Quelques problèmes de dynamique linéaire dans les espaces de Banach

Jean-Matthieu Augé

N° d'ordre : 4581

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Jean-Matthieu AUGÉ**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Pures**

****

QUELQUES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LES ESPACES DE BANACH

****

Soutenue le 15 octobre 2012 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, après avis de :

F. BAYART	Professeur, Université Blaise Pascal	**Rapporteur**
S. GRIVAUX	Chargée de recherche au CNRS, Université Lille 1	**Rapporteur**

et devant la commission d'examen composée de :

C. BADEA	Professeur, Université Lille 1	
F. BAYART	Professeur, Université Blaise Pascal	**Rapporteur**
R. DEVILLE	Professeur, Université Bordeaux 1	**Directeur**
J. ESTERLE	Professeur, Université Bordeaux 1	
S. GRIVAUX	Chargée de recherche au CNRS, Université Lille 1	**Rapporteur**
E-M. OUHABAZ	Professeur, Université Bordeaux 1	

- 2012 -

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse, Robert Deville, pour avoir encadré ma thèse durant ces trois années et pour avoir également encadré mon mémoire de recherche l'année précédente. Ses compétences, son intuition mathématique (et plus particulièrement géométrique) aiguisée ainsi que son enthousiasme m'ont beaucoup aidé dans cette tâche et j'ai beaucoup apprécié travailler avec lui.

Je remercie Frédéric Bayart et Sophie Grivaux qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse ainsi que Jean Esterle, El Maati Ouhabaz et Catalin Badea qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse. Plus généralement, je tiens également à remercier tous les membres de l'équipe d'Analyse : la bonne ambiance du groupe de travail et du séminaire me manqueront certainement dans les années à venir ...

Du côté des collègues de bureau et autres doctorants, la liste n'est pas exhaustive, mais que les personnes suivantes soient remerciées : Aurélien, Nicolas (les deux), Frédéric, Pierre (les deux là encore), ...

J'adresse aussi un grand merci à mes grands parents, ma mère, ma soeur et Marie-Océane qui m'ont soutenu tout au long de ces trois années, et qui ont su me redonner le moral pendant certaines périodes de doute.

Table des matières

Remerciements **1**

Introduction **5**

1 Perturbation de points les plus éloignés dans les ensembles faiblement compacts **11**

1.1 Densité de l'ensemble $D(C, f)$ . . . 12

1.2 Contre-exemples et remarques . . . 14

2 Quelques outils de géométrie des espaces de Banach **17**

2.1 Deux notions de petitesse en analyse . . . 17

2.2 Modules de lissité asymptotique . . . 19

2.2.1 Définitions et premières propriétés . . . 19

2.2.2 Quelques calculs sur des espaces classiques . . . 20

3 $\|T^n\|$ vs $\|T^n x\|$ **23**

3.1 σ-porosité et Haar négligeabilité . . . 23

3.2 Cas compact . . . 25

3.3 Module de lissité asymptotique uniforme et exposants optimaux . . . 30

4 Sur les orbites d'opérateurs bornés qui tendent vers l'infini **39**

4.1 Rappels sur les bases dans les espaces de Banach . . . 41

4.2 Croissante et linéarité . . . 43

4.2.1 Croissance . . . 43

4.2.2 Linéarité . . . 46

4.3 Lemmes de séparation asymptotiques . . . 49

4.4 Construction d'opérateurs . . . 51

4.4.1 Un opérateur dans $\mathbb{C}^2$ . . . 51

4.4.2 Cas complexe . . . 52

4.4.3 Cas réel . . . 59

4.5 La construction de Hájek et Smith . . . 60

4.5.1 Estimations locales . . . 60

4.5.2 L'opérateur de Hájek et Smith . . . 62

4.6 Quelques compléments et remarques . . . 64

4.6.1 Comparaison entre les 2 opérateurs . . . 64

4.6.2 Taille de l'ensemble $\mathcal{A}_X$: sur la conjecture de Prăjitură . . . 66

4.6.3 Un dernier lemme . . . 67

4.6.4 Récapitulatif 69

5 Quelques compléments sur la propriété de Blum-Hanson 71

5.1 Résultats positifs 71

5.2 Résultats négatifs 73

Bibliographie 79

Introduction

Cette thèse se compose de cinq chapitres dont le premier est totalement indépendant des quatre autres. Détaillons le contenu principal et le contexte dans lequel se trouvent ces chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des problèmes d'approximation. Comme chacun sait, dans un cadre hilbertien, si C est un convexe fermé non vide, la distance de tout point x de l'espace à l'ensemble C est atteinte en un unique point. Inversement, nous étudierons dans ce chapitre l'existence de points les plus éloignés par rapport à un certain sous ensemble C borné, et en fait nous serons intéressés par des résultats de perturbation. On obtiendra le résultat suivant :

Théorème A. *Soit X est un espace de Banach réel, $C \subset X$ un compact faible et r l'application définie par*

$$r(x) = \sup\{\|x - z\| - f(z), z \in C\}$$

où $f : X \to \mathbb{R}$ est une perturbation minorée et semi-continue inférieurement pour la topologie faible, alors l'ensemble

$$D(C, f) = \{x \in X; \exists z \in C, r(x) = \|x - z\| - f(z)\}$$

est résiduel dans X.

Ce résultat classique est du à Lau dans le cas $f = 0$ (et correspond donc géométriquement à l'existence générique de points les plus éloignés par rapport à C). Comme conséquence directe, on en déduit que si C est faiblement compact, l'ensemble des $x \in X$ tels que $z \mapsto \|x-z\|-\|z\|$ atteint son sup sur C est dense dans X. On verra cependant que l'ensemble des $x \in X$ tels que $z \mapsto \|x - z\| + \|z\|$ atteint son sup sur C n'est pas nécessairement dense dans X.

La suite de cette thèse est centrée sur quelques problèmes d'opérateurs linéaires bornés. Dans cette branche des mathématiques, la question la plus importante est certainement la suivante, connue sous le nom de problème du sous-espace invariant :

Problème. *Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et T un opérateur linéaire non nul et borné sur H. Est-ce que T admet un sous-espace invariant ?*

Par sous-espace invariant, on entend implicitement que ce sous espace est fermé et non trivial, c'est à dire non réduit à $\{0\}$ et différent de l'espace tout entier. Notons par ailleurs que T admet toujours un sous espace vectoriel invariant non nécessairement fermé. En effet, si x est tel que $Tx \neq 0$, l'espace engendré par les $T^n x$ ($n \in \mathbb{N}$) est invariant par T et ne saurait être l'espace tout entier, car dans ce cas H posséderait une base (algébrique) dénombrable ce qui est impossible pour un espace de Banach. On peut aussi remarquer que ce résultat peut tomber en défaut en dimension finie sur le corps des réels (en dimension 2 par exemple) mais que dans le cas complexe, il demeure vrai puisque tout endomorphisme en dimension finie admet une valeur propre, ce dernier fait résultant lui même du théorème de d'Alembert-Gauss affirmant que tout polynome complexe de degré non nul admet au moins une racine. Cela montre que, déjà en dimension finie, le problème (complexe) admet certes une solution positive, mais pour une raison non triviale. On définit l'orbite d'un élément $x \in H$ par

$$O_T(x) = \{T^n x, n \geqslant 0\}.$$

On voit facilement que le problème du sous espace invariant revient à être capable de dire s'il existe $x \neq 0 \in H$ tel que $\overline{\mathrm{span}}(O_T(x)) \neq H$ où $\overline{A}$ désigne bien sûr l'adhérence d'une partie $A \subset H$ et $\mathrm{span}(A)$ l'espace engendré par A (on a conservé quelques notations anglicistes classiques). Cela explique en partie l'importance qu'on porte à l'étude des orbites. D'autre part, le problème du sous-espace invariant a été résolu négativement par Read [R] dans l'espace ℓ^1. Read a même fait beaucoup mieux en construisant un opérateur T borné sur ℓ^1 tel que pour tout $x \neq 0, \overline{O_T(x)} = \ell^1$ ce qui exprime de façon équivalente le fait que T n'admet aucun sous ensemble invariant (fermé). D'autre part, Haydon et Argyros ont récemment construit un espace de Banach séparable X de dimension infinie dans lequel tous les opérateurs sont de la forme $T = \lambda I + K$ où λ est un scalaire et K un opérateur compact. D'après un classique résultat de Lomonosov, tout opérateur compact possède un sous-espace invariant, donc ce Banach X répond positivement à la question. Revenons sur l'exemple de Read : toutes les orbites de l'opérateur qu'il a construit sont denses (excepté 0 bien sûr !). L'opérateur admet donc un comportement hautement "irrégulier". Si pour un espace de Banach X et au moins un vecteur x, l'orbite associée est dense dans l'espace, on dit que l'opérateur est hypercyclique (et le vecteur associé est appelé un vecteur hypercyclique, on peut alors montrer que l'ensemble des vecteurs hypercycliques est automatiquement un G_δ-dense). Il se trouve que de tels opérateurs sont déjà délicats à étudier (on renvoie à [BM] pour ce sujet). Rappelons toutefois le résultat suivant, connu sous le nom de critère de Kitai, qui est une façon commode de montrer qu'un opérateur est hypercyclique sans en exhiber un vecteur hypercyclique.

Théorème. *Soit T un opérateur borné sur un Banach X. On suppose qu'il existe une suite (n_k) strictement croissante d'entiers, deux parties D_1 et D_2 denses dans X et une suite d'applications $S_{n_k} : D_2 \to X$ telles que :*

1) $T^{n_k} x \to 0$ pour $x \in D_1$.
2)$S_{n_k} y \to 0$ pour $y \in D_2$.
3) $T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y$ pour $y \in D_2$.

Alors T est hypercyclique.

Un opérateur T peut admettre des orbites régulières, comme des orbites irrégulières (i.e. des vecteurs hypercycliques). L'exemple suivant est standard et illustre le comportement très varié des orbites d'un opérateur comme le shift, dont la définition est très simple (mais qui est en quelque sorte l'opérateur universel).

Exemple. *Soit $T = 2B$ sur ℓ^p ($1 \leqslant p < \infty$) où B est le backward shift, c'est à dire l'opérateur défini par $Be_1 = 0$ et $Be_n = e_{n-1}$ ($n \geqslant 2$), où l'on a noté (e_n) la base canonique de ℓ^1. Alors il existe trois partie A_1, A_2 et A_3 denses dans X telles que :*

- Si $x \in A_1$, $\|T^n x\| \to 0$.
- Si $x \in A_2$, $\|T^n x\| \to \infty$.
- Si $x \in A_3$, x est hypercyclique.

Pour A_1, il suffit de choisir l'ensemble des vecteurs à supports finis. Pour A_2, on a $\|T^n\| = 2^n$, et on verra que d'après un résultat de Müller et Vršovský, tout opérateur vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\|T^n\| < \infty$ admet un ensemble d'orbites qui s'en vont à l'infini et pour A_3, cela provient du critère de Kitai.

Dans cette thèse, nous allons essentiellement nous intéresser à des orbites qui admettent un comportement régulier. Avant de rentrer dans les détails concernant ce type de problème, le chapitre 2 sera consacré à définir certaines notions de géométrie des espaces de Banach utiles pour le chapitre 3. La notion la plus classique de petitesse en analyse est certainement celle de Baire : i.e. une partie est petite si elle est incluse dans le complémentaire d'un G_δ-dense, mais cette propriété n'est pas quantitative. La σ-porosité est un cas plus général que cette dernière notion, avec "estimations". D'autre part, une autre façon de mesurer la taille d'un ensemble en dimension finie est de considérer sa mesure de Lebesgue. Une possible généralisation de ceci en dimension infinie est le fait, pour une partie, d'être Haar-négligeable. Ces 2 notions de négligeabilité sont par ailleurs distinctes : Preiss et Tisier ont montré que tout espace de dimension infinie peut être décomposé en la réunion disjointe de deux parties, dont l'une est σ-poreuse et l'autre Haar-négligeable. Les autres outils que nous allons définir seront les modules de convexité et de lissité, qui permettent de quantifier le fait qu'un ensemble est uniformément lisse ou uniformément convexe. Plus particulièrement, notre intérêt se portera sur les modules asymptotiques. Le fait d'être asymptotiquement uniformément convexe (resp lisse) est plus faible que d'être uniformément lisse (resp convexe). Ces modules traduisent une information géométrique de l'espace en fonction de ses "gros" sous-espaces : rappelons par exemple la définition du module de lissité asymptotique uniforme $\overline{\rho}_X(t)$ de X

$$\overline{\rho}_X(t) = \sup_{\|x\|=1} \inf_{\dim(X/Y)<\infty} \sup_{y\in Y, \|y\|=1} (\|x+ty\| - 1) \ \ (t \geqslant 0).$$

Le chapitre 3 est consacré aux premiers résultats sur les orbites régulières. Comme l'indique explicitement son nom, on s'intéresse au "gap" entre $\|T^n\|$ (la norme des itérés de l'opérateur) et $\|T^n x\|$ (la norme des itérés ponctuels). La question basique est : peut-on trouver des bons vecteurs x tels que la suite $(\|T^n x\|)_n$ ne soit pas trop loin (en un certain sens) de la suite $(\|T^n\|)_n$? Müller a montré le résultat suivant.

Théorème. *Soit T un opérateur linéaire borné sur X, et soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $a_n \to 0$. Alors, l'ensemble*

$$\{x \in X, \|T^n x\| \geqslant a_n \|T^n\| \text{ pour une infinité de } n\}$$

est résiduel dans X.

Nous généralisons ce résultat à l'aide des notions de petitesse du chapitre précédent, en montrant :

Théorème B. *Soit T un opérateur linéaire borné sur X, et soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $a_n \to 0$. Alors, l'ensemble*

$$\{x \in X, \|T^n x\| \geqslant a_n \|T^n\| \text{ pour une infinité de } n\}$$

est de complémentaire σ-poreux et si X est séparable, ce complémentaire est Haar-négligeable.

Dans le cas compact, on donne des exemples qui permettent d'améliorer la condition $a_n \to 0$.
Toujours dans le même esprit, Beauzamy, puis Müller (par une preuve différente) ont prouvé le résultat suivant.

Théorème. *Soit T un opérateur borné et non nilpotent sur un espace de Hilbert H. Soit aussi $q < 2$, alors*

$$A = \left\{ x \in H, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \right)^q = \infty \right\}$$

est dense dans H et si on remplace le Hilbert H par un Banach X, la même conclusion reste vraie en remplaçant $q < 2$ par $q < 1$.

La "meilleure" constante q semble donc dépendre de la géométrie de l'espace. On montrera en particulier :

Théorème C. *Soit T un opérateur borné et non nilpotent sur un espace de Banach X, $q > 0$ et A l'ensemble précédent. Alors, la conclusion reste vraie :*
- Pour tout $q < p$, si $X = \ell^p$.
- Pour tout $q < \min(p, 2)$, si $X = L^p(0, 1)$.
- Pour tout $q > 0$, si $X = c_0$.
De plus, ces constantes ne peuvent être améliorées.

Cela proviendra en fait d'un résultat un peu plus général faisant intervenir le module de lissité asymptotique uniforme de l'espace X.

Le chapitre 4, quant à lui, est consacré à l'étude des orbites qui s'en vont à l'infini. Si un opérateur T n'est pas à puissances bornées, le classique théorème de Banach-Steinhauss entraine que ponctuellement $(\|T^n x\|)_n$ n'est pas bornée sur un G_δ-dense de X. En revanche, il existe des exemples d'opérateurs T tels que $\|T^n\| \to \infty$ mais

$$A_T = \{x \in X, \|T^n x\| \to \infty\}$$

soit vide. Répondant négativement à une conjecture de Prăjitură, Hájek et Smith ont construit en 2010, dans tout espace de dimension infinie, muni d'une base symétrique, un opérateur T tel que A_T ne soit ni vide, ni dense. On étendra en particulier ce résultat à tout espace de Banach séparable de dimension infinie en montrant :

Théorème D. *Soit X un espace séparable de dimension infinie (réel ou complexe). Alors, il existe un opérateur linéaire borné T sur X tel que, si l'on pose*

$$A_T = \{x \in X, \|T^n x\| \to \infty\} \text{ et } B_T = \{x \in X, \underline{\lim}\|T^n x - x\| = 0\},$$

- A_T et B_T sont d'intérieurs non vides et $\{A_T, B_T\}$ forment une partition de X.
- $T = I + K$ où K est un opérateur compact.

On s'intéressera aussi, sur quelques exemples, à des questions basiques sur la structure de A_T : à quelle condition peut-il être dense ? Peut il contenir des sous espaces de grande dimension ? etc.

Le chapitre 5, quant à lui, s'intéresse à la propriété de Blum-Hanson. Rappelons qu'un opérateur T est dit ergodique lorsque pour tout $x \in X$,

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x\right)$$

converge en norme. La propriété de Blum-Hanson, introduite dans les années 60 par ces deux auteurs est une forme forte d'ergodicité. On exige la convergence des moyennes précédentes sur toute suite (k_n) d'entiers strictement croissants et non seulement sur la suite (n). Certains espaces sont connus pour avoir cette propriété pour toute contraction T, dès que $(T^n x)$ converge faiblement pour tout x. Nous montrerons notamment que c_0 a cette propriété. On étudiera également des résultats négatifs dans cette direction.

Chapitre 1

Perturbation de points les plus éloignés dans les ensembles faiblement compacts

Ce chapitre est une reproduction de [Au1].
X sera ici un espace de Banach réel, B_X sa boule unité fermée, X^* l'espace des formes linéaires continues sur X, C un ensemble borné de X et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction minorée sur C. On étudie les ensembles suivants.

$$D(C, f) = \{x \in X; \exists z \in C, r(x) = \|x - z\| - f(z)\},$$

où par définition, r est l'application de X dans $\mathbb{R}$ donnée par la formule

$$r(x) = \sup\{\|x - z\| - f(z), z \in C\}.$$

L'application r dépend de f et devrait être notée r_f, mais comme il n'y aura pas d'ambiguité possible, on note $r = r_f$. On peut remarquer que r est 1-Lipschitz et convexe en tant que sup de telles fonctions, et que, quitte à remplacer f par $f + a$ où a est une constante, on peut supposer $f \geqslant 0$. Lorsque $f = 0$, l'ensemble $D(C, 0)$ est l'ensemble des points $x \in X$ qui admettent un point le plus éloigné dans l'ensemble C et $r(x)$ est la plus grande distance de x à C, i.e. $r(x)$ est le plus petit rayon des boules centrées en x qui contiennent C . Ici, la fonction f va jouer un role de perturbation, on va montrer que sous certaines hypothèses de régularité de f, certains résultats concernant l'ensemble $D(C, 0)$ peuvent être généralisés. Pour être plus précis, on va s'intéresser à l'existence de points génériques dans l'ensemble $D(C, f)$. Pour les points les plus éloignés, le problème a d'abord été étudié par Edelstein dans [Ed] pour des espaces uniformément convexes, en supposant que C est borné et fermé en norme. Cela a été généralisé par Asplund dans [As] pour des espaces réflexifs localement uniformément convexes. Ensuite, Lau dans [Lau] a montré que lorsque C est faiblement compact (sans hypothèse géométrique sur X), l'ensemble des points les plus éloignés est dense et il a aussi montré que ce dernier résultat impliquait celui d'Asplund. Ici, on va donner une généralisation du théorème de Lau (voir aussi [Wan] qui traite des résultats de perturbation relatifs aux espaces euclidiens, et [HNS] qui étudie le cas des espaces p-normés).

1.1 Densité de l'ensemble $D(C, f)$

Un outil technique dont on aura besoin ici est le sous-différentiel de l'application r. La définition suivante reste d'ailleurs valable pour toute application convexe.

Definition 1.1.1. *Le sous-différentiel de r est l'ensemble*

$$\partial r(x) = \{x^* \in X^*; \forall y \in X, \langle x^*, y - x\rangle \leqslant r(y) - r(x)\}.$$

Puisque r est 1-lipschitz, $\partial r(x)$ est contenu dans la boule unité du dual. On peut maintenant énoncer le résultat principal qui reprend les techniques de la preuve originale de Lau.

Théorème 1.1.1. *Supposons que C est un ensemble faiblement compact dans X et que $f : X \to \mathbb{R}$ est minorée et faiblement continue semi inférieurement pour la topologie faible sur X, alors l'ensemble $D(C, f)$ contient un G_δ-dense de X.*

Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *Soit*

$$G = \{x \in X; \forall x^* \in \partial r(x), \sup\{\langle x^*, x - z\rangle - f(z), z \in C\} = r(x)\}.$$

Alors G est un G_δ-dense de X.

Démonstration. On écrit $X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ avec

$$F_n = \left\{x \in X; \exists x^* \in \partial r(x), \sup\{\langle x^*, x - z\rangle - f(z), z \in C\} \leqslant r(x) - \frac{1}{n}\right\}.$$

Par le lemme de Baire, il suffit de voir qu'à chaque $n \geqslant 1$ fixé, F_n est fermé et d'intérieur vide.
- Montrons d'abord que F_n est un fermé de X : soit (x_k) une suite d'éléments de F_n qui converge vers $x \in X$. Par définition de F_n, il existe $x_k^* \in \partial r(x_k)$ tel que

$$\forall z \in C, \forall k \geqslant 1, \langle x_k^*, x_k - z\rangle - f(z) \leqslant r(x_k) - \frac{1}{n}.$$

Soit maintenant $z \in C$, il existe une sous suite $(x_{k_q}^*)$ telle que $\langle x_{k_q}^*, x - z\rangle$ converge. Puisque B_{X^*} est compact pour $\sigma(X^*, X)$, on peut choisir x^* une valeur d'adhérence de $(x_{k_q}^*)$. On a par ailleurs pour tout k :

$$\begin{aligned} |\langle x_k^*, x_k - z\rangle - \langle x^*, x - z\rangle| &\leqslant |\langle x_k^*, x_k - z\rangle - \langle x_k^*, x - z\rangle| \\ &+ |\langle x_k^*, x - z\rangle - \langle x^*, x - z\rangle| \\ &\leqslant \|x_k^*\|\|x_k - x\| + |\langle x_k^*, x - z\rangle - \langle x^*, x - z\rangle| \\ &\leqslant \|x_k - x\| + |\langle x_k^*, x - z\rangle - \langle x^*, x - z\rangle|. \end{aligned}$$

La dernière inégalité permet donc de voir que $\langle x^*, x - z\rangle$ est une valeur d'adhérence de $(\langle x_k^*, x_k - z\rangle)$. Par continuité de r, on obtient donc pour tout $z \in C$

$$\langle x^*, x - z\rangle - f(z) \leqslant r(x) - \frac{1}{n},$$

et donc
$$\sup\{\langle x^*, x-z\rangle - f(z), z\in C\} \leqslant r(x) - \frac{1}{n}.$$
Pour conclure que $x \in F_n$, il suffit de montrer que $x^* \in \partial r(x)$. En effet, puisque $x_k^* \in \partial r(x_k)$, on a
$$\forall y \in X, \langle x_k^*, y - x_k\rangle \leqslant r(y) - r(x_k)$$
et donc on obtient à la limite : $x^* \in \partial r(x)$.
- Montrons à présent que chaque F_n est d'intérieur vide. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors on peut trouver $y_0 \in X$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(y_0, r) \subset F_n$. Soit $\alpha = \sup\{\|z\|, z \in C\}$, $\lambda = \frac{r}{\alpha + \|y_0\|}$ et $\varepsilon = \frac{\lambda}{n(1+\lambda)}$. Par la définition de $r(y_0)$, il existe $z_0 \in C$ tel que
$$r(y_0) - \varepsilon < \|y_0 - z_0\| - f(z_0) \leqslant r(y_0).$$
Finalement, posons $x_0 = y_0 + \lambda(y_0 - z_0)$. Avec le choix de λ, on a $x_0 \in \overline{B}(y_0, r) \subset F_n$. On estime maintenant $r(y_0) - r(x_0)$:
$$r(y_0) - r(x_0) < \varepsilon + \|y_0 - z_0\| - f(z_0) - r(x_0).$$
Mais,
$$x_0 = y_0 + \lambda(y_0 - z_0) \Longrightarrow x_0 - z_0 = (1+\lambda)(y_0 - z_0).$$
D'où
$$\begin{aligned}
r(y_0) - r(x_0) &< \varepsilon + \frac{1}{1+\lambda}\|x_0 - z_0\| - f(z_0) - r(x_0)\\
&= \varepsilon + \frac{1}{1+\lambda}(\|x_0 - z_0\| - f(z_0)) + (\frac{1}{1+\lambda} - 1)f(z_0) - r(x_0)\\
&\leqslant \varepsilon + \frac{1}{1+\lambda}r(x_0) - \frac{\lambda}{1+\lambda}f(z_0) - r(x_0)\\
&= \varepsilon - \frac{\lambda}{1+\lambda}r(x_0) - \frac{\lambda}{1+\lambda}f(z_0).
\end{aligned}$$
Comme $x_0 \in F_n$, il existe $x^* \in \partial r(x_0)$ tel que
$$r(x_0) \geqslant \sup\{\langle x^*, x_0 - z\rangle - f(z), z \in C\} + \frac{1}{n} \geqslant \langle x^*, x_0 - z_0\rangle - f(z_0) + \frac{1}{n},$$
ce qui donne, en combinant avec la dernière estimation
$$r(y_0) - r(x_0) < \varepsilon - \frac{\lambda}{1+\lambda}\langle x^*, x_0 - z_0\rangle - \varepsilon = \langle x^*, y_0 - x_0\rangle,$$
ce qui contredit $x^* \in \partial r(x_0)$. □

Pour l'instant, on a juste utilisé le fait que C est borné. L'hypothèse de faible compacité de C et de faible semi-continuité inférieure de f nous permet d'achever la preuve comme suit.

Démonstration du Théorème 1.1.1. Il suffit de voir que $G \subset D(C,f)$. Considérons $x \in G$ et $x^* \in \partial r(x)$, donc
$$\sup\{\langle x^*, x - z\rangle - f(z), z \in C\} = r(x).$$

Puisque f est faiblement semi-continue inférieurement et que $z \mapsto \langle x^*, x - z\rangle$ est faiblement continue, $z \mapsto \langle x^*, x - z\rangle - f(z)$ est faiblement semi-continue supérieurement sur C, donc atteint son sup en un certain point z_0. On obtient :

$$r(x) \leqslant \|x^*\|\|x - z_0\| - f(z_0) \leqslant r(x)$$

car $\|x^*\| \leqslant 1$ et donc $r(x) = \|x - z_0\| - f(z_0)$. □

Puisque $z \mapsto \|z\|$ est faiblement semi-continue inférieurement, on en déduit :

Corollaire 1.1.1. *Si C est faiblement compact, l'ensemble des $x \in X$ tels que $z \mapsto \|x - z\| - \|z\|$ atteint son* sup *sur C est dense dans X.*

1.2 Contre-exemples et remarques

Il est naturel de se demander si on peut supprimer l'hypothèse de semi-continuité inférieure pour la topologie faible dans le Théorème 1.1.1. La réponse est non : plus précisément, on construit le contre-exemple suivant dans des espaces de fonctions continues.

Exemple 1.2.1. *Soit (K, d) un espace métrique compact infini et $X = C(K)$ l'espace des fonctions continues sur K (à valeurs réelles) muni de sa norme habituelle, alors il existe un ensemble faiblement compact C de X et une fonction f continue et faiblement semi-continue supérieurement sur X telle que $D(C, f)$ ne soit pas dense dans X.*

Démonstration. Considérons $f(z) = \max(-1, -\|z\|)$ ainsi qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ d'ouverts non vides de K tels que $\bigcap_{n\geqslant 1} U_n = \emptyset$ (il suffit de fixer $y \in K$ qui ne soit pas un point isolé de K, et un choix possible est $U_n = \{x \in K \setminus \{y\}; d(x, y) < \frac{1}{n}\}$), fixons aussi $t_n \in U_n$ et posons

$$x_n(t) = \frac{d(t, {U_n}^c)}{d(t, t_n) + d(t, {U_n}^c)} \quad (t \in K, n \geqslant 1).$$

x_n est une fonction continue sur K et par construction de U_n, on a $\|x_n\| = 1$ et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers 0 ce qui implique que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0 comme on le voit facilement en utilisant le théorème de représentation de Riesz et le théorème de convergence dominée. Posons

$$C = \{(1 - \frac{1}{n})x_n, n \geqslant 1\} = \{0\} \cup \{(1 - \frac{1}{n})x_n, n \geqslant 2\}$$

qui est faiblement compact comme réunion d'une suite faiblement convergente et de sa limite. Notons que C est contenu dans B_X et donc $f(z) = -\|z\|$ pour tout $z \in C$. Par conséquence $r(x) = \sup\{\|x - z\| + \|z\|, z \in C\}$. On étudie donc le sup de la fonction f_x ($x \in X$ fixé) définie pour $z \in C$ par $f_x(z) = \|x - z\| + \|z\|$. On va montrer que pour $x \in \overline{B}(\mathbf{2}, 1)$ (où $\mathbf{2}$ désigne la fonction identiquement égale à 2), f_x n'atteint jamais son sup et donc $D(C, f)$ n'est pas dense. Puisque pour $t \in K$, $x(t) \geqslant 1$, on obtient pour $z \in C$

$$\|x - z\| = \sup |x(t) - z(t)| = \sup(x(t) - z(t)) \leqslant \sup x(t) = \|x\|$$

et d'autre part, $\|z\| < 1$ donne $f_x(z) < \|x\| + 1$. Pour terminer, la dernière chose qu'on doit voir est que $\sup_{z\in C} f_x(z) \geqslant \|x\| + 1$. Fixons t_0 tel que $\|x\| = |x(t_0)|$, alors

$$\sup_{z\in C} f_x(z) \geqslant f_x((1-\frac{1}{n})x_n) \geqslant |x(t_0) - (1-\frac{1}{n})x_n(t_0)| + (1-\frac{1}{n}).$$

La conclusion découle alors du fait que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers 0. □

Remarque 1.2.1. - *Ce dernier exemple montre aussi que l'ensemble des points $x \in X$ tels que $z \mapsto \|z-x\| + \|z\|$ atteint son* sup *sur C n'est pas toujours dense dans X. Rappelons que d'après le Corollaire 1.1.1, l'ensemble des $x \in X$ tels que $z \mapsto \|z-x\| - \|z\|$ atteint son* sup *sur C est lui, toujours dense dans X.*
- Il existe des espaces, par exemple $\ell^1(\mathbb{N})$, ou plus généralement tout espace de Banach ayant la propriété de Schur où on ne peut pas construire de contre-exemple du type précédent car les ensembles faiblement compacts et (fortement) compacts coincident.
- Cependant si $C = B_X$ et X est réflexif (pour assurer la faible compacité de C), l'ensemble des x tels que f_x (définie par $f_x(z) = \|x-z\| + \|z\|$) atteint son sup *sur C est dense dans X. Pour voir cela, on utilise le fait suivant.*

Fait 1.2.1. *Soit f une fonction continue convexe sur X, C un ensemble convexe faiblement compact de X et $\varepsilon(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C, alors $\sup_C f = \sup_{\varepsilon(C)} f$.*

Démonstration. On a évidemment, $\sup_{\varepsilon(C)} f \leqslant \sup_C f$. Supposons que l'inégalité inverse soit fausse et introduisons t tel que

$$\sup_{\varepsilon(C)} f < t < \sup_C f.$$

Alors, on a $\varepsilon(C) \subset C_0 := \{f \leqslant t\}$. Puisque f est continue convexe, C_0 est un ensemble convexe et fermé dans X. Le théorème de Krein-Milman dit que $\overline{\mathrm{conv}}^{\|\cdot\|}(\varepsilon(C)) = C$, donc $C \subset C_0$. Maintenant, puisque $\sup_C f > t$, on peut trouver $x \in C$ tel que $f(x) > t$ ce qui contredit $x \in C_0$. □

Cela implique l'affirmation de la dernière remarque. En effet, si $C = B_X$, $\varepsilon(C)$ est contenu dans la sphère unité. En utilisant le fait précédent à 2 reprises, on voit donc que

$$\sup_{z\in C} f_x(z) = \sup_{z\in\varepsilon(C)} f_x(z) = 1 + \sup_{z\in\varepsilon(C)} \|x-z\| = 1 + \sup_{z\in C} \|x-z\|$$

et le Théorème 1.1.1 (avec $f = 0$) permet de conclure.

Remarque 1.2.2. *Pour finir, mentionnons que l'application $f \mapsto D(C,f)$ n'a pas de bonnes propriétés. Prenons $X = \mathbb{R}$, $C = [0,1]$ et posons pour $z \in \mathbb{R}$, $f_k(z) = \frac{\mathbf{1}_{\{0,1\}}(z)}{k}$ où $\mathbf{1}_{\{0,1\}}$ désigne la fonction indicatrice de la paire $\{0,1\}$, qui vaut 1 si $z = 0$ ou $z = 1$ et* 0 *sinon. Il est évident que $(f_k)_{k\geqslant 1}$ converge uniformément vers* 0 *(donc $D(C,0) = X$) et pourtant, tous les $D(C,f_k)$ sont vides.*

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons que $x \geqslant \frac{1}{2}$. Pour $z \in [0,1]$, $|x-z|$ est maximal lorsque $z = 0$ et vaut x. Donc

$$\sup\{|x-z| - f_k(z), z \in [0,1]\} \leqslant x.$$

D'autre part, en considérant une suite $(z_n) \subset]0,1[$ qui converge vers 0, on obtient l'autre inégalité. Si on avait un z qui atteint son sup, on devrait avoir

$$f_k(z) = |x - z| - x \leqslant x - x = 0,$$

ce qui implique $z \in]0,1[$. Cela donne $|z - x| = x$ avec $z \in]0,1[$, ce qui contredit $|x - z| < x$. Pour $x \leqslant \frac{1}{2}$, on procède de la même façon avec le point $z = 1$.

Chapitre 2

Quelques outils de géométrie des espaces de Banach

2.1 Deux notions de petitesse en analyse

Nous allons définir ici la σ-porosité et la Haar négligeabilité des parties d'un espace de Banach X. Ces notions seront illustrées dans le chapitre suivant pour des problèmes d'opérateurs linéaires bornés. La porosité a été introduite par P. Dolženko [D], et a été étudiée en détails depuis (voir [Z]). Comme déjà évoqué dans l'introduction, cette notion quantifie le fait qu'un ensemble est d'intérieur vide. Cette notion apparait par exemple dans l'étude de propriétés de différentiabilité pour des fonctions convexes à valeurs réelles définies sur un espace de Banach séparable X. Dans la suite, on note $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon $r>0$ d'un espace X.

Definition 2.1.1. *Une partie E d'un Banach X est dite poreuse si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que l'assertion suivante soit vérifiée : pour tout $x \in E$ tout $\epsilon > 0$, il existe un point $y \in X$ tel que $0 < \|y-x\| < \epsilon$ et $E \cap B(y, \lambda\|x-y\|)$ est vide. Une réunion au plus dénombrable (nous dirons dénombrable dans la suite) d'ensembles poreux est appelée un ensemble σ-poreux.*

Les ensembles σ-poreux sont donc en particulier de première catégorie de Baire. Si l'espace X est réel de dimension finie, on peut aussi voir qu'ils sont de mesure nulle. Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, rappelons (cf [Rud], chapitre 7) que $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue pour f si

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

et que presque tout point de $\mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue pour f. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est poreux de mesure non nulle, on peut quitte à le remplacer par un sous-ensemble $E_0 \subset E$ supposer que $0 < \lambda(E) < \infty$. Alors, la fonction intégrable $f = \mathbf{1}_E$ (fonction indicatrice de E) admet au moins un point de Lebesgue $x \in E$. On voit donc que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(B(x,r)\cap E)}{\lambda(B(x,r))} = 1,$$

ce qui contredit le fait que E soit poreux.

La seconde notion qu'on va étudier est celle de Haar négligeabilité. Les ensembles Haar-négligeables ont été introduits par Christensen dans [C]. Ils apparaissent dans l'étude de la différentiabilité d'applications lipschitziennes définies sur un espace de Banach.

Definition 2.1.2. *Soit X un espace de Banach séparable. Une partie $E \subset X$ est dite Haar-négligeable s'il existe une mesure de probabilité m sur X telle que pour tout $x \in X$, le translaté $x + E$ est de m-mesure 0.*

Plus généralement, cette notion peut être définie dans un groupe abélien polonais G. Si G est abélien et localement compact, comme cela est bien connu, il existe une unique (à multiplication près) mesure invariante par translation sur G, appelée mesure de Haar. La proposition suivante justifie la terminologie.

Proposition 2.1.1. *Soit G un groupe abélien localement compact. Alors un borélien $A \subset G$ est Haar-négligeable si et seulement si il est de mesure de Haar nulle.*

Démonstration. Soit m_0 la mesure de Haar sur G. Si $m_0(A) = 0$, alors $m_0(A+x) = m_0(A) = 0$ pour tout $x \in G$ et donc $m(A + x) = 0$ pour toute mesure de probabilité m absolument continue par rapport à m_0. Supposons maintenant qu'il existe une mesure de probabilité m telle que $m(A + x) = 0$ pour tout $x \in G$. Alors, en calculant de deux façons différentes (à l'aide de Fubini et en utilisant l'invariance par translation de m_0) l'intégrale

$$\int_G \int_G \mathbf{1}_A(x + y)dm(x)dm_0(y),$$

on tire $m_0(A) = 0$. □

En particulier sur $\mathbb{R}^d$, un ensemble est Haar-négligeable si et seulement si il est de mesure de Lebesgue nulle. De plus, les ensembles Haar-négligeables ont la propriété suivante qui est attendue pour toute notion "raisonnable" de négligeabilité (pour les preuves des résultats suivants, voir [BL], chapitre 6).

Proposition 2.1.2. *Une réunion dénombrable d'ensembles Haar-négligeables est-elle même Haar-négligeable.*

Pour finir, voici deux critères commodes pour montrer qu'un ensemble est (resp n'est pas) Haar-négligeable.

Proposition 2.1.3. *Soit $E \subset X$ un borélien de X. Supposons qu'il existe un sous espace de dimension finie $V \subset X$ tel que*

$$\text{pour tout } x \in X, \text{ pour presque tout } v \in V, \ x + v \notin E,$$

alors E est Haar-négligeable (ici "pour presque tout" fait référence à la mesure de Lebesgue sur V).

Proposition 2.1.4. *Soit $E \subset X$. Si E contient un translaté de tout compact, alors E n'est pas Haar-négligeable.*

Un résultat important (que nous signalons mais n'utiliserons pas explicitement dans la suite) est le théorème de Matouškovà et Stegall [Ma] qui relie la réflexivité d'un espace à la Haar-négligeabilité de ces parties convexes, fermées, et d'intérieur vide. Plus précisément :

Théorème 2.1.1. *Soit X un espace de Banach séparable.*

1) Si X est réflexif, alors toute partie convexe, fermée et d'intérieur vide de X est Haar-négligeable.
2) Si X est non réflexif, il existe une partie convexe, fermée et d'intérieur vide de X qui contient un translaté de toute partie compacte de X.

En particulier, X est réflexif si et seulement si toute partie convexe, fermée et d'intérieur vide de X est Haar-négligeable.

Signalons finalement que les notions de Haar-négligeabilité et de σ-porosité sont distinctes (i.e. aucune des deux n'implique l'autre) et qu'il existe de nombreuses autres notions de petitesse en dimension infinie. A ce sujet, on pourra consulter le chapitre 6 de [BL].

2.2 Modules de lissité asymptotique

2.2.1 Définitions et premières propriétés

Nous présentons ici les définitions des différents modules. En réalité, seul la définition du module de lissité asymptotique uniforme sera explicitement nécessaire dans la suite. Cependant, ces modules sont reliés entre eux par certaines propriétés que nous allons préciser. Soit X un espace de Banach, on commence par les modules usuels :

Definition 2.2.1. - *La fonction*

$$\rho_X(t) = \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} (\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2) \quad (t \geqslant 0)$$

est appelée module de lissité de X. On dit que X est uniformément lisse lorsque $\lim_{t\to} \rho_X(t)/t = 0$.
- *La fonction*

$$\delta_X(t) = \inf_{\|x\|=1, \|y\|=1, \|x-y\| \geqslant t} \left(1 - \frac{\|x+y\|}{2}\right) \quad (t \geqslant 0)$$

est appelée module de convexité de X. On dit que X est uniformément convexe lorsque $\delta_X(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Quant aux modules asymptotiques, ils ont été introduits par Milman [Mi] sous des notations différentes de celles que nous donnons ici. Nous suivons la terminologie plus récente donnée dans [JLPS].

Definition 2.2.2. - *La fonction*

$$\overline{\rho}_X(t) = \sup_{\|x\|=1} \inf_{\dim(X/Y)<\infty} \sup_{y \in Y, \|y\|=1} (\|x+ty\| - 1) \quad (t \geqslant 0)$$

est appelée module de lissité asymptotique uniforme de X. On dit que X est asymptotiquement uniformément lisse lorsque $\lim_{t\to 0} \overline{\rho}_X(t)/t = 0$.
- *La fonction*

$$\overline{\delta}_X(t) = \inf_{\|x\|=1} \sup_{\dim(X/Y)<\infty} \inf_{y \in Y, \|y\|=1} (\|x+ty\| - 1) \quad (t \geqslant 0)$$

est appelée module de convexité asymptotique uniforme de X. On dit que X est asymptotiquement uniformément convexe lorsque $\overline{\delta}_X(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

La proposition suivante (voir [JLPS]) donne les liens élémentaires entre ces différents modules.

Proposition 2.2.1. *1) Les fonctions $\overline{\rho}_X$ et $\overline{\delta}_X$ sont croissantes et 1-lipschitziennes. Pour tout $t \geqslant 0$, $\overline{\delta}_X(t) \leqslant \overline{\rho}_X(t)$ et la fonction $\overline{\rho}_X$ est convexe.*
2) Si $X_0 \subset X$, alors $\overline{\rho}_X(t) \leqslant \overline{\rho}_{X_0}(t)$ et $\overline{\delta}_X(t) \geqslant \overline{\delta}_{X_0}(t)$ pour $t \geqslant 0$.
3) Pour tout t, $0 < t < 1$, $2\rho_X(t) \geqslant \overline{\rho}_X(t)$ et $\delta_X(t) \leqslant \overline{\delta}_X(t)$.

En particulier, d'après 3), si l'espace X est uniformément convexe alors X est asymptotiquement uniformément convexe. De même, si X est uniformément lisse alors X est asymptotiquement uniformément lisse.

2.2.2 Quelques calculs sur des espaces classiques

On va ici donner quelques valeurs explicites des modules asymptotiques introduits dans le paragraphe précédent. Ces valeurs seront utilisées dans le chapitre suivant. Si $X = \ell^p(\mathbb{N})$ avec $1 \leqslant p < \infty$, on a pour $t \geqslant 0$

$$\overline{\rho}_X(t) = \overline{\delta}_X(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1 \sim \frac{t^p}{p} \ \ (t \to 0)$$

et pour $X = c_0$, $t \geqslant 0$

$$\overline{\rho}_X(t) = \overline{\delta}_X(t) = \max(0, t-1).$$

En particulier, on voit que c_0 est le plus asymptotiquement uniformément lisse possible alors que son module de lissité usuel est le pire possible, i.e. vaut t. Détaillons par exemple le calcul sur le module de lissité asymptotique uniforme dans le cas ℓ^p (les autres calculs sont analogues). Fixons $\epsilon > 0$ et $x \in \ell^p, \|x\| = 1$. Il existe un vecteur à support fini $\overline{x}$ tel que $\|x - \overline{x}\| \leqslant \epsilon$. Soit N un entier tel que $\overline{x}_n = 0$ pour $n \geqslant N$. Soit (e_n) la base canonique et posons

$$Y = \overline{\text{span}}\{e_n, n \geqslant N\}$$

qui est de codimension finie. Fixons $y \in Y$, $\|y\| = 1$, puisque $\overline{x}$ et y sont à supports disjoints, on obtient

$$\|x + ty\| \leqslant \|x - \overline{x}\| + \|\overline{x} + ty\| \leqslant \epsilon + \|\overline{x} + ty\| = \epsilon + (1+t^p)^{1/p}.$$

Ceci conduit à

$$\overline{\rho}_X(t) \leqslant (1+t^p)^{1/p} - 1 + \epsilon,$$

puis à une première inégalité en laissant ϵ aller vers 0. Pour l'autre inégalité, nous allons voir que le sup est atteint en $x = e_1$. Il suffit donc de voir que pour tout sous espace Y de codimension finie, il existe $y \in Y$, $\|y\| = 1$ tel que

$$\|x + ty\| \geqslant (1+t^p)^{1/p},$$

et cette inégalité est réalisée en choisissant y, $\|y\| = 1$ dans $Y \cap \overline{\text{span}}\{e_n, n \geqslant 2\} \neq \{0\}$.

Dans le cas des espaces $X = L^p(0,1)$, Milman [Mi] a obtenu les estimations suivantes.

Pour $p = 1$, $\overline{\rho}_X(t) = t$ et $\overline{\delta}_X(t) = 0$.
Pour $1 < p < 2$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que :

$$\frac{1}{p}t^p \leqslant \overline{\rho}_X(t) \leqslant \frac{2}{p}t^p \text{ et } C_p t^2 \leqslant \overline{\delta}_X(t) \leqslant (p-1)t^2 \ \ (t \to 0).$$

Pour $2 < p < \infty$, il existe une constante $C'_p > 0$ telle que :

$$(p-1)t^2 \leqslant \overline{\rho}_X(t) \leqslant C'_p t^2 \text{ et } C_p t^p \leqslant \overline{\delta}_X(t) \leqslant \frac{1}{p}t^p \ \ (t \to 0).$$

Pour $p = 2$, les modules de $L^2(0,1)$ sont égaux à ceux de ℓ^2 puisque les espaces sont isométriques.

Chapitre 3

$\|T^n\|$ vs $\|T^n x\|$

Ce chapitre reproduit le preprint [Au3].
Soit X un espace de Banach (réel ou complexe) et $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné. Le but de ce chapitre est de construire des orbites suffisamment régulières pour que la suite des itérés $(\|T^n x\|)_n$ soit suffisamment proche de $(\|T^n\|)_n$.

3.1 σ-porosité et Haar négligeabilité

Müller a montré le résultat suivant.

Théorème 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, et soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $a_n \to 0$. Alors, l'ensemble*

$$\{x \in X, \|T^n x\| \geqslant a_n \|T^n\| \text{ pour une infinité de } n\}$$

est résiduel dans X.

La preuve utilise bien évidemment du Baire. Il n'est pas inutile de noter qu'en fait, dans l'énoncé précédent, la suite des puissance $(T^n)_n$ peut être remplacée par une suite arbitraire d'opérateurs $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X)$. Ce résultat est alors une forme plus forte que le théorème de Banach-Steinhauss. En effet, supposons que $\sup \|T_n\| = \infty$ et introduisons (n_j) telle que $\|T_{n_j}\| \to \infty$. On pose $a_j = \frac{1}{\sqrt{\|T_{n_j}\|}}$ puis on applique le théorème précédent à $S_j = T_{n_j}$ pour obtenir qu'il y a un ensemble résiduel de points $x \in X$ tels que $\|T_{n_j} x\| \geqslant \sqrt{\|T_{n_j}\|}$ pour une infinité d'indices j, et en particulier $\sup \|T_n x\| = \infty$. De façon équivalente, le résultat précédent exprime que le complémentaire de l'ensemble considéré est de première catégorie de Baire. Nous allons généraliser ce résultat sous la forme suivante (voir chapitre précédent pour les définitions de σ-porosité et Haar négligeabilité).

Théorème 3.1.2. *Soit $(T_n) \subset \mathcal{L}(X)$, et soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $a_n \to 0$. Alors, l'ensemble*

$$\{x \in X, \|T_n x\| \geqslant a_n \|T_n\| \text{ pour une infinité de } n\}$$

est de complémentaire σ-poreux dans X. Si de plus, X est séparable, ce complémentaire est également Haar-négligeable.

Démonstration. Si une infinité de T_n valent 0, le résultat est évident. On peut supposer, sans perte de généralité, que pour tout n, $T_n \neq 0$. Prouvons d'abord la première assertion au sujet de la σ-porosité. On peut écrire le complémentaire sous la forme $\cup_{N=1}^{\infty} E_N$, avec

$$E_N = \{x, \forall n \geqslant N, \|T_n x\| < a_n \|T_n\|\}.$$

On va voir que pour $N \geqslant 1$ fixé , E_N est poreux avec la constante $\lambda = 1/4$ (mais en fait, n'importe quel $\lambda \in]0,1[$ convient en ajustant les calculs dans ce qui suit). Considérons à présent $x \in E_N$ et $\epsilon > 0$. Fixons successivement $n \geqslant N$ et y_0 avec $\|y_0\| = 1$ tels que

$$a_n \leqslant \frac{\epsilon}{8} \text{ et } \|T_n y_0\| \geqslant \frac{\|T_n\|}{2}.$$

On a

$$\|T_n(x + \frac{\epsilon}{2} y_0)\| + \|T_n(x - \frac{\epsilon}{2} y_0)\| \geqslant \epsilon \|T_n y_0\| \geqslant \frac{\epsilon}{2} \|T_n\|,$$

donc

$$\|T_n(x + \frac{\epsilon}{2} y_0)\| \geqslant \frac{\epsilon}{4} \|T_n\| \text{ ou } \|T_n(x - \frac{\epsilon}{2} y_0)\| \geqslant \frac{\epsilon}{4} \|T_n\|.$$

En remplaçant éventuellement y_0 par $-y_0$, on peut supposer que $\|T_n(x + \frac{\epsilon}{2} y_0)\| \geqslant \frac{\epsilon}{4} \|T_n\|$. Posons $y = x + \frac{\epsilon}{2} y_0$, alors $\|y - x\| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Pour conclure, il suffit de voir que

$$B(y, \frac{1}{4}\|x - y\|) \cap E_N = B(y, \frac{\epsilon}{8}) \cap E_N = \emptyset$$

où la boule $B(a, r)$ renvoie à la boule ouverte de centre a et de rayon r. Soit $z \in B(y, \frac{\epsilon}{8})$, on a

$$\begin{aligned} \|T_n z\| \geqslant \|T_n y\| - \|T_n(z - y)\| &\geqslant \frac{\epsilon}{4}\|T_n\| - \frac{\epsilon}{8}\|T_n\| \\ &\geqslant \frac{\epsilon}{8}\|T_n\| \geqslant a_n \|T_n\| \end{aligned}$$

et $z \notin E_N$, comme annoncé.
Prouvons maintenant la seconde assertion. Il suffit de la voir dans le cas réel. En gardant les notations précédentes, il suffit de voir qu'à chaque N fixé, E_N est Haar négligeable puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles Haar négligeables est Haar négligeable. Pour cela, on rappelle le critère du chapitre précédent : si $E \subset X$ est un borélien de X et s'il existe un sous-espace $V \subset X$ de dimension finie tel que

$$\text{pour tout } x \in X, \text{ pour presque tout } v \in V, \ x + v \notin E,$$

alors E est un ensemble Haar négligeable (ici "pour presque tout" renvoie à la mesure de Lebesgue sur V). On peut trouver $u \in X$ tel que pour une infinité de n, $\|T_n u\| \geqslant \sqrt{a_n}\|T_n\|$ (en raison de la première partie du théorème) et on montre que $V = \mathbb{R}u$ est un sous-espace auquel on peut appliquer le critère précédent. Fixons $x \in X$. Posons ensuite

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda u \in E_N\}$$

et vérifions que Λ est de mesure 0 (pour la mesure de Lebesgue). Soit $\lambda \in \Lambda$, alors

$$\|T_n(x + \lambda u)\| \leqslant a_n \|T_n\| \ \ (n \geqslant N).$$

D'où
$$\left| |\lambda| - \frac{\|T_n x\|}{\|T_n u\|} \right| \leqslant a_n \frac{\|T_n\|}{\|T_n u\|} \quad (n \geqslant N).$$
Posons $b_n = \|T_n x\|/\|T_n u\|$, l'inégalité précédente montre que $\lambda \in E_+ \cup E_-$, où
$$E_+ = \bigcap_{n \geqslant N} [b_n - a_n \frac{\|T_n\|}{\|T_n u\|}, b_n + a_n \frac{\|T_n\|}{\|T_n u\|}]$$
$$E_- = \bigcap_{n \geqslant N} [-b_n - a_n \frac{\|T_n\|}{\|T_n u\|}, -b_n + a_n \frac{\|T_n\|}{\|T_n u\|}].$$
Cela implique que la mesure de Λ est inférieure à $4 \inf_{n \geqslant N} a_n \|T_n\|/\|T_n u\|$, qui est 0. En effet, pour une infinité de n,
$$a_n \frac{\|T_n\|}{\|T_n u\|} \leqslant \sqrt{a_n} \to 0 \ (n \to \infty),$$
et cela achève la preuve. □

Remarque 3.1.1. *Ces notions de petitesse, en rapport avec la dynamique linéaire ont également été étudiées dans [Bay1] et [BMM] (pour des problèmes d'hypercyclicité).*

Soit X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit $r(T)$ le rayon spectral de T et $r_x(T)$ son rayon spectral local défini par $r_x(T) = \overline{\lim} \|T^n x\|^{1/n}$. On obtient :

Corollaire 3.1.1. *Si $T \in \mathcal{L}(X)$, alors l'ensemble des x tels que $r_x(T) = r(T)$ est de complémentaire σ-poreux et Haar-négligeable (si X est séparable).*

Démonstration. Immédiat en appliquant ce qui précède à $a_n = 1/n$ et la formule du rayon spectral : $\lim \|T^n\|^{1/n} = r(T)$. □

3.2 Cas compact

Dans cette section, on oublie la Haar-négligeabilité et la σ-porosité et on essaie d'améliorer la condition $a_n \to 0$. Notons que contrairement au Théorème 3.1.2, la preuve de la proposition suivante (très élémentaire) utilise vraiment les puissances de l'opérateur de T.

Proposition 3.2.1. *Soit $T \neq 0 \in \mathcal{L}(X)$. On fait deux hypothèses :*
i) T est compact.
ii) $(\|T^n\|)$ est croissante.
Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$ tel que pour une infinité de n, on ait
$$\|T^n x\| \geqslant (1 - \epsilon)\|T^n\|.$$
De plus,
$$\left\{ x \in X, \overline{\lim} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} > 0 \right\}$$
est une partie dense de X.

Démonstration. Il existe $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| = 1$ telle que $\|T^n x_n\| \geqslant (1-\frac{\epsilon}{2})\|T^n\|$. Par compacité de T, on peut extraire de (Tx_n) une suite (Tx_{n_k}) convergeant en norme. On peut donc trouver N tel que pour $k \geqslant N$:

$$\|T(x_{n_k}) - T(x_N)\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $x = x_N$, pour $k \geqslant N$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|T^{n_k}x\| &\geqslant \|T^{n_k}x_{n_k}\| - \|T^{n_k}(x - x_{n_k})\| \\
&\geqslant (1-\frac{\epsilon}{2})\|T^{n_k}\| - \|T(x-x_{n_k})\| \, \|T^{n_k-1}\| \\
&\geqslant (1-\frac{\epsilon}{2} - \|T(x-x_{n_k})\|) \, \|T^{n_k}\| \ \text{ car } \ (\|T^n\|) \text{ est croissante} \\
&\geqslant (1-\epsilon)\|T^{n_k}\|.
\end{aligned}$$

Voyons la densité. Soit $\eta > 0$ et $x \in X$. D'après ce que l'on vient de montrer, on peut en particulier trouver un point x_0 avec $\|x_0\| \leqslant 1$ tel que pour une infinité de n

$$\|T^n x_0\| \geqslant \frac{1}{2}\|T^n\|.$$

Pour de tels n, on a

$$\|T^n(x+\eta x_0)\| + \|T^n(x-\eta x_0)\| \geqslant 2\eta\|T^n x_0\| \geqslant \eta\|T^n\|.$$

D'où

$$\overline{\lim}\ \frac{\|T^n(x+\eta x_0)\|}{\|T^n\|} > 0 \ \text{ or } \ \overline{\lim}\ \frac{\|T^n(x-\eta x_0)\|}{\|T^n\|} > 0$$

et puisque $\|x - (x \pm \eta x_0)\| \leqslant \eta$, on obtient la densité. □

Les deux exemples suivants montrent qu'on ne peut pas supprimer les assertions i) ou ii).

Exemple 3.2.1. *i') Il existe $T \in \mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}))$ tel que $(\|T^n\|)$ est croissante et pour tout $x \in \ell^p(\mathbb{N})$,*

$$\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \to 0.$$

ii') Il existe un opérateur compact $T \in \mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}))$ tel que pour tout $x \in \ell^p(\mathbb{N})$,

$$\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \to 0.$$

Démonstration. Pour i), soit (e_n) la base canonique et $T = B$ le backward shift défini par $Be_1 = 0$ et $Be_n = e_{n-1}$ de sorte que $\|T^n\| = 1$ et pour tout x

$$\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \to 0.$$

Pour ii'), on considère T le backward shift à poids défini sur $\ell^p(\mathbb{N})$ par

$$Tx = \sum_{k=2}^{\infty} w_k x_k e_{k-1}$$

où (w_k) est une suite décroissante tendant vers 0, il est facile de voir que T est compact en tant que limite en norme d'opérateurs de rang fini. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T^n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k w_k w_{k-1} \cdots w_{k-n+1} e_{k-n},$$

ce qui implique

$$\|T^n x\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k w_k w_{k-1} \cdots w_{k-n+1}|^p \leqslant (\prod_{k=2}^{n+1} w_k)^p \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p.$$

En considérant $\|T^n e_{n+1}\|$, on obtient exactement $\|T^n\|^p = \left(\prod_{k=2}^{n+1} w_k\right)^p$ et donc

$$\frac{\|T^n x\|^p}{\|T^n\|^p} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0.$$

□

Si l'espace X est réflexif, on peut améliorer légèrement le résultat précédent.

Proposition 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On fait les hypothèses i) et ii) comme dans dans la Proposition 3.2.1 et on suppose de plus que X est réflexif. Alors, il existe $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$ tel que*

$$\overline{\lim} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} = 1.$$

Démonstration. Un opérateur compact atteint toujours sa norme sur un réflexif (bien que ce fait ne soit pas strictement nécessaire ici). Ecrivons $\|T^n\| = \|T^n x_n\|$ avec $(x_n) \subset B_X$. De (x_n), on peut, par réflexivité extraire une suite (x_{n_k}) qui converge faiblement vers un point x avec $\|x\| \leqslant 1$. En estimant $\|T^{n_k} x\|$ comme précédemment, on obtient

$$\|T^{n_k} x\| \geqslant (1 - \|T(x - x_{n_k})\|)\|T^{n_k}\|.$$

Ensuite, on utilise le fait (bien connu) qu'un opérateur compact transforme toute suite faiblement convergente en suite convergente. Ainsi $\|T(x - x_{n_k})\|$ tend vers 0 et

$$\overline{\lim} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \geqslant 1,$$

ce qui conclut la preuve. □

Notre dernier exemple montre qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de réflexivité.

Exemple 3.2.2. *Il existe un opérateur compact T sur c_0, tel que $(\|T^n\|)$ est croissante et pour tout $x \in c_0$ avec $\|x\| \leqslant 1$,*

$$\overline{\lim} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} < 1.$$

Démonstration. On considère cette fois l'opérateur T défini sur c_0 par

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} w_k x_k e_{k-1} + x_0 e_0$$

où (w_n) est une suite décroissant vers 0 avec $w_0 = 1$. Ainsi, on voit déjà que T est compact (même argument que pour ii')). Des formules,

$$\begin{cases} Te_0 = e_0 \\ Te_k = w_k e_{k-1} \quad (k \geqslant 1) \end{cases}$$

On déduit par récurrence l'expression suivante :

$$T^n x = \left(\sum_{k=0}^{n} W_k x_k\right) e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} w_{k+n} w_{k+n-1} \cdots w_{k+1} x_{k+n} e_k$$

où on a posé $W_n = \prod_{i=0}^{n} w_i$. Puisque (w_n) décroit vers 0, (W_n) elle-même tend vers 0 plus vite que n'importe quelle suite géométrique, donc $W = \sum_{k=0}^{\infty} W_k < \infty$. D'autre part, on a pour $\|x\| \leqslant 1$

$$\begin{aligned} \|T^n x\| &= \max\left(\left|\sum_{k=0}^{n} W_k x_k\right|, \sup_{k \geqslant 1} w_{k+n} w_{k+n-1} \cdots w_{k+1} |x_{k+n}|\right) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} W_k \end{aligned}$$

car $0 \leqslant w_i \leqslant 1$. En considérant le vecteur $e_0 + \cdots + e_n$, on obtient $\|T^n\| = \sum_{k=0}^{n} W_k$, donc $(\|T^n\|)$ bien croissante. Supposons maintenant qu'il existe un point $x \in c_0$, $\|x\| \leqslant 1$ tel que

$$\overline{\lim} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} = 1.$$

On voit qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\left|\sum_{k=0}^{\varphi(n)} W_k x_k\right| \to W \quad (n \to \infty).$$

Soit N un entier tel que $k \geqslant N$, $|x_k| \leqslant 1/2$. Alors

$$\left|\sum_{k=0}^{\varphi(n)} W_k x_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| W_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} W_k + \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} W_k.$$

A la limite quand $n \to \infty$, l'inégalité précédente fournit

$$W \leqslant \sum_{k=0}^{N} W_k + \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} W_k < W,$$

une contradiction. $\square$

Remarque 3.2.1. *Dans le dernier exemple et dans i'), on peut aussi imposer que* $\|T^n\| \to \infty$ *(en remplaçant* T *par* $2T$*).*

Enfin, la dernière proposition de cette section peut être vue comme une variation du cas compact (voir la remarque après la fin de la preuve). Elle nous sera également utile dans la section suivante.

Proposition 3.2.3. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$ *un opérateur non nilpotent. Supposons qu'il existe* $a \in]0,1[$ *et un sous-espace* M *de codimension finie tel que* $\|T^n_{|M}\| \leqslant a\|T^n\|$ *pour une infinité de* n*, alors*

$$\left\{x \in X, \overline{\lim} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} > 0\right\}$$

est une partie dense de X*.*

Démonstration. D'après un argument précédent, il suffit de trouver juste un point pour avoir une densité automatique. En remplaçant M par son adhérence, on peut supposer que M est fermé dans X. Ecrivons $X = F \oplus M$ où F est un sous-espace de dimension finie. Soit $(f_1, \cdots, f_r)$ une base normée de F et $(f_1^*, \cdots, f_r^*)$ sa base duale (dans F). Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on étend chaque f_i^* à X en imposant que la restriction de f_i^* à M soit 0. Si l'on note P la projection (continue) sur F (par rapport à la décomposition précédente), on voit facilement que f_i^* est continue avec $\|f_i^*\| \leqslant \|{f_i^*}_{|F}\|\|P\|$. Soit $C = \sup_i \|f_i^*\|$ et choisissons $a_r > 0$ tel que $Cra_r + a < 1$. Posons

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \|T^n_{|M}\| \leqslant a\|T^n\|\}$$

et

$$A_i = \{n \in A, \|T^n f_i\| \geqslant a_r\|T^n\|\}.$$

On montre que $A = \cup_{i=1}^r A_i$ et comme A est infini par hypothèse, un des A_i le sera également et cela donnera la conclusion. Supposons au contraire qu'il existe $n \in A \setminus \cup_{i=1}^r A_i$. Fixons $\alpha_r \in]Cra_r + a, 1[$ et soit $x \in X$, $\|x\| = 1$ tel que $\|T^n x\| \geqslant \alpha_r\|T^n\|$. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^r x_i f_i + u$ où $u \in M$. Par construction des f_i^*, $x_i = f_i^*(x)$, d'où $|x_i| \leqslant C$ et on obtient

$$\begin{aligned} \|T^n x\| &\leqslant \sum_{i=1}^r |x_i|\|T^n f_i\| + \|T^n u\| \\ &\leqslant (Cra_r + a)\|T^n\| < \alpha_r\|T^n\|, \end{aligned}$$

une contradiction. □

Remarque 3.2.2. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$*, on définit*

$$\|T\|_\mu = \inf\{\|T_{|M}\|, M \subset X, \text{codim } M < \infty\}.$$

Cette quantité mesure le degré de non compacité de T *puisque* $\|T\|_\mu = 0$ *si et seulement si* T *est compact (voir [LS] pour les détails). Le résultat précédent dit grosso-modo que si* $\|T^n\|_\mu$ *n'est pas trop grand "uniformément" (c'est le même* M *qui marche pour une infinité de* n*), alors on a une conclusion similaire au cas compact.*

3.3 Module de lissité asymptotique uniforme et exposants optimaux

On revient dans cette section au cas général. Une autre façon de dire que $\|T^n x\|$ n'est pas trop éloigné de $\|T^n\|$ est la condition suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} = \infty.$$

Beauzamy a montré que si H était un espace de Hilbert, et $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur non nilpotent, alors

$$\left\{ x \in H, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} = \infty \right\}$$

est une partie dense de H. Par une preuve différente, Müller a amélioré ce résultat sous la forme suivante : si $q < 2$, alors

$$\left\{ x \in H, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \right)^q = \infty \right\}$$

est une partie dense de H, et si $q < 1$ et $T \in \mathcal{L}(X)$ (où X est un espace de Banach arbitraire), alors

$$\left\{ x \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \right)^q = \infty \right\}$$

est une partie dense de X. Il a également construit des exemples qui montrent que les constantes 1 et 2 ne peuvent être améliorées dans les cas banachiques et hilbertiens. On peut montrer qu'en fait, ces résultats ont des connexions avec des théorèmes fins, dûs à K. Ball et que nous rappelons ci-dessous :

Théorème 3.3.1. *(K.Ball, [Bal1]) Soit X un espace de Banach (réel ou complexe) et $(f_n) \subset X^*$ telle que $\|f_n\| = 1$ pour tout n. Soit aussi $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < 1$. Alors il existe un point x, $\|x\| = 1$ tel que pour tout n, $|\langle f_n, x\rangle| \geqslant \alpha_n$.*

Dans [Bal2], la condition $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < 1$ est améliorée par $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < 1$ dans les espaces de Hilbert complexes. Montrons par exemple, à l'aide de ce résultat, que dans le cas banachique, on a pour $q < 1$

$$\left\{ x \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \right)^q = \infty \right\} \neq \emptyset,$$

la densité sera expliquée dans la suite et sera automatique. Soit

$$\alpha_n = \frac{C}{n^{1/q}},$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < 1$ pour un $C > 0$ assez petit qui est fixé pour avoir cette condition. On note S^* l'adjoint d'un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$. Il existe $(f_n) \subset X^*$ telle que

$$\|(T^n)^* f_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|(T^n)^*\| = \frac{1}{2}\|T^n\|.$$

On peut appliquer le théorème de Ball à la suite de formes linéaires $((T^n)^*f_n/\|(T^n)^*f_n\|)_n$. Il existe $x \in X$, $\|x\| = 1$ tel que pour tout n :

$$\frac{|\langle (T^n)^*f_n, x\rangle|}{\|(T^n)^*f_n\|} \geqslant \alpha_n,$$

ce qui conduit à

$$\|T^n x\| \geqslant |\langle f_n, T^n x\rangle| = |\langle (T^n)^*f_n, x\rangle| \geqslant \alpha_n \|(T^n)^*f_n\| \geqslant \frac{\alpha_n}{2}\|T^n\|.$$

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^q = \infty$, on obtient bien la conclusion souhaitée.

Remarque 3.3.1. *Ici, on peut remplacer les itérés de T par une suite arbitraire $(T_n) \subset \mathcal{L}(X)$ telle que $T_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.*

Les exposants obtenus dans les deux cas suggèrent une dépendance géométrique vis à vis de l'espace ambiant. Pour cette raison, on introduit

$$q_X = \sup\{q > 0, \text{pour tout opérateur linéaire borné et non nilpotent } T;$$
$$\exists x \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right)^q = \infty\}.$$

D'après ce qui précède, q_X est bien défini pour tout Banach X (i.e. l'ensemble sur lequel on prend le sup est non vide) et $q_X \geqslant 1$, tandis que $q_H = 2$ si H est un espace de Hilbert. Nous allons obtenir les valeurs suivantes.

Théorème 3.3.2. *On a pour $1 \leqslant p < \infty$: $q_{\ell^p} = p$, $q_{L^p(0,1)} = \min(p, 2)$, $q_{c_0} = \infty$.*

Remarque 3.3.2. *Une discussion similaire, traitant d'exposants optimaux, et faisant rentrer en jeux des suites faiblement fermées ainsi que le type de l'espace peut être trouvée dans [Bay2] et [BM], chapitre 10.*

Notons d'abord qu'en fait, on a $q_X = q'_X$ où

$$q'_X = \sup\{q > 0, \text{pour tout opérateur linéaire borné et non nilpotent } T;$$
$$\text{l' ensemble } \{x \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right)^q = \infty\} \text{ est dense dans } X\}.$$

Cela provient de l'observation suivante, qui est une conséquence du lemme de Baire.

Proposition 3.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ non nilpotent, $q_0 > 0$ et supposons que pour tout $q < q_0$, il existe $x_0 \in X$ tel que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x_0\|}{\|T^n\|}\right)^q = \infty.$$

Alors l'ensemble

$$A = \left\{x \in X,\ \forall q < q_0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right)^q = \infty\right\}$$

est un G_δ-dense de X.

Démonstration. En considérant une suite croissante (s_k) telle que $s_k < q_0$ pour tout k et $s_k \to q_0$ quand $k \to \infty$, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout $q < q_0$, $\widetilde{A}$ est un G_δ dense de X, où

$$\widetilde{A} = \left\{ x \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \right)^q = \infty \right\}.$$

On peut écrire $\widetilde{A} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \Omega_N$, où

$$\Omega_N = \left\{ x \in X, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \right)^q > N \right\}.$$

En utilisant par exemple le lemme de Fatou (ou en passant par les sommes partielles), il est facile de voir que $X \setminus \Omega_N$ est un fermé de X pour tout N. Par Baire, il suffit de vérifier que Ω_N est dense dans X pour tout N. Fixons $\epsilon > 0$ et $x \in X$. En remplaçant x_0 par λx_0 pour un $\lambda > 0$ convenable, on peut supposer que $\|x_0\| = \epsilon$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $(x+y)^q \leqslant C(x^q + y^q)$ pour tout $x, y \geqslant 0$. De cela et de l'inégalité triangulaire, on tire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n(x-x_0)\|}{\|T^n\|} \right)^q + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n(x+x_0)\|}{\|T^n\|} \right)^q \geqslant \frac{2^q}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|T^n x_0\|}{\|T^n\|} \right)^q = \infty.$$

Donc $x - x_0$ ou $x + x_0$ appartient à $\widetilde{A}$ et puisque $\|x - (x \pm x_0)\| = \epsilon$, cela conclut la preuve. □

Remarque 3.3.3. *Il est possible (au moins dans le cas où $q > 1$ et X est réflexif) de montrer que sous les hypothèses de la Proposition 3.3.1, l'ensemble A est Haar négligeable. En effet, il suffit de voir qu'à chaque N fixé, $X \setminus \Omega_N$ est Haar négligeable et cela découle directement du théorème de Matouškovà [Ma] : un ensemble convexe, fermé et d'intérieur vide est Haar négligeable.*

Pour calculer q_X, on va utiliser le module de lissité asymptotique uniforme de X, qui est un outil utile de géométrie des espaces de Banach (voir chapitre précédent), mais dont l'utilisation en théorie des opérateurs n'est pas fréquente ... Rappelons que le module de lissité asymptotique uniforme de X est noté $\overline{\rho}_X(t)$ et défini par

$$\overline{\rho}_X(t) = \sup_{\|x\|=1} \inf_{\dim(X/Y)<\infty} \sup_{y \in Y, \|y\|=1} (\|x + ty\| - 1) \ \ (t \geqslant 0).$$

On peut maintenant énoncer :

Théorème 3.3.3. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$ non nilpotent. Supposons que le module de lissité asymptotique uniforme de X vérifie : $\overline{\rho}_X(2t) = O(\overline{\rho}_X(t))$ lorsque $t \to 0$. Soit $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application croissante telle que $\rho(t) > 0$ dès que $t > 0$ et*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\overline{\rho}_X(t)}{\rho(t)} = 0,$$

alors, il existe un point $x \in X$ tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|} \right) = \infty.$$

En conséquence, on obtient les résultats mentionnés précédemment. Plus précisément :

Théorème 3.3.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ ($X = \ell^p(\mathbb{N})$, $X = L^p(0,1)(1 \leqslant p < \infty)$ ou $X = c_0(\mathbb{N})$) un opérateur non nilpotent. Alors*
a) Si $X = \ell^p$, l'ensemble

$$\left\{x \in X, \forall q < p, \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right)_n \notin \ell^q\right\}$$

est un G_δ dense de X. D'autre part, il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ (non nilpotent) tel que pour tout x,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|S^n x\|}{\|S^n\|}\right)^p < \infty.$$

b) Si $X = L^p$, l'ensemble

$$\left\{x \in X, \forall q < \min(p,2), \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right)_n \notin \ell^q\right\}$$

est un G_δ dense de X. D'autre part, il existe $R \in \mathcal{L}(X)$ (non nilpotent) tel que pour tout x,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|R^n x\|}{\|R^n\|}\right)^{\min(p,2)} < \infty.$$

c) Si $X = c_0$, l'ensemble

$$\left\{x \in X, \forall q > 0, \left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right)_n \notin \ell^q\right\}$$

est un G_δ dense de X. En particulier, on a

$$q_{\ell^p} = p, q_{L^p} = \min(p,2)(1 \leqslant p < \infty), q_{c_0} = \infty.$$

Démonstration. Les premières assertions de a) et b), ainsi que c) sont une conséquence directe du Théorème 3.3.3, de la Proposition 3.3.1, et des exemples de calculs des modules donnés dans le chapitre précédent (notons que seul le comportement de $\overline{\rho}_X(t)$ lorsque $t \to 0$ est important). On passe donc aux exemples. a) peut être trouvé dans [Mu]. Le travail est fait pour $p = 2$, mais le cas général ne présente pas de difficulté supplémentaire. On le redétaille cependant. Soit (e_i) la base canonique de ℓ^p et posons $e_{1,0} = e_1$, $e_{1,1} = e_2$, $e_{2,0} = e_3$, $e_{2,1} = e_4$, $e_{2,2} = e_5$ ... De cette façon, on peut écrire $\ell^p = \oplus_{k=1}^{\infty} X_k$ où X_k est l'espace ℓ^p de dimension $(k+1)$ muni de la base $e_{k,0}, \ldots, e_{k,k}$. S est alors défini par $S = \oplus_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} B_k$ où B_k est le backward shift usuel sur $\mathcal{L}(X_k)$, i.e. $B_k(e_{k,j}) = e_{k,j-1}$ pour $j \geqslant 1$ et $B_k e_{k,0} = 0$. Pour $n \geqslant 1$, $S^n(e_{n,n}) = 2^{-n^2} e_{n,0}$ donc $\|S^n\| \geqslant 2^{-n^2}$. Soit $x_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j e_{k,j} \in X_k$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|S^n x_k\|}{\|S^n\|}\right)^p \leqslant \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{2^{n^2}}{2^{nk}} (\sum_{j=n}^{k} |\alpha_j|^p)^{1/p}\right)^p \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{np(k-n)}} \|x_k\|^p \leqslant 2\|x_k\|^p.$$

Il suit que pour $x = \sum_{k=1}^\infty x_k$

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|S^nx\|}{\|S^n\|}\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|S^nx_k\|}{\|S^n\|}\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^\infty 2\|x_k\|^p < \infty.$$

Maintenant pour b), on utilise le fait que pour $1 \leqslant p < \infty$, ℓ^p est isomorphe à un sous-espace complémenté $E \subset L^p$. Ecrivons donc $L^p = E \oplus F$ où F est sous-espace fermé de L^p. Si $Q : \ell^p \to E$ est un isomorphisme, alors clairement $S_0 = QSQ^{-1}$ est un opérateur borné sur E satisfaisant pour tout $x \in E$,

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|S_0^nx\|}{\|S_0^n\|}\right)^p < \infty.$$

Soit P la projection sur E par rapport à la décomposition $L^p = E \oplus F$ et posons $R = S_0P$ qui est borné sur L^p. Alors, pour tout n, $R^n = S_0^nP$. Puisque P est une projection sur E, on a $\|R^n\| \geqslant \|S_0^n\|$. Donc

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|R^nx\|}{\|R^n\|}\right)^p \leqslant \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|S_0^n(Px)\|}{\|S_0^n\|}\right)^p < \infty.$$

Cela montre b) pour $p \leqslant 2$. Pour $p \geqslant 2$, on utilise le même argument et le fait que ℓ^2 est isomorphe à un sous espace complémenté de L^p. $\square$

Il nous reste à établir le Théorème 3.3.3. Avant de passer à la preuve, on a besoin du lemme élémentaire suivant.

Lemme 3.3.1. *Soient f, g deux applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et supposons que pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$. Supposons également que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \;\text{ et }\; \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Alors, il existe une suite $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}^+$, $\alpha_i \to 0$ (quand $i \to \infty$) telle que

$$\sum_{i=1}^\infty f(\alpha_i) < \infty \;\text{ et }\; \sum_{i=1}^\infty g(\alpha_i) = \infty.$$

Démonstration. Si $g(x) \nrightarrow 0$, il existe $\epsilon > 0$ et $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}^+$, $\alpha_i \to 0$ telle que pour tout $i \geqslant 1$, $g(\alpha_i) \geqslant \epsilon$. Quitte à passer à une sous suite, on peut supposer que $\sum_{i=1}^\infty f(\alpha_i) < \infty$ (car $f(x) \to 0$) et puisque $g(\alpha_i) \geqslant \epsilon$ pour tout i, on obtient aussi $\sum_{i=1}^\infty g(\alpha_i) = \infty$. Maintenant, si $g(x) \to 0$, fixons $(\epsilon_i) \subset \mathbb{R}^+$ avec $\epsilon_i > 0$ pour tout i et telle que $\sum_{i=1}^\infty \epsilon_i < \infty$. Choisissons pour chaque $i \geqslant 1$, $x_i \in]0, \frac{1}{i}[$ tel que $f(x_i) \leqslant \epsilon_i g(x_i)$ et $g(x_i) \leqslant \frac{1}{2}$. Posons $n_1 = 1$ et $n_{i+1} = n_i + [\frac{1}{g(x_i)}]$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Si k est un entier tel que $n_i \leqslant k \leqslant n_{i+1} - 1$, posons $\alpha_k = x_i$, ainsi $\alpha_k \to 0$ parce que $x_i \to 0$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty f(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} f(\alpha_k) = \sum_{i=1}^\infty f(x_i)(n_{i+1} - n_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^\infty \epsilon_i g(x_i)(n_{i+1} - n_i) \leqslant \sum_{i=1}^\infty \epsilon_i < \infty. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} g(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)(n_{i+1}-n_i) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}(1-g(x_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty,\end{aligned}$$

et cela conclut la preuve du lemme. □

Nous sommes finalement prêts pour la preuve du Théorème 3.3.3. Pour cela, on combinera des techniques de [Mu] et [L].

Démonstration du Théorème 3.3.3. On peut faire l'hypothèse (*) suivante : pour tout sous-espace M de codimension finie, $\|T^n_{|M}\| > \frac{1}{2}\|T^n\|$ à partir d'un certain rang. En effet, si ce n'est pas vrai, alors la Proposition 3.2.3 garantit qu'il existe $\epsilon > 0$, un point $x \in X$ et une suite strictement croissante (n_j) telle que pour tout j :

$$\frac{\|T^{n_j}x\|}{\|T^{n_j}\|} \geqslant \epsilon.$$

Puisque $\rho(\epsilon) > 0$, cela implique évidemment

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho\left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right) = \infty.$$

Donc on peut supposer (*). Par le Lemme 3.3.1, il existe une suite $(\tilde{\alpha}_i)$, $\tilde{\alpha}_i \to 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\rho}_X(\tilde{\alpha}_i) < \infty \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} \rho(\tilde{\alpha}_i) = \infty.$$

Puisque ρ est croissante et $\overline{\rho}_X(2t) = O(\overline{\rho}_X(t))$, on voit que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\rho}_X(\alpha_i) < \infty \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} \rho(\frac{\alpha_i}{2}) = \infty$$

où on a posé $\alpha_i = 2\tilde{\alpha}_i$. Maintenant, en utilisant à nouveau l'hypothèse $\overline{\rho}_X(2t) = O(\overline{\rho}_X(t))$, on voit que pour tout k, $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\rho}_X(2^k\alpha_i) < \infty$ et donc $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_i))$ converge. De cela et du fait que $\alpha_i \to 0$, on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers (m_k) telle que

$$\alpha_i \leqslant 2^{-k} \ (i \geqslant m_k) \text{ et } \prod_{i=m_k}^{\infty}(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_i)) \leqslant 2.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $m_1 = 1$. Fixons également une fois pour toute une suite $(\beta_i) \subset \mathbb{R}^+$, $\beta_i > 0$ telle que $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\beta_i)$ converge. Dans la suite, on va construire par récurrence deux suites (n_j) et (u_i) telles que : $n_1 < n_2 < \cdots$, $\|u_i\| = 1$. De plus, ces suites devront satisfaire 2 propriétés. En premier lieu, pour tout $l \geqslant 1$ et $j \leqslant l$:

$$\left\|T^{n_j}\left(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i u_i\right)\right\| \geqslant \frac{\alpha_j}{2}\|T^{n_j}\|. \tag{1}$$

Ensuite, pour tout $k \geqslant 1$, et $m_k \leqslant l \leqslant m_{k+1}-1$:

$$\left\|\sum_{i=m_k}^{l}\alpha_i u_i\right\| \leqslant 2^{1-k}\left(\prod_{i=m_k}^{l}(1+\beta_i)\right)\left(\prod_{i=m_k}^{l}(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_i))\right). \tag{2}$$

Une fois que cela est acquis, par (2) et puisque $\prod_{i=m_k}^{\infty}(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_i)) \leqslant 2$, on voit que $\left(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i u_i\right)_l$ est de Cauchy, et donc converge vers un point x. Par (1), pour j fixé, on obtient à la limite

$$\|T^{n_j}x\| \geqslant \frac{\alpha_j}{2}\|T^{n_j}\|,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho\left(\frac{\|T^n x\|}{\|T^n\|}\right) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty}\rho\left(\frac{\|T^{n_j}x\|}{\|T^{n_j}\|}\right) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty}\rho(\frac{\alpha_j}{2}) = \infty$$

et c'est la conclusion désirée. Il reste maintenant à faire la partie inductive de la preuve. Soit $n_1 = 1$. Il existe $u_1 \in X$ tel que $\|u_1\| = 1$ et $\|Tu_1\| \geqslant \frac{\alpha_1}{2}$. Soit $k \geqslant 1$ et supposons que la construction a été amenée jusqu'à un point $m_k \leqslant l \leqslant m_{k+1}-1$. Si $l+1 = m_{k+1}$, alors quelque soit le choix de u_{l+1}, $\|u_{l+1}\| = 1$,

$$\|\alpha_{l+1}u_{l+1}\| \leqslant 2^{-(k+1)} \leqslant 2^{1-(k+1)}(1+\beta_{l+1})(1+\overline{\rho}_X(2^{k+1}\alpha_{l+1})),$$

donc (2) est automatiquement satisfaite pour $l+1$. Les arguments pour obtenir (1) seront détaillés ultérieurement. Supposons désormais que $l+1 \leqslant m_{k+1}-1$. Pour plus de visibilité, jusqu'à la fin de cette preuve, on pose $s_l = \sum_{i=m_k}^{l}\alpha_i u_i$ et $x_l = \sum_{i=1}^{l}\alpha_i u_i$. On distingue 2 cas. Supposons d'abord que $\|s_l\| \leqslant 2^{-k}$. Alors, pour tout choix de u_{l+1} tel que $\|u_{l+1}\| = 1$,

$$\left\|\sum_{i=m_k}^{l+1}\alpha_i u_i\right\| \leqslant \|s_l\| + \alpha_{l+1} \leqslant 2^{1-k}.$$

Et là encore, (2) est automatiquement satisfaite. On indique maintenant comment obtenir (1). Pour chaque $j \leqslant l$, on sélectionne une forme linéaire f_j telle que $\|f_j\| = 1$ et $|f_j(T^{n_j}x_l)| = \|T^{n_j}x_l\|$ et on pose

$$M = \bigcap_{j=1}^{l}\ker(f_jT^{n_j})$$

qui est clairement de codimension finie. En appliquant (*), on peut trouver $n_{l+1} > n_l$ et $v \in M$, $\|v\| = 1$ tels que

$$\|T^{n_{l+1}}v\| \geqslant \frac{1}{2}\|T^{n_{l+1}}\|.$$

Puisqu'on a

$$\begin{aligned}\|T^{n_{l+1}}(x_l+\alpha_{l+1}v)\| + \|T^{n_{l+1}}(x_l-\alpha_{l+1}v)\| &\geqslant 2\|T^{n_{l+1}}v\|\alpha_{l+1}\\ &\geqslant \|T^{n_{l+1}}\|\alpha_{l+1},\end{aligned}$$

il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que
$$\|T^{n_{l+1}}(x_l + \epsilon\alpha_{l+1} v)\| \geqslant \frac{\alpha_{l+1}}{2}\|T^{n_{l+1}}\|.$$
En posant $u_{l+1} = \epsilon v$, on a donc prouvé (1) pour $j = l+1$. Pour $j \leqslant l$, on obtient
$$\begin{aligned}\|T^{n_j}(x_l + \alpha_{l+1}u_{l+1})\| &\geqslant |f_j T^{n_j}(x_l + \alpha_{l+1}u_{l+1})| \\ &= |f_j T^{n_j} x_l| = \|T^{n_j} x_l\| \\ &\geqslant \frac{\alpha_j}{2}\|T^{n_j}\|,\end{aligned}$$
où la dernière inégalité provient de l'hypothèse de récurrence de (1). Supposons maintenant que $\|s_l\| \geqslant 2^{-k}$. Par définition du module de lissité asymptotique uniforme, on peut trouver un sous-espace $Y \subset X$ de codimension finie tel que pour tout $y \in Y$, $\|y\| = 1$,
$$\left\|\frac{s_l}{\|s_l\|} + 2^k \alpha_{l+1} y\right\| \leqslant (1+\beta_{l+1})(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_{l+1})). \tag{3}$$
Cette fois, on pose
$$M = \bigcap_{j=1}^{l} \ker(f_j T^{n_j}) \bigcap Y$$
où les f_j sont contruits exactement comme dans le cas précédent. On construit également de la même manière n_{l+1} et $u_{l+1} \in M$, $\|u_{l+1}\| = 1$ pour que (1) soit vérifiée en $l+1$. A présent, (3) avec $y = u_{l+1} \in M \subset Y$ fournit
$$\left\|s_l + 2^k\|s_l\|\alpha_{l+1}u_{l+1}\right\| \leqslant \|s_l\|(1+\beta_{l+1})(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_{l+1})). \tag{4}$$
La condition $\|s_l\| \geqslant 2^{-k}$ implique que $s_l + \alpha_{l+1}u_{l+1}$ se trouve sur le segment joignant s_l et $s_l + 2^k\|s_l\|\alpha_{l+1}u_{l+1}$. Donc, on tire de (4)
$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=m_k}^{l+1}\alpha_i u_i\right\| &= \|s_l + \alpha_{l+1}u_{l+1}\| \\ &\leqslant \|s_l\|(1+\beta_{l+1})(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_{l+1})) \\ &\leqslant 2^{1-k}\left(\prod_{i=m_k}^{l+1}(1+\beta_i)\right)\left(\prod_{i=m_k}^{l+1}(1+\overline{\rho}_X(2^k\alpha_i))\right),\end{aligned}$$
où la dernière inégalité découle de l'hypothèse de récurrence. On voit que (2) est vérifiée pour $l+1$ et cela achève la construction. □

Remarque 3.3.4. *Ce que Lindenstrauss [L] a montré est le résultat suivant : si $(x_i) \subset X$ est telle que $\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon_i x_i$ diverge pour tout choix de signes $(\epsilon_i) \subset \{-1, 1\}$, alors $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_X(\|x_i\|) = \infty$ où ρ_X le module de lissité usuel, défini pour $t \geqslant 0$ par*
$$\rho_X(t) = \frac{1}{2}\sup_{\|x\|=1,\|y\|=1}(\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2).$$

Remarque 3.3.5. *On ne sait pas si l'hypothèse $\overline{\rho}_X(2t) = O(\overline{\rho}_X(t))$ est vraiment nécessaire bien qu'il semble (comme G. Lancien l'a fait remarquer) qu'un mauvais espace d'Orlicz puisse mettre cette hypothèse en défaut.*

Chapitre 4

Sur les orbites d'opérateurs bornés qui tendent vers l'infini

Une partie de ce travail est tirée de [Au2].
Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur linéaire borné sur X. On s'intéresse encore dans ce chapitre à des orbites régulières, plus particulièrement celles qui tendent vers l'infini. On note

$$A_T = \{x \in X, \|T^n x\| \to \infty\}.$$

Si $A_T \neq \emptyset$ et $x \in A_T$, il n'est pas difficile de voir que l'orbite de x sous T est fermée dans X (et non trivial). L'étude de A_T est donc susceptible de fournir des sous-ensembles invariants fermés. D'autre part, par définition, on a

$$A_T = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqslant N} \{x \in X, \|T^n x\| \geqslant k\}.$$

A_T est donc une intersection dénombrable d'une réunion dénombrable de fermés, ce qui d'un point de vue topologique est assez pauvre. Ainsi, par rapport au chapitre précédent où on a parfois pu appliquer le théorème de Baire (ou sa forme forte de σ-porosité), on voit qu'ici a priori la structure de A_T est plus compliquée et ne s'y prête pas. D'autre part, si $\|T^n\| \to \infty$, alors d'après le théorème de la borne uniforme, il y a un ensemble dense de points x tels que $\sup \|T^n x\| = \infty$, mais il se peut très bien que A_T soit vide. En effet, c'est par exemple le cas avec le backward shift à poids B suivant défini sur ℓ^p (voir [HaSm]) par

$$Be_i = \begin{cases} \left(\dfrac{i}{i-1}\right)^{\frac{1}{p}} e_{i-1} \text{ si } i > 1. \\ 0 \text{ si } i = 1. \end{cases}$$

Cependant, on verra dans la suite que des conditions de croissance de la suite $(\|T^n\|)_n$ assurent la densité de A_T. Prăjitură [P] a cependant fait la conjecture suivante :

Conjecture 4.0.1. *Soit T un opérateur sur un espace de Banach, alors A_T est soit vide, soit dense.*

Cette conjecture a été résolue négativement par Hájek et Smith ([HaSm], 2010) pour des espaces de Banach de dimension infinie possédant une base symétrique. Leur construction se base sur des calculs de normes faisant intervenir de façon cruciale l'invariance de la norme par permutations ; ils posent donc la question suivante : si l'espace est à base inconditionnelle (notion plus faible que à base symétrique), peut-on construire un opérateur T tel que A_T ne soit ni vide, ni dense ? On répond à cette question de façon positive en montrant qu'en fait, une construction est possible dans tout Banach séparable de dimension infinie. De plus, ils posent une seconde question qui est de savoir si l'opérateur T peut être une perturbation compacte de l'identité, i.e. s'écrire sous la forme $T = I + K$ où K est un opérateur compact. La raison de cette question (à laquelle nous répondrons également positivement) est qu'ils ont observé que, pour un opérateur compact K, et même pour un opérateur strictement singulier S (c'est à dire un opérateur dont la restriction à un sous-espace de dimension infinie n'est jamais un isomorphisme), A_S est soit vide, soit dense. D'autre part, il existe des espaces possédant très peu d'opérateurs : Gowers et Maurey [GM] ont construit un espace de Banach où tout opérateur est de la forme $\lambda I + S$, avec S strictement singulier ; très récemment Argyros et Haydon [AH] ont même construit un espace ou tout opérateur est de la forme $\lambda I + K$, avec K compact. Ainsi, lorsque l'on cherche à faire une construction d'opérateurs sur un espace de Banach arbitraire, on doit pouvoir forcer la construction pour que cet opérateur soit de la forme $\lambda I + K$. Citons à ce propos un résultat classique de Ansari [An] : tout espace de Banach séparable de dimension infinie contient un opérateur hypercyclique de la forme $I+K$.

Précisément, nous montrons ici le résultat suivant.

Théorème 4.0.5. *Soit X un espace séparable de dimension infinie (réel ou complexe). Alors, il existe un opérateur linéaire borné T sur X tel que, si l'on pose*

$$A_T = \{x \in X, \|T^n x\| \to \infty\} \text{ et } B_T = \{x \in X, \underline{\lim}\|T^n x - x\| = 0\},$$

A) A_T et B_T sont d'intérieurs non vides et $\{A_T, B_T\}$ forment une partition de X.
B) T peut s'écrire sous la forme $I + K$, où K est un opérateur compact.
On note $\mathcal{A}_X$ l'ensemble des opérateurs qui satisfont la condition A).

Ainsi tout point de l'espace s'envoie soit à l'infini (par T) ou bien est récurrent.
Comme conséquence de ce résultat, on obtient le corollaire suivant un peu plus général.

Corollaire 4.0.1. *Les conclusions du Théorème 4.0.5 restent vraies si l'on suppose seulement que X contient un sous-espace fermé de dimension infinie complémenté dans X.*

Démonstration. On écrit $X = X_0 \oplus Y$ où $X_0 \subset X$ est un espace séparable fermé de dimension infinie de X et Y un sous espace fermé de X. On considère ensuite $T = T_0 \oplus I$ où T_0 est un opérateur sur X_0 qui satisfait le Théorème 4.0.5. Puisque $T^n = T_0^n \oplus I$, on obtient $A_T = A_{T_0} + Y$, $B_T = B_{T_0} + Y$ et il est clair que T a les propriétés voulues. □

Remarque 4.0.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, l'ensemble B_T a une structure plus agréable que A_T : c'est un G_δ. De plus B_T est dense si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n) \subset X$ et une suite d'entiers $k_n \geqslant 1$ telle que $x_n \to x$ et $\|T^{k_n} x_n - x_n\| \to 0$.*

Démonstration. Le fait que B_T est un G_δ réside dans l'écriture

$$B_T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \{x \in X, \|T^N x - x\| < \frac{1}{n}\}.$$

Montrons maintenant l'équivalence. Supposons B_T dense dans X et soit $x \in X$. Il existe alors une suite $(x_n) \subset B_T$ telle que $x_n \to x$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\underline{\lim}\|T^k x_n - x_n\| = 0 \ \ (k \to \infty).$$

En particulier, pour chaque $n \geqslant 1$, il existe donc $k_n \geqslant 1$ telle que $\|T^{k_n} x_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0$.

Pour la réciproque, il suffit avec le théorème de Baire de voir que à $\epsilon > 0$ fixé

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \{x \in X, \|T^N x - x\| < \epsilon\}$$

est dense dans X. Si ce n'est pas le cas, il existe $x \in X$ et $r > 0$ tel que

$$\forall N \geqslant 1, \forall z \in \overline{B}(x,r), \|T^N z - z\| \geqslant \epsilon.$$

Par hypothèse, il existe $k_n \geqslant 1$ et $x_n \to x$ telles que $\|T^{k_n} x_n - x_n\| \to 0$. Pour n assez grand $x_n \in \overline{B}(x,r)$, donc $\|T^{k_n} x_n - x_n\| \geqslant \epsilon$ ce qui donne une contradiction. □

Expliquons maintenant l'organisation de ce chapitre. La première section rappelle les faits utiles sur les bases dans les espaces de Banach. La seconde section s'intéresse à quelques questions basiques sur A_T et traite quelques exemples. La troisième section est là pour prouver deux lemmes de séparation asymptotique qui seront utilisés pour les constructions d'opérateurs de la section suivante, dans laquelle on détaille notamment la preuve du Théorème 4.0.5. On donne ensuite une version simplifiée de l'opérateur construit par Hájek et Smith dans la cinquième section. Enfin, la section 6 est constituée de compléments et remarques qui débouchent sur certaines questions.
Dans toute la suite de ce chapitre, on utilisera pour $T \in \mathcal{L}(X)$ les notations spectrales classiques suivantes :
- $\sigma(T)$ le spectre de T.
- $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.
- $r(T)$ le rayon spectral de T.

On notera aussi $\mathcal{GL}(X)$ l'ensemble des opérateurs inversibles.

4.1 Rappels sur les bases dans les espaces de Banach

Soit X un espace de Banach. On rappelle ici la définition des bases de Schauder, ainsi que d'autres bases possédant des propriétés plus riches. Cette notion est particulièrement utile pour définir un opérateur, tout comme on le fait naturellement en dimension finie. Les définitions et résulats suivant proviennent de [LQ] et [LT], ouvrages auxquels on renvoie pour des informations plus avancées.

Definition 4.1.1. *Soit $(e_k) \subset X$. On dit que (e_k) est une base de Schauder si on peut écrire de façon unique tout vecteur x sous la forme*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

où (x_k) est une suite de scalaires.

On a alors la caractérisation suivante.

Proposition 4.1.1. *Soit* $(e_k) \subset X$*. Alors* (e_k) *est une base de Schauder si et seulement si :*
a) $X = \overline{\text{span}}\{e_k, k \geqslant 1\}$*.*
b) Il existe une constante $K > 0$ *telle que :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k e_k \right\| \leqslant K \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|$$

pour tous $n \geqslant m$*, et tous scalaires* $x_1, \ldots, x_n$*.*
La meilleur constante $K > 0$ *s'appelle la constante de basicité de la base* (e_k)*.*

On définit maintenant les suites basiques.

Definition 4.1.2. *Soit* $(e_k) \subset X$*. On dit que* (e_k) *est basique si et seulement si c'est une base de Schauder du sous espace fermé qu'elle engendre.*

Un résultat important de S.Mazur assure que tout espace de Banach contient une suite basique. D'autre part, si (e_k) est une suite basique et si $X_0 = \overline{\text{span}}\{e_k, k \geqslant 1\}$, tout élément x de X_0 s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

et on vérifie facilement avec la proposition précédente que les formes coordonnées : $e_k^*(x) = x_k$ sont continues sur X_0. On désignera toujours par e_k^* toute extension continue à X (qui existe par Hahn-Banach).
Le résultat suivant constitue un autre moyen très utile pour montrer qu'une suite est basique. Il dit que le fait d'être basique est stable par "petites perturbations".

Proposition 4.1.2. *Soit* (e_k) *une suite basique dans* X*, et soit* $(f_k) \subset X$ *telle que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k^*\| \|e_k - f_k\| < 1.$$

Alors (f_k) *est basique et est équivalente à* (e_k) *(c'est à dire que la convergence de* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ *équivaut à celle de* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$ *pour tout choix de scalaires* (x_k)*).*

On passe maintenant à des bases ayant des propriétés supplémentaires.

Definition 4.1.3. *Soit* (e_k) *une base de Schauder de* X*. On dit que* (e_k) *est une base inconditionnelle si et seulement si* $(e_{\pi(k})$ *est une base de Schauder pour toute permutation des entiers* π*. On peut alors montrer que* (e_k) *est inconditionnelle si et seulement si à chaque fois que* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ *converge, alors* $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k e_k$ *converge pour tout choix de scalaires* (λ_k) *de modules 1.*

Definition 4.1.4. *Soit* (e_k) *une base de Schauder de* X*. On dit que* (e_k) *est une base symétrique si et seulement si* $(e_{\pi(k})$ *est une base de Schauder équivalente à* (e_k) *pour toute permutation des entiers* π*.*

Exemple 4.1.1. *La base canonique de c_0 (resp ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$) est symétrique.*

Si pour $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X$, on pose

$$\|x\|_0 = \sup_{|\lambda_k| \leqslant 1} \sup_{\pi} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda_k e_{\pi(k)} \right\|,$$

alors $\|.\|_0$ est une norme équivalente sur X qui satisfait pour tout π,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{\pi(k)} \right\|_0 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| e_k \right\|_0$$

et dès que $0 \leqslant x_k \leqslant y_k$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \right\|_0 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k \right\|_0 .$$

Une telle norme est qualifiée de symétrique.

Signalons également la définition suivante qui force la séparabilité du dual (mais qui ne sera utile qu'au chapitre suivant) :

Definition 4.1.5. *Une famille $(e_n) \subset X$ est appelée une base shrinking si (e_n) est une base de Schauder de X et de plus (e_n^*) est une base de X^*.*

Revenons au cas où X est seulement supposé séparable. Une question restée longtemps ouverte était de savoir si X contient une base. Ce problème fut résolu négativement par Enflo dans les années 70. Cependant, on peut toujours construire une suite $(e_n) \subset X$ qui se comporte à peu près comme une base de Schauder [OP].

Théorème 4.1.1. *Si X est un espace de Banach séparable et $\epsilon > 0$, on peut trouver 2 suites $(e_n, e_n^*) \subset X \times X^*$ telles que :*
i) $\operatorname{span}(e_n, n \geqslant 1)$ *est dense dans X.*
ii) $\langle e_n^*, e_m \rangle = \delta_{n,m}$ *où $\delta_{n,m} = 0$ si $n \neq m$ et 1 si $n = m$.*
iii) $\sup \|e_n\| \|e_n^*\| \leqslant 1 + \epsilon$.

4.2 Croissante et linéarité

4.2.1 Croissance

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Comme déjà évoqué, le fait que $\|T^n\| \to \infty$ n'implique pas que $A_T \neq \emptyset$. Cependant, c'est vrai si $\|T^n\|$ croit suffisamment vite vers l'infini. Ces questions ont d'abord été étudiées par Beauzamy [Be] dans le cadre des espaces de Hilbert. Par exemple, A_T est dense dès que $r(T) > 1$ (on se place dans un espace complexe), c'est à dire que $\|T^n\|$ croit à une vitesse géométrique.

Théorème 4.2.1. *Soit X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $r(T) > 1$. Alors, A_T est dense dans X.*

Ce résultat est du à Beauzamy ([Be], partie I, chapitre 3) dans le cas hilbertien et à Da Costa Bernardez Jr [Ber] dans le cas banachique. Nous en donnons ici une preuve alternative, dont la démonstration est inspirée d'une méthode de Sokal [Sok] qui prouve le théorème de Banach-Steinhauss sans utiliser le lemme de Baire. On va utiliser le lemme très élémentaire suivant.

Lemme 4.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Alors pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on a*

$$\sup_{x' \in \overline{B}(x,r)} \|Tx'\| \geqslant \|T\| r.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et y de norme 1 tel que $\|Ty\| \geqslant \|T\| - \epsilon$, on a

$$\begin{aligned} 2 \sup_{x' \in \overline{B}(x,r)} \|Tx'\| &\geqslant \|T(x+ry)\| + \|T(x-ry)\| \\ &\geqslant 2r\|Ty\| \geqslant 2r(\|T\| - \epsilon) \end{aligned}$$

d'où le résultat à la limite lorsque $\epsilon \to 0$. □

Prouvons maintenant que A_T est dense. On peut supposer que $\|T^n\| \geqslant 4^n$ pour tout n. En effet, supposons la conclusion établie dans ce cas et soit T avec $r(T) > 1$, $y \in X$ et $\epsilon > 0$. Posons $\alpha = r(T)$ et soit r tel que $\alpha^r \geqslant 4$, de sorte que par la formule du rayon spectral, $\|T^{nr}\| \geqslant 4^n$ pour tout n. Il existe donc x tel que $\|T^{jr}x\| \to \infty$ $(j \to \infty)$ et $\|x - y\| \leqslant \epsilon$. On écrit $n + r = jr + r_0$ où $0 \leqslant r_0 < r$. On a alors

$$\|T^{jr}x\| = \|T^{n+(r-r_0)}x\| \leqslant C\|T^n x\|,$$

où on a posé $C = \sup_{i \leqslant r} \|T^i\|$ et donc $\|T^n x\| \to \infty$.
On suppose désormais $\|T^n\| \geqslant 4^n$ pour tout n. Soit à nouveau $y \in X$ et $\epsilon > 0$. On pose $x_0 = y$ et on construit une suite (x_n) par récurrence (en appliquant le lemme) telle que pour tout $n \geqslant 1$

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \epsilon 3^{-n} \text{ et } \|T^n x_n\| \geqslant \frac{2\epsilon}{3} 3^{-n} \|T^n\|.$$

(x_n) est donc de Cauchy et converge vers un certain point x. Pour $p > n$, on a

$$\|x_p - x_n\| = \|\sum_{k=n}^{p-1} (x_{k+1} - x_k)\| \leqslant \sum_{k=n}^{p-1} \epsilon 3^{-k-1} \leqslant \frac{\epsilon}{2} 3^{-n},$$

donc $\|x - x_n\| \leqslant \epsilon 3^{-n}/2$ et en particulier $\|x - y\| \leqslant \epsilon$. Il reste à voir que $x \in A_T$. On a

$$\begin{aligned} \|T^n x\| &\geqslant \|T^n x_n\| - \|T^n (x - x_n)\| \\ &\geqslant \frac{2\epsilon}{3} 3^{-n} \|T^n\| - \frac{\epsilon}{2} 3^{-n} \|T^n\| \geqslant \frac{\epsilon}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^n, \end{aligned}$$

d'où $\|T^n x\| \to \infty$.

On peut montrer que la condition de croissance géométrique peut être remplacée par des conditions bien plus faibles. Le résultat suivant, du à Müller et Vršovský [MV] est essentiellement optimal (on ne peut pas améliorer les exposants). Sa preuve est basée sur l'utilisation des théorèmes de Ball (voir chapitre précédent pour un énoncé).

Théorème 4.2.2. *Soit X un espace de Banach (réel ou complexe) et $(T_n) \subset \mathcal{L}(X)$ vérifiant*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T_n\|} < \infty,$$

alors il existe une partie D dense dans X telle que

$$\forall x \in D,\ \|T_n x\| \to \infty.$$

De plus si $X = H$ est un espace de Hilbert complexe, il existe une partie dense D telle que

$$\forall x \in D,\ \|T_n x\| \to \infty,$$

sous l'hypothèse plus faible

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T_n\|^2} < \infty.$$

Voici maintenant une autre condition suffisante qui s'applique à certains opérateurs T tels que $r(T) = 1$.

Proposition 4.2.1. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que*

$$\bigcup_{|\lambda| \geqslant 1} \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Ker}\ (T - \lambda I)^k \setminus \mathrm{Ker}\ (T - \lambda I)$$

est dense. Alors, A_T est dense.

Démonstration. Il suffit de voir que

$$\bigcup_{|\lambda| \geqslant 1} \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Ker}\ (T - \lambda I)^k \setminus \mathrm{Ker}\ (T - \lambda I) \subset A_T.$$

Soit $|\lambda| \geqslant 1$, $x \in X$ tel que $(T - \lambda I)x \neq 0$ et $k \geqslant 2$ tel que $(T - \lambda I)^k x = 0$. On va montrer que $\|T^n x\| \to \infty$. Ecrivons $T = \lambda I + N$. Soit l l'entier minimal tel que $(T - \lambda I)^l x = 0$. On obtient

$$T^n x = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} N^j x = \sum_{j=0}^{l-1} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} N^j x.$$

Il est facile de voir que $(x, Nx, \ldots, N^{l-1}x)$ est une famille libre.
Posons $F = \mathrm{span}(x, Nx, \ldots, N^{l-1}x)$ et soit φ la forme linéaire (dépendant de x) définie sur F par $\varphi(N^j x) = 0$ si $j \neq 1$ et $\varphi(Nx) = 1$. Puisque F est de dimension finie, φ est continue sur F et on obtient

$$\|\varphi\| \|T^n x\| \geqslant |\langle \varphi, T^n x \rangle| = |t\lambda^{n-1}| \geqslant n,$$

ce qui assure que $\|T^n x\| \to \infty$. □

Bien sûr, dans l'énoncé de la proposition précédente, l'ensemble $\bigcup_{|\lambda| \geqslant 1} \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Ker}\ (T - \lambda I)^k \setminus \mathrm{Ker}\ (T - \lambda I)$ peut très bien être vide ! Voilà un corollaire immédiat plus explicite que la proposition.

Corollaire 4.2.1. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que T n'est pas une homothétie et tel qu'il existe $|\lambda| \geqslant 1$ vérifiant : $T - \lambda I$ est nilpotent, alors A_T est dense.*

Démonstration. La preuve de la proposition précédente montre que dans ce cas, A_T contient le complémentaire d'un sous espace vectoriel strict, donc est dense. □

Une question qui vient à l'esprit est : peut-on généraliser ce dernier corollaire en remplaçant nilpotent par quasi-nilpotent ? (Un opérateur étant quasi-nilpotent si son spectre est réduit à $\{0\}$.) On peut remarquer qu'il est vain d'espérer d'obtenir une réponse positive à l'aide de la proposition précédente. En effet, considérons par exemple l'opérateur N défini sur $\ell^p(\mathbb{N})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ par $Ne_k = \frac{e_{k+1}}{k}$ où (e_k) est la base canonique de $\ell^p(\mathbb{N})$, alors on a pour $n \geqslant 1$

$$N^n x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k e_{k+n}}{k(k+1)\dots(k+n-1)}.$$

En utilisant l'inégalité $k(k+1)\dots(k+n-1) \geqslant n!$, on obtient donc

$$\|N^n x\|_p^p \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

et donc $\|N^n\| \leqslant \frac{1}{(n!)^{1/p}}$. La formule de Stirling et celle du rayon spectrale assurent alors que $\sigma(N) = 0$, donc que $N = T - I$ est quasi-nilpotent. N étant clairement injective, T ne possède pas de valeurs propres donc

$$\bigcup_{|\lambda| \geqslant 1} \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Ker } (T - \lambda I)^k \setminus \text{Ker } (T - \lambda I)$$

est vide.
Cela étant, on a pour $x \in \ell^p(\mathbb{N})$

$$T^n x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x_l e_{l+k}}{l(l+1)\dots(l+k-1)}.$$

En évaluant en $x = e_1$, et en minorant la somme ci-dessous par le terme d'ordre $k = 2$, on trouve

$$\|T^n\|_p^p \geqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\binom{n}{k}}{k!} \right)^p \geqslant \left(\frac{n(n-1)}{4} \right)^p.$$

Donc $(\|T^n\|_p)$ tend suffisamment vite vers l'infini pour appliquer le théorème de Müller et Vršovský qui assure que A_T est dense.

4.2.2 Linéarité

Nous avons vu que A_T était gros (au sens topologique) dès que $(\|T^n\|)_n$ croissait assez vite vers l'infini. On s'intéresse ici à gros, en un sens plus algébrique. On a la définition suivante.

Definition 4.2.1. *Soit $E \subset X$ une partie d'un espace de Banach X et N un entier, $N \geqslant 1$. On dit que :*
- E est N-linéable si E contient un sous espace vectoriel de dimension N.
- E est linéable si E contient un sous espace vectoriel de dimension infinie.
- E est spacéable si E contient un sous espace vectoriel fermé de dimension infinie.

Evidemment, spacéable $\Rightarrow$ linéable $\Rightarrow$ N-linéable. On a la proposition suivante qui est essentiellement une remarque mais qui donne des hypothèses simples de "linéabilité".

Proposition 4.2.2. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'il existe une suite $(x_i) \subset X$ telle que pour tout i*

$$\|T^n(x_i)\| \to \infty \text{ et } \frac{\|T^n(x_i)\|}{\|T^n(x_{i+1})\|} \to \infty,$$

alors $A_T \cup \{0\}$ est linéable.

Démonstration. On pose $Z = \text{span}\{x_i, i \geqslant 1\}$. Soit $z \neq 0 \in Z$, on peut écrire $z = \sum_{i=r}^{s} \alpha_i x_i$ avec $\alpha_r \neq 0$, on a alors

$$\|T^n(z)\| \geqslant |\alpha_r|\|T^n(x_r)\| - \left(\sum_{i=r+1}^{s} |\alpha_i|\right) \sup_{r+1 \leqslant i \leqslant s} \|T^n(x_i)\|,$$

et le quotient $\|T^n(x_r)\|/\sup_{r+1\leqslant i\leqslant s}\|T^n(x_i)\|$ tend vers l'infini par hypothèse donc $z \in A_T$. Pour la même raison, voit que la famille (x_i) est libre donc Z est de dimension infinie. $\square$

On peut par exemple appliquer ce résultat à $T = 2B$ sur $\ell^p(\mathbb{N})$: on prend pour (e_i) la base canonique usuelle. On choisit $(\lambda_i) \subset]1/2, 1[$ une suite décroissante et on pose pour i fixé, $x_i = (\lambda_i^n)_n$. On a ainsi

$$\|T^n x_i\|^p = \frac{2^{np}\lambda_i^{np}}{1-\lambda_i^p} \to \infty,$$

et par décroissance de la suite (λ_i), les quotients $\|T^n(x_i)\|/\|T^n(x_{i+1})\|$ tendent également vers l'infini. Cependant, cette proposition n'est pas vraiment satisfaisante dans la mesure où elle ne donne pas de spacéabilité. En réalité, on peut montrer que dans l'exemple précédent, A_T est spacéable. Plus généralement, on s'intéresse à présent au backward shift à poids B_w et on montre par une méthode différente que si il n'y a "pas trop" de poids proches de 1, alors A_{B_w} est spacéable.

Exemple 4.2.1. *Soit $X = c_0$ ou $X = \ell^p(\mathbb{N})$ ($1 \leqslant p < \infty$). Soit $(w_n) \subset \mathbb{R}^+$ une suite bornée de poids telle que $w_n \geqslant 1$ pour tout n et soit B_w le backward shift associé. On pose $u_n = \inf_{k\geqslant n} W_{k,n}$ où*

$$W_{k,n} = w_k w_{k-1} \dots w_{k-n+1}$$

et on suppose que la suite (u_n) tend vers l'infini. Alors A_{B_w} est spacéable.

Démonstration. On fait la preuve dans ℓ^p (le cas c_0 étant en fait un peu plus simple). On va construire une suite $(x_i) \subset \ell^p$ à supports disjoints et telle que $\|T^n(x_i)\| \to \infty$ pour tout i. Ces éléments forment alors une suite basique de ℓ^p. Posons $Z = \overline{\text{span}}\{x_i, i \geqslant 1\}$. Soit $z \neq 0 \in Z$, $z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, il existe un s tel que $\alpha_s \neq 0$. Les supports des itérés restent disjoints (puisque le shift décale ...), donc $\|T^n z\| \geqslant |\alpha_s| \|T^n(x_s)\| \to \infty$. On construit à présent les (x_i) par récurrence. Supposons que pour un entier r, $x_1, \ldots, x_r$ sont construits (on omet l'initialisation qui est implicitement contenue dans la construction de x_{r+1}) tels que leurs supports sont disjoints et

$$K := \mathrm{Supp}(x_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Supp}(x_r)$$

est de complémentaire infini et pour tout $i \leqslant r, \|T^n(x_i)\| \to \infty$. Notons que nécessairement, $\mathrm{Supp}(x_i)$ est infini pour tout $i \leqslant r$ et écrivons

$$K = \{a_n, n \geqslant 0\} \text{ et } \mathbb{N} \setminus K = \{p_n, n \geqslant 0\} \cup \{q_n, n \geqslant 0\}$$

où (a_n), (p_n) et (q_n) sont des suites strictement croissante d'entiers avec (p_n) et (q_n) disjointes. Soit $x = x_{r+1}$ tel que $x_{a_n} = x_{p_n} = 0$ pour tout n (et x_{q_n} à ajuster), ce qui assure déjà que $x_1, \ldots, x_r, x$ sont à supports disjoints et $K \cup \mathrm{Supp}(x)$ est de complémentaire infini. On a

$$B_w^n x = \sum_{k=n}^{\infty} x_k W_{k,n} e_{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} x_{q_k} W_{q_k,n} e_{q_k - n}.$$

On voit qu'il suffit de trouver $y = (y_k) \in \ell^p$ satisfaisant

$$\sum_{k=n}^{\infty} |y_k|^p W_{k,n}^p \to \infty$$

car alors le choix $x_{q_k} = y_k$ conviendra. Comme par définition de u_n,

$$\sum_{k=n}^{\infty} |y_k|^p W_{k,n}^p \geqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} |y_k|^p \right) u_n^p$$

et que (u_n) tend vers l'infini, il suffit d'avoir

$$\sum_{k=n}^{\infty} |y_k|^p = \frac{1}{\sqrt{u_n^p}},$$

et cette dernière condition est réalisée en posant

$$y_k = \left(\frac{1}{\sqrt{u_k^p}} - \frac{1}{\sqrt{u_{k+1}^p}} \right)^{1/p},$$

choix possible car la suite (u_n) est visiblement croissante puisque $w_i \geqslant 1$ pour tout i. □

Remarque 4.2.1. *Dans la proposition précédente, l'hypothèse (u_n) tend vers l'infini est réalisée sous la condition à priori plus faible*

$$\exists a > 1, \exists n, \forall k \geqslant n, W_{k,n} \geqslant a.$$

En effet, il suffit de faire une division euclidienne et de minorer toutes les tranches de longueurs n par a pour s'en convaincre.

Nous avons donné jusqu'à présent des exemples positifs, la proposition suivante fournit quant à elle des conditions suffisantes pour que A_T soit "algébriquement" petit.

Proposition 4.2.3. *Soit X un Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'il existe un opérateur R de rang N commutant avec T et tel que $\|T - R\| < 1$, alors A_T est au mieux N-linéable.*

Démonstration. On peut écrire pour $x \in X$,

$$Rx = \sum_{i=1}^{r} x_i^*(x)x_i$$

où $x_i^* \in X^*$ et les vecteurs x_i sont linéairement indépendants. Soit

$$Z = \bigcap_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} x_i^*,$$

c'est un sous espace fermé de codimension au plus N et si x est dans Z, $\|T^n x\|$ tend vers 0 car avec la formule du binome et la commutation, $\|T^n x\| = \|(T-R)^n x\| \leqslant \|T-R\|^n \|x\|$. On voit donc que si Y est un sous espace de X tel que pour tout $x \neq 0$, $x \in Y$, $\|T^n x\| \to \infty$, $\dim(Y) \leqslant N$. □

On ne peut pas supprimer l'hypothèse de commutation dans la proposition précédente, et un opérateur compact T peut très bien vérifier que A_T est spacéable comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.2.2. *Soit $X = c_0$ ou $X = \ell^p$. On définit T par $Te_1 = 2e_1$ et $Te_n = w_n e_{n-1}$ ($n \geqslant 2$) où $w_n > 0$, $w_n \to 0$ ce qui assure la compacité de T. Clairement $A_T = X \setminus \{0\}$ et si R l'opérateur de rang 1 défini par $Re_1 = 2e_1$ et $Re_n = 0$ pour $n \geqslant 2$, on voit que $\|T - R\| < 1$ si les w_n sont assez petits.*

Dans la dernière section, on verra un exemple d'opérateur tel que $A_T \cup \{0\}$ est spacéable et différent de l'espace tout entier : mieux, $A_T \cup \{0\}$ sera un sous-espace fermé propre de X.

4.3 Lemmes de séparation asymptotiques

Nous allons ici démontrer deux lemmes de séparation asymptotique, qui permettront de fabriquer un opérateur répondant négativement à la conjecture de Prăjitură.
Ici, $d \geqslant 2$ est un entier.

Proposition 4.3.1. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension d et $H \neq \emptyset$ un sous-ensemble fermé de X tel que H soit une réunion d'hyperplans vectoriels. Alors, il existe une suite de formes linéaires (f_n) sur X telle que*
1) Pour tout $x \notin H$, $\lim |f_n(x)| = \infty$.
2) Pour tout $x \in H$, $\underline{\lim} |f_n(x)| = 0$.

On va faire la preuve dans le cas réel. On note $S = S_X$ la sphère unité de X et on pose $C = S \cap H$. On prouve d'abord le lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *Il existe une constante $K > 0$ et une suite $(u_n) \subset C$ telle que pour tout $x \in C$, il existe une suite d'entiers (p_n) tendant vers l'infini, et satisfaisant pour tout n, $p_n \leqslant n$ et $\|x - u_{p_n}\| \leqslant \frac{K}{n^{1/d-1}}$.*

Démonstration du Lemme 4.3.1. Il existe $L > 0$ tel que pour tout k, on peut trouver un 2^{-k} réseau H_k de C avec $|H_k| \leqslant L(2^k)^{d-1}$ où $|H_k|$ désigne le nombre d'éléments de H_k. La suite (u_n) est obtenue en énumérant d'abord les éléments de H_1, puis tous ceux de H_2 et ainsi de suite ... Fixons $x \in C$ et vérifions la propriété du lemme. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier k tel que $|H_1| + \ldots + |H_k| \leqslant n < |H_1| + \ldots + |H_k| + |H_{k+1}|$, en particulier, on obtient

$$n \leqslant L \sum_{i=1}^{k+1} (2^{d-1})^i = 2^{d-1} L \frac{(2^{d-1})^{k+1} - 1}{2^{d-1} - 1} \leqslant C_d 2^{k(d-1)}$$

où $C_d > 0$ dépend seulement de d. Par définition de H_k, il existe un élément $u_{p_n} \in H_k$ tel que $\|x - u_{p_n}\| \leqslant 2^{-k} \leqslant (\frac{C_d}{n})^{1/d-1}$. Puisque $k - 1 \leqslant |H_1| + \ldots + |H_{k-1}| < p_n \leqslant |H_1| + \ldots + |H_k|$, $p_n \leqslant n$, $\lim p_n = \infty$ et le lemme est démontré. □

Démonstration de la Proposition 4.3.1. Pour chaque n, on peut sélectionner une forme linéaire f_n telle que $f_n(u_n) = 0$, $\mathrm{Ker} f_n \subset H$ et $\|f_n\| = n^{1/2(d-1)}$. Si $x \notin H$, alors

$$|f_n(x)| = \|f_n\| d(x, \mathrm{Ker} f_n) \geqslant \|f_n\| d(x, H) \geqslant n^{1/2(d-1)} d(x, H)$$

ainsi on a 1). Pour 2), on peut supposer que $x \neq 0$ et appliquer le lemme avec $y = \frac{x}{\|x\|} \in C$, on obtient une suite (p_n) avec $p_n \leqslant n$, $\lim p_n = \infty$ et $\|y - u_{p_n}\| \leqslant \frac{K}{n^{1/d-1}}$. Pour chaque n, on a

$$|f_{p_n}(x)| = \|x\| |f_{p_n}(y - u_{p_n})| \leqslant \|f_{p_n}\| \|y - u_{p_n}\| \|x\| \leqslant \frac{K}{n^{1/2(d-1)}} \|x\|$$

ce qui prouve 2) et achève la preuve. □

Pour le cas complexe, la preuve est essentiellement la même. La seule différence est que pour $\epsilon > 0$, l'entropie de la sphère unité est de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon^{2d-1}}$ ce qui donne une estimation différente de $\|x - u_{p_n}\|$ dans le lemme, et donc il faut ajuster les exposants dans $\|f_n\|$ en vue de la preuve de la proposition.

Voici à présent une variante de ce résultat qui nous servira (comme mentionné dans la section précédente) à construire des opérateurs T tels que $A_T \cup \{0\}$ soit un sous-espace fermé de codimension finie arbitraire.

Proposition 4.3.2. *Soit X un espace vectoriel normé de dimension d et soit F une droite vectorielle. Alors, il existe une suite $(f_n) \subset X^*$ vérifiant :*
1) $\forall x \in F \setminus \{0\}$, $\lim |f_n(x)| = \infty$.
2) $\forall x \notin F \setminus \{0\}$, $\underline{\lim} |f_n(x)| = 0$.

Démonstration. Il suffit de vérifier cela pour des vecteurs unitaires. On pose comme dans la proposition précédente $C = S_X \cap F$. Plaçons nous par exemple dans le cas réel et remarquons que $C = \{e, -e\}$ pour un $e \in X$, $\|e\| = 1$. On introduit pour $k \geqslant 1$

$$L_k = \{\varphi \in X^*, \|\varphi\| \leqslant 1, |\varphi(e)| \geqslant \epsilon_k\},$$

où (ϵ_k) est une suite décroissant vers 0 à ajuster ultérieurement.

Fait 4.3.1.

$$S \setminus C \subset \cup_{k=1}^{\infty} \cup_{\varphi \in L_k} \mathrm{Ker}\varphi.$$

Démonstration. Soit $x \in S \setminus C$ et complétons (e, x) en une base $(e, x, e_3, \ldots, e_n)$ de X avec $\|e_i\| = 1$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \varphi(e_i) = 0$ $(i \geqslant 3)$ et $\varphi(e) = \epsilon$ vérifie clairement $\|\varphi\| \leqslant 1$. L'affirmation du fait en est une conséquence immédiate. □

On considère maintenant F_k un 2^{-k} réseau de L_k avec $|F_k| \leqslant L2^{kd}$ (où $L = L_d > 0$ est une constante). On construit une suite $(\varphi_n) \subset X^*$ en énumérant d'abord tous les éléments de L_1, puis tous ceux de L_2, … On pose alors $f_n = \alpha_n \varphi_n$ où $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ est une suite croissant vers l'infini à ajuster également.
Fixons $x \in S \setminus C$, on peut trouver k_0 tel que pour $k \geqslant k_0$, il existe $\varphi \in L_k$ telle que $\varphi(x) = 0$. Soit alors n assez grand pour qu'il existe $k \geqslant k_0$ tel que $|F_1| + \ldots + |F_k| < n \leqslant |F_1| + \ldots + |F_{k+1}|$ (de sorte que $\varphi_n \in F_{k+1}$). On obtient alors (comme dans la proposition précédente) que $n \leqslant C2^{kd}$ où $C = C_d > 0$. Puisque $\varphi \in L_k$, on peut trouver $\varphi_{p_n} \in F_k$ avec

$$\|\varphi - \varphi_{p_n}\| \leqslant 2^{-k} \leqslant \left(\frac{C}{n}\right)^{1/d}.$$

On voit encore, comme dans la proposition précédente, que $p_n \leqslant n$ et $p_n \to \infty$ et donc

$$|f_{p_n}(x)| = \alpha_{p_n} |\varphi_{p_n}(x) - \varphi(x)| \leqslant \alpha_n \left(\frac{C}{n}\right)^{1/d}.$$

D'autre part, on a clairement $n \geqslant k - k_0 + 1$ et puisque $\varphi_n \in F_{k+1}$, on obtient

$$|f_n(e)| \geqslant \alpha_n \epsilon_{k+1} \geqslant \alpha_n \epsilon_{n+k_0}.$$

Les choix

$$\epsilon_n = \frac{1}{n^{1/4d}} \quad \text{et} \quad \alpha_n = n^{1/2d}$$

assurent alors que 1) et 2) sont vérifiés. □

4.4 Construction d'opérateurs

4.4.1 Un opérateur dans $\mathbb{C}^2$

Ce paragraphe, purement pédagogique, est là pour expliquer l'idée de base de construction d'un opérateur vérifiant le Théorème 4.0.5. On va regarder le comportement de l'opérateur T donné par sa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

dans une base (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$. On a $T = S + R$ où S et R ont pour matrices respectives

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $R^2 = 0$ et $RS = R$, on a

$$T^n = S^n + (I + S + \cdots + S^{n-1})R.$$

T^n a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\lambda_n & \lambda^n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k.$$

Si $\lambda = e^{i\pi/m}$ et m est choisi tel que $1/m \ll \alpha \ll 1$, on voit que

• $T - I$ est petit car $|\lambda - 1| \simeq \pi/m$.
• $T^{2m} = I$ car $\lambda_{2m} = 0$ et $\lambda^{2m} = 1$.
• Pour $n \leqslant m$, $\|T^n\|$ est de l'ordre de αn, donc grand si n est assez proche de m. En effet, un petit calcul montre que le coefficient $\alpha\lambda_n$ a pour module

$$\alpha \left| \frac{\sin(\pi n/2m)}{\sin(\pi/2m)} \right| \simeq \alpha m \frac{n}{m} = \alpha n.$$

Cependant, un opérateur en dimension finie ne peut pas satisfaire les conclusions du Théorème 4.0.5. Dans le paragraphe suivant, on montre comment y arriver en combinant l'idée basée sur la matrice précédente, et l'utilisation des lemmes de séparation précédents.

4.4.2 Cas complexe

Dans cette sous-section, on prouve la version complexe du théorème principal :

Théorème 4.4.1. *Soit X un espace de Banach séparable complexe de dimension infinie. Alors, il existe $T \in \mathcal{A}_X$ tel que $T - I$ est nucléaire.*

Rappelons qu'un opérateur N est nucléaire si il existe des formes linéaires continues x_k^* et des vecteur x_k tels que N puisse s'écrire sous la forme $N = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes x_k^*$ avec $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|\|x_k\| < \infty$ où $x_k \otimes x_k^*$ est l'opérateur de rang 1 défini par

$$x_k \otimes x_k^*(x) = \langle x_k^*, x\rangle x_k.$$

Ces opérateurs sont clairement compacts, en tant que limite en norme d'opérateurs de rangs finis.
Pour construire notre opérateur, on va utiliser le Théorème 4.1.1. Pour notre cas, on aura pas besoin de l'estimation précise avec ϵ. Cependant, observons qu'en remplaçant e_n par $e_n/\|e_n\|$ et e_n^* par $\|e_n\|e_n^*$, on peut supposer que $\|e_n\| = 1$, $K = \sup \|e_n^*\| < \infty$ et les propriétés i) et ii) du Théorème 4.1.1 sont toujours satisfaites. On considère ensuite un sous ensemble fermé $F \subset \mathrm{span}(e_1, e_2)$ qui est une réunion de droites vectorielles et (f_k) la suite de formes linéaires associée sur $\mathrm{span}(e_1, e_2)$ dans la Proposition 4.3.1 (on se place donc dans le cas $d = 2$). Désignons par P la projection définie sur X par

$$Px = \langle e_1^*, x\rangle e_1 + \langle e_2^*, x\rangle e_2.$$

P est continue avec $\|P\| \leqslant 2K$. On pose ensuite $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et pour $k \geqslant 3$, $\lambda_k = e^{\frac{i\pi}{m_k}}$ où (m_k) est une suite d'entiers positifs telle que $m_k | m_{k+1}$ et qui va très vite à l'infini, de façon à avoir

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{m_{k-2}}{m_{k-1}} \|f_k\| < \infty \text{ et } m_k \geqslant 15 m_{k-1}.$$

On note c_{00} le sous espace engendré par $(e_n)_{n\geqslant 1}$. Pour $x \in c_{00}$, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, on pose

$$Sx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k e_k.$$

Cela définit un opérateur borné S sur c_{00}, en effet pour $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in c_{00}$,

$$\|Sx\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - 1| \|x_k e_k\| + \|x\| \leqslant \left(K \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - 1| + 1 \right) \|x\|$$

et par notre hypothèse sur (m_k), il est clair que $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - 1| < \infty$. Ainsi, S s'étend en un opérateur borné sur X (parce que c_{00} est dense dans X). On désignera encore ce prolongement par S.

Remarque 4.4.1. *Notons que si (e_k) est une base de Schauder normalisée, alors si $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, S est explicitement donné par*

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k e_k.$$

Pour $x \in X$, on définit maintenant T par

$$Tx = Sx + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} f_k(Px) e_k.$$

Notons que le second terme définit un opérateur borné car $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} \|f_k\| < \infty$. Donc T est lui-même borné ; si l'on pose

$$\tilde{A}_T = \{x \in X, Px \notin F\} \text{ et } \tilde{B}_T = \{x \in X, Px \in F\},$$

alors on va montrer que $A_T = \tilde{A}_T$ et $B_T = \tilde{B}_T$ donc T sera l'opérateur attendu (en imposant que l'intérieur relatif de F dans $\operatorname{span}(e_1, e_2)$ est non vide et que $F \neq \operatorname{span}(e_1, e_2)$). Puisque $\lambda_k^{2m_k} = 1$ et plus généralement $\lambda_k^{2m_n} = 1$ pour $n \geqslant k$ (par l'hypothèse de divisibilité des m_k), l'opérateur S a la propriété suivante.

Lemme 4.4.1. *Pour $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} S^{2m_n} x = x$.*

Démonstration. On montre d'abord que la suite $(\|S^{2m_l}\|)$ est bornée. Si l'on fixe $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ tel que $\|x\| = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|S^{2m_l}x - x\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^{2m_l} - 1)x_k e_k\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=l+1}^{n}(\lambda_k^{2m_l} - 1)x_k e_k\right\| \quad \text{car } \lambda_k^{2m_l} = 1 \text{ pour } l \geqslant k \\
&\leqslant K \sum_{k=l+1}^{n} \left|\lambda_k^{2m_l} - 1\right| \\
&\leqslant 2K \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2\pi m_l}{m_k} \quad \text{car } |e^z - 1| \leqslant 2|z| \text{ pour } |z| \leqslant 1/2 \\
&\leqslant K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi m_{k-1}}{m_k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\|S^{2m_l}x\|)$ est bornée par $1 + K\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi m_{k-1}}{m_k} < \infty$ dès que $x \in c_{00}$, $\|x\| = 1$. Par densité de c_{00} dans X, cela implique que la suite $(\|S^{2m_l}\|)$ est bornée. Pour voir l'affirmation du lemme, fixons $x \in X$, $\epsilon > 0$ et $y \in c_{00}$ tels que $\|y - x\| \leqslant \epsilon$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|S^{2m_l}x - x\right\| &= \left\|S^{2m_l}(x-y) + (S^{2m_l}y - y) + (y - x)\right\| \\
&\leqslant \sup \|S^{2m_l}\|\epsilon + \|S^{2m_l}y - y\| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Puisque pour l assez grand, $S^{2m_l}y = y$, on a la conclusion. □

On explicite maintenant l'expression des itérés de T.

Lemme 4.4.2. *Pour $x \in X$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$T^n x = S^n x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda_{k,n}}{m_{k-1}} f_k(Px)e_k \quad \textit{où } \lambda_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_k^l.$$

Démonstration. Le résultat est clair pour $n = 1$, on procède par récurrence et on suppose le résultat vrai au rang n, on a

$$\begin{aligned}
T^{n+1}x = T(T^n x) &= T(S^n x) + T\left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda_{k,n}}{m_{k-1}} f_k(Px)e_k\right) \\
&= S^{n+1}x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} f_k(PS^n x)e_k + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda_k \lambda_{k,n}}{m_{k-1}} f_k(Px)e_k \\
&+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} f_k(Py)e_k
\end{aligned}$$

où $y = \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\lambda_{l,n}}{m_{l-1}} f_l(Px)e_l$, donc $Py = 0$. Puisque $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, on a $PS^n x = Px$, et puisque $\lambda_k \lambda_{k,n} + 1 = \lambda_{k,n+1}$, on en déduit la formule au rang $n+1$. □

On étudie maintenant le comportement de $\lambda_{k,n}$. On a le fait facile suivant.

Fait 4.4.1. *i) Pour tous $k, n \geqslant 1$, $|\lambda_{k,n}| \leqslant n$.*
ii) $\lambda_{k,2m_n} = 0$ pour $n \geqslant k$.
iii)Pour $m_{k-1} \leqslant n \leqslant m_k$, $|\lambda_{k,n}| \geqslant \frac{2}{\pi} m_{k-1}$.

Démonstration. i) est juste l'inégalité triangulaire. ii) est immédiat car $\lambda_{k,n}$ se calcule facilement en tant que somme géométrique :

$$\lambda_{k,n} = \frac{e^{\frac{i\pi n}{m_k}} - 1}{e^{\frac{i\pi}{m_k}} - 1}.$$

Pour iii), on obtient

$$|\lambda_{k,n}| = \frac{\left|\sin\left(\frac{\pi n}{2m_k}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2m_k}\right)\right|}.$$

La minoration souhaitée résulte des inégalités : $\sin(y) \geqslant \frac{2}{\pi} y$ pour $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $|\sin(y)| \leqslant |y|$ pour $y \in \mathbb{R}$. $\square$

On peut maintenant passer à la preuve du résultat principal. Soit $x \in c_{00}, x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$. Fixons $k \geqslant 3$, on pose $\delta_{k \leqslant p} = 1$ si $k \leqslant p$ et $\delta_{k \leqslant p} = 0$ si $k > p$. On a

$$\begin{aligned} K\|T^n x\| \geqslant |\langle e_k^*, T^n x\rangle| &= \left|\lambda_k^n \langle e_k^*, x\rangle \delta_{k \leqslant p} + \frac{\lambda_{k,n}}{m_{k-1}} f_k(Px)\right| \\ &\geqslant \left|\frac{\lambda_{k,n}}{m_{k-1}} f_k(Px)\right| - |\lambda_k^n \langle e_k^*, x\rangle \delta_{k \leqslant p}| \\ &\geqslant \left|\frac{\lambda_{k,n}}{m_{k-1}} f_k(Px)\right| - K\|x\|. \end{aligned}$$

Puisque la dernière inégalité ne fait intervenir que des fonctions continues, elle reste vraie pour $x \in X$ (par densité de c_{00} dans X) et pour $k \geqslant 3$, $n \geqslant 1$. Maintenant, fixons $k \geqslant 1$ et $m_{k-1} \leqslant n \leqslant m_k$, en utilisant la dernière inégalité et le fait précédent, on obtient

$$\|T^n x\| \geqslant \left|\frac{\lambda_{k,n}}{K m_{k-1}} f_k(Px)\right| - \|x\| \geqslant \frac{2}{\pi K} |f_k(Px)| - \|x\|.$$

Cela prouve que $\|T^n x\| \to \infty$ lorsque $x \in \tilde{A}_T$ puisque d'après le lemme de séparation, $|f_k(Px)| \to \infty$.

Soit maintenant $x \in \tilde{B}_T$, alors il existe une suite d'entiers (k_n) strictement croissante telle $|f_{k_n}(Px)|$ tende vers 0. On a

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda_{k,2m_{k_n-1}}}{m_{k-1}} f_k(Px) e_k\right\| \leqslant & \quad \sum_{k=3}^{k_n-1} \frac{|\lambda_{k,2m_{k_n-1}}|}{m_{k-1}} |f_k(Px)| + \frac{|\lambda_{k_n,2m_{k_n-1}}|}{m_{k_n-1}} |f_{k_n}(Px)| \\ & + \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{|\lambda_{k,2m_{k_n-1}}|}{m_{k-1}} |f_k(Px)|. \end{aligned}$$

La première somme est égale à 0 d'après le fait précédent. En utilisant encore ce fait, on voit que le second terme tend vers 0 puisque $\frac{|\lambda_{k_n, 2m_{k_n-1}}|}{m_{k_n-1}} \leqslant 2$. Pour la dernière somme, $k \geqslant k_n + 1$ donc $k_n - 1 \leqslant k - 2$, et $m_{k_n-1} \leqslant m_{k-2}$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{\left|\lambda_{k,2m_{k_n-1}}\right|}{m_{k-1}} |f_k(Px)| &\leqslant \left(\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{2m_{k_n-1}}{m_{k-1}} \|f_k\| \right) \|P\| \|x\| \\ &\leqslant \left(\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{2m_{k-2}}{m_{k-1}} \|f_k\| \right) \|P\| \|x\|. \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k \geqslant 1} \frac{m_{k-2}}{m_{k-1}} \|f_k\| < \infty$, le dernier terme tend vers 0. D'autre part, $S^{2m_{k_n-1}}x$ tend vers x, cela montre que $\underline{\lim} \|T^n x - x\| = 0$ lorsque $x \in \tilde{B}_T$.

Enfin, voyons le dernier point du théorème, par un argument de densité on voit que pour $x \in X$

$$(S - I)x = \sum_{k=3}^{\infty} (\lambda_k - 1) \langle e_k^*, x \rangle e_k.$$

D'où

$$N = T - I = \sum_{k=3}^{\infty} e_k \otimes \left((\lambda_k - 1)e_k^* + \frac{1}{m_{k-1}} f_k P \right).$$

Puisque $\sum_{k=3}^{\infty} |\lambda_k - 1| < \infty$, $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} \|f_k\| < \infty$, et (e_k) et (e_k^*) sont bornées, N est nucléaire et $T = I + N$.

Remarque 4.4.2. *Bien que le corollaire 4.0.1 ne s'applique par à ℓ^∞, on peut voir que l'exemple donné fonctionne dans ℓ^∞. On conjecture donc que des opérateurs avec les propriétés du Théorème 4.0.5 peuvent être construits dans des espaces de Banach arbitraires.*

Remarquons que l'énoncé du théorème peut être renforcé : il suit en effet de la définition de T que pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir la suite (m_k) pour avoir $\|T - I\| \leqslant \epsilon$. Cela prouve que I est dans l'adhérence (en norme d'opérateur) de $\mathcal{A}_X$. On peut aussi montrer la proposition suivante.

Proposition 4.4.1. *Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie tel que X possède une base symétrique. Soit D un opérateur diagonal et borné sur X dont le spectre est contenu dans le cercle unité. Alors pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un opérateur T sur X tel que $T - D$ est compact, $\|T - D\| \leqslant \epsilon$ et tel que A_T et son complémentaire soient tous les deux d'intérieur non vide.*

Pour essayer de se ramener au cas où D est un multiple de l'identité, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 4.4.3. *Soit D un opérateur diagonal sur X à spectre contenu dans le cercle unité. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe un opérateur diagonal D_0 tel que $\|D - D_0\| \leqslant \epsilon$ et D_0 possède un sous espace propre de dimension infinie.*

On suppose sans perte de généralités que la norme $\|.\|$ est symétrique et la base normalisée.

Démonstration. Remarquons déjà que D est automatiquement borné puisque la base est symétrique. Si $De_i = \lambda_i e_i$ et que la suite (λ_i) ne prend qu'un nombre fini de valeurs (par exemple $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), alors on peut écrire :

$$X = \text{Ker } (D - \lambda_1 I) \oplus \ldots \oplus \text{Ker } (D - \lambda_n I).$$

Puisque X est dimension infinie, l'un des sous espaces ci-dessus est de dimension infinie et il suffit donc de poser $D_0 = D$.
Supposons maintenant que la suite (λ_i) prend une infinité de valeurs et que tous les sous espaces propres associés sont de dimension finie (sinon c'est terminé). (λ_i) étant une suite du compact $\sigma(D)$, on peut en considérer un point d'accumulation μ. On peut ainsi trouver $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{\varphi(k)} - \mu| < \infty.$$

Posons $\mu_k = \lambda_{\varphi(k)}$ et soit n un entier tel que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k - \mu| \leqslant \epsilon.$$

Puisque la base est symétrique et l'opérateur D diagonal, on peut dans l'expression $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ regrouper les e_i suivant leur appartenance à un sous espace propre. On voit donc que l'on peut écrire :

$$X = A_n \oplus B_n \oplus C_n$$

où $A_n = \bigoplus_{k=1}^{n} \text{Ker } (D - \mu_k I)$, B_n est le sous espace fermé correspondant aux valeurs propres μ_k, pour $k \geqslant n+1$ et C_n le sous espace fermé correspondant aux valeurs propres restantes. Suivant cette décomposition, on peut écrire

$$D = D_{A_n} \oplus D_{B_n} \oplus D_{C_n}$$

et on pose

$$D_0 = D_{A_n} \oplus \mu I \oplus D_{C_n}.$$

Il suffit donc de controler $\|(D - D_0)x\|$ si $x \in B_n$. Tout élément $x \in B_n$ est de la forme

$$x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l \in J_k} x_l e_l$$

avec pour $l \in J_k$, $e_l \in \text{Ker } (D - \mu_k I)$ et $|J_k| = \dim \text{Ker } (D - \mu_k I)$, on en déduit

$$\|(D - D_0)x\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k - \mu| \left\| \sum_{l \in J_k} x_l e_l \right\| \leqslant \epsilon \|x\|.$$

Puisque B_n est de dimension infinie, on voit que Ker $(D - \mu I)$ est le sous espace recherché pour D_0. $\square$

La proposition s'en déduit maintenant facilement. Soit D un opérateur comme dans l'énoncé. Quitte à le remplacer par D_0, on peut supposer en vertu du lemme précédent qu'il existe $\lambda \in \sigma(D)$ tel que $X_0 = \text{Ker }(D - \lambda I)$ est de dimension infinie. On écrit alors $X = X_0 \oplus H$ où H est un sous espace fermé de X. Ecrivons (relativement à cette décomposition) $D = \lambda I \oplus D'$ et soit $T_0 \in \mathcal{L}(X_0)$ tel que $\|T_0 - \lambda I\| \leqslant \epsilon$ et $T_0 - \lambda I$ compact avec A_{T_0} et son complémentaire d'intérieur non vide. En effet, un tel opérateur existe et est donné par le théorème principal en multipliant par λ l'opérateur qui perturbe l'identité (on perd cependant à priori le fait que x soit un point récurrent lorsque $x \in X_0 \setminus A_{T_0}$, ce qui est du au fait que λ n'est pas nécessairement une racine de l'unité). Il est alors immédiat que l'opérateur $T = T_0 \oplus D'$ convient.

Revenons maintenant sur l'opérateur T construit dans le Théorème 4.4.1. Il vérifie $\|T - I\| < 1$ (si les m_k sont choisis assez grands), donc s'écrit en particulier $\exp A$ pour un unique opérateur borné A. L'expression de T^t pour t dans $\mathbb{N}$ se prolonge donc sur $\mathbb{R}$ par $\exp tA$. On se propose d'étudier ici cette dynamique. En premier lieu, on explicite l'opérateur A. Pour simplifier, on suppose que l'espace complexe séparable X est muni d'une base de Schauder normalisée (e_k). On a d'abord :

Proposition 4.4.2. *$T = \exp(A)$ où A est donné par la formule*

$$Ax = \sum_{k=3}^{\infty} \mu_k x_k e_k + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mu_k}{(\lambda_k - 1)m_{k-1}} f_k(Px) e_k \quad (x \in X),$$

où $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\mu_k = \frac{i\pi}{m_k}$ pour $k \geqslant 3$. Le spectre de A est alors donné par $\sigma(A) = \{\mu_k, k \geqslant 1\}$.

Démonstration. Notons d'abord que comme $|\mu_k| \sim |\lambda_k - 1|$, A est bien défini et borné sur X. Fixons $x \in X$. Comme $Ae_k = \mu_k e_k$ pour $k \geqslant 3$, on obtient pour $l \geqslant 1$

$$A^l x = \sum_{k=3}^{\infty} \mu_k^l x_k e_k + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mu_k^l}{(\lambda_k - 1)m_{k-1}} f_k(Px) e_k.$$

On a donc

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{A^l x}{l!} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mu_k^l}{l!} x_k e_k + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mu_k^l}{l!(\lambda_k - 1)m_{k-1}} f_k(Px) e_k,$$

puis en utilisant Fubini,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{A^l x}{l!} = \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu_k^l}{l!} x_k e_k + \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu_k^l}{l!(\lambda_k - 1)m_{k-1}} f_k(Px) e_k.$$

Comme $e^{\mu_k} = \lambda_k$, on obtient

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{A^l x}{l!} = \sum_{k=3}^{\infty} (\lambda_k - 1) x_k e_k + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} f_k(Px) e_k,$$

et donc on trouve bien $\exp A = T$ en ajoutant x aux deux membres de l'égalité précédente. Remarquons maintenant que A est compact vu le choix de (m_k) (même argument que pour l'opérateur $T-I$), donc que $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\{0\}$. Soit $\mu\in\sigma_p(A)$ et $x\neq 0$ vérifiant $Ax=\mu x$, il vient

$$\begin{cases} 0=\mu x_k \quad \text{pour} \quad k\in\{1,2\}. \\ \mu_k x_k+\dfrac{\mu_k}{(\lambda_k-1)m_{k-1}}=\mu x_k \quad \text{pour} \quad k\geqslant 3. \end{cases}$$

Si $\mu\neq 0$, on obtient donc $x_1=x_2=0$, soit $Px=0$ et en reportant dans la deuxième équation on a $\mu=\mu_k$ pour un entier $k\geqslant 3$. D'autre part, en rappelant que $Ae_k=\mu_k e_k$ pour $k\geqslant 3$, on trouve bien que $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\{0\}=\{\mu_k,k\geqslant 1\}$. □

La dynamique de $\exp tA$ est alors semblable à celle des itérées de l'opérateur T. De plus on peut regarder ce qui se passe en $-\infty$, et on obtient sans grande surprise la même chose qu'en $+\infty$.

Proposition 4.4.3. *Les ensembles $P^{-1}(X\setminus F)$ et $P^{-1}(F)$ sont d'intérieurs non vides et forment une partition de X vérifiant :*
Si $Px\notin F$, $\|(\exp tA).x\|\to\infty$ lorsque $|t|\to\infty$.
Si $Px\in F$, il existe une sous suite d'entiers (t_n) vérifiant : $\|(\exp t_nA).x-x\|\to 0$ lorsque $|n|\to\infty$.

Démonstration. En remplaçant A par tA pour $t\in\mathbb{R}$ et en suivant la preuve de la proposition précédente, on trouve

$$(\exp tA).x=\sum_{k=3}^{\infty}(\lambda_k^t-1)x_ke_k+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\lambda_k^t-1}{(\lambda_k-1)m_{k-1}}f_k(Px)e_k,$$

où on a posé par commodité $\lambda_k^t=e^{t\mu_k}=e^{\frac{i\pi t}{m_k}}$. Puisque $|\lambda_k^t-1|=\left|\lambda_k^{-t}-1\right|$. Les arguments de la preuve du théorème principal passent pour t négatif et on obtient les propriétés voulues. □

4.4.3 Cas réel

On montre ici la version réelle du Théorème 4.0.5.

Théorème 4.4.2. *Soit X un espace de Banach séparable réel de dimension infinie. Alors, il existe $T\in\mathcal{A}_X$ tel que $T-I$ est nucléaire.*

On garde les mêmes notations que dans le cas complexe pour F, (f_k), c_{00}, (e_k),(e_k^*), K et P. On définit S sur c_{00} par les formules suivantes $Se_1=e_1$, $Se_2=e_2$ et pour $k\geqslant 2$:

$$Se_{2k-1}=\cos(\theta_k)e_{2k-1}+\sin(\theta_k)e_{2k} \quad \text{and} \quad Se_{2k}=-\sin(\theta_k)e_{2k-1}+\cos(\theta_k)e_{2k}$$

où $\theta_k=\frac{\pi}{m_k}$ et (m_k) satisfont les mêmes hypothèses de croissance et de divisibilité que dans le cas complexe. Ainsi dans la base (algébrique) (e_k), S est un opérateur diagonal par blocs, constitué de matrices de rotations. On vérifie alors que S est borné sur c_{00}, donc se prolonge à X et on vérifie aussi que $S^{2m_n}x\to x$. définit ensuite T par

$$Tx=Sx+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m_{k-1}}f_k(Px)e_{2k}.$$

Le calcul des itérés de T donne

$$T^n x = S^n x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} f_k(Px)\mu_{k,n}$$

où $\mu_{k,n} = \left(\sum_{l=0}^{n-1} \cos(l\theta_k)\right) e_{2k} - \left(\sum_{l=0}^{n-1} \sin(l\theta_k)\right) e_{2k-1}$. On ainsi $\mu_{k,n} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{k,n} = 0$, $\|\mu_{k,n}\| \leqslant 2n$ et en considérant les formes linéaires e_{2k-1}^* et e_{2k}^* :

$$\|\mu_{k,n}\| \geqslant \frac{1}{K} \max\left(\left|\sum_{l=0}^{n-1} \cos(l\theta_k)\right|, \left|\sum_{l=0}^{n-1} \sin(l\theta_k)\right|\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}K} |\lambda_{k,n}|.$$

Ainsi, les inégalités pour $\mu_{k,n}$ sont les mêmes que pour $\lambda_{k,t}$ (à une constante multiplicative près) ce qui permet de reprendre la preuve précédente (du cas complexe) sans autre changement.

4.5 La construction de Hájek et Smith

On présente ici une version simplifiée de l'exemple de Hájek et Smith. Le résultat qui suit est bien sûr un cas particulier du Théorème 4.0.5. Cependant, on verra plus tard que les 2 opérateurs présentent des différences.

Théorème 4.5.1. *Soit X un espace de Banach (réel ou complexe) de dimension infinie et muni d'une base symétrique. Alors, il existe $T \in \mathcal{A}_X$.*

D'après la première section, on sait que quitte à renormer X, on peut supposer que la norme $\|.\|$ est symétrique, ce que l'on suppose dans tout ce qui suit ici.
Dans le cas complexe, l'opérateur S était construit sur des racines de l'unité, S sera maintenant un opérateur de permutation. Comme dans l'article original de Hájek et Smith, on va d'abord prouver des estimations fini-dimensionnelles. Cependant, Hájek et Smith font des estimations dans ℓ^p et c_0 puis les combinent avec un résultat de Tzafriri [T]. On va donner ici une preuve plus directe et plus courte.

4.5.1 Estimations locales

Soit Z un sous-espace de dimension $H \geqslant 1$ avec une base symétrique $(e_1, \ldots, e_H)$ tel que $H \geqslant 4m$ (m et H sont des entiers positifs). On définit S sur Z par $Se_i = e_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant H-1$ et $Se_H = e_1$. On va s'intéresser au comportement de la suite : $w_n = (I + \ldots + S^{n-1})w$ où $w = \sum_{i=1}^{m} e_i - \sum_{i=m+1}^{2m} e_i$ (cela est motivé par le fait que (w_n) apparîtra ensuite dans le calcul des itérés de l'opérateur dans le cas général). On a :

Lemme 4.5.1. *i) $w_H = 0$ et la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est H-périodique.*
ii) Si $2m \leqslant n \leqslant H - 2m$, $\|w_n\|$ atteint son maximum et

$$\|w_n\| \geqslant \frac{m}{2}\|w\|.$$

Démonstration. i) S est un opérateur de permutation, dont la permutation en question est un cycle de longueur H, donc pour $1 \leqslant i \leqslant H$, on a $(I+S+\ldots+S^{H-1})e_i = \sum_{i=1}^{H} e_i$, et si on pose $s = \sum_{i=1}^{H} e_i$, on obtient $w_H = ms - ms = 0$.
De plus, puisque S^H vaut l'identité, on a

$$w_{n+H} = (I+S+\ldots+S^{H-1})w + (I+\ldots+S^{n-1})w = (I+\ldots+S^{n-1})w = w_n.$$

ii) Un calcul facile révèle que pour $2m \leqslant n \leqslant H-2m$, w_n a 2 bosses de hauteur m et de taille $2m-1$, l'une à termes positifs, l'autre à termes négatifs :

$$\begin{aligned} w_n = \quad & e_1 \ +2e_2+\ldots+me_m+(m-1)e_{m+1}+\ldots e_{2m-1} \\ - \quad & (e_{n+1}+2e_{n+2}+\ldots+me_{n+m}+\ldots e_{n+2m-1}). \end{aligned}$$

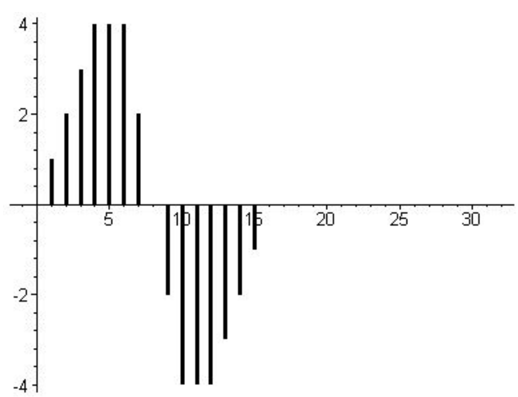
Puisque la norme est symétrique, on peut ranger les termes de façon décroissante et annuler les signes, donc

$$\begin{aligned} \|w_n\| = \quad & \|m(e_1+e_2)+(m-1)(e_3+e_4+e_5+e_6)+\ldots \\ & +(e_{4m-5}+e_{4m-4}+e_{4m-3}+e_{4m-2})\|. \end{aligned}$$

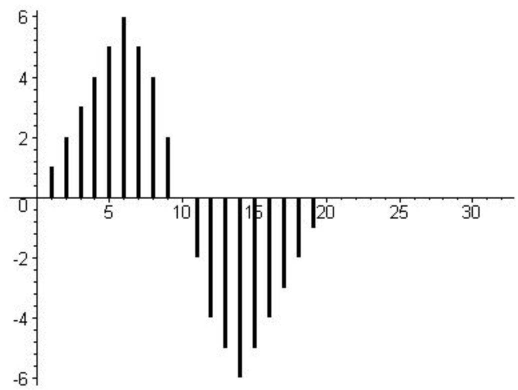
Si l'on conserve simplement les coordonnées supérieures à $\frac{m}{2}$, on obtient

$$\|w_n\| \geqslant \frac{m}{2}\|e_1+\ldots+e_{2m}\| = \frac{m}{2}\|w\|.$$

On a aussi montré que si u_n est le réarrangement décroissant de $\|w_n\|$, $n = 1, \cdots, H$, alors pour $2m \leqslant n \leqslant H-2m$ et $2m \leqslant s \leqslant H-2m$, $u_n = u_s$. Un autre calcul montre que pour $1 \leqslant s \leqslant 2m$ et $2m \leqslant n \leqslant H-2m$, $\|u_s\| \leqslant \|u_n\|$ et donc que $\|w_s\| = \|u_s\| \leqslant \|u_n\| = \|w_n\|$ par symétrie de la norme. Pour $H-2m \leqslant s \leqslant H$, on obtient les mêmes estimations que pour $1 \leqslant s \leqslant 2m$. Cela montre que $\|w_n\|$ atteint son maximum pour $2m \leqslant n \leqslant H-2m$. Ci-dessous figurent des graphiques de w_n pour $1 \leqslant n \leqslant 2m$ qui illustrent les inégalités (avec H=30, m=6). $\square$



Coordonnées de w_4.



Coordonnées de w_8.

4.5.2 L'opérateur de Hájek et Smith

On suppose que X est un espace de Banach muni d'une base symétrique normalisée (e_n) et on écrit

$$X = \operatorname{span}(e_1, e_2) \oplus \overline{\operatorname{span}}(e_n, n \geqslant 3) = \operatorname{span}(e_1, e_2) \oplus Y.$$

A présent, on définit S sur X (on lui donne le même nom dans dans le cas de la dimension finie car ce sera une somme directe de tels opérateurs sur des blocs de dimension finie). On choisit des suites (H_k) et (m_k) d'entiers positifs strictement croissants avec $H_k \geqslant 4m_k$ et $H_k | H_{k+1}$. On définit σ_k, une permutation d'ordre H_k par la formule suivante : $\sigma_k = (1, 2, \ldots, H_k)$, c'est à dire $\sigma_k(i) = i + 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant H_k - 1$ et $\sigma_k(H_k) = 1$. On énumère les vecteurs de base de Y comme suit

$$\operatorname{span}(e_n, n \geqslant 3) = \operatorname{span}(e_{i,1}, 1 \leqslant i \leqslant H_1) \oplus \operatorname{span}(e_{i,2}, 1 \leqslant i \leqslant H_2) \oplus \ldots$$

Ainsi, tout élément x de X peut s'écrire

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{H_k} y_{i,k} e_{i,k}$$

et on pose

$$Sx = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{H_k} y_{i,k} e_{\sigma_k(i),k}.$$

S possède les propriétés suivantes :

Lemme 4.5.2. *i) S est bien définie et est une isométrie.*
ii) Pour $x \in X$, $\lim \|S^{H_k} x - x\| = 0$.

Démonstration. i) est vrai parce que la norme est symétrique. Pour ii), il suffit de le vérifier pour $y \in Y$. Fixons $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\left\| \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{H_l} y_{i,l} e_{i,l} \right\| \leqslant \epsilon, \quad \text{où } y = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{H_l} y_{i,l} e_{i,l}.$$

Pour $k \geqslant N$, H_k est un multiple de H_N, donc pour $1 \leqslant l \leqslant N$ et $1 \leqslant i \leqslant H_l$, $S^{H_k}(e_{i,l}) = e_{i,l}$, d'où

$$S^{H_k}y = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{H_l} y_{i,l}e_{i,l} + S^{H_k}\left(\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{H_l} y_{i,l}e_{i,l}\right)$$

alors

$$S^{H_k}y - y = -\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{H_l} y_{i,l}e_{i,l} + S^{H_k}\left(\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{H_l} y_{i,l}e_{i,l}\right).$$

Puisque S est une isométrie, on obtient pour $k \geqslant N$: $\|S^{H_k}y - y\| \leqslant 2\epsilon$. □

On définit maintenant l'opérateur $T = T_{HS}$ (on garde les mêmes notations et hypothèses que dans la section précédente pour F, (f_k) et P ; la définition de $\tilde{A}_T$ et $\tilde{B}_T$ reste également inchangée). Pour $x \in X$, on pose

$$Tx = Sx + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(Px)v_k$$

où

$$v_k = \epsilon_k\left(\sum_{i=1}^{m_k} e_{i,k} - \sum_{i=m_k+1}^{2m_k} e_{i,k}\right).$$

Les itérés de T sont donnés par (même preuve que la section précédente).

Lemme 4.5.3. *$T^n x = S^n x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(Px)v_{k,n}$ lorsque $x \in X$, $n \geqslant 1$, avec $v_{k,n} = (I + S + \dots S^{n-1})v_k$.*

Choisissons maintenant les diverses constantes : d'abord on introduit une suite (a_k) croissante d'entiers positifs telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|f_k\|}{a_k} < \infty \text{ et } 1 + a_k \mid 1 + a_{k+1}.$$

Ensuite, on pose $m_k = a_1 \dots a_k$, $H_k = 2(m_k + m_{k+1})$. On a

$$\frac{H_{k+1}}{H_k} = \frac{m_{k+1} + m_{k+2}}{m_k + m_{k+1}} = \frac{\prod_{i=1}^{k+1} a_i(1 + a_{k+2})}{\prod_{i=1}^{k} a_i(1 + a_{k+1})} = a_{k+1}\frac{1 + a_{k+2}}{1 + a_{k+1}}$$

et donc $H_k | H_{k+1}$.

La constante ϵ_k est choisie pour que $\|v_{k,2m_k}\| = 1$. Les estimations en dimension finie entraînent : $\|v_k\| \leqslant \frac{2}{m_k}$. On déduit de cela que T est bien défini et borné parce que

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(Px)v_k\right\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\|f_k\|}{m_k}\right)\|P\|\|x\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\|f_k\|}{a_k}\right)\|P\|\|x\|.$$

Le lemme suivant est alors une reformulation des estimations en dimension finie.

Lemme 4.5.4. *i) Pour k fixé, $v_{k,H_k}=0$ et la suite $(v_{k,n})_n$ est H_k-périodique.*
ii) Pour $2m_k \leqslant n \leqslant H_k - 2m_k$, $\|v_{k,n}\|$ est maximal (en n) et $\|v_{k,n}\|=1$.
iii) Pour tout n, $\|v_{k,n}\| \leqslant \frac{2n}{m_k}$.

Démonstration. i) and ii) ont été prouvés avant. Pour iii), il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et $\|v_k\| \leqslant \frac{2}{m_k}$. □

La fin de la preuve est maintenant dans le même esprit que celle produite précédemment. D'abord, puisque la norme est symétrique et que les vecteurs $(v_{k,n})_{k\geqslant 1}$ sont à supports disjoints, on obtient pour $k \geqslant 1$ et $x \in X$

$$\left\|\sum_{l=1}^{\infty} f_l(Px)v_{l,n}\right\| \geqslant |f_k(Px)|\|v_{k,n}\|.$$

Pour chaque n, il existe k tel que $2m_k \leqslant n \leqslant 2m_{k+1} = H_k - 2m_k$, ainsi le Lemme 4.5.4 donne $\|v_{k,n}\| = 1$ et on voit que $\|T^n x\| \to \infty$ quand $x \in \tilde{A}_T$. Soit maintenant $x \in \tilde{B}_T$, on coupe comme précédemment en 3 parties :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(Px)v_{k,H_{k_n-1}}\right\| &\leqslant \left\|\sum_{k=1}^{k_n-1} f_k(Px)v_{k,H_{k_n-1}}\right\| + |f_{k_n}(Px)|\|v_{k_n,H_{k_n-1}}\| \\ &+ \left\|\sum_{k=k_n+1}^{\infty} f_k(Px)v_{k,H_{k_n-1}}\right\|\end{aligned}$$

La première somme est nulle d'après i) du fait précédent. Le second terme tend également vers 0. En effet, d'après le lemme de séparation $f_{k_n}(Px) \to 0$ $(n \to \infty)$ et d'après ii) du fait précédent

$$\|v_{k_n,H_{k_n-1}}\| \leqslant \frac{2H_{k_n-1}}{m_{k_n}} \leqslant 8.$$

Lorsque $k \geqslant k_n + 1$, $k_n - 1 \leqslant k - 2$ et donc

$$\begin{aligned}|f_k(Px)|\|v_{k,H_{k_n-1}}\| &\leqslant \frac{2H_{k_n-1}}{m_k}\|f_k\|\|x\| \leqslant \frac{2H_{k-2}}{m_k}\|f_k\|\|x\| \\ &\leqslant 8\frac{m_{k-1}}{m_k}\|f_k\|\|x\| = \frac{8}{a_k}\|f_k\|\|x\|.\end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|f_k\|}{a_k}$ converge, la dernière somme tend donc également vers 0 et comme $S^{H_k}x \to x$, on a le résultat annoncé.

4.6 Quelques compléments et remarques

4.6.1 Comparaison entre les 2 opérateurs

On se place ici dans des espaces complexes. Soit $\overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé et $\partial\mathbb{D}$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Rappelons que $\mathcal{A}_X$ est l'ensemble de tous les opérateurs qui satisfont à la propriété A) du Théorème 4.0.5 et que d'après le résultat de Müller et Vršovský's, si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^k\|} < \infty$ alors A_T est dense, il en résulte que si $T \in \mathcal{A}_X$, nécessairement $r(T) = 1$ puisque A_T est dans ce cas ni vide, ni dense. En particulier, tout opérateur $T \in \mathcal{A}_X$ a un spectre contenu dans le disque unité et qui doit intersecter le cercle unité. Plus précisément, dans les deux exemples étudiés (qui sont construits avec une forte analogie), on a :

Proposition 4.6.1. *Supposons que l'opérateur que dans la construction de l'opérateur T de la section 4, (e_k) est une base de Schauder normalisée, alors $\sigma(T) = \{\lambda_k, k \geqslant 1\}$. D'autre part, si on considère l'opérateur T_{HS} de la section 5, alors $\partial\mathbb{D} \subset \sigma(R_{HS}) \subset \overline{\mathbb{D}}$.*

Démonstration. Le premier opérateur s'écrit sous la forme $I + N$, donc a $\sigma(T) = \{1 + \lambda, \lambda \in \sigma(N)\}$. Puisque N est compact, $\sigma(N) = \sigma_p(N) \cup \{0\}$. Soit $\lambda \in \sigma_p(N)$ et $x \neq 0, x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ tel que $Nx = \lambda x$, alors

$$\begin{cases} 0 = \lambda x_k \ \text{ pour } \ k \in \{1, 2\}. \\ (\lambda_k - 1)x_k + \dfrac{f_k(Px)}{m_{k-1}} = \lambda x_k \ \text{ pour } \ k \geqslant 3. \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$, alors $x_1 = x_2 = 0$, c'est à dire $Px = 0$ et on obtient que $\lambda = \lambda_k - 1$ pour un $k \geqslant 3$. D'autre part, $Ne_k = (\lambda_k - 1)e_k$ pour $k \geqslant 3$, d'où $\sigma(N) = \sigma_p(N) \cup \{0\} = \{\lambda_k - 1, k \geqslant 1\}$ et $\sigma(T) = \{\lambda_k, k \geqslant 1\}$.
Maintenant, l'opérateur S_{HS} de la section 5 (associé à T_{HS}) peut se voir comme une matrice infinie diagonale par blocs avec l'identité sur le premier bloc, et des matrices de Frobenius

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui ont $X^{H_k} - 1$ comme polynôme caractéristique sur le k-ième bloc (i.e. span$(e_{i,k}, 1 \leqslant i \leqslant H_k)$), donc en prenant un vecteur propre associé à une racine de l'unité d'ordre H_k pour la matrice de Frobenius sur le k-ième bloc, et en complétant par des 0, on voit que

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{U}_{H_k} \subset \ \sigma_p(T_{HS}) \subset \sigma(T_{HS})$$

où $\mathbb{U}_{H_k}$ désigne le groupe multiplicatif des racines H_k-ièmes de l'unité. Puisque $H_k | H_{k+1}$, G est lui même un groupe infini de $\partial\mathbb{D}$ en tant que réunion croissante de groupes, ainsi G est dense dans $\partial\mathbb{D}$ et puisque $\sigma(T_{HS})$ est un sous-ensemble fermé, on obtient $\partial\mathbb{D} \subset \sigma(T_{HS})$. $\square$

Le spectre de T est donc une suite qui tend très vite vers 1 alors que le spectre de T_{HS} n'est pas dénombrable.

4.6.2 Taille de l'ensemble $\mathcal{A}_X$: sur la conjecture de Prăjitură

On revient ici à un problème plus général. On a montré que pour tout espace séparable X, $\mathcal{A}_X$ est non vide. Ainsi, une question naturelle est : que peut-on dire de la taille de $\mathcal{A}_X$? Il est clair qu'un tel ensemble ne peut pas être dense pour la norme d'opérateur car si $T \in \mathcal{A}_X$, $\|T\| > 1$. Cependant, on a :

Proposition 4.6.2. *Si X est un espace de Banach séparable de dimension infinie (ou plus généralement vérifie les hypothèses du Corollaire 4.0.1), alors l'ensemble $\mathcal{A}_X$ est dense pour la topologie forte d'opérateurs sur $\mathcal{L}(X)$.*

Pour prouver, cela on utilise le lemme suivant [BM] (p 45).

Lemme 4.6.1. *Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe et $T \in \mathcal{L}(X)$. Supposons que pour tout entier N, on puisse trouver $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que les vecteurs $x_1, \dots, x_N, T(x_1), \dots, T(x_N)$ soient linéairement indépendants. Alors* $\mathrm{Sim}(T)$ *est SOT dense (i.e. pour la topologie forte) dans $\mathcal{L}(X)$.*

Démonstration de la Proposition 4.6.2. Rappelons que la classe de conjugaison (ou de similarité) de $T \in \mathcal{L}(X)$ est définie par

$$\mathrm{Sim}(T) = \{JTJ^{-1}, J \in \mathcal{GL}(X)\}$$

Il est évident de vérifier que $\mathcal{A}_X$ est invariant par conjugaison : en effet, avec les notations du Théorème 4.0.5, observons que si $S = JTJ^{-1}$, alors $x \in A_T \Leftrightarrow Jx \in A_S$ et $x \in B_T \Leftrightarrow Jx \in B_S$. Donc, il suffit de prouver la SOT densité de $\mathrm{Sim}(T)$ pour un opérateur $T \in \mathcal{A}_X$. Pour cela, on va utiliser l'opérateur T de la section 4 (et le Lemme 4.6.1). Par exemple, on fait la vérification dans le cas complexe. Pour $N \geqslant 1$, on pose $x_1 = e_3 + e_4, x_2 = e_5 + e_6, \dots, x_N = e_{2N+1} + e_{2N+2}$. Puisque $Te_k = \lambda_k e_k$ pour $k \geqslant 3$, on voit que pour tout k, (x_k, Tx_k) est une famille libre et que plus généralement $x_1, \dots, x_N, T(x_1), \dots, T(x_N)$ sont linéairement indépendants. Donc $\mathrm{Sim}(T)$ et en conséquence $\mathcal{A}_X$ sont denses dans $\mathcal{L}(X)$. En particulier, l'ensemble des opérateurs qui mettent en défaut la conjecture de Prăjitură est SOT dense dans $\mathcal{L}(X)$. □

D'autre part, on a :

Proposition 4.6.3. *Soit X un espace de Banach complexe, alors l'ensemble des opérateurs qui satisfont la conjecture de Prăjitură, i.e.*

$$\mathcal{P} = \{T \in \mathcal{L}(X), A_T = \emptyset \text{ ou } A_T \text{ est dense dans } X\}$$

est dense (pour la norme d'opérateur) dans $\mathcal{L}(X)$. En particulier, $\mathcal{A}_X$ est d'intérieur vide.

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$ et $T \in \mathcal{L}(X)$, on peut supposer que $T \notin \mathcal{P}$. Les arguments du début de cette section disent que $r(T) = 1$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$ avec $|\lambda| = 1$. Posons $T_\epsilon = T + 2\epsilon\lambda I$, alors $\|T - T_\epsilon\| = 2\epsilon$ et $\lambda(1 + 2\epsilon) \in \sigma(T_\epsilon)$. Donc $r(T_\epsilon) \geqslant 1 + 2\epsilon$ et A_{T_ϵ} est dense dans X, d'où $T_\epsilon \in P$. □

Bien que la conjecture de Prăjitură soit fausse, on peut raisonnablement espérer la chose suivante.

Conjecture 4.6.1. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(X)$, alors* $\operatorname{span}(A_T)$ *est de dimension infinie dès que* $A_T \neq \emptyset$.

Il est au moins clair que $\operatorname{span}(A_T)$ ne peut jamais être de dimension 1, sinon cela entraînerait l'existence d'un vecteur propre dans A_T ce qui forcerait que $r(T) > 1$ et donc que A_T soit dense. Cependant, on a pas réussi à démontrer cette conjecture hormis dans le cas très particulier où H est un espace de Hilbert non séparable. Dans ce cas, supposons par l'absurde que $\operatorname{span}(A_T)$ soit de dimension d avec $d < \infty$. On peut écrire

$$F = \operatorname{span}(A_T) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_d)$$

avec pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, $a_i \in A_T$. Puisque H n'est pas séparable, on a que

$$\operatorname{span}(a_1, \ldots, a_d, T^*a_1, \ldots, T^*a_d, \ldots, (T^*)^n a_1, \ldots, (T^*)^n a_d, \ldots)$$

n'est pas dense dans H, donc son orthogonal est non réduit à $\{0\}$. Si $x \neq 0$ est dans l'orthogonal de ce dernier espace, il vérifie : $\forall n \geqslant 0$, $T^n x \in F^\perp$. Remarquons également que A_T étant T invariant, F est T invariant donc

$$\|T^n(x + a_1)\|^2 = \|T^n(a_1)\|^2 + \|T^n(x)\|^2 \geqslant \|T^n(a_1)\|^2 \to \infty.$$

Par suite $x + a_1 \in F$ et comme $x \in F^\perp \setminus \{0\}$, $(a_1, \ldots, a_d, x + a_1)$ est une famille libre de F ce qui est une contradiction.

Remarque 4.6.1. *Si T est un endomorphisme symétrique, le résultat reste vrai si H est séparable puisque dans ce cas, F étant T-invariant, $F^\perp$ est T-invariant et il suffit de prendre n'importe quel $x \neq 0 \in F^\perp$.*

Remarque 4.6.2. *En revanche,* $\operatorname{span}(B_T)$ *peut très bien être de dimension 1 si $B_T \neq \{0\}$. En effet, considérons $x \neq 0 \in H$ où H est un espace de Hilbert. Posons $F = \operatorname{span}(x)$, alors $H = F \oplus F^\perp$ et l'opérateur $T = I \oplus 2I$ vérifie clairement que* $\operatorname{span}(B_T) = \operatorname{span}(x)$.

4.6.3 Un dernier lemme

On signale ici que les lemmes de séparation donnés dans la section 3 admettent une extension en dimension infinie. On n'obtient pas d'estimations de normes explicites (car on ne connait pas dans un espace a priori général les nombres d'entropie d'un compact). Cependant, on va voir que l'on a la proposition suivante.

Proposition 4.6.4. *Soit X un espace de Banach, $K \subset X^*$ un compact (pour la norme usuelle sur le dual) et $C = \cup_{\varphi \in K} \operatorname{Ker}\varphi$. Alors il existe une suite de formes linéaires continues (f_n) sur X^* telle que :*
1) $\forall x \notin C$, $|f_n(x)| \to \infty$.
2) $\forall x \in C$, $\underline{\lim}|f_n(x)| = 0$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on peut supposer que $0 \notin K$, car sinon $C = X$ et il n'y a rien à faire. On reprend la construction donnée en dimension finie : soit pour chaque k, H_k un 2^{-k} réseau de K. On construit alors une suite (φ_n) en énumérant d'abord tous les éléments de H_1, puis tous ceux de H_2, etc ... Posons ensuite $f_n = \alpha_n \varphi_n$ où $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ est

une suite strictement croissante tendant vers $+\infty$ à ajuster ultérieurement.
Si $x \notin C$, on a

$$\begin{aligned} |f_n(x)| = \alpha_n |\varphi_n(x)| &= \alpha_n \|\varphi_n\| d(x, \mathrm{Ker}\varphi_\mathrm{n}) \\ &\geqslant \alpha_n \left(\inf_k \|\varphi_k\| \right) d(x, C). \end{aligned}$$

Puisque $0 \notin K$ et que K est compact, $\inf \|\varphi_k\| > 0$. D'autre part, $d(x, C) > 0$, donc le dernier membre de droite tend vers l'infini et on a le point 1). En effet :

Fait 4.6.1. *C est une partie fermée de X.*

Démonstration. Soit $(x_n) \subset C$ telle que $x_n \to x$. Par définition de C, il existe une suite $(\psi_n) \subset K$ telle que $\psi_n(x_n) = 0$. Quitte à passer à une sous suite, on peut supposer qu'il existe $\psi \in K$ telle $\psi_n \to \psi$ pour la norme de X^*. On a alors :

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leqslant |\psi(x) - \psi_n(x)| + |\psi_n(x) - \psi_n(x_n)| \\ &\leqslant \|\psi - \psi_n\| \|x\| + \|\psi_n\| \|x - x_n\|. \end{aligned}$$

Comme $(\|\psi_n\|)$ est bornée, il vient à la limite : $\psi(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}\, \psi$ et $x \in C$. □

Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier k tel que

$$|H_1| + \ldots + |H_k| \leqslant n \leqslant |H_1| + \ldots + |H_{k+1}|.$$

Posons $\rho(k) = |H_1| + \ldots + |H_k|$. Clairement, ρ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ et tendant vers l'infini. Prolongeons là en une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ de sorte que ρ^{-1} est strictement croissante et tend vers l'infini en l'infini.
Donnons nous $x \in C$, il existe $\varphi \in K$ tel que $\varphi(x) = 0$ puis on peut choisir $\varphi_{p_n} \in H_k$ tel que : $\|\varphi - \varphi_{p_n}\| \leqslant 2^{-k}$. On a alors

$$\rho(k-1) = |H_1| + \ldots + |H_{k-1}| < p_n \leqslant |H_1| + \ldots + |H_k| \leqslant n,$$

donc $p_n \leqslant n$ et $p_n \to \infty$. D'autre part, on a vu que $n \leqslant \rho(k+1)$ donc $k \geqslant \rho^{-1}(n) - 1$ puis $\|\varphi - \varphi_{p_n}\| \leqslant 2^{1-\rho^{-1}(n)}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} |f_{p_n}(x)| = \alpha_{p_n} |\varphi_{p_n}(x)| = \alpha_{p_n} |(\varphi - \varphi_{p_n})(x)| &\leqslant \alpha_{p_n} \|\varphi - \varphi_{p_n}\| \|x\| \\ &\leqslant \alpha_n 2^{1-\rho^{-1}(n)} \|x\|. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $\alpha_n = \sqrt{2^{\rho^{-1}(n)}}$ et on a que 2) est satisfait. □

4.6.4 Récapitulatif

Pour terminer ce chapitre, on énonce dans le théorème suivant la synthèse des exemples et résultats connus sur la structure de A_T.

Théorème 4.6.1. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie.*

1) $\exists T \in \mathcal{L}(X)$ tel que A_T soit un ouvert non vide, et non dense dans X.
2) Pour tout $d \geqslant 0$, $\exists T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $A_T \cup \{0\}$ soit un sous-espace fermé de codimension d ; mais si X est complexe, $A_T \cup \{0\}$ n'est jamais un sous espace vectoriel (non nul) de dimension finie.
3) $\operatorname{span}(A_T)$ *est de dimension infinie si $X = H$ est un espace de Hilbert non séparable.*

Démonstration. 1) et 3) ont été vus. Pour 2), si $d = 0$, il suffit de prendre $T = 2I$. Si $d \geqslant 1$, il faut modifier légèrement la construction qu'on a donné dans ce chapitre. On se place dans le cas complexe et on reprend les notations de la preuve du Théorème 4.4.1. On note cette fois P la projection définie par

$$Px = \langle e_1^*, x\rangle e_1 + \langle e_2^*, x\rangle e_2 + \ldots + \langle e_{d+1}^*, x\rangle e_{d+1}$$

et on considère la suite de formes linéaires (f_n) donnée dans la Proposition 4.3.2 avec $F = \mathbb{C}e_{d+1}$. T est alors défini par la formule

$$Tx = Sx + \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} f_k(Px) e_k.$$

On voit alors en reprenant la construction que $A_T = P^{-1}(F \setminus \{0\})$. Comme $x \in P^{-1}(F)$ équivaut à $\langle e_i^*, x\rangle e_i = 0$ pour tout $i \leqslant d$. On a

$$A_T \cup \{0\} = \overline{\operatorname{span}}(e_n, n \geqslant d+1)$$

qui est bien fermé de codimension d. Le fait que $A_T \cup \{0\}$ ne peut pas être de dimension finie est dû à l'invariante de A_T sous T car alors, T possèderait une valeur propre et donc on devrait avoir $r(T) > 1$ ce qui entraînerait la densité de $A_T \cup \{0\}$ dans X, chose improbable pour un espace de dimension finie ... □

Il demeure la question exotique suivante dont on ne voit pas très bien comment la réponse pourrait être positive.

Question. *$A_T \cup \{0\}$ peut-il être égal à un sous-espace de dimension infinie possédant une base algébrique dénombrable ? Typiquement, sur un espace de suite, $A_T \cup \{0\}$ peut-il coincider avec l'ensemble des vecteurs à supports finis ? En particulier, $A_T \cup \{0\}$ peut-il être un sous-espace vectoriel non fermé de X ?*

Chapitre 5

Quelques compléments sur la propriété de Blum-Hanson

Comme déjà mentionné en introduction, la propriété de Blum-Hanson est une forme forte d'ergodicité. Ici, X désignera comme toujours un espace de Banach.

Definition 5.0.1. *Soit $x \in X$ et $T \in \mathcal{L}(X)$. On dit que T a la propriété de Blum-Hanson au point $x \in X$ si et seulement si pour toute suite (k_n) strictement croissante d'entiers positifs, la limite*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{k_n}x$$

existe pour la norme de X.
On dit que T a la propriété de Blum-Hanson si T a la propriété de Blum-Hanson pour tout $x \in X$.

La propriété de Blum-Hanson pour un espace est alors définie comme suit.

Definition 5.0.2. *On dit que X a la propriété de Blum-Hanson si et seulement pour toute contraction $T \in \mathcal{L}(X)$, (i) et (ii) sont équivalentes, où :*
(i) $(T^n x)$ converge faiblement pour tout $x \in X$.
(ii) T a la propriété de Blum-Hanson.

Il n'est pas très compliqué de montrer que ii) implique i) (voir [K], p 253), ce qui implique alors que T est à puissances bornées.

5.1 Résultats positifs

On s'intéresse ici aux espaces classiques qui sont connus pour avoir la propriété de Blum-Hanson. Voici quelques cas où la réponse est positive.

- Si H est un espace de Hilbert [JK] (Jones-Kuftinec, 1971).
- Si $X = L^1$ [AS] (Ackoglu-Sucheston, 1972).
- Pour les contractions positives sur L^p [Bel] (Bellow, 1975).
- Si $X = \ell^p$ [MT] (Müller-Tomilov, 2007).

Nous exploitons à présent la preuve de ce dernier théorème pour prouver le résultat suivant.

Théorème 5.1.1. *c_0 a la propriété de Blum-Hanson.*

Démonstration. Comme déjà dit, (ii) $\Rightarrow$ (i) est toujours vraie. On suppose donc (i) et on montre (ii). On peut supposer sans pertes de généralités que $(T^n x)$ converge faiblement vers 0 pour tout $x \in X$. Remarquons également qu'il suffit de démontrer que (ii) est vrai pour les vecteurs unitaires. On fixe donc $x \in c_0$ avec $\|x\| = 1$.
On note comme toujours $e_1, e_2, \cdots$ la base canonique de c_0. Soit également P_r la projection canonique sur l'espace engendré par ces r premiers vecteurs pour $r \geqslant 1$. Notons que P_r et $I - P_r$ sont des contractions.
Soit $\delta > 0$, il existe un entier naturel t tel que $2/t \leqslant \delta$. Puisque $2 - 1/s \leqslant 2 - 1/(s+1)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$2 - \frac{1}{s} + (s+1)\epsilon \leqslant 2 - \frac{1}{s+1} \quad (*)$$

pour tout $s = 1, \cdots, t-1$.
Puisque $x \in c_0$, on peut trouver un entier r tel que $\|(I - P_r)x\| \leqslant \epsilon$. Puisque la suite $(T^n x)$ tend faiblement vers 0, on peut trouver un entier d tel que $\|P_r(T^j x)\| \leqslant \epsilon$ dès que $j \geqslant d$.
Nous allons maintenant montrer que

$$\|T^{m_1}x + \cdots + T^{m_s}x\| \leqslant 2 - \frac{1}{s}$$

pour tous les entiers naturels $s \leqslant t$ et toutes les suites d'entiers naturels (m_i) vérifiant $m_{i+1} - m_i \geqslant d$ pour tout i. Remarquons que le résultat est vrai pour $s = 1$ car T étant une contraction et puisque $\|x\| = 1$, $\|T^{m_1}x\| \leqslant 1 = 2 - \frac{1}{1}$.
On procéde par récurrence en supposant le résultat vrai pour $s < t$. On considère donc des entiers $m_1, \cdots, m_{s+1}$ vérifiant les conditions ci-dessus. On a alors

$$\|T^{m_1}x + \cdots + T^{m_{s+1}}x\| \leqslant \|x + T^{m_2 - m_1}x + \cdots T^{m_{s+1} - m_s}x\|.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|T^{m_1}x + \cdots + T^{m_{s+1}}x\| &\leqslant \|P_r x + (I - P_r)(T^{m_2 - m_1}x + \cdots T^{m_{s+1} - m_s}x)\| \\ &+ \|(I - P_r)x\| + \|P_r(T^{m_2 - m_1}x + \cdots T^{m_{s+1} - m_s}x)\|. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $\|T^{m_2 - m_1}x + \cdots T^{m_{s+1} - m_s}x\|$. On obtient alors en notant qu'on additionne des vecteurs à supports disjoints

$$\|P_r x + (I - P_r)(T^{m_2 - m_1}x + \cdots T^{m_{s+1} - m_s}x)\| \leqslant \max(1, 2 - \frac{1}{s}) \leqslant 2 - \frac{1}{s}.$$

D'autre part, par le choix de r et d, on a $\|(I - P_r)x\| \leqslant \epsilon$ et $\|P_r(T^{m_2 - m_1}x + \cdots T^{m_{s+1} - m_s}x)\| \leqslant s\epsilon$. Donc en mettant toutes ces estimations bout à bout, on obtient

$$\|T^{m_1}x + \cdots + T^{m_{s+1}}x\| \leqslant 2 - \frac{1}{s} + (s+1)\epsilon \leqslant 2 - \frac{1}{s+1},$$

ce qui achève la récurrence (la dernière inégalité vient de $(*)$).

Soit (n_i) une suite strictement croissante. Pour N assez grand, on peut écrire selon la division euclidienne de N par t, $N = mt + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant t-1$ et $m \geqslant d$. On a alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} T^{n_i} x \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{r} T^{n_i} x \right\| + \sum_{s=1}^{m} \left\| \sum_{i=0}^{t-1} T^{n_{r+s+im}} x \right\| \leqslant r + 2m.$$

D'où

$$\frac{1}{N} \left\| \sum_{i=1}^{N} T^{n_i} x \right\| \leqslant \frac{t-1}{N} + \frac{2}{t}$$

donc

$$\overline{\lim} \frac{1}{N} \left\| \sum_{i=1}^{N} T^{n_i} x \right\| \leqslant \frac{2}{t} \leqslant \delta$$

ce qui après avoir fait tendre δ vers 0 permet de conclure. $\square$

Ce résultat, ainsi qu'une partie des autres résultats mentionnés plus haut ont été dans le même temps unifiés par Armel Primot [Prim]. On explique brièvement une partie de son travail.

Théorème 5.1.2. *On définit pour $x \in X$ et $t \geqslant 0$,*

$$\rho(x, t, X) = \sup(\overline{\lim} \|x + t y_n\|)$$

où le sup *est pris sur toutes les suites (y_n) convergeant faiblement vers 0 et telles que $\|y_n\| \leqslant 1$ pour tout n. Si pour tout x,*

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \left(\rho(x, t, X) - t\right) \leqslant 0,$$

alors X a Blum-Hanson.

En remarquant que pour $\|x\| = 1$, $\rho(x, t, X) \leqslant \overline{\rho}_X(t) + 1$ et en se rappelant que $\overline{\rho}_{\ell^p}(t) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$ et $\overline{\rho}_{c_0}(t) = t - 1$ pour $t \geqslant 1$, on retrouve donc que ℓ^p et c_0 ont Blum-Hanson.

5.2 Résultats négatifs

Il est montré dans [AHR] que la propriété de Blum-Hanson est fausse pour une certaine classe de contractions positives sur un $C(K)$. Si on remplace contraction par à puissances bornées sur l'espace de Hilbert, il est possible de trouver un exemple d'opérateur T tel que (i) et (ii) ne soient plus équivalents. Müller et Tomilov ont ainsi réussi à construire un opérateur T ayant les propriétés suivantes :

Théorème 5.2.1. *Il existe un opérateur borné sur un espace de Hilbert H, $x \in H$ et une suite (k_n) strictement croissante d'entiers positifs tels que :*

(i) $T^n \to 0$ pour la topologie faible.
(ii) $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{k_n} x\right)$ n'admet pas de limite lorsque $N \to \infty$.
(iii) Pour tout $x \neq 0$, $\inf_n \|T^n x\| > 0$.

Notre but est de montrer que cet exemple s'adapte à une plus large classe d'espaces que le Hilbert. Notons que le résultat de Müller et Tomilov devient faux si l'espace X a la propriété de Schur. En effet, si $(T^n x)$ converge faiblement vers 0, elle converge fortement vers 0, donc la sous suite $(T^{k_n} x)$ converge elle aussi vers 0, ce qui entraine la convergence des moyennes de Césàro vers 0. Cela exclut par exemple l'espace ℓ^1.
Nous allons cependant prouver le résultat suivant, en suivant de près la construction de Müller et Tomilov.

Théorème 5.2.2. *Soit X un espace de Banach muni d'une base symétrique shrinking. Alors, il existe un opérateur borné sur l'espace X, $x \in X$ et une suite (k_n) strictement croissante d'entiers positifs tels que :*

(i) $T^n \to 0$ pour la topologie faible.
(ii) $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{k_n} x\right)$ n'admet pas de limite lorsque $N \to \infty$.
Si de plus, $X = c_0$ ou $X = \ell^p(\mathbb{N})$ $(1 < p < \infty)$, alors peut assurer
(iii) Pour tout $x \neq 0$, $\inf_n \|T^n x\| > 0$.

Rappelons qu'une base est shrinking si (e_n) est une base de Schauder de X et de plus (e_n^*) est une base de X^*. Cela exclut effectivement l'espace ℓ^1 car ℓ^∞ n'est pas séparable. Avant de passer à la construction de l'opérateur en question, isolons une affirmation immédiate, mais qui montre où intervient le caractère shrinking de la base.

Fait 5.2.1. *Soit $x \in X$. On suppose que T est à puissances bornées et que pour tout i, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_i^*, T^n x\rangle = 0,$$

alors $(T^n x)$ converge faiblement vers 0.

Démonstration. Soit $x^* \in X^*$ et $\epsilon > 0$, il existe un entier N et des scalaires λ_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ tels que

$$\|x^* - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i^*\| \leqslant \epsilon.$$

Posons $C = \sup \|T^n\|$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle x^*, T^n x\rangle| &\leqslant |\langle x^* - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i^*, T^n x\rangle| + |\langle \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i^*, T^n x\rangle| \\ &\leqslant \epsilon C\|x\| + |\langle \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i^*, T^n x\rangle|. \end{aligned}$$

La conclusion en découle en passant successivement à la limite supérieure en n, puis à la limite lorsque $\epsilon \to 0$. □

On peut supposer, quitte à renormer l'espace, que la norme est symétrique, c'est à dire vérifie

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{\pi(k)}\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| e_k\right\|$$

et lorsque $0 \leqslant x_k \leqslant y_k$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k \right\|.$$

Définition de l'opérateur T.
Puisque $\mathbb{N} \cup (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z})$ est dénombrable, on peut trouver une base symétrique et shrinking formée par des vecteurs unitaires e_i $(i \geqslant 0)$ et $f_{i,j}(i \geqslant 1, j \in \mathbb{Z})$. On définit $r(k) = [\log_2 k] + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$ où $[.]$ est la partie entière. T est alors défini par les formules :

$$T f_{i,j} = f_{i,j-1} \quad (i \geqslant 1, j \neq 0),$$

$$T f_{i,0} = 4^{-i} f_{i,-1} \quad (i \geqslant 1),$$

$$T e_j = e_{j+1} \quad (j \notin \{3^k, k \geqslant 1\}),$$

$$T e_{3^k} = e_{3^k+1} + f_{r(k),3^k} \quad (k \geqslant 1).$$

T est à puissances bornées.
On note

$$X_0 = \overline{\mathrm{span}}\{e_j, j \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad X_i = \overline{\mathrm{span}}\{f_{i,j}, j \in \mathbb{Z}\} \ \ (i \geqslant 1).$$

On a donc $X = \oplus_{i=0}^{\infty} X_i$ et suivant cette décomposition, T admet la matrice

$$T = \begin{pmatrix} S_0 & 0 & 0 & \cdots \\ Q_1 & S_1 & 0 & \cdots \\ Q_2 & 0 & S_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où S_0 est le forward shift sur X_0 : $S_0 e_j = e_{j+1}$ et les S_i sont des shifts bilatéraux à poids sur X_i : $S_i f_{i,j} = f_{i,j-1}$ si $j \neq 0$ et $S_i f_{i,0} = 4^{-i} f_{i,-1}$. Notons que puisque l'on travaille avec une base symétrique, on a $\|S_i\| \leqslant 1$ pour tout i. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T^n = \begin{pmatrix} S_0^n & 0 & 0 & \cdots \\ Q_{1,n} & S_1^n & 0 & \cdots \\ Q_{2,n} & 0 & S_2^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

La partie diagonale de T^n, i.e.

$$D_n = \begin{pmatrix} S_0^n & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & S_1^n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & S_2^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

étant une contraction. Il nous reste à analyser la partie perturbation.
Soit $X_+ = \overline{\mathrm{span}}\{f_{i,j}, i \geqslant 1, j \geqslant 0\} \oplus X_0$ et soit P_+ la projection canonique de la base sur X_+.
Soit $Q^{(n)} : X_0 \to \oplus_{i=1}^{\infty} X_i$ défini par

$$Q^{(n)} e_j = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,n} e_j.$$

Nous allons estimer $\|P_+Q^{(n)}\|$ et $\|(I-P_+)Q^{(n)}\|$. Pour $j \geqslant 0$, en calculant par blocs, on obtient

$$Q^{(n)}e_j = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{0\leqslant a\leqslant n-1} S_i^{n-a-1}Q_iS_0^a e_j = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j\leqslant 3^k<j+n} S_i^{n-3^k+j-1}Q_iS_0^{3^k-j}e_j.$$

La dernière égalité provenant du fait que si a n'est pas de la forme $3^k - j$, $Q_iS_0^a e_j = 0$. D'où

$$Q^{(n)}e_j = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j\leqslant 3^k<j+n} S_i^{n-3^k+j-1}Q_ie_{3^k} = \sum_{j\leqslant 3^k<j+n} S_{r(k)}^{n-3^k+j-1}f_{r(k),3^k}.$$

On a $P_+S_{r(k)}^{n-3^k+j-1}f_{r(k),3^k} \neq 0$ si et seulement si $n-3^k+j-1 \leqslant 3^k$, c'est à dire lorsque $n+j-1 \leqslant 2.3^k$. Cela arrive pour au plus un entier k vérifiant $j \leqslant 3^k < j+n$. En effet si $k < k'$ sont deux indices vérifiant ces conditions. Alors $n+j-1 \geqslant 3^{k'} > 2.3^k$ ce qui est une contradiction.
De plus, si $j \neq j'$, alors $P_+Q^{(n)}e_j$ et $P_+Q^{(n)}e_{j'}$ sont à support disjoints. Supposons encore par l'absurde qu'existent $j \neq j'$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $n+j-1 \leqslant 2.3^k$, $j \leqslant 3^k < j+n$ et $n+j'-1 \leqslant 2.3^{k'}$, $j' \leqslant 3^{k'} < j+n$ et $2.3^k-n-j+1 = 2.3^{k'}-n-j'+1$, i.e. $2.3^k-j = 2.3^{k'}-j'$. $j \neq j'$, donc $k \neq k'$. Si par exemple $k < k'$. Alors $j'-j = 2.3^{k'}-2.3^k > 3^{k'}$ ce qui contredit $j' \leqslant 3^{k'}$. Le fait que la norme soit symétrique implique donc que $\|P_+Q^{(n)}\| \leqslant 1$.
On a

$$(I-P_+)Q^{(n)}e_j = \sum_k S_{r(k)}^{n-3^k+j-1}f_{r(k),3^k} = \sum_k 4^{-r(k)}f_{r(k),2.3^k-n+-j+1},$$

où la somme est prise sur tous les k vérifiant $j \leqslant 3^k < j+n$ et $2.3^k-n-j+1 < 0$. Donc $(I-P_+)Q^{(n)} = \sum_k V_k$ où V_k est défini par

$$V_ke_j = 4^{-r(k)}f_{r(k),2.3^k-n-j+1}$$

si $j \leqslant 3^k < j+n$ et $2.3^k-n-j+1 < 0$ et $V_ke_j = 0$ sinon. On a que $\|V_k\| \leqslant 4^{-r(k)}$. Donc

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} V_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-r(k)} &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{2^{s-1}\leqslant k<2^s} 4^{-r(k)} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} 4^{-s}.2^{s-1} = 1/2\end{aligned}$$

Donc $\|T^n\| \leqslant 1+1+1/2 = 5/2$ pour tout n et T est à puissances bornées.

(T^n) tend vers 0 pour la topologie faible.
Fixons $t \geqslant 1$, pour $n > t$, T^ne_0 et e_t sont à supports disjoints, donc $\langle e_t^*, T^ne_0\rangle = 0$. Si $s \in \mathbb{Z}$ est fixé, on voit aussi, au vu de la définition de T pour un n assez grand, $\langle f_{t,s}^*, T^ne_0\rangle = 0$. Ainsi d'après l'étape précédente et le fait, on en déduit que (T^ne_0) converge faiblement vers 0.
Soit $M = \{x \in X, T^nx \to 0 \text{ faiblement}\}$. M est un sous espace T-invariant et fermé car T est à puissances bornées. D'autre part, on voit, en utilisant à nouveau l'argument précédent que $f_{i,j} \in M$ pour tout $i \geqslant 1, j \in \mathbb{Z}$. Donc $\oplus_{i=1}^{\infty} X_i \subset M$. On vient de voir que $e_0 \in M$. Par

récurrence, on montre que $e_j \in M$ pour tout j : si $e_j \in M$, $Te_j \in M$ et $P_0Te_j \in M$ où P_0 est la projection sur X_0 parallèlement à $\oplus_{i=1}^{\infty} X_i$. En effet, si $x^* \in X^*$, on a

$$\begin{aligned} |\langle x^*, T^n(P_0Te_j)\rangle| = |\langle P_0^*(T^n)^*x^*, Te_j\rangle| &\leqslant \|P_0\| \, |\langle (T^n)^*x^*, Te_j\rangle| \\ &= \|P_0\| \, |\langle x^*, T^n(Te_j)\rangle| \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Puisque $P_0Te_j = e_{j+1}$, on a bien $e_{j+1} \in M$. Donc $X_0 \subset M$ et $M = X$ ce qui prouve que (T^n) tend vers 0 pour la topologie faible.

***T* n'a pas la propriété de Blum-Hanson.**
Posons $k_n = 2.3^n + 1$ pour $n \geqslant 1$, on obtient

$$T^{k_n} e_0 = e_{k_n} + f_{r(n),0} + \sum_{j=1}^{\infty} 4^{-r(j)} f_{r(j),2.3^j - 2.3^{k_n}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{s-1}} \left\| \sum_{n=1}^{2^s-1} T^{k_n} e_0 \right\| &\geqslant \frac{1}{2^{s-1}} \left| \sum_{n=1}^{2^s-1} \langle f_{s,0}^*, T^{k_n} e_0\rangle \right| \\ &\geqslant \frac{1}{2^{s-1}} \left| \sum_{2^{s-1} \leqslant n \leqslant 2^s-1} \langle f_{s,0}^*, T^{k_n} e_0\rangle \right| \geqslant \frac{2^{s-1}}{2^s - 1} \geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pour tout $s \in \mathbb{N}$. Cela prouve que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{k_n} e_0\right)$ ne converge pas vers 0 et puisque $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{k_n} e_0\right)$ tend vers 0 faiblement (car (T^n) tend vers 0 pour la topologie faible), la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{k_n} e_0\right)$ ne converge pas.

Preuve de (iii).
Soit $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$, $x \neq 0$ avec $x_i \in X_i$. Puisqu'on est dans c_0 ou ℓ^p, le forward shift est ici une isométrie (mieux qu'une contraction). Si $x_0 \neq 0$, on en déduit

$$\inf \|T^n x\| \geqslant \inf \|S_0^n x\| = \|x_0\| > 0.$$

Si $x_i \neq 0$ pour un $i \geqslant 1$, alors

$$\inf \|T^n x\| \geqslant \inf \|S_i^n x_i\| \geqslant 4^{-i}\|x_i\| > 0.$$

En fait, on peut construire beaucoup d'opérateurs de ce type comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.2.1. *Soit X un espace de Banach avec une base symétrique et shrinking. Alors l'ensemble des opérateurs vérifiant les propriétés du théorème précédent est une partie dense de $\mathcal{L}(X)$ pour la topologie forte des opérateurs.*

Démonstration. On sait que pour cela, il suffit de prouver qu'un tel ensemble est invariant par similarité et de trouver un opérateur T tel que pour tout entier $N \geqslant 1$, on puisse trouver des vecteurs $x_1, \cdots, x_N$ tels que $(x_1, \cdots, x_N, Tx_1, \cdots, Tx_N)$ soit une famille libre de X. Si l'on considère l'opérateur T précédent, il suffit de choisir $x_1 = f_{1,0}, x_2 = f_{1,-2}, \cdots, x_N = f_{1,-2N}$. Voyons l'invariance par similarité. Fixons P un opérateur inversible. Si (T^n) converge faiblement vers 0, on a pour tout $y^* \in X^*$ et tout $z \in X$ que

$$\langle (T^n)^* y^*, z \rangle \to 0.$$

Soit $x^* \in X^*$ et $x \in X$, alors :

$$\langle x^*, (P^{-1}TP)^n x \rangle = \langle x^*, P^{-1}T^n P x \rangle = \langle (T^n)^* (P^{-1})^* x^*, Px \rangle.$$

Cette quantité tend vers 0 en prenant $y^* = (P^{-1})^* x^*$ et $z = Px$. D'autre part, il existe $x \in X$ et (k_n) une sous suite d'entiers tels que $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{k_n} x\right)$ ne converge pas. Alors, en composant par P^{-1}, $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{-1} T^{k_n} x\right)$ ne converge pas et donc $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P^{-1} T^{k_n} P y\right)$ ne converge pas avec $y = P^{-1}x$. $\square$

Bibliographie

[AHR] M. Akcoglu, J. Huneke et H. Rost, A counter example to the Blum Hanson theorem in general spaces, Pacific J. Math. 50 (1974), 305-308.

[AS] M. Akcoglu et L. Sucheston, Weak convergence of positive contractions implies strong convergence of averages, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 32 (1975), 139-145.

[An] S.I. Ansari, Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces, J.Funct.Anal.148(2) (1997), 384–390.

[AH] S.A. Argyros et R.G. Haydon, An $\mathcal{L}^\infty$ HI space solving the $\lambda I + K$ problem, Acta Math. 206 no. 1 (2011), 1–54.

[As] E. Asplund, Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces, Israel J. Math. 4 (1966), 213-216.

[Au1] J.M. Augé, Perturbation of farthest points in weakly compact sets, Mathematica Moravica, Vol.15-1 (2011),1-6.

[Au2] J.M. Augé, Linear operators with wild dynamics, Proc. Amer. Math. Soc., Volume 140, Number 6 (2012), 2103-2116.

[Au3] J.M. Augé, Orbits of linear operators and Banach space geometry, preprint.

[Bal1] K.M. Ball, The plank problem for symmetric bodies, Invent. Math. 10 (1991), 535-543.

[Bal2] K.M. Ball, The complex plank problem, Bull. London Math. Soc. 33 (2001), 433-442.

[Bay1] F. Bayart, Porosity and hypercyclic operators, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 3309-3316.

[Bay2] F. Bayart, Weak-closure and polarization constant by Gaussian measure, Math Zeitschrift 264 (2010), 459-468.

[BM] F. Bayart et E. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Mathematics (2009).

[BMM] F. Bayart, E. Matheron et P. Moreau, Small sets and hypercyclic vectors, Comment. Math. Univ. Carolinae 49 (2008), 53-65.

[Be] B. Beauzamy, Introduction to operator theory and invariant subspaces, North-Holland Mathematical Library Vol. 42, North-Holland, Amsterdam (1988).

[Bel] A. Bellow, An L^p-inequality with application to ergodic theory, Houston J. Math. 1 (1975), 153-159.

[BL] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss : Geometric Nonlinear Functional Analysis, AMS Colloquium Publications 48 (2000).

[Ber] N.C. Bernardes, On orbits of polynomial maps in Banach spaces, Quaestiones Mathematicae 21 (1998), 311-318.

[C] J.P.R. Christensen, On sets of Haar measure zero in Polish abelian groups, Israel J. Math. 13 (1972), 255-260.

[D] E.P. Dolženko, Boundary properties of arbitrary functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 31 (1967), 3-14.

[Ed] M. Edelstein, Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces, Israel J. Math. 4 (1966), 171-176.

[GM] W.T. Gowers et B. Maurey, The unconditional basic sequence problem, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851-874.

[HaSm] P. Hájek et R.J. Smith, Operators Machines on Directed Graphs, Integral equations Oper. Theory 67, n°1 (2010), 15-31.

[HNS] S. Hejazian, A. Niknam, et S. Shadkam, Farthest Points and Subdifferential in p-Normed Spaces, Hindawi Publishing Corporation International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2008, Article ID 196326, 6 pages.

[JLPS] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss et G. Schechtman, Almost Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between infinite-dimensional Banach spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 84 (2002), 711–746.

[JK] L.K. Jones et V. Kuftinec, A note on the Blum-Hanson theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 202-203.

[K] U. Krengel, Ergodic theorems, de Gruyter Studies in Mathematics 6, Walter de Gruyter, Berlin, 1985.

[Lau] K.S. Lau, Farthest points in weakly compact sets, Israel J. Math. 22 (1975), 168-174.

[LS] A. Lebow et M. Schechter, Semigroups of operators and measures of noncompactness, J. Funct. Anal. 7 (1971), 1-26.

[LQ] D. Li et H. Quéffelec, Introduction à l'étude des espaces de Banach, Analyse et Probabilités, volume 12 de Cours spécialisés, Société Mathématique de France (2004).

[L] J. Lindenstrauss, On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, Mich. Math. J. 10 (1963), 241-252.

[LT] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, Vol. 1, Sequences spaces, Springer (1977).

[Ma] E. Matouškovà, Translating finite sets into convex sets, Bull. Lond. Math. Soc. 33, No. 6 (2001), 711-714.

[Mi] V.D. Milman, Geometric theory of Banach spaces. II. Geometry of the unit ball, Uspekhi mat. Nauk 26 , no. 6 (162) (1971), 73–149 (Russian), Russian Math. Surveys 26 no. 6 (1971), 79-163 (English).

[Mu] V. Müller, Orbits, weak orbits and local capacity of operators, Integral Equations Operator Theory 41 (2001), 230-253.

[MT] V. Müller, Y. Tomilov, Quasisimilarity of power bounded operators and Blum-Hanson property, J. Funct. Anal. 246 (2007), 285-300.

[MV] V. Müller et J. Vršovský, On orbit-reflexive operators, J.London Math.Soc. 79 (2009), 497-510.

[OP] R.I. Ovsepian et A. Pelczynski, On the existence of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence in every separable Banach space, and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in L^2, Studia Math. 54, 149-159 (1975).

[P] G.T. Prăjitură The geometry of an orbit, Operator theory live, 145–154, Theta Ser. Adv. Math., 12, Theta, Bucharest, 2010.

[Prim] A. Primot, Travail en cours sur la propriété de Blum-Hanson.

[R] C. Read, The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators, Israel J.Math. 63, 1-40 (1988).

[Rud] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, 3ème édition (1998).

[Sa] H.N. Salas, Hypercyclic weighted shifts, Trans. Amer. Math. Soc. 347 no. 3 (1995), 993-1004.

[Sok] A.D. Sokal, A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem, Am. Math. Mon. 118, no. 5 (2011), 450-452.

[T] L. Tzafriri, On Banach spaces with unconditional bases, Israel J.Math. 17, 84-93 (1974).

[Wan] X. Wang, On Chebyshev Functions and Klee Functions, submitted to Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[Z] L. Zajıček, Porosity and σ-porosity, Real Anal. Exchange 13 no. 2 (1987-1988), 314-350.