteur quantique, une interface permettant l'adaptation de la longueur d'onde des photons porteurs des qubits à celle à laquelle fonctionnera la mémoire quantique devra être réalisée après propagation, avant le stockage. Nous nous orientons vers une mémoire quantique basée sur du Thulium, dont une résonance particulière est située à 793 nm. Pour déterminer avec précision la longueur d'onde des photons jumeaux produits par la source, il faut dès à présent s'intéresser au processus de somme de fréquence à la base d'une telle interface. Pour d'avantage de détails à ce sujet, on pourra se référer, par exemple, à S. TANZILLI [TTH<sup>+</sup>05] ou M. ALBOTA [AWS06, Alb06].

Supposons un processus de somme de fréquence, pompé à  $\lambda_1$ , qui convertit un photon à  $\lambda_2$  en un photon à  $\lambda_3$  tel que  $\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ . Si la longueur d'onde visée  $\lambda_3$  vaut 793 nm et que les photons de la source sont produits à  $\lambda_2$ , les longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  peuvent être arbitrairement choisies proches l'une de l'autre (autour de  $2 \times \lambda_3 = 1586$  nm) ou éloignées jusqu'à quelques centaines de nanomètres. Il est cependant nécessaire que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , afin de se doter d'un moyen spectral de séparer les photons issus de ce processus de somme de fréquences des photons générés par doublement de fréquence de la pompe intense à  $\lambda_1$ . Une séparation de quelques nanomètres ou dizaines de nanomètres permet d'utiliser des filtres courants peu sélectifs. Nous avons choisi le couple  $\lambda_1 = 1563,86$  nm et  $\lambda_2 = 1609,19$  nm c'est à dire deux canaux standard de la grille ITU<sup>3</sup> 100 MHz :  $\nu_1 = 191,70$  THz (canal n° 17 de la bande C) et  $\nu_2 = 186,30$  THz (canal n° 63 de la bande L). Ainsi, comme ceux provenant de la source, les photons pompant l'interface seront compatibles avec les composants fibrés conçus pour l'industrie des télécommunications, le canal n° 63 – s'il n'est plus dans la bande C – restant dans le domaine des télécommunications. La source produisant des paires de photons centrés sur 1564 nm, la longueur d'onde du faisceau pompant le processus de génération par fluorescence paramétrique sera donc de moitié, c'est à dire 782 nm. Dans l'interface, les photons provenant du doublement de fréquence de la pompe à 1609 nm auront pour longueur d'onde 805 nm. Il sera possible de les séparer des photons convertis à 793 nm à l'aide de miroirs dichroïques.

**Remarque sur la biréfringence des fibres optiques** — Choisir une propagation fibrée soulève le problème de la biréfringence causée par la grande sensibilité des fibres aux contraintes mécaniques et thermiques. Dans la perspective de travailler avec une intrication en polarisation, il est important de déterminer dans quelle mesure ce phénomène est un inconvénient. En pratique, la biréfringence cause deux effets distincts : la rotation de polarisation d'une part et la dépolarisation d'autre part, c'est à dire la dispersion de la polarisation en fonction des composantes spectrales.

Le premier effet est compensable par des éléments d'optique linéaire (lames d'ondes, compensateurs de phase) ; il ne pose donc pas de problème fondamental, bien qu'il complexifie la mise en pratique en cas d'instabilité importante.

Le deuxième effet, la dépolarisation, est plus problématique car il n'est pas compensable aussi simplement. Cependant, en raison du spectre très étroit prévu pour notre source, cet effet est rendu négligeable : la contrainte de la largeur spectrale devient un atout pour la fiabilité de la transmission.

**Le problème du couplage dans une fibre optique** — Si l'on choisit de générer les paires de photons dans un cristal massif en espace libre, se pose le problème de leur couplage dans la fibre, déjà évoqué en théorie au chapitre 6. Nous aurons en particulier à choisir entre une génération paramétrique colinéaire (collection de la paire dans une seule fibre) ou non colinéaire (collection de chaque photon dans sa propre fibre).

**Mise en forme spectrale des photons jumeaux** — Comme nous l'avons vu au Chapitre 5, la qualité d'une source est liée aux conditions de filtrage spectral des paires de photons jumeaux. Dans ce chapitre, la source étudiée intégrera donc un dispositif de filtrage spectral permettant aux photons jumeaux de se coupler efficacement avec une mémoire quantique. Au stade actuel de leur développement, la largeur spectrale requise pour une bonne efficacité est de l'ordre de 10 à 100 MHz. Nous caractériserons la source pour des filtrages moins étroits, mais elle sera conçue pour permettre d'atteindre une telle finesse.

**Mise en forme temporelle du faisceau de pompe** —

3. *International Telecommunication Union*

**DURÉE DES IMPULSIONS** — Les caractéristiques spectrales d'un photon sont foncièrement liées à ses caractéristiques temporelles : la relation d'incertitude de Heisenberg exprimée en temps et énergie implique que plus précise est la localisation temporelle d'un photon, plus large est sa distribution spectrale. Or il est souhaitable, dans la perspective d'utiliser notre source au sein de réseaux, de se doter d'une horloge : plutôt que de produire des paires de photons continûment, autorisant ainsi un spectre aussi étroit que les techniques de filtrage le permettent, la source fonctionnerait en régime impulsif, cadencée par un signal électronique partagé avec les autres sources faisant partie du réseau. Des deux caractéristiques essentielles d'une impulsion que sont sa période de répétition et sa durée, cette seconde est donc minorée approximativement par la largeur spectrale souhaitée, selon la relation d'incertitude de Heisenberg qui, pour une impulsion gaussienne, s'écrit ainsi :

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \geq \frac{2 \ln 2}{\pi} \approx 0,44$$

où  $\Delta t$  et  $\Delta \nu$  sont respectivement la durée totale à mi-hauteur et la largeur spectrale totale à mi-hauteur de l'impulsion, mesurées en intensité. De plus, nous avons vu au Chapitre 6 (§ 6.2.5, voir également l'Annexe B) que lorsque la pompe possède un étalement spectral  $\Delta \nu_P$ , un filtrage de largeur  $\Delta \nu_F$  pouvait ajouter des pertes sur le taux de coïncidences lorsque  $\Delta \nu_F \approx \Delta \nu_P$ . Pour obtenir des pertes de moins de 10 % ( $T = 90\%$ ), il faut que le rapport  $\Delta \nu_P / \Delta \nu_F$  satisfasse l'inégalité :

$$\frac{\Delta \nu_P}{\Delta \nu_F} < \sqrt{2 \left( \frac{1}{T^2} - 1 \right)} = 0,68 \quad \text{pour } T = 90\% \quad (7.1)$$

En conséquence, pour atteindre une finesse spectrale de  $\Delta \nu_F = 10$  à 100 MHz, les impulsions devront durer quelques dizaines de nanosecondes au minimum (6,85 à 68,5 ns rigoureusement) pour être limitées par Fourier à une largeur spectrale  $\Delta \nu_P = 0,68 \Delta \nu_F$ . On sera donc bien loin de pouvoir atteindre des régimes pico- ou femto-seconde auxquels ont fait généralement référence quand on parle d'optique impulsif et pour lesquels les phénomènes non-linéaires sont facilités.

**TAUX DE RÉPÉTITION** — En ce qui concerne le taux de répétition des impulsions, la seule contrainte est que le débit de qubits soit raisonnable pour d'éventuelles applications de la source. Ce qu'on entend par « raisonnable » est imprécis, car en réalité la contrainte est faible de ce point de vue-là. La relation entre le débit de qubits et le taux de répétition de la pompe est liée à la qualité de la source. Pour une compréhension détaillée de ce sujet, on peut se reporter au chapitre 5. Succinctement, rappelons que la présence de paires multiples à chaque coup d'horloge détériore la qualité de la source, et que celles-ci doivent être négligeables par rapport aux paires simples. Or, pour que ce soit le cas, la probabilité de créer une paire simple doit elle-même être faible à chaque coup d'horloge. En choisissant une probabilité de 1 %, la cadence d'horloge doit donc être 100 fois supérieure au débit de qubits souhaité. Par exemple, 20 kqubit/seconde implique un taux de répétition des impulsions de l'ordre de 2 MHz. Ce taux serait parfaitement compatible avec les durées d'impulsions évaluées plus haut ( $6,85 \text{ ns} < \Delta t < 68,5 \text{ ns}$ ) : le rapport cyclique, défini par  $\rho = \frac{\Delta t}{T} < 1$  ( $T$  étant la période des impulsions, égale à l'inverse du taux de répétition), serait alors compris entre  $\frac{1}{7,3}$  et  $\frac{1}{73}$ .

Mais nous allons voir que les technologies que nous emploierons pour mettre en forme les impulsions limitent encore le choix de ces paramètres. Parcourons ces contraintes matérielles avant de détailler le dispositif retenu.

### 7.1.2.2 Contraintes matérielles

Pour des raisons de facilité de déploiement, nous avons fait le choix d'utiliser autant que possible des composants fibrés issus de l'industrie des télécommunications.

**Principe de réalisation du faisceau de pompe** — Tout d’abord se pose la question des caractéristiques du faisceau de pompe pour la génération de paires de photons par fluorescence paramétrique. Ce processus non linéaire, que nous avons présenté au Chapitre 2, § 2.5, impose que si les photons jumeaux sont générés autour de  $\lambda = 1550$  nm, les photons du faisceau de pompe doivent avoir une longueur d’onde moitié, de 775 nm. Nous pourrions utiliser une source laser impulsienne à cette longueur d’onde mais, dans le régime nanoseconde, il est plus judicieux<sup>4</sup> d’amplifier un signal faible préalablement modulé. L’amplificateur à fibre dopée Erbium offre une solution d’amplification très efficace, produisant un faisceau de grande qualité, et sa technologie est très bien maîtrisée. Il est très couramment employé dans l’industrie des télécommunications pour amplifier des signaux optiques modulés porteurs d’information [Pas08]. Cependant, le gain de l’Erbium est situé dans la bande C, autour de 1550 nm. La solution pour profiter de cette technologie mature serait donc de générer le faisceau de pompe à 1550 nm, puis de le convertir à 775 nm par doublement de fréquence. Si une telle conversion présente l’inconvénient d’ajouter un étage expérimental supplémentaire, elle est en revanche simple du point de vue du principe. On peut se référer au Chapitre 2 pour en avoir une description détaillée. Il s’agira alors de rechercher un milieu et des conditions d’interaction propices à un rendement le plus élevé possible.

Passer par l’étape de doublement de fréquence, puisqu’elle permet l’utilisation d’un amplificateur à fibre, autorise d’alimenter le montage par un laser fibré de faible puissance, et de le moduler à l’aide d’un composant fibré également. La génération du faisceau de pompe utilisé dans le processus de fluorescence paramétrique suivra le principe schématisé en 7.2.

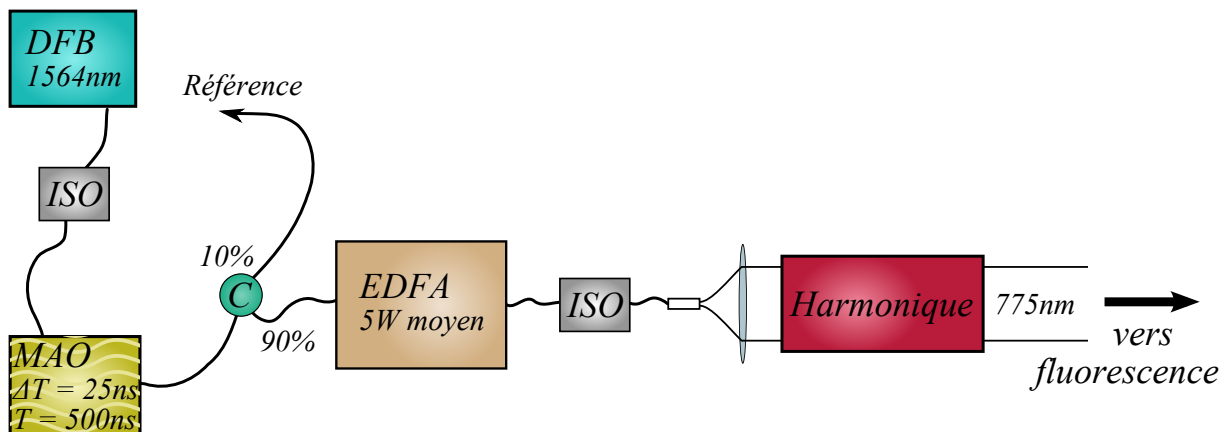


FIGURE 7.2 – Schéma de principe de la génération d’un faisceau modulé à 775 nm pour le pompage du processus de génération de paires de photons par fluorescence paramétrique. DFB : laser DFB ; MAO : modulateur acousto-optique ; EDFA : amplificateur à fibre dopée erbium ; ISO : isolateur fibré ; C : coupleur fibré

### Modulation du faisceau de pompe —

**CHOIX DE LA TECHNOLOGIE** — En ce qui concerne la modulation du signal laser qui sera injecté dans l’amplificateur, trois solutions sont possibles : premièrement une modulation de la puissance du laser elle-même. Cette fonctionnalité est prévue dans les diodes laser DFB utilisées dans les télécommunications, mais le risque de subir les effets néfastes des régimes transitoires est trop grand (instabilité spectrale, élargissement spectral : *chirping*). Reste à choisir entre deux solutions externes de modulation fibrées : la technologie électro-optique et la technologie acousto-optique qui présentent chacune ses avantages propres. Pour la première, une plus grande rapidité ; pour la seconde, un taux d’extinction supérieur. On peut consulter la Table 7.1 pour un comparatif

4. Les techniques de *mode-locking* et de *Q-switching* passif sont incompatibles avec des durées d’impulsions aussi longues, et il est difficile d’atteindre par *Q-switching* actif un taux de répétition dépassant 100 kHz [Pas08]



des principales caractéristiques de quelques modulateurs fibrés commerciaux. Le taux d’extinction est critique quand on considère le fonctionnement d’un amplificateur à fibre dopée Erbium. En effet, dans un tel amplificateur, la puissance de sortie *moyenne* qu’il est possible d’atteindre est limitée par la saturation du gain. Chaque fraction de puissance moyenne de sortie obtenue par amplification d’un signal hors impulsion réduit d’autant la puissance maximale des impulsions. Pour maximiser la puissance crête, il est donc important qu’en dehors du signal utile, la puissance optique qui entre dans l’amplificateur soit minimale. Pour cette raison, la technologie acousto-optique, qui offre des taux d’extinction de l’ordre de  $10^{-5}$  en configuration fibrée (contre  $10^{-2}$  pour un modulateur électro-optique), est à privilégier. En l’état actuel, cette technologie atteint des temps de montée de l’ordre de 20 voire 10 ns (c’est à dire, pour une impulsion gaussienne, une largeur à mi-hauteur d’environ 28 voire 14 ns<sup>5</sup>, ce qui est bien plus long que pour la technologie électro-optique, mais reste compatible avec la plage des durées acceptables déterminée plus haut, entre 6,85 ns et 68,5 ns.

Fabricant	Modèle	Technologie	Temps de montée (ns)	Taux d’extinction (dB)	Pertes d’insertion (dB)
EM4	EM417	acousto-optique	20	50	3
AA Optoelectronics	MT160-IIR10-Fio	acousto-optique	10	?	4
AA Optoelectronics	MT110-IIR10-Fio	acousto-optique	20	?	3,5
Gooch & Housego	M111-2J-F2P	acousto-optique	25	50	3,5
Thorlabs	LN56S-FC	electro-optique	0,034	20	4
Thorlabs	LN58S-FC	electro-optique	0,017	20	5,5
Thorlabs	EK702FC	commutateur	50 000	50	0,7

TABLE 7.1 – Caractéristiques principales de quelques modulateurs optiques fibrés commerciaux. (Les modulateurs électro-optiques fonctionnent sur le principe de l’interféromètre de Mach-Zehnder).

COMPROMIS ENTRE RENDEMENT ET DURÉE D’IMPULSION — Entre 14 ns et 68,5 ns, sur quel critère décider de la durée d’impulsion ? Comme nous l’avons vu, allonger la durée d’impulsion autorise un spectre plus étroit. Cependant, comme nous le verrons par la suite, plus le filtrage est étroit, plus sa stabilisation est critique. Mais surtout, à taux de répétition donné, la durée des impulsions détermine la puissance crête permise par l’amplificateur à fibre dopée Erbium. Comme nous l’avons déjà évoqué, le phénomène de saturation du gain dans un amplificateur à fibre dopée Erbium détermine une puissance *moyenne* de sortie limite  $P$ . La puissance crête  $\hat{P}$ , elle, est inversement proportionnelle au rapport cyclique  $\rho$  :  $\hat{P} = \frac{P}{\rho}$ . Or c’est la puissance crête qui entre en jeu dans le rendement du processus non linéaire de doublement de fréquence, toutes choses égales par ailleurs. Pour une bonne conversion du faisceau à 1550 nm en un faisceau de pompe à 775 nm, un petit rapport cyclique est donc à privilégier. Pour ce faire, vaut-il mieux diminuer la durée d’impulsion ou augmenter la période de répétition ?

Augmenter la période de répétition a pour effet secondaire, à nombre de photons produits par impulsion donné, de diminuer le débit de la source. Tant que la durée des impulsions reste compatible avec la largeur spectrale désirée, il est donc préférable de diminuer cette durée en priorité.

Par exemple, comme l’indique la Table 7.2, pour une durée de 25 ns, la largeur spectrale limite est de 36,8 MHz, ce qui est une finesse qu’on peut considérer comme satisfaisante par rapport à la plage 10 – 100 MHz. Pour comprendre ce tableau, rappelons que lors du processus de doublement de fréquence, la largeur en amplitude de l’impulsion à la longueur d’onde  $\lambda/2$

5. Pour une gaussienne, la relation entre le temps de montée de 10 % à 90 %  $t_r$  et la largeur à mi-hauteur  $\Delta t$  est d’environ  $\frac{\Delta t}{t_r} \approx 1,4$

est, pour un rendement suffisamment faible<sup>6</sup>, égale à la largeur en intensité de l'impulsion à la longueur d'onde  $\lambda$ , le processus étant alors quadratique avec l'amplitude de pompe à la longueur d'onde  $\lambda/2$ . La largeur spectrale  $\Delta\nu_F$  du filtrage est déterminée en fonction de la largeur spectrale  $\Delta\nu_P$  de la pompe à  $\lambda/2$  par la relation (7.1).

Étape	Largeur temporelle	Largeur spectrale	Larg. temporelle pour $\Delta t = 25$ ns (ns)	Larg. spectrale pour $\Delta t = 25$ ns (MHz)
Intensité à $\lambda$	$\Delta t$	$\Delta\nu = 0,44/\Delta t$	25	17,7
	↓ égal			
Amplitude à $\lambda/2$	$\Delta t$	$2\Delta\nu = 0,88/\Delta t$	25	35,4
	↓ $\times\sqrt{2}$	↓ $\times\sqrt{2}$		
Intensité à $\lambda/2$	$\Delta t/\sqrt{2}$	$\Delta\nu_P = \sqrt{2}\Delta\nu$	17,7	25
		↓ Rel. (7.1)		
Photons à $\lambda$	$0,68\Delta t/\sqrt{2}$	$\Delta\nu_F = \sqrt{2}\Delta\nu/0,68$	12	36,8

TABLE 7.2 – Largeurs totales à mi-hauteur, spectrales et temporelles, des impulsions à différentes étapes du montage. La relation d'incertitude entre  $\Delta\nu$  et  $\Delta t$  est  $\Delta\nu \cdot \Delta t = 2 \ln 2/\pi \approx 0,44$  en intensité et  $\Delta\nu \cdot \Delta t = 4 \ln 2/\pi \approx 0,88$  en amplitude. Pour les photons générés par fluorescence, on parle plutôt de temps de cohérence que de largeur temporelle. La relation entre la première et la deuxième ligne est valable dans le cas d'une génération d'harmonique faible (cf. note<sup>6</sup>).

LIMITES DE L'AMPLIFICATEUR À FIBRE DOPÉE ERBIUM — Lorsqu'on augmente la puissance crête en diminuant la durée des impulsions, il faut s'assurer qu'on n'atteint pas les limites de fonctionnement de l'amplificateur à fibre. En ce qui concerne notre matériel, d'une part la puissance moyenne d'entrée doit être supérieure à 1 mW, d'autre part la puissance crête ne doit pas dépasser un seuil au-delà duquel des effets non-linéaires dommageables risquent de se produire en raison de l'intensité crête importante qui parcourt la fibre dopée sur une longueur qui peut atteindre plusieurs dizaines de mètres. Pour la puissance d'entrée, compte tenu de la puissance de la diode laser DFB (100 mW), du rapport cyclique de modulation et de l'ensemble des pertes d'insertion, pertes aux raccords de fibre et prélèvement d'un éventuel signal de référence, le seuil de 1 mW n'est atteint que pour un rapport cyclique d'environ  $\frac{1}{20}$ . Nous avons travaillé avec le fabricant de l'amplificateur à fibre (IPG) pour que ce rapport cyclique entraîne des puissances crêtes tolérables par le matériel, dans un régime où les impulsions durent 25 ns : la puissance moyenne maximale à saturation est alors limitée à 5 W, soit 100 W de puissance crête.

6. « Faible » est entendu au sens de l'approximation d'une pompe non déplétée. En pratique, cette approximation reste tolérable tant que le rendement ne dépasse pas environ 60 %.

### 7.1.2.3 Conclusion sur les caractéristiques temporelles imposées et leurs conséquences sur les performances de la source

Les caractéristiques temporelles finales de la source sont maintenant fixées pour satisfaire l'ensemble des contraintes de principe et matérielles. Elles sont les suivantes :

- Une durée d'impulsion de 25 ns à mi-hauteur en intensité
- Un taux de répétition des impulsions de 2 MHz, correspondant au rapport cyclique  $\frac{1}{20}$  requis

En termes de performances de la source, pour les raisons évoquées plus haut, on a les limites fondamentales suivantes :

- Une largeur spectrale pour les photons jumeaux produits par la source d'au moins 36,8 MHz. On se propose en pratique de réaliser un filtrage effectif de largeur 40 MHz.
- Un débit de paires de photons de l'ordre de 20 kHz, en considérant environ 0,01 paires produites par impulsion afin d'obtenir une source de bonne qualité, selon les critères du Chapitre 5.

## 7.1.3 Solutions techniques retenues

### 7.1.3.1 Choix du cristal non linéaire pour la fluorescence paramétrique

Nous avons vu dans le Chapitre 6 qu'en chaque élément de volume du cristal, la probabilité qu'un photon de pompe se scinde en deux photons jumeaux est proportionnelle au carré de la susceptibilité non-linéaire  $\chi$ . Il est souhaitable d'en rechercher une valeur aussi grande que possible. Plutôt que la valeur  $\chi$ , on rencontre couramment la grandeur  $d$ , qui vaut  $\chi/2$  par convention.  $d_{xy}$  désigne une valeur de  $d$  pour l'interaction d'ondes de polarisations et de directions de propagation spécifiques par rapport à la structure du cristal (voir R.W. BOYD [Boy08]). D'après le comparatif présenté en Table 7.3, le niobate de lithium ( $\text{LiNbO}_3$ ) présente une très bonne susceptibilité non linéaire d'ordre 2  $d_{33}$ . Pour tirer partie de cette forte susceptibilité, les ondes en jeu dans le processus non linéaire doivent être toutes identiquement polarisées. Le niobate de lithium, surtout lorsqu'il est dopé à 5% d'oxyde de magnésium (5%  $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$ ) a également l'avantage d'avoir un seuil de dommage assez élevé, ce qui permet d'utiliser des faisceaux de pompe de forte intensité. Pour prendre un exemple proche de notre situation expérimentale, un faisceau d'une puissance de 100 W<sup>7</sup> focalisé avec un *waist* de 10  $\mu\text{m}$  atteint une intensité de 32 MW/cm<sup>2</sup>, qui reste bien inférieure au seuil de 200 MW/cm<sup>2</sup><sup>8</sup>. De plus, nous nous situerons en pratique dans des conditions de focalisation plus éloignées encore de cette limite.

Les valeurs indiquées dans la Table 7.3 sont des valeurs mesurées dans des conditions différentes de nos conditions expérimentales. Grâce à une règle phénoménologique énoncée par R.C MILLER [Mil64] (son indice «  $\Delta$  », voir aussi [GR66]) il est possible, à partir d'une mesure connue de la susceptibilité non-linéaire, d'en extrapoler la valeur à différentes températures et longueurs d'onde si l'on connaît la valeur de l'indice de réfraction du milieu dans ces conditions. Bien que l'utilisation de l'indice de Miller ait des limites (cf. [SKK<sup>+</sup>97, § H]), il peut être préférable d'utiliser cette valeur plutôt qu'une autre, rigoureuse mais mesurée dans des conditions expérimentales

7. Cette puissance correspond à la puissance crête fournie par notre amplificateur pour une durée d'impulsion de 25 ns et un rapport cyclique de 1 : 20

8. Le fait que les 32 MW/cm<sup>2</sup> soient donnés pour une impulsion de 10 ns et pas de 25 ns comme dans notre montage réduit cependant cette marge.

Matériau	Seuil de dommage ( $10^6$ W/cm $^2$ )	Coefficient NL	Valeur NL (pm/V)
5 % MgO :LiNbO $_3$	200	$d_{33}$	25
KNbO $_3$	?	$d_{33}$	19,6
KTiOPO $_4$ (KTP)	2	$d_{33}$	14,6
LiTaO $_3$	500	$d_{33}$	13,8
$\beta$ -BaB $_2$ O $_4$ (BBO)	5000	$d_{22}$	2,2
KH $_2$ PO $_4$ (KDP)	5000	$d_{36}$	0,39

TABLE 7.3 – Coefficients non-linéaire et seuils de dommage de différents cristaux non linéaires. Seul le plus grand coefficient non-linéaire est indiqué. Le seuil de dommage est exprimé pour des impulsions de 10 ns. Les valeurs sont mesurées à 1064 nm. (Source : SHOJI et al., 2002 [SK102, SKK<sup>+</sup>97] pour les coefficients non-linéaires ; <http://www.redoptronics.com> pour les seuils de dommage)

trop éloignées. À partir de mesures réalisées par SHOJI et al. [SKK<sup>+</sup>97] à trois longueur d'ondes différentes, et des coefficients de Sellmeier déterminés par GAYER et al. [GOS<sup>+</sup>08], on peut calculer la valeur de  $d_{33}$  pour différentes températures du cristal, à 1564 nm. Cette valeur extrapolée est représentée en Figure 7.3 (courbe rouge continue) à partir d'une mesure à 1064 nm (tirets noirs). On déterminera plus loin, pour chaque processus (doublement de fréquence, fluorescence paramétrique) la susceptibilité effective en fonction de la température d'accord de phase.

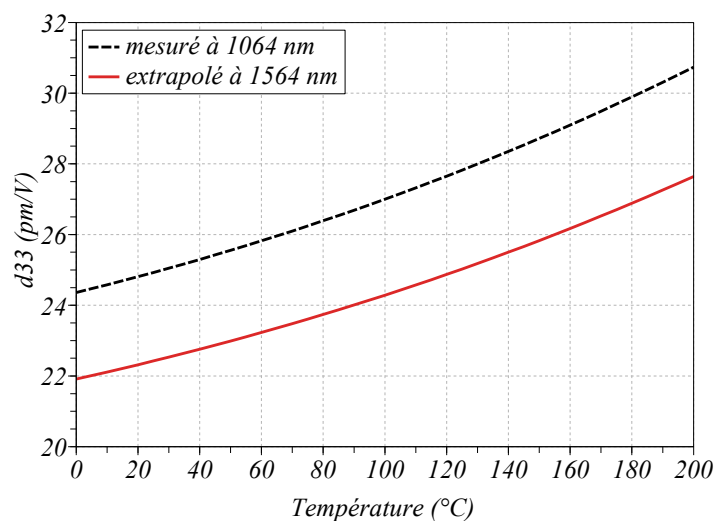


FIGURE 7.3 – Susceptibilité du LiNbO $_3$  dopé à 5 % de MgO en fonction de la température du cristal. Valeurs à 1564 nm calculée en utilisant l'indice «  $\Delta$  » de Miller, les équations de Sellmeier de GAYER et al. [GOS<sup>+</sup>08], et une mesure de  $d_{33}$  à 1064 nm et 28°C, réalisée par SHOJI et al. [SKK<sup>+</sup>97]

Dans des conditions d'accord de phase par biréfringence, la susceptibilité effective du niobate de lithium est cependant peu intéressante : à titre d'exemple, un calcul effectué par MYERS et al. [MEF<sup>+</sup>95] à 1064 nm indique une valeur de 4,3 pm/V seulement en type I. Afin d'utiliser la plus grande susceptibilité offerte par le matériau, et ainsi obtenir un bon rendement de processus non linéaire, on peut pratiquer une inversion périodique du signe de la susceptibilité non-linéaire, afin de réaliser un quasi-accord de phase. Nous avons déjà présenté cette méthode dans le Chapitre 2, § 2.3, et conclu que la susceptibilité non linéaire effective était réduite d'un facteur  $\frac{\pi}{2}$ . Toutefois, comme cela permet d'utiliser le plus grand coefficient non-linéaire disponible dans le cristal, toutes directions cristallographiques confondues, le quasi-accord de phase reste un meilleur choix. En effet, la valeur effective  $d_{\text{eff}} = \frac{2}{\pi} d_{33} = \frac{2}{\pi} \times 25 = 15,9$  pm/V reste supérieure aux meilleurs matériaux

autorisant un accord de phase par biréfringence. La susceptibilité diélectrique d'ordre 2, utilisée dans les équations du Chapitre 2, vaut donc  $\chi^{(2)} = 2d_{\text{eff}} = 31,8 \text{ pm/V}$ . Nous précisons les caractéristiques opérationnelles du cristal (dimensions de coupe, température de fonctionnement) lorsque nous analyserons les processus non-linéaires qui les utilisent.

### 7.1.3.2 Configuration du processus de fluorescence

Le choix du niobate de lithium périodiquement retourné (PPLN<sup>9</sup>) a également d'autres conséquences sur la configuration du processus de génération. L'effet du mode de séparation des photons jumeaux a été traité dans le Chapitre 5. Nous avons distingué le cas d'une séparation statistique sur deux voies A et B à l'aide d'un coupleur 50 %-50 % du cas d'une séparation directe d'un photon vers la voie A et l'autre vers la voie B, et quantifié les conséquences en termes de débit et de visibilité. Si le deuxième procédé a été montré comme préférable, il suppose que les photons soient distinguables sur un critère (longueur d'onde, polarisation, direction de propagation). Qu'en est-il du dispositif choisi ?

Tout d'abord, comme nous l'avons vu, pour profiter de la susceptibilité la plus élevée, les deux photons d'une paire sont générés avec la même polarisation, ce qui exclut de pouvoir les séparer l'un de l'autre vers deux directions distinctes grâce à un séparateur de polarisation. Ils sont indiscernables vis-à-vis de cette observable.

Pour cette même raison, le processus de fluorescence est essentiellement colinéaire, dans le sens suivant : Comme dans le cas de la biréfringence de type I (cf. § 2.5.3), et contrairement au type II, les cônes décrits par les vecteurs d'onde des deux photons sont coaxiaux. Ici, comme le photon de pompe possède la même polarisation que les paires générées – ce qui diffère du cas de la biréfringence de Type I – cet axe est confondu avec la direction du faisceau de pompe. Nous avons vu au Chapitre 2, § 2.5.2 que plusieurs configurations étaient possibles pour collecter les photons produits par fluorescence paramétrique : une collection colinéaire ou non-colinéaire, et dégénérée ou non-dégénérée.

La collection non-colinéaire, c'est à dire l'injection dans la fibre des photons se propageant dans deux directions différentes, peut être exclue pour deux raisons :

- D'une part, à largeur spectrale collectée égale, plus l'angle de déviation par rapport à l'axe du faisceau de pompe est grand, plus la fraction de fluorescence collectée à travers une pupille circulaire est petite (voir Fig. 7.4), causant une perte drastique de débit.
- D'autre part, la configuration purement colinéaire, elle, minimise le décalage transverse entre deux photons provenant de paires générées en deux points du cristal (voir Fig. 7.5), décalage qui est d'autant plus problématique que le cristal est long. Or il est souhaitable, afin d'optimiser le rendement de fluorescence d'utiliser un cristal de longueur suffisante.

On ne peut donc pas choisir de distinguer les photons d'une paire par leur direction de propagation.

Reste la possibilité de les distinguer en longueur d'onde, c'est à dire les produire de manière non-dégénérée, comme on peut le faire en adaptant les conditions de quasi-accord de phase (cf. Chap. 2 § 2.5.2).

En conclusion, dans la mesure où cela favorise à la fois le rendement, l'efficacité de collection dans la fibre et la facilité du filtrage, on ajuste les conditions d'accord de phase de façon à générer dans l'axe de propagation, des paires de photons dégénérées en fréquence, qui seront collectées par une fibre optique unique. Il sera donc nécessaire d'utiliser une séparation statistique vers les deux voies de détection, en utilisant un coupleur 50 %-50 %.

---

9. *Periodically Poled Lithium Niobate*

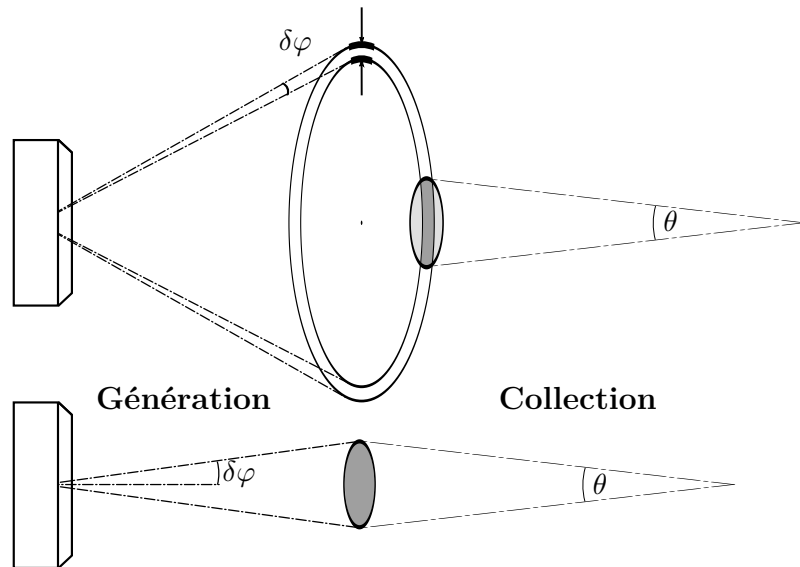


FIGURE 7.4 – Illustration de la différence d’efficacité de collection selon que la collection s’effectue en configuration colinéaire ou non-colinéaire. Avec une pupille circulaire, la meilleure efficacité est obtenue en configuration colinéaire.

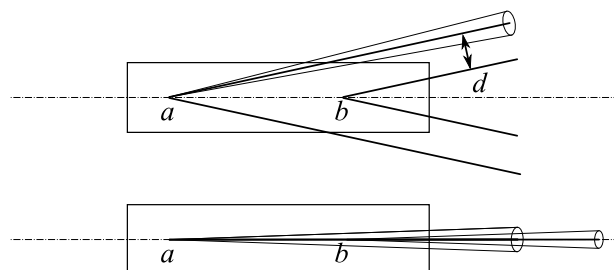


FIGURE 7.5 – Illustration du décalage transverse entre deux photons de paires générées en deux points du cristal

### 7.1.3.3 Le cristal de doublement de fréquence

Nous avons discuté du choix du cristal pour la fluorescence paramétrique, mais la question se pose également pour le cristal de doublement de fréquence. Il s'agit là uniquement d'obtenir le meilleur rendement possible, tout en acceptant une forte intensité de pompe à 1564 nm. Une grande susceptibilité non-linéaire, une grande longueur ainsi qu'un seuil de dommage suffisamment élevé sont tout aussi souhaitables que dans le cas de la fluorescence paramétrique. Nous nous tournerons donc également vers un cristal de PPLN. Bien sûr, puisqu'il s'agit d'un processus stimulé, le doublement de fréquence a lieu de façon colinéaire.

### 7.1.3.4 Filtrage spectral

La source est conçue pour atteindre une largeur spectrale de 40 MHz. Pour cela, nous utiliserons une cavité Fabry-Pérot adaptée. Il sera néanmoins nécessaire de ne retenir qu'une seule résonance, afin que le spectre des photons soit bien défini autour d'une seule longueur d'onde.

Depuis que l'industrie des télécommunications optiques fait couramment usage des amplificateurs à fibre dopée Erbium pour régénérer les signaux, un système de multiplexage dense en longueur d'onde s'est généralisé dans la bande C (1530 – 1565 nm), qui est la bande passante de ce type d'amplificateurs. La finesse et la stabilité croissantes des lasers et autres matériels optiques utilisés, associées à la baisse des coûts, ont permis de diviser successivement cette bande en canaux larges de 200 GHz, puis 100, 50, 25 voire 12,5 GHz, centrés sur des fréquences standardisées par l'ITU (*International Telecommunication Union*). Ce système est appelé DWDM (pour *Dense Wavelength Division Multiplexing*). L'industrie a développé une batterie de composants fibrés performants adaptés à ce système, comme des multiplexeurs ou des filtres spectraux. Parmi eux, un composant « filtre DWDM Add/Drop » — que nous appellerons pas la suite simplement « filtre DWDM » — permet de séparer un signal de spectre large en sa composante correspondant à un canal ITU donné sur une voie, et le reste du signal sur l'autre. En ce sens, il fonctionne en mode « Drop ». Il peut également servir à multiplexer un canal ITU dans un signal plus large (mode « Add »).

Par leur maturité industrielle, de tels composants sont relativement stables, peu coûteux, d'utilisation simple, et performants. En particulier, comme l'illustre une mesure effectuée sur un de ces filtres DWDM (7.6), en dehors de la bande passante la transmission est très faible sur une largeur spectrale appréciable.

Ainsi, en positionnant un pic de résonance Fabry-Pérot de largeur à mi-hauteur  $\delta\nu$  dans la bande passante du filtre DWDM et en s'assurant que les pics voisins en sont situés en dehors, il est possible de réduire la largeur spectrale de la fluorescence à  $\delta\nu$ .

L'isolement d'une seule résonance Fabry-Pérot dans la bande passante du filtre DWDM suppose que l'intervalle spectral libre de la cavité Fabry-Pérot soit supérieur à la demi-largeur du filtre DWDM. Par exemple, si ce dernier est conçu pour un système de multiplexage dense à canaux de 100 GHz, il est spécifié pour être isolé suffisamment d'un canal adjacent de même largeur et centré 100 GHz de part ou d'autre de sa propre fréquence. Une mesure, plus détaillée que la précédente, sur le filtre DWDM de référence (7.7) indique que sa réjection atteint  $-20$  dB en bord de canal, c'est à dire à 50 GHz de part et d'autre de la fréquence centrale. Une cavité Fabry-Pérot d'ISL 50 GHz dont une résonance est centrée sur le filtre DWDM verra donc ses pics voisins réjectés à hauteur de  $-20$  dB. Les pics plus éloignés le seront davantage, du moins dans la bande où le filtre DWDM a des caractéristiques connues (de fait, une transmission inférieure à  $-40$  dB).

Il reste à réaliser une cavité Fabry-Pérot d'ISL proche de  $\Delta\nu = 50$  GHz et de largeur de pic  $\delta\nu = 40$  MHz. La finesse associée est de  $\mathcal{F} = \Delta\nu/\delta\nu = 1250$ . Pour favoriser la stabilité, plutôt qu'une cavité constituée de deux miroirs, on utilise un étalon Fabry-Pérot, c'est à dire une lame

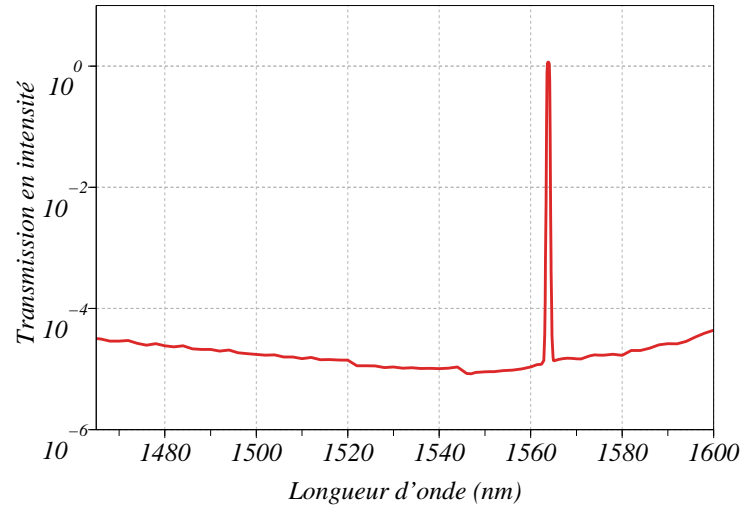


FIGURE 7.6 – Transmission d'un filtre DWDM

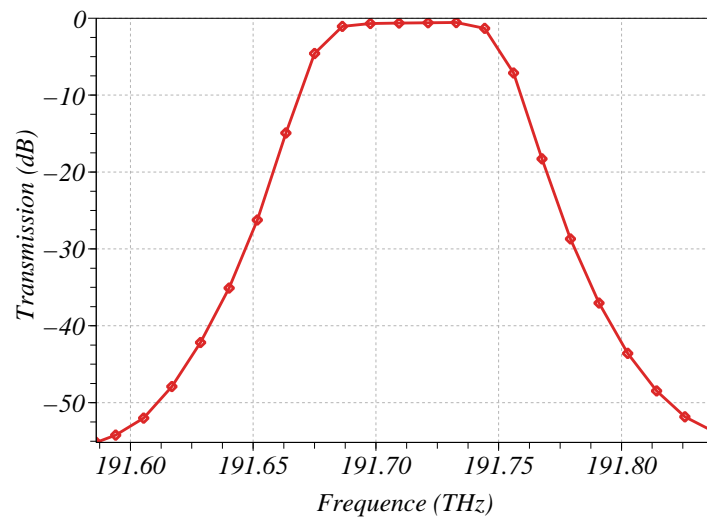


FIGURE 7.7 – Caractéristiques spectrales du filtre DWDM au voisinage de sa bande passante. La fréquence centrale de 191,713 THz correspond à une longueur d'onde de 1563,75 nm.



à faces parallèles traitées avec un dépôt de couches minces. On peut calculer que dans le cas idéal où le faisceau traversant l'étalon est parfaitement collimaté (onde localement quasi-plane), les caractéristiques de l'étalon doivent être les suivantes :

- Une épaisseur optique  $n \times e = 3.00$  mm,  $n$  étant l'indice de réfraction du milieu intracavité et  $e$  l'épaisseur géométrique
- Un coefficient de réflexion des miroirs de  $R = 99,75\%$

Alors, l'ISL et la finesse valent bien :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2ne} = 50,0 \text{ GHz} \quad \mathcal{F} = \frac{\pi}{2 \arcsin\left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}}\right)} = 1250$$

La longueur d'onde centrale du filtre DWDM étant fixe, il est nécessaire d'être en mesure d'accorder une des résonance de l'étalon Fabry-Pérot avec celle-ci. Pour cela, une plage d'accordabilité d'un ISL peut s'avérer nécessaire, qui peut être obtenue en faisant varier la longueur du chemin optique. On peut calculer que soit un changement de température de quelques degrés (indice  $n = 1,44$ ), soit un angle d'incidence de  $1,3^\circ$  suffisent à parcourir la plage d'accordabilité. À ces échelles de variation, les fluctuations peuvent être significatives pour une cavité constituée de deux miroirs ou pour un étalon en espace libre. Ainsi, nous nous sommes orientés vers un étalon Fabry-Pérot fibré qui présente plusieurs avantages :

- il est nativement fibré, donc s'intègre bien avec d'autres composants de l'industrie des télécommunications
- il ne nécessite pas d'alignement optique, donc son usage favorise la stabilité et la reproductibilité
- l'enceinte du milieu intracavité est de petit volume, donc homogène et efficacement asservie en température

Ces avantages concourent à une stabilité globale suffisante pour nos exigences, tout en assurant l'accordabilité en température. Toutefois, cette conception présente un autre inconvénient : les pertes d'insertion peuvent très difficilement être inférieures à  $-1,5$  dB, c'est à dire une transmission maximale de 70 %, là où celle d'un étalon associé à un faisceau de bonne qualité peut dépasser 99 %. Le choix d'un étalon Fabry-Pérot fibré, s'il nous permet d'assurer une stabilité sans quoi les mesures seraient impossibles, réduit la qualité de celles-ci en contrepartie.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne nous intéresserons pas uniquement à des photons de largeur spectrale 40 MHz, valeur qui est l'objectif de la source en terme de finesse. Nous aurons l'occasion d'effectuer des mesures dans des conditions de filtrage différentes, en utilisant le matériel listé dans la Table 7.4.

Matériel	Bande passante à -3 dB	Intervalle spectral libre
filtre DWDM canal ITU n° 17 (191,70 THz)	73 GHz	N.A.
étalon Fabry-Pérot espace libre	1,59 GHz	50 GHz
étalon Fabry-Pérot fibré	24 MHz	5,12 GHz
étalon Fabry-Pérot fibré	40 MHz	40 GHz

TABLE 7.4 – Caractéristiques du matériel utilisé pour le filtrage spectral de la source

## 7.2 Montage de base en espace libre

### 7.2.1 Caractéristiques du faisceau de pompe à 1564 nm

Les caractéristiques du faisceau de pompe à 1564 nm produit par l'amplificateur dopé Erbium sont essentiellement liées aux conditions de saturation du gain et aux conditions de collimation.

L'amplificateur, conçu par la société IPG d'après notre cahier des charges, produit une puissance de 5 Watts lorsqu'il est injecté avec une puissance de 1 mW en entrée, ce qui est le cas après toutes les étapes de mise en forme temporelle du signal et le prélèvement d'un signal de référence susceptibles d'être utilisé par la suite (voir Fig. 7.2 p. 151).

Cette puissance optique de 5 W est guidée en sortie par une fibre monomode PANDA à maintien de polarisation, de diamètre de mode spécial<sup>10</sup> de 14  $\mu\text{m}$  afin de diminuer les effets non-linéaires indésirables susceptibles de survenir en raison de la forte intensité présente sur la grande longueur de fibre. La lumière est collimatée par une lentille de 9,2 mm de manière à ce que le faisceau ait un rayon à  $1/e^2$  en intensité (*waist* de 0,65 mm. Le facteur de mérite du faisceau est de  $M^2 = 1,05$ , c'est à dire de profil très proche d'un réel profil gaussien.

Le fabricant mentionne la présence à hauteur de moins de 10 mW d'un signal résiduel à 980 nm, qui est la longueur d'onde à laquelle est pompé le processus d'amplification par dopage Erbium. Nous éliminerons ce résidu après le processus de doublement de fréquence.

### 7.2.2 Génération de seconde harmonique

Nous allons maintenant étudier le processus de doublement de fréquence qui permet de produire le faisceau à 782 nm pompant la génération paramétrique des paires de photons jumeaux. Nous nous baserons sur les résultats généraux du Chapitre 2. La Figure 7.8 représente de cette partie du montage.

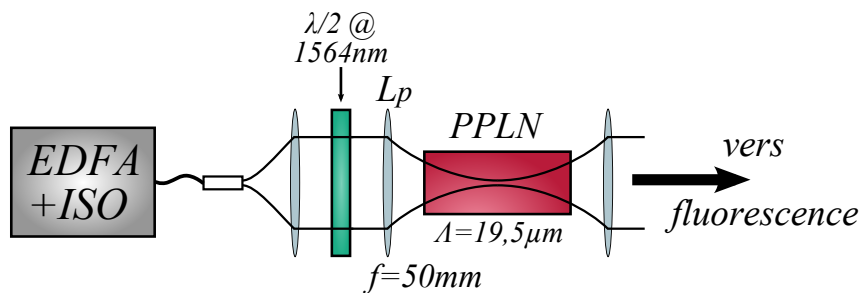


FIGURE 7.8 – Schéma du montage de doublement de fréquence pour produire le faisceau de pompe à 782 nm de la fluorescence paramétrique.

#### 7.2.2.1 Accord de phase

La caractérisation spectrale du filtre DWDM utilisé (Fig. 7.7) indique que celui-ci est centré sur une fréquence de 191,713 THz, soit une longueur d'onde de 1563,75 nm, ce qui est très peu différent de la fréquence exacte du canal ITU n° 17 (191,700 THz soit 1563,86 nm) : un écart de 18 % de la largeur à  $-3$  dB du filtre<sup>11</sup>

10. Une fibre monomode standard en télécommunications, comme la Corning SMF-28 possède un diamètre de mode de 10,4  $\mu\text{m}$

11. Cet écart peut en partie s'expliquer par une calibration imparfaite du spectromètre utilisé pour caractériser le filtre DWDM.

À partir d'un processus dégénéré à la longueur d'onde centrale précise du filtre DWDM, nous appliquons la méthode du quasi-accord de phase vue au Chapitre 2, § 2.3. Les formules de Sellmeier [GOS<sup>+</sup>08] qui donnent la variation en longueur d'onde et en température de l'indice de réfraction du cristal utilisé (5%MgO :PPLN), indiquent que pour que la température du cristal soit acceptable (entre 40° et 200°), la période de retournement doit être choisie entre 19,1 et 19,7  $\mu\text{m}$ . Nous avons choisi d'utiliser un cristal de période de retournement 19,5  $\mu\text{m}$  car cette valeur est standard pour HC Photonics Corp., le fabricant de PPLN que nous avons sélectionné. La température de fonctionnement est alors proche de 102°. Puisque la théorie (cf. Chap. 2, § 2.4) nous apprend que le rendement augmente toujours avec la longueur du cristal — qu'on raisonne en ondes planes ou en faisceaux gaussiens — nous choisissons la plus grande longueur disponible<sup>12</sup>, à savoir 2 cm.

Cependant, comme nous l'avons vu (cf. Chapitre 2, § 2.4), pour des faisceaux gaussiens focalisés le désaccord de phase ne doit pas être totalement compensé si on cherche à obtenir un processus optimal. Si on note  $\Delta k$  le résidu de désaccord de phase non compensé par la période de quasi-accord de phase, les conditions optimales sont obtenues pour  $\Delta k = 3,2/L$  où  $L$  est la longueur du cristal. La période de retournement nécessaire est donc très légèrement différente, mais il suffit d'adapter la température du cristal pour obtenir la bonne valeur de  $\Delta k$  :

Nous avons représenté sur la Figure 7.9 le rendement d'harmonique en fonction du désaccord de phase et du degré de focalisation. Mais connaissant les coefficients de Sellmeier en température du matériau et la longueur du cristal, nous avons exprimé ces deux paramètres en fonction des grandeurs expérimentales associées : Température et waist de la pompe, respectivement. Ainsi, nous connaissons maintenant les réglages permettant d'atteindre les conditions optimales.

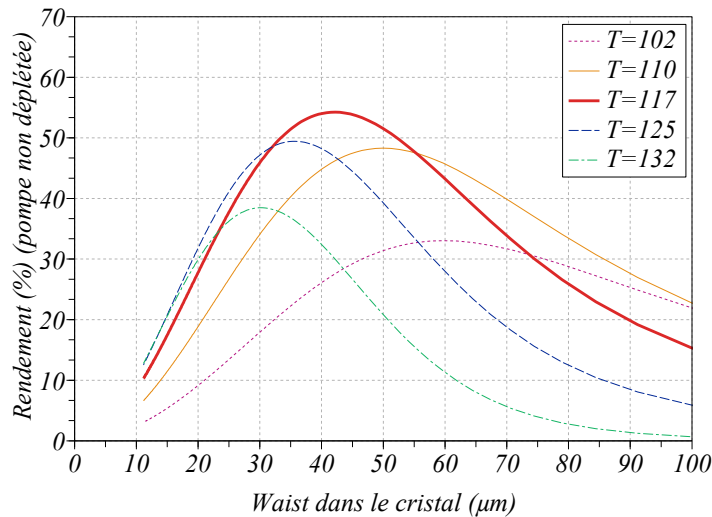


FIGURE 7.9 – Evolution du rendement d'harmonique en fonction des paramètres physiques  $w_0$  (*waist* du faisceau dans le cristal) et  $T$  (température du cristal). Calcul réalisé en faisceaux gaussiens et dans l'approximation d'une pompe non déplétée. Le maximum est atteint pour les conditions de Boyd & Kleinman  $\frac{L}{2z_R} = 2,84$  et  $\Delta k L = 3,2$ , c'est à dire  $w_0 = 42 \mu\text{m}$  et  $T = 102^\circ$

Tout d'abord, remarquons que la température de 102° annulant totalement le désaccord de phase est bien, comme nous venons de le voir, non-optimale. L'optimal est en théorie atteint pour une température de 15° supérieure, soit 117°. Le waist correspondant est en conséquence lui aussi différent du cas où  $\Delta k = 0$ , à savoir 42  $\mu\text{m}$  au lieu de 60  $\mu\text{m}$ .

12. Depuis, la société HC Photonics propose des cristaux de longueur 5 cm

Le waist optimal ainsi déterminé impose une valeur déterminée pour la lentille  $L_p$  (cf. Fig. 7.2). Le rayon à  $\frac{1}{e^2}$  du faisceau à 1564 nm étant de 0,65 mm en sortie du collimateur de l'amplificateur, un simple calcul de conjugaison de faisceaux gaussiens indique que la focale permettant d'atteindre un waist de 42  $\mu\text{m}$  est de 55 mm. Cette focale n'étant pas disponible, nous choisissons une focale de 50 mm. Le waist vaut alors 38  $\mu\text{m}$ , ce qui correspond à un rendement réduit de moins de 2 % par rapport à la valeur optimale permise par un cristal de cette longueur.

La présence du cristal décale le foyer image de la lentille  $L_p$ . Ce décalage est numériquement évalué à 5,3 mm. Le centre du cristal est donc initialement positionné à 55,3 mm de la lentille  $L_p$ , mais les degrés de liberté mécaniques nécessaires sont prévus pour un ajustement fin.

### 7.2.2.2 Rendement

La puissance à 1564 nm fournie par l'amplificateur à fibre dopée Erbium n'a pas d'autre utilité que de pomper le processus de doublement de fréquence. Il est souhaitable d'en convertir le maximum pour obtenir la meilleure efficacité possible pour notre source très finement filtrée.

Remarquons cependant, à la lumière de ce que nous avons conclu dans le chapitre 5 à propos de la baisse de qualité de la source quand son débit augmente, qu'il est inutile d'augmenter indéfiniment la puissance du faisceau à 782 nm. Celle-ci doit être suffisante pour atteindre le débit de paires de photons souhaité, mais pas trop grande afin de ne pas pénaliser la visibilité à cause d'un nombre de paires de photons trop grand par impulsion. Néanmoins, il sera toujours possible d'atténuer le faisceau à 782 nm avant le processus de fluorescence paramétrique, afin de réduire le débit à la valeur optimale. À cet effet, on peut orienter la lame  $\lambda/2$  placée avant le cristal de doublement (cf. Fig. 7.8) pour réduire la composante de polarisation participant au processus non-linéaire.

La Figure 7.10 représente une mesure de la puissance de seconde harmonique mesurée dans les conditions de focalisation déterminées au paragraphe précédent (focale de 50 mm). On constate une forme similaire au carré d'un sinus cardinal prédit par la théorie en ondes planes (cf. Eq. 2.5), bien qu'elle en diffère légèrement en raison de l'abscisse exprimée en température (elle n'est linéaire avec le désaccord de phase qu'en première approximation) et de la forme gaussienne du faisceau.

La température permettant le désaccord de phase optimal n'est pas tout à fait de 117° comme le prédit la théorie, mais de 107°. On peut calculer qu'un tel écart peut correspondre à un pas de retournement différent de 0,15 % (19,53 au lieu de 19,5  $\mu\text{m}$ ), ou à un angle d'incidence du faisceau d'environ 3,2° par rapport au réseau de quasi-accord de phase. Étant données la tolérance sur la fabrication du cristal et l'incertitude expérimentale sur son positionnement, cette différence de température n'est pas inattendue. Il est également possible que les coefficients de Sellmeier soient légèrement inexacts dans les conditions où on les applique.

Lorsque l'on fait varier la puissance du faisceau de pompe à 1564 nm, le rendement évolue comme sur la Figure 7.11. Cette courbe tient compte de toutes les pertes en aval du cristal de doublement, y compris le système de filtrage sévère dont nous allons parler dans le paragraphe suivant et les éléments optiques du processus de fluorescence. La puissance mesurée est de 1,3 W, ce qui inclut les nombreux éléments en place entre la génération d'harmonique et le bolomètre. En réalité, pour la puissance maximale de sortie de l'amplificateur (4,9 W), la puissance d'harmonique atteint 1,5 W en sortie de cristal après un filtrage élémentaire. Le rendement atteint donc 30 %. Il est normal de ne pas parvenir au rendement théorique de 54 % puisque la pompe est déplétée. De plus, des imperfections expérimentales peuvent introduire des pertes, comme les réflexions sur les faces du cristal (bien que celles-ci soient traitées antireflets aux longueurs d'onde fondamentale et harmonique) ou sur les éléments optiques précédant la génération.

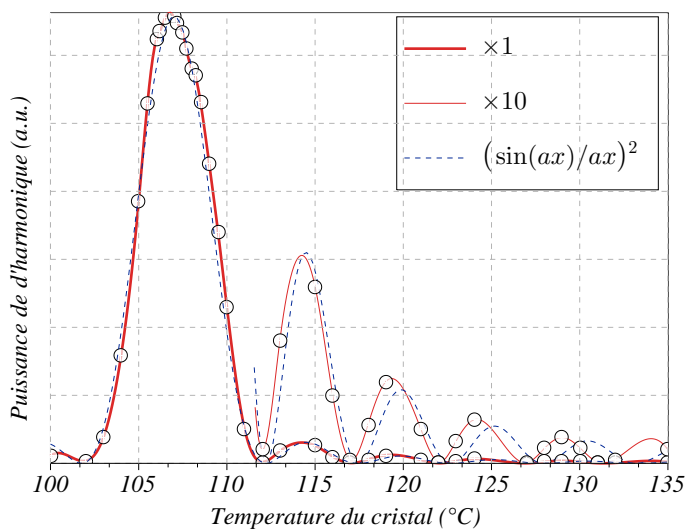


FIGURE 7.10 – Evolution du rendement de génération de seconde harmonique en fonction de la température du cristal. La courbe rouge continue est une interpolations par splines ; la courbe bleue pointillée un ajustement par le carré d'une fonction sinus cardinal.

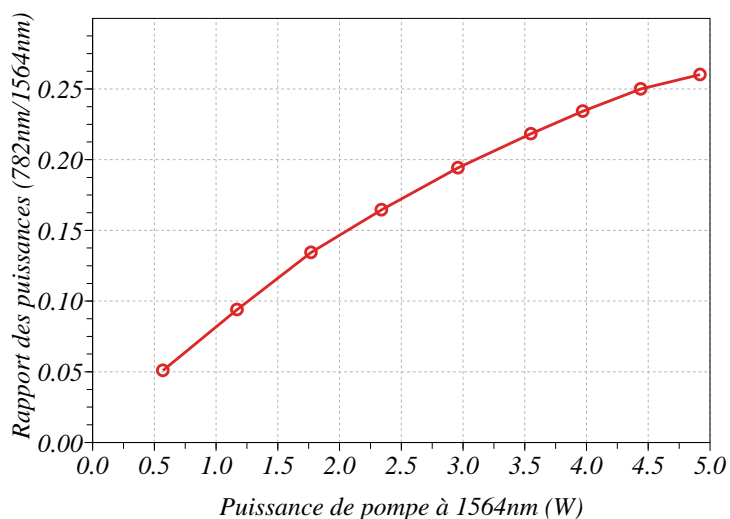


FIGURE 7.11 – Rendement mesuré pour le processus de génération de seconde harmonique, pour différentes puissances de pompe à 1564 nm.

### 7.2.2.3 Élimination des photons parasites

**Pompe à 1564 nm** — Puisque le rendement de génération de seconde harmonique n'est pas de 100 % mais de 30 %, une grande partie de la puissance du faisceau à 1564 nm accompagne le faisceau généré à 782 nm en direction de l'étape suivante qui est la génération paramétrique de paires de photons. La direction de collection de la fluorescence et l'axe des faisceaux à 1564 et 782 nm étant confondus, il est nécessaire d'isoler très efficacement les paires de photons jumeaux du reste du signal, qui constitue du bruit, afin de garantir la qualité de la source au sens du Chapitre 5. Le « résidu » – de 3,4 W – de pompe à 1564 nm contient environ  $3 \times 10^{19}$  photons par seconde, c'est à dire  $1,5 \times 10^{13}$  photons par impulsion, à comparer avec l'objectif de 0,01 paire de photons jumeaux par impulsion. Le problème de la séparation de ce résidu et des paires est particulièrement délicat puisque sa longueur d'onde correspond précisément au centre du spectre de ces paires. Il est donc exclu de discriminer les deux signaux par une méthode spectrale après le cristal de fluorescence. Le filtrage doit avoir lieu en amont du processus de fluorescence, en aval de l'étape de doublement de fréquence.

Il est nécessaire que le nombre par impulsion de photons de bruit à 1564 nm susceptibles d'être collectés dans la fibre soit négligeable par rapport aux 0,01 paires de photons jumeaux générées dans la bande étroite de 40 MHz. Le rapport bruit/signal, de  $\frac{1,5 \times 10^{13}}{0,01}$ , soit  $1,5 \times 10^{15}$ , implique un filtrage très efficace. Il est très difficile, à titre d'exemple, d'obtenir une réjection de plus de 99,9 % avec un simple miroir dichroïque à traitement de couches minces diélectriques. L'utilisation seule de filtres colorés est impossible puisque ceux-ci fonctionnent par absorption, et seraient donc détruits par la très forte intensité résultant d'une collimation d'un faisceau de 3,4 W avec un diamètre de l'ordre du millimètre. La solution adoptée pour le filtrage combine les deux technologies : une première étape de réjection par réflexion sur plusieurs miroirs diélectriques, puis une deuxième étape d'absorption de la puissance résiduelle jusqu'à disparition du bruit. Bien entendu, il s'agira simultanément de minimiser les pertes sur le faisceau utile à 782 nm.

Deux miroirs à couches minces diélectriques, dont la Figure 7.12 présente les caractéristiques, sont utilisés pour deux réjections successives par réflexion. Les dépôts de couches minces ont été réalisés par la société Kerdry d'après nos spécifications, et présentent à 1564 nm et angle d'incidence de  $45^\circ$ , un coefficient de réflexion de 99,9 % pour la polarisation utilisée (polarisation *S*, perpendiculaire au plan d'incidence – la réflexion est de 99,7 % pour l'autre polarisation). À la longueur d'onde de 782 nm, ce traitement réfléchit moins de 0,5 %. La face arrière, de même qualité de surface que la face avant, a subi un dépôt garantissant une réflexion à l'interface d'environ 0,5 % seulement à 782 nm. Ces caractéristiques font de cet élément optique un bon séparateur dichroïque : tout en transmettant plus de 90 % de la puissance à 782 nm, il en réfléchit 99,9 % à 1564 nm.

Deux de ces miroirs, dont le substrat est épais (6 mm) sont disposés successivement, symétriquement, de manière à réfléchir la longueur d'onde 1564 nm vers deux directions opposées l'une de l'autre (voir Figure 7.13). Ainsi, le deuxième miroir compense le décalage latéral et les éventuelles déformations subis par le faisceau à 782 nm en traversant le substrat du premier miroir. La puissance du faisceau à 1564 nm réfléchi par le premier miroir est dirigée vers un piège à lumière. La fraction de puissance transmise étant réduite à  $(1 - 0,999)^2 = 10^{-6}$ , la puissance résiduelle est donc de 3,4  $\mu$ W, qui est peu susceptible de détériorer des verres colorés absorbant à cette longueur d'onde.

En effet, pour finir d'atténuer le bruit à 1564 nm dans l'axe de propagation, on utilise un verre coloré transmettant au maximum la longueur d'onde 782 nm tout en absorbant au maximum à 1564 nm. Le verre Schott BG3 présente ces qualités : son coefficient de transmission par millimètre est maximal à 782 nm ( $> 99\%$ ) et est de 10 % à 1564 nm. Ainsi, pour des épaisseurs importantes, la transmission du faisceau à 782 nm reste bonne tandis que l'absorption à 1564 nm peut être très grande. Calculons l'épaisseur nécessaire pour atteindre, dans un premier temps, un rapport

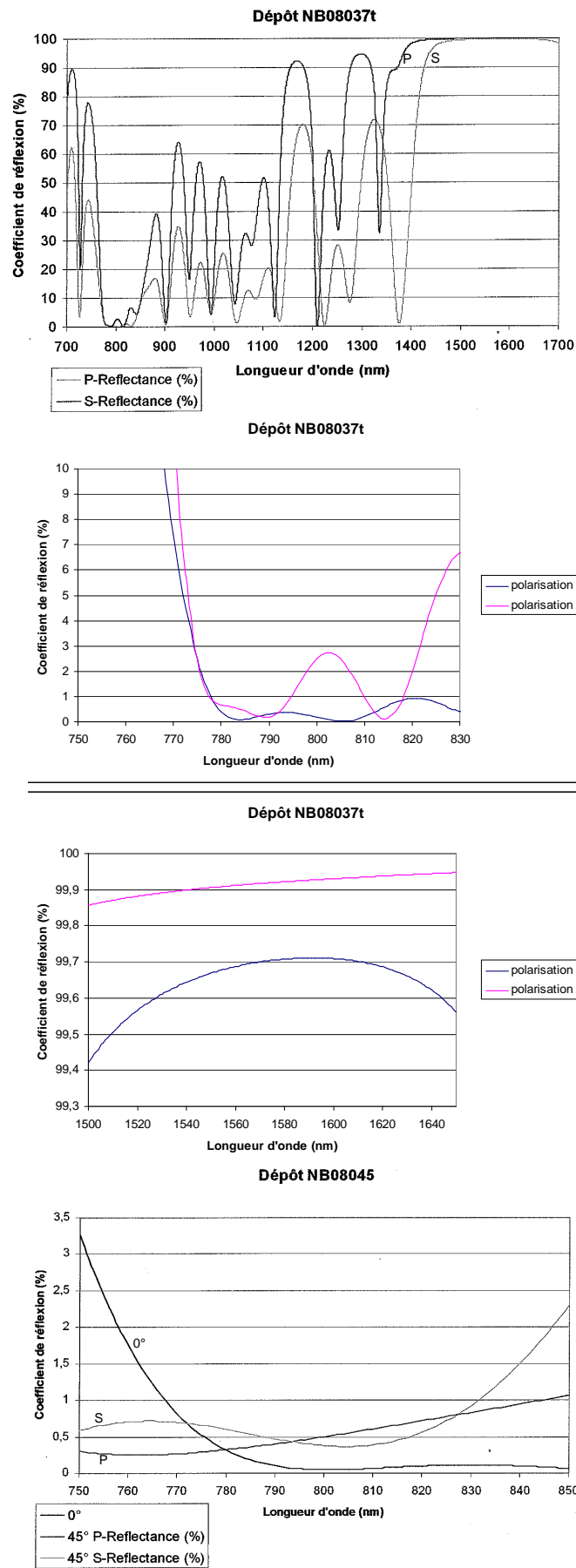


FIGURE 7.12 – Coefficients de réflexion pour les miroirs à couches minces diélectriques utilisés pour séparer les longueurs d'onde 1564 et 782 nm. En haut et au centre : Face d'incidence , en bas : Face arrière

signal/bruit de 1. Nous avons vu qu'il fallait atténuer le bruit d'un facteur  $1,5 \times 10^{15}$ . Les deux miroirs dichroïques apportent déjà une atténuation de  $10^6$ . L'atténuation du filtre BG3 doit donc atteindre  $1,5 \times 10^9$ , c'est à dire qu'il doit présenter une transmission totale  $\mathcal{T} = 1/(1,5 \times 10^9) = 6,6 \times 10^{-10}$ . Si l'on exprime l'épaisseur  $e$  du filtre en millimètres, et  $t_{1564} = 10\%$  la transmission à 1564 nm d'un millimètre de verre BG3, on a :

$$\mathcal{T} = t_{1564}^e$$

d'où

$$e = \frac{\ln \mathcal{T}}{\ln t_{1564}} = 9,18 \text{ mm}$$

Une épaisseur de 9,18 mm de verre BG3 serait donc suffisante pour réduire le bruit au niveau du signal dans l'axe de propagation. Nous utilisons en pratique cinq lames de verres carrées de 2 mm d'épaisseur et de 10 mm côté, collées les unes aux autres avec une colle d'indice adapté. Les deux faces en interface avec l'air sont traitées antireflet grâce à un dépôt de couches minces garantissant à 782 nm des pertes par réflexion réduites à 1%. Avec cette épaisseur, la transmission du signal à 782 nm est supérieure à  $0,99^{10} \approx 90\%$ , et les 0,82 millimètres supplémentaires portent le rapport signal/bruit à 6,6. Cela peut paraître peu, mais il s'agit du rapport des nombre de photons se propageant sur l'axe, indépendamment de leur couplage à la fibre. Ainsi, deux remarques s'imposent :

- D'une part, la collection par une fibre monomode est très délicate car il faut précisément imager le signal à collecter sur le cœur de la fibre. Ainsi, si le dispositif est optimisé pour collecter de façon optimale les paires de photons générées à l'étape de fluorescence paramétrique, il ne l'est pas pour le reste du signal, même si ce signal se propage selon le même axe. En d'autres termes, l'adaptation des modes à la fibre est optimisée pour la fluorescence, et ne l'est pas pour le bruit provenant du faisceau de pompe à 1550 nm, ne serait-ce qu'en raison du chromatisme des quatre<sup>13</sup> lentilles utilisées. Une grande proportion du bruit, qu'il est difficile d'évaluer, n'est donc pas collectée, et le rapport signal/bruit augmente d'autant.
- D'autre part, quand un faisceau traverse un élément optique quel qu'il soit (une lame, une lentille ou le milieu de propagation lui-même), une petite fraction de la puissance est toujours susceptible d'être diffusée. Les photons diffusés peuvent à leur tour se diffuser, se réfléchir à nouveau sur d'autres éléments de l'environnement du laboratoire. Ainsi il est possible, bien que peu probable, qu'un photon, par un chemin détourné, parvienne au niveau du cœur de la fibre de collection, avec un vecteur d'onde susceptible de s'y propager. Or, le photon diffusé ne subit pas toutes les étapes de filtrages situées sur l'axe, il est donc intéressant de comparer cette faible probabilité à l'atténuation que nous avons évaluée nécessaire sur l'axe, à savoir  $1,5 \times 10^{15}$ . Une probabilité par impulsion qu'un photon diffusé soit collecté aussi faible que 1 pour  $1,5 \times 10^{15}$  suffirait à ramener le rapport signal/bruit à 1. Toutefois l'expérience montre que, sans prendre de précaution particulière, le nombre de photons ainsi diffusés et collectés est de l'ordre de 0,001 par impulsion. En rendant la collection étanche à toute lumière hors axe (par un système de diaphragmes et de caches approprié), ce nombre diminue encore jusqu'à devenir très inférieur au bruit moyen du détecteur de photons. De plus, sauf à intégrer les mesures sur plus d'une minute, cette lumière parasite ne se distingue même pas de la variance du bruit des détecteurs.

**Autres sources de bruit** — Deux autres sources de bruit connues à cette étape du montage doivent être évoquées :

13. Collimation de l'harmonique puis, nous le verrons plus tard, focalisation dans le cristal de fluorescence, collimation après cristal de fluorescence, puis injection dans la fibre optique.



LES AUTRES PROCESSUS NON-LINÉAIRES — En présence d’ondes à 782 nm et 1564 nm, les seuls mélanges d’ondes possibles produisent les harmoniques d’ordre supérieur associés à  $\lambda = 1564$  nm : la longueur d’onde 782 nm elle-même ( $\frac{\lambda}{2}$ ), ainsi que 521 nm ( $\frac{\lambda}{3}$ ), 391 nm ( $\frac{\lambda}{4}$ ), etc. Les différents mélanges entre ces ondes (sommées, différences de fréquences) ne génèrent pas d’autres fréquences que celles de cette série. Avec une période de retournement du PPLN de 19,5  $\mu\text{m}$ , seule l’onde à 782 nm peut satisfaire les conditions d’accord de phase. Les autres processus sont donc fortement limités en rendement. La génération de troisième harmonique à 521 nm, qui est le processus le plus important après la génération de seconde harmonique, parvient toutefois à totaliser une puissance de 25 mW. Mais les miroirs diélectriques et les verres BG3 (ceux-ci transmettant 1 % par millimètre à 521 nm) la filtrent suffisamment pour ne causer aucun bruit mesurable. D’autant que les détecteurs sensibles à 1564 nm ne le sont pas à 521 nm. Aucune autre harmonique de fréquence détectable n’est suffisamment forte pour générer un bruit mesurable.

Remarquons qu’il peut être discutable que la qualité de la source dépende du détecteur utilisé. Dans le cas où le détecteur serait sensible à certaines de ces longueurs d’onde, il serait toujours possible d’ajouter un filtre coloré ou à traitement diélectrique approprié pour ces longueurs d’onde. Dans le montage présent, nous avons simplement constaté que ce n’était pas nécessaire.

LE RÉSIDU DE POMPE À 980 NM DE L’AMPLIFICATEUR À FIBRE DOPÉE ERBIUM — Comme nous l’avons dit précédemment (§ 7.2.1) cette lumière, à laquelle les détecteurs de photons sont sensibles n’est pas totalement supprimée en sortie de l’amplificateur, ni par le dispositif de filtrage de la pompe à 1564 nm. L’amplificateur étant pompé en régime continu, il est possible, en mettant en place un dispositif d’injection dans la fibre, d’en quantifier la quantité résiduelle en déclenchant les détecteurs de photons entre deux impulsions. Le nombre de photons mesuré ne peut correspondre qu’au bruit lié à cette pompe continue, car toutes les autres sources de bruit citées plus haut – mis à part l’éventuel bruit ambiant du laboratoire, que nous avons éliminé – sont liées au signal de pompe à 1564 nm, qui est impulsif. On mesure effectivement, avec le filtre DWDM placé sur le chemin du détecteur, de l’ordre de 0,001 photon par impulsion malgré le filtrage déjà mis en place. L’ajout de verre BG3 ayant peu d’influence – sa transmission à 980 nm est de 96 % par millimètre – on décide d’ajouter encore deux autres miroirs dichroïques, identiques à ceux déjà en place. On les positionne à incidence de 45° en polarisation  $P$ , c’est à dire parallèle au plan d’incidence, contrairement aux deux autres, qu’on avait positionnés en polarisation  $S$ . En effet, ces miroirs réfléchissent chacun environ 50 % à 980 nm pour cette polarisation, et seulement 20 % pour la polarisation  $S$ . La transmission totale de 25 % suffit à réduire ce bruit à un niveau comparable au bruit d’obscurité des détecteurs de photons. Le filtrage en aval de l’étape de fluorescence, que nous évoquerons plus loin (§ 7.2.3.2) et qui est situé sur le même axe de propagation, finira de supprimer tout résidu mesurable.

### 7.2.3 Fluorescence paramétrique

La fluorescence paramétrique est le processus non linéaire inverse de la génération de seconde harmonique, que nous avons introduit au Chapitre 2 (§ 2.5) : un photon de grande énergie, « de pompe » à la longueur d’onde  $\lambda_p$ , a une certaine probabilité de se scinder spontanément en deux photons de longueurs d’onde  $\lambda_s$  et  $\lambda_c$ , dits « signal » et « complémentaire » dont la somme des énergies individuelles vaut celle du photon de pompe.

La Figure 7.14 représente la partie du montage utilisée pour cette étape.

Dans la description quantique présentée dans le Chapitre 6, on explicite en détail les probabilités locales de génération spontanée, et on montre que les conditions d’accord de phase sont les conditions pour que ces probabilités locales s’additionnent de manière constructive sur le volume d’interaction.

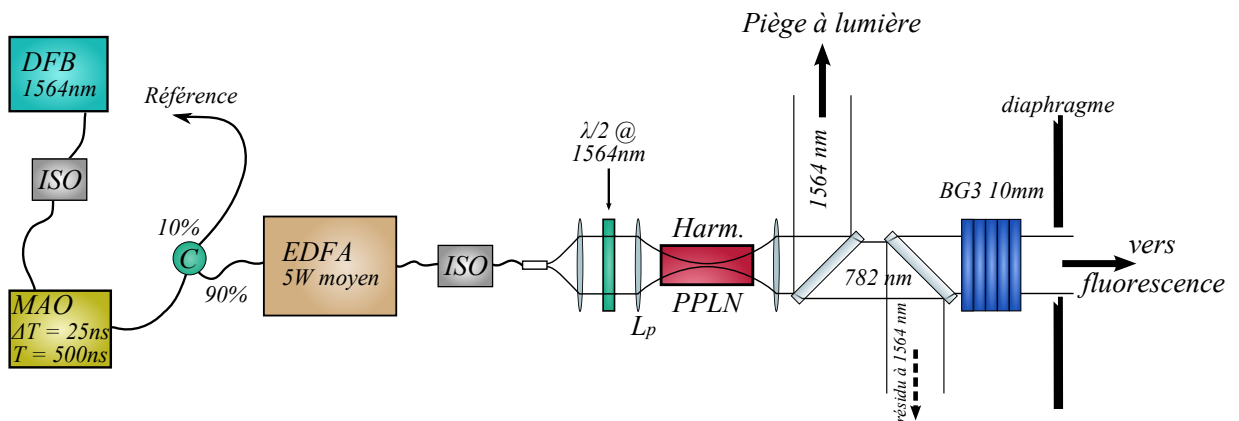


FIGURE 7.13 – Montage utilisé pour la production du faisceau de pompe à 782 nm avec système de filtrage. DFB : laser DFB ; MAOS : modulateur acousto-optique ; EDFA : amplificateur à fibre dopée erbium ; ISO : isolateur fibré ; C : coupleur fibré

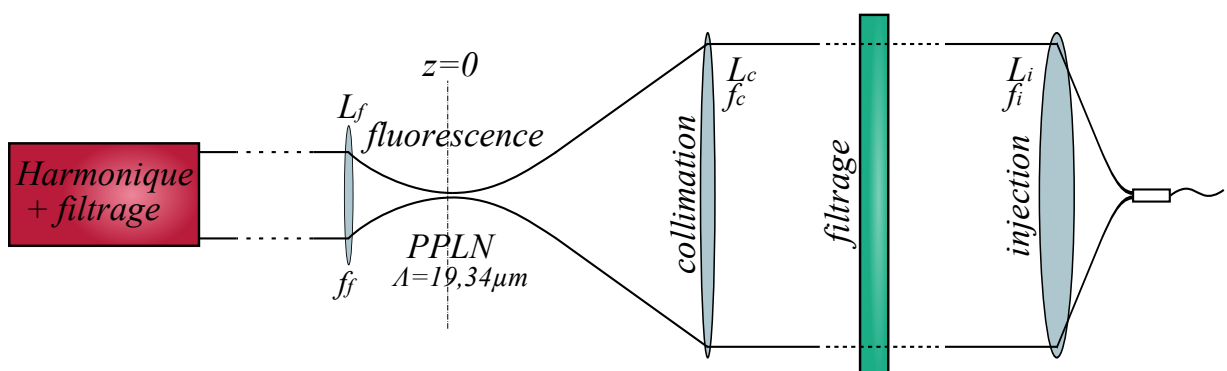


FIGURE 7.14 – Schéma du montage pour la génération de paires de photons jumeaux par fluorescence paramétrique.

Nous allons maintenant examiner comment se manifestent les conditions d'accord de phase sur le spectre de la fluorescence, quel est le rendement obtenu et comment isoler ces paires de photons jumeaux du reste du signal avant collection dans une fibre.

### 7.2.3.1 Accord de phase

Nous pouvons dans un premier temps déterminer une approximation des conditions d'accord de phase en raisonnant en ondes planes. Nous affinerons plus tard ces conditions, puisque nous avons vu au Chapitre 6 que le taux de coïncidences mesurées, donc la qualité de la source, dépend de ce paramètre.

Dans la limite où on s'intéresse à la fluorescence paramétrique dégénérée, les conditions d'accord de phase se rapprochent du cas de la génération de seconde harmonique (cf. § 7.2.2.1). Le calcul de la période de retournement d'un cristal non-linéaire est donc le même. Pour la fluorescence paramétrique, le cristal choisi a été réalisé sur mesure par HC Photonics avec un pas de  $19,34\ \mu\text{m}$  au lieu de  $19,5$ , afin de pouvoir utiliser une température de cristal plus élevée (en ondes planes,  $141,4^\circ$  au lieu de  $102^\circ$ ) réduisant les éventuels effets photoréfractifs. Afin de permettre une étude avec de plus grands diamètres de faisceau dans le cristal (focalisation faible), nous avons choisi une épaisseur de  $1\ \text{mm}$  (contre  $0,5$  pour le cristal de génération d'harmonique). Le taux de coïncidences générées par la source étant proportionnel à la longueur du cristal (cf. Chap. 6, § 6.2.7) nous avons choisi, comme pour la génération d'harmonique, une grande longueur de  $2\ \text{cm}$ .

La Figure 7.15 illustre la puissance de fluorescence produite et collectée dans une fibre monomode en fonction de la température du cristal. En-deçà de la température seuil, aucune fluorescence n'est présente. Très rapidement à partir du seuil, la puissance augmente pour atteindre son maximum. La puissance diminue ensuite plus progressivement.

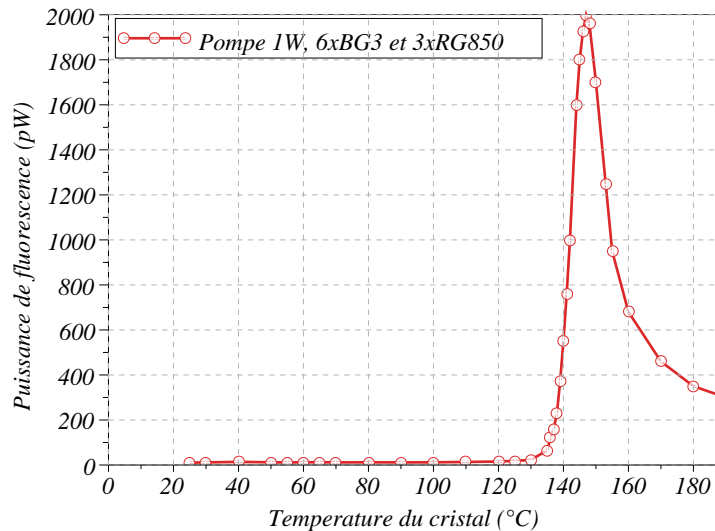


FIGURE 7.15 – Evolution de la puissance totale de fluorescence produite, collectée dans une fibre monomode et mesurée à l'aide d'un détecteur à photodiode InGaAs

Nous pouvons comprendre, en utilisant les résultats du chapitre 2, § 2.5.2 pourquoi cette diminution prend cette forme. En particulier, nous avons appliqué le calcul général de la Figure 2.7 (p. 45) à nos paramètres expérimentaux. La Figure 7.16 représente la levée de dégénérescence attendue lorsqu'on augmente la température du cristal.

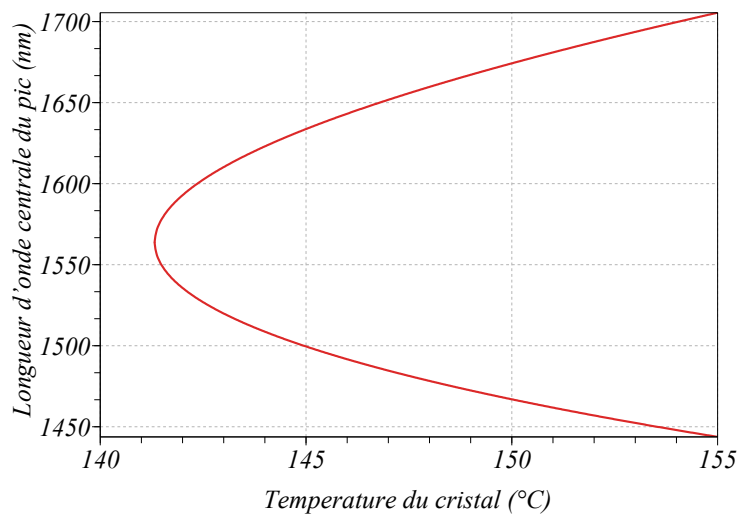


FIGURE 7.16 – Evolution du spectre de la fluorescence en fonction de la température du cristal

On observe bien expérimentalement cette levée de dégénérescence en fréquence lorsqu'on mesure le spectre des photons collectés dans une fibre monomode. Une vue d'ensemble de ces spectres est représentée sur la Figure 7.17. On constate une bonne superposition avec la simulation de la Figure 7.16, à condition de décaler le seuil de température à  $147^\circ$  au lieu de  $141,5^\circ$ . De plus, cette température correspond au maximum de puissance de fluorescence (voir Fig. 7.15). L'écart d'environ  $5^\circ$  entre la simulation et l'expérience peut être expliqué, tout comme l'écart constaté pour la génération de seconde harmonique, par une période de retournement réelle légèrement supérieure à celle spécifiée ou un angle de quelques degrés entre l'axe de propagation et le vecteur d'onde du réseau de retournement du cristal, ou encore une imprécision des coefficients de Sellmeier.

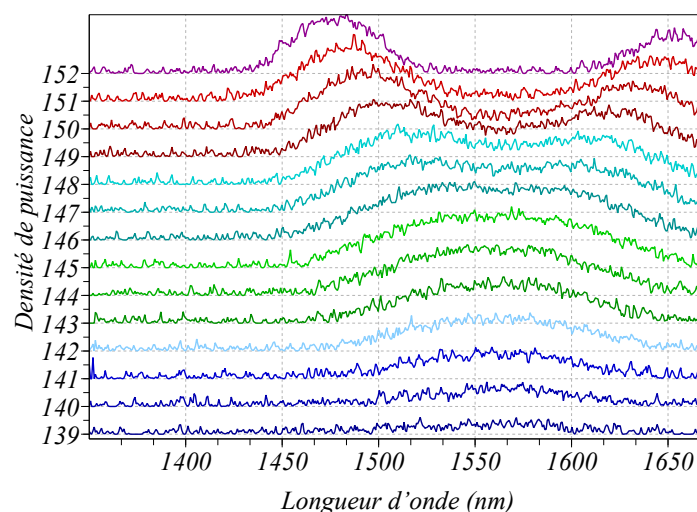


FIGURE 7.17 – Spectres de la fluorescence collectée pour différentes températures. L'échelle des ordonnées est arbitraire et le décalage entre chaque spectre est constant. Cette figure illustre l'écart progressif à la dégénérescence des longueurs d'ondes centrales de chaque pic.

Il apparaît clairement que la principale cause de diminution de la puissance de fluorescence

collectée lorsque la température du cristal augmente est la perte de sensibilité du détecteur, en particulier au-delà d'environ 1650 nm pour l'un des deux photons, ce qui correspond approximativement au seuil haut de sensibilité de l'InGaAs. D'autre part, la probabilité de génération paramétrique diminue lorsque l'écart à la dégénérescence augmente.

La puissance de fluorescence est de l'ordre de quelques nW ; le rendement est donc de l'ordre de  $10^{-9}$ , valeur qui prend en compte la collection dans une fibre optique monomode. La grandeur qui nous intéressera dans un premier temps est la densité de puissance au voisinage de la fréquence sélectionnée par un filtre spectral étroit. La Section 7.3 débutera par l'optimisation de cette grandeur.

En régime de comptage de photons, isoler le faible signal de fluorescence de la pompe et des autres sources de bruit est critique. Le paragraphe suivant détaille comment ce problème a été résolu.

### 7.2.3.2 Filtrage du bruit

**Photons du faisceau de pompe à 782 nm** — Bien que les détecteurs de photons uniques soient très peu sensibles à cette longueur d'onde, la forte puissance du faisceau de pompe à 782 nm est susceptible de causer des détections parasites en nombre significatif. En outre, ces photons peuvent contribuer à divers processus non-linéaires dans les différents éléments optiques qu'ils vont traverser et générer des signaux parasites. Bien sûr, les éléments traversés ne sont pas connus pour présenter de grandes susceptibilités non linéaires (BK7, silice fondue par exemple) donc la probabilité est extrêmement faible qu'un photon à 782 nm génère (dans un processus paramétrique par exemple) des photons détectables, c'est à dire dans la plage spectrale de sensibilité des détecteurs, dans le spectre passant de notre source ainsi que dans un mode couplé à la fibre monomode de collection. Toutefois, cette probabilité est à comparer avec le rapport du nombre de photons de pompe (plus de  $2 \times 10^{12}$  par impulsion et par Watt) et du nombre de paires de photons jumeaux visé (environ 0,01 par impulsion). Une probabilité aussi faible que 1 pour  $10^{14}$  suffirait alors à réduire le rapport signal/bruit de moitié.

Considération faite du problème des éventuelles détections parasites de photons, il va de soi qu'il est exclu de diriger une telle puissance optique vers les éléments optiques suivants et la fibre monomode de collection. Un filtrage dichroïque est nécessaire, qui peut être réalisé par le même élément que nous avons utilisé pour séparer ces deux mêmes longueurs d'onde après le processus de génération de seconde harmonique. Il s'agit du miroir à couches minces diélectriques dont les caractéristiques sont représentées en Figure 7.12. Le signal utile, ici au voisinage de 1564 nm, est réfléchi à hauteur de 99,9 % (polarisation *S*), tandis que le faisceau de pompe à 782 nm est transmis et dirigé vers un piège à lumière où il est diffusé jusqu'à extinction.

Les 0,5 % de la puissance à 782 nm qui ont été réfléchis par le miroir dichroïque peuvent encore causer des détections parasites.

Celles-ci sont supprimées en plaçant un second miroir dichroïque identique, ainsi que 4 mm de verre coloré Schott RG850. Ce verre est spécifié transmettre plus de 99,8 % à 1564 nm, et moins de 5 % à 782 nm par millimètre, soit respectivement 99,3 % et  $4,6 \times 10^{-6}$  pour 4 mm. Cependant, le verre n'étant pas traité antireflets à 1564 nm, des pertes aux interfaces s'ajoutent (4 % par interface<sup>14</sup>), soit une transmission à 1564 nm de 92 %.

Cependant, nous comprendrons au paragraphe suivant qu'il sera judicieux de remplacer les verres RG850 par des verres RG1000, aux caractéristiques moins optimales à ces deux longueurs d'onde, mais au spectre d'absorption plus large, ce qui permettra d'éliminer une autre source de bruit.

14. La transmission  $T$  vaut  $\frac{4n_{\text{air}}n_{\text{RG850}}}{(n_{\text{air}}+n_{\text{RG850}})^2}$ , avec  $n_{\text{air}} = 1$  et  $n_{\text{RG850}} = 1.5$  à 1564 nm

On s'aperçoit également que le filtrage mis en place pour éliminer les photons de pompe à 1564 nm permet d'éliminer le résidu de pompe de l'amplificateur (cf. p. 7.2.2.3).

**Bruit non identifié** — A ce stade, toutes les sources de bruit connues sont supprimées : la pompe à 980 nm de l'amplificateur à fibre dopée Erbium et le résidu de faisceau à 1564 nm utilisé pour pomper le processus de seconde harmonique l'ont été avant l'étape de fluorescence. Comme nous venons de le voir, dans les conditions de collection de la fluorescence, nous avons éliminé tout bruit issu du faisceau de pompe à 782 nm après son passage dans le cristal non linéaire de fluorescence. On pourrait donc s'attendre à ce que tous les photons collectés par la fibre lorsqu'on remet en place ce cristal soient des paires de photons jumeaux.

Une mesure du signal effectuée dans des conditions adéquates de génération et de collection – une recherche de conditions encore meilleures sera réalisée par la suite au § 7.3 – indique un spectre bien centré sur la fréquence de dégénérescence (1564 nm) et de largeur d'une centaine de nanomètres (voir Figure 7.18). Il s'agit là du spectre de fluorescence collectée, plus étroit que le spectre de fluorescence générée. Plus on s'éloigne du centre du pic, plus les pertes par couplage sont grandes, en raison des directions hors axe dans lesquelles les photons hors dégénérescence sont générés. Aucun photon de fluorescence ne devrait être détecté en dehors du spectre mesuré en Figure 7.18. De plus, on filtre ce signal à travers le filtre DWDM dont la transmission est connue (Fig. 7.6 p. 159) et les photons éloignés de la dégénérescence sont atténués fortement.

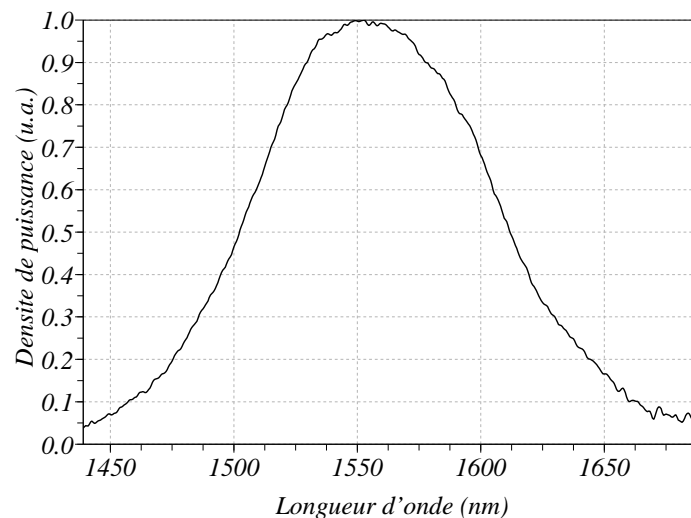


FIGURE 7.18 – Spectre de fluorescence collecté dans une fibre monomode

**RECHERCHE DE BRUIT HORS BANDE À L'AIDE D'UN COUPLEUR** — Pour vérifier l'absence de photons hors de la bande spectrale voisine de 1564 nm, on tire partie d'une caractéristique des coupleurs fibrés : le taux de couplage dépend de la longueur d'onde<sup>15</sup>. Un coupleur fibré spécifié 50%–50% à  $1564 \pm 50$  nm verra ses puissances de sortie déséquilibrées à des longueurs d'ondes plus éloignées.

15. Les deux fibres d'entrée sont partiellement fusionnées sur une longueur donnée, qui détermine l'échange d'énergie entre les modes des deux fibres. Le coupleur est conçu pour qu'au bout de cette longueur, le ratio de puissance désiré soit atteint. Mais il n'est possible de satisfaire ce ration que pour une longueur d'onde spécifiée. Plus la longueur d'onde est différente, plus le ratio résultant de cette longueur d'interaction est éloigné du ratio spécifié.

En effet, lorsqu'on réalise les deux mesures de la Figure 7.19, on observe un déséquilibre d'environ 400 Hz pour 2000 détectations par seconde en moyenne (c'est à dire 2200 Hz sur une voie et 1800 Hz sur l'autre) provenant du comportement du coupleur et non d'un déséquilibre de sensibilité des détecteurs. Si, par exemple, on supposait qu'à la longueur d'onde des photons de bruit, le coupleur était inefficace, c'est à dire s'il se comportait de façon à transmettre 100 % sur une sortie et 0 % sur l'autre, on conclurait à 400 Hz de bruit et  $2 \times 2000 - 400 = 3600$  Hz de photons de fluorescence, soit 1800 Hz sur chaque voie de détection. En pratique, on n'a pas accès au taux de couplage subi par les photons de bruit puisque leur longueur d'onde n'est pas identifiée. En constatant un tel déséquilibre, on ne peut qu'avoir une mesure du nombre de photons de bruit minimal. Le calcul ci-dessus correspond en effet à un cas extrême, qui minore l'évaluation qu'on peut faire du nombre de photons de bruit : ce nombre peut être bien supérieur si le coupleur ne présente qu'un faible déséquilibre à leur longueur d'onde. Comme deuxième exemple, si les photons hors bande subissaient un taux de couplage de 40 %–60 %, pour un même déséquilibre de 400 Hz pour 2000 Hz moyens, on conclurait à la présence d'autant de photons de bruit hors bande du coupleur que de photons dans la bande<sup>16</sup>.

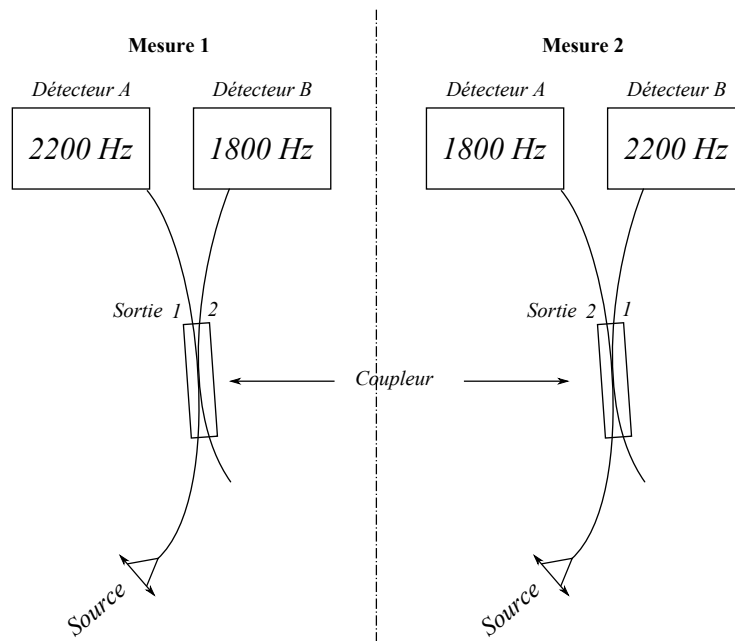


FIGURE 7.19 – Montage permettant de détecter la présence de photons à des longueurs d'ondes éloignées de 1564 nm, utilisant un coupleur fibré 50 %–50 %. La présence d'un déséquilibre entre les taux de comptage en A et en B traduit la présence d'*au moins* autant de photons à des longueurs d'onde situées en dehors de la bande de fonctionnement du coupleur.

Dès lors qu'un tel déséquilibre est constaté, la présence de photons indésirables est établie, et il reste à les identifier.

IDENTIFICATION — L'ajout d'un deuxième filtre DWDM ne fait pas chuter le déséquilibre observé en sortie du coupleur, or la transmission du DWDM est précisément connue (voir Fig. 7.6) pour être de l'ordre de  $10^{-4}$  jusqu'à 1460 nm au moins. La tendance est semblable jusqu'à 1380 nm

16. Si  $x$  est le taux de comptage associé aux photons dans la bande et  $y$  le taux de comptage associé aux photons hors bande, alors

$$\begin{aligned} 0.5x + 0.4y &= 1800 & \text{et} & & 0.5x + 0.6y &= 2200 \\ \rightarrow y &= 2000 & \text{et} & & x &= 2000 \end{aligned}$$

d'après un spectre en lumière blanche. Les photons parasites se situent donc à des longueurs d'onde inférieures.

Pour rechercher avec davantage de sensibilité et de résolution spectrale la présence de bruit, on met en place un montage utilisant un monochromateur et une mesure de la puissance avec le détecteur de photons. Le monochromateur est conçu pour fonctionner sur une plage de 800 à 1440 nm<sup>17</sup>. La Figure 7.20 montre une première mesure grossière (en trait fin noir) ainsi qu'une mesure plus détaillée sur certaines zones (en trait gros rouge). Aux longueurs d'onde présentant des pics de bruit, nous avons indiqué les valeurs de transmissions mesurées du filtre DWDM et d'un circulateur. Ce dernier, inséré après le composant DWDM, est simplement utilisé comme filtre.

On constate qu'un nombre important de photons est collecté en-deçà de 1380 nm, longueur d'onde où le filtre DWDM cesse d'être efficace. Par exemple, sa transmission à 1310 nm est de 51 %, et celle du circulateur est de 42 %, soit une transmission cumulée de 21 %. Le pic de bruit présent à cette longueur d'onde est donc particulièrement gênant. De même, autour de 1375 nm, le produit de la transmission reste de 5 %, mais le bruit est presque quatre fois plus intense, ce qui fait que l'effet est du même ordre. Ce sont ces sources de bruit qu'il est nécessaire d'éliminer en priorité.

On peut émettre plusieurs hypothèses sur l'origine de ces bruit :

- Pour les pics à 930, 1160 et 1180 nm, on peut penser à de la fluorescence des éléments optiques traversés, des mélanges non-linéaires d'ondes peu intenses non observables précédemment sans compteur de photons, ou des diffusions inélastiques (Brillouin, Raman) diverses.
- Pour les longueurs d'onde plus élevées, une partie provient du pied du spectre de fluorescence collectée qui pourrait être non totalement rejeté par le filtre DWDM, mais l'irrégularité du spectre semble, comme pour les pics à plus basse longueur d'onde, indiquer une origine spécifique.

SOLUTION — Le bruit étant spectralement identifié – son origine reste néanmoins floue – et présent hors de la bande de réjection idéale du filtre DWDM, nous l'éliminons à l'aide de deux éléments :

- Pour le pic à 930 nm, on remplace les filtres RG850 d'élimination de la pompe par des filtres RG1000, de longueur d'onde de coupure plus haute que 930 nm, dont la transmission à 1564 nm n'est que très légèrement inférieure (96 % au lieu de 99,3 % pour 4 mm d'épaisseur. La transmission à 930 nm est de 10 %
- Pour les autres pics, nous avons fait réaliser par la société LaserOptik un miroir à couches minces diélectriques présentant une réflexion maximale, à incidence normale, entre 1150 et 1450 nm, et minimale ( $\approx 96\%$ ) au voisinage de 1564 nm. Ses caractéristiques sont représentées en Figure 7.21

Finalement, le montage de filtrage du bruit après l'étape de fluorescence paramétrique correspond au schéma de la Figure 7.22. Tous les miroirs, sauf celui indiqué  $R_{\max}@782\text{ nm}$  sont de transmission maximale au voisinage de 1564 nm. De nombreux diaphragmes, dont certains sont en pratique des caches ou des boîtes étanches à la lumière, permettent d'éliminer les photons diffusés par les éléments optiques. Un emplacement est libre pour y disposer un éventuel autre élément, comme un filtre de mise en forme spectrale (étalon Fabry-Pérot par exemple). Nous discuterons de cette éventualité au Chapitre 8.

17. Les limites sont dues à la conception mécanique et au réseau de diffraction utilisé



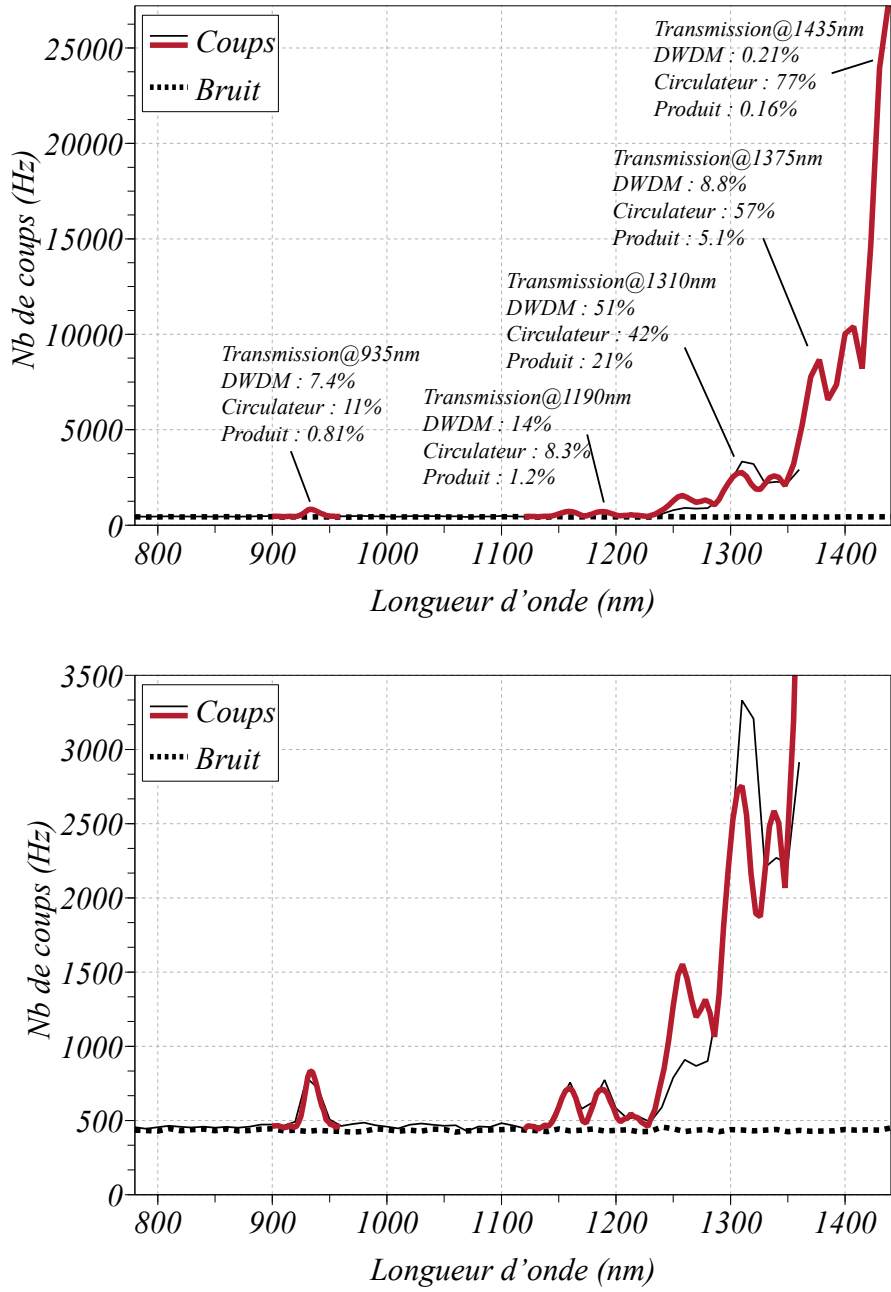


FIGURE 7.20 – Spectre de fluorescence collecté réalisé avec un monochromateur, avec mesure de la puissance au détecteur de photons. Mesure grossière (trait fin noir) et mesure détaillée (trait gros rouge). Le bruit de fond est représenté en pointillés. Nous avons indiqué les valeurs de transmissions du filtre DWDM et du circulateur aux longueurs d'onde présentant des pics de bruit.

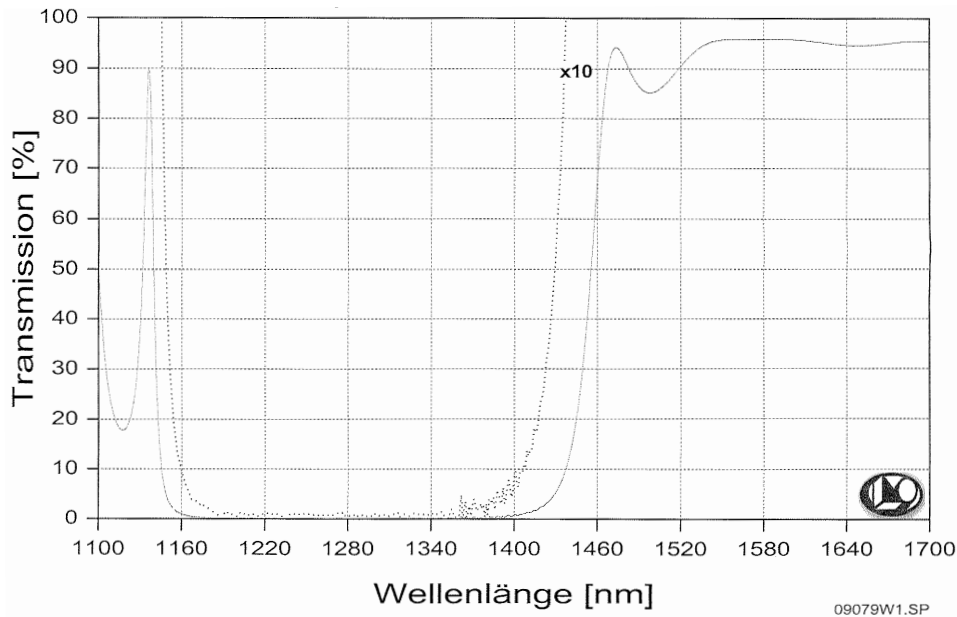


FIGURE 7.21 – Coefficient de transmission du traitement par couches minces diélectriques utilisé pour éliminer les photons de bruit hors bande.

## 7.3 Optimisation de la collection de la fluorescence dans la fibre

### 7.3.1 Principe de l'optimisation

Une fois le montage en place et le bruit parasite suffisamment écarté, on peut chercher à optimiser le signal de fluorescence. Les degrés de liberté expérimentaux peuvent être associés aux paramètres normalisés introduits dans la théorie du Chapitre 6 (§ 6.2.7). Ils sont les suivants :

- Les **conditions de focalisation** dans le cristal de PPLN : il s'agit des paramètres  $w_0$  (waist) et  $z_R$  (longueur de Rayleigh), qui sont liés par  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le cristal. Les paramètres normalisés associés sont le degré de focalisation  $\eta = \frac{L}{2z_R}$  et la position de focalisation  $\zeta = \frac{z}{z_R}$ . Ces paramètres sont fixés par le système optique en amont du cristal de fluorescence, en particulier la lentille de focalisation  $L_f$  (cf. Fig. 7.22).
- Les **conditions d'accord de phase** : le paramètre normalisé associé est  $\varphi_0 = \Delta k_0 L$ . Il peut être ajusté indépendamment des conditions de focalisation en faisant varier la température du cristal.
- Les **conditions de collection**, c'est à dire les conditions d'imagerie du signal de fluorescence dans la fibre optique : le paramètre normalisé associé est  $\rho = \frac{a_0}{w_0}$ , valeur du rayon  $a_0$  du mode transverse de la fibre imagé dans le cristal, normalisée au waist  $w_0$ . Il peut être ajusté indépendamment en changeant ou en déplaçant les lentilles  $L_c$  et  $L_i$  (cf. Fig. 7.22).
- La précision et la stabilité de la position de la fibre par rapport au système d'imagerie.

Nous mentionnons ce dernier point car, bien que l'injection dans une fibre monomode soit un problème courant, cette opération est délicate. Nous souhaitons insister sur le fait que, dans les mesures qui suivent, chaque point de mesure est réalisé après une optimisation préalable de l'injection dans la fibre. Ainsi, les conditions de focalisation, d'accord de phase et de collection peuvent être rigoureusement comparées.

La démarche pour optimiser le signal de fluorescence, consiste en deux opérations :

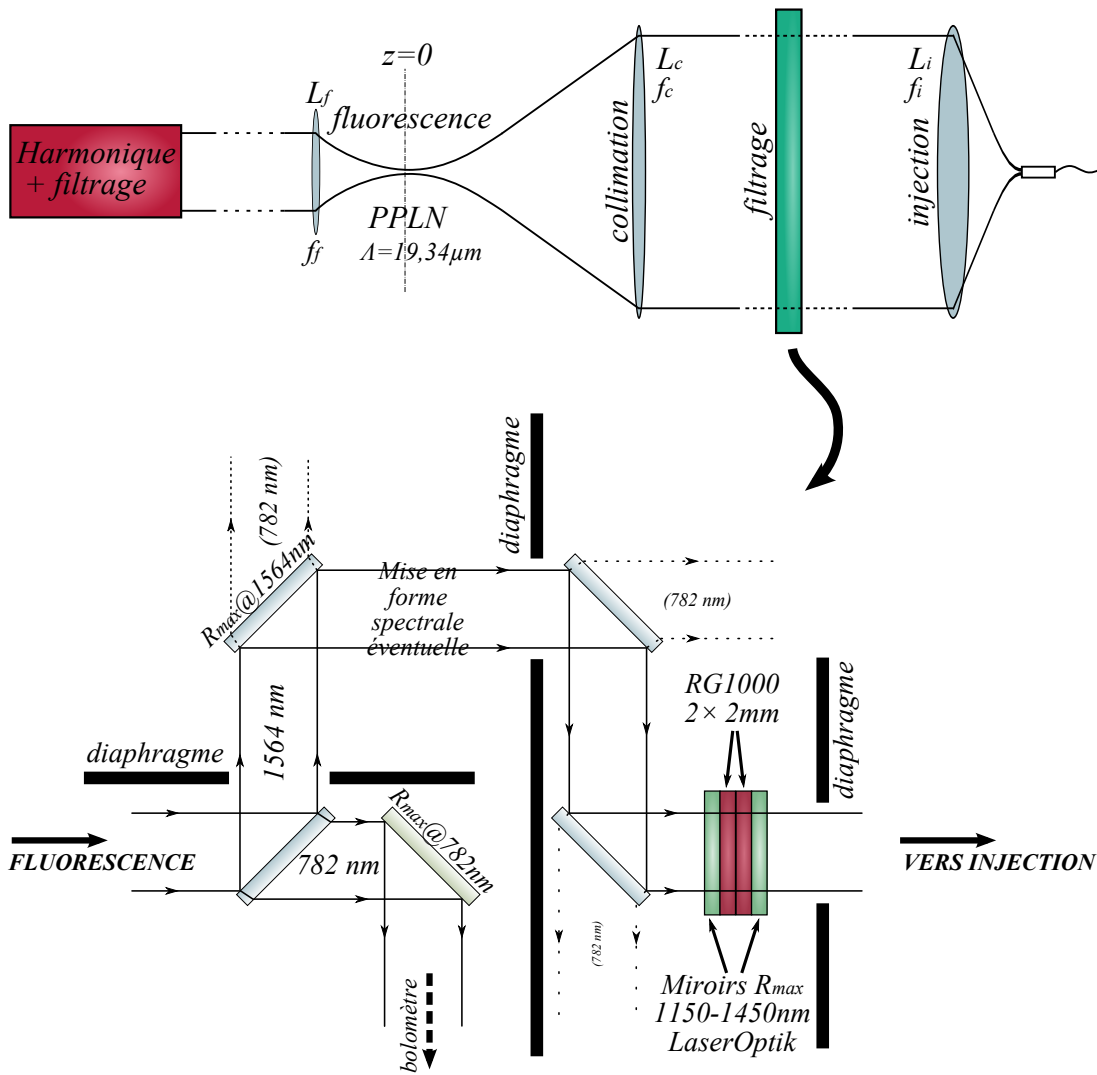


FIGURE 7.22 – Schéma du filtrage final après fluorescence permettant de supprimer tout résidu mesurable de photons parasites. La « mise en forme spectrale éventuelle » peut être, par exemple, un étalon Fabry-Pérot ou une lame traitée avec un dépôt de couches minces diélectriques. Aucun élément n'est nécessaire pour les mesures jusque la fin de ce chapitre.

- **Optimiser le rendement de fluorescence**, c'est à dire la puissance produite par le processus non-linéaire. Cette puissance peut-être évaluée dans la bande totale de fluorescence, mais la grandeur qui nous intéresse dans la perspective d'un filtrage étroit de paires dégénérées en fréquence est la densité spectrale de puissance au voisinage de la fréquence de dégénérescence. C'est donc sur ce dernier critère qu'il convient d'ajuster les conditions de focalisation dans le cristal, ainsi que les conditions d'accord de phase.
- **Optimiser le taux de couplage de la fluorescence** dans la fibre optique. Nous avons vu, de manière théorique (cf. Chap. 6, § 6.2.1), que les conditions optimales de couplage étaient quasiment identiques, que l'on considère une bande très étroite comme celle visée pour les applications (quelques dizaines de MHz) ou plus large comme celle correspondant au filtre DWDM (quelques dizaines de GHz). Pour plus de commodité, nous optimiserons donc la collection dans la fibre sur la base d'un signal filtré par le DWDM.

Rappelons que le paramètre critique pour la qualité de notre source est le taux de collection de la fluorescence, car les pertes réduisent la visibilité des interférences (cf. Chap. 5). Le critère de rendement, lui, est lié à l'efficacité de la source : à taux de génération de paires par impulsion fixé, plus le rendement est grand, plus le taux de répétition peut être élevé.

### 7.3.2 Optimisation grossière du taux de collection : mesure de puissance

Le rendement et le taux de couplage sont deux paramètres qui ne sont pas accessibles indépendamment par une mesure de puissance. Deux mesures de puissance  $P_1$ ,  $P_2$  effectuées dans des conditions différentes de focalisation (influant sur le rendement  $\varrho$  et le taux de couplage  $\mathcal{T}_C$ ) et de collection (influant sur  $\mathcal{T}_C$ ) ne permettent de déterminer que le produit  $\varrho\mathcal{T}_C$  :

$$\begin{aligned} P_1 &\propto \varrho_1 \mathcal{T}_{C_1} \\ P_2 &\propto \varrho_2 \mathcal{T}_{C_2} \end{aligned}$$

Cependant, à conditions de focalisation et d'accord de phase données, un changement des conditions de collection n'influe pas sur le rendement et celui-ci est fixé à  $\varrho_1$ . Dans ce cas, maximiser la puissance  $P_1$  dans la bande passante du filtre DWDM revient donc à maximiser la valeur de  $\mathcal{T}_{C_1}$ .

En revanche, si l'on change les conditions de focalisation et/ou d'accord de phase ( $\varrho = \varrho_2$ ), il est possible de maximiser  $\mathcal{T}_{C_2}$  en maximisant  $P_2$ , mais la comparaison des valeurs  $P_1$  et  $P_2$  ne donne pas d'indication sur la valeur relative de  $\mathcal{T}_{C_1}$  et  $\mathcal{T}_{C_2}$ , puisque  $\varrho_2 \neq \varrho_1$  par ailleurs. Nous verrons au Chapitre 8 (§ 8.6.2) une manière de maximiser  $\mathcal{T}_C$  de manière absolue.

Néanmoins, on peut considérer que la conséquence dominante d'un changement des conditions de focalisation est le taux de collection maximal que celles-ci permettent d'atteindre, pour des conditions de collection appropriées. Le rendement est, en comparaison, peu dépendant des conditions de focalisation. En effet, contrairement au processus de génération de seconde harmonique, où le rendement dépend de l'intensité du faisceau de pompe dans le cristal, le rendement de fluorescence paramétrique dépend de la puissance de pompe dans le cristal. On peut donc considérer que l'optimisation de l'ensemble des degrés de liberté expérimentaux sur la base du critère de puissance collectée constitue une étape préliminaire pertinente.

Remarquons que si les conditions d'accord de phase n'étaient pas, elles, influencées par les conditions de focalisation, on pourrait dire que ces dernières ne modifient pas le rendement et on aurait  $\varrho_1 = \varrho_2$ . Alors, une mesure de puissance suffirait à optimiser le système.

### 7.3.3 Étude des conditions expérimentales optimales

#### 7.3.3.1 Mesure de la densité spectrale de puissance

La Figure 7.23 représente les distributions spectrales de fluorescence obtenues pour différentes conditions de focalisation (lentille  $L_f$ ) et de collection (lentille d'injection  $L_i$  variable, la lentille de collimation  $L_c$  étant fixée à 150 mm pour ces mesures). Pour chaque combinaison de lentilles, le positionnement de la fibre et les conditions d'accord de phase sont optimisées afin de maximiser la puissance dans la bande du DWDM, c'est à dire la densité spectrale de puissance au voisinage de la dégénérescence.

On voit que les conditions de focalisation (lentille  $L_f$ ) déterminent la puissance maximale qu'il est possible de collecter. Il faut associer à ces conditions de focalisation les conditions de collection appropriées (lentilles  $L_c$  et  $L_i$ ) pour obtenir le dispositif optimal.

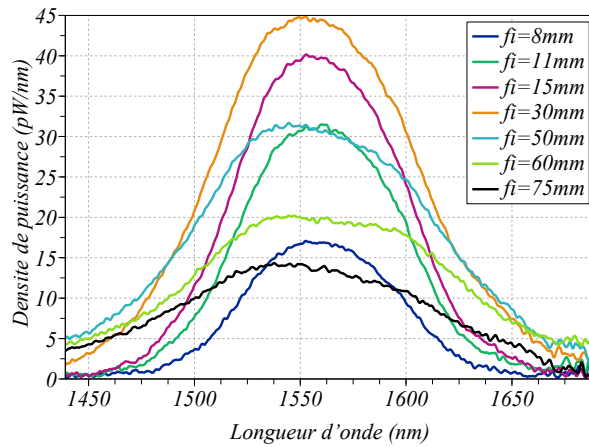
D'une manière générale, ces spectres montrent que de longues focales d'injection permettent de collecter un spectre plus large, mais moins efficacement. Cela s'explique par le fait qu'une longue focale permet de coupler une plus grande partie des photons collimatés dans l'ouverture numérique de la fibre, mais avec un *waist* qui peut être trop grand par rapport au cœur de la fibre. Inversement, pour les courtes focales, une plus grande puissance de fluorescence illumine le cœur, mais avec des vecteurs d'onde pouvant former un angle trop grand pour se coupler dans la fibre. La Figure 7.24 illustre cela de manière schématique. Il faut à la fois que  $\sin\theta$  ne soit pas plus grand que l'ouverture numérique de la fibre, et que le waist  $d/2$  ne soit plus grand que le rayon du mode propre transverse de la fibre. Dans nos conditions d'accord de phase, les photons collimatés sont d'autant plus éloignés de la dégénérescence qu'ils sont hors axe. Si l'on cherche à les coupler, en leur donnant un angle de convergence faible avec une longue focale  $L_i$ , le waist peut ne pas être assez petit pour coupler l'ensemble des longueurs d'onde, y compris celles situées à la dégénérescence, sur l'axe. Par ailleurs, en raison de la longueur d'interaction dans le cristal, comme nous l'avons déjà illustré par la Figure 7.5, les photons à la dégénérescence sont dispersés autour de l'axe. Trop restreindre le couplage des photons hors axe, avec une focale trop courte, peut globalement faire perdre plus de photons qu'on en gagne en diminuant le waist. Le compromis est d'autant plus difficile à réaliser que la longueur d'interaction dans le cristal est grande. Notons que le calcul des coïncidences réalisé au Chapitre 6 (§ 6.2) prend en compte la concurrence de ces deux effets.

#### 7.3.3.2 Comparaison avec la théorie

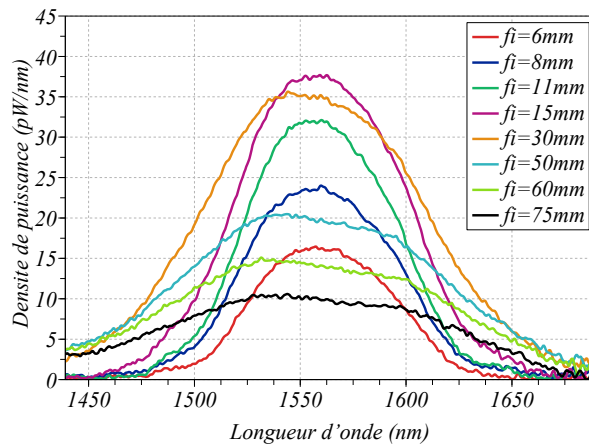
Nous avons rassemblé sur la Figure 7.25 les données des valeurs des puissances couplées dans la fibre optique en fonction des focales des lentilles de focalisation dans le cristal (différentes courbes sur la figure) et des focales d'injection dans la fibre optique (en abscisse).

On voit que pour une lentille de collection  $L_c$  de focale  $f = 150$  nm, la combinaison optimale des focales pour les lentilles de focalisation  $L_f$  et d'injection  $L_i$  est  $f_f = 30$  mm et  $f_i \approx 25$  nm. En raison de l'encombrement du support du cristal non-linéaire, il n'a pas été possible de réaliser la mesure pour une lentille de focalisation de plus courte focale. Cependant, nous allons maintenant voir que la comparaison avec la théorie indique que nous avons presque atteint la configuration optimale.

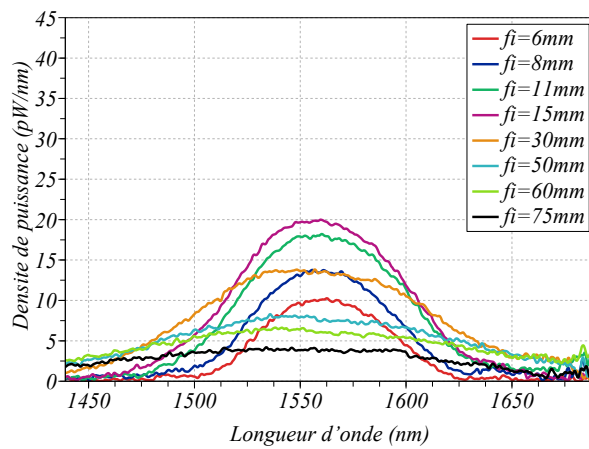
En effet, connaissant les autres paramètres du montage, nous pouvons exprimer les distances focales en termes des paramètres normalisés du Chapitre 6 (§ 6.2.7) et placer nos points expérimentaux sur la courbe théorique donnant la valeur optimale du paramètre normalisé  $\rho$  — c'est à dire le rayon image  $a_0$  de la fibre optique pour une longueur de cristal donnée  $L$  — en fonction du degré de focalisation  $\rho$ .



(a)  $f_i = 30$  mm



(b)  $f_i = 50$  mm



(c)  $f_i = 75$  mm

FIGURE 7.23 – Distribution spectrale de la fluorescence collectée, pour différentes lentilles de focalisation dans le cristal ( $f_f = 30, 50$  et  $75$  mm) et différentes lentilles d'injection dans la fibre ( $f_i = 6$  à  $75$  mm). La lentille de collimation après le cristal de fluorescence est de focale  $f_c = 150$  mm.

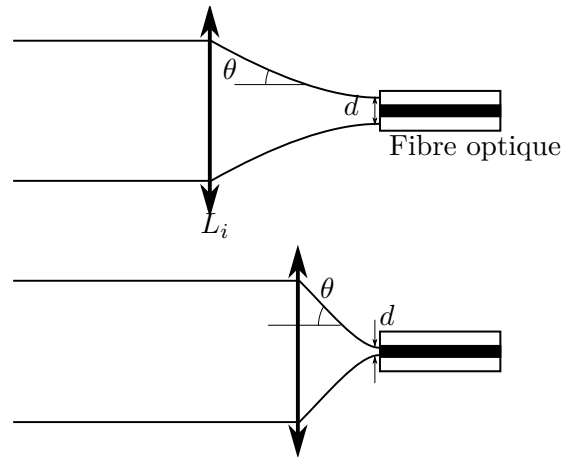


FIGURE 7.24 – Schéma illustrant le compromis nécessaire entre taille du *waist* dans la fibre et angle des vecteurs d'onde incidents pour une collection optimale.

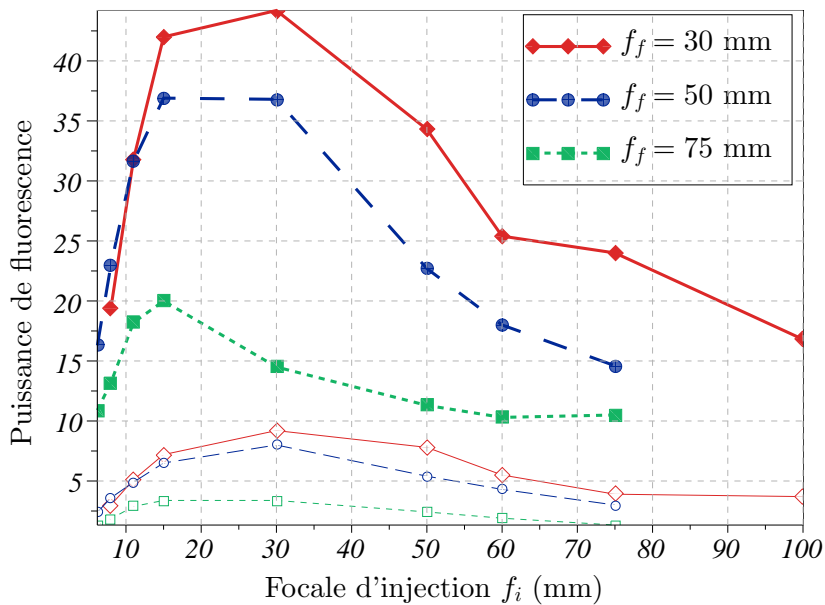
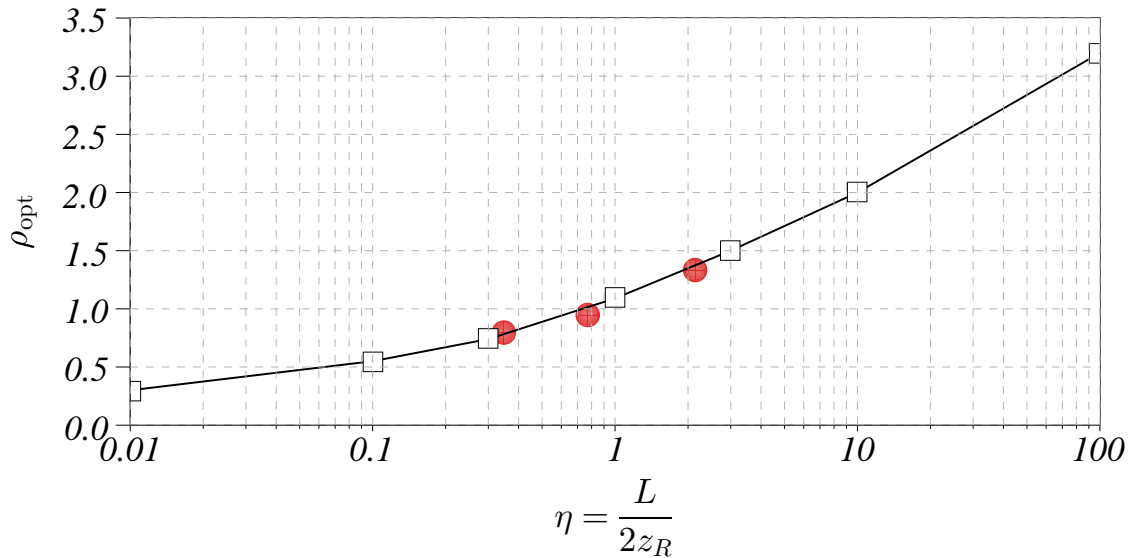
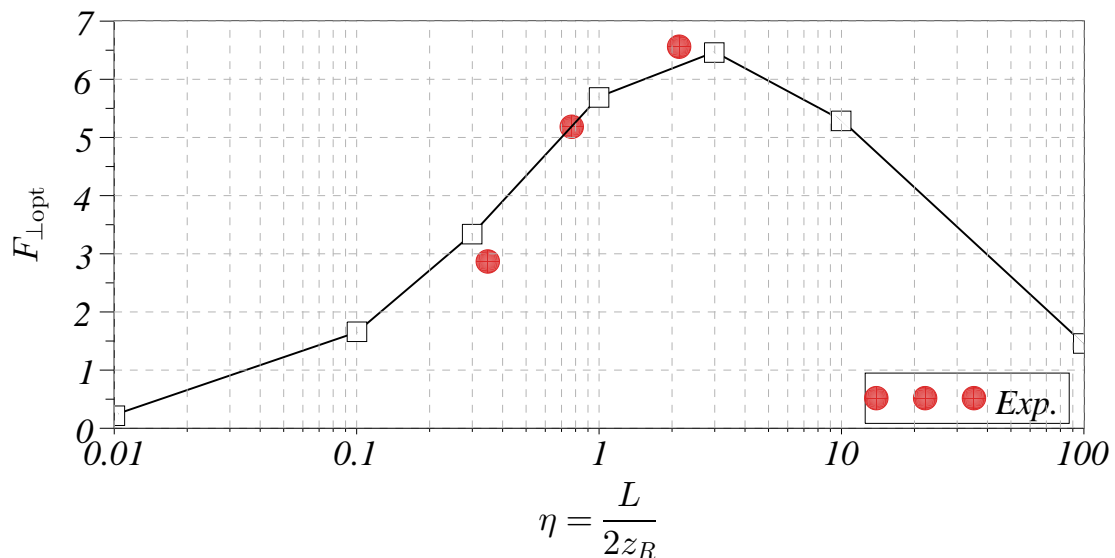


FIGURE 7.25 – Puissance de fluorescence collectée en fonction de la focale d'injection dans la fibre, pour différentes focales. En gras, la puissance mesurée dans la bande étroite du DWDM, exprimée en pW ; en traits fins, la puissance totale collectée, exprimée en nW.

Nous avons testé expérimentalement différents couples  $(\eta, \rho)$  et nous avons comparé les résultats de mesures de puissance aux prédictions théoriques (Fig. 7.26). L'échelle verticale du paramètre  $F_{\perp}$  est arbitraire pour s'approcher au mieux de la courbe théorique, mais l'évolution avec  $\eta$  peut être comparée.



(a) Accord théorie/expérience vis-à-vis des conditions de collection



(b) Accord théorie/expérience vis-à-vis de l'évolution de la puissance produite

FIGURE 7.26 – Comparaison des mesures (ronds rouges) aux points théoriques (carrés noirs) de  $\rho$  en fonction de  $\eta$  (a). Comparaison de l'évolution de la puissance par rapport à la valeur de  $F_{\perp}$  (b) (échelle verticale arbitraire pour les points expérimentaux sur cette dernière courbe).

On voit que l'accord est bon, bien que le critère de puissance pour la recherche d'une configuration optimale soit imparfait. La méthode utilisée semble donc permettre de s'approcher de manière satisfaisante de la configuration optimale. Cependant, seule une mesure du taux de couplage pour chacune des configurations  $(L_f, L_i)$  permettrait de s'en assurer.



## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord passé en revue l'ensemble des contraintes liées à l'intégration d'une source dans un réseau de communications quantiques, dont un élément essentiel est la compatibilité avec une mémoire quantique très restrictive en terme de largeur spectrale. Nous avons isolé une solution impulsionnelle de taux de répétition 2 MHz, fonctionnant aux longueurs d'onde des télécommunications. La bande passante prévue est de 40 MHz, ce qui impose une durée d'impulsion de 25 ns. Nous avons réalisé et caractérisé les différentes étapes du montage expérimental avec une bande passante de 1 nm.

Il est important de noter que, comme l'a montré l'analyse du Chapitre 6 (§ 6.2), l'optimisation en bande « large » – c'est à dire moins de 1 nm – du montage réalisé dans ce chapitre serait identique pour une bande significativement plus étroite. Ainsi, l'ultime étape, qui succède immédiatement sans nécessiter une quelconque réoptimisation des éléments déjà présents, est la mise en place du filtre spectral étroit. Celui-ci peut tout aussi bien consister en un filtre fibré à ajouter en aval du montage qu'en un filtre en espace libre placé à l'emplacement dédié (cf. Fig. 7.22) en amont de l'injection, ou une combinaison des deux. Quelle que soit la solution choisie, il est important de veiller à ce que, dans la bande passante, elle introduise un minimum de pertes, dont nous avons montré (cf. Chap. 5) qu'elles sont nuisibles à la qualité de la source.

De ce point de vue, nous avons d'ailleurs remarqué que bien que la méthode d'optimisation réalisée dans ce chapitre permette de maximiser la brillance de la source, elle ne permet pas rigoureusement d'en garantir une qualité optimale, au sens où nous n'avons pas de critère permettant de minimiser les pertes par couplage dans la fibre optique. Nous nous proposons dans le chapitre suivant de mettre au point un tel critère en développant une méthode de mesure rigoureuse, et absolue, du taux de couplage, que nous comparerons avec les prédictions du Chapitre 6.

## Chapitre 8

# Mesure *in situ* et en temps réel des performances d'une source ou d'un lien quantique

Dans le Chapitre 5, nous avons mis en évidence l'influence de divers paramètres sur les performances d'une source de paires de photons jumeaux basée sur la fluorescence paramétrique. Il s'agit dans le présent chapitre<sup>1</sup> d'exprimer certains de ces paramètres en fonction de grandeurs observables expérimentalement, et d'utiliser les relations établies précédemment afin d'en déduire une méthode pour mesurer les performances de la source, ou d'un lien quantique utilisant cette source. Pour appliquer la théorie à un contexte expérimental donné, il faut abandonner le concept de filtre idéal considéré jusque là et introduire les conditions réelles de filtrage. Nous verrons comment, en procédant ainsi, il devient possible d'avoir accès, simplement, à des indicateurs de performance utiles pour caractériser une source.

Contrairement aux méthodes habituelles de caractérisation de la qualité d'une source de photons intriqués qui nécessitent de faire varier un paramètre de contrôle spécifique (angles de polariseurs pour une mesure de Bell sur des états intriqués en polarisation par exemple), cette technique ne nécessite aucun dispositif de mesure particulier, autre que les détecteurs de photons habituellement en place sur chaque voie de sortie quelle que soit l'expérience réalisée en régime de comptage de photons. Elle permet de mesurer une visibilité d'interférences, uniquement limitée par la présence des paires multiples, qui serait atteinte pour une expérience spécifique lorsque les autres imperfections expérimentales sont corrigées (discernabilités spatiale/spectrale/temporelle pour une expérience de Hong-Ou-Mandel [HOM87], intrication non-maximale pour une mesure de Bell...). Elle permet également de mesurer les valeurs absolues du rendement de génération dans le cristal et des pertes globales subies par les photons en aval de leur génération.

Nous décrirons tout d'abord cette technique, avant de l'illustrer par une estimation des performances pour différentes solutions de filtrage plus ou moins étroit. Ensuite, nous présenterons sa validation expérimentale, pour enfin l'appliquer à la source décrite dans le Chapitre 7 afin de mesurer de manière absolue le taux de couplage des paires de photons dans la fibre optique, grandeur généralement inaccessible à la mesure, et de le comparer à la valeur prédite au Chapitre 6.

### 8.1 Dispositif considéré

Nous avons vu que même si une source non dégénérée en fréquence présente en théorie de meilleures performances en raison de la possibilité de séparer les photons de manière déterministe

---

1. La méthode décrite dans ce chapitre a fait l'objet d'un article [SFD<sup>+</sup>11] publié dans la revue *Optics Express*.

(à l'aide d'un miroir dichroïque par exemple), des considérations pratiques de stabilisation des filtres étroits en fréquence pouvaient conduire à se tourner vers une source quasi-dégénérée en fréquence, bien que seule une séparation statistique soit possible dans ce cas.<sup>2</sup> C'est donc une telle source que nous allons considérer dans cette section. Bien sûr, une analyse semblable pourrait être appliquée à une situation expérimentale différente.

Dans ce cas quasi-dégénéré, la source de paires de photons est constituée (voir Figure 8.1) d'un filtre unique commun aux deux photons d'une paire, suivi d'une lame partiellement réfléchissante (ou un coupleur fibré) de coefficients de transmission en intensité  $R_A$  vers la voie A et  $R_B$  vers la voie B ( $R_A + R_B = 1$ ). Sur chaque voie se trouvent deux détecteurs<sup>3</sup>  $D_A$  et  $D_B$  de rendements quantiques respectifs  $\eta_A$  et  $\eta_B$ . Le filtre est en général un empilement de filtres dont la transmission est fonction de la fréquence du photon le traversant. Dans ce qui suit, nous considérons que la transmission normalisée en intensité du filtre est décrite par une fonction  $\mathcal{F}(\nu)$  que nous précisons et qui a pour maximum 1. Le filtre est centré sur la fréquence  $\nu_F$ , et on note  $\mathcal{F}(\nu - \nu_F)$  sa transmission à la fréquence  $\nu$ . On suppose sa largeur significativement plus grande que la largeur spectrale de la pompe. La transmission effective sur la voie A (resp. B) vaut  $\mathcal{F}(\nu_A - \nu_F)T_A$  (resp.  $\mathcal{F}(\nu_B - \nu_F)T_B$ ).  $T_A$  et  $T_B$  incluent toutes les pertes entre la génération des paires et le détecteur, y compris les pertes d'insertion du filtre (*i.e.* les pertes en son centre). Elles incluent les pertes par couplage dans la fibre optique, les pertes par propagation sur chaque voie. Pour alléger les notations, nous notons  $X_A = R_A T_A \eta_A$  (resp.  $X_B = R_B T_B \eta_B$ ) l'« efficacité d'extraction » des paires sur la voie A (resp. B), c'est à dire le facteur de transmission global depuis la génération jusqu'à la détection.

Nous introduisons la variable  $\delta\nu = \nu_p/2 - \nu_F$ , qui décrit l'écart entre la fréquence de dégénérescence du processus de fluorescence et la fréquence centrale du filtre. Du point de vue opérationnel, en régime de fonctionnement normal de la source, la fréquence centrale  $\nu_p$  de la pompe est constante, et la fréquence centrale  $\nu_F$  du filtre peut varier en raison de fluctuations qu'il s'agit de réduire au maximum par un asservissement adéquat. D'un autre point de vue, on peut caractériser l'effet de la valeur de  $\delta\nu$  en faisant varier la fréquence de pompe  $\nu_p$ .

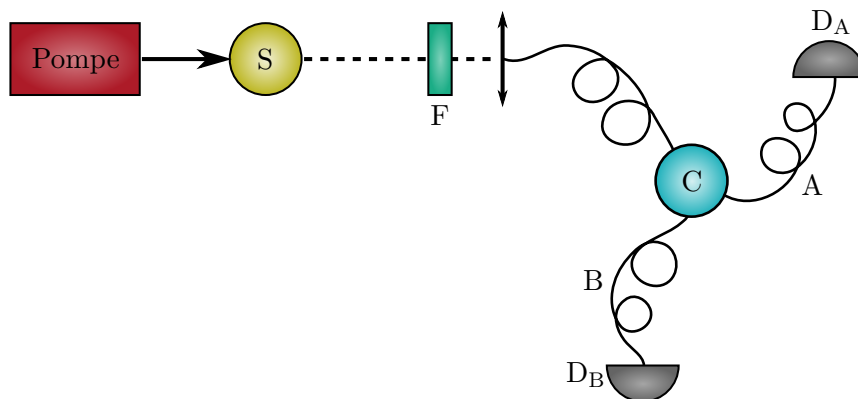


FIGURE 8.1 – Dispositif considéré pour l'étude de l'effet d'un filtrage réel sur les performances d'une source basée sur la fluorescence paramétrique en régime quasi-dégénéré : Les deux photons provenant de la source S traversent un filtrage commun F, puis sont répartis grâce à un coupleur C (ou une lame partiellement réfléchissante) vers deux voies A et B, sur lesquelles se trouvent deux<sup>3</sup> détecteurs  $D_A$  et  $D_B$ .

2. On exclut l'usage d'un séparateur de polarisation pour conserver la perspective d'appliquer la méthode à une source de paires de photons intriqués en polarisation.

3. Dans le contexte d'une mesure de Bell,  $D_A$  et  $D_B$  peuvent aussi chacun être une paire de détecteurs en sortie d'un analyseur de Bell, dont on somme les valeurs comptées, comme au Chapitre 5.

## 8.2 Calcul des probabilités de coup et de coïncidence après le filtre

La probabilité d'un coup sur les détecteurs  $D_A$  et  $D_B$  vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_A &= p_0 \Omega_1 X_A (2 - X_A) K_T \\ \mathcal{P}_B &= p_0 \Omega_1 X_B (2 - X_B) K_T\end{aligned}$$

avec

$$\Omega_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\nu_A - \nu_F) d\nu_A = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\nu_B - \nu_F) d\nu_B$$

La grandeur  $\Omega_1$  remplace la largeur  $\Delta\nu_A = \Delta\nu_B$  du filtre carré envisagé dans le Chapitre 6. Elle est bien sûr indépendante de la fréquence centrale  $\nu_F$  du filtre.

Les expressions des probabilités de détection contiennent également le facteur  $K_T$  qui traduit les pertes dues à la forme temporelle du paquet d'ondes de la *paire* de photons par rapport à la forme de la porte des détecteurs. En prenant l'exemple d'un paquet d'onde gaussien de demi-durée  $\Delta t$  à  $\frac{1}{e}$ , et d'une porte de détection rectangulaire de largeur  $T$ , on a :

$$K_T = \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-\frac{t^2}{\Delta t^2}} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{\Delta t^2}} dt}$$

Cette formule exprime la probabilité qu'un photon d'une paire émise pendant la durée de la pompe atteigne le détecteur pendant son temps ouverture. Pour une impulsion de pleine largeur à mi-hauteur  $2\sqrt{2 \ln 2} \Delta t = 25$  ns et une porte de largeur  $T = 20$  ns, le coefficient  $K_T$  vaut :

$$K_T = 0,654$$

Les applications numériques qui suivront utiliseront cette valeur.

La probabilité d'une vraie coïncidence s'écrit

$$P_{CV} = 2p_0 \Omega_2(\delta\nu) X_A X_B K_T$$

avec

$$\begin{aligned}\Omega_2(\nu_p, \nu_F) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\nu_A - \nu_F) \mathcal{F}(\nu_p - \nu_A - \nu_F) d\nu_A \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\nu'_A) \mathcal{F}(\nu_p - \nu'_A - 2\nu_F) d\nu'_A & \nu'_A &= \nu_A - \nu_F \\ \Omega_2(\delta\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\nu'_A) \mathcal{F}(2\delta\nu - \nu'_A) d\nu'_A & \delta\nu &= \frac{\nu_p}{2} - \nu_F \\ &= \mathcal{F} * \mathcal{F}(2\delta\nu)\end{aligned}$$

On peut trouver une justification de cette forme au Chapitre 6, Eq. (6.34), en faisant l'approximation que le spectre de la pompe est suffisamment étroit devant la largeur des filtres. Il serait cependant également possible d'évaluer  $\Omega_2(\delta\nu)$  en tenant compte de la largeur spectrale de la pompe.

Contrairement à  $\Omega_1$ , la grandeur  $\Omega_2$  dépend de  $\delta\nu$ , c'est à dire de la position spectrale du filtre par rapport à la fréquence de la dégénérescence  $\nu_p/2$ . Pour optimiser les vraies coïncidences, il est nécessaire d'ajuster cette position. En effet, un filtrage décentré de plus que la largeur du filtre (alors  $\mathcal{F} * \mathcal{F}(\delta\nu) = 0$ ) empêche chaque photon à la fréquence  $\nu_A$  d'avoir son jumeau transmis à

la fréquence  $\nu_B$ .  $\Omega_2$  est donc maximum pour  $\delta\nu = 0$ .

$$\Omega_2 = \Omega_2(\delta\nu = 0)$$

Remarquons que  $K_T$  n'intervient qu'à la puissance 1, puisqu'à l'échelle du temps de cohérence de la paire (lié à la largeur spectrale de la pompe, supposée faible devant celle des photons de la paire) les photons signal et complémentaire sont émis quasi-simultanément. Si le premier photon est dans la porte du détecteur, le second l'est aussi avec une probabilité proche de 1.

La probabilité de coïncidences accidentelles, elle, est donnée par

$$P_{CA} = 2p_0^2\Omega_1^2X_A X_B K K_T^2$$

avec, en reprenant la formule (5.15) :

$$K = 2 - 2(X_A + X_B) + \frac{2}{3}(X_A^2 + X_B^2) + X_A X_B$$

où on a supposé  $\chi = 0$  puisqu'on a supposé que le spectre de la pompe était petit devant la largeur du filtre.

Les coïncidences accidentelles sont donc, contrairement aux vraies coïncidences, indépendantes des fluctuations du filtre. Notons que le facteur  $K_T$  intervient au carré puisque les instants de création de deux photons issus de deux paires incohérentes sont indépendants.

En pratique, on a

$$\begin{aligned} R_A &\approx R_B \approx 0,5 \\ T_A &\approx T_B \approx 0,6 \\ \eta_A &\approx \eta_B \approx 0,07 \end{aligned} \tag{8.1}$$

c'est à dire  $X_A \approx X_B \approx 0,02$ . On peut alors récrire les résultats précédents de la manière suivante avec une bonne précision :

$$P_A = 2p_0\Omega_1 X_A K_T \tag{8.2}$$

$$P_B = 2p_0\Omega_1 X_B K_T \tag{8.3}$$

$$P_{CV} = 2p_0\Omega_2 X_A X_B K_T \tag{8.4}$$

$$P_{CA} = 4p_0^2\Omega_1^2 X_A X_B K_T^2 \tag{8.5}$$

Dans ces conditions, on remarque que  $P_{CA} = P_A P_B$ .

Ces grandeurs restent des valeurs théoriques, juste modifiées par rapport au Chapitre 5 en prenant en compte la forme  $\mathcal{F}$  du filtre F, en fixant  $\chi = 0$  et en considérant le paramètres  $K_T$ . Nous allons dans ce qui suit les mettre en relation avec les grandeurs mesurées issues de l'expérience afin de les estimer.

## 8.3 Grandeurs expérimentales et lien avec la théorie

### 8.3.1 Grandeurs mesurables

Nous introduisons maintenant les grandeurs mesurables suivantes, qui sont toutes données par des détecteurs de photons :

$$\begin{aligned}
 P_A^{(\text{mes})} &: \text{ probabilité d'un coup sur la voie A} \\
 P_B^{(\text{mes})} &: \text{ probabilité d'un coup sur la voie B} \\
 P_{AB}^{(\text{mes})} &: \text{ probabilité d'une coïncidence entre les voies A et B} \\
 P_{\text{bruitA}}^{(\text{mes})} &: \text{ probabilité d'un coup de bruit d'obscurité sur la voie A} \\
 P_{\text{bruitB}}^{(\text{mes})} &: \text{ probabilité d'un coup de bruit d'obscurité sur la voie B}
 \end{aligned}$$

Les « coups » désignent des détections simples sur un détecteur. Les « coïncidences » désignent l'occurrence simultanée d'un coup en voie A et un coup en voie B. La simultanéité est définie dans une fenêtre temporelle contenant quasi-totalement une seule impulsion de pompe.

Les grandeurs  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_{CV}$ ,  $P_{CA}$  estimées à partir des mesures expérimentales  $P_A^{(\text{mes})}$ ,  $P_B^{(\text{mes})}$ ,  $P_{AB}^{(\text{mes})}$ ,  $P_{\text{bruitA}}^{(\text{mes})}$ ,  $P_{\text{bruitB}}^{(\text{mes})}$  seront notées  $P_A^{(\text{exp})}$ ,  $P_B^{(\text{exp})}$ ,  $P_{CV}^{(\text{exp})}$ ,  $P_{CA}^{(\text{exp})}$  pour les différencier de valeurs purement théoriques.

### 8.3.2 Lien avec la théorie

Les probabilités de coup en voie A et en voie B se déduisent immédiatement de la probabilité de coups mesurée, à laquelle on soustrait le bruit des détecteurs :

$$\begin{aligned}
 P_A^{(\text{exp})} &= P_A^{(\text{mes})} - P_{\text{bruitA}}^{(\text{mes})} \\
 P_B^{(\text{exp})} &= P_B^{(\text{mes})} - P_{\text{bruitB}}^{(\text{mes})}
 \end{aligned}$$

La probabilité estimée d'une coïncidence accidentelle est celle de la probabilité conjointe de présence d'un photon en voie A et d'un photon en voie B, bruit d'obscurité des détecteurs exclu :

$$P_{CA}^{(\text{exp})} = P_A^{(\text{exp})} P_B^{(\text{exp})} = \left( P_A^{(\text{mes})} - P_{\text{bruitA}}^{(\text{mes})} \right) \left( P_B^{(\text{mes})} - P_{\text{bruitB}}^{(\text{mes})} \right) \quad (8.6)$$

La probabilité mesurée d'une coïncidence entre A et B au sein d'une même impulsion vaut

$$P_{AB}^{(\text{mes})} = P_{CV}^{(\text{exp})} + P_{CA}^{(\text{exp})} + P_{C\text{bruit}} \quad (8.7)$$

où  $P_{C\text{bruit}}$  est la probabilité de coïncidences accidentelles dues au bruit d'obscurité des détecteurs, qui vaut

$$P_{C\text{bruit}} = P_{\text{bruitA}}^{(\text{mes})} P_{\text{bruitB}}^{(\text{mes})} + P_A^{(\text{exp})} P_{\text{bruitB}}^{(\text{mes})} + P_B^{(\text{exp})} P_{\text{bruitA}}^{(\text{mes})} \quad (8.8)$$

Puisqu'on a déjà exprimé  $P_{CA}^{(\text{exp})}$  et  $P_{C\text{bruit}}$  en fonction de grandeurs mesurées, l'Equation (8.7) permet d'obtenir l'estimation de la probabilité de coïncidences vraies à partir de ces seules grandeurs mesurées :

$$P_{CV}^{(\text{exp})} = P_{AB}^{(\text{mes})} - P_{CA}^{(\text{exp})} - P_{C\text{bruit}} \quad (8.9)$$

Le rapport des coïncidences accidentelles sur les vraies coïncidences vaut, d'après la théorie et dans le cas de la présence de paires uniquement incohérentes ( $\chi = 0$ ) :

$$\frac{P_{CA}}{P_{CV}} = 2p_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2} K_T \quad (8.10)$$

Ce rapport peut être estimé par le rapport  $P_{CA}^{(\text{exp})}/P_{CV}^{(\text{exp})}$  qui provient de grandeurs mesurées (Eqs. (8.6) et (8.9)).

### 8.3.3 Expression empirique du taux de production de paires

À partir de l'équation (8.10) et du rapport  $P_{CA}^{(\text{exp})}/P_{CV}^{(\text{exp})}$  issu de mesures, on peut estimer la probabilité de produire une paire de photons dans la bande du filtre :

$$p_0\Omega_1 = \frac{1}{2K_T} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \frac{P_{CA}^{(\text{exp})}}{P_{CV}^{(\text{exp})}} \quad (8.11)$$

La valeur de la probabilité de générer une paire dans la bande passante du filtre peut donc être déterminée à partir de mesures de coups et de coïncidences – à travers les expressions de  $P_{CA}^{(\text{exp})}$  et  $P_{CV}^{(\text{exp})}$ , Eqs. (8.6) et (8.9) – et de la connaissance de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $K_T$ , trois valeurs constantes caractéristiques du montage.

### 8.3.4 Expression empirique des pertes globales

À partir des équations donnant  $P_A$ ,  $P_B$  et  $P_{CV}$  (Eqs. 8.2 à 8.5), on peut également estimer l'efficacité d'extraction :

$$X_A = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{P_{CV}^{(\text{exp})}}{P_A^{(\text{exp})}} \quad (8.12)$$

$$X_B = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{P_{CV}^{(\text{exp})}}{P_B^{(\text{exp})}} \quad (8.13)$$

$$(8.14)$$

qui représentent les pertes totales pour une voie, indépendantes de la forme du filtre. Contrairement à  $p_0\Omega_1$ , la valeur de ces pertes totales ne dépend pas de  $K_T$ . Il n'en serait pas de même si la largeur spectrale de la pompe était égale ou supérieure à celle des filtres.

Les valeurs  $\eta_A$  et  $\eta_B$  sont une caractéristique des détecteurs et sont connues.  $R_A T_A$  et  $R_B T_B$  peuvent s'écrire sous la forme d'un produit

$$R_A T_A = \mathcal{T}_A \mathcal{T}_C \quad (8.15)$$

$$R_B T_B = \mathcal{T}_B \mathcal{T}_C \quad (8.16)$$

$$(8.17)$$

où  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}_B$  sont les transmissions propres aux voies A et B, ce qui prend en compte toutes les pertes dues à chacune de ces voies, la répartition du coupleur entre les voies A et B, et la transmission maximale au centre du filtre F.  $\mathcal{T}_C$  est le taux de collection de la fluorescence dans la fibre optique.  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}_B$  sont directement mesurables expérimentalement de manière indépendante<sup>4</sup>.

4. Dans le cas de voies fibrées, on injecte en chemin inverse – c'est à dire à partir de la fibre branchée au détecteur  $D_A$  (resp.  $D_B$ ) – un signal à la fréquence  $\nu_p/2$  et on mesure la proportion  $\mathcal{T}_A$  (resp.  $\mathcal{T}_B$ ) de puissance transmise au niveau de la sortie du cristal

Ainsi, il est possible d'estimer le taux de collection dans la fibre optique :

$$\mathcal{T}_C = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{P_{CV}^{(\text{exp})}}{\eta_A \mathcal{T}_A p_0 \Omega_1 P_B^{(\text{exp})}} \quad (8.18)$$

$$= \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{P_{CV}^{(\text{exp})}}{\eta_B \mathcal{T}_B p_0 \Omega_1 P_A^{(\text{exp})}} \quad (8.19)$$

$$(8.20)$$

où on rappelle que les grandeurs  $P_{CV}^{(\text{exp})}$ ,  $P_A^{(\text{exp})}$  et  $P_B^{(\text{exp})}$  ne font intervenir que des grandeurs mesurées.

### 8.3.5 Qualité de la source : mesure de la visibilité

Pour quantifier la qualité de la source, on reprend la définition du Chapitre 5 (§ 5.1.7). On distingue la visibilité brute, qui s'écrit

$$V_{(\text{brute})}^{(\text{exp})} = \frac{1}{1 + \frac{P_{CA}^{(\text{exp})} + P_{C\text{bruit}}}{P_{CV}^{(\text{exp})}}}$$

de la visibilité nette, corrigée du bruit d'obscurité des détecteurs, qui s'écrit quant à elle :

$$V_{(\text{nette})}^{(\text{exp})} = \frac{1}{1 + \frac{P_{CA}^{(\text{exp})}}{P_{CV}^{(\text{exp})}}}$$

qu'il est possible de comparer à la théorie, en utilisant l'expression 8.11 :

$$V_{(\text{nette})} = \frac{1}{1 + 2 \frac{\Omega_1}{\Omega_2} p_0 \Omega_1 K_T} \quad (8.21)$$

À probabilité donnée  $p_0 \Omega_1$  de créer une paire dans la bande passante  $\Omega_1$ , la visibilité nette dépend uniquement du rapport  $\Omega_1/\Omega_2$  et du facteur de recouvrement temporel  $K_T$ .

Comme pour l'évaluation de  $p_0 \Omega_1$ , cette expression n'est valide que sous les hypothèses (8.1). Remarquons que c'est en raison de cette hypothèse et du fait qu'on exprime cette visibilité en fonction de la probabilité de *générer* une paire, et non de la détecter (*paires utiles*) que cette expression ne dépend pas des pertes en ligne. À probabilité de paire utile donnée, de plus grandes pertes impliquent une probabilité de génération plus grande, donc une baisse de visibilité.

## 8.4 Visibilité attendue pour quelques solutions de filtrage

Nous pouvons d'ores et déjà simuler numériquement la visibilité qu'il est possible d'obtenir avec différentes solutions de filtrage réelles afin de choisir la meilleure d'entre elles pour un filtrage plus étroit qu'au Chapitre 7).

La Table 8.1 résume le matériel de filtrage que nous avons à disposition, auquel on ajoute le filtre rectangulaire idéal considéré dans le Chapitre 5. Plusieurs combinaisons de ces filtres sont envisagées, numérotées de (1) à (9). Nous avons synthétisé, pour chacune d'entre elles, les valeurs calculées numériquement dans la Table 8.2. Pour chaque combinaison, nous avons superposé sur les Figures 8.2 à 8.4 la transmission de chaque filtre utilisé (en traits fins) ainsi que la transmission résultante de leur combinaison (en bleu, traits gras) normalisée à  $\Omega_1$  et la fonction  $\Omega_2(\delta\nu)$  (en rouge, traits gras). Les calculs ont été effectués numériquement avec un pas de discrétisation de



2 MHz sur une plage de 200 GHz, c'est à dire 100 001 points par courbe. Les courbes sont ensuite tronquées en fréquence pour mieux faire apparaître la zone souhaitée.

Numéro	Matériel	Bande passante à -3 dB	Intervalle spectral libre
(a)	filtre DWDM	73 GHz	N.A.
(b)	étalon Fabry-Pérot	1,59 GHz	50 GHz
(c)	étalon Fabry-Pérot	40 MHz	40 GHz
(d)	étalon Fabry-Pérot	24 MHz	5,12 GHz
(e)	filtre idéal	quelconque	N.A.

TABLE 8.1 – Caractéristiques du matériel envisagé pour le filtrage spectral de la source

Cas	Combinaison	Nb de modes	Largeur d'un mode	$\frac{\Omega_2(0)}{\Omega_1}$	Visibilité si $K_T = 0,654$	
					$p_0\Omega_1=1\%$	$p_0\Omega_1=10\%$
(1)	(e)	1	indépendant	1,00	98,7 %	88,4 %
(2)	(a)	1	50 GHz	0,88	98,5 %	87,1 %
(3)	(a+b)	1	1,73 GHz	0,46	97,2 %	77,9 %
(4)	(a+c)	3	40 MHz	0,37	96,6 %	73,9 %
(5)	(a+d)	20	24 MHz	0,44	97,1 %	77,1 %
(6)	(a+b+c)	1	40 MHz	0,51	97,5 %	79,6 %
(7)	(a+b+d)	1	24 MHz	0,44	97,1 %	77,1 %
(8)	(a+b+b+d)	1	24 MHz	0,50	97,5 %	79,3 %
(9)	(a+b+b+c)	1	40 MHz	0,52	97,5 %	79,9 %

TABLE 8.2 – Calcul du rapport  $\Omega_2(0)/\Omega_1$  et de la visibilité pour diverses solutions de filtrage. Cette visibilité est évaluée pour deux probabilités de génération : 1 % et 10 %. Elle est indépendante des pertes totales sous les hypothèses (8.1).

Avant de discuter successivement chaque combinaison, remarquons que, d'après la Table 8.2, l'effet de  $\Omega_2/\Omega_1$  sur la visibilité est plus significatif à forte probabilité de génération ( $p_0\Omega_1 = 10\%$ ) qu'à faible probabilité ( $p_0\Omega_1 = 1\%$ ). Un bon rapport  $\Omega_2/\Omega_1$  permet donc d'augmenter le taux de génération, et finalement celui des paires utiles.

### Commentaires sur les différentes combinaisons du Tableau 8.2 —

- (1) Pour un filtre idéal, le rapport  $\Omega_2(0)/\Omega_1$  est indépendant de la largeur du filtre et vaut 1. On retrouve le résultat obtenu au paragraphe 5.2.2 dans les sections précédentes, pour le cas d'un filtrage symétrique ( $\Delta\nu_A = \Delta\nu_B$ ).
- (2) Le filtre DWDM, de forme quasi trapézoïdale avec une bande passante plate sur une grande largeur, est de tous celui qui s'approche le plus du cas idéal rectangulaire (1), le rapport  $\Omega_2(0)/\Omega_1$  est élevé et proche de 1. Mais la technologie de ce filtre n'autorise pas de largeur de bande suffisamment étroite pour notre objectif de quelques dizaines de mégahertz.
- (3) Ici, la largeur spectrale est plus fine, bien qu'encore trop large (1,73 GHz). Grâce à la combinaison avec le filtre DWDM, un seul mode Fabry-Pérot est bien transmis, les autres étant fortement atténués. On constate que la forme lorentzienne d'une résonance Fabry-Pérot est moins favorable à  $\Omega_2$  que pour le DWDM. Le rapport  $\Omega_2(0)/\Omega_1$  est fortement réduit (environ un facteur deux).

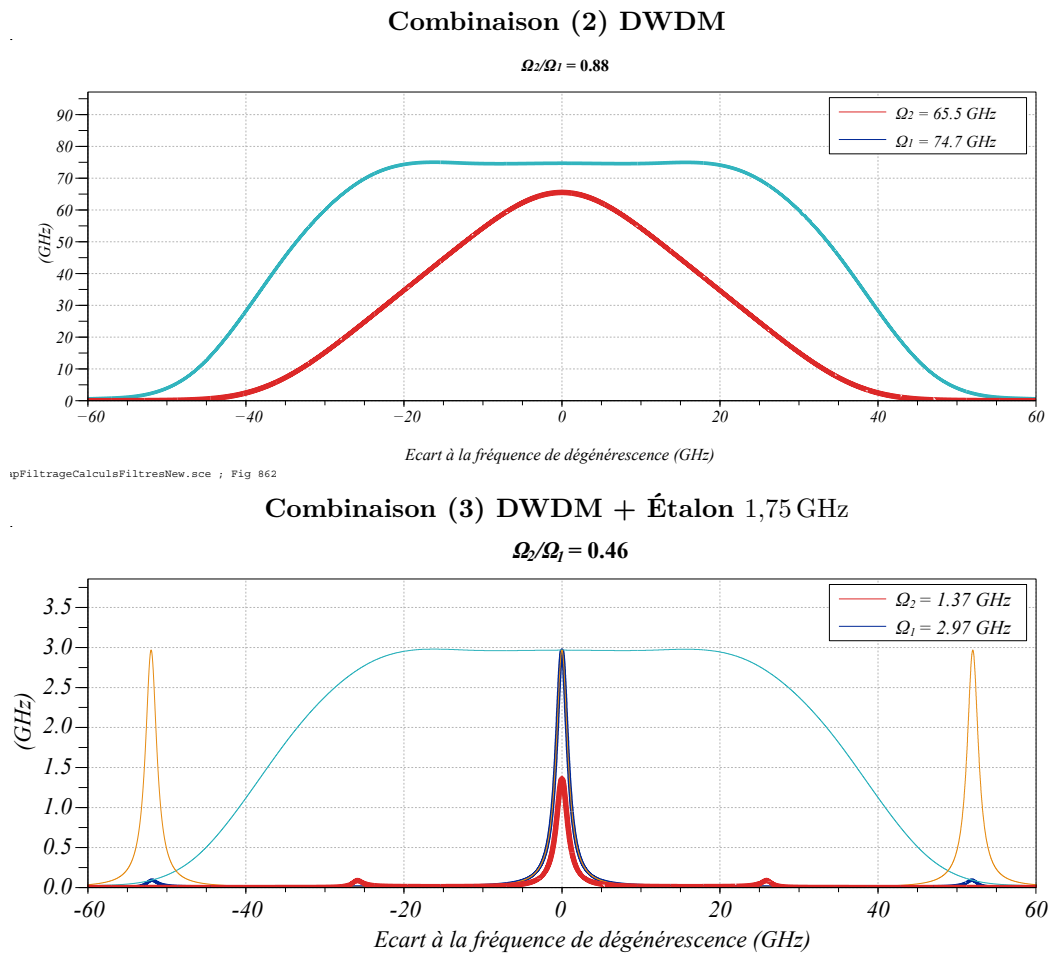


FIGURE 8.2 – Représentation de la résultante des filtres pour les combinaisons (2) et (3) :  $\mathcal{F}(\nu)$  (en bleu) et  $\Omega_2(\nu)$  (en rouge). La courbe fine jaune représente la transmission de l'étalon de largeur 1,75 GHz et la courbe fine bleu clair celle du DWDM.

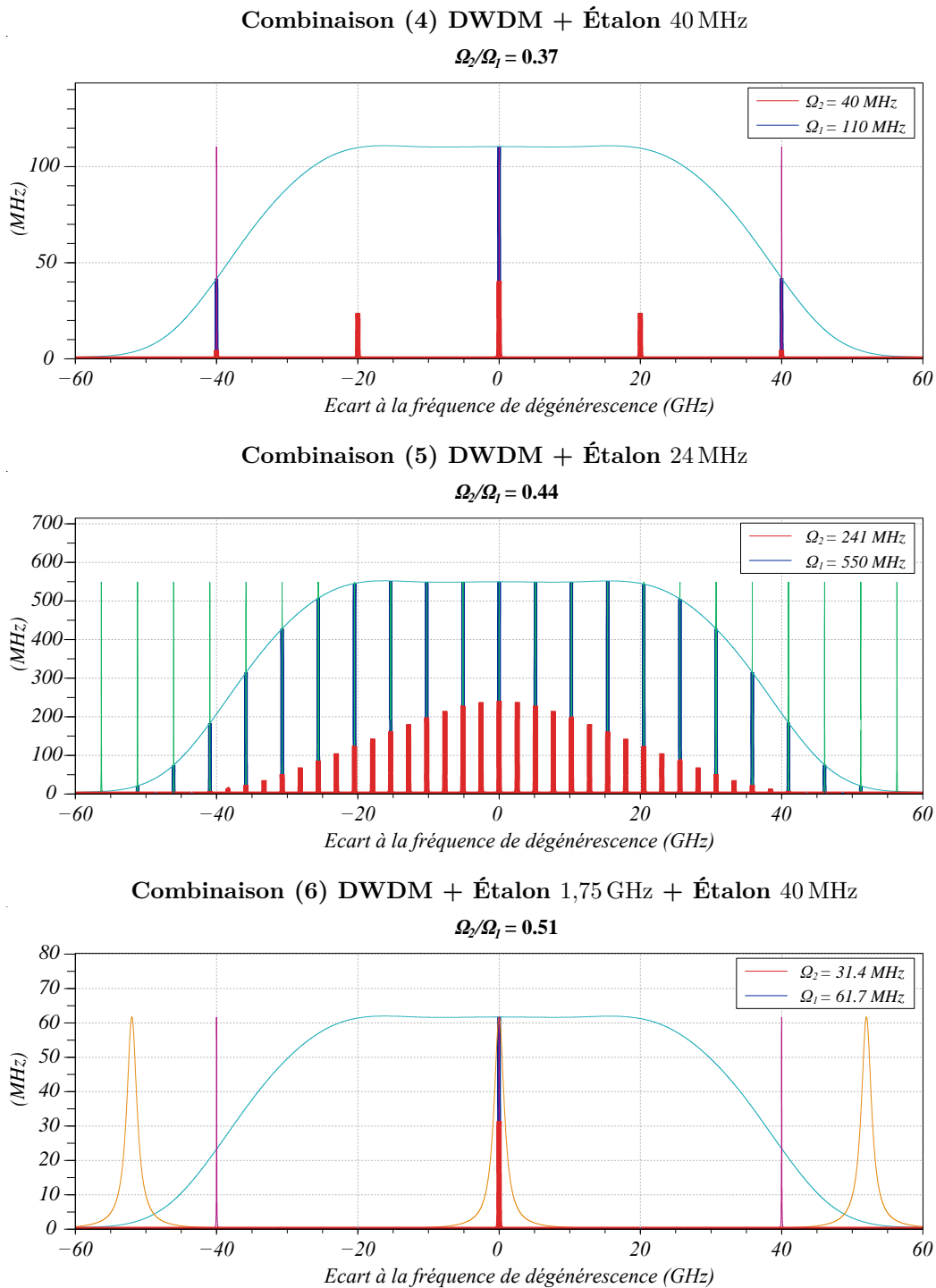
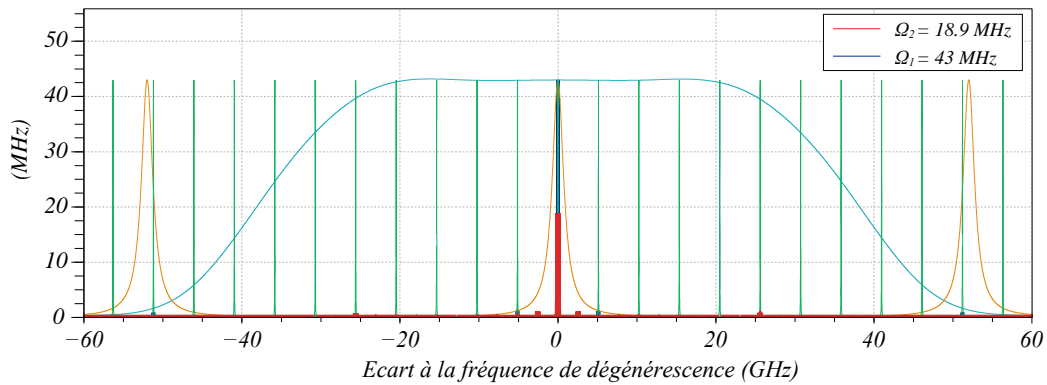


FIGURE 8.3 – Représentation de la résultante des filtres pour les combinaisons (4) à (6) :  $\mathcal{F}(\nu)$  (en bleu) et  $\Omega_2(\nu)$  (en rouge). La courbe fine jaune représente la transmission de l'étalon de largeur 1,75 GHz, la courbe fine rose celle de l'étalon de largeur 40 MHz, la courbe fine verte celle de l'étalon de largeur 24 MHz, et la courbe fine bleu clair celle du DWDM.

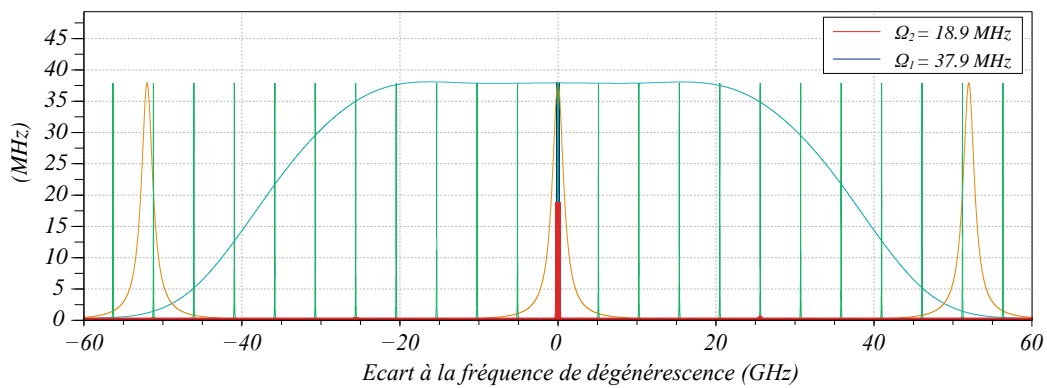
Combinaison (7) DWDM + Étalon 1,75 GHz + Étalon 24 MHz

$$\Omega_2/\Omega_1 = 0.44$$



Combinaison (8) DWDM + 2 étalons 1,75 GHz + Étalon 40 MHz

$$\Omega_2/\Omega_1 = 0.5$$



Combinaison (9) DWDM + 2 étalons 1,75 GHz + Étalon 24 MHz

$$\Omega_2/\Omega_1 = 0.52$$

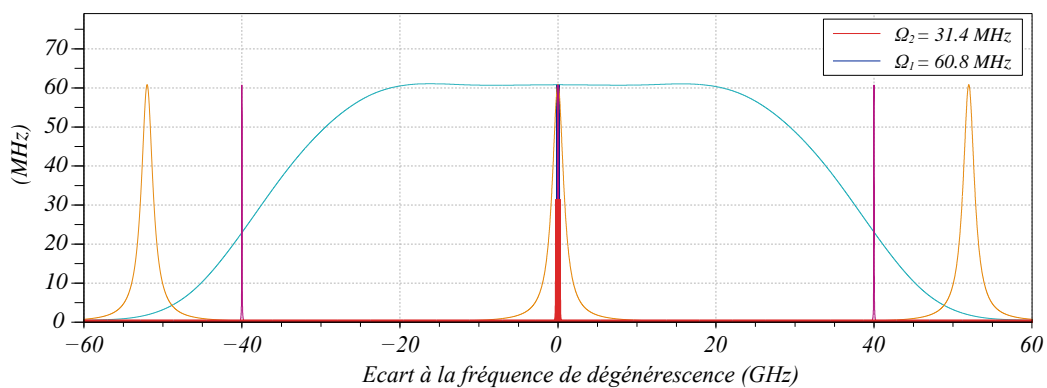


FIGURE 8.4 – Représentation de la résultante des filtres pour les combinaisons (7) à (9) :  $\mathcal{F}(\nu)$  (en bleu) et  $\Omega_2(\nu)$  (en rouge). La courbe fine jaune représente la transmission de l'étalon de largeur 1,75 GHz, la courbe fine rose celle de l'étalon de largeur 40 MHz, la courbe fine verte celle de l'étalon de largeur 24 MHz, et la courbe fine bleu clair celle du DWDM.

- (4) En associant au filtre DWDM l'étalon Fabry-Pérot (c), plus étroit et de grand intervalle spectral libre, trois modes sont non atténués par le DWDM : le mode central est optimalement transmis, mais 2 des 3 modes sont trop faiblement atténués, ce qui abaisse fortement la visibilité.
- (5) Dans le cas où on remplace l'étalon Fabry-Pérot (c) par le (d), d'intervalle spectrale libre plus petit, de nombreux modes sont non atténués par le DWDM. Mais en raison de leur symétrie par rapport à la fréquence de dégénérescence  $\nu_p/2$ , ceux-ci contribuent aux vraies coïncidences et la visibilité ne s'effondre pas malgré la multiplicité de modes. Si elle reste relativement faible, c'est en raison de la transmission moyenne d'une grande partie des modes, pas du nombre de modes en soi. Cependant, notons que sauf application spéciale, la présence de multiples raies fréquentielles est généralement non souhaitée dans les applications d'une telle source.
- (6) L'ajout de l'étalon Fabry-Pérot (b), de grand intervalle spectral libre (ISL) et de largeur spectrale intermédiaire entre le DWDM et l'étalon (c), permet de supprimer les modes non-centraux de ce dernier. Par rapport au cas (4), équivalent mais privé de l'étalon (b), la visibilité est en effet améliorée.
- (7) En revanche, dans le cas de l'étalon (d), étroit mais d'ISL petit, l'ajout de l'étalon intermédiaire (b) n'améliore pas significativement la visibilité. Le but de l'étalon (b), outre de ne sélectionner que le mode central, est de supprimer les modes situés dans les ailes du DWDM, qui diminuent la visibilité en raison de leur transmission faible mais non-nulle. En effet, les fréquences insuffisamment atténuées contribuent d'autant plus aux coïncidences accidentelles qu'aux vraies coïncidences. Seule une atténuation très importante de ces modes non-centraux peut rétablir une visibilité optimale, ce qui n'est pas atteint ici, où quatre modes non centraux très faiblement transmis contribuent de manière parasite aux coïncidences accidentelles.
- (8) Afin d'améliorer le défaut évoqué ci-dessus, à savoir l'atténuation insuffisante des modes non-centraux de l'étalon (d), nous avons ajouté un second étalon intermédiaire (b). La visibilité s'en trouve améliorée, et elle atteint presque celle du cas (6), tout en permettant une largeur spectrale de 24 MHz au lieu de 40 MHz pour ce dernier cas.
- (9) Associé à l'étalon de largeur 40 MHz, l'ajout d'un second étalon intermédiaire (b) améliore la visibilité par rapport au cas (6). Il s'agit de la combinaison de filtres offrant la meilleure visibilité parmi les solutions permettant une largeur spectrale globale étroite, mais cette largeur n'est que de 40 MHz tandis qu'elle était de 24 MHz dans le cas précédent (8).

## 8.5 Application de la méthode à notre source

Pour cette étude, on se base sur le montage mis en place au Chapitre 7. Nous allons tout d'abord procéder à une vérification préliminaire de la méthode simple avant de l'appliquer à l'optimisation fine du montage expérimental.

### 8.5.1 Validation expérimentale de la méthode et mesure des performances en bande DWDM

Avant d'appliquer la méthode à l'étude de l'optimisation du couplage, on peut vérifier que les grandeurs estimées sont conformes à ce qu'on attend. Pour cela, un montage même non optimisé suffirait ; les valeurs extraites de ces courbes, le taux de couplage en particulier, constituent d'ailleurs des critères importants pour optimiser la source. Cependant, les courbes présentées ici

ont été réalisées avec une source relativement bien optimisée, en bande « large », c'est à dire celle du filtre DWDM.

Lorsqu'on change la puissance de pompe, l'estimation de  $p_0\Omega_1$  doit varier en proportion. De même, lorsqu'un paramètre en principe sans influence sur le taux de couplage varie, l'estimation de  $\mathcal{T}_C$  doit rester constante.

Les Figures 8.5 et 8.6 constituent une confirmation de la théorie dans les deux cas évoqués : sur la première figure, l'évolution est bien linéaire ; sur la seconde, le taux de couplage ne varie qu'aux incertitudes d'expériences près.

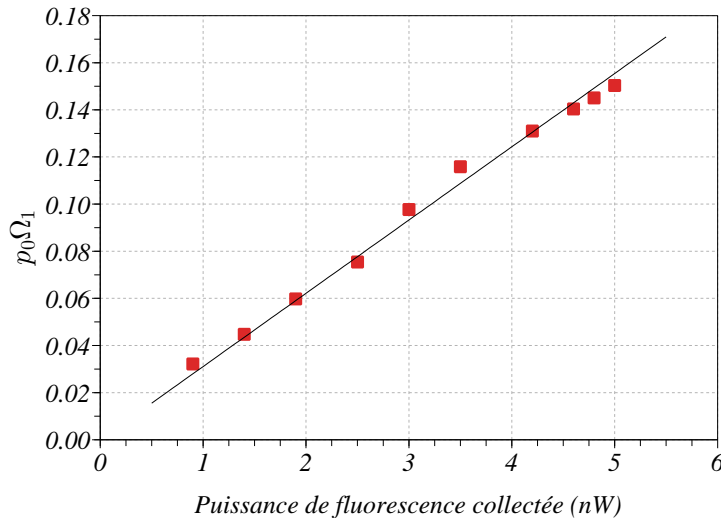


FIGURE 8.5 – Taux de paires générées  $p_0\Omega_1$ , déterminé par la méthode décrite au § 8.3.3, en fonction de la puissance de fluorescence collectée. Lorsque les autres paramètres du dispositif ne changent pas, ce taux évolue linéairement.

Du point de vue des performances obtenues, bien que l'optimisation ne soit pas encore complète (voir plus loin, § 8.6.2), on constate un taux de couplage déjà élevé (67 %) quoiqu'inférieur à la valeur idéale (88 %<sup>5</sup>) prédite par la théorie développée au Chapitre 6.

On peut, avec les mêmes données, calculer l'évolution de la visibilité (définie au Chapitre 5) avec le taux de génération de paires  $p_0\Omega_1$ . La Figure 8.7 représente les visibilités nette et brute obtenues. Comme le prédit la théorie, celle-ci diminue lorsque  $p_0\Omega_1$  augmente. Lorsque le taux de génération s'approche de zéro, la visibilité nette, corrigée du bruit des détecteurs, s'approche bien de 100 %.

### 8.5.2 Validation du modèle adopté pour la forme spectrale des filtres

La possibilité d'évaluer rigoureusement le taux de couplage des paires de photons jumeaux produites en fonction de seules grandeurs mesurées (taux de coups sur un détecteur et taux de coïncidences sur deux détecteurs) dépend d'une évaluation correcte de  $\Omega_2(\delta\nu)/\Omega_1$ . Nous avons mesuré  $\Omega_2(\delta\nu)$  en faisant varier  $\nu_p$ , et comparé les résultats aux valeurs calculées pour deux solutions de filtrage dont nous évons également mesuré le spectre en transmission : un filtre DWDM (Fig. 8.8) et un filtre Fabry-Pérot de bande passante 1,59 GHz (Fig. 8.9).

L'accord est très satisfaisant ; on peut donc conclure que les valeurs de  $\Omega_1$  et de  $\Omega_2$  calculées sont correctes et qu'il est possible de les utiliser pour quantifier les performances de la source.

5. La valeur calculée par la théorie correspond au taux de couplage de paires, *i.e.* deux photons, et vaut 77%. Le taux de couplage par photon vaut  $\sqrt{0,77} = 0,88$ .

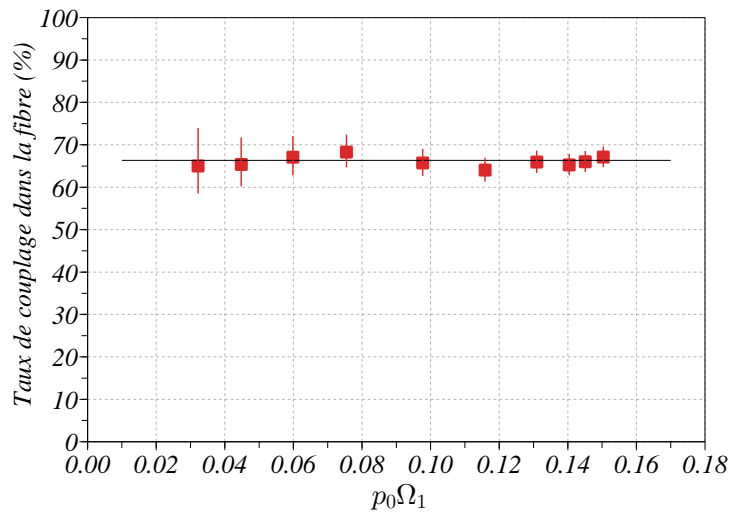


FIGURE 8.6 – Taux de couplage de la fluorescence, déterminé par la méthode décrite au § 8.3.4, mesuré pour différents taux de génération de paires de photons. Lorsque les autres paramètres du dispositif ne changent pas, ce taux est constant. Les barres d'erreur correspondent à une incertitude de 200 coups et de 1 coïncidence par seconde.

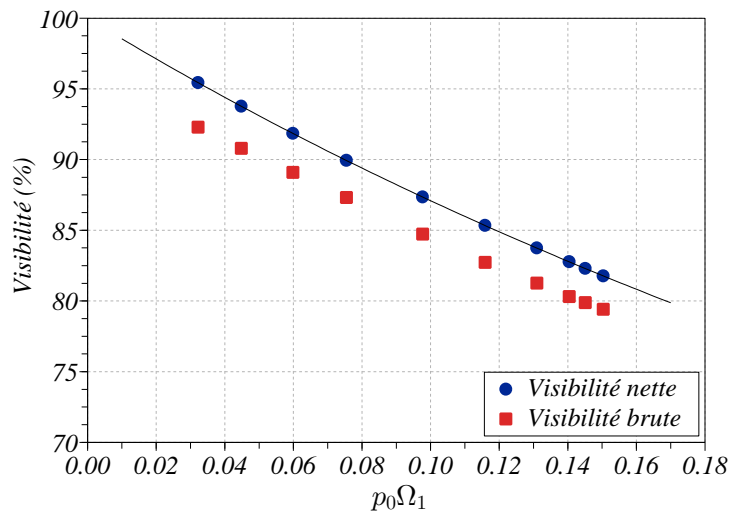


FIGURE 8.7 – Visibilité de franges d'interférences, déterminée à partir des données de mesure et de la méthode du § 8.3.5, en fonction du taux de génération de paires de photons. La droite correspond à la visibilité théorique calculée à partir de l'Équation (8.21).

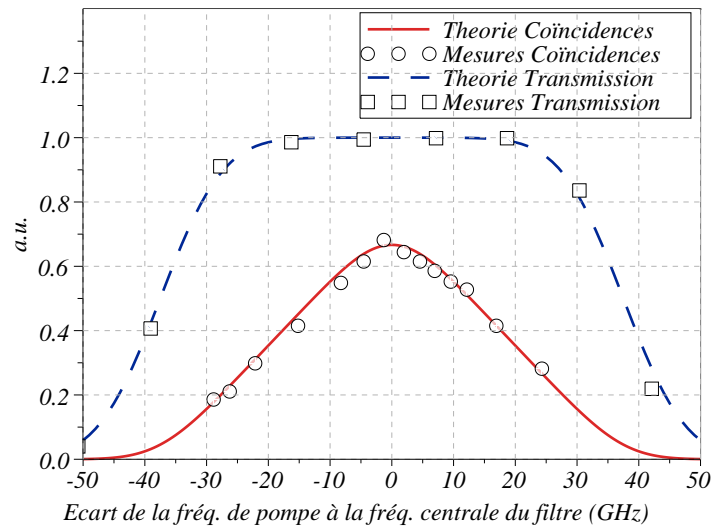


FIGURE 8.8 – Accord des mesures avec la théorie du taux de coïncidences développée au § 8.2, pour un filtrage à l'aide d'un filtre DWDM seul.

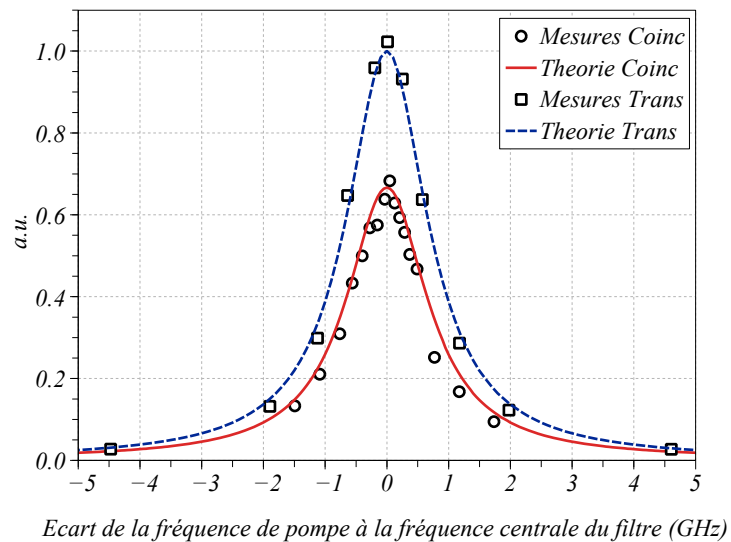


FIGURE 8.9 – Accord des mesures avec la théorie du taux de coïncidences développée au § 8.2, pour un filtrage à l'aide d'un filtre DWDM associé à un étalon fabry-pérot de bande passante 1,59 GHz.



## 8.6 Optimisation fine de la collection dans une fibre optique

Cette section fait écho à la section 7.3 du Chapitre 7. Nous y avons rapporté une étude des conditions de collection de la fluorescence dans une fibre optique se basant sur une mesure de la densité spectrale de fluorescence collectée au voisinage étroit ( $\sim 1$  nm) de la dégénérescence. Cependant, nous avons remarqué (§ 7.3.1) que cette étude ne pouvait rigoureusement qu'être grossière au vu de l'étude réalisée au Chapitre 6. Le critère de puissance ne permet en effet pas de découpler les variations provenant du rendement de génération et celles provenant de l'efficacité de collection.

La méthode de mesure du taux de couplage développée dans ce chapitre nous donne un moyen d'accès à l'un de ces deux critères indépendamment. Nous allons donc pouvoir parfaire l'optimisation du taux de couplage qui, comme nous l'avons vu au Chapitre 5, est décisif pour la qualité de la source.

### 8.6.1 Evidence expérimentale de la limite du critère de puissance

Pour illustrer le fait que l'optimisation du taux de couplage sur le critère des coïncidences donne de meilleurs résultats que sur le simple critère de la puissance collectée, on peut observer l'effet de quelques paramètres.

La Figure 8.10 représente les résultats d'une expérience réalisée en faisant varier la position du cristal par rapport au waist du faisceau de pompe. On y a rapporté les variations des puissances collectées, dans la bande totale ou la bande étroite du filtre DWDM, ainsi que le taux de couplage évaluée d'après la méthode décrite dans ce chapitre.

On constate que la position optimale du cristal par rapport à la position du waist (paramètre normalisé  $\zeta$ ) n'est pas la même selon qu'on s'intéresse à la puissance collectée en bande étroite (losanges bleus) ou au taux de couplage calculé à partir des coïncidences (carrés pleins rouges).

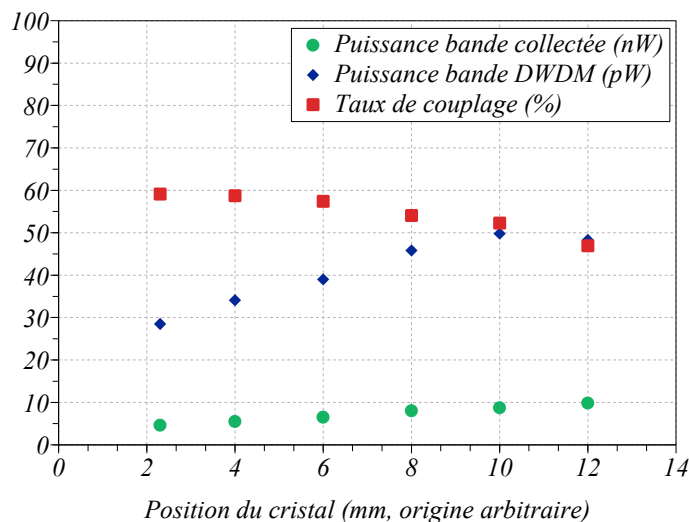


FIGURE 8.10 – Taux de couplage de la fluorescence dans la fibre monomode, déterminé par la méthode décrite au § 8.3.4, en fonction de la position du waist dans le cristal. Ce taux est comparé avec les puissances mesurées en bandes large et étroite.

De même, la Figure 8.11 où ces variations sont mesurées en fonction de la température du cristal, montre que les conditions d'accord de phase optimales (paramètre normalisé  $\varphi_0$ , lié à la

température du cristal) ne sont pas les mêmes pour les deux méthodes d'optimisation : de l'ordre de  $1^\circ$  sépare les deux optima, ce qui correspond à une différence légère, mais sensible, du spectre collecté (d'après la Figure 7.17).

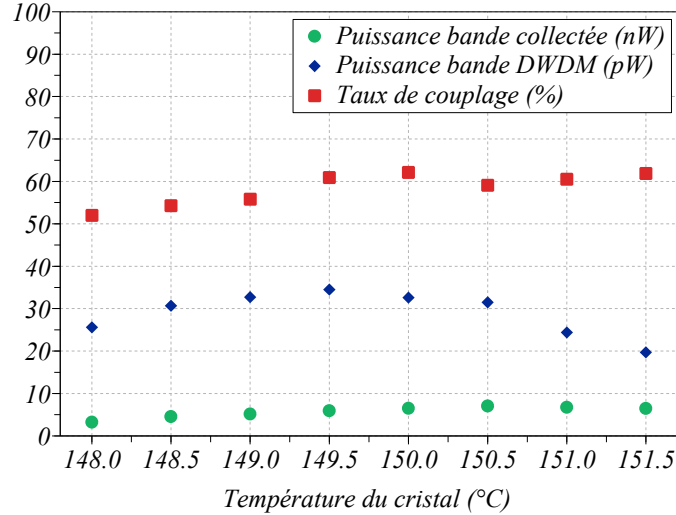


FIGURE 8.11 – Taux de couplage de la fluorescence dans la fibre monomode, déterminé par la méthode décrite au § 8.3.4, en fonction de la température du cristal. Ce taux est comparé avec les puissances mesurées en bandes large et étroite.

### 8.6.2 Optimisation fine de la source sur le critère du taux de collection

Nous avons réalisé une étude des conditions de couplage optimal en bande DWDM, par une démarche similaire à celle du Chapitre 7 (§ 7.3.2) mais cette fois-ci en utilisant la méthode décrite dans ce chapitre.

Les taux de comptage sur les détecteurs  $D_A$  et  $D_B$ , ainsi que le taux de coïncidences, ont été mesurés en temps réel par un système d'acquisition informatisé. En appliquant les formules vues au paragraphe 8.3.4 et en utilisant la valeur de  $\Omega_2(0)/\Omega_1$  de la Table 8.2 calculée pour le filtre DWDM, les valeurs de  $X_A$  et  $X_B$  (Eqs. 8.12 et 8.13) ont donc pu être estimées et affichées en temps réel également.

Différents degrés de focalisation ( $\eta = 0,44, 0,76, 1,0$  et  $2,7$ ) ont été appliqués en changeant la longueur focale de la lentille  $L_f$ . Les valeurs de  $\rho$  (par l'intermédiaire de la lentille d'injection  $L_i$ , la lentille de collection  $L_c$  étant fixée à 150 mm) et  $\varphi_0$  (température du cristal) ont été expérimentalement ajustées pour minimiser  $X_A$  et  $X_B$ , c'est à dire maximiser le taux de couplage dans la fibre optique.

Ensuite, à l'aide d'une mesure unique des transmissions  $\mathcal{T}_A = R_A T_A$  et  $\mathcal{T}_B = R_B T_B$  sur les voies A et B (cf. § 8.3.4), le taux de couplage  $\mathcal{T}_C$  a été déterminé à l'aide des Équations 8.18 et 8.19. Bien sûr, les deux valeurs ainsi déterminées de ce taux de couplage sont identiques, à la précision près des mesures de  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}_B$ .

Le taux de couplage  $\mathcal{T}_C$  est un taux de couplage en *puissance*. Le taux de couplage  $\Gamma$  vu au Chapitre 6 (§ 6.2.9) est un taux de couplage des *paires* de photons. Pour les comparer, il faut donc utiliser la relation suivante entre l'un et l'autre :

$$\Gamma = \sqrt{\mathcal{T}_C}$$

La Figure 8.12 reprend les valeurs de la Figure 6.5 (p. 143) basées sur les calculs du Chapitre 6, représentées sur une échelle logarithmique en abscisses<sup>6</sup>. Les valeurs mesurées par la méthode ci-dessus y sont reportées, ainsi que la courbe proportionnelle à la courbe théorique qui s'approche le plus des points expérimentaux.

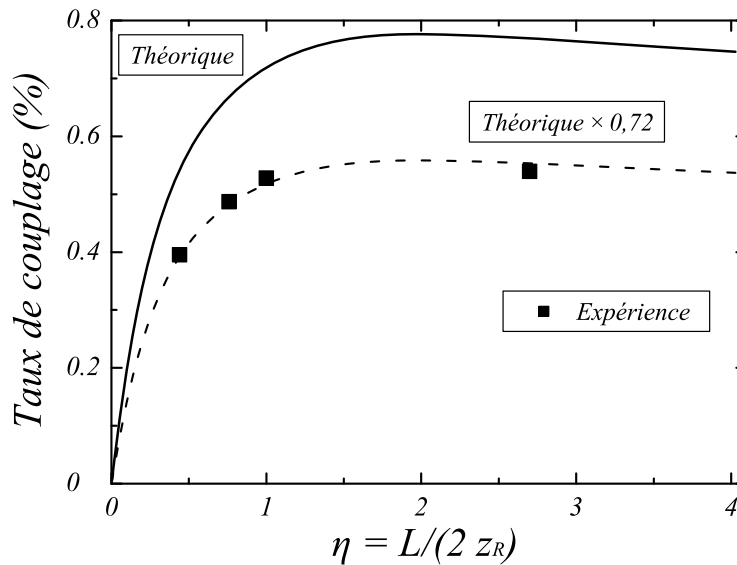


FIGURE 8.12 – Taux de couplage d'une paire de photons estimé au Chapitre 6 (courbe continue) et courbe proportionnelle (tirets) s'ajustant au mieux avec les valeurs mesurées (carrés).

On constate que les valeurs mesurées s'ajustent très bien avec la courbe théorique, pourvu qu'on applique un facteur de correction de 0,72 : le taux de couplage atteint expérimentalement est inférieur de 28 % à la valeur prédite.

Cet écart peut s'expliquer par les imperfections expérimentales, par exemple par le fait que le faisceau de pompe dans le cristal de fluorescence n'est pas aussi idéalement gaussien que celui considéré dans la théorie, en raison des différents éléments qu'il a traversés avant l'étape de fluorescence. De même, la distribution spatiale de la fluorescence a pu être dégradée par les éléments de filtrage situés entre sa génération et sa collection.

Cependant, l'évolution expérimentale du taux de couplage en fonction du degré de focalisation, tout autre paramètre étant optimisé, est fidèle à ce que prédit la théorie. Cela signifie d'une part que la méthode décrite dans ce chapitre paraît fiable, et d'autre part que la théorie développée au Chapitre 6 correspond à la réalité expérimentale.

## 8.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment, à partir des taux de coups et de coïncidences mesurées à l'aide de deux détecteurs, il est possible de déterminer avec une très bonne approximation des paramètres importants du système comme le nombre de paires de photons jumeaux générées (et non celles qui parviennent aux détecteurs), les pertes globales et la qualité de la source exprimée par un paramètre de visibilité.

Des simulations effectuées avec différentes configurations réalistes de filtrage nous ont montré que la forme du filtre est déterminante pour la visibilité. Toutes choses égales par ailleurs (pertes globales du système, taux de paires générées, rendement quantique des détecteurs, etc.), pour une largeur spectrale finale donnée, le remplacement d'un filtre parfait par un filtre réel peut fortement

6. Les points calculés ont été interpolés pour en faire une courbe continue.

diminuer la visibilité. Nous avons exploré plusieurs solutions possibles permettant d'obtenir la largeur spectrale finale souhaitée pour la source.

La technique développée dans ce chapitre a permis de mesurer de manière absolue le taux de couplage de la fluorescence dans la fibre optique pour la source développée au Chapitre 7. Ce taux de couplage s'avère être élevé (74 % en puissance, 55 % pour une paire de photons) bien que de presque 30 % inférieur à la valeur prédite par notre théorie développée au Chapitre 6. Nous pensons que l'utilisation de lentilles focales parfaitement optimales, ainsi qu'une épuration du faisceau de pompe pourraient encore augmenter cette valeur. Ce dernier traversant de nombreux éléments optiques entre sa génération par seconde harmonique et le pompage du processus de fluorescence, il n'est plus très exactement monomode spatial. Filtrer ses composantes d'ordres supérieurs, par exemple par une injection dans une fibre capable de tolérer la forte intensité, puis une recollimation juste avant l'étage de fluorescence permettrait d'y parvenir. Les pertes causées par ce procédé, contrairement aux pertes en aval de la fluorescence, ne dégradent pas la qualité de la source. Toute perte en amont ne fait que diminuer sa brillance.<sup>7</sup>

Insistons également sur le fait que l'étude décrite dans ce chapitre permet d'évaluer les performances d'une source impulsionnelle quelconque basée sur la fluorescence paramétrique. Elle complète l'étude du Chapitre 5 en prenant en compte l'effet de la forme réelle du filtrage dans l'estimation des performances de ce type de source.

Grâce à cette technique, la mise au point de la source décrite dans le Chapitre 7 peut être sensiblement facilitée et ses performances améliorées. Par ailleurs, la méthode peut être étendue au cas où la source est partie intégrante d'un lien quantique entre deux interlocuteurs. Sa simplicité associée au caractère temps réel des mesures nécessaires constituent un avantage qui permet d'envisager un contrôle continu de la qualité d'un lien quantique sans modifier le montage existant. Elle ne dépend pas de la qualité de l'intrication, ce qui la rend très utile pour dissocier les imperfections expérimentales qui relèvent de la source elle-même (génération, filtrage, collection) des imperfections de la mesure de Bell. Ainsi, cette technique présente un intérêt complémentaire d'une mesure de Bell pour l'optimisation d'une source intriquée, dont nous abordons la réalisation dans le chapitre suivant.

---

7. Une perte de brillance de  $x\%$  peut être compensée par une augmentation égale de la puissance de pompe, ce qui détériore la qualité de la source dans une proportion moindre qu'avec  $x\%$  de pertes en aval.



## Chapitre 9

# Proposition de source de photons intriqués en polarisation

Dès la conception du projet e-Quanet, nous avons étudié les conditions de réalisation de l'intrication pour une source fibrée de faible largeur spectrale telle que celle que nous avons présentée au Chapitre 7. L'idée est de créer les paires de photons dans une superposition cohérente de deux états orthogonaux de polarisation et d'en contrôler la phase, en s'inspirant des travaux effectués par certaines équipes sur l'intrication réalisée en configuration colinéaire à l'aide de deux cristaux non-linéaires successifs [NUT<sup>+</sup>02, LTMP06]. Il s'agit ici d'utiliser ce principe à l'aide d'un seul cristal pompé de manière contrapropagative, de manière semblable au montage de M. FIORENTINO [FMK<sup>+</sup>04] mais en utilisant un cristal de PPLN, donc des paires de même polarisation. La réalisation de l'intrication nécessite donc l'utilisation d'éléments supplémentaires dans le montage.

### 9.1 Double passage cohérent

Le pompage contrapropagatif s'obtient en faisant réaliser à la pompe un aller-retour dans le cristal. Cette pompe n'est pas recyclée : après avoir pompé le cristal dans un sens, s'être réfléchi sur le miroir sphérique, puis pompé le cristal en sens opposé, elle est redirigée vers un éventuel autre bloc expérimental (ou un piège à lumière), à l'aide d'un rotateur de Faraday suivi du prisme de Glan, ce qui protège l'amont de l'expérience de la forte puissance retour.

#### 9.1.1 Injection dans une fibre optique unique

##### Principe —

Une première idée, représentée en Figure 9.1, consisterait à collecter dans une même fibre optique les paires de photons produites à l'aller et au retour, en prenant soin de tourner de 90° la polarisation des photons créés à l'aller afin que l'état après collection soit de type  $\alpha|HH\rangle + \beta e^{i\phi}|VV\rangle$ ,  $V$  désignant la direction de polarisation des paires générées au premier passage, qui est fixée par le cristal et les conditions d'accord de phase.

La phase  $\phi$  peut être ajustée en contrôlant précisément la position du miroir sphérique à l'aide d'une cale piézoélectrique. Cette position peut être contrôlée avec précision en boucle fermée (asservissement sur une mesure de position du miroir). Mais si des fluctuations extérieures entraînent une fluctuation de la phase  $\phi$ , un asservissement peut être réalisé en boucle ouverte sur un signal optique dont la phase prend en compte ces fluctuations. Comme le montre schématiquement la Figure 9.2, ceci peut être réalisé en injectant dans le système un signal à une longueur d'onde éloignée de  $\Delta\lambda$  de la longueur d'onde de dégénérescence afin qu'il soit situé hors de la bande

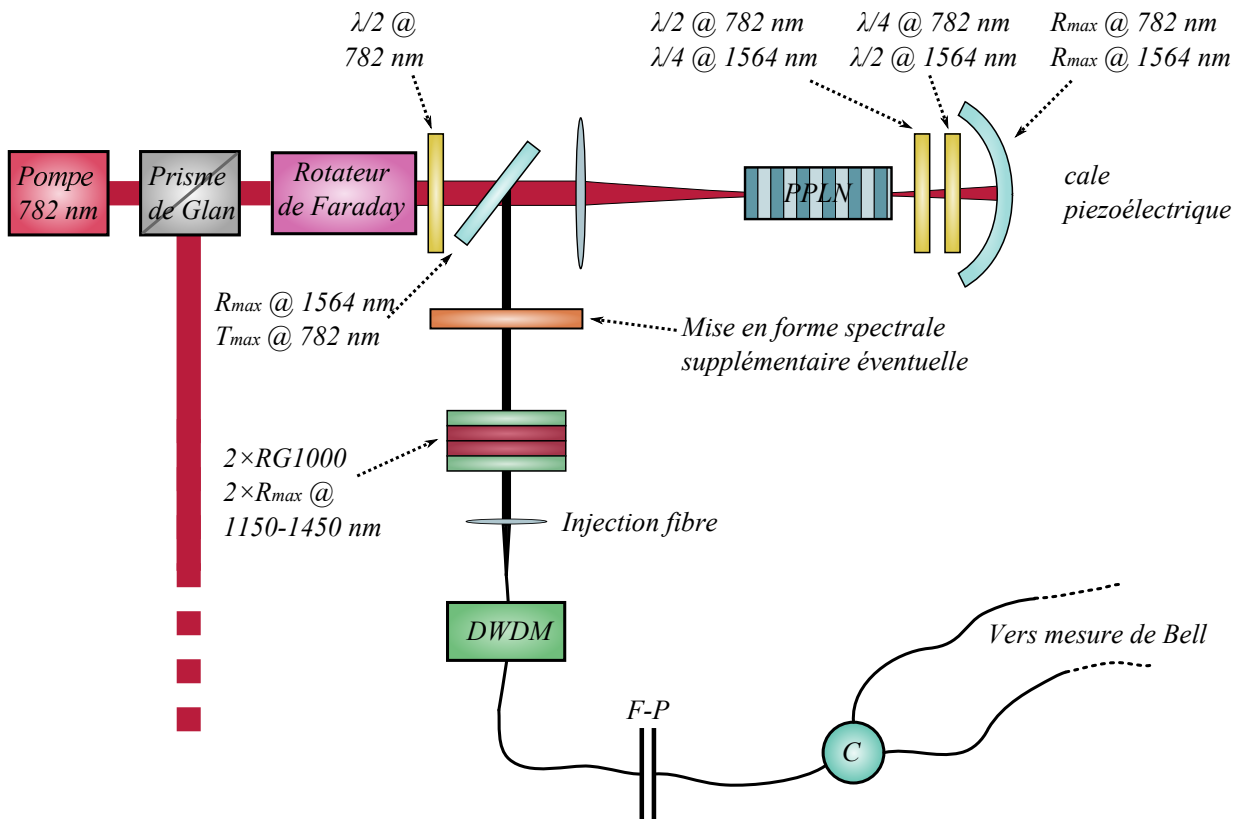


FIGURE 9.1 – Schéma possible pour réaliser l'intrication en double passage et simple injection, à partir de photons jumeaux générés par fluorescence paramétrique dans un cristal de PPLN.

passante du filtre DWDM, puis en mesurant l'interférence entre ce signal, qui a accumulé une phase liée à la position du miroir et aux éléments traversés potentiellement fluctuants (convection de l'air, température du milieu), et un autre signal issu du même laser prélevé par un coupleur, d'intensité proche de phase constante. En ajustant finement la position du miroir pour maintenir une phase, arbitraire mais constante, la phase  $\phi$  est elle aussi maintenue constante en conséquence. La position du miroir peut ensuite être ajustée de manière à obtenir une phase  $\phi = 0$  ou  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , par exemple, en asservissant la position du miroir sur un niveau différent de l'interférence entre les deux signaux à  $+\Delta\lambda$  (*i.e.* plus ou moins constructive). Notons que si la puissance nécessaire pour le signal décalé de  $\Delta\lambda$  est trop élevée, un second filtre DWDM en aval du premier peut s'avérer nécessaire pour finir d'éliminer tout photon résiduel.

La valeur de  $\beta$  est différente de celle de  $\alpha$  d'une part puisque la pompe est atténuée par le premier passage, et d'autre part parce que le couplage dans la fibre optique n'est pas nécessairement aussi optimal pour les paires créées au retour et celles créées à l'aller, qui ont subi une réflexion sur le miroir sphérique. Ce déséquilibre éloigne l'état produit d'un état maximalelement intriqué (voir Chap. 3, §. 3.1.2). Il est possible de corriger cela en utilisant une combinaison de lames  $\lambda/2$  et  $\lambda/4$  à 782 nm : la première, une  $\lambda/2$  introduite avant le premier passage, permet de tourner la polarisation de la pompe par rapport à la polarisation  $V$ , ce qui a pour effet de diminuer le rendement (dans la proportion de la projection de la polarisation sur  $V$ ). À l'aide de la deuxième lame, une  $\lambda/4$  traversée deux fois entre le trajet aller et le trajet retour, on rétablit la polarisation selon la direction  $V$  pour rendre le rendement meilleur et compenser les pertes de la pompe lors du premier passage. Pour que ce système soit sans effet sur l'état de polarisation des paires de photons, la lame  $\lambda/4$  à 782 nm doit également être  $\lambda/2$  à 1564 nm.

Pour obtenir l'état  $|HH\rangle$ , on tourne la polarisation de la paire  $|VV\rangle$  créée à l'aller à l'aide, cette fois-ci, d'une lame à la fois  $\lambda/4$  à 1564 nm et  $\lambda/2$  à 782 nm. Ainsi, après un double passage (avant/après réflexion sur le miroir sphérique), la polarisation de la pompe est conservée et reste

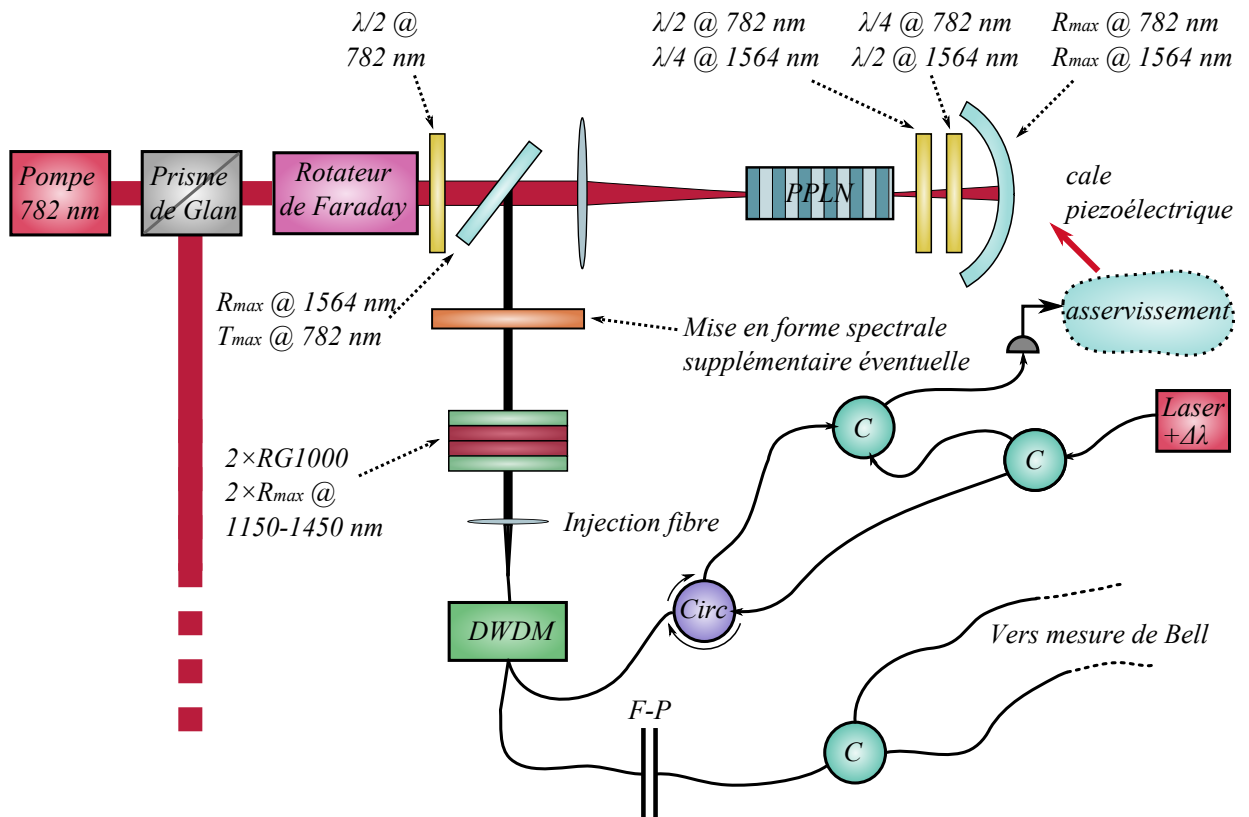


FIGURE 9.2 – Proposition pour asservir la phase de l'état intriqué généré par le montage de la Figure 9.1. Les coupleurs (C) sont des coupleurs 50/50.

optimale pour le processus non-linéaire. La fluorescence produite, elle, peut traverser le cristal avec un minimum d'interaction et se superposer aux paires créées au retour pour produire l'état intriqué. Cette superposition est cohérente si la durée de l'impulsion de pompe est plus grande que le temps séparant l'aller du retour dans le cristal.

Les paires sont ensuite séparées de la pompe à l'aide d'un miroir dichroïque, et le résidu de photons de pompe est éliminé comme nous l'avons décrit au Chapitre 7, §. 7.2.3.2, par des filtres colorés et un miroir à couches minces réalisé sur mesure, précédés éventuellement par d'autres miroirs dichroïques.

Après injection dans une fibre optique monomode, les paires de photons intriqués sont filtrés spectralement par la combinaison Filtre DWDM + Fabry-Pérot fibré étroit, proposée au Chapitre 7, §. 7.1.3.4, et dont on a étudié les performances au Chapitre 8, §. 8.4 (cas (4)). Les photons des paires sont ensuite séparés, dans un cas sur deux, à l'aide du coupleur 50/50. Les autres cas ne donnant pas lieu à coïncidence, ils sont sans effet sur la qualité des mesures.

## Résultat —

Une difficulté matérielle insoluble a rendu cette solution inapplicable : l'étalon Fabry-Pérot étroit s'est avéré présenter une levée de dégénérescence en polarisation : la fréquence du mode associé à la polarisation  $V$  est décalée d'environ 200 MHz par rapport à celle du mode associé à la polarisation  $H$ . Ainsi, même si les deux modes sont symétriques par rapport à la fréquence de dégénérescence, les photons deviennent discernables, ce qui détruit l'intrication.

Tous les étalons Fabry-Pérot fibrés dont nous avons eu connaissance présentent, de manière plus ou moins prononcée, ce type de phénomène lorsque la largeur de mode requise est plus petite qu'environ 1 GHz. Cette limite semble être inhérente à la méthode de fabrication utilisée ; il a donc fallu s'orienter vers une autre solution. La technologie des filtres de Bragg fibrés, explorée par nos



collaborateurs du Laboratoire de Physique de la Matière Condensée à Nice, semble également posséder une telle biréfringence pour de faibles largeurs spectrales.

Notons de plus que l'usage d'un miroir sphérique unique pour réfléchir la pompe et les paires de photons rend impossible d'ajuster indépendamment le paramètre de focalisation (variable  $\eta$  dans le Chapitre 6, §. 6.2.7) de la pompe et le couplage des photons générés au retour. Si le miroir sphérique est choisi pour optimiser ce couplage, donc l'équilibre de la collection des paires aller et des paires retour, la lentille de focalisation de la pompe doit être choisie de sorte que le rayon de courbure du faisceau soit adapté à la courbure du miroir, ce qui fixe la longueur de Rayleigh. De ce point de vue, la présence des lames d'onde permettant d'ajuster  $\alpha$  et  $\beta$  est importante.

### 9.1.2 Injection dans deux fibres optiques

Avant d'envisager une tout autre expérience mettant en œuvre une solution de filtrage différente, nous avons tenté de contourner le problème de la discernabilité en polarisation évoqué au paragraphe précédent et de voir s'il était possible de réaliser des mesures d'états intriqués à l'aide de l'étalon Fabry-Pérot dont nous disposons.

#### Principe —

Le montage proposé est représenté en Figure 9.3. Il s'agit d'utiliser l'étalon Fabry-Pérot en double passage : les paires de photons créées à l'aller dans le cristal sont injectées dans une fibre et traversent l'étalon dans un sens. Les paires créées au retour, de même polarisation, sont injectées dans une autre fibre et traversent l'étalon dans le sens inverse. Des contrôleurs de polarisation fibrés assurent que, dans les deux sens, la polarisation des deux paires est rigoureusement identique malgré la biréfringence de la fibre. Elles sont donc filtrées par le même mode Fabry-Pérot. Il suffit alors de tourner de  $90^\circ$  l'une des deux paires pour construire une superposition cohérente de paires de polarisations orthogonales  $\alpha|HH\rangle + \beta e^{i\phi}|VV\rangle$ . Comme pour la première méthode, des lames d'onde à 782 nm ainsi qu'une cale piézoélectrique permettent d'ajuster  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\phi$  afin d'obtenir un état maximalelement intriqué.

#### Difficultés —

PHOTONS PARASITES — Le principal problème prévisible avec ce montage concerne les circulateurs. Il est possible que leur isolation ne soit pas suffisante pour que les fuites du port 1 vers le port 3 (voir figure) soient suffisamment négligeable devant le rapport entre la bande passante du DWDM et la largeur de mode de l'étalon Fabry-Pérot. L'isolation typique entre les ports 1 et 3 est de  $10^{-4}$ . Si la finesse de l'étalon est de 1000, on obtient un rapport signal sur bruit de 10 seulement, le « signal » étant les photons dans la bande étroite du mode de l'étalon et le « bruit » étant les photons en bande large. Ces photons de bruit ne traversant pas tous les contrôleurs de polarisation, ils ne font pas qu'élargir la source ; ils détériorent également les résultats de mesures de Bell subséquentes. Il peut être nécessaire pour se prémunir contre ce bruit d'ajouter avant l'injection un étalon Fabry-Pérot de caractéristiques semblables à l'étalon (b) présenté au Chapitre 8 (Table 8.1). Mais sa bande passante n'étant qu'environ 50 fois plus petite que celle du DWDM, il reste un nombre sensible de photons susceptibles de détériorer la qualité de la source. Une bande plus étroite est difficilement envisageable car cela rendrait difficile son recouvrement avec la résonance de l'étalon Fabry-Pérot fibré étroit.

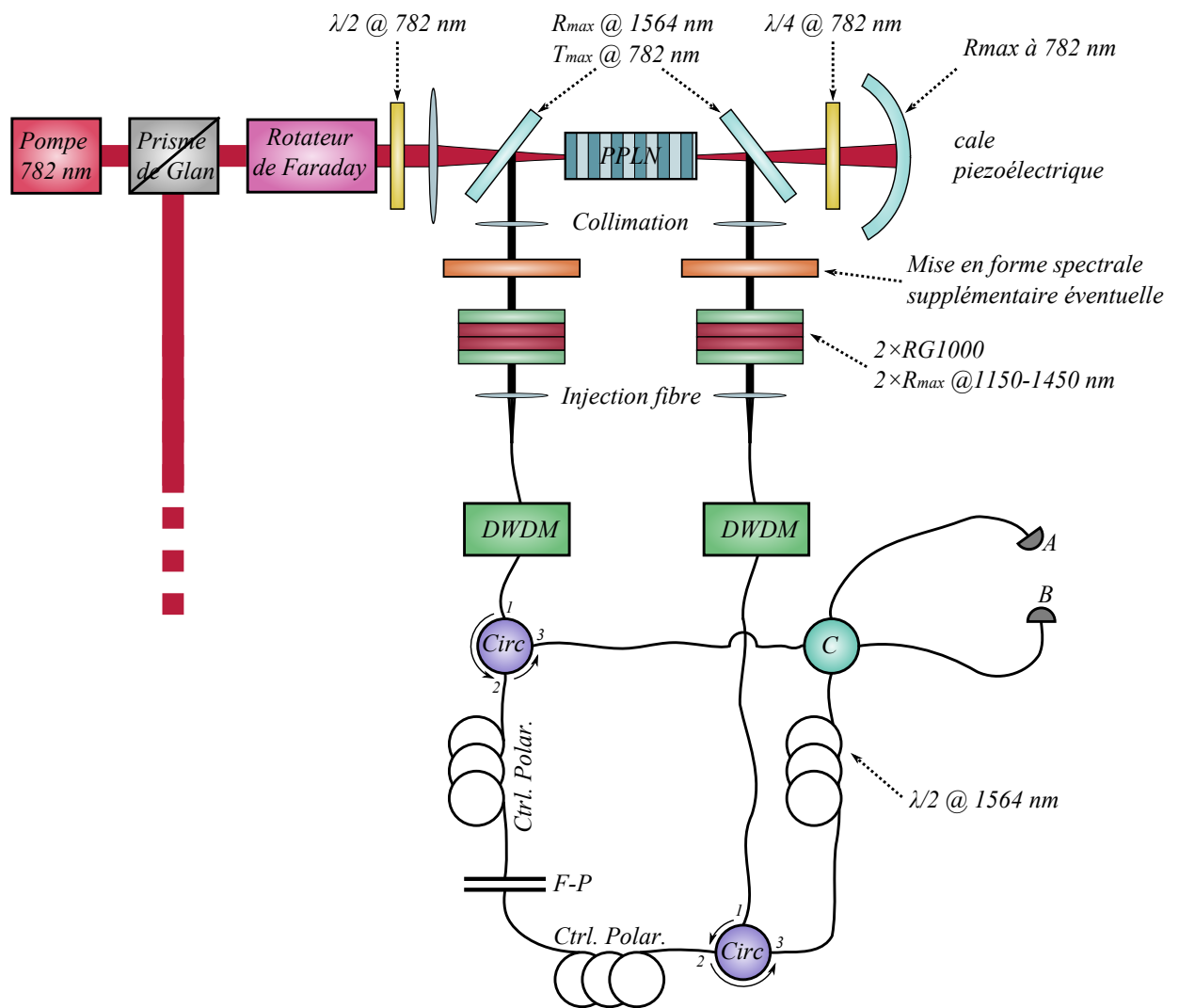


FIGURE 9.3 – Schéma possible pour réaliser l'intrication en double passage à partir d'une source de photons jumeaux basée sur la fluorescence dans un cristal de PPLN.

ASSERVISSEMENT DE LA PHASE  $\phi$  — L'asservissement de la phase  $\phi$  ne peut plus être réalisé de la même façon que dans le montage à une seule injection en utilisant un signal à une longueur d'onde éloignée de  $\Delta\lambda$  par rapport à la dégénérescence, cet écart étant choisi de manière à pouvoir séparer le signal des paires de photons à l'aide du filtre DWDM.

On peut envisager d'injecter ce signal en espace libre sur l'un des deux miroirs réfléchissant la fluorescence et de mesurer l'interférence entre les trajets associés à chaque injection. Le miroir sphérique doit alors aussi être réfléchissant à la longueur d'onde utilisée pour cet asservissement. Notons qu'il est expérimentalement délicat de faire en sorte que ce signal d'asservissement soit bien couplé à la fibre : le réglage de l'injection étant réservé à l'optimisation de la collection des paires de photons, seul l'ajustement en espace libre du faisceau permet le réglage de son couplage dans la fibre et un tel ajustement possède de nombreux degrés de liberté (position transverse et longitudinale, direction, waist). De plus, ce couplage devrait autant que possible être aussi bon dans les deux fibres, alors qu'il n'est pas possible de réajuster l'une par rapport à l'autre sans s'écarter du réglage optimal pour collecter les paires de photons. Cela rend cette solution difficile à mettre en pratique.

Ensuite, les signaux de contrôle injectés dans les deux fibres peuvent être superposés. La mesure d'interférence est alors, comme dans le montage précédent (§. 9.1.1, Fig. 9.2), liée à la position précise du miroir, donc à la phase  $\phi$  et peut constituer un bon signal d'erreur pour contrôler la cale piézoélectrique.

ASSERVISSEMENT À L'ACCORD  $\omega_F - \omega_{p_0}/2 = 0$  COMPLEXIFIÉ — Les méthodes d'asservissement, ou de post-sélection des mesures, présentées dans la première section de ce chapitre, utilisent un signal se propageant dans l'étalon Fabry-Pérot dans le sens opposé à celui des paires de photons. Dans le présent montage, les deux sens sont utilisés, cette solution est donc impossible à mettre en œuvre telle quelle. Il est nécessaire soit d'injecter un signal de mesure de la transmission par un autre moyen, soit de s'assurer de l'absence absolue de fluctuation à la fois de la fréquence du laser et du filtre, ce qui, de fait, n'est pas le cas.

Nous avons étudié quelques manières d'injecter un signal, mais aucune ne nous a paru suffisamment simple pour être mise en œuvre de manière réaliste.

## 9.2 Fluorescence en cavité résonante

### Principe —

Le principe de la génération de fluorescence en cavité est représenté en Figure 9.4. Les principales différences avec le premier montage que nous avons décrit (§. 9.1.1) est la disparition du filtre Fabry-Pérot fibré et l'insertion d'un second miroir sphérique de coefficient de réflexion  $R_0$  à 1564 nm avant le cristal de fluorescence. Ce second miroir ayant une transmission maximale à 782 nm, la propagation du faisceau de pompe suit le même principe que précédemment.

La cavité n'est donc résonante qu'à la longueur d'onde des paires de photons produits. Ainsi, les modes de création des photons de fluorescence ne forment plus un continuum mais correspondent aux modes propres de la cavité physique. Le coefficient  $R_0$  est choisi de sorte que la finesse soit suffisante pour produire des raies étroites distinctes. En faisant en sorte qu'une des raies soit centrée sur la fréquence de dégénérescence et en rejetant tous les autres modes, le montage permet d'obtenir une source de paires de photons dégénérés en fréquence dont la bande passante est celle d'un mode longitudinal de cavité. Connaissant la longueur de la cavité, c'est donc le coefficient  $R_0$  qui fixe la bande passante de la source.

Si la bande passante du filtre DWDM est plus grande que le demi-ISL de la cavité, l'élimination des pics voisins peut être obtenue en disposant un étalon Fabry-Pérot centré sur la dégénérescence

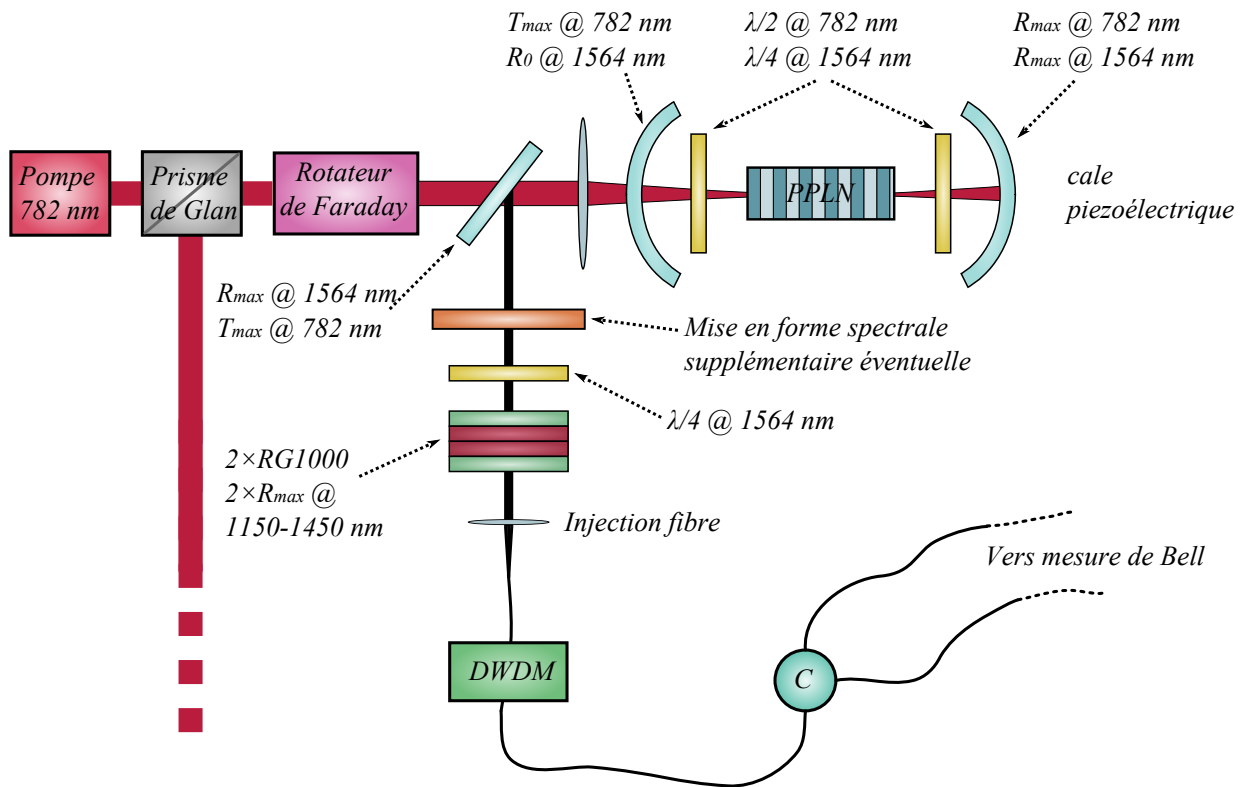


FIGURE 9.4 – Schéma possible pour réaliser l'intrication en cavité à partir d'une source de photons jumeaux basée sur la fluorescence dans un cristal de PPLN.

et dont l'ISL n'est pas une fraction entière de celui de la cavité : une combinaison appropriée des deux ISL devrait permettre un recouvrement maximum des modes situés à la fréquence de dégénérescence, tout en minimisant le recouvrement entre les autres modes dans la bande passante du filtre DWDM. La largeur de mode de l'étalon doit être environ un ordre de grandeur par rapport à la largeur de mode de la cavité. Cette situation peut correspondre aux cas (6) ou (7) étudiés au Chapitre 8 (voir Figs. 8.3 et 8.4), si ce n'est que le filtre étroit est constitué par la cavité elle-même et non plus par le filtre Fabry-Pérot fibré utilisé dans le montage de la section précédente.

### Intérêt —

Le principal intérêt d'un tel montage est de réaliser un filtrage spectral étroit qui, nous l'espérons, sera exempt de dépendance en polarisation. Au cas où il ne le serait pas naturellement, il sera toujours possible d'insérer dans la cavité un élément permettant de corriger cette biréfringence.

Également, la phase de l'état intriqué est naturellement stable si la cavité est asservie. Cet asservissement peut être réalisé à partir d'un signal injecté dans la cavité en dehors des instants d'ouverture des détecteurs. Un tel multiplexage temporel assure l'absence de bruit parasite lors de la mesure des corrélations.

Par ailleurs, ce montage permet de connaître précisément le mode dans lequel est émise la fluorescence à la dégénérescence. Non seulement la raie fréquentielle, mais également le mode spatial. Celui-ci est un mode gaussien dont le waist est déterminé par le rayon de courbure des miroirs de la cavité. En particulier, lorsque la cavité est correctement réglée, le faisceau est par définition identique après un aller-retour. Cette stationnarité assure que le couplage des paires créées dans les deux directions sera identique de par l'identité de leur mode spatial.

### 9.3 Conclusion

Nous avons étudié la faisabilité de quelques montages envisagés pour réaliser l'intrication, à partir de la source de photons jumeaux proposée au Chapitre 7. Nous avons montré que, pour une raison matérielle, à savoir la sensibilité en polarisation des étalons Fabry-Pérot étroits, les montages envisagés au début de cette thèse se sont avérés irréalisables. Nous proposons donc de s'orienter vers une réalisation de l'intrication en polarisation par une mise en cavité de la fluorescence, solution déjà adoptée par plusieurs équipes mais qui n'a pas encore été appliquée dans un contexte rassemblant l'ensemble des contraintes du projet e-Quanet.

# Conclusion générale et perspectives

Dans ce manuscrit, nous avons rapporté différents aspects de la conception d'une source dont l'objectif est de s'intégrer dans un réseau de communications quantique où l'information se propage de manière fibrée, aux longueurs d'onde des télécommunications. Les photons sont mis en forme temporellement et spectralement pour être compatibles avec toutes les contraintes qu'impose un tel projet, à savoir une faible dégradation de la fidélité lors de la propagation et une compatibilité avec les mémoires quantiques qui sont au cœur d'un tel réseau.

À travers une étude théorique générale de toute source de paires de photons jumeaux basée sur la fluorescence paramétrique (Chap. 5), nous avons mis en évidence de manière quantitative le compromis nécessaire entre brillance et qualité. Outre l'influence du mode de séparation des photons d'une paire et de la dissymétrie de leurs largeurs spectrales, ainsi que l'effet du bruit — qu'il provienne de photons parasites ou des détecteurs —, cette étude a mis en évidence le rôle néfaste des pertes globales entre la génération et la détection.

En premier lieu, la collection dans une fibre optique des paires de photons produits par fluorescence paramétrique est une source importante de pertes. Nous avons étudié ce problème de manière théorique (Chap. 6) en développant un calcul suffisamment général pour pouvoir être appliqué à toute source en configuration colinéaire, quelle que soit la durée (donc la largeur spectrale) du faisceau de pompe et son profil transverse. Nous avons ainsi montré que les conditions optimales de focalisation du faisceau de pompe gaussien et de collection des paires par la fibre optique étaient universelles. Il est important de souligner que c'est sur le critère des corrélations quantiques que ces conditions ont été déterminées. Ce résultat conduit à ce qu'en fin de compte, après optimisation, la probabilité d'obtenir une paire en sortie de fibre est proportionnelle à l'énergie de l'impulsion de pompe et à la longueur du cristal.

Cette étude théorique de la fluorescence paramétrique a également montré que les conditions maximisant le *nombre* de photons collectés dans la fibre n'étaient pas tout à fait optimales du point de vue du *taux de couplage* dans la fibre. Cette information est importante au regard du compromis brillance – qualité que nous venons d'évoquer : pour atteindre une fidélité optimale, le dispositif de collection, de filtrage, comme tous les éléments situés en aval de la génération ne sont pas les seuls paramètres à ajuster. Les conditions de pompage du processus non-linéaire doivent aussi être choisies afin de permettre non pas une brillance maximale, mais un taux de couplage optimal. Ainsi, une optimisation classique du processus non-linéaire, bien qu'elle permette de se rapprocher d'une configuration optimale, n'est pas totalement satisfaisante.

Pour permettre d'optimiser le processus de fluorescence paramétrique en fonction du taux de couplage optimal qu'il permet d'atteindre, et non de la simple puissance collectée, nous avons développé une technique expérimentale (Chap. 8) permettant de mesurer précisément ce taux de couplage indépendamment de tout autre paramètre. Par de simples mesures de taux de détections sur chaque voie de la source et du taux de coïncidences, accessibles en situation de fonctionnement et à tout moment, ainsi qu'une mesure *a priori* de quelques paramètres constants de l'expérience (forme du filtrage spectral, pertes en ligne), il est possible d'extraire la valeur absolue du taux

de couplage ainsi que la probabilité qu'une paire de photons soit *générée* dans la bande passante de la source (et non pas simplement détectée). Cette méthode a été appliquée à notre source. Le taux de couplage mesuré s'est avéré excellent (74 %) quoiqu'inférieur à la valeur prédite par notre théorie (88 %), mais nous n'avons pas épuisé toute notre marge de progrès expérimental (épuration du faisceau de pompe, lentilles de focales parfaitement adaptées).

Cette étude nous a également permis d'explorer de manière théorique plusieurs combinaisons de filtrage, et de sélectionner celle dont la forme spectrale est optimale pour la qualité de la source. Pour une bande de l'ordre du nanomètre ou plus, il existe des filtres apodisés (proches d'un profil rectangulaire) qui s'approchent de la solution théorique optimale. Pour la bande passante étroite du projet eQuanet, le filtrage requiert l'usage de cavités Fabry-Pérot. Nous avons montré que, certes le profil spectral Lorentzien est moins favorable, mais également que la mise en cascade de plusieurs cavités – ce qui peut être préférable – n'est pas pénalisante, aux pertes d'insertion près de chaque filtre additionnel, qui peuvent être très faibles.

La visibilité des interférences qui peut être atteinte à partir de la source de photons intriqués prévue pour le projet e-Quanet sera limitée par celle de la source de photons jumeaux que nous avons réalisée et présentée en détails au Chapitre 7. En cherchant à optimiser cette dernière, notre travail garantit que l'extension de notre source à des photons intriqués sera optimale du point de vue des limitations intrinsèques dues aux paires multiples, dont la présence est le problème majeur des sources basées sur la fluorescence paramétrique. La réalisation d'une source de photons intriqués est donc le prolongement direct du travail présenté dans ce document. Nous avons proposé deux montages (Chap. 9) permettant de réaliser cette intrication en polarisation, l'un utilisant un filtre étroit fibré et l'autre un filtrage par une mise en cavité. Si nous avons montré les avantages de la seconde solution, la première reste tout de même d'intérêt s'il est possible de réaliser des filtres fibrés étroits dont la fréquence de résonance est indépendante de la polarisation.

A court terme, il serait possible, par une mise en cavité du processus de génération du faisceau de pompe par doublement de fréquence, d'en améliorer significativement le rendement afin de se satisfaire d'une puissance crête de pompe plus faible, autorisant ainsi un plus grand taux de répétition des impulsions. Cela permettrait un meilleur débit de paires sans dégrader la qualité par une probabilité de génération par impulsion plus importante.

À plus long terme, pour améliorer davantage le rendement global d'une telle source, nous pensons qu'il serait intéressant d'explorer les possibilités que pourrait offrir une nanostructuration du cristal. Le spectre naturel de fluorescence, s'il peut être modifié par une mise en cavité résonante, pourrait également l'être par ce moyen. La théorie de la fluorescence que nous avons développée, parce qu'elle prend en compte l'aspect local de l'interaction, pourrait permettre de modéliser les effets d'une telle structuration.

# Annexes





## Annexe A

# Conventions utilisées pour la transformée de Fourier

Nous utiliserons les conventions suivantes pour la transformée de Fourier  $\check{f}$  de la fonction  $f$  :

$$\check{f}(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t) \longleftrightarrow f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \check{f}(\omega) \quad (\text{A.1})$$

$$\check{f}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \longleftrightarrow f(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \check{f}(\mathbf{k}) \quad (\text{A.2})$$

On dira que  $f$  est normalisée si :

$$\int dt |f(t)|^2 = \int \frac{d\omega}{2\pi} |\check{f}(\omega)|^2 = 1$$
$$\int d^3\mathbf{r} |f(\mathbf{r})|^2 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\check{f}(\mathbf{k})|^2 = 1$$

L'opération de convolution est définie par :

$$f * g(t) = \int dt' f(t')g(t - t')$$
$$f * g(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{r}')g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$
$$\check{f} * \check{g}(\omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \check{f}(\omega')\check{g}(\omega - \omega')$$
$$\check{f} * \check{g}(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \check{f}(\mathbf{k}')\check{g}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Dans l'espace de Fourier (variables  $\omega$  ou  $\mathbf{k}$ ), l'élément neutre pour la convolution est alors  $2\pi\delta$  où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Il est  $\delta$  dans l'espace direct  $(t, \mathbf{r})$ . En outre, on rappelle que la convolution par un Dirac décentré est l'opérateur de translation  $\hat{T}$ . Par exemple :

$$\delta(t - \Delta t) * f(t) = f(t - \Delta t) = \hat{T}_{\Delta t}f(t)$$



## Annexe B

# Calcul du taux de coïncidences dans le cas monomode spatial avec une pompe impulsienne en présence de filtrage spectral

Dans cette section, on considère une paire de photons déjà couplés dans une fibre monomode de mode spatial  $a$  (opérateur création associé  $\hat{a}^\dagger$ ). La paire va traverser un coupleur 50/50 et un filtrage spectral. Les modes spatiaux des fibres (les « voies ») de sortie du coupleur seront notés  $A$  et  $B$  (opérateurs création associés  $\hat{A}^\dagger$  et  $\hat{B}^\dagger$ ). Le deuxième port d'entrée du coupleur est dans le mode  $b$ . On posera le problème avec deux filtres distincts de transmission en amplitude  $f_A$  et  $f_B$  sur chaque voie, mais si  $f_A = f_B = f$ , le problème s'avère équivalent à un filtrage commun avant le coupleur.

Lorsque les bornes d'une intégrale ne sont pas précisées, il s'agit de  $[-\infty, +\infty]$ .

On a résumé certaines notations sur la Figure B.1

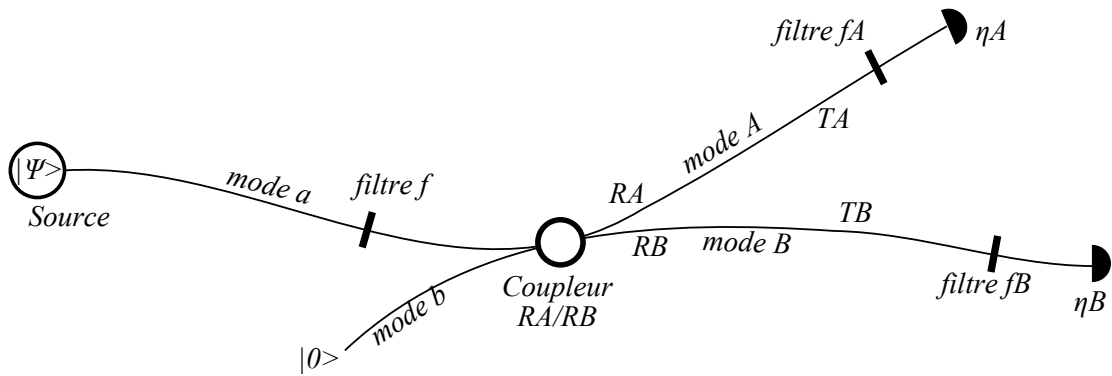


FIGURE B.1 – Schéma du dispositif et notations

### B.1 Etat de la paire de photons

Tout d'abord, dans le cas bimode spatial (accord de phase non-colinéaire par exemple), on distingue les modes  $a_s$  et  $a_i$ , et l'état du biphoton à l'entrée de la fibre s'écrit (voir par exemple Z.Y. OU [ORW99]) :

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p_0} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \tilde{a}_p(\omega_s + \omega_i - \omega_{p_0}) \Phi(\omega_s, \omega_i) \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |0\rangle$$

où :

- $p_0$  est la probabilité que le processus de création de paire se produise lors d'une impulsion. Cette probabilité est très inférieure à 1.  $|\Psi\rangle$  n'est donc pas normalisé ; parce que nous avons omis le terme  $\sqrt{1-p_0}|0\rangle$  qui ne jouera pas de rôle dans les calculs suivants,
- $\tilde{a}_p(\omega)$  est l'enveloppe spectrale en amplitude de l'onde de pompe. Il s'agit de la transformée de Fourier inverse de son enveloppe temporelle en amplitude  $a_p(t)$  :  $\tilde{a}_p(\omega) = \int dt a_p(t)e^{i\omega t}$ . La pompe est centrée sur  $\omega_{p_0}$ , et la densité de probabilité qu'un photon de pompe ait une fréquence  $\omega_p$  vaut  $|\tilde{a}_p(\omega_p - \omega_{p_0})|^2$ . La probabilité totale vaut 1, d'où la condition de normalisation  $\int \frac{d\omega_p}{2\pi} |\tilde{a}_p(\omega_p - \omega_{p_0})|^2 = 1$ , qui s'exprime aussi pour l'enveloppe temporelle :  $\int dt |a_p(t)|^2 = 1$ . On peut par exemple supposer une distribution gaussienne d'écart-type en intensité  $\sigma_p$ . Alors  $\tilde{a}_p(\omega) = (2\pi\sigma_p^2)^{-4} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma_p^2}}$ .
- $\hat{a}_s^\dagger(\omega)$  est l'opérateur création d'un photon à la fréquence  $\omega$  dans le mode spatial  $a_s$ .
- $\hat{a}_i^\dagger(\omega)$  est l'opérateur création d'un photon à la fréquence  $\omega$  dans le mode spatial  $a_i$ .
- $\Phi(\omega_s, \omega_i)$  est la fonction d'accord de phase qui restreint les fréquences possibles pour  $\omega_s$  et  $\omega_i$ . Pour une onde plane, on pourrait écrire  $\Phi(\omega_s, \omega_i) = \text{sinc}(\frac{\Delta k L}{2})$  où  $L$  est la longueur du cristal, avec  $\Delta k = k_p(\omega_s + \omega_i) - k_s(\omega_s) \cos \theta - k_i(\omega_i) \cos \theta - \frac{2\pi}{\Lambda}$  ( $\Lambda$  : période de QAP ;  $\theta$  : direction des photons).

Dans le cas monomode spatial (signal et idler sont émis dans la même direction), rien ne distingue les modes  $a_s$  et  $a_i$  (on ne s'intéresse pas à la polarisation ici) et on note le mode «  $a$  ». Dans l'état de la paire, il faut alors ajouter un facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  pour des raisons de symétrie car si on pouvait distinguer  $\hat{a}_s^\dagger(\omega_s)\hat{a}_i^\dagger(\omega_i)$  de  $\hat{a}_s^\dagger(\omega_i)\hat{a}_i^\dagger(\omega_s)$ , on ne peut plus le faire lorsque  $\hat{a}_s^\dagger = \hat{a}_i^\dagger = \hat{a}^\dagger$  :

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{p_0}{2}} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \tilde{a}_p(\omega_s + \omega_i - \omega_{p_0}) \Phi(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |0\rangle \quad (\text{B.1})$$

Nous verrons que le cas de la présence d'un filtrage suffisamment étroit, nous pourrions considérer  $\Phi$  constante. Mais la forme B.1 privée du terme  $\Phi$  est en toute rigueur invalide car elle suppose peuplés des modes d'énergie  $\hbar\omega$  infinie, et des énergies négatives ( $\omega < 0$ ).

## B.2 Evolution de l'opérateur champ électrique

On utilise des opérateurs champ normalisés (divisés par un facteur  $\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 n^2 L^3}}$ ).

1. Pour ne pas « compter deux fois »  $\hat{a}^\dagger(\omega_s)\hat{a}^\dagger(\omega_i)$ , on peut poser  $\omega_s = \omega$  et  $\omega_s + \omega_i = \omega_p$ , et restreindre l'intégrale à  $[\frac{\omega_p}{2}, +\infty]$  si l'on suppose que  $\Phi$  est symétrique par rapport à  $\frac{\omega_p}{2}$ . Cela revient à écrire

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1 : \omega\rangle |2 : \omega_p - \omega\rangle + |1 : \omega_p - \omega\rangle |2 : \omega\rangle \right)$$

avec

$$|1 : \omega\rangle |2 : \omega_p - \omega\rangle = \sqrt{p_0} \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \int_{\frac{\omega_p}{2}}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{a}_p(\omega_p - \omega_{p_0}) \Phi(\omega_p, \omega) \hat{a}_1^\dagger(\omega) \hat{a}_2^\dagger(\omega_p - \omega) |0\rangle$$

sachant que  $\hat{a}_1^\dagger$  et  $\hat{a}_2^\dagger$  désignent les opérateurs création associés aux photons 1 et 2 dans le même mode spatial. En seconde quantification, la distinction entre ces opérateurs n'a pas de sens :  $\hat{a}_1^\dagger = \hat{a}_2^\dagger = \hat{a}^\dagger$ . Donc, si  $\Phi$  est symétrique en  $\omega$  par rapport à  $\frac{\omega_p}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned} |1 : \omega\rangle |2 : \omega_p - \omega\rangle + |1 : \omega_p - \omega\rangle |2 : \omega\rangle &= \sqrt{p_0} \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{a}_p(\omega_p - \omega_{p_0}) \Phi(\omega_p, \omega) \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega_p - \omega) |0\rangle \\ \sqrt{2}|\Psi\rangle &= \sqrt{p_0} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \tilde{a}_p(\omega_s + \omega_i - \omega_{p_0}) \Phi(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |0\rangle \end{aligned}$$

Le champ électrique complexe au point de la fibre A où se trouve le détecteur s'écrit  $\hat{E}_A^{(+)} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{A}(\omega)$ . Au bout d'un temps  $t$ , il a évolué librement :

$$\hat{E}_A^{(+)}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t}$$

De même, au niveau du détecteur en voie B, on a

$$\hat{E}_B^{(+)}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{B}(\omega) e^{-i\omega t}$$

Si  $n$  est l'indice effectif de la fibre et  $r$  la distance de l'entrée de la fibre au détecteur, le temps  $t = \frac{rn}{c}$  correspond au temps de la propagation libre d'un photon de la paire vers le détecteur.  $\left\| \hat{E}_A^{(+)}(t) |\Psi\rangle \right\|^2$  donne donc la probabilité que l'état  $|\Psi\rangle$  produise le champ électrique d'un photon sur le détecteur de la voie A au temps  $t$ . La densité de probabilité d'un coup sur la voie A vaut  $p_A(t) = \eta_A \left\| \hat{E}_A^{(+)}(t) |\Psi\rangle \right\|^2$ , où  $\eta_A$  est le rendement quantique du détecteur. La probabilité d'un coup sur la voie A pendant une impulsion vaut  $P_A = \int dt p_A(t) = \eta_A \int dt \left\| \hat{E}_A^{(+)}(t) |\Psi\rangle \right\|^2$ .

### B.3 Filtrage spectral et pertes

En présence des filtres spectraux sur les voies A et B, les fréquences du champ sont restreintes par la fonction de distribution des filtres.

$$\begin{aligned} \hat{E}_A^{(+)}(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} f_A(\omega - \omega_A) \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_B^{(+)}(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} f_B(\omega - \omega_B) \hat{B}(\omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

$f_A$  et  $f_B$  sont des fonctions paires (nous aurons besoin plus tard de cette hypothèse) centrées en 0 où elles valent 1 en l'absence de perte. Sur la voie A (resp. B), le filtre est centrée en  $\omega_A$  (resp.  $\omega_B$ ).

On peut inclure dans les fonctions  $f_A$  et  $f_B$  les pertes en ligne en intensité,  $T_A$  et  $T_B$ , sous forme de coefficients multiplicatifs  $\sqrt{T_A}$  et  $\sqrt{T_B}$  indépendants de  $\omega$ . Par exemple, pour des filtres de transmission lorentzienne de demi-largeur à mi-hauteur  $\Gamma$ , on pourra écrire :

$$\begin{aligned} f_A(\omega) &= \sqrt{T_A} \frac{\Gamma^2}{\omega^2 + \Gamma^2} \\ f_B(\omega) &= \sqrt{T_B} \frac{\Gamma^2}{\omega^2 + \Gamma^2} \end{aligned}$$

où  $T_A$  et  $T_B$  comprennent les pertes d'insertion des filtres.

Dans le calcul qui va suivre, on prendra en compte les pertes et on supposera que  $f_A(0) = \sqrt{T_A}$  et  $f_B(0) = \sqrt{T_B}$ , quelle que soit la forme des filtres.

## B.4 Coupleur

Puisque la propagation est libre le long de la fibre, le champ sur la voie A s'exprime simplement en fonction des entrées  $a$  et  $b$  du coupleur  $R_A/R_B$  :

$$\begin{aligned}\hat{E}_A^{(+)}(t) &= -\iota\sqrt{R_A} \int \frac{d\omega}{2\pi} f_A(\omega - \omega_A)\hat{a}(\omega)e^{-i\omega t} + \sqrt{R_B} \int \frac{d\omega}{2\pi} f_A(\omega - \omega_A)\hat{b}(\omega)e^{-i\omega t} \\ \hat{E}_B^{(+)}(t) &= \sqrt{R_B} \int \frac{d\omega}{2\pi} f_B(\omega - \omega_B)\hat{a}(\omega)e^{-i\omega t} - \iota\sqrt{R_A} \int \frac{d\omega}{2\pi} f_B(\omega - \omega_B)\hat{b}(\omega)e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation entre les modes  $a$  et  $b$  d'entrée du coupleur et les modes  $A$  et  $B$  de sortie :

$$\begin{aligned}\hat{A} &= -\iota\sqrt{R_A}\hat{a} + \sqrt{R_B}\hat{b} \\ \hat{B} &= \sqrt{R_B}\hat{a} - \iota\sqrt{R_A}\hat{b}\end{aligned}$$

## B.5 Expression du taux de coïncidences

Lorsque le champ est dans un état  $|\Psi\rangle$ , on écrit la probabilité conjointe d'une photodétection à l'instant  $t_1$  en voie A et à l'instant  $t_2$  en voie B de la manière suivante [Gla63] :

$$\begin{aligned}p_{AB}(t_1, t_2) &= \eta_A\eta_B \langle \Psi | \hat{E}_B^{(-)}(t_2)\hat{E}_A^{(-)}(t_1)\hat{E}_A^{(+)}(t_1)\hat{E}_B^{(+)}(t_2) | \Psi \rangle \\ &= \eta_A\eta_B \left| \langle 0 | \hat{E}_A^{(+)}(t_1)\hat{E}_B^{(+)}(t_2) | \Psi \rangle \right|^2 \quad (\text{module}) \\ &= \eta_A\eta_B \left\| \hat{E}_A^{(+)}(t_1)\hat{E}_B^{(+)}(t_2) | \Psi \right\|^2 \quad (\text{norme})\end{aligned}$$

Pour une source continue, on chercherait à calculer

$$P_{AB}^{(\text{cont.})} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{+\frac{\Delta T}{2}} d\tau p_{AB}(t, t + \tau)$$

c'est à dire la probabilité moyenne (mesurée pendant un temps  $T$ ) qu'un coup en B suive (ou précède) un coup en A dans une fenêtre de temps de durée  $\Delta T$ . En régime permanent, cette probabilité est indépendante de  $t$ .

Lorsque la source est impulsionnelle et que les impulsions sont suffisamment séparées pour qu'elles ne se chevauchent pas dans le temps, on peut, pour chacune d'entre elles, calculer une probabilité de coïncidence indépendante de la probabilité de coïncidence pour l'impulsion suivante (ou précédente). En prenant la fonction  $a_p(t)$  comme une gaussienne, par exemple, on considère bien en pratique une seule impulsion. En supposant que la durée de la fenêtre de coïncidence est la durée des impulsions elle-même<sup>2</sup>. L'expression du taux de coïncidence par impulsion vaut :

$$P_{AB} = \int dt_1 \int dt_2 p_{AB}(t_1, t_2)$$

## B.6 Calcul

$$\hat{E}_A^{(+)}(t_1)\hat{E}_B^{(+)}(t_2) = -\iota\sqrt{R_A}\sqrt{R_B} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} f_A(\omega_1 - \omega_A)f_B(\omega_2 - \omega_B)\hat{a}(\omega_1)\hat{a}(\omega_2)e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} + \dots$$

2. i.e. une détection en A et une détection en B ayant lieu durant la même impulsion sont considérées comme une coïncidence.

où « ... » sont des termes faisant intervenir l'opérateur  $\hat{b}$  dont l'action sur le vide  $|0\rangle$  donne le vecteur nul 0.

Si les filtres sont très étroits par rapport à la fonction d'accord de phase  $\Phi(\omega_s, \omega_i)$ , on peut considérer celle-ci constante dans la bande des filtres et l'omettre dans l'expression (B.1) de  $|\Psi\rangle$  :

$$p_{AB}(t_1, t_2) = \frac{p_0}{2} R_A R_B \eta_A \eta_B \left\| \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \int \frac{d\omega_s}{2\pi} \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \tilde{a}_p(\omega_s + \omega_i - \omega_{p_0}) f_A(\omega_1 - \omega_A) f_B(\omega_2 - \omega_B) e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \hat{a}(\omega_1) \hat{a}(\omega_2) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |0\rangle \right\|^2 \quad (\text{B.2})$$

On a la relation de commutation :

$$\hat{a}(\omega_1) \hat{a}(\omega_2) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) = \left[ \hat{a}(\omega_1) \hat{a}(\omega_2), \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) \right] + \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) \hat{a}(\omega_1) \hat{a}(\omega_2)$$

Appliqué à  $|0\rangle$ , le deuxième terme donne le vecteur nul :

$$\hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) \hat{a}(\omega_1) \hat{a}(\omega_2) |0\rangle = 0$$

et ceci, que les opérateurs création soient de même fréquence que l'un des opérateurs annihilation ( $\hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}(\omega) |0\rangle = \hat{N}(\omega) |0\rangle = 0$ ) ou pas ( $\hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}(\omega') |0\rangle = 0$ )

Or, on rappelle que

$$\begin{aligned} \left[ \hat{a}(\omega_1) \hat{a}(\omega_2), \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) \right] &= (2\pi)^2 \delta(\omega_1 - \omega_s) \delta(\omega_2 - \omega_i) \\ &+ (2\pi)^2 \delta(\omega_1 - \omega_i) \delta(\omega_2 - \omega_s) \end{aligned}$$

Ainsi, (B.2) devient :

$$p_{AB}(t_1, t_2) = 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \left| \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \tilde{a}_p(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{p_0}) f_A(\omega_1 - \omega_A) f_B(\omega_2 - \omega_B) e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \right|^2$$

On reconnaît, dans le module, une transformée de Fourier inverse 2D, notée  $\check{K}(t_1, t_2)$ , de la fonction  $K(\omega_1, \omega_2) = \tilde{a}_p(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{p_0}) f_A(\omega_1 - \omega_A) f_B(\omega_2 - \omega_B)$  :

$$p_{AB}(t_1, t_2) = 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \left| \check{K}(t_1, t_2) \right|^2$$

Le calcul de la probabilité  $P_{AB}$ , permet, grâce au théorème de Plancherel, de revenir aux variables fréquentielles :

$$\begin{aligned} P_{AB} &= 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int dt_1 \int dt_2 \left| \check{K}(t_1, t_2) \right|^2 \\ &= 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \left| K(\omega_1, \omega_2) \right|^2 \end{aligned}$$

En notant,  $\mathcal{A}_p = |\tilde{a}_p|^2$ ,  $\mathcal{F}_A = |f_A|^2$  et  $\mathcal{F}_B = |f_B|^2$ , on a

$$P_{AB} = 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \mathcal{A}_p(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{p_0}) \mathcal{F}_A(\omega_1 - \omega_A) \mathcal{F}_B(\omega_2 - \omega_B)$$

En faisant les changements de variable  $\omega = \omega_1$ ,  $\omega_p = \omega_1 + \omega_2$ , on a

$$P_{AB} = 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \mathcal{A}_p(\omega_p - \omega_{p_0}) \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}_A(\omega - \omega_A) \mathcal{F}_B(\omega_p - \omega - \omega_B)$$



On note également  $\omega_0 = \frac{\omega_A + \omega_B}{2}$  le milieu des fréquences centrales des deux filtres et  $\Delta\omega = \frac{\omega_A - \omega_B}{2}$  leur demi-écart :

$$P_{AB} = 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \mathcal{A}_p(\omega_p - \omega_{p_0}) \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}_A(\omega - \omega_0 - \Delta\omega) \mathcal{F}_B(\omega_p - \omega - \omega_0 + \Delta\omega)$$

En posant  $W = \omega - \omega_0 - \Delta\omega$ , on reconnaît une convolution :

$$\begin{aligned} P_{AB} &= 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \mathcal{A}_p(\omega_p - \omega_{p_0}) \int \frac{dW}{2\pi} \mathcal{F}_A(W) \mathcal{F}_B(\omega_p - 2\omega_0 - W) \\ &= 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int \frac{d\omega_p}{2\pi} \mathcal{A}_p(\omega_p - \omega_{p_0}) \mathcal{F}_A * \mathcal{F}_B(\omega_p - 2\omega_0) \end{aligned}$$

Si on suppose  $\mathcal{F}_A$  et  $\mathcal{F}_B$  paires, en notant  $W_p = \omega_p - \omega_{p_0}$ , il apparaît un autre produit de convolution :

$$\begin{aligned} P_{AB} &= 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \int \frac{dW_p}{2\pi} \mathcal{A}_p(W_p) \mathcal{F}_A * \mathcal{F}_B(2\omega_0 - \omega_{p_0} - W_p) \\ &= 2p_0 R_A R_B \eta_A \eta_B \mathcal{A}_p * \mathcal{F}_A * \mathcal{F}_B(2\omega_0 - \omega_{p_0}) \end{aligned}$$

Afin de dissocier l'effet de la forme du filtrage spectral de l'effet des pertes indépendantes de la fréquences ( $T_A, T_B$ ), on introduit la fonction  $\Omega_2 = \frac{\mathcal{F}_A * \mathcal{F}_B}{T_A T_B}$  :

$$P_{AB} = 2p_0 R_A R_B T_A T_B \eta_A \eta_B \mathcal{A}_p * \Omega_2(2\omega_0 - \omega_{p_0})$$

## B.7 Discussion

### B.7.1 Fréquence des filtres en voies A et B

On remarque que le taux de coïncidences  $P_{AB}$  ne dépend pas de  $\Delta\omega$ , l'écart entre les fréquences centrales des filtres sur les voies A et B. Il ne dépend que du désaccord  $\omega_0 - \frac{\omega_{p_0}}{2}$  entre le milieu  $\omega_0$  de ces fréquences et la fréquence de dégénérescence associée au centre du spectre de la pompe.

### B.7.2 Pompe monochromatique

Lorsque la pompe est monochromatique ( $\mathcal{A}_p(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ ), la probabilité de coïncidences s'écrit

$$P_{AB}^{(\text{mono})} = 2p_0 R_A R_B T_A T_B \eta_A \eta_B \Omega_2(2\omega_0 - \omega_{p_0})$$

### B.7.3 Pertes liées à la largeur spectrale de la pompe

On peut écrire :

$$P_{AB} = P_{AB}^{(\text{mono})} T_p(2\omega_0 - \omega_{p_0})$$

où  $T_p(2\omega_0 - \omega_{p_0}) < 1$  est un coefficient de transmission représentant les pertes dues à la non-monochromaticité de la pompe :

$$T_p(2\omega_0 - \omega_{p_0}) = \frac{\mathcal{A}_p * \Omega_2(2\omega_0 - \omega_{p_0})}{\Omega_2(2\omega_0 - \omega_{p_0})}$$

**Exemple avec des distributions gaussiennes** — Une expression simple de  $T_p$  est possible si l'on suppose la distribution spectrale de la pompe gaussienne, de même que la transmission des filtres<sup>3</sup>.

3. ce qui peut-être assez loin de la réalité pour les filtres. Par rapport à un filtrage réel lorentzien (Fabry-Pérot), ce calcul est optimiste.

On peut montrer que lorsque les filtres sont parfaitement symétriques par rapport à la fréquence de dégénérescence (ou lorsque les deux filtres sont centrés sur  $\omega_0$ ), ce coefficient vaut

$$T_p(0) = \frac{\Delta_F}{\sqrt{\Delta_F^2 + \frac{\Delta_p^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_p}{\Delta_F}\right)^2}}$$

où  $\Delta_p$  est la largeur spectrale de la pompe et  $\Delta_F$  la largeur spectrale des filtres, tous deux mesurés en intensité.

On peut alors évaluer dans ce cas simple, mais significatif, les pertes dues à l'étroitesse relative du filtre par rapport au spectre de la pompe (voir Table B.1).

$\Delta_F$	$T_p(0)$
80 GHz	100 %
1,59 GHz	99,99 %
40 MHz	91,5 %
24 MHz	80,5 %

TABLE B.1 – Pertes dues à l'étroitesse relative du filtre par rapport au spectre de la pompe. Pour une largeur spectrale de pompe de  $\Delta_p = 25$  MHz à mi-hauteur (largeur spectrale à 782 nm associée à une impulsion de pompe d'harmonique 1564 nm de durée 25 ns).

#### B.7.4 Filtres rectangulaires

On suppose que  $\mathcal{F}_A$  et  $\mathcal{F}_B$  sont des filtres rectangulaires de largeur respective  $\Delta\omega_A$  et  $\Delta\omega_B$ . On a  $\mathcal{F}_A(0) = T_A$  et  $\mathcal{F}_B(0) = T_B$ , puisqu'on a inclus les pertes en ligne dans les filtres.

La convolution de  $\mathcal{F}_A * \mathcal{F}_B(2\omega)$  donne un trapèze pair de grande base  $\frac{\Delta\omega_A + \Delta\omega_B}{2}$  et de petite base  $\frac{|\Delta\omega_A - \Delta\omega_B|}{2}$ . La valeur en  $\omega = 0$  de la fonction  $\Omega_2 = \frac{\mathcal{F}_A * \mathcal{F}_B}{T_A T_B}$  est

$$\Omega_2(0) = \frac{\min(\Delta\omega_A, \Delta\omega_B)}{2\pi} = \min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B)$$

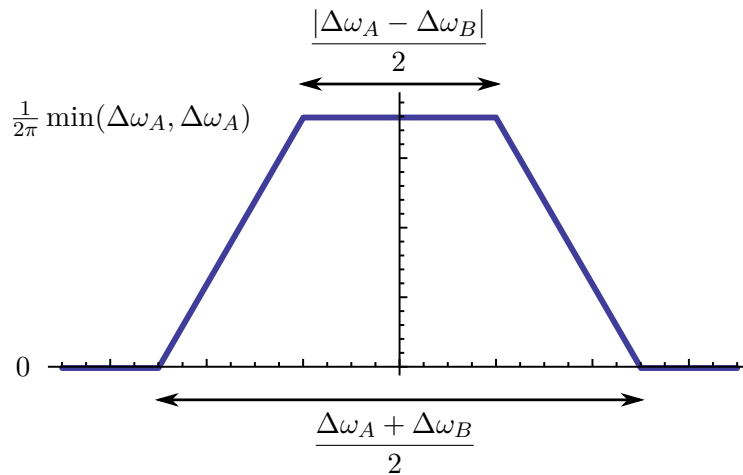


FIGURE B.2 – Fonction  $\Omega_2(2\omega)$  résultant de la convolution de deux filtres rectangulaires de largeurs  $\Delta\omega_A$  et  $\Delta\omega_B$ .

Pour une pompe supposée monochromatique, on retrouve donc le résultat (5.13) du Chapitre 5 :

$$P_{CV}^{(S)} = 2p_0 \min(\Delta\nu_A, \Delta\nu_B) R_A R_B T_A T_B \eta_A \eta_B$$



# Bibliographie

- [AAB<sup>+</sup>98] A. Apostolakis, E. Aslanides, G. Backenstoss, P. Bargassa, O. Behnke, A. Benelli, V. Bertin, F. Blanc, P. Bloch, P. Carlson, M. Carroll, E. Cawley, G. Chardin, M. B. Chertok, A. Cody, M. Dejaradin, J. Derre, A. Ealet, C. Eleftheriadis, R. Ferreira-Marques, W. Fetscher, M. Fidecaro, A. Filipcic, D. Francis, J. Fry, E. Gabathuler, R. Gamet, H. J. Gerber, A. Go, C. Guyot, A. Haselden, P. J. Hayman, F. Henry-Couannier, R. W. Hollander, E. Hubert, K. Jon-And, P. R. Kettle, C. Kochowski, P. Kokkas, R. Kreuger, R. Le Gac, F. Leimgruber, I. Mandic, N. Manthos, G. Marel, M. Mikuz, J. Miller, F. Montanet, A. Muller, T. Nakada, B. Pagels, I. Papadopoulos, P. Pavlopoulos, A. Policarpo, G. Polivka, R. Rickenbach, B. L. Roberts, T. Ruf, M. Schäfer, L. A. Schaller, T. Schietinger, A. Schopper, P. Schune, L. Tauscher, C. Thibault, F. Touchard, C. Touramanis, C. W. E. Van Eijk, S. Vlachos, P. Weber, O. Wigger, M. Wolter, C. Yeche, and D. Zavrtanik. An epr experiment testing the non-separability of the  $k^0 - barK^0$  wave function. *Phys. Lett. B*, 422(1-4) :339 – 348, 1998.
- [ABDP62] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P. S. Pershan. Interactions between light waves in a nonlinear dielectric. *Phys. Rev.*, 127(6) :1918–1939, Sep 1962.
- [ACGT72] F. T. Arecchi, Eric Courtens, Robert Gilmore, and Harry Thomas. Atomic coherent states in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 6(6) :2211–2237, Dec 1972.
- [ADR82] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49(25) :1804–1807, Dec 1982.
- [AG05] A. Aspect and P. Grangier. *Optique Quantique 2 : photons*. Ecole Polytechnique, 2005.
- [AGM06] Antonio Acín, Nicolas Gisin, and Lluís Masanes. From bell’s theorem to secure quantum key distribution. *Phys. Rev. Lett.*, 97(12) :120405, Sep 2006.
- [AGR81] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47(7) :460–463, Aug 1981.
- [AGR82] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment : A new violation of bell’s inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49(2) :91–94, Jul 1982.
- [AJK05] J. Altepeter, E. Jeffrey, and P. Kwiat. Phase-compensated ultra-bright source of entangled photons. *Opt. Express*, 13(22) :8951–8959, 2005.
- [Alb06] M.A. Albota. *Single-Photon Frequency Upconversion for Long-Distance Quantum Teleportation and Communication*. PhD thesis, 2006.
- [All04] Romain Alléaume. *Réalisation expérimentale de sources de photons uniques, caractérisation et application à la cryptographie quantique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, Novembre 2004.
- [Asp99] A. Aspect. Bell’s inequality test : more ideal than ever. *Nature*, 398(6724) :189–190, 1999.
- [ATM<sup>+</sup>04] R. Alléaume, F. Treussart, G. Messin, Y. Dumeige, J.F. Roch, A. Beveratos, R. Brouri-Tualle, J.P. Poizat, and P. Grangier. Experimental open-air quantum key distribution with a single-photon source. *New Journal of Physics*, 6(1) :92, 2004.
- [AWS06] M.A. Albota, F.N.C. Wong, and J.H. Shapiro. Polarization-independent frequency conversion for quantum optical communication. *J. Opt. Soc. Am. B*, 23(5) :918–924, 2006.

- [BA57] D. Bohm and Y. Aharonov. Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky. *Phys. Rev.*, 108(4) :1070–1076, Nov 1957.
- [BA87] JS Bell and A. Aspect. *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics : Collected Papers on Quantum Philosophy*. Cambridge University Press, 1987.
- [BB<sup>+</sup>84] C.H. Bennett, G. Brassard, et al. Quantum cryptography : Public key distribution and coin tossing. In *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, volume 175. Bangalore, India, 1984.
- [BBG<sup>+</sup>01] Alexios Beveratos, Rosa Brouri, Thierry Gacoin, Jean-Philippe Poizat, and Philippe Grangier. Nonclassical radiation from diamond nanocrystals. *Phys. Rev. A*, 64(6) :061802, Nov 2001.
- [BBG<sup>+</sup>02] Alexios Beveratos, Rosa Brouri, Thierry Gacoin, André Villing, Jean-Philippe Poizat, and Philippe Grangier. Single photon quantum cryptography. *Phys. Rev. Lett.*, 89(18) :187901, Oct 2002.
- [BBPG00] Rosa Brouri, Alexios Beveratos, Jean-Philippe Poizat, and Philippe Grangier. Photon anti-bunching in the fluorescence of individual color centers in diamond. *Opt. Lett.*, 25(17) :1294–1296, 2000.
- [BBPG01] A. Beveratos, R. Brouri, J.P. Poizat, and P. Grangier. Bunching and antibunching from single nv color centers in diamond. *Quantum Communication, Computing, and Measurement 3*, pages 261–267, 2001.
- [Bel64] J.S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, 1(3) :195–200, 1964.
- [Bel81] J.S. Bell. Bertlmann's socks and the nature of reality. *Le Journal de Physique – Colloques*, 42(C2) :2–2, 1981.
- [Bel86] J.S. Bell. Six possible worlds of quantum mechanics. In *Possible worlds in humanities, arts and sciences : proceedings of Nobel Symposium 65*, page 359. Walter de Gruyter, 1986.
- [Bel90] J.S. Bell. Against « measurement ». *Physics World*, 3(8) :33–40, 1990.
- [BGTZ99] J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel, and H. Zbinden. Pulsed energy-time entangled twin-photon source for quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, 82(12) :2594–2597, Mar 1999.
- [BK68] G. D. Boyd and D. A. Kleinman. Parametric interaction of focused gaussian light beams. *J. Appl. Phys.*, 39(8) :3597–3639, 1968.
- [BK10] AA Bukach and S.Y. Kilin. Creation of entangled state between two spaced nv centers in diamond. *Opt. Spectrosc.*, 108(2) :254–266, 2010.
- [BKB<sup>+</sup>02] A. Beveratos, S. Kühn, R. Brouri, T. Gacoin, J.-P. Poizat, and P. Grangier. Room temperature stable single-photon source. *Eur. Phys. J. D*, 18(2) :191–196, feb 2002.
- [BLP82] VB Berestetskii, EM Lifshitz, and LP Pitaevskii. *Quantum Electrodynamics*. Course of Theoretical Physics. Butterworth-Heinemann, 2nd edition, 1982.
- [BLPS90] K. J. Blow, Rodney Loudon, Simon J. D. Phoenix, and T. J. Shepherd. Continuum fields in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 42(7) :4102–4114, Oct 1990.
- [BLTO99] Christian Brunel, Brahim Lounis, Philippe Tamarat, and Michel Orrit. Triggered source of single photons based on controlled single molecule fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, 83(14) :2722–2725, Oct 1999.
- [Boh34] N. Bohr. *Atomic Theory and the Description of Nature*. Cambridge University Press, 1934.
- [Boh35] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48(8) :696–702, Oct 1935.
- [Boh52] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Phys. Rev.*, 85(2) :166–179, Jan 1952.
- [Boy08] R.W. Boyd. *Nonlinear optics*. Academic Press, 2008.
- [BQY<sup>+</sup>08] Xiao-Hui Bao, Yong Qian, Jian Yang, Han Zhang, Zeng-Bing Chen, Tao Yang, and Jian-Wei Pan. Generation of narrow-band polarization-entangled photon pairs for atomic quantum memories. *Phys. Rev. Lett.*, 101(19) :190501, Nov 2008.

- [Bri95] J. Bricmont. Contre la philosophie de la mécanique quantique. *Les Sciences et la philosophie. Quatorze essais de rapprochement*, pages 131–179, 1995.
- [BVW01] Simon Brattke, Benjamin T. H. Varcoe, and Herbert Walther. Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 86(16) :3534–3537, Apr 2001.
- [CHSH69] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23(15) :880–884, Oct 1969.
- [CRB<sup>+</sup>10] T Chanelière, J Ruggiero, M Bonarota, M Afzelius, and J-L Le Gouët. Efficient light storage in a crystal using an atomic frequency comb. *New Journal of Physics*, 12(2) :023025, 2010.
- [DCG94] Liberato De Caro and Augusto Garuccio. Reliability of bell-inequality measurements using polarization correlations in parametric-down-conversion photon sources. *Phys. Rev. A*, 50(4) :R2803–R2805, Oct 1994.
- [Ein71] A. Einstein. *The Born-Einstein letters : correspondence between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916-1955, with commentaries by Max Born*. Macmillan, London, 1971.
- [Eke91] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67(6) :661–663, Aug 1991.
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47(10) :777–780, May 1935.
- [Fab07] Claude Fabre. Optique quantique : Du monomode au multimode. Cours de l’école d’été des Houches, Septembre 2007.
- [FC72] Stuart J. Freedman and John F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28(14) :938–941, Apr 1972.
- [Fey51] Richard P. Feynman. An operator calculus having applications in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 84(1) :108–128, Oct 1951.
- [FHP<sup>+</sup>07] Alessandro Fedrizzi, Thomas Herbst, Andreas Poppe, Thomas Jennewein, and Anton Zeilinger. A wavelength-tunable fiber-coupled source of narrowband entangled photons. *Opt. Express*, 15(23) :15377–15386, 2007.
- [FK85] A. Feisst and P. Koidl. Current induced periodic ferroelectric domain structures in linbo3 applied for efficient nonlinear optical frequency mixing. *Appl. Phys. Lett.*, 47(11) :1125–1127, 1985.
- [FKW05] M. Fiorentino, C. Kuklewicz, and F. Wong. Source of polarization entanglement in a single periodically poled ktiopo4 crystal with overlapping emission cones. *Opt. Express*, 13(1) :127–135, 2005.
- [FMK<sup>+</sup>03] M. Fiorentino, G. Messin, CE Kuklewicz, FNC Wong, and JH Shapiro. Ultrabright tunable photon-pair source with total-flux polarization-entanglement. OSA, 2003.
- [FMK<sup>+</sup>04] Marco Fiorentino, Gaetan Messin, Christopher E. Kuklewicz, Franco N. C. Wong, and Jeffrey H. Shapiro. Generation of ultrabright tunable polarization entanglement without spatial, spectral, or temporal constraints. *Phys. Rev. A*, 69(4) :041801, 2004.
- [Foc32] V. Fock. Konfigurationsraum und zweite quantelung. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 75(9) :622–647, 1932.
- [Fra89] J. D. Franson. Bell inequality for position and time. *Phys. Rev. Lett.*, 62(19) :2205–2208, May 1989.
- [FS05] Mikio Fujiwara and Masahide Sasaki. Multiphoton discrimination at telecom wavelength with charge integration photon detector. *Appl. Phys. Lett.*, 86(11) :111119, 2005.
- [FT76] Edward S. Fry and Randall C. Thompson. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 37(8) :465–468, Aug 1976.
- [FUH<sup>+</sup>09] A. Fedrizzi, R. Ursin, T. Herbst, M. Nespoli, R. Prevedel, T. Scheidl, F. Tiefenbacher, T. Jennewein, and A. Zeilinger. High-fidelity transmission of entanglement over a high-loss free-space channel. *Nature Physics*, 5(6) :389–392, 2009.

- [GC04] J. C. Garrison and R. Y. Chiao. Canonical and kinetic forms of the electromagnetic momentum in an ad hoc quantization scheme for a dispersive dielectric. *Phys. Rev. A*, 70(5) :053826, Nov 2004.
- [GC08] J. Garrison and R.Y. Chiao. *Quantum optics*. Oxford University Press, 2008.
- [GdCSS<sup>+</sup>06] H. Guillet de Chatellus, A.V. Sergienko, B.E.A. Saleh, M.C. Teich, and G. Di Giuseppe. Non-collinear and non-degenerate polarization-entangled photon generation via concurrent type-i parametric downconversion in ppln. *Opt. Express*, 14(21) :10060–10072, 2006.
- [GG01] N. Gisin and A. Go. Epr test with photons and kaons : Analogies. *Am. J. Phys.*, 69(3) :264–270, 2001.
- [Gla63] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130(6) :2529–2539, Jun 1963.
- [Gla65] Roy J. Glauber. Optical coherence and photon statistics. *Optique et électronique quantiques : Quantum optics and electronics. Lectures delivered at Les Houches during the 1964 session of the Summer School of Theoretical Physics, University of Grenoble*, page 63, 1965.
- [GM87] R. Ghosh and L. Mandel. Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. *Phys. Rev. Lett.*, 59(17) :1903–1905, Oct 1987.
- [Go04] A. Go. Observation of bell inequality violation in b mesons. *J. Mod. Opt.*, 51(6) :991–998, 2004.
- [GOS<sup>+</sup>08] Gayer, O., Sacks, Z., Galun, E., Arie, and A. Temperature and wavelength dependent refractive index equations for mgo-doped congruent and stoichiometric linbo3. *Applied Physics B*, 91(2) :343–348, May 2008.
- [GPK<sup>+</sup>07] S. Gröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, et al. An experimental test of non-local realism. *Nature*, 446(7138) :871–875, 2007.
- [GR66] C. Garrett and F. Robinson. Miller’s phenomenological rule for computing nonlinear susceptibilities. *IEEE J. Quantum. Electron.*, 2(8) :328 – 329, aug 1966.
- [GRA86] P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect. Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter : a new light on single-photon interferences. *Europhys. Lett.*, 1 :173, 1986.
- [Gra04] P. Grangier. Focus on single photons on demand. *New Journal of Physics*, 6, 2004.
- [GRK02] Philippe Grangier, John Rarity, and Anders Karlsson. Quantum interference and cryptographic keys : novel physics and advancing technologies (quick). *Eur. Phys. J. D*, 18(2) :139, feb 2002.
- [GT98] A.K. Ghatak and K. Thyagarajan. *Introduction to fiber optics*. Cambridge University Press, 1998.
- [GT07] Nicolas Gisin and Rob Thew. Quantum communication. *Nature Photonics*, 1(3) :165–171, Mar 2007. 10.1038/nphoton.2007.22.
- [GW97] W. P. Grice and I. A. Walmsley. Spectral information and distinguishability in type-ii down-conversion with a broadband pump. *Phys. Rev. A*, 56(2) :1627–1634, Aug 1997.
- [Har93] Lucien Hardy. Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, 71(11) :1665–1668, Sep 1993.
- [Haw99a] Margaret Hawton. Photon position operator with commuting components. *Phys. Rev. A*, 59(2) :954–959, Feb 1999.
- [Haw99b] Margaret Hawton. Photon wave functions in a localized coordinate space basis. *Phys. Rev. A*, 59(5) :3223–3227, May 1999.
- [HBBB04] John C. Howell, Ryan S. Bennink, Sean J. Bentley, and R. W. Boyd. Realization of the einstein-podolsky-rosen paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92(21) :210403, May 2004.
- [HGBl05] P. Hyllus, O. Gühne, D. Bruß, and M. Lewenstein. Relations between entanglement witnesses and bell inequalities. *Phys. Rev. A*, 72(1) :12321, 2005.

- [HHPZ09] Michael Hentschel, Hannes Hübel, Andreas Poppe, and Anton Zeilinger. Three-color sagnac source of polarization-entangled photon pairs. *Opt. Express*, 17(25) :23153–23159, 2009.
- [HLLB02] John C. Howell, Antia Lamas-Linares, and Dik Bouwmeester. Experimental violation of a spin-1 bell inequality using maximally entangled four-photon states. *Phys. Rev. Lett.*, 88(3) :030401, Jan 2002.
- [HM85] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31(4) :2409–2418, Apr 1985.
- [HOM87] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59(18) :2044–2046, Nov 1987.
- [HPEM09] Albrecht Haase, Nicolas Piro, Jürgen Eschner, and Morgan W. Mitchell. Tunable narrowband entangled photon pair source for resonant single-photon single-atom interaction. *Opt. Lett.*, 34(1) :55–57, 2009.
- [HVL<sup>+</sup>07] Hannes Hübel, Michael R. Vanner, Thomas Lederer, Bibiane Blauensteiner, Thomas Lorünser, Andreas Poppe, and Anton Zeilinger. High-fidelity transmission of polarization encoded qubits from an entangled source over 100 km of fiber. *Opt. Express*, 15(12) :7853–7862, 2007.
- [HZ86] M.A. Horne and A. Zeilinger. Einstein-podolsky-rosen interferometry. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 480(New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory) :469–474, 1986.
- [Jac] L. Jacobowicz. Inégalités de bell - de l'expérience de laboratoire de recherche à l'expérience de tp.
- [JK69] M W Jones and K C Kao. Spectrophotometric studies of ultra low loss optical glasses ii : double beam method. *Journal of Physics E*, 2(4) :331, 1969.
- [JKMW01] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White. Measurement of qubits. *Phys. Rev. A*, 64(5) :052312, Oct 2001.
- [JST94] Adel Joobeur, Bahaa E. A. Saleh, and Malvin C. Teich. Spatiotemporal coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 50(4) :3349–3361, Oct 1994.
- [JWG<sup>+</sup>07] Vincent Jacques, E Wu, Frederic Grosshans, Francois Treussart, Philippe Grangier, Alain Aspect, and Jean-Francois Roch. Experimental realization of wheeler's delayed-choice gedanken experiment. *Science*, 315(5814) :966–968, 2007.
- [JWT<sup>+</sup>05] V. Jacques, E. Wu, T. Toury, F. Treussart, A. Aspect, P. Grangier, and J.F. Roch. Single-photon wavefront-splitting interference. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 35(3) :561–565, 2005.
- [KCK<sup>+</sup>01] Yoon-Ho Kim, Maria V. Chekhova, Sergei P. Kulik, Morton H. Rubin, and Yanhua Shih. Interferometric bell-state preparation using femtosecond-pulse-pumped spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 63(6) :062301, May 2001.
- [KESC94] Paul G. Kwiat, Philippe H. Eberhard, Aephraim M. Steinberg, and Raymond Y. Chiao. Proposal for a loophole-free bell inequality experiment. *Phys. Rev. A*, 49(5) :3209–3220, May 1994.
- [KEW02] P.G. Kwiat, P.H. Eberhard, and A.G. White. Ultrabright source of polarization-entangled photons, July 23 2002. US Patent 6,424,665.
- [KFM<sup>+</sup>04] Christopher E. Kuklewicz, Marco Fiorentino, Gaetan Messin, Franco N. C. Wong, and Jeffrey H. Shapiro. High-flux source of polarization-entangled photons from a periodically poled ktiopo<sub>4</sub> parametric down-converter. *Phys. Rev. A*, 69(1) :013807, 2004.
- [KFW06a] Taehyun Kim, Marco Fiorentino, and Franco Wong. Phase-stable source of polarization-entangled photons using a polarization sagnac interferometer. In *Conference on Lasers and Electro-Optics/Quantum Electronics and Laser Science Conference and Photonic Applications Systems Technologies*, page JTU5. Optical Society of America, 2006.
- [KFW06b] Taehyun Kim, Marco Fiorentino, and Franco N. C. Wong. Phase-stable source of polarization-entangled photons using a polarization sagnac interferometer. *Phys. Rev. A*, 73(1) :012316, Jan 2006.



- [KH66] K. C. Kao and G. A. Hockham. Dielectric fibre surface waveguides for optical frequencies. *IEE Proceedings*, 113 :1151–1158, 1966. republished 1986.
- [KL66] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5(10) :1550–1567, 1966.
- [Kly88] D.N. Klyshko. *Photons and nonlinear optics*. Routledge, 1988.
- [KMW<sup>+</sup>95] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75(24) :4337–4341, Dec 1995.
- [KMWA05] Friedrich König, Elliott J. Mason, Franco N. C. Wong, and Marius A. Albota. Efficient and spectrally bright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 71(3) :033805, Mar 2005.
- [KMWS02] CE Kuklewicz, G. Messin, FNC Wong, and JH Shapiro. Quantum interference from a high-flux collinear ppktp parametric downconverter. 2002.
- [KOW01] Christian Kurtsiefer, Markus Oberparleiter, and Harald Weinfurter. High-efficiency entangled photon pair collection in type-ii parametric fluorescence. *Phys. Rev. A*, 64(2) :023802, Jul 2001.
- [KR97] Timothy E. Keller and Morton H. Rubin. Theory of two-photon entanglement for spontaneous parametric down-conversion driven by a narrow pump pulse. *Phys. Rev. A*, 56(2) :1534–1541, Aug 1997.
- [KTYH99] Jungsang Kim, Shigeki Takeuchi, Yoshihisa Yamamoto, and Henry H. Hogue. Multiphoton detection using visible light photon counter. *Appl. Phys. Lett.*, 74(7) :902–904, 1999.
- [KUW75] LR Kasday, JD Ullman, and CS Wu. Angular correlation of compton-scattered annihilation photons and hidden variables. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 25(2) :633–661, 1975.
- [KVH<sup>+</sup>90] P. G. Kwiat, W. A. Vareka, C. K. Hong, H. Nathel, and R. Y. Chiao. Correlated two-photon interference in a dual-beam michelson interferometer. *Phys. Rev. A*, 41(5) :2910–2913, Mar 1990.
- [KW08] Onur Kuzucu and Franco N. C. Wong. Pulsed sagnac source of narrow-band polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 77(3) :032314, Mar 2008.
- [KWS06] Christopher E. Kuklewicz, Franco N. C. Wong, and Jeffrey H. Shapiro. Time-bin-modulated biphotons from cavity-enhanced down-conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 97(22) :223601, 2006.
- [KWW<sup>+</sup>99] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, and Philippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60(2) :R773–R776, Aug 1999.
- [KYS08] B. E. Kardynał, Z. L. Yuan, and A. J. Shields. An avalanche-photodiode-based photon-number-resolving detector. *Nature Photonics*, 2, July 2008.
- [Leg03] A.J. Leggett. Nonlocal hidden-variable theories and quantum mechanics : An incompatibility theorem. *Foundations of Physics*, 33(10) :1469–1493, 2003.
- [LK97] CK Law and HJ Kimble. Deterministic generation of a bit-stream of single-photon pulses. *J. Mod. Opt.*, 44(11) :2067–2074, 1997.
- [LM00] B. Lounis and WE Moerner. Single photons on demand from a single molecule at room temperature. *Nature*, 407(6803) :491–493, 2000.
- [Lou73] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 1973.
- [LT05] Daniel Ljunggren and Maria Tengner. Optimal focusing for maximal collection of entangled narrow-band photon pairs into single-mode fibers. *Phys. Rev. A*, 72(6) :062301, 2005.
- [LTMP06] Daniel Ljunggren, Maria Tengner, Philip Marsden, and Matthew Pelton. Theory and experiment of entanglement in a quasi-phase-matched two-crystal source. *Phys. Rev. A*, 73(3) :032326, 2006.
- [LvHB<sup>+</sup>07] Olivier Landry, J. A. W. van Houwelingen, Alexios Beveratos, Hugo Zbinden, and Nicolas Gisin. Quantum teleportation over the swisscom telecommunication network. *J. Opt. Soc. Am. B*, 24(2) :398–403, 2007.

- [LVLG<sup>+</sup>05] S. Laurent, S. Varoutsis, L. Le Gratiet, A. Lemaître, I. Sagnes, F. Raineri, A. Levenson, I. Robert-Philip, and I. Abram. Indistinguishable single photons from a single-quantum dot in a two-dimensional photonic crystal cavity. *Appl. Phys. Lett.*, 87 :163107, 2005.
- [LYS61] W. H. Louisell, A. Yariv, and A. E. Siegman. Quantum fluctuations and noise in parametric processes. i. *Phys. Rev.*, 124(6) :1646–1654, Dec 1961.
- [Mag00] Vittorio Magni. Optimum beams for efficient frequency mixing in crystals with second order nonlinearity. *Opt. Commun.*, 184(1-4) :245 – 255, 2000.
- [MAKW02] Elliott J. Mason, Marius A. Albota, Friedrich König, and Franco N. C. Wong. Efficient generation of tunable photon pairs at 0.8 and 1.6  $\mu\text{m}$ . *Opt. Lett.*, 27(23) :2115–2117, 2002.
- [Man66] L. Mandel. Configuration-space photon number operators in quantum optics. *Phys. Rev.*, 144(4) :1071–1077, Apr 1966.
- [Man99] L. Mandel. Quantum effects in one-photon and two-photon interference. *Rev. Mod. Phys.*, 71(2) :S274–S282, Mar 1999.
- [Max72] J.C. Maxwell. *Theory of heat*. 1872.
- [MBB<sup>+</sup>04] J. McKeever, A. Boca, AD Boozer, R. Miller, JR Buck, A. Kuzmich, and HJ Kimble. Deterministic generation of single photons from one atom trapped in a cavity. *Science*, 303(5666) :1992, 2004.
- [MBR<sup>+</sup>04] C. Maurer, C. Becher, C. Russo, J. Eschner, and R. Blatt. A single-photon source based on a single  $\text{Ca}^+$  ion. *New Journal of Physics*, 6 :94, 2004.
- [MdRT<sup>+</sup>02] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, V. Scarani, H. Zbinden, and N. Gisin. Time-bin entangled qubits for quantum communication created by femtosecond pulses. *Phys. Rev. A*, 66(6) :062308, Dec 2002.
- [MdRT<sup>+</sup>04] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, M. Legré, and N. Gisin. Distribution of time-bin entangled qubits over 50 km of optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 93(18) :180502, 2004.
- [MEF<sup>+</sup>95] L. E. Myers, R. C. Eckardt, M. M. Fejer, R. L. Byer, W. R. Bosenberg, and J. W. Pierce. Quasi-phase-matched optical parametric oscillators in bulk periodically poled linbo3. *J. Opt. Soc. Am. B*, 12(11) :2102–2116, 1995.
- [Mes59] A. Messiah. *Mecanique Quantique, Volume 2*. Dunod, 1959.
- [MGS08] Huw E. Major, Corin B.E. Gawith, and Peter G.R. Smith. Gouy phase compensation in quasi-phase matching. *Opt. Commun.*, 281(19) :5036 – 5040, 2008.
- [MH04] Ronen Mukamel and John C. Howell. Bell’s inequalities for particles of arbitrary spin in fixed analyzers. *Phys. Rev. A*, 70(5) :054302, Nov 2004.
- [Mil64] R.C. Miller. Optical second harmonic generation in piezoelectric crystals. *Appl. Phys. Lett.*, 5(1) :17–19, 1964.
- [Mil95] PW Milonni. Field quantization and radiative processes in dispersive dielectric media. *J. Mod. Opt.*, 42(10) :1991–2004, 1995.
- [MKS73] Robert Maurer, Donald Keck, and Peter Schultz. Method of producing optical waveguide fibers, 1973. US Patent 3711262.
- [MMM<sup>+</sup>08] D. N. Matsukevich, P. Maunz, D. L. Moehring, S. Olmschenk, and C. Monroe. Bell inequality violation with two remote atomic qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 100(15) :150404, Apr 2008.
- [MNMS03] Aaron J. Miller, Sae Woo Nam, John M. Martinis, and Alexander V. Sergienko. Demonstration of a low-noise near-infrared photon counter with multiphoton discrimination. *Appl. Phys. Lett.*, 83(4) :791–793, 2003.
- [MSP<sup>+</sup>08] Y. Menesguen, J.L. Smirr, G. Pillet, R. Alléaume, A. Maruani, I. Zaquine, R. Frey, and L. Jacubowicz. Sources de photons intriqués en polarisation : travaux pratiques de physique quantique. *Bulletin de l’Union des Physiciens*, 102 :61–80, 2008.

- [MSRP98] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. Optimizing the photon pair collection efficiency : A step toward a loophole-free bell's inequalities experiment. *Phys. Rev. A*, 57(4) :R2267–R2269, Apr 1998.
- [MW95] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [NNNT<sup>+</sup>07] JS Neergaard-Nielsen, BM Nielsen, H. Takahashi, AI Vistnes, and ES Polzik. High purity bright single photon source. *Opt. Express*, 15(13) :7940–7949, 2007.
- [NUT<sup>+</sup>02] Yoshihiro Nambu, Koji Usami, Yoshiyuki Tsuda, Keiji Matsumoto, and Kazuo Nakamura. Generation of polarization-entangled photon pairs in a cascade of two type-i crystals pumped by femtosecond pulses. *Phys. Rev. A*, 66(3) :033816, Sep 2002.
- [NW49] T. D. Newton and E. P. Wigner. Localized states for elementary systems. *Rev. Mod. Phys.*, 21(3) :400–406, Jul 1949.
- [OL99] Z. Y. Ou and Y. J. Lu. Cavity enhanced spontaneous parametric down-conversion for the prolongation of correlation time between conjugate photons. *Phys. Rev. Lett.*, 83(13) :2556–2559, Sep 1999.
- [OM88] Z. Y. Ou and L. Mandel. Violation of bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 61(1) :50–53, Jul 1988.
- [ORW99] Z. Y. Ou, J.-K. Rhee, and L. J. Wang. Photon bunching and multiphoton interference in parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 60(1) :593–604, Jul 1999.
- [Ou88] Z. Y. Ou. Quantum theory of fourth-order interference. *Phys. Rev. A*, 37(5) :1607–1619, Mar 1988.
- [Ou97] Z Y Ou. Parametric down-conversion with coherent pulse pumping and quantum interference between independent fields. *Quantum and Semiclassical Optics : Journal of the European Optical Society Part B*, 9(4) :599–614, 1997.
- [OW00] Markus Oberparleiter and Harald Weinfurter. Cavity-enhanced generation of polarization-entangled photon pairs. *Opt. Commun.*, 183(1-4) :133 – 137, 2000.
- [OZWM90] Z. Y. Ou, X. Y. Zou, L. J. Wang, and L. Mandel. Observation of nonlocal interference in separated photon channels. *Phys. Rev. Lett.*, 65(3) :321–324, Jul 1990.
- [PA00] M. Padgett and L. Allen. Light with a twist in its tail. *Contemporary Physics*, 41(5) :275–285, 2000.
- [Pas08] R. Paschotta. *Encyclopedia of laser physics and technology*. Vch Pub, 2008.
- [PCS76] MS Piltch, CD Cantrell, and RC Sze. Infrared second-harmonic generation in nonbirefringent cadmium telluride. *J. Appl. Phys.*, 47 :3514, 1976.
- [PG75] D.N. Payne and W.A. Gambling. Zero material dispersion in optical fibres. *Electronics Letters*, 11(8) :176–178, 1975.
- [PM67] R. L. Pfleeger and L. Mandel. Interference of independent photon beams. *Phys. Rev.*, 159(5) :1084–1088, Jul 1967.
- [Pop34] K.R. Popper. *The logic of scientific discovery*. Routledge, 1934.
- [Pop82] K.R. Popper. *The open universe : An argument for indeterminism*. Routledge, 1982.
- [Pop05] V.S. Popov. On feynman method of disentangling of noncommuting operators. *Phys. Lett. A*, 342(4) :281 – 285, 2005.
- [PSK<sup>+</sup>96] T. B. Pittman, D. V. Strekalov, D. N. Klyshko, M. H. Rubin, A. V. Sergienko, and Y. H. Shih. Two-photon geometric optics. *Phys. Rev. A*, 53(4) :2804–2815, Apr 1996.
- [PV07] M.B. Plenio and S. Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quantum Information and Computation*, 7(1) :001–051, 2007.
- [RKM<sup>+</sup>01] MA Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, CA Sackett, WM Itano, C. Monroe, and DJ Wineland. Experimental violation of a bell's inequality with efficient detection. *Nature*, 409(6822) :791–794, 2001.

- [RKSS94] Morton H. Rubin, David N. Klyshko, Y. H. Shih, and A. V. Sergienko. Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 50(6) :5122–5133, Dec 1994.
- [RLMN05] Danna Rosenberg, Adriana E. Lita, Aaron J. Miller, and Sae Woo Nam. Noise-free high-efficiency photon-number-resolving detectors. *Phys. Rev. A*, 71(6) :061803, Jun 2005.
- [RSM<sup>+</sup>04] H. de Riedmatten, V. Scarani, I. Marcikic, A. Acín, W. Tittel, H. Zbinden, and N. Gisin. Two independent photon pairs versus four-photon entangled states in parametric down conversion. *J. Mod. Opt.*, 51(11) :1637–1649, 2004.
- [RT90] J. G. Rarity and P. R. Tapster. Experimental violation of bell’s inequality based on phase and momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 64(21) :2495–2498, May 1990.
- [SA88] Y. H. Shih and C. O. Alley. New type of einstein-podolsky-rosen-bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 61(26) :2921–2924, Dec 1988.
- [SDF<sup>+</sup>11] J. L. Smir, M. Deconink, R. Frey, E. Diamanti, R. Alléaume, and I. Zaquine. Optimization of spdc sources pumped by a non-monochromatic focused beam for maximum coupling into a single mode fibre. *X, X* :X–X, 2011.
- [SdRM<sup>+</sup>05] V. Scarani, H. de Riedmatten, I. Marcikic, H. Zbinden, and N. Gisin. Four-photon correction in two-photon bell experiments. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular and Optical Physics*, 32(1) :129–138, 2005.
- [SFD<sup>+</sup>11] J.L. Smir, R. Frey, E. Diamanti, R. Alléaume, and I. Zaquine. Intrinsic limitations to the quality of pulsed spontaneous parametric downconversion sources for quantum information applications. *J. Opt. Soc. Am. B*, 28(4) :832–841, Apr 2011.
- [SGG<sup>+</sup>11] J. L. Smir, S. Guilbaud, J. Ghalbouni, R. Frey, E. Diamanti, R. Alléaume, and I. Zaquine. Simple performance evaluation of pulsed spontaneous parametric down-conversion sources for quantum communications. *Opt. Express*, 19(2) :616–627, Jan 2011.
- [Sha02] Jeffrey H Shapiro. Architectures for long-distance quantum teleportation. *New Journal of Physics*, 4(1) :47, 2002.
- [Shi03] Y. Shih. Entangled photons. *IEEE J. Sel. Topics in Quantum Electron.*, 9(6) :1455–1467, 2003.
- [SHS76] A. Szilagy, A. Hordvik, and H. Schlossberg. A quasi-phase-matching technique for efficient optical mixing and frequency doubling. *J. Appl. Phys.*, 47(5) :2025–2032, 1976.
- [SK38] Ivan N. Stranski and L. Von Krastanov. Theory of orientation separation of ionic crystals. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Kl., Abt. 2B*, 146 :797–810, 1938.
- [SKI02] I. Shoji, T. Kondo, and R. Ito. Second-order nonlinear susceptibilities of various dielectric and semiconductor materials. *Opt. Quantum. Electron.*, 34(8) :797–833, 2002.
- [SKK<sup>+</sup>97] Ichiro Shoji, Takashi Kondo, Ayako Kitamoto, Masayuki Shirane, and Ryoichi Ito. Absolute scale of second-order nonlinear-optical coefficients. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(9) :2268–2294, 1997.
- [SSAS<sup>+</sup>07] S. Sauge, M. Swillo, S. Albert-Seifried, G. B. Xavier, J. Waldebäck, M. Tengner, D. Ljunggren, and A. Karlssonfio. Narrowband polarization-entangled photon pairs distributed over a wdm link for qubit networks. *Opt. Express*, 15(11) :6926–6933, 2007.
- [SSR<sup>+</sup>94] Y. H. Shih, A. V. Sergienko, Morton H. Rubin, T. E. Kiess, and C. O. Alley. Two-photon entanglement in type-II parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 50(1) :23–28, Jul 1994.
- [ST04] Bao-Sen Shi and Akihisa Tomita. Generation of a pulsed polarization entangled photon pair using a sagnac interferometer. *Phys. Rev. A*, 69(1) :013803, Jan 2004.
- [SW00] J.H. Shapiro and N.C. Wong. An ultrabright narrowband source of polarization-entangled photon pairs. *Journal of Optics B*, 2 :L1–L4, February 2000.
- [SZ97] M.O. Scully and M.S. Zubairy. *Quantum optics*. Cambridge Univ Pr, 1997.

- [TAC<sup>+</sup>10] W. Tittel, M. Afzelius, T. Chanelière, RL Cone, S. Kröll, SA Moiseev, and M. Sellars. Photon-echo quantum memory in solid state systems. *Laser & Photonics Reviews*, 4(2) :244–267, 2010.
- [TBG<sup>+</sup>98] W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden, and N. Gisin. Experimental demonstration of quantum correlations over more than 10 km. *Phys. Rev. A*, 57(5) :3229–3232, May 1998.
- [TBZG98] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin. Violation of bell inequalities by photons more than 10 km apart. *Phys. Rev. Lett.*, 81(17) :3563–3566, Oct 1998.
- [TMA76] D. E. Thompson, J. D. McMullen, and D. B. Anderson. Second-harmonic generation in gas "stack of plates" using high-power co[<sub>sub</sub>2] laser radiation. *Appl. Phys. Lett.*, 29(2) :113–115, 1976.
- [TRO94] P. R. Tapster, J. G. Rarity, and P. C. M. Owens. Violation of bell's inequality over 4 km of optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 73(14) :1923–1926, Oct 1994.
- [TSB<sup>+</sup>04] P. Trojek, C. Schmid, M. Bourennane, H. Weinfurter, and C. Kurtsiefer. Compact source of polarization-entangled photon pairs. *Opt. Express*, 12(2) :276–281, 2004.
- [TTH<sup>+</sup>05] S. Tanzilli, W. Tittel, M. Halder, O. Alibart, P. Baldi, N. Gisin, and H. Zbinden. A photonic quantum information interface. *Nature*, 437(7055) :116–120, 2005.
- [Vah03] K.J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 424(6950) :839–846, 2003.
- [WHK04] Haibo Wang, Tomoyuki Horikiri, and Takayoshi Kobayashi. Polarization-entangled mode-locked photons from cavity-enhanced spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 70(4) :043804, Oct 2004.
- [WJS<sup>+</sup>98] Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Violation of bell's inequality under strict einstein locality conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 81(23) :5039–5043, Dec 1998.
- [WM06] DF Walls and G.J. Milburn. *Quantum optics*. Springer, 2006.
- [WPA<sup>+</sup>04] P. Walther, J.W. Pan, M. Aspelmeyer, R. Ursin, S. Gasparoni, and A. Zeilinger. De broglie wavelength of a non-local four-photon state. *Nature*, 429(6988) :158–161, 2004.
- [WS50] C. S. Wu and I. Shaknov. The angular correlation of scattered annihilation radiation. *Phys. Rev.*, 77(1) :136, Jan 1950.
- [WSK06] F.N.C. Wong, J.H. Shapiro, and T. Kim. Efficient generation of polarization-entangled photons in a nonlinear crystal. *Laser Physics*, 16(11) :1517–1524, 2006.
- [WXC<sup>+</sup>08] F. Wolfgramm, X. Xing, A. Cerè, A. Predojević, A. M. Steinberg, and M. W. Mitchell. Bright filter-free source of indistinguishable photon pairs. *Opt. Express*, 16(22) :18145–18151, 2008.
- [YK93] M. Yamada and K. Kishima. Method of controlling the domain of a nonlinear ferroelectric optics substrate, March 9 1993. US Patent 5,193,023.
- [YP87] B. Yurke and M. Potasek. Obtainment of thermal noise from a pure quantum state. *Phys. Rev. A*, 36(7) :3464–3466, Oct 1987.