



**HAL**  
open science

# Autour de l'analyse géométrique. 1) Comportement au bord des fonctions harmoniques 2) Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg

Camille Petit

► **To cite this version:**

Camille Petit. Autour de l'analyse géométrique. 1) Comportement au bord des fonctions harmoniques 2) Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM041 . tel-00744491

**HAL Id: tel-00744491**

**<https://theses.hal.science/tel-00744491>**

Submitted on 23 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Camille PETIT**

Thèse dirigée par **Hervé PAJOT**  
et codirigée par **Frédéric MOUTON**

préparée au sein de l'**Institut Fourier**  
et de l'**école doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

## Autour de l'analyse géométrique

### 1) Comportement au bord des fonctions harmoniques

### 2) Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg

Thèse soutenue publiquement le **19 juin 2012**,  
devant le jury composé de :

**Gérard BESSON**

Directeur de recherche, Université Grenoble 1, Examinateur

**Guy DAVID**

Professeur, Université Paris-Sud , Président

**Simon MASNOU**

Professeur, Université Lyon 1, Examinateur

**Pierre MATHIEU**

Professeur, Université de Provence, Rapporteur

**Frédéric MOUTON**

Maître de conférence Hdr, Université Grenoble 1, Co-Directeur de thèse

**Hervé PAJOT**

Professeur, Université Grenoble 1, Directeur de thèse

**Tatiana TORO**

Professeur, University of Washington, Rapporteur





## Remerciements

Depuis bientôt quatre ans, à chaque fois qu'une personne bienveillante prend des nouvelles de l'avancement de ma thèse, je commence par répondre que je suis en train d'écrire les remerciements, prétextant qu'il s'agit de la partie qui sera sans aucun doute la plus lue de ma thèse. Maintenant au pied du mur, il est temps de les écrire véritablement. Après les efforts consentis pour que le reste de ce manuscrit soit dans un ordre cohérent, je m'autorise ici à ne suivre aucune logique.

Évidemment, mes plus profonds remerciements vont vers mes directeurs de thèse. Merci Hervé et Fred d'avoir accepté de devenir mes chefs, de m'avoir chacun à votre manière guidé le long de ce chemin doctoral sinueux. Cette thèse vous doit énormément, votre codirection fut une source de richesses inestimable.

Merci Tatiana Toro et Pierre Mathieu de vous être intéressés à mes travaux. C'est un grand honneur pour moi que vous ayez accepté d'écrire des rapports sur mon manuscrit. Merci Pierre pour ton invitation à Marseille, j'y ai beaucoup appris et avec toute la lecture que tu m'as donnée, des semaines chargées m'attendent. Un grand merci Gérard Besson, Guy David et Simon Masnou d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Gérard, du chocolat t'attend à la fin de la soutenance, inutile de faire durer trop longtemps la séance de questions.

Un autre Hervé a été très présent pour moi tout au long de cette thèse. Hervé, j'ai adoré tout le temps qu'on a perdu ensemble, le café du matin, les insultes avant, pendant et après squash, te laisser préparer les feuilles d'exo de M1, tenter de monter au dessus de 3000, Elvis qui s'essaye à la grimpe, les longues soirées armagnac... Te rencontrer a certainement été l'une des plus belles surprises de ces années de thèse. Promis, dès que tu es un peu entraîné, on va dormir au sommet de la Meije.

Max, vieux frère, merci pour les soirées nouvelle star, pour les après-midi à vélo ou en ski, pour les moments passés au 128 à parler du mistral, pour toutes les économies que tu nous a fait réaliser à Géant. Sache que j'ai toujours autant de plaisir à voir ta trombine de playmobile débarquer dans mon bureau avec la ferme intention de me faire perdre 1h.

Ariadna, les moments passés à se plaindre autour d'un thé vont me manquer. Martin, merci pour ton rire et ton oreille attentive. Pierre, merci de m'avoir enfermé 87 fois dans mon bureau sans aucune lassitude et parce que top 67 est bien mieux que top 38. Merci également à toi et à Claire de m'avoir offert le porte-banane, il reste un objet essentiel de mon quotidien et trônera fièrement sur tous les bureaux que j'occuperai. JB, merci pour tes conseils stylistiques avisés, et rien que pour ça. Merci également à tous les

## REMERCIEMENTS

---

autres sportifs de l'IF (ou ex sportifs de l'IF), les grimpeurs, les joueurs de squash, les cyclistes, les coureurs (les boulistes?) qui ont su me montrer que cette thèse n'a pas été profitable à ma condition physique, et en particulier Marianne, Gunnar, Romain, Eric, Laurent, Grégory, Greg, Grégoire, Luc, Benoît, Samuel.

Merci Simon Modeste d'avoir tenté de m'aider à écrire ces remerciements, j'ai écouté attentivement toutes vos suggestions, mais n'en ai retenu aucunes. Merci à Bashar, Thomas, Aline, Eric, mes cobureaux et tous les thésards. Merci à mes « grands-frères », Nico et Vincent, merci aux inséparables Mikaël et Olivier, à Nico Giroud.

J'ai eu beaucoup de plaisir à enseigner avec Luc au début de mon monitorat, avec Grégory plus récemment et évidemment avec mon vieux mais néanmoins indispensable Gérard V. Ce dernier fait également partie de la commission « refonte du site web ». Je remercie tous les membres de celle-ci. Sachez que j'ai désormais toujours dans mon bureau un carnet de post-it, dans le cas où un brain-storming s'impose. DiP, merci pour tes précieux conseils, Benoît et Christophe, merci d'avoir pris du temps pour répondre à mes questions. Merci beaucoup Dietrich d'avoir fait en sorte que je puisse avoir cette salle aujourd'hui, tu m'as enlevé une sacrée épine du pied. Merci Emmanuel pour toutes les annonces que tu m'as transmises et pour m'avoir fait partager tes contacts. Je tiens également à te remercier Z., pour te montrer que je ne suis pas si ingrat que tu le prétends.

Merci à tout le personnel administratif du rez-de-chaussée et du premier d'avoir toujours accueilli mes questions, mes demandes et mes retards avec bonne humeur.

Merci Raphaël d'avoir eu la gentillesse de me mettre dans la liste de diffusion [gros bras], cela reste pour moi une des plus grandes satisfactions de ma thèse. Prends bien soin de l'écureuil en plâtre, il a l'air d'avoir trouvé sa place dans ton bureau.

Ayant peur d'oublier quelqu'un, je souhaite te remercier, (*mets ton nom ici*), pour avoir contribué à un moment ou à un autre au bon déroulement de cette thèse.

Je remercie tous mes amis, ma belle-famille et ma famille de m'avoir offert un environnement idéal pour effectuer ces travaux. En particulier, j'ai une pensée pour mes parents qui ont été d'un soutien constant, jusqu'à ce jour et au pot qui va suivre. Enfin c'est un grand plaisir pour moi de remercier celle qui me fait la joie de partager ma vie. Je suis admiratif de la patience infinie dont tu as fait preuve cette année. Tu dois te dire que cette thèse étant enfin terminée, je vais être plus facile à supporter. Mais je t'assure que ce n'est que le début.

---

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>I Comportement au bord des fonctions harmoniques</b>	<b>26</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>27</b>
1.1 Hyperbolicité . . . . .	28
1.1.1 Espaces hyperboliques . . . . .	28
1.1.2 Espaces quasi-réglés . . . . .	31
1.1.3 Bord géométrique . . . . .	32
1.2 Quasi-étoiles et quasi-pôles . . . . .	35
1.3 Géométrie bornée . . . . .	36
1.4 Coercivité . . . . .	36
<b>2 Cadre discret</b>	<b>41</b>
2.1 Marche aléatoire sur un graphe, fonctions harmoniques . . . . .	42
2.2 Bord de Martin et conditionnement . . . . .	45
2.2.1 Le bord de Martin . . . . .	45
2.2.2 Les $h$ -processus, pour fixer le point de sortie . . . . .	47
2.3 Convergence au bord minimal de Martin . . . . .	48
2.4 Analogie stochastique . . . . .	52
2.5 Preuve du théorème 2.3.1 . . . . .	54
2.5.1 Plan de la preuve . . . . .	54
2.5.2 Conséquences des hypothèses . . . . .	55
2.5.3 La bornitude $H$ -non-tangentielle implique la finitude de l'énergie $H$ -non-tangentielle . . . . .	58
2.5.4 La finitude de l'énergie $H$ -non-tangentielle implique la convergence $H$ -non-tangentielle . . . . .	62
2.6 Démonstration du théorème 2.3.5 . . . . .	64
2.7 Le cadre hyperbolique . . . . .	66
2.7.1 Hyperbolicité et bord de Martin . . . . .	66
2.7.2 Le résultat hyperbolique . . . . .	74



TABLE DES MATIÈRES

---

2.8	Les graphes de Diestel-Leader . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Cadre continu</b>	<b>87</b>
3.1	Résultat principal . . . . .	88
3.1.1	Cadre géométrique . . . . .	88
3.1.2	Bords à l'infini . . . . .	88
3.1.3	Notions non-tangentielles . . . . .	89
3.1.4	Résultats et corollaires . . . . .	90
3.2	Conditionnement et mouvement Brownien . . . . .	93
3.2.1	Mouvement Brownien . . . . .	93
3.2.2	Conditionnement . . . . .	94
3.2.3	Résultat brownien . . . . .	95
3.3	Démonstration du théorème 3.1.2 . . . . .	96
3.3.1	Les principaux ingrédients . . . . .	96
3.3.2	La bornitude non-tangentielle implique la finitude de l'énergie non-tangentielle . . . . .	100
3.3.3	La finitude de l'énergie non-tangentielle implique la convergence non-tangentielle . . . . .	106
3.4	Démonstration du théorème 3.1.4 . . . . .	109
3.5	Démonstration du théorème 3.1.6 . . . . .	112
<b>II</b>	<b>Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg</b>	<b>116</b>
<b>4</b>	<b>Le groupe de Heisenberg <math>\mathbb{H}^n</math> et les mesures tangentes dans <math>\mathbb{H}^n</math></b>	<b>117</b>
4.1	Définition de $\mathbb{H}^n$ . . . . .	117
4.2	Les distances sur $\mathbb{H}^n$ . . . . .	118
4.3	Les sous-groupes homogènes de $\mathbb{H}^n$ . . . . .	120
4.4	Courbes horizontales et géodésiques de $\mathbb{H}^1$ . . . . .	121
4.4.1	Les courbes horizontales dans $\mathbb{H}^1$ . . . . .	122
4.4.2	Description des géodésiques de $\mathbb{H}^1$ . . . . .	122
4.5	Mesures tangentes dans $\mathbb{H}^n$ . . . . .	124
4.5.1	Définition . . . . .	124
4.5.2	Un exemple dégénéré . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg</b>	<b>135</b>
5.1	Graphes lipschitziens intrinsèques . . . . .	136
5.2	Surfaces $\mathbb{H}$ -régulières . . . . .	139
5.2.1	Pansu différentiabilité . . . . .	139
5.2.2	Définition des surfaces $\mathbb{H}$ -régulières . . . . .	140

---

TABLE DES MATIÈRES

---

5.3	Rectifiabilité . . . . .	141
5.3.1	Retour sur les mesures tangentes . . . . .	141
5.3.2	Sous-groupes tangents approximatifs . . . . .	143
5.3.3	Ensembles rectifiables . . . . .	144
5.4	Intégrales singulières . . . . .	146
5.5	Rectifiabilité uniforme . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Problème géométrique du voyageur de commerce</b>	<b>157</b>
6.1	Récapitulatif des résultats existant . . . . .	162
6.2	Idées de la construction de P. Jones . . . . .	165
6.3	Présentation des principaux résultats . . . . .	167
6.4	Preliminaires . . . . .	167
6.5	Hypothèses de récurrence . . . . .	177
6.6	Construction de $\tilde{\Gamma}_j$ à partir de $\Gamma_{j-1}$ . . . . .	178
6.7	Construction de $\Gamma_j$ à partir de $\tilde{\Gamma}_j$ . . . . .	185
6.8	Conclusion . . . . .	188
<b>A</b>	<b>La bornitude non-tangentielle implique la convergence non-tangentielle</b>	<b>191</b>
<b>B</b>	<b>Un lemme analytique pour de l'uniforme continuité</b>	<b>195</b>
<b>C</b>	<b>Courbes de longueur finie dans les espaces métriques</b>	<b>201</b>

---

# Introduction

Cette thèse se situe à l'interface entre l'analyse géométrique, la théorie géométrique de la mesure, la géométrie différentielle et la théorie des probabilités. Différents types d'espaces métriques sont classiques pour les géomètres, on peut citer par exemple les espaces d'Alexandrov ([BBI01]), les espaces  $CAT(\kappa)$ , avec  $\kappa \geq 0$  ([BH99]), les espaces hyperboliques au sens de Gromov ([GDLH90]), les espaces homogènes et en particulier les espaces satisfaisant des inégalités de Poincaré ([Hei01],) ou encore les espaces de Carnot-Carathéodory. Dans la première partie de cette thèse, nous considérons uniquement des graphes et des variétés riemanniennes, avec un intérêt particulier pour ceux, parmi ces espaces, qui sont hyperboliques au sens de Gromov. Nous nous intéressons au comportement asymptotique des fonctions harmoniques sur ces espaces. Lorsqu'ils sont hyperboliques au sens de Gromov, ils sont naturellement munis d'un bord géométrique et nous nous intéressons alors au comportement des fonctions harmoniques aux points du bord géométrique. Dans la seconde partie de cette thèse, nous considérons le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  muni de la métrique sous-riemannienne de Carnot Carathéodory. Nous nous intéressons à la théorie de la rectifiabilité (uniforme) dans ce groupe et au problème géométrique du voyageur de commerce.

### Comportement asymptotique des fonctions harmoniques

L'étude des liens entre l'existence de fonctions harmoniques non-constantes sur une variété riemannienne complète et la géométrie de la variété a intéressé de nombreux chercheurs en analyse géométrique depuis plusieurs dizaines d'années. Les fonctions harmoniques sont en un sens rares sur les variétés possédant des hypothèses de courbure positive ou nulle alors qu'elles existent en abondance en courbure négative. S.T. Yau ([Yau75]) a montré en 1975 que sur une variété riemannienne complète de courbure de Ricci positive ou nulle, toutes les fonctions harmoniques bornées sont constantes. En d'autres termes, une telle variété possède la propriété forte de Liouville. Au milieu des années 80, M.T. Anderson et R. Schoen ([AS85]) ont fourni une description complète de l'espace des fonctions harmoniques positives en courbure négative pincée, en montrant l'identification entre le bord de Martin, c'est-à-dire le bord permettant une représentation intégrale des fonctions harmoniques positives par une mesure sur le bord, et la sphère à l'infini.

Le théorème de convergence non-tangentielle de Fatou ([Fat06]) a marqué le début de l'étude du comportement au bord des fonctions harmoniques :

*Une fonction harmonique positive sur le disque unité admet en presque tout point  $\theta$  du bord une limite non-tangentielle, c'est-à-dire une limite dans*

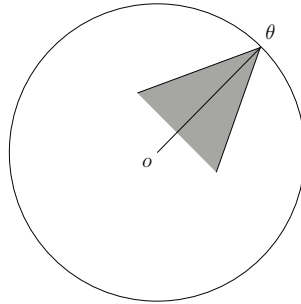


FIGURE 0.0.1 – Convergence non-tangentielle dans le disque unité

*tout cône de sommet  $\theta$ , d'axe passant par l'origine et d'angle strictement inférieur à  $\pi/2$  (voir figure 0.0.1).*

L'étude de la convergence non-tangentielle s'est alors poursuivie dans deux directions.

La première consiste à généraliser le théorème de Fatou à d'autres cadres que le disque unité. On peut citer par exemple les demi-espaces euclidiens de dimension quelconque, les arbres ([Car72]), les groupes libres ([Der75]), les variétés riemanniennes à courbure négative pincée ([AS85], [Anc87]), certains graphes et certaines variétés hyperboliques au sens de Gromov ([Anc90]). Plus précisément dans [Anc90], A. Ancona a démontré un théorème de Fatou abstrait qui affirme que dans un cadre très général, une fonction harmonique positive admet en presque tout point du bord minimal de Martin une limite fine. Il a ensuite prouvé que lorsque la théorie du potentiel et la métrique associées à un graphe ou une variété hyperbolique au sens de Gromov sont compatibles, le bord géométrique (hyperbolique) de l'espace coïncide avec le bord minimal de Martin. Cela fournit un cadre géométrique naturel pour appliquer le théorème abstrait, ce qui permet à A. Ancona de démontrer un théorème de Fatou non-tangentiel au bord géométrique d'un graphe ou d'une variété hyperbolique au sens de Gromov.

La seconde direction provient de la remarque suivante : le théorème de Fatou n'est plus vrai si la fonction harmonique n'est pas supposée positive. Le résultat de Fatou n'assurant une convergence qu'en presque tout point du bord, il est alors naturel de chercher des critères ponctuels, valides en presque tout point du bord, pour qu'une fonction harmonique quelconque (pas nécessairement positive) converge non-tangentiellement. Deux critères ont été particulièrement étudiés, celui de la bornitude non-tangentielle, c'est-à-dire le fait d'être borné dans tout cône, et celui de la finitude de l'intégrale d'aire. On fait parfois référence à ce dernier critère comme le critère de l'aire de Lusin. L'équivalence en presque tout point du bord entre la convergence

## INTRODUCTION

---

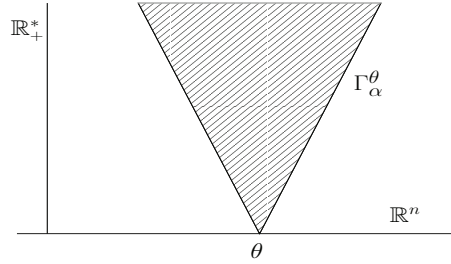


FIGURE 0.0.2 – Cône non-tangentiel dans le demi-espace

non-tangentielle et la bornitude non-tangentielle a été prouvée dans le cas du disque unité par I.I. Privalov ([Pri16]) et par A.P. Calderón ([Cal50b]) dans le cas du demi-espace. Le critère de l'intégrale d'aire a été établi en dimension 2 par les résultats de J. Marcinkiewicz et A. Zygmund ([MZ38]) et ceux de D.C. Spencer ([Spe43]). La version demi-espace euclidien de dimension supérieure a été démontrée par A.P. Calderón et E.M. Stein ([Cal50a], [Ste61]). Ces résultats sont les prototypes des résultats qui vont nous intéresser dans la première partie de cette thèse. Nous donnons donc précisément l'énoncé du théorème de A.P. Calderón et E.M. Stein :

*Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}_+^*$ . Pour presque tout point  $\theta$  du bord  $\mathbb{R}^\nu$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout  $\alpha < \pi/2$ ,  $u(z)$  admet une limite en  $\theta$  lorsque  $z$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_\alpha^\theta$  ;*
2. *Pour tout  $\alpha < \pi/2$ , la fonction  $u$  est bornée sur  $\Gamma_\alpha^\theta$  ;*
3. *Pour tout  $\alpha < \pi/2$ , l'intégrale d'aire est finie :*

$$\int_{\Gamma_\alpha^\theta} |\nabla u(x, y)|^2 y^{1-\nu} dx dy < +\infty.$$

Ce théorème, initialement montré par des méthodes analytiques, a ensuite été redémontré par J. Brossard ([Bro78]) à l'aide du mouvement brownien et du lien naturel entre ce mouvement brownien et les fonctions harmoniques fourni par la propriété de martingale : si  $u$  est une fonction harmonique et  $(X_t)_t$  le mouvement brownien associé à l'opérateur laplacien,  $(u(X_t))_t$  est une martingale locale. Lorsqu'on munit le demi-espace de la métrique hyperbolique, on s'aperçoit que le bord devient un bord à l'infini, que les cônes non-tangentiels deviennent des voisinages tubulaires de rayons géodésiques et que l'intégrale d'aire devient une véritable énergie, c'est-à-dire l'intégrale du gradient au carré. F. Mouton ([Mou94], [Mou95]) a montré que sur une variété riemannienne  $M$  complète, simplement connexe de courbure négative

## INTRODUCTION

---

pincée et pour une fonction harmonique  $u$  sur  $M$ , les notions de convergence non-tangentielle, de bornitude non-tangentielle et de finitude de l'énergie non-tangentielle sont équivalentes en presque tout point du bord géométrique  $\partial M$ . Le terme "presque tout" fait ici référence à la famille des mesures harmoniques. On peut alors se demander si de tels résultats existent sur certains espaces discrets. F. Mouton s'est intéressé aux analogues discrets naturels des variétés de courbure négative pincée : les arbres. Les fonctions harmoniques sont ici relatives à une marche aléatoire aux plus proches voisins sur l'arbre. Il a montré ([Mou00]) que sous une hypothèse d'uniformité de la fonction de transition associée à la marche aléatoire (traduisant les bornes sur la courbure pour les variétés), les notions de convergence radiale, bornitude radiale et finitude de l'énergie radiale sont équivalentes en presque tout point du bord de l'arbre. Les notions radiales ont ensuite été remplacées par les notions non-tangentielles par L. Atanasi et M.A. Picardello ([AP08]) pour les arbres homogènes puis par M.A. Picardello ([Pic10]) et indépendamment par F. Mouton ([Mou10]) pour les arbres non-homogènes. Les méthodes de L. Atanasi et M.A. Picardello sont plus combinatoires que celles de F. Mouton, qui adopte une approche probabiliste. Dans un travail récent ([Pet12]), nous avons démontré que le critère de la bornitude non-tangentielle est valide pour des graphes hyperboliques au sens de Gromov plus généraux que les arbres (il suffit qu'ils soient coercifs) munis d'une fonction de transition seulement supposée admissible au sens d'A. Ancona (voir [Anc88]; en particulier, la marche aléatoire n'est plus nécessairement aux plus proches voisins).

Nous développons dans le cadre des graphes une approche abstraite dans la même veine que celle d'A. Ancona pour le théorème de Fatou. Nous définissons sur un graphe une notion de cône H-non-tangentiel de sommet un point du bord minimal de Martin et nous obtenons un théorème abstrait de type Calderón-Stein pour les points du bord minimal de Martin. Nous cherchons ensuite à appliquer ce résultat à un cadre géométrique adapté pour obtenir une formulation géométrique simple. Le cadre hyperbolique au sens de Gromov s'y prête bien et nous obtenons donc pour une fonction harmonique l'équivalence en presque tout point du bord géométrique d'un graphe hyperbolique au sens de Gromov entre la convergence non-tangentielle, la bornitude non-tangentielle et la finitude de l'énergie non-tangentielle. Ce résultat généralise ceux de [Mou00], [AP08], [Pic10] et [Mou10].

Les graphes de Diestel-Leader, produits horocycliques de deux arbres homogènes forment des exemples non-hyperboliques naturels à étudier. En effet, S. Brofferio et W. Woess ([BW05]) puis W. Woess ([Woe05]) ont respectivement déterminé le bord de Martin et le bord minimal de Martin pour une marche aléatoire aux plus proches voisins naturelle sur ces graphes. Au cours de leurs travaux, ils ont été amenés à étudier le comportement asymptotique



tique de la fonction de Green, ce dont nous avons besoin pour appliquer nos méthodes. Le théorème abstrait ne s'applique hélas pas pour les graphes de Diestel-Leader, mais les idées de preuves nous permettent tout de même d'obtenir un théorème de Fatou "local" et en particulier un théorème de Fatou "global". Par théorème de Fatou "local", nous entendons un critère de convergence non-tangentielle du type : en presque tout point du bord, si une fonction harmonique est positive sur les cônes non-tangentiels, elle converge non-tangentielllement.

Revenons maintenant au cadre continu. Suite au résultat de F. Mouton en courbure négative pincée et à notre résultat pour les graphes hyperboliques au sens de Gromov, il est naturel de s'intéresser aux variétés riemanniennes hyperboliques au sens de Gromov. Nous prouvons ici un théorème de Calderón-Stein pour les variétés riemanniennes hyperboliques au sens de Gromov dont la courbure de Ricci est minorée et le rayon d'injectivité strictement positif. Nous nous intéressons également dans ce cadre à un critère plus fin de convergence non-tangentielle : celui de la densité de l'énergie, initialement étudié par J. Brossard ([Bro88]) dans le demi-espace et par F. Mouton ([Mou07]) pour les variétés riemanniennes de courbure négative pincée.

La philosophie des méthodes probabilistes utilisées pour tous ces résultats peut être résumée en quelques lignes. Plutôt que d'étudier directement le comportement de la fonction harmonique le long des ensembles non-tangentiels pointant en un point  $\theta$  du bord, l'idée est de commencer par étudier le comportement de la fonction harmonique le long des trajectoires du mouvement brownien (ou de la marche aléatoire dans le cadre discret) naturellement associé au laplacien. Plus précisément, on conditionne le mouvement brownien (ou la marche aléatoire) à "sortir" au point  $\theta$ . On étudie alors le comportement de la fonction harmonique le long des trajectoires conditionnées et on établit un résultat stochastique analogue au résultat non-tangentiel que l'on souhaite démontrer. On utilise ensuite la géométrie de la variété (ou du graphe) pour déduire du résultat stochastique le résultat non-tangentiel.

## Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg

*Les espaces de Carnot-Carathéodory.*

Les espaces de Carnot-Carathéodory forment une classe d'espaces métriques dans lesquels certains objets de la théorie géométrique de la mesure comme les courants ou les ensembles rectifiables ont été étudiés avec succès. Les premiers travaux menant aux espaces de Carnot-Carathéodory remontent à 1909 avec C. Carathéodory ([Car09]), où un processus thermodynamique

## INTRODUCTION

---

est modélisé par une courbe dans l'espace euclidien et les échanges de chaleur par l'intégrale d'une 1-forme le long de cette courbe. J. Carnot a prouvé l'existence d'états que l'on ne peut pas connecter par un processus adiabatique, ce que l'on appelle aujourd'hui une courbe horizontale (*i.e.* une courbe dont la dérivée vit dans un sous-espace propre du fibré tangent). Le problème consistant à relier deux points par une courbe horizontale a été abordé pour la première fois par P.K. Rashevsky ([Ras38]) et W.L. Chow ([Cho39]). Ils ont indépendamment démontré une condition nécessaire que l'on appelle désormais "condition de Chow" ou "condition de Hörmander".

Un *espace de Carnot-Carathéodory* est une variété munie d'une famille  $X = (X_1, \dots, X_k)$  de champs de vecteurs telle que tout couple de points puisse être relié par une courbe absolument continue dont la dérivée en presque tout point appartient à la sous-section du fibré tangent engendrée par la famille  $X$ . Une telle courbe est appelée *horizontale*. La *métrique de Carnot-Carathéodory* est alors définie comme la distance de longueur associée à la famille des courbes horizontales, *i.e.* la distance entre deux points  $x$  et  $y$  est l'infimum des longueurs des courbes horizontales entre  $x$  et  $y$ . Notons que cette distance présente des particularités très différentes d'une métrique riemannienne. En particulier il existe des directions dans lesquelles la distance se comporte comme  $|\cdot|^{1/j}$  pour un entier  $j > 1$  et la dimension de Hausdorff d'un espace de Carnot-Carathéodory peut être strictement plus grande que sa dimension topologique.

Une famille fondamentale d'espaces de Carnot-Carathéodory est formée par les groupes de Carnot. Un *groupe de Carnot* est un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe dont l'algèbre de Lie est stratifiée, le premier étage de l'algèbre de Lie engendrant toute l'algèbre. Les groupes de Carnot peuvent être considérés comme des modèles locaux des espaces de Carnot-Carathéodory, puisque ce sont les "espaces tangents" naturels des espaces de Carnot-Carathéodory ([Mit85, Bel96]). L'exemple non-commutatif le plus simple de groupe de Carnot est le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$ . Pour des références sur les groupes de Carnot et le groupe de Heisenberg, on pourra se référer à [BLU07, CDPT07, FS82, Ste93, Hei95]. L'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg est à deux étages :  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ . Le premier étage  $\mathfrak{h}_1$  engendre, un sous-fibré du fibré tangent, appelé le *fibré horizontal*. Muni de la métrique de Carnot-Carathéodory,  $\mathbb{H}^n$  n'est pas bilipschitz-équivalent à une métrique riemannienne, même localement. En revanche, le groupe de Heisenberg (et les groupes de Carnot en général) possède une structure riche qui permet de faire de l'analyse et de la géométrie, avec en particulier une famille à un paramètre d'isomorphismes de groupes donnée par les *dilatations homogènes*.

Les groupes de Carnot ont d'abord été étudiés par rapport à leur opérateur sous-elliptique  $\Delta_G = \sum_{i=1}^k X_i^2$  ([Hör67, Koh73, Mal78, FS82, Ste93]). Le

## INTRODUCTION

---

développement de la théorie géométrique de la mesure dans ces groupes est plus récent, avec la preuve par P. Pansu de l'inégalité isopérimétrique dans le groupe de Heisenberg ([Pan89]). Des sujets classiques de théorie géométrique de la mesure ont depuis fait l'objet de nombreux travaux. On peut par exemple citer [CDG94, GN96, Mon00, LR03, Mon03, LR03, LM05, CDPT07, Mon08, MR09] pour le problème isopérimétrique, . La notion de périmètre de De Giorgi [DG54, DG06] a été étendue aux espaces de Carnot-Carathéodory avec la notion de  $X$ -*périmètre* (voir [Mag06, Vit08] et les références qui s'y trouvent).

### *Les ensembles rectifiables.*

Nous nous intéressons dans cette thèse aux ensembles rectifiables dans les groupes de Carnot et plus particulièrement dans le groupe de Heisenberg (voir par exemple [AK00, FSSC01, Pau04, FSSC07]). Les ensembles rectifiables jouent un rôle central en théorie géométrique de la mesure. Il existe des applications des ensembles rectifiables dans les groupes de Lie en informatique théorique, en géométrie des Banachs et dans certains modèles mathématiques en neurosciences (voir [CK10, CS06]).

Rappelons qu'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est  $m$ -rectifiable s'il est recouvert, à un ensemble de  $H^m$ -mesure nulle près ( $H^m$  est la mesure de Hausdorff  $m$ -dimensionnelle sur l'espace métrique ambiant, en l'occurrence  $\mathbb{R}^n$ ), par la réunion  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(\mathbb{R}^m)$  des images de  $\mathbb{R}^m$  par un nombre dénombrable d'applications lipschitziennes. La définition est équivalente si l'on remplace les images d'applications lipschitziennes par des sous-variétés  $C^1$ . Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est alors dit  $m$ -purement non-rectifiable s'il ne contient aucun sous-ensemble rectifiable de mesure non-nulle. Remarquons que cette définition est aisément généralisable en remplaçant  $\mathbb{R}^n$  par un espace métrique. L. Ambrosio et B. Kirchheim ([AK00]) ont étudié les ensembles rectifiables dans les espaces métriques généraux. Ils ont obtenu une caractérisation de la rectifiabilité, sous l'hypothèse de densité inférieure strictement positive, en termes de plans tangents approximatifs. Pour définir la notion de plan tangent, ils plongent l'espace métrique dans un espace de Banach (ce qui est toujours possible) et utilisent la structure linéaire de ce dernier

Intéressons nous plus précisément aux ensembles rectifiables dans les groupes de Carnot. Après avoir introduit une notion de différentiabilité adaptée à la géométrie des groupes de Carnot et de leur dilatations ([Pan89]), P. Pansu a montré un théorème de Rademacher : une application lipschitzienne entre groupes de Carnot est presque-partout *Pansu-différentiable*. Ce résultat a une conséquence importante remarquée par S. Semmes ([Sem96]) : en l'appliquant aux applications lipschitziennes entre l'espace euclidien  $\mathbb{R}^k$ ,  $k > n$ ,

et le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$ , on s'aperçoit que l'image de ces applications est de mesure de Hausdorff  $k$ -dimensionnelle nulle. En particulier,  $\mathbb{H}^n$  n'est pas rectifiable au sens de H. Federer. Le groupe de Heisenberg et plus généralement les groupes de Carnot nécessitent une théorie de la rectifiabilité spécifique. Différentes approches ont alors été développées. S.D. Pauls ([Pau04]) a par exemple considéré les ensembles recouverts, à ensemble de mesure nulle près, par des images d'applications lipschitziennes de sous-groupes de  $\mathbb{H}^n$ . Nous allons ici présenter plus précisément l'approche de B. Franchi, R. Serapioni et F. Serra-Cassano ([FSSC01] en codimension 1, puis [FSSC07] et [FSSC11] en toutes dimensions). Dans les espaces euclidiens, les ensembles rectifiables sont des généralisations des sous-variétés lipschitziennes ou  $C^1$ . On peut donc suivre le modèle de Federer pour définir les ensembles rectifiables dans  $\mathbb{H}^n$  (et dans les groupes de Carnot en général), pourvu que l'on ait des objets jouant naturellement le rôle de ces sous-variétés lipschitziennes et  $C^1$  dans  $\mathbb{H}^n$ . Commençons par la notion de sous-variété  $C^1$  intrinsèque de dimension  $k$ . Si  $1 \leq k \leq n$ , une sous-variété  $C^1$  intrinsèque de dimension  $k$  est définie, localement, comme l'image par une application continûment Pansu-différentiable  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{H}^n$ . Si  $n + 1 \leq k \leq 2n$ , une telle sous-variété est localement définie comme ensemble de niveau non-critique d'une application continûment Pansu-différentiable  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1-k}$ .

Notons que dans  $\mathbb{R}^n$ , les sous-variétés sont localement des graphes de fonctions de  $\mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}^{n-k}$ . D'un autre côté, contrairement aux espaces euclidiens,  $\mathbb{H}^n$  ne peut en général pas être vu comme produit cartésien de sous-groupes. Il est donc naturel de commencer par déterminer une notion de graphe adaptée au groupe de Heisenberg. L'idée de B. Franchi, R. Serapioni et F. Serra-Cassano est de définir les graphes comme associés à une décomposition de  $\mathbb{H}^n$  en produit de sous-groupes homogènes complémentaires, où un sous-groupe de  $\mathbb{H}^n$  est *homogène* s'il est invariant par les dilatations et deux sous-groupes  $\mathbb{G}_1$  et  $\mathbb{G}_2$  de  $\mathbb{H}^n$  sont *complémentaires* s'ils sont homogènes et si tout élément de  $\mathbb{H}^n$  s'écrit de manière unique comme le produit d'un élément de  $\mathbb{G}_1$  et d'un élément de  $\mathbb{G}_2$ . Le *graphe intrinsèque* d'une application  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est alors

$$\text{graphe}(f) := \{P \cdot f(P) \mid P \in \mathcal{E}\}.$$

Un graphe intrinsèque reste un graphe intrinsèque après dilatation ou translation par un élément du groupe. Une fonction  $f : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est *lipschitzienne intrinsèque* si, en tout  $P \in \text{graphe}(f)$ , il existe un "cône intrinsèque" de sommet  $P$ , d'axe  $\mathbb{G}_2$  et d'ouverture fixée qui intersecte  $\text{graphe}(f)$  seulement en  $P$ .

Disposant désormais de notions de sous-variétés  $C^1$  et de graphes lipschitziens adaptées à  $\mathbb{H}^n$ , deux définitions d'ensembles rectifiables cohabitent.

## INTRODUCTION

---

Dans les espaces euclidiens, les ensembles rectifiables sont caractérisés, sous une hypothèse de finitude de la mesure de Hausdorff, par l'existence en presque tout point d'un unique plan tangent approximatif ou d'une unique mesure tangente. P. Mattila, R. Serapioni et F. Serra-Cassano ([MSSC10]) ont donné des caractérisations analogues pour les ensembles rectifiables de dimension  $1 \leq k \leq n$  définis au moyen des graphes lipschitziens et pour les ensembles rectifiables de dimension  $n + 1 \leq k \leq 2n$  pour les ensembles rectifiables définis au moyen des sous-variétés  $C^1$ . Déterminer si les deux définitions d'ensemble rectifiable coïncident est une question ouverte.

*Les ensembles uniformément rectifiables dans  $\mathbb{R}^n$ .*

Dans l'espace euclidien, les propriétés de rectifiabilité d'un ensemble  $E$  sont reliées à des propriétés plus analytiques de  $E$  comme la continuité sur  $L^2(E)$  de certains opérateurs d'intégrales singulières. Pour expliquer cela, supposons dans un premier temps que l'on s'intéresse aux sous-ensembles  $H^1$ -mesurables  $E$  de  $\mathbb{C}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit l'opérateur de Cauchy comme l'opérateur linéaire de  $L^1(E)$  dans l'espace des fonctions continues sur  $E$  par

$$T_\varepsilon f(z) := \int_E \frac{1}{z - w} f(w) dH^1|_E(w).$$

On peut alors se demander sous quelles conditions sur  $E$  est-ce que  $T_\varepsilon$  définit un opérateur borné sur  $L^2(E)$ , avec une norme d'opérateur ne dépendant pas de  $\varepsilon$ . Si  $E$  est une droite, alors l'opérateur de Cauchy est borné sur  $L^2(E)$  (il s'agit dans ce cas de l'opérateur de Hilbert). La conclusion est la même si  $E$  est un graphe lipschitzien. Ce résultat a été conjecturé par A.P. Calderón et A. Zygmund ([CZ52]) dans les années 1950, puis démontré par A.P. Calderón ([Cal77]) dans le cas où la constante de lipschitz est petite et enfin par R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer ([CMM82]) dans le cas général. Il existe une preuve géométrique de ce résultat utilisant les nombres  $\beta$  de Jones dont nous reparlerons ultérieurement. Ce résultat suggère qu'il existe une relation forte entre la propriété pour l'opérateur de Cauchy d'être borné sur  $L^2(E)$  et la propriété pour l'ensemble  $E$  d'être rectifiable. Rappelons qu'un ensemble  $E \subset \mathbb{C}$  est 1-Ahlfors-régulier s'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $x \in E$  et tout  $r > 0$ ,

$$C_0^{-1} r \leq H^1(E \cap B(x, r)) \leq C_0 r.$$

On ne peut pas espérer que la rectifiabilité de  $E$  associée à la 1-Ahlfors-régularité implique que l'opérateur de Cauchy est borné sur  $L^2(E)$ , la rectifiabilité étant une notion qualitative, la bornitude sur  $L^2(E)$  de l'opérateur

---

## INTRODUCTION

---

de Cauchy étant quantitative. G. David et S. Semmes ont alors introduit la théorie des ensembles uniformément rectifiables. Il existe de très nombreuses caractérisations des ensembles uniformément rectifiables. On peut citer par exemple la bornitude sur  $L^2$  des opérateurs d'intégrales singulières associés aux noyaux "standard", une condition de "type Carleson" pour les nombre  $\beta$  ou encore le recouvrement par de "gros morceaux" d'images lipschitziennes. Pour des détails, on pourra consulter [DS91], [DS93].

Notre motivation pour étudier les ensembles uniformément rectifiables dans le groupe de Heisenberg provient du problème isopérimétrique. Notons que les boules du groupe de Heisenberg ne sont pas des ensembles d'isopérimétrie ([Mon00]), c'est-à-dire des ensembles qui réalisent l'égalité dans l'inégalité isopérimétrique. Dans [LR03], G.P. Leonardi et S. Rigot ont montré l'existence des *ensembles isopérimétriques*. Ils ont également montré que le bord  $\partial E$  d'un ensemble isopérimétrique  $E$  est Ahlfors-régulier et vérifie la *condition B* : pour toute boule  $B$  centrée sur  $\partial E$ , il existe des boules  $B_1$  et  $B_2$  contenues dans  $B$  de sorte que  $B_1 \subset E \cap B$ ,  $B_2 \subset B \setminus E$  et

$$\min\{\text{diam}B_1, \text{diam}B_2\} \geq \frac{1}{C} \text{diam}B.$$

Dans l'espace euclidien, un ensemble qui est Ahlfors-régulier et qui vérifie la condition B est uniformément rectifiable ([DJ90, DS93]). Nous ne savons pas ce qu'il en est dans le groupe de Heisenberg.

*Le problème géométrique du voyageur de commerce.*

Donnons maintenant un aperçu du problème du voyageur de commerce, dont la résolution par P. Jones a motivé le développement par G. David et S. Semmes de la théorie de l'uniforme rectifiabilité.

Soit  $E$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . À quelle condition  $E$  est-il contenu dans une courbe rectifiable de  $\mathbb{R}^n$  (c'est-à-dire une courbe de longueur finie) ?

Pour répondre à cette question, P. Jones ([Jon90]) a introduit les nombres  $\beta$ , qui mesurent en tout point et à toutes les échelles la qualité de l'approximation de  $E$  par des droites :

$$\beta_\infty(x, t, E) := \inf_{\mathfrak{L}} \sup_{y \in E \cap B(x, t)} \left( \frac{d_{Euc}(y, \mathfrak{L})}{t} \right),$$

où l'infimum est pris sur toutes les droites  $\mathfrak{L}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Il a alors obtenu qu'un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^2$  est contenu dans une courbe rectifiable si et seulement si une certaine quantité  $\beta_\infty(E)$  calculée au moyen des nombres  $\beta_\infty$  est finie. La longueur de la plus petite courbe rectifiable contenant  $E$  est alors contrôlée

par  $\beta_\infty(E)$  et le diamètre de  $E$ . En réalité, la motivation initiale de P. Jones pour introduire ces nombres  $\beta_\infty$  était de donner une preuve géométrique de la continuité sur  $L^2$  de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens. L'idée est d'approcher l'opérateur de Cauchy par l'opérateur de Hilbert, en approchant le graphe lipschitzien par des droites, le terme d'erreur étant contrôlé par les nombres  $\beta_\infty$ .

Le problème du voyageur de commerce a depuis connu de nombreuses contributions, par K. Okikiolu ([Oki92]), G. David et S. Semmes ([DS91]) et H. Pajot ([Paj96]) dans l'espace euclidien, par R. Schul ([Sch07b]) dans les espaces de Hilbert, par F. Ferrari, B. Franchi et H. Pajot ([FFP07]) dans le premier groupe de Heisenberg et par I. Hahlmaa ([Hah05]) et R. Schul [Sch07a]) dans les espaces métriques, en utilisant la courbure de Menger pour remplacer les nombres  $\beta$ .

Notons que le résultat de G. David et S. Semmes ([DS91]) a permis à P. Mattila, M. Melnikov et J. Verdera ([MMV96]) de caractériser complètement les sous-ensemble 1-Ahlfors-réguliers  $E$  pour lesquels l'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2(E)$ . Une autre application du problème du voyageur de commerce est un problème de segmentation d'image, plus précisément de minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah (voir [MS89, Dav05]).

### Présentation des principaux résultats de cette thèse

- Le théorème 2.3.1 établit un résultat de type Calderón-Stein abstrait pour les points du bord minimal de Martin d'un graphe. On introduit pour cela une notion géométrique de cône H-non-tangentiel pointant en un point du bord minimal de Martin et on impose certaines conditions de "bon comportement" de la marche aléatoire avec la géométrie du graphe. On montre alors que sous ces hypothèse et pour une fonction harmonique, les notions de convergence H-non-tangentielle, de bornitude H-non-tangentielle et de finitude de l'énergie H-non-tangentielle coïncident en presque tout point du bord minimal de Martin.
- Le théorème 2.3.5 est un résultat de type Fatou local pour les points du bord minimal de Martin d'un graphe. Il renforce l'un des critères de convergence H-non-tangentielle du théorème 2.3.1. Plus précisément, on montre que pour une fonction harmonique  $u$ , il y a équivalence en presque tout point du bord minimal de Martin entre la convergence de  $u$  de long des cônes H-non-tangentiels et la propriété pour  $u$  d'être minorée (ou majorée) sur les cônes H-non-tangentiels. En démontrant ce

théorème, on prouve également le théorème 2.6.1 qui fournit un théorème de Fatou ponctuel pour les points du bord minimal de Martin.

- Le théorème 2.7.12 est un théorème de Calderón-Stein pour les graphes hyperboliques au sens de Gromov. Il est obtenu comme application des théorèmes 2.3.1 et 2.3.5. On utilise intensivement l'hyperbolicité de l'espace pour montrer que les notions H-non-tangentiels associées aux cônes H-non-tangentiels et les notions non-tangentiels associées aux tubes autour de rayons géodésiques coïncident et que les hypothèses du théorème abstrait sont satisfaites. On retrouve bien, comme cas particulier, les résultats de F. Mouton et ceux de L. Atanasi et M.A. Picardello obtenus pour des arbres [Mou00, AP08, Mou10, Pic10].
- Le théorème 2.8.5 est un théorème de Fatou local pour les graphes de Diestel-Leader. Dans ce cadre non-hyperbolique, le théorème abstrait ne s'applique pas, mais les idées des preuves peuvent être adaptées.
- Les théorèmes 3.1.2, 3.1.4 et le corollaire 3.1.5 sont des analogues des théorèmes présentés précédemment dans le cas des variétés riemanniennes complètes, simplement connexe, hyperboliques au sens de Gromov, dont la courbure de Ricci est minorée et le rayon d'injectivité strictement positif. On démontre également le théorème 3.1.6 qui établit le critère de la densité de l'énergie. Ces résultats englobent ceux de [Mou95, Mou07].
- Le théorème 4.5.7 donne un exemple de mesure dans le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$  admettant toutes les mesures de Radon non-nulles comme mesure tangente. La construction suit une construction proposée par O'Neil [O'N95] dans  $\mathbb{R}^n$ .
- Les théorèmes 6.3.1 et 6.3.2 donnent, dans le premier groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^1$ , la version  $L^q$  du problème géométrique du voyageur de commerce pour les ensembles 1-Ahlfors-réguliers. Ce travail s'inspire de [Paj96] et [FFP07].

### Plan de la thèse

Cette thèse comporte deux parties et trois annexes. La première partie de cette thèse se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre de la partie un est consacré à une série de préliminaires, où l'on introduit les différentes hypothèses que nous serons amenés à



## INTRODUCTION

---

faire sur la géométrie des graphes et des variétés considérés. Le chapitre 2 contient les résultats obtenus pour les graphes, en particulier les théorèmes 2.3.1, 2.3.5, 2.7.12 et 2.8.5. Au chapitre 3, nous nous plaçons dans le cadre d'une variété riemannienne complète, simplement connexe, hyperbolique au sens de Gromov et dont la courbure de Ricci est minorée et le rayon d'injectivité strictement positif. Nous donnons alors une preuve des théorèmes 3.1.2, 3.1.4 et 3.1.6. Les idées des preuves sont proches de celles du cadre discret. Nous avons moins détaillé les démonstrations similaires. Les chapitres 2 et 3 peuvent tout de même être lus de manière indépendante.

La deuxième partie de la thèse comporte elle aussi trois chapitres. Le chapitre 4 comporte une introduction au groupe de Heisenberg. Nous y démontrons en particulier le théorème 4.5.7. Le chapitre 5 est consacré à une présentation de la théorie de la rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg. Dans le chapitre 6, nous nous intéressons au problème géométrique du voyageur de commerce. Après avoir décrit les travaux existants, nous démontrons les théorèmes 6.3.1 et 6.3.2.

Dans l'annexe A, nous reproduisons une preuve directe que nous avons donnée dans [Pet12] du lien entre convergence non-tangentielle et bornitude non-tangentielle dans le cas des graphes hyperboliques au sens de Gromov. L'annexe B redonne la preuve d'un lemme analytique (démontré par F. Mouton dans [Mou94]) utilisé au chapitre 3 et l'annexe C contient un rappel de quelques notions de théorie géométrique de la mesure.

---

Première partie

Comportement au bord des  
fonctions harmoniques

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans les deux chapitres suivants, nous considérerons des graphes et des variétés riemanniennes hyperboliques au sens de Gromov, presque étoilés, à géométrie bornée et coercifs. L'objet de ce chapitre est d'introduire toutes ces notions, de donner des exemples d'espaces les satisfaisant et de remarquer les liens existant entre celles-ci.

On dit que  $(X, d)$  est *propre* si les boules fermées sont compactes. Dans une espace métrique  $(X, d)$ , une *courbe géodésique* (resp. *rayon*, *segment*) est une courbe isométrique à  $\mathbb{R}$  (resp. à  $\mathbb{R}^+$ , à un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ ). L'espace métriques  $(X, d)$  est alors *géodésique* si tout couple de points de  $X$  peut être joint par un segment géodésique.

Si  $X$  est un graphe connexe, un *chemin* entre deux points  $x, y \in X$  est une suite  $[x = x_0, x_1, \dots, x_k = y]$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $x_{i-1}$  et  $x_i$  sont voisins. Le nombre  $k$  est la *longueur du chemin*. On définit alors la *distance combinatoire*  $d(x, y)$  sur le graphe comme la longueur du plus court chemin joignant  $x$  à  $y$ . Muni de sa distance combinatoire, le graphe  $(X, d)$  est discret, il n'est donc pas géodésique au sens précédent. On dira qu'un chemin fini  $[x_0, x_1, \dots, x_k]$  (resp. infini, bi-infini) est un *segment géodésique* (resp. *un rayon géodésique*, *une géodésique bi-infinie*) si  $d(x_i, x_j) = |i - j|$ . Avec ces définitions, un graphe connexe localement fini est *géodésique*, puisque tout couple de points de  $X$  peut être joint par un segment géodésique.

Lorsque nous parlerons d'espace géodésique, nous ferons référence aux espaces métriques continus géodésiques ou aux graphes localement finis.

## 1.1 Hyperbolicité

### 1.1.1 Espaces hyperboliques

Les espaces hyperboliques au sens de Gromov ont été introduits et largement étudiés par M. Gromov au début des années 1980 (voir par exemple [Gro81], [Gro87]). Ces espaces sont naturellement munis d'un bord géométrique. Il existe une vaste littérature sur les espaces hyperboliques au sens de Gromov ; nous pouvons par exemple citer [GDLH90], [BH99]. Nous introduisons ici seulement les notions qui seront utiles dans les prochains chapitres.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On définit le *produit de Gromov* de deux points  $x, y \in X$  par rapport à un troisième point  $o \in X$  par

$$(x, y)_o = \frac{1}{2}[d(o, x) + d(o, y) - d(x, y)].$$

Notons que  $0 \leq (x, y)_o \leq \min\{d(o, x), d(o, y)\}$  et que si  $o' \in X$  est un autre point base, alors pour tous  $x, y \in X$ ,

$$|(x, y)_o - (x, y)_{o'}| \leq d(o, o'). \quad (1.1.1)$$

Une des manière de définir l'hyperbolicité au sens de Gromov est d'utiliser le produit de Gromov :

**Définition 1.1.1.** *Un espace métrique  $(X, d)$  est dit hyperbolique au sens de Gromov si il existe un réel  $\delta \geq 0$  tel que pour tous  $x, y, z, o \in X$ ,*

$$(x, z)_o \geq \min\{(x, y)_o, (y, z)_o\} - \delta. \quad (1.1.2)$$

*Nous dirons que  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique si l'inégalité (1.1.2) est satisfaite pour tous  $x, y, z, o \in X$ .*

Nous appellerons parfois simplement espace métrique *hyperbolique* un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov.

Cette définition a un sens dans tout espace métrique. Lorsque l'espace  $X$  est géodésique et hyperbolique, le produit de Gromov  $(x, y)_o$  peut être vu comme une mesure grossière de la distance entre  $o$  et les segments géodésiques joignant  $x$  à  $y$  :

**Lemme 1.1.2.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique et  $\delta$ -hyperbolique. Pour tous  $x, y, o \in X$ , si  $\gamma$  est un segment géodésique joignant  $x$  à  $y$ , alors*

$$d(o, \gamma) - 2\delta \leq (x, y)_o \leq d(o, \gamma). \quad (1.1.3)$$

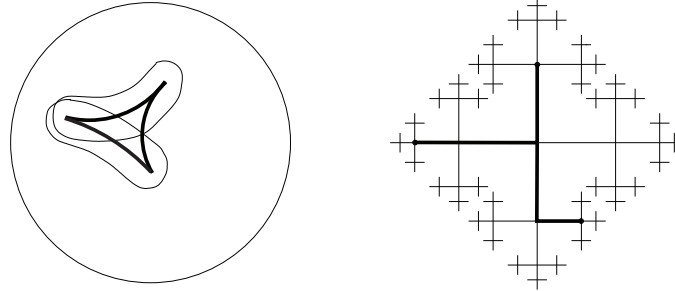


FIGURE 1.1.1 – Critère des triangles fins

Ce lemme permet de donner une interprétation géométrique très utile de la  $\delta$ -hyperbolicité, lorsque l'espace  $X$  est géodésique, en termes de triangles géodésiques (en fait il s'agit de la définition initiale de la  $\delta$ -hyperbolicité) : tout côté d'un triangle géodésique est dans le  $3\delta$ -voisinage de la réunion des deux autres côtés (voir figure 1.1.1). Montrons brièvement cette propriété. Considérons un triangle géodésique de sommets  $x, y, z \in X$ . Soit  $o \in X$  un point, par exemple sur le côté joignant  $x$  à  $z$ . Ainsi,  $(x, z)_o = 0$ . La  $\delta$ -hyperbolicité de  $X$  assure alors que  $\min\{(x, y)_o, (y, z)_o\} \leq \delta$ . Par le lemme précédent, cela signifie que la distance entre  $o$  et l'un des deux côtés opposés est majorée par  $3\delta$ .

**Exemple 1.1.3.**

- Un arbre est 0-hyperbolique ;
- Le demi-plan de Poincaré  $\{x_n > 0\}$  de  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique hyperbolique est  $(\log 3)$ -hyperbolique ;
- Une variété de Cartan-Hadamard de courbure majorée par  $C < 0$  est hyperbolique ;
- Les espaces  $Cat(\kappa)$ , avec  $\kappa < 0$  sont hyperboliques.

La figure 1.1.2 donne un exemple de graphe hyperbolique au sens de Gromov sur lequel nous avons dessiné un triangle géodésique. La figure 1.1.3 donne un exemple de graphe qui n'est pas hyperbolique au sens de Gromov sur lequel nous avons dessiné un triangle géodésique.

L'hyperbolicité est une propriété asymptotique de l'espace. Un espace métrique  $(X, d)$  reste hyperbolique si on remplace la métrique  $d$  par un métrique  $d'$  telle que  $|d - d'|$  est bornée sur  $X \times X$ , ou si on dilate la métrique. Cela amène naturellement la définition de quasi-isométrie.

**Définition 1.1.4.** Soient  $X, Y$  deux espaces métriques et  $\lambda \geq 1, c \geq 0$  deux constantes. On dit qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  est un plongement  $(\lambda, c)$ -

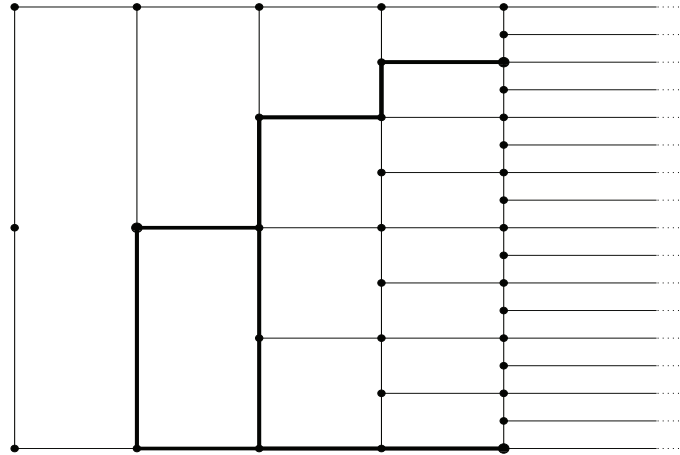


FIGURE 1.1.2 – Un graphe hyperbolique et un triangle géodésique

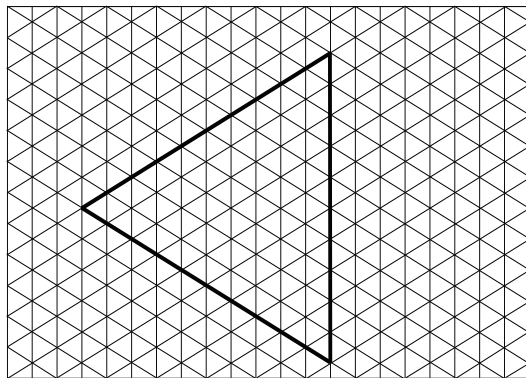


FIGURE 1.1.3 – Un graphe non-hyperbolique

quasi-isométrique si pour tous  $x, x' \in X$ , on a

$$\lambda^{-1}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c. \quad (1.1.4)$$

On dit alors que  $f$  est une  $(\lambda, c)$ -quasi-isométrie s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  satisfaisant (1.1.4) et telle que pour tout  $x \in X$ ,  $d_X(g(f(x)), x) \leq c$ .

Une  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique est un plongement  $(\lambda, c)$ -quasi-isométrique défini sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Un espace est  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique si deux points quelconques peuvent toujours être joints par un segment  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique.

**Remarque 1.1.5.** *Un plongement quasi-isométrique n'est pas nécessairement injectif et ni une quasi-isométrie.*

Dans la catégorie des espaces métriques géodésiques propres, l'hyperbolicité est invariante par quasi-isométrie (voir [Gro87]). En particulier, comme les graphes de Cayley d'un groupe finiment engendré associés à deux systèmes générateurs finis sont quasi-isométriques, si l'un des deux graphes est hyperbolique, l'autre l'est aussi. On dit alors que le groupe est hyperbolique.

### 1.1.2 Espaces quasi-réglés

La plupart des propriétés des espaces hyperboliques au sens de Gromov que l'on trouve dans la littérature sont établies pour des espaces géodésiques et propres. Une bonne référence lorsque les espaces ne sont pas géodésiques est [Väi05]. Lorsque les espaces considérés ne sont plus géodésiques et propres, l'hyperbolicité n'est plus nécessairement préservée par quasi-isométrie. Nous munirons par exemple dans la section 3.6.1 un graphe de la métrique de Green, ce qui fournit un espace métrique qui n'est en général pas géodésique. Il est alors naturel de se demander quand est-ce qu'un espace métrique (non géodésique) quasi-isométrique à un espace métrique géodésique hyperbolique est lui-même hyperbolique? Pour répondre à cette question, S. Blachère, P. Haïssinsky et P. Mathieu ([BHM11]) ont introduit la notion de *structure quasi-réglée*, une propriété d'alignement des points le long des quasi-géodésiques.

Commençons par énoncer une propriété essentielle des espaces hyperboliques :

**Lemme 1.1.6** ([Gro87],[GDLH90]). *Dans un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique, pour toute  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique  $\tilde{\gamma}$ , pour toute géodésique  $\gamma$  de mêmes extrémités, on a  $d_H(\tilde{\gamma}, \gamma) \leq K$ , où  $d_H$  est la distance de Hausdorff (voir annexe C pour un rappel sur  $d_H$ ) et  $K$  est une constante dépendant seulement de  $\delta, \lambda$  et  $c$ .*



**Définition 1.1.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une  $(\lambda, c, \tau)$ -quasi-règle est une  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique  $\gamma : I \rightarrow X$  telle que, pour tous  $s < t < u$  dans  $I$ ,

$$(\gamma(s), \gamma(u))_{\gamma(t)} \leq \tau.$$

Une structure quasi-réglée  $\mathcal{G}$  sur  $X$  est un ensemble de  $(\lambda, c, \tau)$ -quasi-règles (où  $\lambda, c$  et  $\tau$  sont des constantes) tel que deux points quelconques de  $X$  peuvent toujours être joints par un élément de  $\mathcal{G}$ .

L'espace métrique  $X$  est dit quasi-réglé s'il existe des constantes  $\lambda, c$  et  $\tau$  telles que  $X$  est  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique et toute  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique est une  $(\lambda, c, \tau)$ -quasi-règle.

**Remarque 1.1.8.** Une géodésique est une  $(1, 0, 0)$ -quasi-règle et donc un espace métrique géodésique est quasi-réglé.

Nous terminons cette sous-section en énonçant un théorème de S. Blachère, P. Haïssinsky, P. Mathieu [BHM11] qui justifie la définition des espaces quasi-réglés et qui nous servira dans la section 3.6.1.

**Théorème 1.1.9** ([BHM11], théorème A.1). Soient  $X$  un espace métrique hyperbolique géodésique,  $Y$  un espace métrique et  $\phi : X \rightarrow Y$  une quasi-isométrie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l'espace  $Y$  est hyperbolique ;
2. l'espace  $Y$  est quasi-réglé.

S. Blachère, P. Haïssinsky et P. Mathieu ont donné, pour tout groupe hyperbolique, un exemple de distance invariante à gauche et quasi-isométrique à la distance combinatoire (ou distance des mots) mais qui n'est pas hyperbolique.

### 1.1.3 Bord géométrique

Supposons désormais que l'espace métrique  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique et fixons un point base  $o \in X$ . On dit qu'une suite  $(x_i)_i$  dans  $X$  tend vers l'infini si

$$\lim_{i, j \rightarrow +\infty} (x_i, x_j)_o = +\infty.$$

D'après l'inégalité (1.1.1), cette condition est indépendante du choix du point base. On dit que deux suites qui tendent vers l'infini  $(x_i)_i$  et  $(y_j)_j$  sont équivalentes si  $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i, y_j)_o = +\infty$ . Cette relation est transitive par (1.1.2) et définit donc une relation d'équivalence. Le bord hyperbolique  $\partial X$  de  $X$ , aussi

appelé *bord géométrique* ou *bord à l'infini* est alors l'ensemble des classes d'équivalence des suites qui tendent vers l'infini :

$$\partial X := \{[(x_i)_i] \mid (x_i)_i \in X^{\mathbb{N}} \text{ tend vers l'infini}\}.$$

Dans le cas où  $X$  est géodésique et propre, on peut définir de manière équivalente le bord hyperbolique comme l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques issus de  $o$  pour la relation d'asymptoticité : deux rayons géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  issus de  $o$  sont *asymptotes* si la distance de Hausdorff entre leurs images est finie. Notons que la relation d'asymptoticité est une relation d'équivalence sur les rayons géodésiques issus de  $o$ .

Pour munir  $\overline{X} := X \cup \partial X$  d'une topologie appropriée, on étend le produit de Gromov à  $\overline{X}$ . Prenons la convention suivante : pour un point  $x \in X$ , une suite  $(x_i)_i \in X^{\mathbb{N}}$  est dans la classe de  $x$  si  $x_i \rightarrow x$ . On pose alors

$$(x, y)_o = \sup \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i, y_j)_o$$

où le suprémum est pris sur toutes les suites  $(x_i)_i$  dans la classe de  $x \in \overline{X}$  et  $(y_j)_j$  dans la classe de  $y \in \overline{X}$ . L'inégalité

$$(x, y)_o \geq \min\{(x, z)_o, (z, y)_o\} - 2\delta \tag{1.1.5}$$

est alors satisfaite pour  $x, y, z \in \overline{X}$ .

Montrons l'inégalité (1.1.5). Choisissons, pour  $\varepsilon > 0$ , des suites  $x_i \rightarrow x$ ,  $y_i \rightarrow y$ ,  $z_i \rightarrow z$  et  $z'_i \rightarrow z$  telles que  $\liminf_{i,j} (x_i, z_j)_o \geq (x, z)_o - \varepsilon$  et  $\liminf_{i,j} (z'_i, y_j)_o \geq (z, y)_o - \varepsilon$ . Remarquons que  $\liminf_{i,j} (z_j, z'_i)_o = +\infty$ . En appliquant deux fois l'inégalité d'hyperbolicité (1.1.2), on obtient  $(x_i, y_j)_o \geq \min\{(x_i, z_j)_o, (z_j, z'_i)_o, (z'_i, y_j)_o\} - 2\delta$ , ce qui donne en prenant la  $\liminf_{i,j}$ ,

$$(x, y)_o \geq \liminf_{i,j} (x_i, y_j)_o \geq \{(x, z)_o, (z, y)_o\} - 2\delta - 2\varepsilon.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient (1.1.5).

Dans le cas géodésique et propre, pour tout  $x \in X$ ,  $\xi \in \partial X$  et tout rayon géodésique  $\gamma$  de  $o$  à  $\xi$ ,

$$d(x, \gamma) - 2\delta \leq (o, \xi)_x \leq d(x, \gamma) + 2\delta. \tag{1.1.6}$$

En effet, par (1.1.3), on a pour tout  $i$ ,

$$d(x, \gamma([0, i])) - 2\delta \leq (o, \gamma(i))_x \leq d(x, \gamma([0, i])).$$

Puisque  $d(x, \gamma(i)) \rightarrow \infty$ , pour  $i$  suffisamment grand,  $d(x, \gamma([0, i])) = d(x, \gamma)$  et donc pour  $i$  suffisamment grand,

$$d(x, \gamma) - 2\delta \leq (o, \gamma(i))_x \leq d(x, \gamma).$$

En combinant cette inégalité avec le fait que si  $(\xi_i)_i$  est une suite telle que  $\xi_i \rightarrow \xi$ , alors  $(o, \xi)_x - 2\delta \leq \liminf_i (o, \xi_i)_x \leq (o, \xi)_x$  (voir [BH99]), on obtient (1.1.6).

Pour un réel  $r > 0$  et un point  $\xi \in \partial X$ , notons  $V_r(\xi) = \{y \in \overline{X} \mid (\xi, y)_o \geq r\}$ . On munit alors  $\overline{X}$  de l'unique topologie contenant les ensembles ouverts de  $X$  et admettant les ensembles  $V_r(\xi)$  avec  $r \in \mathbb{Q}^+$  comme base de voisinages en tout  $\xi \in \partial X$ . Cela fournit une compactification  $\overline{X}$  de  $X$  (*i.e.* un espace compact avec une topologie à base dénombrable telle que  $X$  est ouvert et dense dans  $\overline{X}$ , voir [Woe00]). La compactification  $\overline{X}$  peut aussi être obtenue comme la complétion de  $X$  pour un bon choix de métrique sur  $X$  ([Woe00]). Notons que tout espace métrique compact, doublant et uniformément parfait peut être vu comme le bord géométrique d'un graphe hyperbolique (voir [BP03, Ele97]). Rappelons qu'un espace métrique  $(X, d)$  est *doublant* s'il porte une *mesure doublante*, c'est-à-dire une mesure borélienne  $\mu$  telle que pour toute boule  $B(x, r)$ ,  $0 < \mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)) < +\infty$  avec  $C$  ne dépendant que de  $\mu$  et de  $d$ . L'espace métrique  $(X, d)$  est *uniformément parfait* s'il existe  $C > 1$  telle que pour toute boule  $B(x, r)$  avec  $r \leq \text{diam}(X)$  on ait  $B(x, r) \setminus B(x, r/C) \neq \emptyset$ .

Nous terminons cette section en introduisant une métrique (visuelle) sur  $\partial X$  qui nous permettra dans la section 2.4 d'énoncer un théorème de Cao [Cao00]. La construction suit [GDLH90]. Pour un réel  $\varepsilon > 0$ , on considère la mesure suivante de séparation des points de  $\partial X$  :

$$\rho_\varepsilon(\xi, \xi') := e^{-\varepsilon(\xi, \xi')_o}.$$

L'application  $\rho_\varepsilon$  n'est pas une distance sur  $\partial X$ , puisque l'inégalité triangulaire n'est en générale pas vérifiée. Pour construire une véritable métrique, il suffit de poser

$$d_\varepsilon(\xi, \xi') := \inf \sum_{i=1}^n \rho_\varepsilon(\xi_{i-1}, \xi_i),$$

où l'infimum est pris sur toutes les chaînes  $(\xi = \xi_0, \dots, \xi_n = \xi')$ .

En réalité, la distance utilisée par Cao n'est pas  $d_\varepsilon$ , mais une distance équivalente lorsque  $X$  est géodésique et propre. Elle est définie de cette manière : si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux rayons géodésiques issus de  $o$ , on définit une *métrique de Gromov* par

$$d_{o, \varepsilon}(\gamma_1, \gamma_2) := \liminf_{t \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon[t - \frac{1}{2}d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))]}.$$

Il est connu que si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, l'application  $d_{o, \varepsilon}$  est une véritable distance sur  $\partial X$ .

## 1.2 Quasi-étoiles et quasi-pôles

Pour des raisons techniques, nous supposerons parfois que le graphe (resp. la variété) considéré(e) est quasi-étoilé(e).

**Définition 1.2.1.** *Un graphe (ou une variété complète)  $X$  est dit quasi-étoilé par rapport à  $o \in X$  s'il existe une constante  $K > 0$  telle que pour tout  $x \in X$ , il existe un rayon géodésique  $\gamma$  d'origine  $o$  tel que  $d(x, \gamma) \leq K$ .*

Notons que si  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique et  $K$ -quasi-étoilé par rapport à  $o \in X$ , alors  $X$  est  $K'$ -quasi-étoilé par rapport à  $o'$ , avec  $K' = K'(d(o, o'), \delta, K)$ . L'hypothèse "quasi-étoilé" a été utilisée entre autres par A. Ancona ([Anc88], proposition 7.3) et par M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela ([BHK01]).

**Exemple 1.2.2.** *Les variétés et les graphes géodésiquement complets (c'est-à-dire tels que pour deux points quelconques de cet espace il existe une géodésique bi-infinie qui passe par ces deux points) sont quasi-étoilés.*

**Exemple 1.2.3.** *La figure 1.2.1 donne un exemple de graphe qui n'est pas quasi-étoilé.*

**Exemple 1.2.4.** *Les graphes de Cayley des groupes hyperboliques sont quasi-étoilés.*

Montrons cette dernière affirmation. Soit  $X$  un graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique et notons  $\delta$  une constante d'hyperbolicité de  $X$ . Soit  $x \in X$  et choisissons deux points arbitraires  $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$ , ainsi qu'une géodésique  $\gamma$  les joignant (une telle géodésique existe par visibilité ([GDLH90])). Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que cette géodésique contient  $x$ . Considérons le triangle géodésique formé par  $\gamma$ , et des rayons géodésiques joignant  $o$  à  $\xi_i, i = 1, 2$ . Comme les triangles géodésiques sont  $3\delta$ -fins,  $x$  est à distance au plus  $3\delta$  de l'un des deux rayons, ce qui montre que  $X$  est  $3\delta$ -étoilé.

Un graphe (ou une variété riemannienne complète)  $X$  admet un *quasi-pôle* s'il existe un sous-ensemble compact  $\Omega \subset X$  et  $K > 0$  tels que tout point de  $X$  appartienne au  $K$ -voisinage d'un rayon géodésique d'origine dans  $\Omega$ . Cette propriété est évidemment vérifiée si  $X$  est quasi-étoilé. Rappelons qu'une variété Riemannienne  $M$  a un *pôle*  $p$  si l'application exponentielle  $\exp_p : T_p(M) \rightarrow M$  est un difféomorphisme. Toute variété admettant des pôles admet donc des quasi-pôles. D'autres exemples d'espaces admettant des quasi-pôles sont donnés par les variétés complètes, non-compactes de courbure positive ([CG72]).

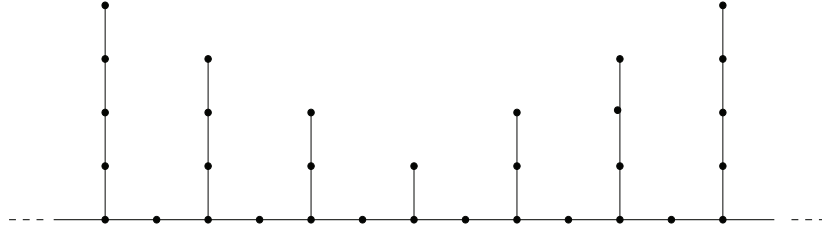


FIGURE 1.2.1 – Un graphe hyperbolique qui n'est pas quasi-étoilé

### 1.3 Géométrie bornée

**Définition 1.3.1.**

- Une variété riemannienne  $M^d$  est à géométrie bornée s'il existe  $r_0 > 0$ ,  $\lambda > 0$  et, pour tout  $m \in M$ , un difféomorphisme  $F : B(m, r_0) \rightarrow U$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , tels que pour tous  $x, y \in B(m, r_0)$ ,

$$\lambda^{-1}d(x, y) \leq |F(x) - F(y)| \leq \lambda d(x, y).$$

- Un graphe  $X$  est à géométrie bornée (pour la distance combinatoire) s'il existe une constante  $\mu$  telle que tout sommet a au plus  $\mu$  voisins.

**Remarque 1.3.2.** Si  $M^d$  est à courbure de Ricci minorée et a un rayon d'injectivité strictement positif, alors  $M^d$  est à géométrie bornée ([AC92]).

Supposons que  $M$  soit une variété riemannienne à géométrie bornée. On appellera *approximation discrète* de  $M$  tout graphe  $X$  plongé dans  $M$  tel qu'il existe  $C > 0$  vérifiant  $C^{-1}d_M(x, y) \leq d_X(x, y) \leq Cd_M(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$  et  $\sup_{x \in M} d(x, X) \leq C$ . Un tel graphe est à géométrie bornée. Pour une variété à géométrie bornée  $M$ , il existe toujours une approximation discrète. Il suffit de choisir une partie maximale  $X \subset M$  telle que  $d_M(x, y) \geq 1$  pour tous  $x \neq y \in X$  et de munir  $X$  de la relation  $x \sim y$  si et seulement si  $d_M(x, y) \leq 3$ . Inversement, on peut voir que tout graphe à géométrie bornée est approximation discrète d'une certaine variété riemannienne à géométrie bornée ([Anc90]).

### 1.4 Coercivité

Pour un sous-ensemble  $A$  non-vide fini de sommets d'un graphe infini  $X$ , notons  $\text{bord}(A) := \{x \in X \mid d(x, A) = 1\}$  et  $|A|$  le cardinal de  $A$ . La *constante isopérimétrique de Cheeger* de  $X$  est alors définie par

$$h(X) := \inf_A \frac{|\text{bord}(A)|}{|A|},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des sous-ensembles non-vides finis de sommets de  $X$ .

**Proposition 1.4.1** ([Anc88]). *Pour un graphe  $X$  à géométrie bornée, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe  $C = C(X) > 0$  telle que*

$$\sum_{x \in X} |u(x)|^2 \leq C \sum_{\substack{x, y \in X \\ d(x, y) \leq 1}} |u(x) - u(y)|^2$$

*pour toute fonction  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  à support fini (inégalité de Poincaré) ;*

2.  *$h(X) > 0$  (inégalité isopérimétrique).*

**Définition 1.4.2.** *Un graphe  $X$  est coercif s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes de la proposition 1.4.1.*

À nouveau, de nombreux exemples proviennent des groupes :

**Exemple 1.4.3.** *Le graphe de Cayley d'un groupe de type fini non-moyennable associé à un système générateur fini est coercif ([Anc88]).*

**Exemple 1.4.4.** *Un arbre dont chaque sommet admet au moins trois voisins est coercif ([Anc90]).*

De manière analogue, pour une variété riemannienne complète non-compacte  $M^d$ , sa constante isopérimétrique de Cheeger est définie par

$$h(M^d) := \inf_{\Omega} \frac{Vol_{d-1}(\text{bord}(\Omega))}{Vol_d(\Omega)},$$

où l'infimum est pris sur les domaines compacts  $\Omega$  à bord rectifiable de  $M^d$ . Notons  $C_0^\infty(M)$  l'ensemble des fonctions  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  infiniment différentiables et à support compact. L'analogie de la proposition 1.4.1 pour les variétés est la proposition suivante :

**Proposition 1.4.5** ([Anc90]). *Pour une variété riemannienne  $M$  à géométrie bornée, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe  $C = C(M) > 0$  telle que  $\int_M \phi^2 d\sigma \leq C \int_M |\nabla \phi|^2 d\sigma$ , pour tout  $\phi \in C_0^\infty(M)$  ;*
2. *Il existe  $C = C(M) > 0$  telle que  $\int_M \phi d\sigma \leq C \int_M |\nabla \phi| d\sigma$ , pour tout  $\phi \in C_0^\infty(M)$  ;*
3.  *$h(M) > 0$ .*

**Définition 1.4.6.** *Une variété  $M$  est coercive si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes de la proposition 1.4.5.*

Si  $M$  est une variété riemannienne complète à géométrie bornée et  $X$  une approximation discrète de  $M$ , alors  $M$  est coercive si et seulement si  $X$  est coercif. En fait, si  $M$  est complète à géométrie bornée et quasi-isométrique à un graphe  $X$  à géométrie bornée, alors  $M$  est coercive si et seulement si  $X$  est coercif.

Il existe des définitions spectrales de la coercivité. Nous reparlerons de ces définitions pour les graphes lorsque nous aurons introduit la notion de fonction de transition admissible, au chapitre suivant. Pour les variétés complètes non-compactes, un théorème de Cheeger ([Che70]) assure que la première valeur propre du Laplacien de Beltrami vérifie

$$\lambda_1(M) = \lambda_1(\Delta_M) \geq \frac{|h(M)|^2}{4}.$$

Si la variété est à géométrie bornée, alors  $h(M) > 0$  si et seulement si  $\lambda_1(M) > 0$  ([Bus82]).

Nous allons largement utiliser les résultats d'A. Ancona ([Anc88], [Anc90]) pour des graphes et des variétés hyperboliques coercifs. Il est donc intéressant de comprendre sous quelles hypothèses la coercivité est automatique et s'il existe beaucoup de graphes et de variétés hyperboliques coercifs. Notons tout d'abord que pour des graphes et des variétés générales, l'hyperbolicité n'implique pas la positivité de la constante isopérimétrique de Cheeger. Par exemple,  $M = \mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$  est hyperbolique (et quasi-isométrique à  $\mathbb{R}$ ) mais  $h(M) = 0$ . En revanche, un groupe hyperbolique qui n'est pas quasi-isométrique à  $\mathbb{Z}$  est coercif ([Anc90]). Nous dirons qu'une action d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique est *géométrique* si

1. chaque élément agit par isométrie ;
2. l'action est proprement discontinue, *i.e.* pour tout couple  $K$  et  $L$  de sous-ensembles compacts, le nombre d'éléments du groupe  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma(K) \cap L \neq \emptyset$  est fini ;
3. l'action est cocompacte.

Rappelons le lemme de Svarc-Milnor ([GDLH90]) :

**Lemme 1.4.7.** *Soient  $X$  un espace métrique géodésique propre et  $\Gamma$  un groupe qui agit géométriquement sur  $X$ . Alors  $\Gamma$  est finiment engendré et  $X$  est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini de  $\Gamma$ .*

Ainsi, une variété hyperbolique à géométrie bornée admettant une action géométrique par un groupe qui n'est pas quasi-isométrique à  $\mathbb{Z}$  est coercive. Mais les espaces que nous considérerons n'admettront pas nécessairement de telles actions. En dehors des exemples triviaux quasi-isométriques à  $\mathbb{Z}$ , il existe des espaces hyperboliques non coercifs. Par exemple, si  $X$  est une surface complète de courbure constante  $-1$ , d'aire finie et avec trois cusps, alors  $\partial X$  est constitué de trois points et  $h(X) = 0$ . J. Cao ([Cao00]) a démontré le résultat suivant :

**Théorème 1.4.8.** *Soit  $X$  une variété complète non-compacte (ou un graphe) qui admet un quasi-pôle et est à géométrie bornée. Supposons que  $X$  est hyperbolique et qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que les diamètres des composantes connexes de  $\partial X$  sont minorés par  $c$  (par exemple pour la métrique  $d_\epsilon$  introduite section 1). Alors  $X$  est de constante isopérimétrique de Cheeger strictement positive.*

Le théorème est faux si on retire l'une des hypothèses, en particulier celle sur les diamètres, comme le montre l'exemple précédent le théorème. Nous terminons cette section en citant une proposition de J. Cao qui montre qu'on peut construire des exemples de variétés non-compactes hyperboliques avec une topologie à l'infini prescrite. On peut donc construire de nombreux exemples de variétés satisfaisants les hypothèses du théorème 1.4.8.

**Proposition 1.4.9.** *Soit  $(N, g)$  une variété compacte à bord  $\text{bord}(N)$  et soit  $M = \text{int}(N)$  l'intérieur de  $N$ . Alors  $M$  admet une métrique riemannienne complète  $g^*$  telle que  $(M, g^*)$  est hyperbolique, admet un quasi-pôle et  $\partial M = \text{bord}(N)$ .*



---

# Chapitre 2

## Cadre discret

Tout au long de ce chapitre, nous noterons  $X$  un graphe à géométrie bornée muni de la métrique combinatoire  $d$ . Dans un premier temps, nous munissons le graphe  $X$  d'une marche aléatoire "adaptée" à la géométrie du graphe et nous définissons les fonctions harmoniques et la fonction de Green. La section 2.2 est consacrée à une rapide présentation de certains résultats connus de la théorie de Martin, avec en particulier un paragraphe sur la méthode de conditionnement des h-processus de Doob. Dans la section 2.3, nous introduisons la notion de cône H-non-tangentiel, un analogue pour le bord minimal de Martin des cônes non-tangentiels définis habituellement pour un bord géométrique, comme par exemple les cônes non-tangentiels dans le disque unité de  $\mathbb{R}^2$  utilisés par P. Fatou ([Fat06]) ou les tubes non-tangentiels autour de rayons géodésiques dans le cadre hyperbolique (voir par exemple [Mou94]). Une fois ces cônes définis, nous pouvons énoncer les théorèmes abstraits (théorèmes 2.3.1 et 2.3.5) analogues au théorème de A.P. Calderón et E.M. Stein ([Cal50a], [Ste61]) pour le bord minimal de Martin. La section 2.4 est dédiée à la preuve d'un théorème de "Calderón-Stein stochastique" qui est fondamental (section 2.5) pour la démonstration du théorème 2.3.1. La preuve du théorème 2.3.5 fait l'objet de la section 2.6. Nous appliquons ensuite (section 2.7) les théorèmes 2.3.1 et 2.3.5 au cadre géométrique naturel des graphes hyperboliques au sens de Gromov. Dans le cadre hyperbolique, les cônes H-non-tangentiels "coïncident" avec des tubes autour des rayons géodésiques et nous retrouvons les notions non-tangentielles habituelles. Nous introduisons également dans cette section la métrique de Green et donnons une preuve due à S. Blachère, P. Haïssinski et P. Mathieu ([BHM11]) des identifications entre les bords de Martin et le bord géométrique d'un graphe hyperbolique. Nous nous intéressons dans la section 2.8 aux graphes de Diestel-Leader. Bien que le théorème 2.3.1 ne s'applique pas, nous pouvons utiliser les idées de preuve du théorème 2.3.5 pour obtenir un résultat partiel ayant pour corollaire un

théorème de Fatou.

## 2.1 Marche aléatoire sur un graphe, fonctions harmoniques

**Définition 2.1.1.** Une fonction (de transition)  $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est dite markovienne (resp. sous-markovienne) si pour tout  $x \in X$ ,  $\sum_{y \in X} p(x, y) = 1$  (resp.  $\sum_{y \in X} p(x, y) \leq 1$ ) et admissible au sens d'Ancona ([Anc88]) si les assertions suivantes sont satisfaites :

1.  $\exists \ell \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall x, y \in X, d(x, y) \leq 1 \Rightarrow \sum_{1 \leq j \leq \ell} p_j(x, y) \geq 1/\ell$  ;
2.  $\exists m_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall x, y \in X, p(x, y) > 0 \Rightarrow d(x, y) \leq m_1$ .

Notons que  $p_j(x, y)$  est obtenu par la formule de récurrence  $p_j(x, y) = \sum_{z \in X} p_{j-1}(x, z)p(z, y)$  où  $p_1(x, y) = p(x, y)$ . On trouvera dans la littérature le terme d'*uniforme irréductibilité* pour la première condition de la définition de l'admissibilité, et de *rang borné* pour la seconde (voir par exemple [Woe00]). Rappelons que  $p$  est *irréductible* si pour tous  $x, y \in X$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $p_n(x, y) > 0$ . Nous ne considérerons que des fonctions de transition  $p$  irréductibles. Excepté à la sous-section 2.7.1, les fonctions de transition seront même admissibles. Cette condition d'admissibilité assure que  $p$  est "adaptée" à la géométrie du graphe  $X$  (on trouve parfois dans la littérature le terme *fonction de transition adaptée*). Si  $p$  est admissible, le noyau adjoint défini par  $p^*(x, y) = p(y, x)$  est aussi admissible, ainsi que le noyau  $p + tI, t \geq 0$  ([Anc88]). Ces noyaux ne sont en revanche pas nécessairement markoviens si  $p$  l'est. Nous supposerons généralement que  $p^*$  est sous-markovien. On dit enfin que le noyau  $p$  est *symétrique* si  $p^* = p$ .

**Exemple 2.1.2.** La marche au plus proche voisin sur un graphe à géométrie bornée provient d'une fonction de transition admissible.

**Exemple 2.1.3.** On peut toujours munir une approximation discrète d'une variété riemannienne à géométrie bornée d'une fonction de transition symétrique markovienne et admissible (voir [Anc90]).

Nous ne faisons pour le moment aucune hypothèse sur  $p$ . La *marche aléatoire sur  $X$  associée à  $p$*  est la chaîne de Markov d'espace d'états  $X$  et de probabilités de transition  $p(x, y), x, y \in X$ . Elle est donnée par une famille de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $X$  où  $X_n$  est la position au temps  $n$ . Nous pouvons choisir l'espace des chemins infinis  $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{N}, X)$  comme espace probabilisé ( $X_n(\omega) = \omega(n)$ ), équipé de la tribu produit dénombrable de  $\mathcal{P}(X)$ . Notons alors  $(\mathbb{P}_z)_{z \in X}$  la loi de cette marche aléatoire,  $\mathbb{P}_z$  étant la

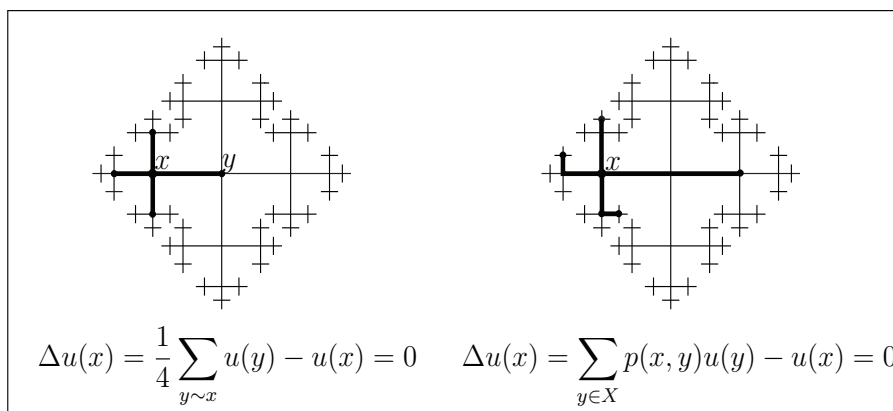


FIGURE 2.1.1 – Deux fonctions harmoniques associées à deux fonctions de transitions sur un arbre.

probabilité obtenue quand la marche part de  $z$ . Notons enfin  $\mathcal{F}_n$  la tribu engendrée par  $X_i, i \leq n$ .

Pour un temps d'arrêt presque sûrement fini  $T$ , notons  $\Theta^T$  l'opérateur de translation :  $\Theta^T(\omega) = \omega(\cdot + T(\omega))$ . La propriété forte de Markov affirme que pour une variable aléatoire positive  $F$  sur  $\Omega$  et un temps d'arrêt presque sûrement fini  $T$ , on a l'égalité :

$$\mathbb{E}_z [F \circ \Theta^T | \mathcal{F}_T] = u_F(X_T) \text{ où } u_F(y) = \mathbb{E}_y[F].$$

Cette propriété signifie que tout ce qui se passe après un temps d'arrêt  $T$  dépend uniquement de la situation au temps  $T$ .

Nous allons définir les fonctions harmoniques comme les fonctions satisfaisant la propriété de la moyenne. Pour cela, commençons par introduire un opérateur de Laplace  $\Delta$  qui agit sur les fonctions  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\Delta u(x) := \mathbb{E}_x[u(X_1)] - u(x) = \left( \sum_{y \in X} p(x, y) u(y) \right) - u(x).$$

Une fonction  $u$  sera alors dite *harmonique* si  $\Delta u = 0$  et *surharmonique* si  $\Delta u \leq 0$ .

La *fonction de Green*  $G(x, y)$  associée à la marche aléatoire est la fonction sur  $X \times X$  définie comme l'espérance du temps de séjour en  $y$  lorsque la marche aléatoire part de  $x$  :

$$G(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{E}_x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}} \right].$$

Supposons à partir de maintenant  $p$  irréductible. Si la marche aléatoire partant de  $x$  revient presque sûrement une infinité de fois en  $x$ , on dit que  $x$  est *récurrent* et  $G(x, x) = \infty$ . Dans le cas contraire,  $x$  est *transient* et  $G(x, x) < \infty$ . Puisque nous supposons  $p$  irréductible, tous les points sont de même nature : si un point est récurrent, tous les points le sont et l'équation (2.1.1) ci-dessous montre que  $G$  ne prend que des valeurs infinies. On parle alors de marche aléatoire *récurrente*. Dans le cas contraire, tous les points sont transients et la fonction de Green  $G$  n'a que des valeurs finies : on parle de marche aléatoire *transiente*. Dans le cas d'une marche transiente, la propriété de Markov implique que la fonction  $G(\cdot, y)$  est harmonique sur  $X \setminus \{y\}$  et surharmonique sur  $X$ . Définissons également la fonction  $F(x, y)$ , probabilité partant de  $x$  d'atteindre  $y$ . Formellement,  $F(x, y) = \sum_{n \geq 0} q_n(x, y)$  où  $q_n(x, y)$  est la probabilité, partant de  $x$ , d'atteindre pour la première fois  $y$  au temps  $n$ . Remarquons que puisque  $p$  est irréductible, la fonction  $F(x, y)$  ne s'annule pas. La propriété forte de Markov permet d'obtenir l'égalité :

$$G(x, y) = F(x, y)G(y, y). \quad (2.1.1)$$

Nous aurons besoin, dans l'énoncé du théorème 2.3.1 de faire deux hypothèses classiques sur le comportement de la fonction de Green  $G$  :

1. Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in X$ ,  $G(x, x) \leq C$  ;
2. La fonction de Green s'annule à l'infini, c'est-à-dire pour tout  $x \in X$ ,  $G(x, y) \rightarrow 0$  lorsque  $d(x, y) \rightarrow \infty$ .

Nous allons voir (proposition 2.1.5) que ces conditions sont immédiatement satisfaites dans de nombreuses situations. Notons  $G^t$  le noyau de Green associé à la fonction de transition admissible  $p + tI$ . Dans [Anc88], Ancona a introduit la condition suivante, parfois appelée *coercivité faible*, qui peut s'interpréter comme une condition de transience forte :

$$\text{il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } G^\varepsilon \text{ est fini.} \quad (*)$$

Cette condition implique en particulier que la marche aléatoire est transiente et que pour tout  $x \in X$ ,  $1 \leq G(x, x) \leq (2\varepsilon)^{-1}$ . Si la fonction de transition markovienne admissible est symétrique, alors la condition (\*) est équivalente à la coercivité du graphe  $X$  (voir la proposition 2.1.4 et la définition 1.4.2 pour un rappel sur la coercivité d'un graphe). Dans le cas où  $X$  est le graphe de Cayley d'un groupe de type fini non-moyennable associé à un système générateur symétrique fini et si la fonction de transition  $p$  provient d'une mesure de probabilité  $\nu$  dont le support engendre  $G$  comme semi-groupe ( $p_\nu(x, y) = \nu(x^{-1}y)$ ), la condition (\*) est vérifiée et le noyau de Green s'annule à l'infini.

La fonction de transition  $p$  agit comme un opérateur linéaire sur les fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  par  $p(f)(x) = \sum_{y \in X} p(x, y)f(y)$ . Lorsque  $p$  est symétrique, sous-markovienne,  $p$  définit un opérateur sur  $\ell^2(X)$  de norme  $\|p\|_2 \leq 1$ . Si de plus  $p$  est admissible et  $X$  coercif, alors  $\|p\|_2 < 1$ . Les propriétés énoncées ci-dessus sont résumées par la proposition suivante :

**Proposition 2.1.4** ([Anc88], p.9). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le graphe  $X$  est coercif;*
2. *Pour toute fonction de transition symétrique, sous-markovienne et admissible  $p$  sur  $X$ ,  $\|p\|_2 < 1$ ;*
3. *Il existe une fonction de transition symétrique, markovienne et admissible satisfaisant la condition (\*).*

Lorsque la fonction de transition  $p$  n'est pas supposée symétrique, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.1.5** (Ancona [Anc90]). *Si  $X$  est coercif, tout noyau admissible  $p$  sur  $X$  tel que  $p$  et  $p^*$  sont sous-markoviennes satisfait la condition (\*) et admet un noyau de Green  $G$  tel que*

$$G(x, y) \leq C_1 \cdot \exp(-c_1 d(x, y)) \text{ pour des constantes } C_1, c_1 > 0. \quad (\text{ED})$$

Ainsi, tout graphe coercif  $X$  muni d'un noyau admissible  $p$  tel que  $p$  et  $p^*$  sont sous-markoviens admet une fonction de Green satisfaisant les hypothèses 1. et 2. que nous avons présenté précédemment.

La propriété de Martingale permet d'exprimer le lien entre le laplacien et la marche aléatoire.

**Lemme 2.1.6** (propriété de Martingale). *Soit  $z$  un point de  $X$  et  $u$  une fonction sur  $X$ . Alors la suite de variables aléatoires*

$$M_n := u(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta u(X_k)$$

*est une  $\mathcal{F}_n$ -martingale pour  $\mathbb{P}_z$ . En particulier,  $(u(X_n))_n$  est une martingale si  $u$  est harmonique.*

## 2.2 Bord de Martin et conditionnement

### 2.2.1 Le bord de Martin

Nous allons définir le bord de Martin de  $X$  associé à  $p$  et énoncer les théorèmes de représentation des fonctions harmoniques positives. Dans toute

cette section, nous supposons la marche aléatoire irréductible et transiente. Nous renvoyons le lecteur à [Woe00] pour les démonstrations des résultats énoncés dans cette section. Fixons un point base  $o \in X$ . La compactification obtenue ne dépend pas du choix de ce point base.

Commençons par définir les noyaux de Martin,

$$K(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(o, y)} = \frac{F(x, y)}{F(o, y)}, \quad x, y \in X.$$

**Définition 2.2.1.** *La compactification de Martin  $\widehat{X}_M$  est la plus petite compactification de  $X$  telle que chaque noyau  $K(x, \cdot)$ ,  $x \in X$  s'étend continûment à  $\widehat{X}_M$ . Le bord de Martin est alors  $\partial_M X := \widehat{X}_M \setminus X$ .*

Le terme "plus petite compactification" fait référence à l'ordre partiel sur les compactifications, où  $id_X$  s'étend en une surjection continue de la plus "grande" dans la plus "petite". On peut définir de manière équivalente le bord de Martin en termes de classes d'équivalence de suites : une suite  $(y_n)_n$  converge vers un point  $\theta$  du bord de Martin si elle quitte tout sous-ensemble fini de  $X$  et si la suite de fonctions  $K(\cdot, y_n)$  converge ponctuellement. Deux suites sont équivalentes si les limites coïncident en chaque point de  $X$ . Nous noterons alors  $K(\cdot, \theta)$  le noyau de Martin étendu, qui est une fonction harmonique positive sur  $X$  telle que  $K(o, \theta) = 1$ . Au moyen du théorème de décomposition de Riesz ([Woe00], p.256), classique en théorie du potentiel, on peut montrer que pour toute fonction harmonique positive  $h$ , il existe une mesure de Borel positive  $\nu^h$  sur  $\partial_M X$ , telle que

$$h(x) = \int_{\partial_M X} K(x, \theta) d\nu^h(\theta).$$

Nous allons voir qu'en un sens à préciser, cette mesure est unique. Une fonction  $h$  sera dite *harmonique minimale* si elle est harmonique, strictement positive, telle que  $h(o) = 1$  et si toute fonction harmonique strictement positive  $h_1$  telle que  $h \geq h_1$  sur  $X$  est un multiple de  $h$ . On appelle alors *bord minimal de Martin* l'ensemble

$$\partial_m X := \{\theta \in \partial_M X \mid K(\cdot, \theta) \text{ est harmonique minimale}\}.$$

Le bord minimal de Martin  $\partial_m X$  est un sous-ensemble borélien de  $\partial_M X$  et si  $h$  est une fonction harmonique positive, il existe une unique mesure  $\nu^h$  telle que  $\nu^h(\partial_M X \setminus \partial_m X) = 0$  et  $h(x) = \int_{\partial_m X} K(x, \theta) d\nu^h(\theta)$ . Si  $h$  est harmonique minimale,  $\nu^h$  est une mesure de Dirac  $\delta_\theta$ , avec  $\theta \in \partial_m X$  et  $h = K(\cdot, \theta)$ .

Une conséquence importante de la théorie de Martin est que la suite de variables aléatoires  $(X_n)_n$  converge  $\mathbb{P}_z$ -presque sûrement (pour tout  $z \in X$ )

vers une variable aléatoire  $X_\infty \in \partial_m X$ . Les lois de sortie, notées  $\mu_z$ ,  $z \in X$ , sont appelées les *mesures harmoniques* (notons que  $\mu_o$  est la mesure  $\nu^1$  représentant la fonction constante égale à 1). Ces mesures sont équivalentes, ce qui nous permet de définir une notion de  $\mu$ -négligeabilité, et leurs dérivées de Radon-Nykodim sont données par

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\theta) = \lim_{z \rightarrow \theta} \frac{G(y, z)}{G(x, z)}.$$

### 2.2.2 Les $h$ -processus, pour fixer le point de sortie

Par la méthode des  $h$ -processus de Doob ([Doo57]), la marche aléatoire peut être conditionnée à sortir en un point fixé  $\theta$  du bord minimal de Martin. Nous allons décrire brièvement la méthode.

Soit  $h$  une fonction harmonique positive ou nulle telle que  $h(o) = 1$ . Par le principe du minimum,  $h > 0$ , on peut donc poser

$$p^h(x, y) := \frac{1}{h(x)} p(x, y) h(y).$$

La fonction  $p^h$  définit alors une nouvelle fonction de transition markovienne. On peut donc définir une nouvelle mesure de probabilités  $\mathbb{P}_z^h$  et une nouvelle marche aléatoire  $X_n^{(h)}$ , appelée  *$h$ -processus*. Les ensembles des chemins de ces deux marches sont identiques, mais les mesures de probabilités et la fonction de transition ont changé. Ainsi, une fonction  $u$  est harmonique pour la fonction de transition  $p^h$  si et seulement si la fonction  $u \cdot h$  est harmonique pour  $p$ . Nous dirons désormais qu'une fonction harmonique pour  $p^h$  avec  $h = K(\cdot, \theta)$  est  *$\theta$ -harmonique* et nous garderons la terminologie harmonique pour les fonctions harmoniques pour  $p$ . On obtient une nouvelle fonction de Green

$$G^h(x, y) = \frac{h(y)}{h(x)} G(x, y)$$

et des nouveaux noyaux de Martin

$$K^h(x, y) = \frac{1}{h(x)} K(x, y).$$

Cette dernière égalité implique que les bords de Martin associés aux deux fonctions de transition sont les mêmes. L'unique mesure  $\nu^h$  représentant  $h$  pour  $p$  représente la fonction 1 pour  $p^h$ , donc  $\nu^h$  est la loi de sortie du  $h$ -processus partant de  $o$ . Ainsi, si  $h$  est harmonique minimale,  $h = K(\cdot, \theta)$  pour un point  $\theta \in \partial_m X$  et comme  $\nu^{K(\cdot, \theta)} = \delta_\theta$ , alors  $\mathbb{P}_z^{K(\cdot, \theta)}(X_\infty = \theta) = 1$ , la marche aléatoire est donc conditionnée à sortir en  $\theta$ .



Nous noterons désormais  $\mathbb{P}_z^\theta$  la probabilité  $\mathbb{P}_z^{K(\cdot, \theta)}$  sur  $\Omega$ . Le processus conditionné satisfait la propriété forte de Markov et on a également la propriété suivante :

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $T$  un temps d'arrêt presque sûrement fini sur  $\Omega$ . Pour une variable aléatoire positive  $\mathcal{F}_T$ -mesurable  $F$  et pour tout  $z \in X$ , tout  $\theta \in \partial_m X$ , on a*

$$\mathbb{E}_z^\theta[F] = \frac{1}{K(z, \theta)} \mathbb{E}_z[F \cdot K(X_T, \theta)].$$

De plus, il est possible de reconstruire la probabilité  $\mathbb{P}_z$  à partir des probabilités conditionnées :

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $F$  une variable aléatoire positive sur  $\Omega$ . Alors pour tout  $z \in X$ ,*

$$\mathbb{E}_z[F] = \int_{\partial_m X} \mathbb{E}_z^\theta[F] d\mu_z(\theta).$$

Enfin, les probabilités  $\mathbb{P}_z^\theta, z \in X, \theta \in \partial_m X$  satisfont une loi asymptotique du 0-1 : si un événement  $A$  est *asymptotique* (i.e. s'il est invariant par l'opérateur de translation  $\Theta$ ) alors pour tout  $\theta \in \partial_m X$ , l'application  $z \mapsto \mathbb{P}_z^\theta(A)$  est constante sur  $X$ , égale à 0 ou 1.

## 2.3 Convergence au bord minimal de Martin

Nous énonçons dans cette section deux théorèmes concernant le comportement des fonctions harmoniques aux points du bord minimal de Martin. Pour cela, nous commençons par définir une nouvelle famille de cônes "non-tangentiels", que nous appelons cônes H-non-tangentiels, pour Harnack-non-tangentiels. Supposons la fonction de transition markovienne  $p$  admissible. Fixons un point base  $o \in X$ . Nous dirons que la famille des parties de  $X$   $(\Gamma_c^\theta)_{c>0}$  forme une famille de *cônes H-non-tangentiels* de sommet  $\theta \in \partial_m X$  si

1. Pour tout  $c > 0$ ,  $o \in \Gamma_c^\theta$  et il existe une suite de points  $(x_n)$  de  $\Gamma_c^\theta$  telle que  $x_n \rightarrow \theta$ ;
2. Pour tout  $c > 0$  il existe  $R_c > 0$  tel que

$$\Gamma_c^\theta \subset \{x \in X \mid F(o, x)K(x, \theta) \geq R_c\};$$

3. Pour tout  $c > 0$  et tout  $d > 0$ ,  $\{x \in X \mid d(x, \Gamma_c^\theta) \leq d\} \subset \Gamma_{c+d}^\theta$ .

Remarquons, à propos de la condition (2), que plus le cône est "épais", c'est-à-dire plus la constante  $c > 0$  est grande et plus la constante  $R_c$  correspondante est petite. Cette condition signifie que la marche aléatoire d'origine  $o$  et conditionnée à sortir en  $\theta$ , atteint chaque point d'un cône avec une probabilité uniformément minorée. En particulier, cette marche "rentre et sort" presque sûrement de  $\Gamma_c^\theta$  à des moments arbitrairement grands (proposition 5.2). Cette propriété sera un outil crucial pour montrer que si une fonction harmonique converge le long des trajectoires stochastiques, elle converge aussi le long des cônes H-non-tangentiels (corollaire 5.3). Notons enfin que si le graphe  $(X, d)$  est hyperbolique (voir section 7), on retrouve bien les notions non-tangentiels classiques : chaque cône est contenu dans un tube autour d'un rayon géodésique joignant  $o$  à  $\theta$ . Inversement, chaque tube autour d'un rayon géodésique est contenu dans un cône  $\Gamma_c^\theta$  (lemme 6.2).

Soit  $u$  une fonction harmonique fixée. Remarquons que pour tout  $x \in X$ , l'harmonicité de  $u$  implique que :

$$\begin{aligned} \Delta u^2(x) &= \sum_{y \in X} p(x, y)(u^2(y) - u^2(x)) \\ &= \sum_{y \in X} p(x, y)(u(y) - u(x))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cette remarque va nous permettre de définir l'énergie H-non-tangentielle de  $u$  en se passant de l'introduction du gradient :

$$J_c^\theta(u) = \sum_{x \in \Gamma_c^\theta} \Delta u^2(x).$$

Nous dirons que  $u$  converge H-non-tangentiellement en  $\theta$  si pour tout  $c > 0$ ,  $u(x)$  a une limite finie quand  $x$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_c^\theta$ . De la même manière, la fonction  $u$  sera dite H-non-tangentiellement bornée en  $\theta$  si pour tout  $c > 0$ ,  $u$  est bornée sur  $\Gamma_c^\theta$  et d'énergie H-non-tangentielle finie en  $\theta$  si pour tout  $c > 0$ ,  $J_c^\theta(u) < +\infty$ .

Pour un borélien  $E \subset \partial_m X$ , définissons l'ensemble  $\Gamma_c(E) := \bigcup_{\theta \in E} \Gamma_c^\theta$ . Nous allons faire l'hypothèse suivante (voir figure 2.3.1), qui assure une bonne adéquation entre les familles de cônes H-non-tangentiels et le comportement à l'infini de la marche aléatoire conditionnée :

Il existe  $\eta > 0$  et  $c_0 \geq 0$  tels que pour tout  $c > c_0$  et tout borélien  $E \subset \partial_m X$ , on ait

$$(\mathcal{H}) \quad \forall z \notin \Gamma_c(E), \mathbb{P}_z(X_\infty \notin E) \geq \eta.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème abstrait annoncé.

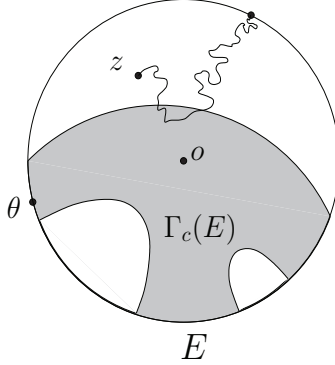


FIGURE 2.3.1 – L'hypothèse  $(\mathcal{H})$

**Théorème 2.3.1.** Soient  $X$  un graphe à géométrie bornée,  $p$  une fonction de transition markovienne admissible et  $(\Gamma_c^\theta)_{c>0}$  une famille de cônes  $H$ -non-tangentiels en chaque point  $\theta \in \partial_m X$ . Supposons que la marche aléatoire associée à  $p$  est transiente et de plus que la fonction de Green est bornée, s'annule à l'infini et que l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  est satisfaite. Alors pour une fonction harmonique  $u$ , les propriétés suivantes sont équivalentes en  $\mu$ -presque tout point  $\theta \in \partial_m X$  :

1. la fonction  $u$  converge  $H$ -non-tangentielle en  $\theta$  ;
2. la fonction  $u$  est  $H$ -non-tangentielle bornée en  $\theta$  ;
3. l'énergie  $H$ -non-tangentielle de  $u$  en  $\theta$  est finie.

**Remarque 2.3.2.** La preuve dans le cas d'un graphe hyperbolique de la presque équivalence entre la convergence non-tangentielle et la bornitude non-tangentielle fait l'objet de l'article [Pet12]. Bien que l'esprit soit le même, la preuve de [Pet12] est plus directe.

**Remarque 2.3.3.** L'hypothèse  $G$  bornée est équivalente à l'existence d'une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in X$ ,  $G(x, x) \leq C$ , cela provient de la formule  $G(x, y) = F(x, y)G(y, y)$ .

Posons

$$\mathcal{L}_c := \left\{ \theta \in \partial_m X \mid \lim_{\substack{x \in \Gamma_c^\theta \\ x \rightarrow \theta}} u(x) \text{ existe et est finie} \right\};$$

$$\mathcal{N}_c := \{ \theta \in \partial_m X \mid N_c^\theta(u) < +\infty \} \text{ où } N_c^\theta(u) = \sup_{x \in \Gamma_c^\theta} |u(x)|;$$

$$\mathcal{J}_c := \{\theta \in \partial_m X \mid J_c^\theta(u) < +\infty\}$$

et notons  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{J}$  les sous-ensembles de  $\partial_m X$  tels que, respectivement,  $u$  converge H-non-tangentiuellement,  $u$  soit H-non-tangentiuellement bornée et  $u$  soit d'énergie H-non-tangentielle finie :

$$\mathcal{L} := \bigcap_{c>0} \mathcal{L}_c ; \quad \mathcal{N} := \bigcap_{c>0} \mathcal{N}_c \quad \text{et} \quad \mathcal{J} := \bigcap_{c>0} \mathcal{J}_c.$$

La conclusion du théorème 2.3.1 se réécrit alors

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{N} \approx \mathcal{J},$$

où  $A \approx B$  signifie que les deux ensembles  $A$  et  $B$  diffèrent d'un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle.

Comme nous l'avons déjà remarqué (section 2.1), lorsque le graphe est coercif, la fonction de transition  $p$  markovienne admissible et telle que  $p^*$  soit sous-markovienne, les conditions sur le comportement de la fonction de Green sont satisfaites et dans ce cas, le théorème s'énonce de la façon suivante :

**Corollaire 2.3.4.** *Soient  $X$  un graphe coercif,  $p$  une fonction de transition markovienne admissible telle que  $p^*$  soit sous-markovienne et  $(\Gamma_c^\theta)_{c>0}$  une famille de cônes H-non-tangentiels en chaque point  $\theta \in \partial_m X$ . Supposons également que l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  soit satisfaite. Alors pour toute fonction harmonique, les notions de convergence H-non-tangentielle, bornitude H-non-tangentielle et finitude de l'énergie H-non-tangentielle coïncident en  $\mu$ -presque tout point du bord minimal de Martin.*

Remarquons enfin qu'il est possible d'affiner le théorème 2.3.1 en affaiblissant le critère de la bornitude H-non-tangentielle pour obtenir un théorème de Fatou ponctuel. Nous dirons que la fonction  $u$  est *H-non-tangentiuellement minorée* en  $\theta \in \partial_m X$ , si  $u$  est minorée sur tous les cônes H-non-tangentiels de sommet  $\theta$ .

**Théorème 2.3.5.** *Soient  $X$  un graphe à géométrie bornée,  $p$  une fonction de transition markovienne admissible telle que la marche aléatoire associée soit transiente et soit  $(\Gamma_c^\theta)_{c>0}$  une famille de cônes H-non-tangentiels en chaque point  $\theta \in \partial_m X$ . Supposons que l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  soit satisfaite. Pour une fonction harmonique  $u$ , il y a équivalence en  $\mu$ -presque tout point  $\theta \in \partial_m X$  entre :*

1. *la fonction  $u$  converge H-non-tangentiuellement en  $\theta$  ;*
2. *la fonction  $u$  est H-non-tangentiuellement minorée (ou majorée) en  $\theta$ .*

Au cours de la preuve de ce théorème, nous montrons également un théorème de Fatou local (théorème 2.6.1).

## 2.4 Analogie stochastique

Dans cette section, nous ne faisons aucune hypothèse sur le graphe  $X$ . Nous le munissons d'une fonction de transition  $p$  pour laquelle la marche aléatoire associée est transiente. Nous allons étudier le comportement de la fonction harmonique  $u$  le long de certaines trajectoires de la marche aléatoire. Pour cela, nous allons définir les trois événements suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{**} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} u(X_n(\omega)) \text{ existe et est finie} \right\}; \\ \mathcal{N}^{**} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid N^*(\omega) < +\infty \right\} \text{ où } N^*(\omega) = \sup_{n \geq 0} \{|u(X_n(\omega))|\} \\ \text{et } \mathcal{J}^{**} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid J^*(\omega) < +\infty \right\} \text{ où } J^*(\omega) = \sum_{n \geq 0} \Delta u^2(X_n(\omega)).\end{aligned}$$

Ces trois événements sont asymptotiques, donc par la loi du 0-1, les quantités  $\mathbb{P}_z^\theta(\mathcal{L}^{**})$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta(\mathcal{N}^{**})$  et  $\mathbb{P}_z^\theta(\mathcal{J}^{**})$  ont pour valeurs 0 ou 1 et ne dépendent pas de  $z$ . Il est alors naturel de définir les trois sous-ensembles suivants de  $\partial_m X$ , analogues stochastiques des ensembles H-non-tangentiels :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^* &= \left\{ \theta \in \partial_m X \mid \mathbb{P}_o^\theta(\mathcal{L}^{**}) = 1 \right\}, \\ \mathcal{N}^* &= \left\{ \theta \in \partial_m X \mid \mathbb{P}_o^\theta(\mathcal{N}^{**}) = 1 \right\} \text{ et } \mathcal{J}^* = \left\{ \theta \in \partial_m X \mid \mathbb{P}_o^\theta(\mathcal{J}^{**}) = 1 \right\}.\end{aligned}$$

On dit alors que  $u$  converge stochastiquement en  $\theta \in \partial_m X$  si  $\theta \in \mathcal{L}^*$ . De la même manière, on définit les notions de *bornitude stochastique* en  $\theta$  et de *finitude de l'énergie stochastique* en  $\theta$ . Les théorèmes de martingales permettent alors de montrer le résultat suivant, dû à Mouton ([Mou00]) :

**Proposition 2.4.1.** *Soit  $u$  une fonction harmonique. On a les  $\mu$ -presque inclusions*

$$\mathcal{J}^* \tilde{\subset} \mathcal{L}^* \tilde{\subset} \mathcal{N}^*.$$

**Remarque 2.4.2.** *Le théorème 2.3.1 impliquera qu'en fait,*

$$\mathcal{J}^* \approx \mathcal{L}^* \approx \mathcal{N}^*.$$

*Démonstration de la proposition 2.4.1.* Il est clair que  $\mathcal{L}^{**} \subset \mathcal{N}^{**}$  et par la proposition 2.2.3, on obtient  $\mathcal{L}^* \tilde{\subset} \mathcal{N}^*$ .

Prouvons maintenant la  $\mathbb{P}_o$ -presque inclusion  $\mathcal{J}^{**} \tilde{\subset} \mathcal{L}^{**}$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{J}_m^{**} = \{\omega \in \Omega \mid J^*(\omega) \leq m\}$ . Puisque  $\mathcal{J}^{**}$  est l'union dénombrable des ensembles  $\mathcal{J}_m^{**}$ , il suffit de démontrer que pour tout  $m$ ,  $\mathcal{J}_m^{**} \tilde{\subset} \mathcal{L}^{**}$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $\tau_m(\omega)$  le premier temps  $N$  pour lequel  $\sum_{n=0}^N \Delta u^2(X_n(\omega)) > m$ , avec  $\tau_m(\omega) = +\infty$  si ce n'est jamais le cas. Pour  $N \in \mathbb{N}$ , l'événement

$\{\tau_m > N\} = \left\{ \sum_{n=0}^N \Delta u^2(X_n) \leq m \right\}$  est  $\mathcal{F}_N$ -mesurable. Son complémentaire  $\{\tau_m \leq N\}$  est aussi  $\mathcal{F}_N$ -mesurable et  $\tau_m$  est un temps d'arrêt. On a  $\sum_{n=0}^{\tau_m-1} \Delta u^2(X_n) \leq m$  et  $\tau_m = \infty$  si et seulement si  $J^*(u) \leq m$ . Notons  $M_n$  la martingale  $u^2(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta u^2(X_k)$  et stoppons là au temps  $\tau_m$ . On a alors

$$M_{n \wedge \tau_m} \geq - \sum_{k=0}^{(n \wedge \tau_m)-1} \Delta u^2(X_k) \geq -m.$$

La martingale stoppée est donc  $\mathbb{P}_o$ -presque sûrement convergente. En particulier, sur l'événement  $\mathcal{J}_m^{**}$ ,  $(M_n)_n$  est presque sûrement convergente et  $\sum_{n \geq 0} \Delta u^2(X_n)$  converge, donc  $u^2(X_n)$  admet presque sûrement une limite finie.

Pour obtenir le même résultat pour la fonction  $u$  à la place de  $u^2$ , il suffit de remarquer que la fonction  $v = u + 1$  est harmonique et que  $\Delta v^2 = \Delta u^2$ . On peut alors répéter exactement la même preuve pour  $v$  et on obtient que sur l'événement  $\mathcal{J}_m^{**}$  (qui est le même pour  $u$  et  $v$ ),  $v^2(X_n)$  admet presque sûrement une limite finie. Comme  $v^2 = u^2 + 2u + 1$ ,  $u(X_n)$  admet  $\mathbb{P}_o$ -presque sûrement une limite finie et  $\mathcal{J}_m^{**} \tilde{\subset} \mathcal{L}^{**}$ . On applique alors la proposition 2.2.3 et on obtient la  $\mu$ -presque inclusion  $\mathcal{J}^* \tilde{\subset} \mathcal{L}^*$ .  $\square$

Les martingales discrètes ne nous permettent pas d'obtenir la dernière presque inclusion  $\mathcal{N}^* \tilde{\subset} \mathcal{L}^*$  sans hypothèse sur  $p$ . Lorsque la fonction de transition est supposée admissible, nous avons établi dans [Pet12] la presque-inclusion faible ci-dessous (proposition 2.4.3). Celle-ci ne nous sera pas utile pour démontrer le théorème 2.3.1. Nous l'avons utilisé dans [Pet12] pour donner une preuve directe de la presque inclusion  $\mathcal{N} \tilde{\subset} \mathcal{L}$  dans le cadre des graphes hyperboliques au sens de Gromov. On pourra consulter l'annexe A où cette preuve est reproduite.

Soit  $\widetilde{\mathcal{N}}^{**}$  l'ensemble des trajectoires  $\omega$  telles que  $|u|$  est bornée sur la trajectoire épaissie  $\{x \in X \mid d(x, \omega) \leq m_1\}$ , où la constante  $m_1$  provient de de l'admissibilité de  $p$ . Formellement,

$$\widetilde{\mathcal{N}}^{**} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \widetilde{N}^*(\omega) < +\infty \right\} \text{ où } \widetilde{N}^*(\omega) = \sup \{ |u(x)| \mid x \in X, d(x, \omega) \leq m_1 \}.$$

On définit alors

$$\widetilde{\mathcal{N}}^* = \left\{ \theta \in \partial_m X \mid \mathbb{P}_o^\theta(\widetilde{\mathcal{N}}^{**}) = 1 \right\}$$

et on obtient le résultat :

**Proposition 2.4.3.** *Soit  $u$  une fonction harmonique. On a la  $\mu$ -presque inclusion*

$$\widetilde{\mathcal{N}}^* \widetilde{\subset} \mathcal{L}^*.$$

*Démonstration.* Il nous faut démontrer la  $\mathbb{P}_o$ -presque inclusion  $\widetilde{\mathcal{N}}^{**} \widetilde{\subset} \mathcal{L}^{**}$ , la proposition s'en déduisant au moyen de la proposition 2.2.3. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , notons  $\widetilde{\mathcal{N}}_m^{**}$  l'ensemble des trajectoires  $\omega$  telles que  $|u|$  est bornée par  $m$  sur la trajectoire épaissie  $\{x \in X \mid d(x, \omega) \leq m_1\}$ . Par réunion dénombrable, il suffit de démontrer que pour tout  $m$ ,  $\widetilde{\mathcal{N}}_m^{**} \widetilde{\subset} \mathcal{L}^{**}$ . Notons  $\tau_m$  le temps d'arrêt donné par le plus petit temps  $n \geq 0$  tel que

$$\max\{|u(x)| \mid x \in X, d(x, X_n) \leq m_1\} > m.$$

Remarquons que  $\widetilde{\mathcal{N}}_m^{**} = \{\tau_m = +\infty\}$ . Puisque  $u$  est harmonique,  $(u(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale pour la probabilité  $\mathbb{P}_o$  et donc  $(u(X_{n \wedge \tau_m}))_n$  aussi. Avec ce choix de temps d'arrêt  $\tau_m$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u(X_{n \wedge \tau_m})| \leq \max\{m, |u(X_o)|\}$ , ce qui implique que la martingale stoppée converge  $\mathbb{P}_o$ -presque sûrement. En particulier,  $(u(X_n))_n$  converge  $\mathbb{P}_o$ -presque sûrement sur l'événement  $\widetilde{\mathcal{N}}_m^{**}$ . Nous venons juste de prouver que  $\widetilde{\mathcal{N}}_m^{**} \widetilde{\subset} \mathcal{L}^{**}$  et comme  $\widetilde{\mathcal{N}}^{**} = \bigcup_m \widetilde{\mathcal{N}}_m^{**}$  on obtient que  $\widetilde{\mathcal{N}}^{**} \widetilde{\subset} \mathcal{L}^{**}$ .  $\square$

Nous venons d'établir des critères de convergence stochastique pour une fonction harmonique quelconque. Lorsque la fonction harmonique est bornée, la convergence stochastique en presque tout point du bord minimal de Martin est automatique. Cela découle des résultats de la théorie du bord de Martin (voir par exemple [Woe00]) :

**Lemme 2.4.4.** *Soit  $u$  une fonction harmonique bornée sur  $X$ . Il existe une unique fonction  $f \in L^\infty(\partial_m X, \mu)$  telle que*

$$u(z) = \int_{\partial_m X} f(\theta) d\mu_z(\theta) = \mathbb{E}_z[f(X_\infty)].$$

*De plus,  $u$  converge stochastiquement vers  $f(\theta)$  en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial_m X$ .*

## 2.5 Preuve du théorème 2.3.1

### 2.5.1 Plan de la preuve

Nous allons montrer, corollaire 2.5.3, que les inclusions  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$  découlent de la définition des cônes H-non-tangentiels. On pourra alors résumer les presque-inclusions déjà connues dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{\mathcal{N}}^* & \widetilde{\subset} & \mathcal{J}^* & \widetilde{\subset} & \mathcal{L}^* & \widetilde{\subset} & \mathcal{N}^* \\ & & & & \cap & & \cap \\ & & \mathcal{J} & & \mathcal{L} & \subset & \mathcal{N} \end{array}$$

Pour démontrer le Théorème 2.3.1, il suffira de démontrer les presque-inclusions  $\mathcal{N} \widetilde{\subset} \mathcal{J}$  et  $\mathcal{J} \widetilde{\subset} \mathcal{J}^*$ .

## 2.5.2 Conséquences des hypothèses

Nous établissons ici quelques résultats qui sont des conséquences des hypothèses faites sur la marche aléatoire et sur les cônes H-non-tangentiels. Ces résultats seront des ingrédients essentiels de la preuve du théorème 2.3.1.

L'inégalité de Harnack suivante est facilement démontrée au moyen de l'hypothèse d'admissibilité de la fonction de transition. Rappelons que l'entier  $\ell$  provient de la première condition de l'hypothèse d'admissibilité de  $p$  : pour tous  $x, y \in X$  tels que  $d(x, y) \leq 1$ , on a  $\sum_{1 \leq j \leq \ell} p_j(x, y) \geq 1/\ell$ .

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $u$  une fonction surharmonique positive. Pour tous  $x, y \in X$ ,*

$$\left(\frac{1}{\ell^2}\right)^{d(x,y)} u(y) \leq u(x) \leq (\ell^2)^{d(x,y)} u(y).$$

*Démonstration.* Le cas où  $d(x, y) = 0$  est évident. Si  $d(x, y) = 1$ , par l'hypothèse d'admissibilité, on a

$$\frac{1}{\ell} u(y) \leq \sum_{1 \leq j \leq \ell} p_j(x, y) u(y).$$

Par ailleurs, puisque  $u$  est surharmonique, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u(x) \geq \sum_{z \in X} p_j(x, z) u(z) \geq p_j(x, y) u(y),$$

ce qui termine la preuve pour  $d(x, y) = 1$ . Le cas  $d(x, y) > 1$  se déduit par une récurrence immédiate.  $\square$

La proposition suivante (voir figure 2.5.1) est une conséquence de la définition des cônes H-non-tangentiels. Elle implique les inclusions  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$ .

**Proposition 2.5.2.** *Soit  $(y_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$  une suite de points qui converge H-non-tangentielllement vers un point  $\theta \in \partial_m X$ . Alors la marche aléatoire rencontre  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement une infinité de ces points.*



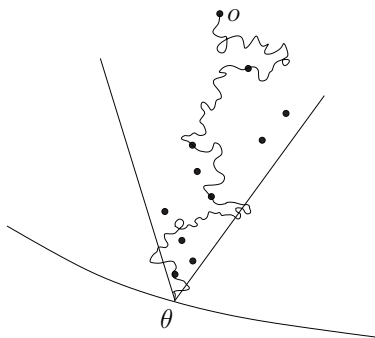


FIGURE 2.5.1 – proposition 2.5.2

*Démonstration.* Notons  $A_k$  l'événement "la marche rencontre  $y_k$ ",  $A_k^N$  l'événement "la marche rencontre  $y_k$  avant le temps  $N$ " et  $\tau_k$  le temps d'arrêt  $\inf\{n \mid X_n = y_k\}$ . Soit  $R > 0$  tel que pour tout  $k$ ,  $F(o, y_k)K(y_k, \theta) \geq R$ . La fonction  $\mathbf{1}_{A_k^N}$  est  $\mathcal{F}_{\tau_k \wedge N}$ -mesurable. Puisque  $\tau_k \wedge N$  est un temps d'arrêt presque sûrement fini, on a alors

$$\mathbb{E}_o^\theta[\mathbf{1}_{A_k^N}] = \mathbb{E}_o[\mathbf{1}_{A_k^N} \cdot K(X_{\tau_k}, \theta)].$$

Remarquons que si  $\tau_k(\omega) \leq N$ , alors  $\mathbf{1}_{A_k^N}(\omega) = 1$  et  $X_{\tau_k(\omega)}(\omega) = y_k$  et si  $\tau_k(\omega) > N$ , alors  $\mathbf{1}_{A_k^N}(\omega) = 0$ , donc

$$\mathbb{E}_o[\mathbf{1}_{A_k^N} \cdot K(X_{\tau_k}, \theta)] = K(y_k, \theta)\mathbb{P}_o(A_k^N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(o, y_k)K(y_k, \theta).$$

Et finalement,  $\mathbb{E}_o^\theta[\mathbf{1}_{A_k}] = F(o, y_k)K(y_k, \theta)$ . On en déduit alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_o^\theta[(X_n)_n \text{ rencontre une infinité de } y_k] &= \mathbb{P}_o^\theta[\limsup_k A_k] \\ &\geq \inf_k \mathbb{E}_o^\theta[\mathbf{1}_{A_k}] \\ &\geq \inf_k F(o, y_k) \cdot K(y_k, \theta) \\ &\geq R > 0. \end{aligned}$$

Comme l'événement " $(X_n)_n$  rencontre une infinité de  $y_k, k \in \mathbb{N}$ " est asymptotique, la proposition est prouvée.  $\square$

**Corollaire 2.5.3.** *Pour tout  $c > 0$ ,  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}_c$  et  $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}_c$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que l'inclusion  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}_c$  ne soit pas vérifiée. Soit  $\theta \in \mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}_c$  et notons  $L$  la limite stochastique de

$u$  en  $\theta$ . Il existe alors par hypothèse  $\varepsilon > 0$  et des points  $y_k \in \Gamma_c^\theta$  tendant vers  $\theta$  tels que pour tout  $k$ ,  $|u(y_k) - L| \geq \varepsilon$ . Comme la suite  $(y_k)$  converge H-non-tangentielllement vers  $\theta$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, la marche aléatoire rencontre une infinité de  $y_k$ . Fixons une trajectoire  $\omega$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(X_n(\omega)) = L$  et  $X_n(\omega)$  rencontre une infinité de  $y_k$ . Choisissons  $n_o \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_o$ ,  $|u(X_n(\omega)) - L| < \varepsilon$ . La trajectoire stoppée  $(X_n(\omega))_{n \leq n_o}$  rencontre seulement un nombre fini de  $y_k$ , donc  $(X_n(\omega))_{n > n_o}$  rencontre au moins un point  $y_{k_1}$ . Soit  $n_1 > n_o$  tel que  $X_{n_1}(\omega) = y_{k_1}$ . On a

$$0 < \varepsilon \leq |u(y_{k_1}) - L| = |u(X_{n_1}(\omega)) - L| < \varepsilon,$$

ce qui fournit une contradiction. La preuve de la seconde inclusion fonctionne de la même façon.  $\square$

Les lemmes suivants sont des conséquences faciles de l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ . Pour un sous-ensemble borélien  $E$  de  $\partial_m X$ , posons

$$f_E(x) := \mathbb{P}_x(X_\infty \in E) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_E(X_\infty)].$$

**Lemme 2.5.4.** *Soient  $E$  un sous-ensemble borélien de  $\partial_m X$ ,  $z \in X$  et  $c > c_0$  (la constante  $c_0$  provient de l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ ). Pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -p.s., la marche aléatoire "finit sa vie dans  $\Gamma_c(E)$ " (Formellement, pour  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque tout  $\omega$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $X_n(\omega) \in \Gamma_c(E)$ ).*

*Démonstration.* Le lemme 2.4.4 de représentation des fonctions harmoniques bornées assure que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$ , on a

$$\mathbb{P}_z^\theta[\lim_{n \rightarrow \infty} f_E(X_n) = \mathbf{1}_E(\theta)] = 1.$$

D'après l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x \notin \Gamma_c(E), f_E(x) \leq 1 - \eta.$$

Ainsi, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque-sûrement,  $X_n$  est dans  $\Gamma_c(E)$  pour  $n$  assez grand.  $\square$

Suivant la terminologie introduite par F. Mouton [Mou94], nous appellerons *pointes du cône*  $\Gamma_c^\theta$  les ensembles  $\Gamma_c^\theta \setminus B(o, R)$ , pour  $R > 0$ .

**Lemme 2.5.5.** *Soient  $c > c_0$  et  $E$  un sous-ensemble borélien de  $\partial_m X$ . Pour tout  $\theta \in \partial_m X$  tel que  $f_E$  converge H-non-tangentielllement vers 1 en  $\theta$ ,  $\Gamma_c(E)$  contient des pointes de tout cône de sommet  $\theta$ .*

*Démonstration.* Fixons  $\theta \in \partial_m X$  tel que  $f_E(x) = \mathbb{P}_x(X_\infty \in E)$  converge H-non-tangentiellement vers 1 en  $\theta$  et soit  $\Gamma_e^\theta$  un cône de sommet  $\theta$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\Gamma_c(E)$  ne contient aucune pointe de ce cône. Alors pour tout  $R > 0$ , il existe  $x \in \Gamma_e^\theta \setminus \Gamma_c(E)$  tel que  $d(o, x) > R$ .

Soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\Gamma_e^\theta \setminus \Gamma_c(E)$  telle que  $d(o, x_k) > k$ . alors  $(x_k)_k$  converge vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_e^\theta$  et on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_E(x_k) = 1$ . Comme  $x_k \notin \Gamma_c(E)$ , l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  nous assure que  $f_E(x_k) \leq 1 - \eta$ , ce qui apporte une contradiction.  $\square$

**Remarque 2.5.6.** *D'après le lemme de représentation des fonctions harmoniques bornées (lemme 2.4.4),  $f_E$  converge stochastiquement en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ , donc H-non-tangentiellement d'après le corollaire 2.5.3. En particulier,  $\Gamma_c(E)$  contient des pointes de tout cône de sommet  $\theta$  pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ .*

### 2.5.3 La bornitude H-non-tangentielle implique la finitude de l'énergie H-non-tangentielle

Pour un sous-ensemble  $U$  de  $X$ , on définit sur  $U \times U$  la *fonction de Green*  $G_U(z, y)$  comme l'espérance, avant de sortir de  $U$ , du nombre de visites en  $y$  de la marche aléatoire partant de  $z$ . Notons  $\tau_U$  le temps de sortie de  $U$ . Par le théorème de Fubini, pour toute fonction positive  $\varphi$  sur  $U$  et tout point  $z \in U$ ,

$$\mathbb{E}_z \left[ \sum_{n=0}^{\tau_U-1} \varphi(X_n) \right] = \sum_{y \in U} \varphi(y) G_U(z, y). \quad (2.5.1)$$

Commençons par établir une version conditionnée de cette formule :

**Lemme 2.5.7.** *Soient  $\varphi$  une fonction positive sur un sous-ensemble  $U \subset X$  et  $z \in U$ . Notons  $\tau_U$  le temps de sortie de  $U$ . On a alors*

$$\mathbb{E}_z^\theta \left[ \sum_{n=0}^{\tau_U-1} \varphi(X_n) \right] = \sum_{y \in U} \varphi(y) G_U(z, y) \frac{K(y, \theta)}{K(z, \theta)}.$$

*Démonstration.* Le théorème de Fubini donne

$$\mathbb{E}_z^\theta \left[ \sum_{n=0}^{\tau_U-1} \varphi(X_n) \right] = \mathbb{E}_z^\theta \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(X_n) \mathbf{1}_{\{n \leq \tau_U-1\}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_z^\theta \left[ \varphi(X_n) \mathbf{1}_{\{n \leq \tau_U-1\}} \right].$$

Comme la variable aléatoire  $\varphi(X_n) \mathbf{1}_{\{n \leq \tau_U-1\}}$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, la proposition

2.2.2 et la Formule (2.5.1) donnent

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_z^\theta \left[ \sum_{n=0}^{\tau_U-1} \varphi(X_n) \right] &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{K(z, \theta)} \mathbb{E}_z [\varphi(X_n) \mathbf{1}_{\{n \leq \tau_U-1\}} K(X_n, \theta)] \\
 &= \frac{1}{K(z, \theta)} \mathbb{E}_z \left[ \sum_{n \geq 0} \varphi(X_n) \mathbf{1}_{\{n \leq \tau_U-1\}} K(X_n, \theta) \right] \\
 &= \frac{1}{K(z, \theta)} \sum_{y \in U} \varphi(y) K(y, \theta) G_U(z, y).
 \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant prouver que  $\mathcal{N}_c \tilde{\subset} \mathcal{J}_e$  pour tout  $0 < e < c - m_1$ , ce qui donnera la presque inclusion  $\mathcal{N} \tilde{\subset} \mathcal{J}$ . Posons  $\mathcal{N}_c^m = \{\theta \in \partial_m X \mid N_c^\theta(u) \leq m\}$ . Comme  $\mathcal{N}_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_c^m$ , il suffit de montrer que pour tout  $m$ ,  $\mathcal{N}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}_e$ . Notons  $\Gamma := \Gamma_{c-m_1}(\mathcal{N}_c^m) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{N}_c^m} \Gamma_{c-m_1}^\theta$  et  $\tau$  le temps de sortie de  $\Gamma$ . Par définition de  $\Gamma$ , la fonction  $|u|$  est majorée par  $m$  sur  $\Gamma$ . La propriété de martingale nous assure que  $M_n = u^2(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta u^2(X_k)$  est une  $\mathcal{F}_n$ -martingale pour  $\mathbb{P}_o$ . Pour le temps d'arrêt  $\tau \wedge n$ , on obtient

$$\mathbb{E}_o[M_{\tau \wedge n}] = \mathbb{E}_o[M_o] = u^2(o) \geq 0.$$

Ainsi  $\mathbb{E}_o \left[ \sum_{k=0}^{\tau \wedge n-1} \Delta u^2(X_k) \right] \leq \mathbb{E}_o[u^2(X_{\tau \wedge n})]$ . Mais puisque  $d(X_{\tau \wedge n}, \Gamma) \leq m_1$ , il existe  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$  et  $y \in \Gamma_{c-m_1}^\theta$  tels que  $d(X_{\tau \wedge n}, y) \leq m_1$  ce qui implique par la propriété (3) des cônes H-non-tangentiels que  $X_{\tau \wedge n} \in \Gamma_c(\mathcal{N}_c^m)$ . On obtient alors

$$\mathbb{E}_o \left[ \sum_{k=0}^{\tau \wedge n-1} \Delta u^2(X_k) \right] \leq m^2.$$

Comme pour tout  $x \in X$ ,  $\Delta u^2(x) \geq 0$ , on peut appliquer le théorème de convergence monotone et donc

$$\mathbb{E}_o \left[ \sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta u^2(X_k) \right] \leq m^2.$$

Par la proposition 2.2.3, on obtient pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial_m X$ ,

$$\mathbb{E}_o^\theta \left[ \sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta u^2(X_k) \right] \leq +\infty$$

et donc par le lemme 2.5.7, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial_m X$ ,

$$\sum_{y \in \Gamma} \Delta u^2(y) G_\Gamma(o, y) \frac{K(y, \theta)}{K(o, \theta)} < +\infty. \quad (2.5.2)$$

Remarquons que  $K(o, \theta) = 1$ . Afin d'obtenir une énergie à partir de l'équation (2.5.2), nous allons minorer le terme  $G_\Gamma(o, y)K(y, \theta)$  en utilisant l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ .

**Lemme 2.5.8.** *Soit  $U$  un sous-ensemble de  $X$  et notons  $\tau_U$  le temps de sortie de  $U$ . On a alors*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x \in \Gamma_e^\theta}} \frac{G_U(o, x)}{G(o, x)} = \mathbb{P}_o^\theta(\tau_U = +\infty).$$

Laissons un instant de côté la preuve du lemme 2.5.8 et montrons que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ . Choisissons  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ . La fonction  $z \mapsto \mathbb{P}_z^\theta(\tau = +\infty)$  est  $\theta$ -harmonique (voir la section sur les h-processus), donc par le principe du minimum, elle est soit identiquement nulle, soit strictement positive.

Par le lemme 2.5.4, pour presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, la marche aléatoire finit sa vie dans  $\Gamma$ . Fixons un tel point  $\theta$ . Alors

$$1 = \mathbb{P}_o^\theta(\text{"}X_n \text{ finit sa vie dans } \Gamma\text{"}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in \Gamma)$$

On choisit alors  $N$  suffisamment grand pour que  $\mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in \Gamma) > 0$ . Par la propriété de Markov, on obtient,

$$\mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in \Gamma) = \mathbb{E}_o^\theta [\mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in \Gamma) | \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}_o^\theta [\varphi(X_N)],$$

où  $\varphi(z) = \mathbb{P}_z^\theta(\tau = +\infty)$  si  $z \in \Gamma$  et  $\varphi(z) = 0$  sinon. Comme  $\mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in \Gamma) > 0$ , la fonction  $\varphi$  ne peut pas être identiquement nulle. Elle ne s'annule donc pas et  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ . On a montré que, pour presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ , ce qui implique, par le lemme 2.5.8, que pour un tel point  $\theta$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x \in \Gamma_e^\theta}} \frac{G_\Gamma(o, x)}{G(o, x)} > 0. \quad (2.5.3)$$

Fixons  $\theta$  tel que (2.5.3) soit satisfaite. Il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$ ,

$$G_\Gamma(o, x) \geq C_1 \cdot G(o, x).$$

La condition (2) des cônes H-non-tangentiels assure alors que pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$ ,

$$G_\Gamma(o, x)K(x, \theta) \geq C_1 G(o, x)K(x, \theta) \geq C_2 > 0.$$

Revenons maintenant à l'équation (2.5.2).

$$\begin{aligned} +\infty > \sum_{y \in \Gamma} \Delta u^2(y) G_\Gamma(o, y) K(y, \theta) &\geq \sum_{y \in \Gamma_e^\theta} \Delta u^2(y) G_\Gamma(o, y) K(y, \theta) \\ &\geq C_2 \sum_{y \in \Gamma_e^\theta} \Delta u^2(y). \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que  $\mathcal{N}_c^m \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{J}_e$ .

Il reste à prouver le lemme 2.5.8. Pour cela, nous allons dans un premier temps établir le lemme suivant :

**Lemme 2.5.9.** *Soit  $\theta \in \partial_m X$ . il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\forall x \in \Gamma_e^\theta, \forall z \in X, \frac{G(z, x)}{G(o, x)} \leq C \cdot K(z, \theta).$$

*Démonstration.* D'après la condition (2) des cônes H-non-tangentiels, il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$ ,  $F(o, x)K(x, \theta) \geq R$  et donc pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$  et tout  $z \in X$ ,

$$\frac{F(z, x)}{F(o, x)} \leq \frac{1}{R} F(z, x) K(x, \theta).$$

De plus, pour tout  $y \in X$ ,  $F(z, x)F(x, y) \leq F(z, y)$ , ce qui donne

$$F(z, x) \frac{F(x, y)}{F(o, y)} \leq \frac{F(z, y)}{F(o, y)}.$$

En faisant tendre  $y$  vers  $\theta$ , on obtient

$$F(z, x)K(x, \theta) \leq K(z, \theta).$$

Finalement,

$$\frac{G(z, x)}{G(o, x)} = \frac{F(z, x)}{F(o, x)} \leq C \cdot K(z, \theta).$$

□

Nous sommes désormais en mesure de prouver le lemme 2.5.8.

*Démonstration du lemme 2.5.8.* Comme  $G(\cdot, x)$  s'annule à l'infini,

$$\begin{aligned} G_U(o, x) &= G(o, x) - \mathbb{E}_o [G(X_{\tau_U}, x)] \\ &= G(o, x) \left( 1 - \mathbb{E}_o \left[ \frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} \right] \right) \\ &= G(o, x) \left( 1 - \mathbb{E}_o \left[ \frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_U < \infty\}} \right] \right). \end{aligned}$$

Par définition, pour  $\tau_U < \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \theta} \frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} = K(X_{\tau_U}, \theta).$$

Mais par le lemme 2.5.9, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$ ,

$$\frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} \leq C \cdot K(X_{\tau_U}, \theta).$$

Cela nous permet donc d'appliquer le théorème de Lebesgue et on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x \in \Gamma_e^\theta}} \mathbb{E}_o \left[ \frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_U < \infty\}} \right] = \mathbb{E}_o [K(X_{\tau_U}, \theta) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_U < \infty\}}] = \mathbb{P}_o^\theta(\tau_U < \infty),$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

## 2.5.4 La finitude de l'énergie H-non-tangentielle implique la convergence H-non-tangentielle

Puisque nous avons montré que  $\mathcal{J}^* \tilde{\subset} \mathcal{L}^*$  (proposition 2.4.1) et que  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$  (corollaire 2.5.3), il suffit de montrer la presque inclusion  $\mathcal{J} \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ .

Posons, pour  $c > 0$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{J}_c^m := \{\theta \in \partial_m X \mid J_c^\theta(u) \leq m\}$ . Nous allons montrer, pour  $c > c_0$  ( $c_0$  provient de l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ ) et  $m \in \mathbb{N}$ , la presque inclusion  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ . Pour cela, introduisons la fonction  $v(z) := \mu_z(\mathcal{J}_c^m) = \mathbb{P}_z(X_\infty \in \mathcal{J}_c^m)$  (qui est harmonique par le lemme 2.4.4) et pour  $\alpha \in ]0, 1[$  la quantité

$$I_\alpha := \mathbb{E}_o \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \Delta u^2(X_n) \mathbf{1}_{\{v \geq \alpha\}}(X_n) \right].$$

**Fait :** s'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $I_\alpha < +\infty$ , alors  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ .

Montrons ce fait. Si  $I_\alpha < +\infty$ , la proposition 2.2.3 nous assure que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial_m X$ ,

$$\mathbb{E}_o^\theta \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \Delta u^2(X_n) \mathbf{1}_{\{v \geq \alpha\}}(X_n) \right] < +\infty$$

et donc  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta u^2(X_n) \mathbf{1}_{\{v \geq \alpha\}}(X_n) < +\infty.$$

De plus,  $v$  converge stochastiquement vers 1 en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{J}_c^m$  (lemme 2.4.4), donc pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{J}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, la série converge et  $v(X_n) \rightarrow 1$ , ce qui donne  $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta u^2(X_n) < +\infty$ . Cela signifie exactement que  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ .

Montrons maintenant l'existence d'un tel  $\alpha$ . Commençons par réécrire  $I_\alpha$  en introduisant la fonction de Green. Par la formule (2.5.1),

$$I_\alpha = \sum_{y \in X} \Delta u^2(y) \mathbf{1}_{\{v \geq \alpha\}}(y) G(o, y) = \sum_{y \in \{v \geq \alpha\}} \Delta u^2(y) G(o, y). \quad (2.5.4)$$

Notons  $A_c(y) = \{\theta \in \partial_m X \mid y \in \Gamma_c^\theta\}$ . L'idée clé est de s'intéresser à la quantité

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}_c^m} J_c^\theta(u) d\mu_o(\theta) &= \int_{\partial_m X} \sum_{y \in \Gamma_c^\theta} \Delta u^2(y) \mathbf{1}_{\{\theta \in \mathcal{J}_c^m\}} d\mu_o(\theta) \\ &= \sum_{y \in \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)} \Delta u^2(y) \mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)). \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

On sait que  $\int_{\mathcal{J}_c^m} J_c^\theta(u) d\mu_o(\theta) \leq m \cdot \mu_o(\mathcal{J}_c^m) < +\infty$ . Pour trouver  $\alpha$  tel que  $I_\alpha < +\infty$ , nous allons relier l'expression (2.5.4) à l'expression (2.5.5).

Montrons qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\{v \geq \alpha\} \subset \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)$ . Pour cela, choisissons  $y \notin \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)$  et appliquons l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  à  $(A_c(y))^c \subset \partial_m X$ . On obtient une constante  $\eta > 0$  ne dépendant ni de  $c$ , ni de  $y$  telle que

$$\forall z \notin \Gamma_c((A_c(y))^c), \mu_z(A_c(y)) \geq \eta.$$

Par définition,  $y \notin \Gamma_c((A_c(y))^c)$ , donc

$$\mu_y(A_c(y)) \geq \eta.$$

On obtient que si  $y \notin \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)$ , alors  $A_c(y) \cap \mathcal{J}_c^m = \emptyset$  et  $v(y) = \mu_y(\mathcal{J}_c^m) \leq 1 - \mu_y(A_c(y)) \leq 1 - \eta$ . En choisissant  $\alpha > 1 - \eta$ , on a donc  $\{v \geq \alpha\} \subset \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)$ .

Montrons maintenant que pour tout  $y \in \{v \geq \alpha\}$ ,

$$\mu_y(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) \geq \alpha - (1 - \eta).$$

En effet, pour un tel point  $y$ ,

$$\begin{aligned} \alpha &\leq v(y) \\ &\leq \mu_y(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) + \mu_y((A_c(y))^c) \\ &\leq \mu_y(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) + 1 - \eta. \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé  $G$  bornée,  $G(y, y)^{-1} \geq C$  pour une constante  $C > 0$  indépendante de  $y$  et pour tout  $y \in \{v \geq \alpha\}$ ,

$$\frac{\mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y))}{G(o, y)} \geq \frac{F(o, y) \mu_y(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y))}{F(o, y) G(y, y)} \geq C > 0.$$



Finalement,

$$\begin{aligned}
 I_\alpha &= \sum_{y \in \{v \geq \alpha\}} \Delta u^2(y) G(o, y) \\
 &\leq \frac{1}{C} \sum_{y \in \{v \geq \alpha\}} \Delta u^2(y) \mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) \\
 &\leq \frac{1}{C} \sum_{y \in \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)} \Delta u^2(y) \mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) \\
 &\leq \frac{1}{C} \int_{\mathcal{J}_c^m} J_c^\theta(u) d\mu_o(\theta) \\
 &< +\infty.
 \end{aligned}$$

On en conclut donc que  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$  et  $\mathcal{J} \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ , ce qui achève la preuve de la presque-inclusion  $\mathcal{J} \tilde{\subset} \mathcal{L}$ .

## 2.6 Démonstration du théorème 2.3.5

Nous dirons qu'un point  $\theta \in \partial_m X$  est *H-tangentiel* pour un sous-ensemble  $U \subset X$  si pour tout  $c > 0$ , l'ensemble  $\Gamma_c^\theta \setminus U$  est borné. Autrement dit,  $\theta$  est H-tangentiel pour  $U$  si  $U$  contient des pointes de tout cône H-non-tangentiel de sommet  $\theta$ . Le théorème 2.3.5 est une conséquence du théorème suivant, qui peut être vu comme une version ponctuelle du théorème de Fatou :

**Théorème 2.6.1.** *Soient  $X$  un graphe à géométrie bornée,  $p$  une fonction de transition markovienne admissible telle que la marche aléatoire associée est transiente et  $(\Gamma_c^\theta)_{c>0}$  une famille de cônes H-non-tangentiels en chaque point  $\theta \in \partial_m X$ . Supposons que l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  soit satisfaite. Soient  $U$  un sous-ensemble de  $X$  contenant  $o$  et  $u$  est une fonction harmonique positive sur l'ensemble épaissi  $\tilde{U} := \{x \in X \mid d(x, U) \leq m_1\}$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial_m X$  H-tangentiel pour  $U$ , la fonction  $u$  converge H-non-tangentielllement en  $\theta$ .*

Rappelons que la constante  $m_1$  provient de la condition de rang borné dans l'hypothèse d'admissibilité de la fonction de transition  $p$ . La preuve du théorème 2.6.1 repose sur deux lemmes très similaires à des lemmes démontrés précédemment.

**Lemme 2.6.2.** *Soit  $U$  un sous-ensemble de  $X$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  H-tangentiel pour  $U$ , la marche aléatoire finit  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque-sûrement sa vie dans  $U$ .*

*Démonstration.* Soit  $c > c_0$  ( $c_0$  provient de l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ ) et  $A^U$  l'ensemble des points  $\theta \in \partial_m X$  qui sont H-tangentiels pour  $U$ . Notons, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A_N^U := \{\theta \in \partial_m X \mid \Gamma_c^\theta \setminus U \subset B(o, N)\}.$$

Puisque  $A^U = \bigcup_N A_N^U$ , il suffit de montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in A_N^U$ , la marche aléatoire finit  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement sa vie dans  $U$ . Par le lemme 2.5.4, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in A_N^U$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, la marche aléatoire finit sa vie dans  $\Gamma_c(A_N^U)$ . Soit un tel point  $\theta \in A_N^U$ .  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, la marche aléatoire quitte la boule  $B(o, N)$  et donc elle finit  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement sa vie dans  $\Gamma_c^\theta \setminus B(o, N) \subset U$ .  $\square$

**Lemme 2.6.3.** *Soit  $U$  un sous-ensemble connexe de  $X$  tel que  $o \in U$  et soit  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  H-tangentiel pour  $U$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ .*

*Démonstration.* Nous avons déjà montré une propriété similaire dans la sous-section 2.5.3. Soit  $\theta$  H-tangentiel pour  $U$  tel que  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, la marche aléatoire finit sa vie dans  $U$ . La fonction  $z \mapsto \mathbb{P}_z^\theta(\tau = +\infty)$  est  $\theta$ -harmonique. Par le principe du minimum, elle est donc soit identiquement nulle, soit strictement positive. On a

$$1 = \mathbb{P}_o^\theta("X_n \text{ finit sa vie dans } U") = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in U).$$

Si on choisit  $N$  suffisamment grand pour que  $\mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in U) > 0$ , on obtient par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in U) = \mathbb{E}_o^\theta[\varphi(X_N)],$$

où  $\varphi(z) = \mathbb{P}_z^\theta(\tau = +\infty)$  si  $z \in U$  et  $\varphi(z) = 0$  sinon. Comme  $\mathbb{P}_o^\theta(\forall n \geq N, X_n \in U) > 0$ , la fonction  $\varphi$  n'est donc pas identiquement nulle et  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 2.6.1.* On peut supposer sans perte de généralité que  $U$  est connexe et on note à nouveau  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ . Comme  $u$  est harmonique positive sur  $\tilde{U}$ ,  $(u(X_{n \wedge \tau}))_n$  est une martingale positive pour  $\mathbb{P}_o$ , elle converge donc  $\mathbb{P}_o$ -presque sûrement. Ainsi par la proposition 2.2.3, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial_m X$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement,  $(u(X_{n \wedge \tau}))$  converge. En combinant cela avec le lemme 2.6.3, on obtient pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  H-tangentiel pour  $U$ ,

$$\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty \text{ et } (u(X_n)) \text{ converge}) > 0.$$

Cette probabilité vaut donc 1 par la loi asymptotique du 0-1. Cela signifie que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  H-tangentiel pour  $U$ ,  $u$  converge stochastiquement en  $\theta$ , mais par le corollaire 2.5.3, cela implique la convergence H-non-tangentielle en  $\theta$ , ce qui prouve le théorème.  $\square$

Le théorème 2.3.5 est un corollaire du théorème 2.6.1. Nous adapterons ultérieurement les idées de la preuve au cas des graphes de Dieste-Leader pour obtenir un théorème de Fatou ponctuel dans ce cadre.

*Démonstration du théorème 2.3.5.* Il suffit de montrer que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial_m X$  où  $u$  est H-non-tangentielllement minorée,  $u$  converge H-non-tangentielllement. Fixons  $c > c_0 + m_1$ , où  $c_0$  est la constante donnée par l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ , et pour  $m \in \mathbb{N}$ , notons

$$A_c^m := \{\theta \in \partial_m X \mid \forall x \in \Gamma_c^\theta, u(x) \geq -m\}.$$

Il suffit de montrer, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la presque inclusion  $A_c^m \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{L}$ . Fixons un entier  $m \in \mathbb{N}$  et posons

$$U := \Gamma_{c-m_1}(A_c^m) = \bigcup_{\theta \in A_c^m} \Gamma_{c-m_1}^\theta.$$

La fonction  $u + m$  est harmonique positive sur  $\tilde{U}$ . Par le théorème 2.6.1, elle converge H-non-tangentielllement en  $\mu$ -presque tout  $\theta$  H-tangentiel pour  $U$  et il en est de même pour  $u$ . La remarque 2.5.6 implique que  $\mu$ -presque tout  $\theta \in A_c^m$  est H-tangentiel pour  $U$ , ce qui termine la preuve du théorème.  $\square$

## 2.7 Le cadre hyperbolique

### 2.7.1 Hyperbolicité et bord de Martin

A. Ancona a montré ([Anc88]) que pour un graphe  $X$  hyperbolique au sens de Gromov et (faiblement) coercif, muni d'une fonction de transition markovienne admissible  $p$  telle que  $p^*$  est sous-markovienne, tous les points du bord de Martin sont minimaux et la compactification de Martin coïncide avec la compactification géométrique. L'ingrédient principal pour montrer ces identifications est une *inégalité de Harnack à l'infini* (appelée inégalité  $(QR)$  pour Quasi-Ruled dans [BHM11]), prouvée par Ancona : pour tout  $r \geq 0$ , il existe une constante  $C(r) \geq 1$  telle que pour tous  $x, y, z \in X$  avec  $y$  à distance au plus  $r$  d'un segment géodésique reliant  $x$  à  $z$ ,

$$F(x, z) \leq C(r) \cdot F(x, y)F(y, z). \tag{QR}$$

Dans [BHM11], les auteurs ont obtenu une nouvelle preuve de ces identifications pour un groupe hyperbolique muni d'une fonction de transition provenant d'une mesure symétrique dont le support engendre le groupe. Ils ont intensivement utilisé une métrique introduite par S. Blachère et S. Brofferio dans [BB07] : la métrique de Green. L'objectif de cette section est d'appliquer la démonstration de S. Blachère, P. Haïssinsky et P. Mathieu au cas des graphes hyperboliques : pourvu que pour tout  $y \in X$ , la fonction  $F(\cdot, y)$  s'annule à l'infini (*i.e.*  $F(x, y) \rightarrow 0$  lorsque  $d(x, y) \rightarrow \infty$ ), la structure de groupe n'est pas utile pour montrer ces identifications. Du fait de l'équation  $G(x, y) = F(x, y)G(y, y)$ , cette condition est identique à la condition analogue pour la fonction  $G$ , que nous avons utilisé dans les sections précédentes. On donne ainsi une preuve des identifications entre le bord géométrique et les bords de Martin sans introduire les outils de théorie du potentiel. L'hypothèse de symétrie de la fonction de transition, bien qu'assez restrictive, est ici nécessaire pour pouvoir définir la métrique de Green. Notons cependant que d'après la proposition 2.1.4, il existe toujours sur un graphe coercif une fonction de transition symétrique admissible.

Nous supposons donc dans cette section que la fonction de transition markovienne  $p$  est symétrique, irréductible. On définit alors la *métrique de Green* entre deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  par

$$d_G(x, y) := -\frac{1}{2} \ln(F(x, y)F(y, x)).$$

La métrique de Green permet d'obtenir une bonne interprétation géométrique des quantités probabilistes, il est donc naturel qu'elle se prête bien à identifier le bord géométrique d'un graphe hyperbolique avec le bord de Martin. Le produit de Gromov  $(x, y)_o^G$  associé à la métrique  $d_G$  de deux points  $x, y \in X$  relativement au point base  $o \in X$  s'exprime simplement au moyen de quantités probabilistes par

$$(x, y)_o^G = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{K(x, y)}{F(o, x)^{\frac{1}{2}} F(x, o)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

où  $K(x, y)$  est le noyau de Martin défini par  $K(x, y) = \frac{F(x, y)}{F(o, y)} = \frac{G(x, y)}{G(o, y)}$ . Notons que la fonction de transition  $p$  étant symétrique, le noyau  $K$  l'est également, bien que  $F$  ne le soit pas en général. Comme le noyau de Martin, le produit de Gromov relatif à  $d_G$  s'étend continûment à  $X \times (X \cup \partial_M X)$ .

D'un autre côté, si  $(X, d_G)$  est  $\delta$ -hyperbolique pour un réel  $\delta \geq 0$ , on peut s'intéresser au bord géométrique  $\partial_G X$  associé à  $(X, d_G)$  et on a vu section 1.1.3 que l'on peut étendre le produit de Gromov à  $(X \cup \partial_G X) \times (X \cup \partial_G X)$ .

Dans ce cas, une suite  $(x_n)_n$  convergeant vers un point  $\zeta \in \partial_G X$  vérifie pour tout  $x \in X$ ,

$$(x, \zeta)_o^G - 2\delta \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x, x_n)_o^G \leq (x, \zeta)_o^G.$$

Ainsi une suite  $(x_n)_n$  convergeant vers  $\xi \in \partial_M X$  pour la compactification de Martin et vers  $\zeta \in \partial_G X$  pour la compactification géométrique associée à  $d_G$  satisfait pour tout  $x \in X$ ,

$$(x, \zeta)_o^G - 2\delta \leq (x, \xi)_o^G \leq (x, \zeta)_o^G. \quad (2.7.1)$$

Notons que l'espace métrique  $(X, d_G)$  n'est en général pas géodésique. Il peut donc arriver que les espaces métriques  $(X, d)$  et  $(X, d_G)$  soient quasi-isométriques et que l'un soit hyperbolique sans que l'autre ne le soit. Nous allons démontrer deux théorèmes. Le premier concerne un graphe à géométrie bornée  $X$  muni d'une fonction de transition symétrique et irréductible. Il affirme que si l'espace métrique  $(X, d_G)$  est hyperbolique, alors tous les points du bord de Martin sont minimaux et on peut identifier ce bord avec le bord géométrique associé à la métrique  $d_G$ . Le second théorème donne une condition nécessaire et suffisante, lorsque  $(X, d)$  est coercif et hyperbolique, pour que  $(X, d_G)$  soit hyperbolique et quasi-isométrique à  $(X, d)$ . Dans ce cas, les bords géométriques  $\partial_G X$  et  $\partial X$  coïncident. On retrouve alors immédiatement comme corollaire de ces deux théorèmes (voir corollaire 2.7.5) les identifications entre les bords de Martin et le bord géométrique de  $(X, d)$  pour un graphe coercif muni d'une fonction de transition symétrique admissible.

**Théorème 2.7.1.** *Soient  $X$  un graphe à géométrie bornée et  $p$  une fonction de transition symétrique et irréductible. Si l'espace métrique  $(X, d_G)$  est hyperbolique et si  $F(\cdot, x)$  s'annule à l'infini pour tout  $x \in X$ , alors les trois compactifications  $X \cup \partial_m X$ ,  $X \cup \partial_M X$  et  $X \cup \partial_G X$  coïncident.*

Afin de démontrer ce théorème, nous commençons par prouver deux résultats intermédiaires. Supposons désormais l'espace métrique  $(X, d_G)$  hyperbolique et définissons sur le bord de Martin  $\partial_M X$  une relation d'équivalence par

$$\xi \sim_M \theta \text{ si et seulement si il existe } C \geq 0 \text{ tel que } |(\cdot, \xi)_o^G - (\cdot, \theta)_o^G| \leq C.$$

Pour un point  $\xi \in \partial_M X$ , on note  $\bar{\xi}^M$  sa classe d'équivalence.

**Lemme 2.7.2.** *Sous les hypothèses du théorème 2.7.1, on a :*

1. *Pour toutes suites  $(x_n)_n, (y_n)_n$  de  $X$  telles que  $x_n \rightarrow \xi \in \partial_M X$ ,  $y_n \rightarrow \theta \in \partial_M X$  et  $(x_n, y_n)_o^G \rightarrow \infty$ , alors  $\xi \sim_M \theta$  ;*

2. Pour tout  $\xi \in \partial_M X$ , il existe  $\theta \in \bar{\xi}^M$  et une suite  $(y_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$  qui tend vers un point  $\zeta \in \partial_G X$  pour la compactification géométrique de  $(X, d_G)$ , vers  $\theta \in \partial_M X$  pour la compactification de Martin et telle que  $(y_n, \xi)_o^G \rightarrow \infty$  ;
3. Soient  $\xi, \theta \in \partial_M X$ . Si  $\theta \notin \bar{\xi}^M$ , il existe un voisinage  $V(\theta)$  de  $\theta$  dans  $X \cup \partial_M X$  et une constante  $M$  tels que pour tout  $x \in V(\theta) \cap X$ ,

$$(x, \xi)_o^G \leq M.$$

*Démonstration.* (1) Fixons un point  $z \in X$  et un entier  $n$  assez grand pour que  $(x_n, y_n)_o^G \gg d_G(o, z)$ . Cela implique en particulier  $(x_n, y_n)_o^G \geq \max\{(z, x_n)_o^G; (z, y_n)_o^G\}$ . Puisque  $(X, d_G)$  est  $\delta$ -hyperbolique pour un réel  $\delta \geq 0$ , on a également

$$(z, x_n)_o^G \geq \min\{(z, y_n)_o^G; (y_n, x_n)_o^G\} - \delta = (z, y_n)_o^G - \delta$$

et

$$(z, y_n)_o^G \geq \min\{(z, x_n)_o^G; (x_n, y_n)_o^G\} - \delta = (z, x_n)_o^G - \delta.$$

On obtient ainsi que

$$|(z, x_n)_o^G - (z, y_n)_o^G| \leq \delta$$

et la conclusion voulue en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .

(2) Soit  $(y_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(y_n, \xi) = \sup_{x \in X} K(x, \xi)$ . Comme  $K(\cdot, \xi)$  est harmonique, le principe du maximum implique que la suite  $(y_n)_n$  quitte tout compact et on a donc  $F(y_n, o) \rightarrow 0$ . De plus, pour  $n$  assez grand,  $K(y_n, \xi) \geq K(o, \xi) = 1$ , donc

$$(y_n, \xi)_o^G \geq \frac{1}{2} \ln \frac{1}{F(o, y_n)^{\frac{1}{2}} F(y_n, o)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow +\infty.$$

Soit maintenant  $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow \xi$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $m_n \in \mathbb{N}$  tel que

$$|(y_n, \xi)_o^G - (y_n, x_{m_n})_o^G| \leq 1.$$

En particulier,

$$(y_n, x_{m_n})_o^G \geq (y_n, \xi)_o^G - 1.$$

Par le (1), cela implique que toute valeur d'adhérence de  $(y_n)_n$  dans  $\partial_M X$  appartient à  $\bar{\xi}^M$ . Notons  $\theta \in \bar{\xi}^M$  une telle valeur d'adhérence et par abus de notation, notons encore  $(y_n)$  la sous-suite correspondante. On a alors

$$(y_n, \theta)_o^G \geq (y_n, \xi)_o^G - C \rightarrow \infty.$$

Pour tout  $n$ , il existe  $m_n$  tel que

$$|(y_n, \theta)_o^G - (y_n, y_{m_n})_o^G| \leq 1.$$

Ainsi, pour tout  $M > 0$ , il existe  $n$  et  $m_n$  tel que pour tout  $m \geq m_n$ ,  $(y_n, y_m)_o^G \geq M$ . Une simple récurrence prouve alors l'existence d'une sous-suite  $(y_{n_k})_k$  qui converge vers un point de  $\partial_G X$ .

(3) Comme  $\theta \notin \bar{\xi}^M$ , il existe un voisinage  $V(\theta)$  de  $\theta$  dans  $X \cup \partial_M X$  et une constante  $M$  tels que pour tout  $x \in V(\theta) \cap X$ ,  $(x, \xi)_o^G \leq M$  : sinon, on pourrait trouver une suite  $(y_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $\theta$  avec  $(y_n, \xi)_o^G \rightarrow \infty$ , ce qui impliquerait  $\theta \in \bar{\xi}^M$ .  $\square$

La proposition suivante nous assure que sous les hypothèses du théorème 2.7.1, tous les points du bord de Martin sont minimaux.

**Proposition 2.7.3.** *Sous les hypothèses du théorème 2.7.1, on a  $\partial_M X = \partial_m X$ .*

*Démonstration.* On commence par démontrer le fait suivant :

**Fait :** si la fonction harmonique  $K(\cdot, \xi)$  est minimale,  $\bar{\xi}^M = \{\xi\}$ .

En effet, si  $\theta \in \bar{\xi}^M$ , il existe par définition une constante  $C \geq 0$  telle que  $|(\cdot, \xi)_o^G - (\cdot, \theta)_o^G| \leq C$ , ce qui implique  $\ln K(\cdot, \xi) \geq \ln K(\cdot, \theta) - C$  et donc  $0 \leq K(\cdot, \theta) \leq e^C K(\cdot, \xi)$ . Comme  $K(\cdot, \xi)$  est minimale,  $K(\cdot, \xi)$  et  $K(\cdot, \theta)$  sont proportionnelles, mais leur valeur en  $o$  est 1, donc  $K(\cdot, \xi) = K(\cdot, \theta)$ , c'est-à-dire  $\xi = \theta$ .

Soit  $\xi \in \partial_M X$ . Il existe une unique mesure  $\nu^\xi$  sur  $\partial_m X$  telle que  $K(\cdot, \xi) = \int_{\partial_m X} K(\cdot, \theta) d\nu^\xi(\theta)$ . Le théorème de Fatou-Doob-Naïm ([Anc90], p.28) assure que pour  $\nu^\xi$ -presque tout  $\theta$ ,  $\frac{F(x, o)}{K(x, \xi)} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \theta$  pour la topologie fine. Nous renvoyons à [Anc90] page 27 pour une définition de la topologie fine. Ce qui importe ici est que cela implique l'existence d'une suite  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $\theta \in \partial_M X$  et telle que  $\frac{F(x_n, o)}{K(x_n, \xi)} \rightarrow 0$ . Puisque par ailleurs,  $F(x_n, o) \geq C \cdot F(o, x_n)$ , on obtient que  $(x_n, \xi)_o^G \rightarrow \infty$ . Par le lemme 2.7.2(3),  $\nu^\xi$  est à support dans  $\bar{\xi}^M$ , ce qui implique en particulier que  $\bar{\xi}^M$  contient un point minimal. Le Fait nous assure alors que  $\bar{\xi}^M = \{\xi\}$  et  $\xi$  est un point minimal.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.7.1

*Démonstration du théorème 2.7.1.* D'après la proposition précédente et le Fait prouvé dans la démonstration de la proposition, pour tout  $\xi \in \partial_M X$ ,  $\bar{\xi}^M = \{\xi\}$ . Le lemme 2.7.2(2) implique que pour tout  $\xi \in \partial_M X$ , il existe une suite  $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow \xi$  pour la topologie de Martin et  $x_n \rightarrow \zeta \in$

$\partial_G X$  pour la topologie géométrique associée à  $d_G$ . Le point  $\zeta$  ne dépend pas de la suite choisie. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir une autre suite  $(y_n)_n$  telle que  $y_n \rightarrow \xi$ . Puisque  $(x_n, \xi)_o^G \rightarrow \infty$ ,  $\limsup_{n,m \rightarrow \infty} (x_n, y_m)_o^G = \infty$ . Il existe alors une sous-suite  $(y_{n_k})_k$  telle que  $y_{n_k} \rightarrow \zeta \in \partial_G X$ . Comme la suite  $(y_n)$  ne peut avoir qu'un unique point d'accumulation,  $\zeta = \xi$ . Il existe donc une application  $\phi : \partial_M X \rightarrow \partial_G X$ .

Si deux suites  $(x_n), (y_n) \in X^{\mathbb{N}}$  convergent vers le même point  $\zeta = \phi(\xi) \in \partial_G X$  pour la topologie géométrique,  $(x_n, y_n)_o^G \rightarrow \infty$ . D'après le lemme 2.7.2(1), elles convergent donc nécessairement vers  $\xi$ , donc  $\phi$  est injective.

Soit maintenant  $\zeta \in \partial_G X$  et  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $\zeta$ . Puisque  $X \cup \partial_M X$  est compact, cette suite admet un point d'accumulation (qui est unique) dans  $\partial_M X$ . L'application  $\phi$  est donc surjective.

Comme  $\partial_M X$  est compact, il suffit, pour conclure, de montrer la continuité de  $\phi$ . Soit  $M > 0$  et  $\xi \in \partial_M X$ . On considère une suite  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $\xi \in \partial_M X$  et vers  $\phi(\xi) \in \partial_G X$ . On choisit  $n$  assez grand pour que  $(x_n, \phi(\xi))_o^G \geq M + 4\delta + \frac{1}{2} \ln 2$ , où  $\delta \geq 0$  est une constante d'hyperbolicité de  $(X, d_G)$ . Posons  $A := \min\{K(x, \xi); x \in B_G(o, d_G(o, x_n))\}$ . Soit  $\theta \in \partial_M X$  tel que sur la boule  $B_G(o, d_G(o, x_n))$ ,  $|K(\cdot, \xi) - K(\cdot, \theta)| \leq A/2$ . Pour tout  $x \in B_G(o, d_G(o, x_n))$ ,

$$1/2 \leq \frac{K(x, \theta)}{K(x, \xi)} \leq 3/2.$$

On en déduit, en prenant  $x = x_n$  que

$$-\frac{1}{2} \ln 2 \leq (x_n, \theta)_o^G - (x_n, \xi)_o^G \leq \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2},$$

ce qui donne en particulier d'après (2.7.1),

$$(x_n, \phi(\theta))_o^G \geq (x_n, \phi(\xi))_o^G - \frac{1}{2} \ln 2 - 2\delta.$$

Mais puisque  $(X, d_G)$  est  $\delta$ -hyperbolique,

$$\begin{aligned} (\phi(\xi), \phi(\theta))_o^G &\geq \min\{(x_n, \phi(\theta))_o^G; (x_n, \phi(\xi))_o^G\} - 2\delta \\ &\geq (x_n, \phi(\xi))_o^G - \frac{1}{2} \ln 2 - 4\delta \\ &\geq M, \end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de  $\phi$ . □

Le théorème suivant donne, pour un graphe hyperbolique au sens de Gromov, une condition équivalente à l'hyperbolicité de l'espace métrique  $(X, d_G)$ . Rappelons que la fonction de transition  $p$  est *uniformément irréductible* s'il



existe  $\ell > 0$  tel que pour tous  $x \sim y$ ,  $\sum_{0 \leq n \leq \ell} p_n(x, y) \geq 1/\ell$ . Nous dirons que la fonction  $p$  admet un *moment exponentiel fini* s'il existe  $\lambda > 0, C > 0$  tels que pour tout  $x \in X$ ,  $\sum_{y \in X} e^{\lambda d(x, y)} p(x, y) \leq C$ . Notons que si la fonction de transition  $p$  est admissible, alors elle est uniformément irréductible et admet en particulier un moment exponentiel fini.

**Théorème 2.7.4.** *Soient  $X$  un graphe hyperbolique coercif,  $p$  une fonction de transition markovienne, symétrique, uniformément irréductible et admettant un moment exponentiel fini. Alors  $(X, d_G)$  est hyperbolique et quasi-isométrique à  $(X, d)$  si et seulement si la condition (QR) est satisfaite.*

Comme corollaire immédiat des théorèmes 2.7.1 et 2.7.4, on obtient :

**Corollaire 2.7.5.** *Soient  $X$  un graphe hyperbolique coercif,  $p$  une fonction de transition markovienne, symétrique et uniformément irréductible telle que  $p$  admet un moment exponentiel fini. Si la condition (QR) est satisfaite, les trois compactifications  $X \cup \partial_m X$ ,  $X \cup \partial_M X$  et  $X \cup \partial X$  coïncident.*

**Remarque 2.7.6.** *Dans le cas où  $p$  est admissible, Ancona a prouvé ([Anc88]) que la condition (QR) est satisfaite. Le corollaire s'applique donc immédiatement pour donner les identifications.*

Nous allons terminer cette section en démontrant le théorème 2.7.4. La preuve se déduit immédiatement de la proposition 2.7.7 et du lemme 2.7.8. Rappelons que la condition (ED) est satisfaite s'il existe des constantes  $C_1, c_1 > 0$  telles que pour tous  $x, y \in X$ ,

$$G(x, y) \leq C_1 e^{-c_1 d(x, y)}.$$

**Proposition 2.7.7.** *Soient  $X$  un graphe hyperbolique à géométrie bornée et  $p$  une fonction de transition symétrique uniformément irréductible. L'espace métrique  $(X, d_G)$  est hyperbolique et quasi-isométrique à  $(X, d)$  si et seulement si les conditions (ED) et (QR) sont satisfaites.*

*Démonstration.* Supposons dans un premier temps que  $(X, d_G)$  est hyperbolique et quasi-isométrique à  $(X, d)$ . Par définition de la quasi-isométrie, la condition (ED) est satisfaite. Le théorème 1.1.9 implique que  $(X, d_G)$  est quasi-réglé, ce qui entraîne la condition (QR) pour  $r = 0$ . Notons  $C(0)$  la constante correspondant au cas  $r = 0$  dans la définition de la condition (QR). Soient  $x, y, z \in X$ ,  $\gamma$  un segment géodésique joignant  $x$  à  $z$  et  $y'$  un point de  $\gamma$  tel que pour tout  $y'' \in \gamma$ ,  $d(y'', y) \geq d(y', y)$ .

$$\begin{aligned} d_G(x, y) + d_G(y, z) &\leq d_G(x, y') + d_G(y', z) + 2d_G(y, y') \\ &\leq \log C(0) + d_G(x, z) + 2d_G(y, y'). \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser  $C(r) = C(0) - \exp(2c)$ , où  $c := \sup_{d(y,y') \leq r} d_G(y, y')$ , pour obtenir la condition  $(QR)$ .

Réciproquement, supposons que les conditions  $(ED)$  et  $(QR)$  sont satisfaites. Soit  $C := \max\{d_G(x, y); x \sim y\} < +\infty$  (par uniforme irréductibilité, si  $x \sim y$ ,  $F(x, y) \geq 1/\ell$  et  $d_G(x, y) \leq \ln \ell$ ). Alors par inégalité triangulaire, pour tous  $x, y \in X$ ,  $d_G(x, y) \leq C \cdot d(x, y)$ . La condition  $(ED)$  implique que  $d_G(x, y) \geq c_1 d(x, y) - C_1$ . Ainsi,  $(X, d)$  et  $(X, d_G)$  sont quasi-isométriques. La condition  $(QR)$  implique que les géodésiques pour  $(X, d)$  sont des quasi-géodésiques quasi-réglées pour  $(X, d_G)$ . Ainsi, pour tout  $y$  appartenant à un segment géodésique reliant deux points  $x, z \in X$ ,

$$d_G(x, y) + d_G(y, z) \leq 2\tau + d_G(x, z).$$

L'espace  $(X, d_G)$  est donc quasiréglé, ce qui implique par le théorème 1.1.9 que  $(X, d_G)$  est hyperbolique.  $\square$

**Lemme 2.7.8.** *Soient  $X$  un graphe coercif et  $p$  une fonction de transition symétrique, uniformément irréductible et admettant un moment exponentiel fini. Alors la condition  $(ED)$  est satisfaite.*

*Démonstration.* Rappelons que le rayon spectral  $\rho(p)$  d'une marche aléatoire irréductible est donné par  $\rho(p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n(x, y)^{1/n}$  (ce nombre est indépendant du choix de  $x$  et  $y$ ). Comme  $X$  est coercif et  $p$  symétrique, le théorème 10.6 de [Woe00] assure que  $\rho(p) < 1$ . Mais puisque  $p$  est symétrique,  $p_n(x, y) \leq \rho(p)^n$  ([Woe00], lemme 8.1). Il existe donc une constante  $a > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tous  $x, y \in X$ ,

$$p_n(x, y) \leq e^{-an}. \quad (2.7.2)$$

L'inégalité de Tchebychev donne pour tout  $b > 0$ ,

$$\mathbb{P}_x \left( \sup_{1 \leq k \leq n} d(x, X_k) \geq nb \right) \leq e^{-\lambda bn} \mathbb{E}_x \left[ \exp \left( \lambda \sup_{1 \leq k \leq n} d(x, X_k) \right) \right],$$

où  $\lambda$  est la constante intervenant dans la définition d'un moment exponentiel fini. Mais pour  $k \leq n$ ,  $d(X_0, X_k) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(X_j, X_{j+1})$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x \left( \sup_{1 \leq k \leq n} d(x, X_k) \geq nb \right) &\leq e^{-\lambda bn} \mathbb{E}_x \left[ \exp \left( \lambda \sum_{j=0}^{n-1} d(X_j, X_{j+1}) \right) \right] \\ &\leq e^{-\lambda bn} C^n = e^{(-\lambda b + \log C)n}, \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

par indépendance des accroissements. Choisissons  $b$  suffisamment grand pour que  $-\lambda b + \log C < 0$ . On a

$$G(x, y) = \sum_{k \geq 0} p_k(x, y) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{d(x, y)}{b}} p_k(x, y) + \sum_{k > \frac{d(x, y)}{b}} p_k(x, y).$$

D'après l'inégalité (2.7.3),

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k \leq \frac{d(x,y)}{b}} p_k(x, y) &\leq \frac{d(x, y)}{b} \sup_{1 \leq k \leq d(x,y)/b} p_k(x, y) \\
 &\leq \frac{d(x, y)}{b} \mathbb{P}_x (\exists k \in \{0, \dots, d(x, y)/b\} \text{ avec } X_k = y) \\
 &\leq \frac{d(x, y)}{b} \mathbb{P}_x \left( \sup_{0 \leq k \leq d(x,y)/b} d(x, X_k) \geq d(x, y) \right) \\
 &\leq Cd(x, y)e^{-cd(x,y)}.
 \end{aligned}$$

L'inégalité (2.7.2) donne que

$$\sum_{k > d(x,y)/b} p_k(x, y) \leq Ce^{-\frac{a}{b}d(x,y)}.$$

Cela prouve que (ED) est satisfaite. □

### 2.7.2 Le résultat hyperbolique

Supposons désormais que le graphe  $X$  muni de la métrique  $d$  est hyperbolique, coercif et quasi-étoilé (voir définition 1.2.1). Notons  $\delta \geq 0$  une constante d'hyperbolicité de  $(X, d)$ . Quitte à l'augmenter, on choisira le nombre  $\delta$  entier et supérieur ou égal à 3. Supposons de plus que le graphe est muni d'une fonction de transition  $p$  markovienne admissible sur  $X$  telle que  $p^*$  est sous-markovienne. Dans ce contexte, le bord de Martin  $\partial_M X$  coïncide avec le bord minimal de Martin  $\partial_m X$  et le bord hyperbolique  $\partial X$ . La preuve de ces identifications faite à la section précédente est valable pour des fonctions de transitions plus générales que les fonctions de transitions admissibles, mais nécessite qu'elles soient symétriques. Pour une preuve dans le cas où  $p$  n'est pas symétrique mais admissible, on pourra se référer à [Anc88].

Le cadre hyperbolique permet de définir une notion géométrique naturelle de tube non-tangentiel d'épaisseur  $c > 0$  et de sommet  $\theta \in \partial X$

$$\Gamma_c^\theta := \{x \in X \mid \exists \gamma \text{ un rayon géodésique entre } o \text{ et } \theta \text{ tel que } d(x, \gamma) < c\}.$$

Ces tubes non-tangentiels satisfont évidemment les propriétés (1) et (3) des familles de cônes H-non-tangentiels. Nous allons montrer au moyen de l'inégalité de Harnack à l'infini (QR) que la propriété (2) est aussi satisfaite et qu'une inclusion réciproque est vérifiée. Nous parlerons alors simplement de convergence non-tangentielle, de bornitude non-tangentielle et de finitude de l'énergie non-tangentielle pour les notions H-non-tangentiels correspondantes définies à la section 2.3.

**Lemme 2.7.9.** *Pour tout  $c > 0$ , il existe  $0 < R < 1$  tel que pour tout  $\theta \in \partial X$ ,  $\Gamma_c^\theta \subset \{x \in X \mid F(o, x)K(x, \theta) \geq R\}$ . Réciproquement, pour tout  $0 < R < 1$ , il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $\theta \in \partial X$ ,  $\{x \in X \mid F(o, x)K(x, \theta) \geq R\} \subset \Gamma_c^\theta$ .*

*Démonstration.* Soient  $c > 0$  et  $x \in \Gamma_c^\theta$ , il existe par définition un rayon géodésique  $\gamma$  entre  $o$  et  $\theta$  telle que  $d(x, \gamma) < c$ . Soit  $y \in \gamma$  tel que  $d(o, y) \gg d(o, x)$ . D'après l'inégalité (QR), il existe  $0 < R < 1$  dépendant seulement de  $c$  tel que  $F(o, y) \leq \frac{1}{R}F(o, x)F(x, y)$ . En faisant tendre  $y$  vers  $\theta$ , on obtient  $F(o, x)K(x, \theta) \geq R$ .

Soient maintenant  $0 < R < 1$ ,  $x \in X$  tel que  $F(o, x)K(x, \theta) \geq R$  et notons toujours  $\gamma$  un rayon géodésique joignant  $o$  à  $\theta$ . Soient  $z \in \gamma$  le plus éloigné de  $o$  tel que  $F(o, z) > F(o, x)$ . Ce point existe puisque  $F(o, z) \rightarrow 0$  lorsque  $d(o, z) \rightarrow +\infty$ . Posons également  $z' \in \gamma$  tel que  $d(o, z') = d(o, z) + 1$ . Notons que l'on a toujours  $F(x, y) \geq F(x, z)F(z, y)$ . Comme  $F(o, x)K(x, \theta) \geq R$ , pour  $y \in \gamma$  avec  $d(o, y) \gg d(o, z)$ ,  $F(x, y) \geq \frac{R F(o, y)}{2 F(o, x)}$ . Mais alors pour un tel  $y$ ,

$$F(x, y) \geq \frac{R F(o, z)F(z, y)}{2 F(o, x)} > \frac{R}{2}F(z, y).$$

En divisant par  $F(o, y)$  et en faisant tendre  $y$  vers  $\theta$ , on obtient  $K(x, \theta) \geq \frac{R}{2}K(z, \theta)$ . Par définition de  $z$  et  $z'$ ,  $F(o, z') \leq F(o, x)$  et donc par l'inégalité de Harnack sur les boules (théorème 2.5.1) appliquée à la fonction  $F(o, \cdot)$ , qui est surharmonique positive pour la fonction de transition admissible  $p^*$ ,  $F(o, z) \leq \ell^2 F(o, z') \leq \ell^2 F(o, x)$ . Le critère des triangles fins appliqué au triangle  $oxy$  assure que soit  $z$  est à distance au plus  $3\delta$  d'un segment géodésique entre  $o$  et  $x$ , soit  $z$  est à distance au plus  $3\delta$  d'un segment géodésique joignant  $x$  à  $y$ . Ainsi, par l'inégalité (QR), on a soit  $F(o, x) \leq \frac{1}{C(\delta)}F(o, z)F(z, x)$ , soit  $F(x, y) \leq \frac{1}{C(\delta)}F(x, z)F(z, y)$ . Dans le premier cas, cela donne  $F(z, x) \geq \frac{C(\delta)}{\ell^2}$ . Dans le second cas, en faisant tendre  $y$  vers  $\theta$ , on obtient  $F(x, z) \geq C(\delta)\frac{K(x, \theta)}{K(z, \theta)}$  et donc  $F(x, z) \geq C(\delta)\frac{R}{2}$ . Comme la fonction  $F(x, y)$  décroît uniformément exponentiellement avec  $d(x, y)$  (proposition 2.1.5), on en déduit que dans les deux cas,  $d(x, \gamma) \leq d(x, z) \leq C(R, \delta)$ . On obtient donc le résultat voulu en posant  $c = C(R, \delta)$ .  $\square$

Nous avons montré dans [Pet12] que pour cette notion de tube non-tangentiel, l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  est satisfaite. La preuve repose sur l'hyperbolicité du graphe et sur la décroissance exponentielle de la fonction de Green.

**Lemme 2.7.10.** *Dans ce contexte, la condition  $(\mathcal{H})$  est satisfaite.*

Afin de démontrer ce lemme, commençons par établir le résultat suivant :

**Lemme 2.7.11.** *Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  tel que, pour tout point  $x \in X$  et tout  $\theta \in \partial X$ ,*

$$\mu_x(\{\xi \in \partial X \mid (\xi, \theta)_x \geq \alpha\}) \geq C.$$

*Démonstration.* Dans un premier temps, nous allons montrer qu'il existe  $N = N(\alpha) > 0$  tel que pour tout  $x \in X$ , tout  $\theta \in \partial X$  et tout  $y$  sur un rayon géodésique joignant  $x$  à  $\theta$  avec  $d(x, y) \geq N$ , on a

$$\mu_y(A_{x,\alpha}^\theta) > \frac{1}{2}$$

où

$$A_{x,\alpha}^\theta := \{\xi \in \partial X \mid (\xi, \theta)_x \geq \alpha\}.$$

On a

$$\mu_y(\partial X \setminus A_{x,\alpha}^\theta) = \int_{\partial X \setminus A_{x,\alpha}^\theta} \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) d\mu_x(\xi)$$

et

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{G(y, z)}{G(x, z)}.$$

Soit  $\xi \in \partial X \setminus A_{x,\alpha}^\theta$ . Notons  $\gamma$  un rayon géodésique entre  $x$  et  $\xi$ , posons  $x_j = \gamma(4j\delta)$  et  $V_j$  la fermeture dans  $\bar{X}$  de  $\{z \in X \mid (z, x_j)_x > d(x, x_j) - 3\delta\}$ .

**Fait :** il existe  $j, N_1 \in \mathbb{N}$  dépendant seulement de  $\alpha$  tel que si  $y$  est sur un rayon géodésique entre  $x$  et  $\theta$  et  $d(x, y) \geq N_1$ , alors  $y \notin V_j$  (voir la figure 2.7.1). Pour montrer ce fait, choisissons  $j$  tel que  $d(x, x_j) - 3\delta = 4j\delta - 3\delta > \alpha + 4\delta$ . Par hyperbolicité (1.1.5),

$$\alpha > (\xi, \theta)_x \geq \min\{(\xi, y)_x, (y, \theta)_x\} - 2\delta$$

et si  $y$  est sur un rayon géodésique entre  $x$  et  $\theta$ , il existe  $N_1$  dépendant seulement de  $\alpha$  tel que  $d(x, y) \geq N_1$  implique  $(y, \theta)_x > \alpha + 2\delta$ . Ainsi, pour un tel  $y$ ,  $(\xi, y)_x \leq \alpha + 2\delta$ . On utilise à nouveau l'hyperbolicité et on obtient

$$\alpha + 2\delta \geq (\xi, y)_x \geq \min\{(\xi, x_j)_x, (x_j, y)_x\} - 2\delta.$$

Puisque  $\xi \in V_j$ ,  $(\xi, x_j)_x \geq d(x, x_j) - 3\delta > \alpha + 4\delta$ , alors  $(x_j, y)_x \leq \alpha + 4\delta$  et  $y \notin V_j$ , ce qui prouve le fait.

On peut maintenant vérifier que pour tout  $z \in V_{j+1}$  et tout  $y \notin V_j$ , la distance entre  $x_j$  et un segment géodésique entre  $y$  et  $z$  est majorée par  $50\delta$  ([Anc90] p.85). L'inégalité (QR) nous assure que  $G(y, z) \leq C(\delta)$ .

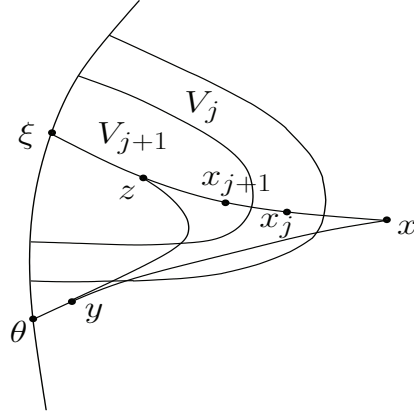


FIGURE 2.7.1 – lemme 2.7.11

$G(y, x_j)G(x_j, z)$ . On peut maintenant appliquer le théorème 2.5.1 à  $G(\cdot, z)$  et  $G(y, \cdot)$  ( $G(y, \cdot)$  est surharmonique pour la fonction de transition admissible  $p^*$ ) et on obtient  $G(y, z) \leq C(\delta, \alpha) \cdot G(y, x)G(x, z)$ . On fait alors tendre  $z \in V_{j+1}$  vers  $\xi$  et on obtient

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) \leq C \cdot G(y, x).$$

Ainsi,  $\mu_y(\partial X \setminus A_{x,\alpha}^\theta) \leq C \cdot G(y, x)$ . Puisque  $G$  décroît uniformément exponentiellement à l'infini (condition  $(ED)$ ), il existe  $N$  dépendant seulement de  $\alpha$  tel que pour tout  $y$  sur un rayon géodésique entre  $x$  et  $\theta$  avec  $d(x, y) \geq N$ ,

$$\mu_y(A_{x,\alpha}^\theta) > \frac{1}{2}.$$

Par le théorème 2.5.1, si  $x, y \in X$  avec  $d(x, y) = N$ ,

$$\mu_x(A_{x,\alpha}^\theta) \geq \frac{1}{\varrho^{2N}} \mu_y(A_{x,\alpha}^\theta) \geq C > 0.$$

□

*Démonstration du lemme 2.7.10.* Notons  $K$  la constante fournie par la condition quasi-étoilé. Soit  $c_0 = K + 6\delta$ . Fixons  $c > c_0$ ,  $E$  un sous-ensemble borélien de  $\partial X$  et  $x \notin \Gamma_c(E)$ . Choisissons un rayon géodésique  $\bar{\gamma}$  entre  $o$  et un point  $\bar{\xi} \in \partial X$  tel que  $d(x, \bar{\gamma}) \leq K$ .

Afin d'utiliser le lemme 2.7.11, nous allons montrer qu'il existe une constante  $\alpha > 0$  dépendant seulement de  $\delta$  et  $K$  telle que  $\{\xi \in \partial X \mid (\xi, \bar{\xi})_x \geq \alpha\} \subset \partial X \setminus E$ .

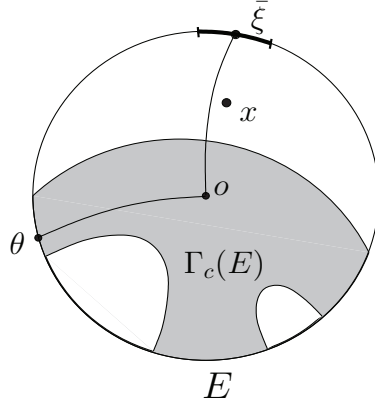


FIGURE 2.7.2 – lemme 2.7.10

Pour  $\theta \in E$ , l'objectif est de majorer uniformément la quantité  $(\theta, \bar{\xi})_x$ . Par hyperbolicité,

$$\min\{(\theta, \bar{\xi})_x, (o, \theta)_x\} \leq (o, \bar{\xi})_x + 2\delta.$$

Par l'inégalité (1.1.6),  $(o, \bar{\xi})_x \leq d(x, \bar{\gamma}) + 2\delta \leq K + 2\delta$ , donc

$$\min\{(\theta, \bar{\xi})_x, (o, \theta)_x\} \leq K + 4\delta.$$

En utilisant à nouveau l'inégalité (1.1.6) et en notant  $\gamma$  un rayon géodésique entre  $o$  et  $\theta$ , on obtient  $(o, \theta)_x \geq d(x, \gamma) - 2\delta \geq c - 2\delta > K + 4\delta$  et  $\min\{(\theta, \bar{\xi})_x, (o, \theta)_x\} = (\theta, \bar{\xi})_x \leq K + 4\delta$ .

Ainsi,  $\{\xi \in \partial X \mid (\xi, \bar{\xi})_x \geq K + 5\delta\} \cap E = \emptyset$ . Par le lemme 2.7.11, il existe  $\eta > 0$  dépendant seulement de  $\delta$  et  $K$  tel que

$$\mathbb{P}_x(X_\infty \notin E) \geq \eta.$$

□

On obtient donc, comme corollaire du théorème 2.3.1 le théorème suivant, qui donne au passage une nouvelle preuve du résultat principal de [Pet12] :

**Théorème 2.7.12.** *Soient  $X$  un graphe hyperbolique coercif quasi-étoilé et  $p$  une fonction de transition markovienne admissible telle que  $p^*$  est sous-markovienne. Pour une fonction harmonique  $u$ , les notions de convergence non-tangentielle, de bornitude non-tangentielle et de finitude de l'énergie non-tangentielle coïncident en  $\mu$ -presque tout point du bord  $\partial X$ .*

On obtient aussi, comme corollaire du théorème 2.3.5, le théorème de Fatou ponctuel suivant

**Théorème 2.7.13.** *Soient  $X$  un graphe hyperbolique coercif quasi-étoilé et  $p$  une fonction de transition markovienne admissible telle que  $p^*$  est sous-markovienne. Pour une fonction harmonique  $u$ , pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial X$ ,  $u$  converge non-tangentielllement en  $\theta$  si et seulement si  $u$  est non-tangentielllement minorée en  $\theta$ .*

**Remarque 2.7.14.** *Dans [Mou00], Mouton démontre que dans le cas des arbres munis d'une marche aléatoire aux plus proches voisins avec une hypothèse d'uniformité sur les fonctions de transitions ( $\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \sim y, \varepsilon \leq p(x, y) \leq \frac{1}{2} - \eta$ ), les notions de convergence radiale, bornitude radiale et finitude de l'énergie radiale sont équivalentes en presque tout point du bord géométrique. Atanasi et Picardello ([AP08]) ont ensuite démontré par d'autres méthodes le résultat analogue associé à la convergence non-tangentielle dans le cas des arbres homogènes, puis Picardello [Pic10] et indépendamment Mouton [Mou10] ont traité récemment le cas des arbres inhomogènes. Tous ces résultats sont des cas particuliers du théorème 2.7.12.*

## 2.8 Les graphes de Diestel-Leader

Avant de définir les graphes de Diestel-Leader, nous introduisons quelques notations. Soit  $T$  un arbre homogène de degré  $q+1, q \geq 2$ , muni de la métrique combinatoire  $d$ . L'espace métrique  $(T, d)$  est hyperbolique donc nous pouvons définir  $\bar{T} := T \cup \partial T$ . Une caractéristique importante des arbres est que pour tous  $x, y \in \bar{T}$ , il existe une unique géodésique joignant ces deux points, que nous noterons  $\overline{xy}$ . Choisissons un point de référence  $o \in T$  dans l'arbre et un autre  $\xi \in \partial T$  sur le bord. Pour deux points  $x, y \in \bar{T}$ , leur *confluent*  $c := x \wedge_o y$  par rapport à  $o$  est défini par  $\overline{ox} \cap \overline{oy} = \overline{oc}$ . De la même manière, pour tous  $x, y \in \bar{T} \setminus \{\xi\}$ , leur confluent  $b := x \wedge_\xi y$  par rapport à  $\xi$  est défini par  $\overline{x\xi} \cap \overline{y\xi} = \overline{b\xi}$ . On définit la *fonction de Busemann*  $h : T \rightarrow \mathbb{Z}$  par

$$h(x) := d(x, x \wedge_\xi o) - d(o, x \wedge_\xi o).$$

Cette fonction partitionne  $T$  en *horocycles*, où le  $k$ -ième horocycle est défini par

$$H_k = \{x \in T \mid h(x) = k\}.$$

Tout sommet  $x \in H_k$  de l'arbre a exactement un "père"  $x^- \in H_{k-1}$  et  $q$  "fils" dans  $H_{k+1}$ . Posons  $\partial^* T = \partial T \setminus \{\xi\}$ .

Considérons désormais deux arbres homogènes  $T_1 = T_q$  et  $T_2 = T_r$  de degrés respectifs  $q \geq 2$  et  $r \geq 2$ , de points de références respectifs  $o_1 \in T_1$  et  $o_2 \in T_2$  et de points bases à l'infini respectivement  $\xi_1 \in \partial T_1$  et  $\xi_2 \in \partial T_2$ .



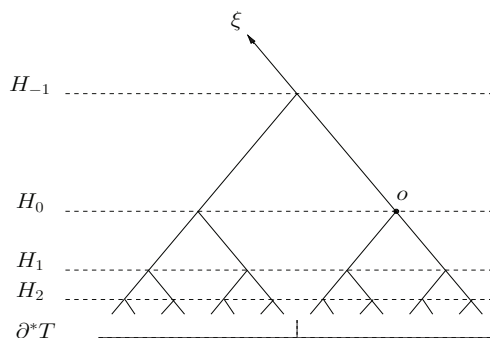


FIGURE 2.8.1 – Couches horocycliques de  $T_2$

**Définition 2.8.1.** *Le graphe de Diestel-Leader  $DL(q, r)$  est défini par*

$$DL(q, r) := \{x_1 x_2 \in T_1 \times T_2 \mid h_1(x_1) + h_2(x_2) = 0\}.$$

*Deux sommets  $x_1 x_2$  et  $y_1 y_2$  du graphe sont voisins si et seulement si  $x_1 \sim y_1$  et  $x_2 \sim y_2$ .*

**Remarque 2.8.2.**  *$DL(q, r)$  est coercif si et seulement si  $q \neq r$  ([Woe00], page 132).*

Pour simplifier les notations, nous noterons désormais  $DL$  à la place de  $DL(q, r)$ .

La distance combinatoire sur le graphe  $DL$  s'exprime de manière simple en termes des distances  $d_1$  et  $d_2$  sur  $T_1$  et  $T_2$  et de la fonction de Busemann (voir [Ber01]) :

$$d(x_1 x_2, y_1 y_2) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) - |h_1(y_1) - h_1(x_1)|.$$

Il y a une compactification naturelle  $\widehat{DL}$  de  $DL$  obtenue comme la fermeture de  $DL$  dans  $\overline{T}_1 \times \overline{T}_2$ . Le bord est alors donné par  $(\overline{T}_1 \times \{\xi_2\}) \cup (\{\xi_1\} \times \overline{T}_2)$  ([Ber01]).

Nous allons maintenant définir une marche aléatoire sur le graphe  $DL$ . Pour un réel  $0 < \alpha < 1$ , nous allons nous intéresser à la marche aux plus proches voisins définie par  $p = p_\alpha$  de la manière suivante : pour  $x_1 x_2 \in DL$  on pose

$$p(x_1 x_2, y_1 y_2) := \begin{cases} \alpha/q & \text{si } y_1^- = x_1 \text{ et } y_2 = x_2^-, \\ (1 - \alpha)/r & \text{si } y_1 = x_1^- \text{ et } y_2^- = x_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous pouvons considérer les projections  $p_1 = p_{1,\alpha}$  et  $p_2 = p_{2,1-\alpha}$  de  $p$  sur  $T_1$  et  $T_2$  définies par

$$p_1(x_1, y_1) := \begin{cases} \alpha/q & \text{si } y_1^- = x_1 \\ (1 - \alpha) & \text{si } y_1 = x_1^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } p_2(x_2, y_2) := \begin{cases} \alpha & \text{si } y_2 = x_2^- \\ (1 - \alpha)/r & \text{si } y_2^- = x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Supposons  $0 < \alpha \leq 1/2$ , le cas  $1/2 < \alpha < 1$  s'obtient en inversant les rôles de  $T_1$  et  $T_2$ . Dans [Woe05], W. Woess a déterminé le bord minimal de Martin de  $DL$  associé à la fonction de transition  $p$ . Pour cela, il a d'abord calculé explicitement les noyaux de Poisson  $K_1, K_2$  associés respectivement aux fonctions de transitions  $p_1$  sur  $T_1$  et  $p_2$  sur  $T_2$ . Posons, pour  $i = 1, 2$ ,  $x_i \in T_i$  et  $\theta_i \in \partial T_i$ ,  $h_i(x_i, \theta_i) := d_i(x_i, x_i \wedge_{o_i} \theta_i) - d_i(o_i, x_i \wedge_{o_i} \theta_i)$ . Notons que puisque  $x_i \wedge_{o_i} \xi_i = x_i \wedge_{\xi_i} o_i$ ,  $h_i(x_i, \xi_i) = h_i(x_i)$ . On a alors pour tous  $x_1 \in T_1, x_2 \in T_2$ ,

$$K_1(x_1, \xi_1) = 1, \quad K_2(x_2, \xi_2) = \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{h_2(x_2)},$$

$$K_1(x_1, \theta_1) := \left( \frac{\alpha}{(1 - \alpha)q} \right)^{(h_1(x_1, \theta_1) - h_1(x_1))/2}, \quad \theta_1 \in \partial^* T_1$$

et  $K_2(x_2, \theta_2) := \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{h_2(x_2)} \left( \frac{\alpha}{(1 - \alpha)r} \right)^{(h_2(x_2, \theta_2) - h_2(x_2))/2}, \quad \theta_2 \in \partial^* T_2.$

**Théorème 2.8.3** (Woess, [Woe05]). *Les fonctions  $x_1 x_2 \mapsto K_1(x_1, \theta_1), \theta_1 \in \partial^* T_1$  et  $x_1 x_2 \mapsto K_2(x_2, \theta_2), \theta_2 \in \partial^* T_2$  sont harmoniques minimales pour  $p$  sur  $DL$  et si  $\alpha < 1/2$ , toutes les fonctions harmoniques minimales sont de cette forme. Dans ce cas, le bord minimal de Martin est*

$$\partial_m DL = (\partial^* T_1 \times \{\xi_2\}) \cup (\{\xi_1\} \times \partial^* T_2) .$$

Notons que W. Woess et V.A. Kaimanovich ([KW02]) ont démontré que dans le cas où  $\alpha = 1/2$ , toute fonction harmonique bornée est constante (le bord de Poisson est trivial), ce qui revient à dire que la fonction constante égale à 1 est harmonique minimale. Puisque le bord de Poisson est trivial dans le cas  $\alpha = 1/2$ , nous nous intéresserons désormais uniquement au cas  $\alpha < 1/2$ .

Nous allons définir une famille de cônes pour chaque sommet de  $\partial_m DL$ . Notons que tout rayon géodésique d'origine  $o_1 o_2$  est de l'une des deux formes suivantes : pour un point  $\theta_1 \xi_2 \in \partial^* T_1 \times \{\xi_2\}$  (resp.  $\xi_1 \theta_2 \in \{\xi_1\} \times \partial^* T_2$ ),  $\gamma$  est un rayon géodésique d'origine  $o_1 o_2$  et pointant vers  $\theta_1 \xi_2$  (resp.  $\xi_1 \theta_2$ ) si les

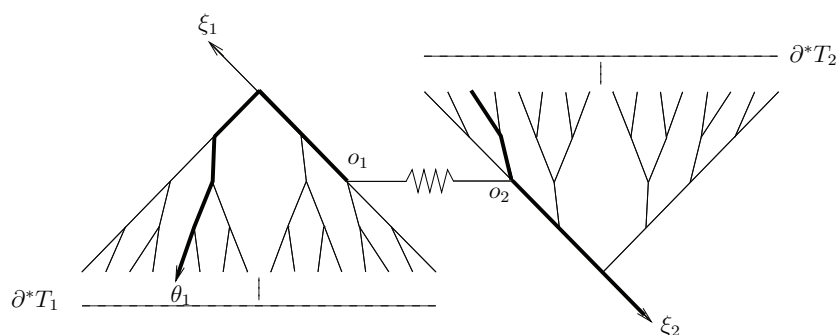


FIGURE 2.8.2 – Le graphe de Diestel-Leader  $DL(2, 2)$  et un rayon géodésique

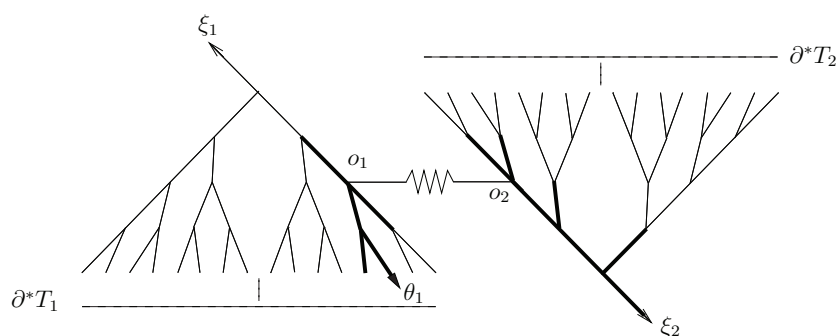


FIGURE 2.8.3 – Un cône  $\Gamma_1^{\theta_1 \xi_2}$

projections  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\gamma$  sur  $T_1$  et  $T_2$  sont des courbes d'origine  $o_1$  et  $o_2$  et si  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) est l'unique rayon géodésique joignant  $o_1$  à  $\theta_1$  (resp. joignant  $o_2$  à  $\theta_2$ ). Un rayon géodésique est représenté sur la figure 2.8.2. Remarquons que comme dans le cas d'un arbre, si deux rayons géodésiques pointent vers un même point du bord, alors leur différence symétrique est finie. Il est alors naturel de définir, pour  $c > 0$ , le cône H-non-tangentiel de rayon  $c > 0$  et de sommet  $\theta_1 \xi_2$  (resp.  $\xi_1 \theta_2$ ), noté  $\Gamma_c^{\theta_1 \xi_2}$  (resp.  $\Gamma_c^{\xi_1 \theta_2}$ ), comme l'ensemble des points du graphe à distance plus petite que  $c$  d'un rayon géodésique d'origine  $o_1 o_2$  et pointant vers  $\theta_1 \xi_2$  (resp.  $\xi_1 \theta_2$ ). La figure 2.8.3 représente un cône  $\Gamma_1^{\theta_1 \xi_2}$  d'épaisseur 1 et de sommet  $\theta_1 \xi_2$ . Comme dans le cadre hyperbolique, il s'agit d'un tube autour de rayons géodésiques. Les propriétés (1) et (3) des cônes H-non-tangentiels sont clairement satisfaites. Dans [BW05], S. Brofferio et W. Woess ont déterminé le bord de Martin de  $DL$  pour la marche aléatoire associée à  $p$ . Pour cela, ils ont commencé par obtenir des estimations sur le noyau de Green. Ces estimations vont nous permettre de montrer, lemme

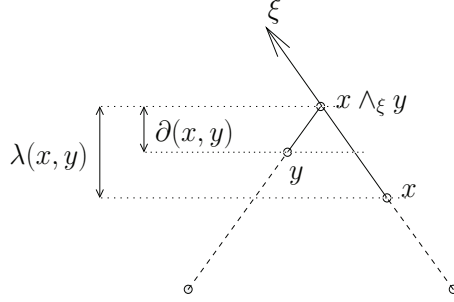


FIGURE 2.8.4 –

2.8.6, que les tubes que nous avons défini vérifient la propriété (2) des familles de cônes H-non-tangentiels. Pour les énoncer, nous avons encore besoin de quelques notations qui sont résumées dans la figure 2.8.4. Nous noterons  $\lambda_i(x_i, y_i) = d_i(x_i, x_i \wedge_{\xi_i} y_i)$  et  $\partial_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i \wedge_{\xi_i} y_i)$ . Ainsi,  $\lambda_i(x_i, y_i) = \partial_i(y_i, x_i)$ . Notons  $s(x, y) = \lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) = \partial_1(x_1, y_1) + \partial_2(x_2, y_2)$ . Afin de simplifier l'énoncé, nous notons dans le théorème suivant  $s := s(x, y)$ ,  $\partial_1 := \partial_1(x, y)$  et  $u_1 := u_1(x, y)$ . L'estimation obtenue par S. Brofferio et W. Woess est la suivante :

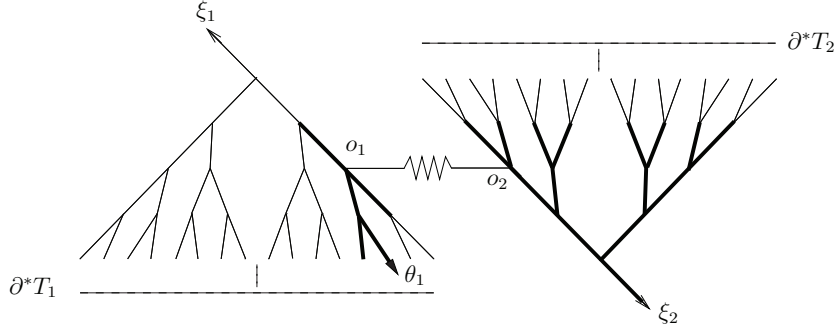
**Théorème 2.8.4** ([BW05]). *Soient  $x = x_1x_2 \in DL(q, r)$  et  $y = y_1y_2 \in DL(q, r)$ . Supposons que  $d(x, y) \rightarrow +\infty$  et donc  $s(x, y) \rightarrow +\infty$ . Alors en notant  $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$  on a*

$$G(x, y) \sim \frac{A_{\beta}}{(q\beta)^{\partial_1} r^{\partial_2}} \left( B_{\beta} \frac{\beta^s - \beta^{\lambda_1}}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^s - \beta^{\partial_1}}{\beta^s - 1} \cdot \frac{1}{\beta^s} + \frac{\beta^s - \beta^{\lambda_1}}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^{\partial_1} - 1}{\beta^s - 1} + \frac{\beta^{\lambda_1} - 1}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^s - \beta^{\partial_1}}{\beta^s - 1} + B_{\beta}^* \frac{\beta^{\lambda_1} - 1}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^{\partial_1} - 1}{\beta^s - 1} \right),$$

où  $A_{\beta} = \frac{qr(\beta^2-1)}{(q\beta-1)(qr-1)}$ ,  $B_{\beta} = \frac{(\beta-1)(q\beta+1)}{q\beta^2-1}$  et  $B_{\beta}^* = \frac{(\beta-1)(r\beta+1)}{r\beta^2-1}$ .

Nous ne pouvons pas appliquer le théorème abstrait 2.3.1 avec cette famille  $(\Gamma_c^{\theta_1\theta_2})$  de cônes H-non-tangentiels, puisque la condition  $(\mathcal{H})$  est fautive pour ces cônes.

Définissons une deuxième famille de cônes :  $W_c^{\theta_1\xi_2}$  (resp.  $W_c^{\xi_1\theta_2}$ ) est l'ensemble des points du graphe tels que leur projection sur l'arbre  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) est à distance plus petite que  $c$  du rayon géodésique  $\overline{o_1\theta_1}$  (resp.  $\overline{o_2\theta_2}$ ). La figure 2.8.5 représente un cône  $W_1^{\theta_1\xi_2}$  d'épaisseur 1 et de sommet  $\theta_1\xi_2$ . Pour cette famille de cônes, la condition  $(\mathcal{H})$  est satisfaite (lemme 2.8.7). En revanche, la propriété (2) des familles de cônes H-non-tangentiels n'est plus vérifiée. A nouveau, nous ne pouvons pas appliquer le théorème 2.3.1.


 FIGURE 2.8.5 – Un cône  $W_1^{\theta_1 \xi_2}$ 

Nous pouvons cependant montrer que pour une fonction harmonique  $u$ , en  $\mu$ -presque tout point  $\theta_1 \theta_2 \in \partial^* DL$ , si  $u$  est minorée sur les cônes donnés par la famille  $(W_c^{\theta_1 \theta_2})_c$ , alors elle converge H-non-tangentielllement en  $\theta_1 \theta_2$  pour la famille de cônes H-non-tangentiels  $(\Gamma_c^{\theta_1 \theta_2})_c$ . Cela fournit donc un théorème de Fatou ponctuel et donc en particulier un théorème de Fatou global.

**Théorème 2.8.5.** *Soient  $0 < \alpha < 1/2$ ,  $q \geq 2$  et  $r \geq 2$ . Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $DL$  associée à la marche aléatoire  $p_\alpha$ . Pour  $\mu$ -presque tout  $\theta_1 \theta_2 \in \partial^* DL$ , si  $u$  est minorée sur les cônes  $W_c^{\theta_1 \theta_2}$ ,  $c > 0$ , alors  $u$  converge H-non-tangentielllement (pour les cônes  $\Gamma_c^{\theta_1 \theta_2}$ ,  $c > 0$ ) en  $\theta_1 \theta_2$ .*

Pour démontrer ce théorème, nous commençons par prouver deux lemmes. Le lemme 2.8.6 assure que la famille de cônes  $(\Gamma_c^{\theta_1 \theta_2})_c$  est une famille de cônes H-non-tangentiels. Le lemme 2.8.7 établit l'hypothèse  $(\mathcal{H})$  pour la famille de cônes  $(W_c^{\theta_1 \theta_2})_c$ .

**Lemme 2.8.6.** *Pour tout  $\theta_1 \theta_2 \in \partial^* DL$ , la famille de tubes  $(\Gamma_c^{\theta_1 \theta_2})_{c>0}$  vérifie la propriété (2) des cônes H-non-tangentiels.*

*Démonstration.* Soit  $\theta_1 \in \partial^* T_1$ . Si  $x$  est sur un rayon géodésique entre  $o$  et  $\theta_1 \xi_2$  et si  $d(o, x)$  est assez grande,  $\partial_2(o_2, x_2) = 0$ . Avec les notations précédant le théorème 2.8.4, cela implique que pour un tel point  $x$ ,  $s(o, x) = \partial_1(o_1, x_1)$ . À partir de l'estimation du théorème 2.8.4, on obtient que si  $d(o, x) \rightarrow \infty$ , avec  $x$  sur un tel rayon géodésique, alors  $G(o, x) \sim \frac{A_\beta B_\beta^*}{(q\beta)^{\partial_1} (r\beta)^{\partial_2}}$ . En effet, lorsque  $x$  est sur un rayon géodésique entre  $o$  et  $\theta_1 \xi_2$  et  $d(o, x) \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\beta^s - \beta^{\lambda_1}}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^{\partial_1} - 1}{\beta^s - 1} = \frac{\beta^{\lambda_1 + \lambda_2} - \beta^{\lambda_1}}{\beta^{\lambda_1 + \lambda_2} - 1} \rightarrow \beta^{\lambda_1},$$

$$B_\beta^* \frac{\beta^{\lambda_1} - 1}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^{\partial_1} - 1}{\beta^s - 1} = B_\beta^* \frac{\beta^{\lambda_1} - 1}{\beta^{\lambda_1 + \lambda_2} - 1} \rightarrow B_\beta^* (1 - \beta^{\lambda_1})$$

et les autres termes sont nuls.

On obtient alors, pour  $x$  sur un rayon géodésique entre  $o$  et  $\theta_1\xi_2$  et  $d(o, x) \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} G(o, x)K(x, \theta_1\xi_2) &\sim \frac{A_\beta(B_\beta^*(1 - \beta^{\lambda_1}) + \beta^{\lambda_1})}{(q\beta)^{\partial_1 r^{\partial_2}}} \left(\frac{1}{q\beta}\right)^{(h_1(x_1, \theta_1) - h_1(x_1))/2} \\ &= \frac{A_\beta(B_\beta^*(1 - \beta^{\lambda_1}) + \beta^{\lambda_1})}{(q\beta)^{\partial_1 r^{\partial_2}}} \left(\frac{1}{q\beta}\right)^{(-d_1(o_1, x_1) - (\partial_1 - \lambda_1))/2} \\ &= A_\beta(B_\beta^*(1 - \beta^{\lambda_1}) + \beta^{\lambda_1}). \end{aligned}$$

De la même manière, pour  $\theta_2 \in \partial^*T_2$ , si  $x$  est sur un rayon géodésique entre  $o$  et  $\xi_1\theta_2$  et  $d(o, x) \rightarrow \infty$ ,  $\partial_1(o_1, x_1) = 0$ ,

$$\begin{aligned} B_\beta \frac{\beta^s - \beta^{\lambda_1}}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^s - \beta^{\partial_1}}{\beta^s - 1} \cdot \frac{1}{\beta^s} &\rightarrow B_\beta \frac{1 - \beta^{\lambda_2}}{\beta^{\lambda_2}}, \\ \frac{\beta^{\lambda_1} - 1}{\beta^s - 1} \cdot \frac{\beta^s - \beta^{\partial_1}}{\beta^s - 1} &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

et les autres termes s'annulent. Donc

$$\begin{aligned} G(o, x)K(x, \xi_1\theta_2) &\sim \frac{A_\beta(B_\beta(1 - \beta^{\lambda_2}) + \beta^{\lambda_2})}{(q\beta)^{\partial_1 r^{\partial_2} \beta^{\lambda_2}}} \beta^{-(\partial_2 - \lambda_2)} (\beta r)^{(d_2(o_2, x_2) + (\partial_2 - \lambda_2))/2} \\ &= \frac{A_\beta(B_\beta(1 - \beta^{\lambda_2}) + \beta^{\lambda_2})}{r^{\partial_2} \beta^{\lambda_2}} \beta^{\lambda_2 - \partial_2} (\beta r)^{\partial_2} \\ &= A_\beta(B_\beta(1 - \beta^{\lambda_2}) + \beta^{\lambda_2}). \end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité de Harnack sur les boules (théorème 2.5.1), pour tout  $c > 0$ , il existe  $R > 0$  tel que pour tout sommet  $\theta_1\theta_2 \in \partial^*DL$ ,

$$\Gamma_c^\theta \subset \{x \in DL(q, r) \mid G(o, x)K(x, \theta_1\theta_2) \geq R\}.$$

□

Établissons maintenant la condition  $(\mathcal{H})$  pour la famille  $(W_c^{\theta_1\theta_2})_c$ . Ce résultat est naturel, car dans la cas où  $\alpha < 1/2$ , le bord  $\partial^*T_1 \times \{\xi_2\}$  n'est pas vu par la marche aléatoire et bien que le graphe  $DL$  ne soit pas hyperbolique, d'un point de vue probabiliste, tout se passe comme si l'on se trouvait dans le cas hyperbolique d'un arbre. Notons, pour  $E \subset \partial^*DL$ ,  $W_c(E) := \bigcup_{\theta_1\theta_2 \in E} W_c^{\theta_1\theta_2}$ .

**Lemme 2.8.7.** *L'hypothèse  $(\mathcal{H})$  est satisfaite pour la famille de cônes  $(W_c^{\theta_1\theta_2})$ .*

*Démonstration.* Soit  $E$  un sous-ensemble borélien de  $\partial^*DL$ . L'ensemble  $E$  se décompose en  $E_1 \cup E_2$ , avec  $E_1 \subset \partial^*T_1 \times \{\xi_2\}$  et  $E_2 \subset \{\xi_1\} \times \partial^*T_2$ . Comme  $\alpha < 1/2$ , pour tout  $x \in DL$ ,  $\mathbb{P}_x(X_\infty \in E_1) = 0$ . Notons pour  $i = 1, 2$ ,  $\pi_i$  la projection de  $DL$  sur  $T_i$ .

On sait ([Mou00], corollaire 2) que pour un arbre  $T$  muni d'une marche aux plus proches voisins dont les probabilités de transition vérifient une hypothèse d'uniformité ( $\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \sim y, \varepsilon \leq p(x, y) \leq \frac{1}{2} - \eta$ ), il existe un réel  $0 < C < 1$  tel que pour tout  $x \in T$  et toute partie connexe  $U \subset T$ ,

$$\mathbb{P}_x(\text{la marche rencontre } U) \leq C^{d(x,U)}.$$

Appliquons ce résultat à la marche aléatoire projetée sur l'arbre  $T_2$ . Notons  $W := W_1(E_2) = \bigcup_{\xi_1\theta_2 \in E_2} W_1^{\xi_1\theta_2}$ . Il existe une constante  $0 < C < 1$  telle que pour  $x_2 \notin \pi_2(W)$ ,

$$(\mathbb{P}_2)_{x_2}((\pi_2(X_n))_n \text{ rencontre } \pi_2(W)) \leq C.$$

Soit maintenant  $x \notin W_1(E)$ , donc en particulier  $x \notin W$  et  $x_2 \notin \pi_2(W)$  (par définition des  $W_c^{\theta_1\theta_2}$ ) et on a

$$\mathbb{P}_x(\text{la marche rencontre } W) \leq C < 1.$$

Pour sortir dans  $E_2$ , la marche aléatoire doit rencontrer  $W$ , le lemme est démontré.  $\square$

*Démonstration du théorème 2.8.5.* La preuve est similaire à celle du théorème 2.3.5, nous en donnons les grandes étapes. Notons, pour  $c > 2$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$A_c^m := \{\theta_1\theta_2 \in \partial^*DL \mid \forall x \in W_c^{\theta_1\theta_2}, u(x) \geq -m\}.$$

Posons également

$$U := W_{c-1}(A_c^m)$$

et notons  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ . La fonction  $u + m$  est harmonique positive sur  $\tilde{U} := \{x \in DL \mid d(x, U) \leq 1\}$ . D'après le lemme 2.5.5,  $\mu$ -presque tout  $\theta_1\theta_2 \in A_c^m$  satisfait la propriété suivante : pour tout  $e > 0$ ,  $W_e^{\theta_1\theta_2} \setminus U$  est contenu dans une boule  $B(o_1o_2, N)$  (il s'agit de l'analogie, pour les cônes  $W_c^{\theta_1\theta_2}$  de la notion de point H-tangentiel pour  $U$ ). Une simple réécriture des preuves des lemmes 2.6.2 et 2.6.3 et de la première partie de la preuve du théorème 2.6.1 permet de démontrer successivement que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta_1\theta_2 \in A_c^m$ , la marche aléatoire finit  $\mathbb{P}_o^{\theta_1\theta_2}$ -presque sûrement sa vie dans  $U$ , que  $\mathbb{P}_o^{\theta_1\theta_2}(\tau = +\infty) > 0$  et finalement que  $u + m$ , et donc  $u$ , convergent stochastiquement en  $\mu$ -presque tout  $\theta_1\theta_2 \in A_c^m$ .

Mais d'après le corollaire 2.5.3, la convergence stochastique en  $\theta_1\theta_2$  implique la convergence H-non-tangentielle en  $\theta_1\theta_2$ , ce qui termine la preuve du théorème.  $\square$

# Chapitre 3

## Cadre continu

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas d'une variété riemannienne  $(M, g)$  munie de l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta$ . Nous montrons un résultat de type Calderón-Stein dans le cas où la variété  $M$  est hyperbolique au sens de Gromov, de courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité strictement positif. Nous montrons également un théorème de Fatou local dans ce cadre, qui a pour corollaire un théorème de Fatou ponctuel. Nous déduisons enfin du théorème de Fatou local un critère de convergence non-tangentielle appelé la densité de l'énergie. Ces résultats (sauf le critère de la densité de l'énergie) sont des analogues continus de certains théorèmes démontrés au chapitre précédent. Les preuves sont similaires à celles du cadre discret, bien que certaines difficultés apparaissent, notamment avec les arguments géométriques. Nous insistons sur les arguments qui diffèrent, mais pour faciliter la lecture et au risque de quelques répétitions, nous redonnons brièvement les idées des preuves semblables à leurs analogues discrets. La première section est consacrée à la définition des différents objets permettant d'énoncer les principaux résultats du chapitre. La section 2 est consacrée au mouvement brownien associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami. Nous expliquons comment le conditionner à "sortir" en un point fixé du bord. Cela permet d'obtenir un résultat stochastique analogue au théorème de type Calderón-Stein. La preuve de ce dernier, basée sur le résultat stochastique, est donnée section 3. Les sections 4 et 5 sont consacrées aux démonstrations des théorèmes de Fatou et du critère de la densité de l'énergie.



## 3.1 Résultat principal

### 3.1.1 Cadre géométrique

On se place dans une variété riemannienne  $(M, g)$  de classe  $C^\infty$ , de dimension  $d \geq 2$ , complète et simplement connexe. On supposera  $M$  quasi-étoilée, coercive, hyperbolique au sens de Gromov, de courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité strictement positif. Nous dirons qu'une telle variété vérifie les conditions ( $\clubsuit$ ).

L'opérateur de *Laplace-Beltrami* est donné en fonction de la métrique par la formule

$$\Delta = \left( -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \right) \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (\sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) \right).$$

Une fonction  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  sera alors dite *harmonique* si  $\Delta u = 0$ .

La *fonction de Green*  $G$  est la fonction  $(x, y) \mapsto G(x, y) := \int_0^{+\infty} p(t, x, y) dt$ , où  $p(t, x, y)$  est le noyau de la chaleur associé à  $\Delta$ . Elle est égale à  $+\infty$  sur la diagonale et finie en dehors de la diagonale. La fonction  $G$  est positive, symétrique et pour tout  $y \in M$ ,  $x \mapsto G(x, y)$  est harmonique sur  $M \setminus \{y\}$ . Comme pour le cas discret, les méthodes que nous utilisons nécessitent une uniformité dans le comportement de la fonction de Green  $G$ . Cette uniformité est traduite par le principe de Harnack à l'infini (théorème 3.3.2) et par la proposition suivante, que l'on peut trouver dans [Anc90] (corollaire 4.5 page 92). La proposition est une conséquence des hypothèses de la géométrie bornée (puisque la courbure de Ricci est minorée et le rayon d'injectivité strictement positif, remarque 1.3.2) de  $M$  et de coercivité.

**Proposition 3.1.1.** *Si  $M$  vérifie les conditions ( $\clubsuit$ ), il existe deux constantes  $C_1 = C_1(M) > 0$  et  $c_1 = c_1(M) > 0$  telles que pour tous  $x, y \in M$  avec  $d(x, y) \geq 1$ , on ait*

$$G(x, y) \leq C_1 \exp(-c_1 d(x, y)). \quad (3.1.1)$$

### 3.1.2 Bords à l'infini

La variété  $M$  étant hyperbolique au sens de Gromov, on peut considérer le bord géométrique de  $M$ , défini au chapitre 1. D'autre part, on peut considérer le bord naturel lorsqu'on s'intéresse aux fonctions harmoniques positives, puisqu'il permet de les représenter par les mesures positives sur ce bord : le bord de Martin. Notons  $o \in M$  un point base. On définit alors le *noyau de Martin* par

$$K(x, y) := \frac{G(x, y)}{G(o, y)}, \text{ pour } y \in M \setminus \{o\}, x \neq y.$$

La *compactification de Martin*  $\widehat{M}$  est l'unique plus petite compactification de  $M$  telle que pour tout  $x \in M$ ,  $K(x, \cdot)$  s'étend continûment sur  $\widehat{M} \setminus \{o\}$ . Le *bord de Martin* est alors  $\partial_M M := \widehat{M} \setminus M$ .

Une suite  $(y_n)_n$  de  $M$  tendant vers l'infini dans  $M$  converge alors vers un point  $\theta$  du bord de Martin si la suite  $(K(\cdot, y_n))_n$  converge simplement sur  $M$ . Deux suites sont équivalentes si elles définissent la même fonction harmonique. Nous noterons  $K(\cdot, \theta)$  la limite, qui est une fonction harmonique positive.

Une fonction  $h$  sera dite *harmonique minimale* si elle est harmonique, positive, si  $h(o) = 1$  et si toute fonction harmonique strictement positive  $h_1$  telle que  $h \geq h_1$  sur  $M$  est un multiple de  $h$ . On appelle alors *bord minimal de Martin* l'ensemble

$$\partial_m M := \{\theta \in \partial_M M \mid K(\cdot, \theta) \text{ est harmonique minimale}\}.$$

Le bord de Martin permet une représentation intégrale des fonctions harmoniques positives : pour toute fonction harmonique positive  $h$ , il existe une unique mesure  $\nu^h$  sur  $\partial_M M$  telle que  $\nu^h(\partial_M M \setminus \partial_m M) = 0$  et pour tout  $x \in M$ ,  $h(x) = \int_{\partial_m M} K(x, \theta) d\nu^h(\theta)$ .

Sous les hypothèses faites sur  $M$ , A. Ancona a démontré ([Anc90]) que les compactifications géométriques et de Martin coïncident et que tous les points du bord de Martin sont minimaux. Nous avons donc ici une unique notion de bord, que nous noterons  $\partial M$ .

Il y a une famille de mesures sur le bord naturellement associée aux fonctions harmoniques et appelée la famille des mesures harmoniques  $\mu_x, x \in M$ . Elles sont couramment définies comme lois de sortie du mouvement brownien (voir section 4.2.2), mais elles peuvent également être définies par la résolution du problème de Dirichlet ([Anc90]) : toute fonction  $f$  continue sur le bord se prolonge continûment et de manière unique en une fonction harmonique  $u$  sur  $M$ , donnée par la formule

$$u(x) = \int_{\partial M} f(\theta) d\mu_x(\theta).$$

Une remarque importante est que toute ces mesures sont équivalentes et définissent donc une notion de  $\mu$ -négligeabilité.

### 3.1.3 Notions non-tangentielles

Notons à nouveau  $o \in M$  un point base. Le cadre hyperbolique nous permet d'introduire le *tube non-tangentiel* de sommet  $\theta \in \partial M$  et de rayon

$c > 0$  comme le tube de rayon  $c$  autour des rayons géodésiques joignant  $o$  et  $\theta$  :

$$\Gamma_c^\theta := \{x \in M \mid \exists \gamma \text{ un rayon géodésique entre } o \text{ et } \theta \text{ tel que } d(x, \gamma) < c\}.$$

Une suite  $(x_n)_n$  de points de  $M$  converge *non-tangentielllement* vers  $\theta \in \partial M$  si les  $x_n$  convergent vers  $\theta$  tout en restant dans un tube  $\Gamma_c^\theta$  pour un certain  $c > 0$ . Une fonction  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  converge *non-tangentielllement* vers  $\ell$  en  $\theta$  si pour toute suite  $(x_n)_n$  convergeant non-tangentielllement vers  $\theta$ , la suite  $(u(x_n))_n$  converge vers  $\ell$ . De la même manière,  $u$  est *non-tangentielllement bornée* en  $\theta$  si pour tout  $c > 0$ , la restriction de  $u$  à  $\Gamma_c^\theta$  est bornée. Nous pouvons enfin introduire l'*énergie non-tangentielle* de  $u$  sur le tube  $\Gamma_c^\theta$  comme la quantité

$$J_c^\theta := \|\nabla u\|_{\Gamma_c^\theta}^2 = \int_{\Gamma_c^\theta} |\nabla u|^2 d\nu_M.$$

On parle alors d'*énergie non-tangentielle finie* en  $\theta$  si l'énergie  $J_c^\theta$  est finie pour tout  $c > 0$ .

### 3.1.4 Résultats et corollaires

Rappelons, puisque nous nous en servons à plusieurs reprises, qu'une variété riemannienne vérifie les conditions ( $\clubsuit$ ) si elle est complète, simplement connexe, quasi-étoilée, coercive, hyperbolique au sens de Gromov, de courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité strictement positif.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de type Calderón-Stein annoncé :

**Théorème 3.1.2.** *Soit  $M$  une variété riemannienne vérifiant les conditions ( $\clubsuit$ ). Pour toute fonction harmonique  $u$ , les notions suivantes sont équivalentes en  $\mu$ -presque tout point du bord  $\partial M$  :*

1.  $u$  converge non-tangentielllement en  $\theta$  ;
2.  $u$  est non-tangentielllement bornée en  $\theta$  ;
3.  $u$  est d'énergie non-tangentielle finie en  $\theta$ .

Un corollaire immédiat du théorème 3.1.2 et du théorème de J. Cao (théorème 1.4.8) est le suivant :

**Corollaire 3.1.3.** *Soit  $M$  une variété riemannienne vérifiant les conditions ( $\clubsuit$ ) et telle que les diamètres des composantes connexes de  $\partial M$  soient minorés par une constante  $c > 0$ . Alors pour une fonction harmonique sur*

$M$ , convergence de l'énergie non-tangentielle, bornitude non-tangentielle et finitude de l'énergie non-tangentielle sont trois propriétés  $\mu$ -presque partout équivalentes.

Le schéma de la preuve du théorème 3.1.2 est le même que celui du théorème 2.3.1. Nous adoptons les mêmes notations que dans le cas discret. Pour une fonction harmonique  $u$  fixée, notons

$$\mathcal{L}_c := \left\{ \theta \in \partial M \mid \lim_{\substack{x \in \Gamma_c^\theta \\ x \rightarrow \theta}} u(x) \text{ existe et est finie} \right\};$$

$$\mathcal{N}_c := \{ \theta \in \partial M \mid N_c^\theta(u) < +\infty \} \quad \text{où } N_c^\theta(u) = \sup_{x \in \Gamma_c^\theta} |u(x)|;$$

$$\mathcal{J}_c := \{ \theta \in \partial M \mid J_c^\theta(u) < +\infty \}$$

et posons

$$\mathcal{L} := \bigcap_{c>0} \mathcal{L}_c; \quad \mathcal{N} := \bigcap_{c>0} \mathcal{N}_c \quad \text{et} \quad \mathcal{J} := \bigcap_{c>0} \mathcal{J}_c.$$

Avec ces notations, le théorème 3.1.2 s'écrit

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{N} \approx \mathcal{J},$$

où  $A \approx B$  signifie que les sous-ensemble  $A$  et  $B$  de  $\partial M$  ne diffèrent que d'un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle.

Un autre critère connu de convergence non-tangentielle est celui de la densité de l'intégrale d'aire. Il a été étudié par J. Brossard ([Br88]) dans le demi-espace euclidien et par F. Mouton sous des hypothèses de courbure négative pincée ([Mou07]). Pour l'obtenir, nous avons suivi la démarche de ces deux auteurs. Cela nous a amené à prouver un théorème de Fatou "local".

Si  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $\theta \in \partial M$ , on dit que  $\theta$  est *tangentiel* pour  $U$  si l'ensemble  $\Gamma_c^\theta \setminus U$  est borné pour tout  $c > 0$ .

**Théorème 3.1.4.** *Soit  $M$  une variété riemannienne vérifiant les conditions ( $\clubsuit$ ). Si  $u$  est une fonction harmonique positive sur un ouvert  $U$  de  $M$ , alors pour  $\mu$ -presque tout point  $\theta$  tangentiel pour  $U$ , la fonction  $u$  converge non-tangentiellement en  $\theta$ .*

On dit que  $u$  est *non-tangentiellement minorée en  $\theta$*  si pour tout  $c > 0$ ,  $u$  est minorée sur le tube non-tangentiel  $\Gamma_c^\theta$ .

**Corollaire 3.1.5.** *Soient  $M$  une variété riemannienne vérifiant les conditions ( $\clubsuit$ ) et  $u$  une fonction harmonique sur  $M$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes en  $\mu$ -presque tout point  $\theta \in \partial M$  :*

1.  $u$  converge non-tangentiellement en  $\theta$  ;
2.  $u$  est non-tangentiellement minorée en  $\theta$  ;
3. Il existe  $c > 0$  tel que  $u$  soit minorée sur  $\Gamma_c^\theta$ .

Pour une fonction harmonique  $u$  sur le demi-espace euclidien, la *densité de l'intégrale d'aire* a été introduite par R.F. Gundy en 1983 ([Gun83]) et utilisée par R.F. Gundy et M.L. Silverstein ([GS85]), puis par L. Chevalier et J. Brossard ([BC88]) pour obtenir une caractérisation de la classe  $H^1$  des fonctions harmoniques. Elle est définie par les formules

$$D_\alpha^r(x) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\alpha(x)} y^{1-\nu} \Delta|u - r|(dz) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} y^{1-\nu} |\nabla u(z)| \sigma_r(dz),$$

où les points du demi-plan  $\mathbb{R}^\nu \times ]0, +\infty[$  sont notés  $z = (x, y)$ ,  $\Gamma_\alpha(x)$  est le cône non-tangentiel de sommet  $x$  et d'ouverture  $\alpha$  et  $\sigma_r$  est la mesure portée par la ligne de niveau  $\{u = r\}$ . J. Brossard a utilisé dans [Bro88] la densité de l'intégrale d'aire pour donner un nouveau critère d'existence de limite non-tangentielle dans le demi-espace.

F. Mouton ([Mou07]) a formulé ces expressions avec la métrique hyperbolique. Cela l'a conduit à définir, pour une fonction harmonique  $u$  sur une variété riemannienne  $M$  simplement connexe, complète et de courbure négative pincée, les deux quantités suivantes : pour un point  $\theta \in \partial M$  et pour un réel  $c > 0$ , posons

$$D_c^r(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_c^\theta} \Delta|u - r|(dx)$$

et

$$\tilde{D}_c^r(\theta) := \int_{\Gamma_c^\theta} |\nabla u(x)| \sigma_r(dx),$$

où  $\sigma_r$  est la mesure d'hypersurface sur  $\{u = r\}$ . Les mesures positives  $-\frac{1}{2}\Delta|u - r|$  et  $|\nabla u| \sigma_r$  sont égales pour presque tout  $r \in \mathbb{R}$ . Nous appelons désormais la première quantité  $D_c^r$  la *densité de l'énergie*. F. Mouton a démontré ([Mou07]) le critère de convergence non-tangentielle suivant : soient  $M$  une variété riemannienne simplement connexe, complète de courbure négative pincée,  $u$  une fonction harmonique sur  $M$  et  $c > 0$ . Alors  $u$  converge non-tangentiellement en  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tel que  $D_c^0(\theta)$  est fini. Nous généralisons ce résultat aux variétés hyperboliques au sens de Gromov :

**Théorème 3.1.6.** *Soient  $M$  une variété riemannienne vérifiant les conditions  $(\clubsuit)$  et  $u$  une fonction harmonique sur  $M$ . Pour tout  $c > 0$  et tout  $r \in \mathbb{R}$ , la fonction  $u$  converge non-tangentiellement en  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tel que  $D_c^r(\theta)$  est finie.*

## 3.2 Conditionnement et mouvement Brownien

L'objectif de cette section est d'établir un résultat stochastique analogue au théorème 3.1.2 du type

$$\mathcal{L}^* \approx \mathcal{N}^* \approx \mathcal{J}^*,$$

où  $\mathcal{L}^*$ ,  $\mathcal{N}^*$  et  $\mathcal{J}^*$  sont des sous-ensembles de  $\partial M$  jouant du point de vue des probabilités le rôle des ensembles  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{J}$ . Avant cela, nous faisons quelques rappels sur le mouvement brownien associé à l'opérateur  $\Delta$  et nous expliquons comment conditionner le mouvement brownien à "sortir" de  $M$  en un point fixé du bord  $\partial M$ .

### 3.2.1 Mouvement Brownien

On définit le *mouvement brownien*  $X_t$  sur  $M$  comme processus de diffusion associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami. Le noyau de la chaleur  $p(t, x, y)$  est la densité de transition de  $X_t$ . Les hypothèses faites sur  $M$  impliquent qu'il n'y a pas d'explosion et le mouvement brownien est défini pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  (voir [Anc90] page 60). En choisissant comme espace probabilisé  $\Omega := C(\mathbb{R}_+, M)$ , pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $M$  et pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$  est une fonction continue, c'est-à-dire un chemin dans  $M$ . Lorsqu'on considère uniquement les trajectoires partant de  $z \in M$ , on obtient une probabilité  $\mathbb{P}_z$ .

Une propriété importante du bord de Martin est que pour  $\mathbb{P}_z$ -presque toute trajectoire  $\omega \in \Omega$ , il existe un point du bord  $\theta \in \partial M$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(\omega) = \theta.$$

On peut trouver une preuve de cette propriété dans [Anc90] (page 34). Notons alors  $X_\infty(\omega)$  cette limite. Sous  $\mathbb{P}_z$ , la loi de  $X_\infty$ , notée  $\mu_z$  est appelée la *mesure harmonique*. Remarquons que la mesure harmonique  $\mu_o$  est la mesure  $\nu^1$  représentant la fonction harmonique constante égale à 1. Toutes ces mesures sont équivalentes et leurs dérivées de Radon-Nykodim sont données par

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\theta) = \lim_{z \rightarrow \theta} \frac{G(y, z)}{G(x, z)} = \frac{K(y, \theta)}{K(x, \theta)}.$$

Rappelons enfin une propriété fondamentale du mouvement brownien : la *propriété de martingale* (voir [Dur84]). Pour une fonction  $u$  de classe  $C^2$ ,

$$u(X_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta u(X_s) ds$$

est une martingale locale en  $t$  par rapport aux probabilités  $\mathbb{P}_z$ . En particulier si la fonction  $u$  est harmonique,  $(u(X_t))_{t \in \mathbb{R}^+}$  est une martingale locale.

### 3.2.2 Conditionnement

Les *h-processus de Doob* ([Doo57]) permettent de conditionner le mouvement brownien à sortir en un point fixé  $\theta$  du bord. Soit  $\tau_N$  le temps de sortie de la boule  $B(z, N)$  et  $\mathcal{F}_{\tau_N}$  la tribu correspondant à  $\tau_N$ . Pour  $A \in \mathcal{F}_{\tau_N}$ , posons

$$\mathbb{P}_z^\theta(A) := \frac{1}{K(z, \theta)} \mathbb{E}_z[\mathbf{1}_A \cdot K(X_{\tau_N}, \theta)],$$

ce qui donne une probabilité sur  $\mathcal{F}_{\tau_N}$ , pourvu que l'on puisse vérifier que  $\mathbb{P}_z^\theta(\Omega) = 1$ . Or comme  $K(\cdot, \theta)$  est une fonction harmonique, bornée sur  $B(z, N)$ , on a  $\mathbb{P}_z$ -presque sûrement

$$\mathbb{E}_z [K(X_{\tau_{N+1}}, \theta) | \mathcal{F}_{\tau_N}] = K(X_{\tau_N}, \theta). \quad (3.2.1)$$

Ainsi,  $\mathbb{E}_z[K(X_{\tau_N}, \theta)] = \mathbb{E}_z[K(X_0, \theta)] = K(z, \theta)$  et donc  $\mathbb{P}_z^\theta(\Omega) = 1$ .

Si  $A \in \mathcal{F}_{\tau_N}$ , l'équation (3.2.1) donne

$$\mathbb{E}_z [\mathbf{1}_A \cdot K(X_{\tau_{N+1}}, \theta)] = \mathbb{E}_z [\mathbf{1}_A \cdot K(X_{\tau_N}, \theta)].$$

Les probabilités sur chaque  $\mathcal{F}_{\tau_N}$  sont donc compatibles et on obtient ainsi une probabilité sur la tribu  $\mathcal{F}_\infty$ , engendrée par les  $\mathcal{F}_{\tau_N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , qui coïncide avec les probabilités précédentes sur  $\mathcal{F}_{\tau_N}$ . Nous la noterons à nouveau  $\mathbb{P}_z^\theta$ .

Cette probabilité satisfait la *propriété forte de Markov* : pour un temps d'arrêt presque sûrement fini  $\tau$  et une variable aléatoire positive  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable  $F$ ,

$$\mathbb{E}_z^\theta[F \circ \Theta^\tau | \mathcal{F}_\tau] = u_F(X_\tau),$$

où  $u_F(y) = \mathbb{E}_y^\theta[F]$  et  $\Theta^t : \Omega \rightarrow \Omega$  est l'opérateur de translation  $\omega \mapsto \omega(\cdot + t)$ . De plus, pour  $F$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable,

$$\mathbb{E}_z^\theta[F] = \frac{1}{K(z, \theta)} \mathbb{E}_z[F \cdot K(X_\tau, \theta)]. \quad (3.2.2)$$

Un simple calcul montre la formule de conditionnement suivante : pour  $F$   $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable,

$$\mathbb{E}_z[F] = \int_{\partial M} \mathbb{E}_z^\theta[F] d\mu_z(\theta). \quad (3.2.3)$$

Enfin,  $\mathbb{P}_z^\theta$  satisfait une *loi asymptotique du 0-1* : si un événement  $A$  de  $\mathcal{F}_\infty$  est *asymptotique* (i.e. si  $\mathbf{1}_A \circ \Theta^{\tau_N} = \mathbf{1}_A$  pour tout  $N$ ), l'application  $z \mapsto \mathbb{P}_z^\theta(A)$  est constante et vaut 0 ou 1. En particulier,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque sûrement,  $X_\infty = \theta$  et le mouvement brownien est bien conditionné à sortir en  $\theta$ .

### 3.2.3 Résultat brownien

Pour une fonction  $u$ , nous étudions dans cette sous-section le comportement de  $u$  le long des trajectoires browniennes. Pour cela, nous définissons les trois événements suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{**} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{t \rightarrow \infty} u(X_t(\omega)) \text{ existe et est finie} \right\}; \\ \mathcal{N}^{**} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid N^*(\omega) < +\infty \right\}, \text{ où } N^*(\omega) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{|u(X_t(\omega))|\} \\ \text{et } \mathcal{J}^{**} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid J^*(\omega) < +\infty \right\}, \text{ où } J^*(\omega) = \int_0^\infty |\nabla u(X_t(\omega))|^2 dt. \end{aligned}$$

Ces trois événements étant asymptotiques, la loi du 0-1 assure que les quantités  $\mathbb{P}_z^\theta(\mathcal{L}^{**})$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta(\mathcal{N}^{**})$  et  $\mathbb{P}_z^\theta(\mathcal{J}^{**})$  ont pour valeurs 0 ou 1 et ne dépendent pas de  $z$ . On définit alors les sous-ensembles suivants de  $\partial M$ , analogues stochastiques des ensembles non-tangentiels  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{J}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= \{\theta \in \partial M \mid \mathbb{P}_\theta^\theta(\mathcal{L}^{**}) = 1\}, \\ \mathcal{N}^* &= \{\theta \in \partial M \mid \mathbb{P}_\theta^\theta(\mathcal{N}^{**}) = 1\} \text{ et } \mathcal{J}^* = \{\theta \in \partial M \mid \mathbb{P}_\theta^\theta(\mathcal{J}^{**}) = 1\}. \end{aligned}$$

On dit que  $u$  converge stochastiquement en  $\theta \in \partial M$  si  $\theta \in \mathcal{L}^*$ ,  $u$  est bornée stochastiquement en  $\theta$  si  $\theta \in \mathcal{N}^*$  et  $u$  est d'énergie stochastique finie en  $\theta$  si  $\theta \in \mathcal{J}^*$ . Ces notions stochastiques permettent de démontrer un analogue stochastique au théorème 3.1.2. Il a été prouvé par F. Mouton dans [Mou95]. La preuve est très similaire à l'analogie discret (proposition 2.4.1) et repose sur le théorème de convergence des martingales locales.

**Proposition 3.2.1** ([Mou95]). *Pour une fonction harmonique  $u$  sur  $M$ , les notions de convergence stochastique, de bornitude stochastique et de finitude de l'énergie stochastique coïncident en  $\mu$ -presque tout point du bord  $\partial M$ .*

Lorsque la fonction harmonique considérée est bornée, les convergences non-tangentiels et stochastiques en presque tout point du bord sont automatiques ([Anc90]).

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $u$  une fonction harmonique bornée sur  $M$ . Il existe une unique fonction  $f \in L^\infty(\partial M, \mu)$  telle que pour tout  $z \in M$ ,*

$$u(z) = \int_{\partial M} f(\theta) d\mu_z(\theta).$$

*De plus,  $u$  converge non-tangentielle et stochastiquement vers  $f(\theta)$  en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$ .*



## 3.3 Démonstration du théorème 3.1.2

### 3.3.1 Les principaux ingrédients

Nous utiliserons à plusieurs reprises différents critères de comparaison des fonctions harmoniques positives. Le premier est *l'inégalité de Harnack* usuelle sur les boules, parfois appelée inégalité de Harnack uniforme (voir [Anc90], p.21 et [CY75]) :

**Théorème 3.3.1.** *Soient  $r$  et  $R$  tels que  $0 < r < R$ . Il existe une constante  $C$  telle que pour tout point  $x \in M$  et toute fonction harmonique positive  $u$  sur  $B(x, R)$ ,*

$$\sup_{y \in B(x, r)} u(y) \leq C \inf_{y \in B(x, r)} u(y).$$

Le *principe de Harnack à l'infini* est un principe clé de la théorie du potentiel en géométrie hyperbolique. Il a été établi par A. Ancona ([Anc90], p.94) dans un cadre très général qui nécessite l'introduction des " $\Phi$ -chaînes", mais s'énonce beaucoup simplement dans le cadre hyperbolique au sens de Gromov :

**Théorème 3.3.2.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $x, z \in M$  et si  $y \in M$  est un point sur un segment géodésique joignant  $x$  à  $z$  tel que  $\min\{d(x, y), d(y, z)\} \geq 1$ , alors la fonction de Green  $G$  vérifie*

$$C^{-1} G(x, y)G(y, z) \leq G(x, z) \leq C G(x, y)G(y, z).$$

Nous utiliserons aussi une deuxième formulation de ce principe. Supposons, sans perte de généralité, que la constante d'hyperbolicité  $\delta$  de  $M$  est un entier supérieur ou égal à 3. Pour un rayon géodésique  $\gamma$  d'origine  $o$ , notons

$$a_i^\gamma := \gamma(4i\delta), \quad i \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et } U_i^\gamma := \{x \in M \mid (x, a_i^\gamma)_o > 4i\delta - 2\delta\}.$$

Notons que pour tout  $i$ ,  $a_i^\gamma \in U_i^\gamma \setminus U_{i+1}^\gamma$  (voir figure 3.3.1). Notons également que la suite décroissante d'ensembles  $(U_i^\gamma)_i$  et la suite de points  $(a_i^\gamma)_i$  forment ce que A. Ancona appelle une  $\phi$ -chaîne ([Anc90], page 93). Le principe de Harnack à l'infini s'énonce de la façon suivante :

**Théorème 3.3.3** ([Anc88], pages 12 et 16). *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\theta \in \partial M$ , tout rayon géodésique  $\gamma$  joignant  $o$  à  $\theta$ , les propriétés suivantes sont satisfaites :*

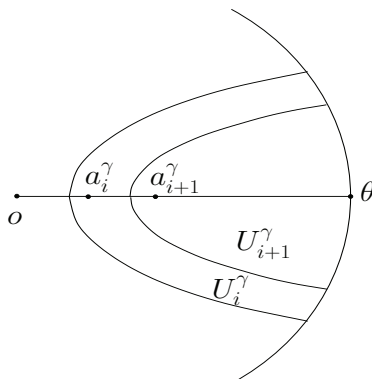


FIGURE 3.3.1 – Les ensembles  $U_i^\gamma$  et les points  $a_i^\gamma$

1. Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions harmoniques positives sur  $U_i^\gamma$ ,  $v$  non-nulle et si  $u$  "s'annule" sur  $\overline{U_i^\gamma} \cap \partial M$ , alors

$$\forall x \in U_{i+1}^\gamma, \frac{u(x)}{v(x)} \leq C \frac{u(a_{i+1}^\gamma)}{v(a_{i+1}^\gamma)};$$

2. Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions harmoniques positives sur  $M \setminus U_{i+1}^\gamma$ ,  $v$  non-nulle et si  $u$  "s'annule" sur  $\partial M \setminus \overline{U_{i+1}^\gamma}$ , alors

$$\forall x \in U_i^\gamma, \frac{u(x)}{v(x)} \leq C \frac{u(a_i^\gamma)}{v(a_i^\gamma)}.$$

Ces principes de Harnack permettent de démontrer la proposition suivante, fondamentale pour relier les propriétés stochastiques aux propriétés non-tangentielles. A. Ancona l'énonce avec une terminologie de théorie du potentiel ([Anc90], lemme 6.4). C'est ce résultat qui lui permet de démontrer un théorème de Fatou "géométrique" dans ce cadre, à partir d'un théorème de Fatou abstrait pour les points du bord minimal de Martin.

**Proposition 3.3.4.** Soient  $r > 0$  et  $(y_k)_k$  une suite de points de  $M$  qui converge non-tangentiellement vers un point  $\theta \in \partial M$ . Alors le mouvement brownien rencontre  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement une infinité de boules  $B(y_k, r)$ .

Cette proposition a des corollaires très utiles. En particulier, le corollaire 3.3.6 nous permettra de montrer que si  $u$  converge stochastiquement en  $\theta$  et si  $u$  est d'énergie non-tangentielle finie en  $\theta$ , alors  $u$  converge non-tangentiellement en  $\theta$ .

**Corollaire 3.3.5.** *Soit  $\Gamma_c^\theta$  un tube non-tangentiel de sommet  $\theta \in \partial M$ . Alors  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, le mouvement brownien rentre et sort de  $\Gamma_c^\theta$  à des instants arbitrairement grands.*

*Démonstration.* Il suffit de choisir deux suites de boules de rayon fixé et dont les centres convergent non-tangentiellement vers  $\theta$ , la première à l'intérieur de  $\Gamma_c^\theta$  et la seconde à l'extérieur.  $\square$

La preuve du corollaire suivant se trouve dans [Mou95].

**Corollaire 3.3.6.** *Si une fonction harmonique  $u$  converge stochastiquement vers  $\ell$  en  $\theta \in \partial M$  et si  $u$  est uniformément continue sur le tube  $\Gamma_c^\theta$ , alors pour tout  $\varepsilon < c$ ,  $u(x)$  converge vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_\varepsilon^\theta$ .*

Avant de nous attaquer au coeur de la preuve du théorème 3.1.2, énonçons encore un lemme et deux corollaires. À nouveau, ces résultats forment des outils très efficaces pour relier les propriétés stochastiques et les propriétés non-tangentiellles. Le lemme suivant utilise essentiellement l'hypothèse presque étoilée, l'hyperbolicité de  $M$  et la décroissance exponentielle uniforme de la fonction de Green.

**Lemme 3.3.7.** *Il existe  $\eta > 0$  et  $c_0 > 0$  tels que pour tout sous-ensemble borélien  $E \subset \partial M$  et tout  $c > c_0$ , on ait*

$$\forall x \notin \Gamma_c(E), \mathbb{P}_x(X_\infty \notin E) \geq \eta.$$

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 2.7.10. Nous n'en donnons ici que les grandes idées. On démontre dans un premier temps le fait suivant :

**Fait :** Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout point  $x \in M$  et tout  $\theta \in \partial M$ ,

$$\mu_x(\{\xi \in \partial M \mid (\xi, \theta)_x \geq \alpha\}) \geq C.$$

Compte tenu de l'inégalité de Harnack sur les boules (théorème 3.3.1), il suffit, pour montrer le fait, d'établir l'existence d'un entier  $N$  ne dépendant que de  $\alpha$  tel que pour tout  $x \in M$ , tout  $\theta \in \partial M$  et tout point  $y$  sur un rayon géodésique joignant  $x$  à  $\theta$  avec  $d(x, y) \geq N$ , alors

$$\mu_y(\{\xi \in \partial M \mid (\xi, \theta)_x \geq \alpha\}) > \frac{1}{2}.$$

Pour cela, on utilise l'hyperbolicité, le théorème 3.3.2 et la décroissance exponentielle uniforme de la fonction de Green (proposition 3.1.1).

La preuve du lemme 3.3.7 se déduit simplement du Fait en montrant qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout borélien  $E \subset \partial M$ , pour tout réel  $c > 0$  assez grand et tout point  $x \notin \Gamma_c(E)$ , il existe un point  $\theta \in \partial M$  tel que  $\{\xi \in \partial M \mid (\xi, \theta)_x \geq \alpha\} \subset \partial M \setminus E$ . On utilise pour cela l'hyperbolicité et le fait que la variété soit quasi-étoilée.

De manière analogue au cadre discret, on déduit du lemme 3.3.7 les deux corollaires suivants. Nous utiliserons dans les preuves, pour un borélien  $E \subset \partial M$ , la notation  $f_E(z) := \mathbb{P}_z(X_\infty \in E)$ .

**Corollaire 3.3.8.** *Soit  $E$  un sous-ensemble borélien de  $\partial M$ ,  $z \in M$  et  $c > c_0$ . Pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -p.s., le mouvement brownien "finit sa vie dans  $\Gamma_c(E)$ " (formellement, pour  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque tout  $\omega$ , il existe  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $t \geq t_0$ ,  $X_t(\omega) \in \Gamma_c(E)$ ).*

*Démonstration.* Par le lemme 3.2.2, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque sûrement,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_E(X_t) = \mathbf{1}_E(\theta).$$

Or d'après le lemme précédent,

$$\forall x \notin \Gamma_c(E), f_E(x) \leq 1 - \eta.$$

Ainsi, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ ,  $X_t \in \Gamma_c(E)$  pour  $t$  assez grand. On obtient donc la conclusion du corollaire.  $\square$

Nous appelons *pointes du tube*  $\Gamma_c^\theta$  les ensembles  $\Gamma_c^\theta \setminus B(o, R)$  pour  $R > 0$ .

**Corollaire 3.3.9.** *Soient  $c > c_0$  et  $E$  un sous-ensemble borélien de  $\partial M$ . Pour tout  $\theta \in \partial M$  tel que  $\mathbb{P}_x(X_\infty \in E)$  converge non-tangentiellement vers 1 en  $\theta$ ,  $\Gamma_c(E)$  contient des pointes de tout tube de sommet  $\theta$ .*

*Cela est vérifié en particulier pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in E$ , par le lemme de représentation des fonctions harmoniques bornées (lemme 3.2.2).*

*Démonstration.* Soient  $\theta \in \partial M$  tel que  $f_E$  converge non-tangentiellement vers 1 en  $\theta$  et  $\Gamma_e^\theta$  un tube de sommet  $\theta$ . Si  $\Gamma_c(E)$  ne contient aucune pointe du tube  $\Gamma_e^\theta$ , on peut trouver une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de points de  $\Gamma_e^\theta \setminus \Gamma_c(E)$  telle que pour tout  $k$ ,  $d(o, x_k) > k$ . Ainsi,  $f_E(x_k) \rightarrow 1$ , mais comme  $x_k \notin \Gamma_c(E)$ , le lemme 3.3.7 nous assure que  $f_E(x_k) \leq 1 - \eta$ , ce qui fournit une contradiction.  $\square$

### 3.3.2 La bornitude non-tangentielle implique la finitude de l'énergie non-tangentielle

Dans cette section, l'une des différences essentielles avec le cadre discret vient de la démonstration du lemme 3.3.11, plus difficile dans le cadre continu. Avant de l'énoncer et de le démontrer, nous donnons un autre lemme qui fournit une estimation de la croissance de la fonction harmonique minimale  $K(\cdot, \theta)$  le long des tubes non-tangentiels de sommet  $\theta$ .

**Lemme 3.3.10.** *Pour tout  $c > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\theta \in \partial M$  et tout  $x \in \Gamma_c^\theta$ ,*

$$G(o, x)K(x, \theta) \geq C.$$

La preuve de ce lemme est une simple application de la sous-multiplicativité des fonctions de Green le long des géodésiques et de l'inégalité de Harnack sur les boules (théorèmes 3.3.2 et 3.3.1). On pourra en trouver un énoncé dans [Anc90], page 99).

Le lemme suivant fournit une domination qui nous permettra de justifier l'interversion entre une limite et une espérance. Il se démontre en utilisant à plusieurs reprises le principe de Harnack à l'infini.

**Lemme 3.3.11.** *Soient  $\theta \in \partial M$  et  $c > e > 0$  deux réels assez grands. Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\forall x \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, c), \forall z \notin \Gamma_c^\theta, \frac{G(z, x)}{G(o, x)} \leq C \cdot K(z, \theta).$$

*Démonstration.* Nous allons appliquer plusieurs fois le théorème 3.3.3 avec  $u = G(\cdot, y)$  pour un point  $y \in M$  et  $v = K(\cdot, \theta)$ . Puisque  $G(\cdot, y)$  est harmonique positive sur  $M \setminus \{y\}$  et s'annule à l'infini et puisque la fonction  $K(\cdot, \theta)$  est harmonique positive, les hypothèses du théorème 3.3.3 seront toujours vérifiées (pourvu que l'on s'assure de rester hors de la diagonale pour  $G$ ).

Soient  $x \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, c)$  et  $\gamma$  un rayon géodésique joignant  $o$  à  $\theta$  et tel que  $d(x, \gamma) < e$ . L'inégalité de Harnack sur les boules (théorème 3.3.1) nous permet de nous ramener au cas où  $x \in \gamma \setminus B(o, c)$  : pour  $x' \in \gamma \setminus B(o, c)$  tel que  $d(x, \gamma) = d(x, x')$ ,  $\frac{G(z, x)}{G(o, x)} \leq C \frac{G(z, x')}{G(o, x')}$ .

Rappelons que pour  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i := a_i^\gamma = \gamma(4i\delta)$  et  $U_i := U_i^\gamma = \{y \in M \mid (y, a_i)_o > d(o, a_i) - 2\delta\}$ .

**Cas 1 :**  $z \notin U_3$ .

D'après le théorème 3.3.3, il existe une constante  $C_1$  telle que

$$\frac{G(z, x)}{K(z, \theta)} \leq C_1 \cdot \frac{G(a_2, x)}{K(a_2, \theta)}.$$

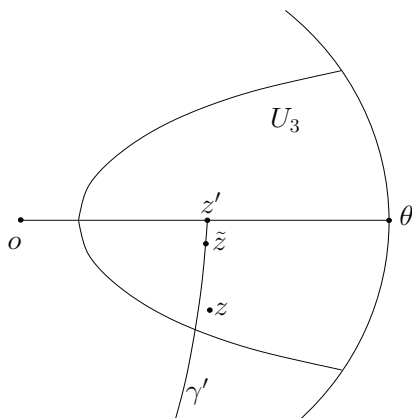


FIGURE 3.3.2 – Le rayon  $\gamma'$  et le point  $\tilde{z}$

Comme  $d(o, a_2) = 8\delta$ , on obtient, avec le théorème 3.3.1, une constante  $C_2$  telle que

$$\frac{G(z, x)}{K(z, \theta)} \leq C_2 \frac{G(o, x)}{K(o, \theta)} = C_2 \cdot G(o, x),$$

ce qui est l'inégalité que l'on voulait démontrer.

**Cas 2 :**  $z \in U_3$ .

Dans un premier temps, nous montrons qu'il est suffisant de démontrer l'inégalité  $\frac{G(\tilde{z}, x)}{G(o, x)} \leq K(\tilde{z}, \theta)$  pour un point  $\tilde{z}$  tel que  $d(\tilde{z}, \gamma) = 8\delta$ . Par définition de  $U_3$ ,  $d(o, a_3) + d(o, z) - d(a_3, z) > 20\delta$ , donc  $d(o, z) > d(a_3, z) + 8\delta$ . Notons  $z'$  un point de  $\gamma$  tel que  $d(z, z') = \min_{z''} d(z, z'')$ . Par l'inégalité triangulaire,  $d(o, z') \geq d(o, z) - d(z, z')$  et puisque  $d(o, z) > d(a_3, z) + 8\delta$ , on a  $d(o, z') > 8\delta$ . Notons  $\gamma'$  un rayon géodésique d'origine  $z'$  et tel que  $d(z, \gamma') \leq K$  (un tel rayon existe puisque  $M$  est  $K$ -quasi-étoilé), et posons  $\tilde{z} = \gamma'(8\delta)$  (voir figure 3.3.2). Si  $c$  est assez grand et donc si  $d(z, z')$  est assez grande,  $z \in \{y \in M \mid (y, \gamma'(12\delta))_{z'} > 10\delta\}$  (un tel  $c$  est choisi en fonction de  $\delta$  et  $K$ ). On peut donc à nouveau appliquer le principe de Harnack à l'infini et on obtient

$$\frac{G(z, x)}{K(z, \theta)} \leq C_3 \cdot \frac{G(\tilde{z}, x)}{K(\tilde{z}, \theta)}.$$

Il suffit donc de montrer l'inégalité pour un tel point  $\tilde{z}$ .

Plusieurs cas peuvent se présenter. Ils sont résumés dans la figure 3.3.3.

**Cas 2(a) :**  $d(o, z') > d(o, x) + 8\delta$ .

Dans ce cas, par sous-multiplicativité des fonctions de Green le long des géodésiques (théorème 3.3.2), si  $y \in \gamma$  avec  $d(o, y) \gg d(o, z')$ , alors

$$G(x, y) \leq C \cdot G(x, z')G(z', y)$$

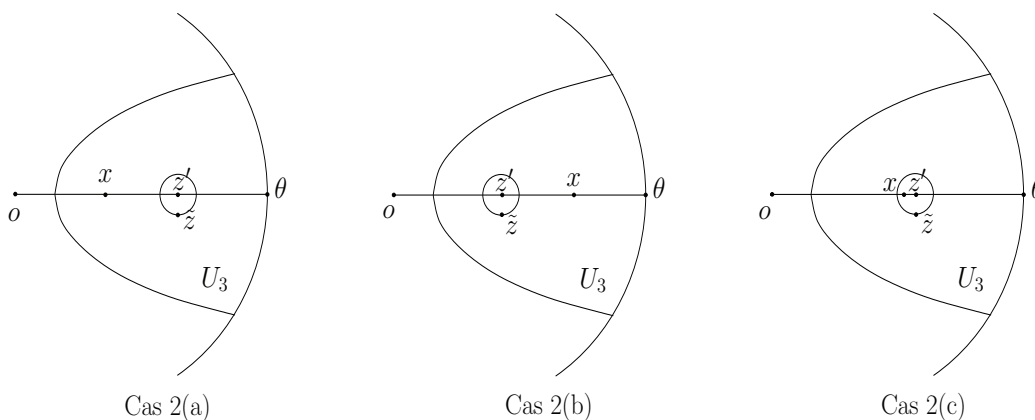


FIGURE 3.3.3 – Les trois cas possibles

En faisant tendre  $y$  vers  $\theta$  et puisque  $d(x, z') > 8\delta$ , on obtient

$$\frac{K(x, \theta)}{K(z', \theta)} \leq C \cdot G(x, z') \leq C_4,$$

c'est-à-dire

$$K(x, \theta) \leq C_4 \cdot K(z', \theta).$$

Mais comme par le lemme 3.3.10,  $\frac{1}{G(o, x)} \leq C \cdot K(x, \theta)$ , cela donne

$$\frac{G(z', x)}{G(o, x)} \leq C_5 \cdot K(x, \theta) \leq C_4 C_5 \cdot K(z', \theta).$$

On applique alors l'inégalité de Harnack sur les boules pour obtenir

$$\frac{G(\tilde{z}, x)}{G(o, x)} \leq C_6 \cdot K(\tilde{z}, \theta),$$

ce que l'on voulait démontrer.

**Cas 2(b) :**  $d(o, z') + 8\delta < d(o, x)$ .

Dans ce cas, on applique à nouveau le principe de Harnack à l'infini (théorème 3.3.3), avec pour point base  $x$  et avec  $\tilde{a}_i$  le point de  $\gamma$  entre  $o$  et  $z'$  tel que  $d(o, x) = d(o, \tilde{a}_i) + 4i\delta$  (les points  $\tilde{a}_1$  et  $\tilde{a}_2$  existent puisque  $d(o, z') > 8\delta$  (car  $z \in U_3$ )). On obtient

$$\frac{G(z', x)}{K(z', \theta)} \leq C_7 \cdot \frac{G(\tilde{a}_1, x)}{K(\tilde{a}_1, \theta)}.$$

Par l'inégalité de Harnack sur les boules, puisque  $d(\tilde{z}, z') = 8\delta$  et  $d(x, \tilde{a}_1) = 4\delta$ ,

$$\frac{G(\tilde{z}, x)}{K(\tilde{z}, \theta)} \leq C_8 \cdot \frac{G(z', x)}{K(z', \theta)} \quad \text{et} \quad \frac{G(\tilde{a}_1, x)}{K(\tilde{a}_1, \theta)} \leq \frac{C_9}{K(x, \theta)} \leq C_{10} \cdot G(o, x).$$

Et comme dans le cas 2(a), cela donne

$$\frac{G(\tilde{z}, x)}{G(o, x)} \leq C_7 C_8 C_{10} \cdot K(\tilde{z}, \theta).$$

**Cas 2(c) :**  $d(x, z') \leq 8\delta$ .

Rappelons que  $G(o, x)K(x, \theta) \geq C$ . D'un autre côté, puisque  $8\delta \leq d(\tilde{z}, x) \leq 16\delta$ ,  $K(x, \theta) \leq C_{11} \cdot K(\tilde{z}, \theta)$  et  $G(\tilde{z}, x) \leq C_{12}$ . En associant ces trois inégalités, on trouve

$$\frac{G(\tilde{z}, x)}{G(o, x)} \leq CC_{11}C_{12} \cdot K(\tilde{z}, \theta).$$

Cela termine la preuve du lemme. □

Par le théorème de Fubini, pour toute fonction positive  $\varphi$  sur un ouvert  $U$  de  $M$  et tout point  $z \in U$ , si on note  $\tau_U$  le temps de sortie de  $U$ , on a

$$\mathbb{E}_z \left[ \int_0^{\tau_U} \varphi(X_t) dt \right] = \int_{y \in U} \varphi(y) G_U(z, y) dy, \quad (3.3.1)$$

où  $G_U$  est la fonction de Green de  $U$ .

On en déduit une version conditionnée de cette formule, la preuve est identique à l'analogie discret, elle utilise uniquement la formule (3.2.2) et l'égalité (3.3.1).

**Lemme 3.3.12.** *Soient  $\varphi$  une fonction positive sur un ouvert  $U \subset M$  et  $z \in U$ . Notons  $\tau_U$  le temps de sortie de  $U$ . On a alors*

$$\mathbb{E}_z^\theta \left[ \int_0^{\tau_U} \varphi(X_t) dt \right] = \int_{y \in U} \varphi(y) G_U(z, y) \frac{K(y, \theta)}{K(z, \theta)} dy.$$

Nous prouvons maintenant que  $\mathcal{N}_c \overset{\sim}{\subset} \mathcal{J}_e$  pour tous  $e < c$  suffisamment grands, ce qui donnera la presque inclusion  $\mathcal{N} \overset{\sim}{\subset} \mathcal{J}$ . Posons  $\mathcal{N}_c^m = \{\theta \in \partial M \mid N_c^\theta(u) \leq m\}$ . Comme  $\mathcal{N}_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_c^m$ , il suffit de montrer que pour tout  $m$ ,  $\mathcal{N}_c^m \overset{\sim}{\subset} \mathcal{J}_e$ . Notons  $\Gamma := \Gamma_c(\mathcal{N}_c^m) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{N}_c^m} \Gamma_c^\theta$ ,  $\tau$  le temps de sortie de  $\Gamma$  et  $\tau_N$  le temps de sortie de la boule  $B(o, N)$ . La fonction  $|u|$  est majorée par  $m$  sur  $\Gamma$ . La propriété de martingale nous assure que  $M_t = u^2(X_t) - \int_0^t |\nabla u(X_s)|^2 ds$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale locale pour  $\mathbb{P}_o$ . Pour le temps d'arrêt  $\tau \wedge \tau_N$ , on obtient

$$\mathbb{E}_o[M_{\tau \wedge \tau_N}] = \mathbb{E}_o[M_o] = u^2(o) \geq 0.$$



Ainsi

$$\mathbb{E}_o \left[ \int_0^{\tau \wedge \tau_N} |\nabla u(X_s)|^2 ds \right] \leq \mathbb{E}_o [u^2(X_{\tau \wedge \tau_N})] \leq m^2.$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on a

$$\mathbb{E}_o \left[ \int_0^{\tau} |\nabla u(X_s)|^2 ds \right] \leq m^2.$$

La formule (3.2.3) donne pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$ ,

$$\mathbb{E}_o^\theta \left[ \int_0^{\tau} |\nabla u(X_s)|^2 ds \right] \leq +\infty,$$

ce qui devient, d'après le lemme 3.3.12 : pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$ ,

$$\int_{y \in \Gamma} |\nabla u(y)|^2 G_\Gamma(o, y) K(y, \theta) dy < +\infty. \quad (3.3.2)$$

Pour d'obtenir une énergie, il suffit, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ , de minorer le terme  $G_\Gamma(o, y)K(y, \theta)$  pour tout  $y \in \Gamma_e^\theta$  (en réalité pour tout  $y \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, R)$ ). C'est ce que va nous permettre de faire le lemme suivant.

**Lemme 3.3.13.** *Soit  $U$  un sous-ensemble ouvert de  $M$  contenant le tube  $\Gamma_c^\theta$  et notons  $\tau_U$  le temps de sortie de  $U$ . On a alors*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x \in \Gamma_e^\theta}} \frac{G_U(o, x)}{G(o, x)} = \mathbb{P}_o^\theta(\tau_U = +\infty).$$

Laissons un instant de côté la preuve du lemme 3.3.13 et montrons que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ , où nous rappelons que  $\tau$  est le temps de sortie de  $\Gamma$ . Choisissons  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$  et notons  $h$  la fonction harmonique positive  $h(z) = K(z, \theta)\mathbb{P}_z^\theta(\tau = +\infty)$ . Montrons que  $h$  est strictement positive. Par le lemme 3.3.8, pour presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, le mouvement brownien finit sa vie dans  $\Gamma$ . Fixons un tel point  $\theta$ . On choisit alors  $t$  suffisamment grand pour que  $\mathbb{P}_o^\theta(\forall s \geq t, X_s \in \Gamma) > 0$ . Par la propriété de Markov, on obtient,

$$\mathbb{P}_o^\theta(\forall s \geq t, X_s \in \Gamma) = \mathbb{E}_o^\theta [\mathbb{P}_o^\theta(\forall s \geq t, X_s \in \Gamma) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_o^\theta [\varphi(X_t)],$$

où  $\varphi(z) = \mathbb{P}_z^\theta(\tau = +\infty)$  si  $z \in \Gamma$  et  $\varphi(z) = 0$  sinon. Comme  $\mathbb{P}_o^\theta(\forall s \geq t, X_s \in \Gamma) > 0$ , la fonction  $\varphi$  n'est pas identiquement nulle, tout comme

la fonction  $h$ . Par le principe du minimum,  $h$  est donc strictement positive et  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ . On a ainsi montré que pour presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ , ce qui implique, par le lemme 3.3.13 appliqué à  $U = \Gamma$ , que pour un tel point  $\theta$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x \in \Gamma_e^\theta}} \frac{G_\Gamma(o, x)}{G(o, x)} > 0.$$

Fixons à nouveau un tel point  $\theta$ . Il existe  $C$  et  $R$  assez grand tels que,

$$\forall x \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, R), \quad G_\Gamma(o, x) \geq C \cdot G(o, x).$$

Le lemme 3.3.10 assure alors que pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, R)$ ,

$$G_\Gamma(o, x)K(x, \theta) \geq C > 0.$$

Revenons maintenant à l'équation (3.3.2). On obtient

$$\begin{aligned} +\infty > \int_{y \in \Gamma} |\nabla u(y)|^2 G_\Gamma(o, y) K(y, \theta) dy &\geq \int_{y \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, R)} |\nabla u(y)|^2 G_\Gamma(o, y) K(y, \theta) dy \\ &\geq C \int_{y \in \Gamma_e^\theta \setminus B(o, R)} |\nabla u(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma_e^\theta \cap B(o, R)$  est relativement compact dans  $M$ , on obtient finalement  $\mathcal{N}_c^m \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{J}_e$ .

Il reste à prouver le lemme 3.3.13. Pour cela, nous utilisons le lemme 3.3.11 démontré au début de la section.

*Démonstration du lemme 3.3.13.* Comme  $G(\cdot, x)$  s'annule à l'infini,

$$\begin{aligned} G_U(o, x) &= G(o, x) - \mathbb{E}_o [G(X_{\tau_U}, x)] \\ &= G(o, x) \left( 1 - \mathbb{E}_o \left[ \frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_U < \infty\}} \right] \right). \end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme 3.3.11 : puisque  $\Gamma_c^\theta \subset U$ ,  $X_{\tau_U} \notin \Gamma_c^\theta$  et il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$ ,  $x$  assez loin de  $o$ ,

$$\frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} \leq C \cdot K(X_{\tau_U}, \theta).$$

Cela nous permet donc d'appliquer le théorème de Lebesgue et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x \in \Gamma_e^\theta}} \mathbb{E}_o \left[ \frac{G(X_{\tau_U}, x)}{G(o, x)} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_U < \infty\}} \right] = \mathbb{E}_o [K(X_{\tau_U}, \theta) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_U < \infty\}}] = \mathbb{P}_o^\theta(\tau_U < \infty).$$

Le lemme 3.3.13 est démontré.  $\square$

### 3.3.3 La finitude de l'énergie non-tangentielle implique la convergence non-tangentielle

Montrons dans un premier temps que  $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}^* \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{L}$ . D'après le corollaire 3.3.6, il suffit de démontrer la proposition suivante. La preuve est due à F. Mouton [Mou95] qui la démontre sous des hypothèses de courbure négative pincée.

**Proposition 3.3.14.** *Soit  $u$  une fonction harmonique telle que  $J_c^\theta(u) < \infty$ . Alors  $|\nabla u|$  est bornée sur tout tube  $\Gamma_e^\theta$ ,  $e < c$ .*

*Démonstration.* L'objectif est d'appliquer le lemme B.0.1 à la fonction  $f = |\nabla u|$ . Cette fonction est bien positive ou nulle, localement bornée et de gradient localement borné. Il suffit donc de montrer qu'elle vérifie une inégalité du type  $\Delta f \leq \lambda f$  au sens des distributions. Pour cela, appliquons la formule de Bochner ([GHL87]),

$$g(\Delta du, du) = |Ddu|^2 + \frac{1}{2}\Delta|du|^2 + Ric(\nabla u, \nabla u).$$

Analysons chacun des termes de cette formule séparément. Comme la fonction  $u$  est harmonique, on a  $\Delta du = d\Delta u = 0$ . En un point non critique, *i.e.* tel que  $du \neq 0$ , on a

$$\frac{1}{2}\Delta|du|^2 = |du|\Delta|du| - |\nabla|du||^2.$$

D'autre part, on a

$$|Ddu|^2 = |\nabla|du||^2 + |du|^2 \left| D \left( \frac{du}{|du|} \right) \right|^2.$$

La courbure de Ricci est minorée, donc  $Ric(\nabla u, \nabla u) \geq -\lambda|\nabla u|^2$  pour une constante  $\lambda > 0$ . On obtient finalement, en un point non critique,

$$0 \geq |du|^2 \left| D \left( \frac{du}{|du|} \right) \right|^2 + |du|\Delta|du| - \lambda|\nabla u|^2.$$

Puisque  $|du| = |\nabla u|$ , on a, en un point non critique,  $\Delta|\nabla u| \leq \lambda|\nabla u|$ , c'est-à-dire exactement

$$\Delta f \leq \lambda f.$$

Aux points critiques,  $f$  admet un minimum,  $\Delta f \leq 0$  au sens des distributions donc l'inégalité est encore vérifiée.

On peut donc appliquer le lemme B.0.1 à la fonction  $f = |\nabla u|$ . Soit  $e < c$  fixé et posons  $R = \frac{c-e}{2}$ . Ainsi, pour  $x \in \Gamma_e^\theta$ ,  $B(x, 2R) \subset \Gamma_c^\theta$  et on a donc

$$\left( \|f\|_2^{B(x, 2R)} \right)^2 \leq J_c^\theta(u).$$

Le lemme B.0.1 donne alors une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in M$ ,

$$\|f\|_\infty^{B(x, R)} \leq C \|f\|_2^{B(x, 2R)}.$$

Donc pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$ , on a

$$\|f\|_\infty^{B(x, R)} \leq C \sqrt{J_c^\theta(u)}.$$

Cela implique que pour tout  $x \in \Gamma_e^\theta$ ,  $|\nabla u(x)| \leq C \sqrt{J_c^\theta(u)} < +\infty$  et donc que  $|\nabla u|$  est borné sur  $\Gamma_e^\theta$ .  $\square$

Puisque nous avons montré que  $\mathcal{J}^* \tilde{\subset} \mathcal{L}^*$  et que  $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ , il suffit de montrer la presque inclusion  $\mathcal{J} \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ . La majeure partie de la preuve est identique à l'analogie discret, la fin demande cependant quelques précautions supplémentaires.

Posons, pour  $c > 0$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{J}_c^m := \{\theta \in \partial M \mid J_c^\theta(u) \leq m\}$ . Nous allons montrer que pour  $c$  assez grand et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ . Pour cela, on introduit la fonction harmonique  $v(z) := \mu_z(\mathcal{J}_c^m) = \mathbb{P}_z(X_\infty \in \mathcal{J}_c^m)$  et pour  $\alpha \in ]0, 1[$  la quantité

$$I_\alpha := \mathbb{E}_o \left[ \int_0^\infty |\nabla u(X_t)|^2 \mathbf{1}_{\{v \geq \alpha\}}(X_t) dt \right].$$

**Fait :** s'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $I_\alpha < +\infty$ , alors  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ .

Pour montrer cela, il suffit de remarquer que si  $I_\alpha < +\infty$ , par la formule (3.2.3), pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -p.s.,

$$\int_0^\infty |\nabla u(X_t)|^2 \mathbf{1}_{\{v \geq \alpha\}}(X_t) dt < +\infty.$$

Comme  $v$  converge stochastiquement vers 1 en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{J}_c^m$  (lemme 3.2.2), alors pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{J}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement,  $\int_0^\infty |\nabla u(X_t)|^2 dt < +\infty$ . Ainsi, si  $I_\alpha < +\infty$ ,  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ .

Montrons maintenant l'existence de  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $I_\alpha < +\infty$ . Par la formule (2.5.1),

$$I_\alpha = \int_{y \in \{v \geq \alpha\}} |\nabla u(y)|^2 G(o, y) dy. \quad (3.3.3)$$

Notons  $A_c(y) = \{\theta \in \partial M \mid y \in \Gamma_c^\theta\}$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}_c^m} J_c^\theta(u) d\mu_o(\theta) &= \int_{\partial M} \int_{x \in \Gamma_c^\theta} |\nabla u(x)|^2 \mathbf{1}_{\{\theta \in \mathcal{J}_c^m\}} dx d\mu_o(\theta) \\ &= \int_{y \in \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)} |\nabla u(y)|^2 \mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) dy. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Nous savons que  $\int_{\mathcal{J}_c^m} J_c^\theta(u) d\mu_o(\theta) \leq m \cdot \mu_o(\mathcal{J}_c^m) < +\infty$  et nous allons relier l'expression (3.3.3) à l'expression (3.3.4).

Montrons qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\{v \geq \alpha\} \subset \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)$ . Soit  $\eta > 0$  la constante obtenue en appliquant le lemme 3.3.7 à  $(A_c(y))^c \subset \partial X$ . Par définition,  $y \notin \Gamma_c((A_c(y))^c)$ , donc

$$\mu_y(A_c(y)) \geq \eta.$$

En choisissant  $\alpha > 1 - \eta$ , on obtient que si  $y \notin \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)$ , alors  $A_c(y) \cap \mathcal{J}_c^m = \emptyset$ ,  $v(y) = \mu_y(\mathcal{J}_c^m) \leq 1 - \mu_y(A_c(y)) \leq 1 - \eta < \alpha$  et donc  $\{v \geq \alpha\} \subset \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)$ .

Si  $y \in \{v \geq \alpha\}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha &\leq v(y) = \mu_y(\mathcal{J}_c^m) \\ &\leq \mu_y(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) + 1 - \eta. \end{aligned}$$

On sait d'autre part (lemme 3.3.10) qu'il existe  $C > 1$  tel que pour tout  $\theta \in \partial M$  et tout  $y \in \Gamma_c^\theta$ ,

$$C^{-1} \leq G(o, y)K(y, \theta) \leq C.$$

Or,

$$G(o, y)\mu_y(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) = G(o, y) \int_{\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)} K(y, \theta) d\mu_o(\theta),$$

donc pour  $y \in \Gamma_c^\theta$ ,

$$\frac{\mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y))}{G(o, y)} \geq C^{-1} \mu_y(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)).$$

On obtient ainsi, pour tout  $y \in \Gamma_c^\theta \cap \{v \geq \alpha\}$

$$\mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) \geq C \cdot G(o, y).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 I_\alpha &= \int_{y \in \{v \geq \alpha\}} |\nabla u(y)|^2 G(o, y) dy \\
 &\leq \frac{1}{C} \int_{y \in \{v \geq \alpha\}} |\nabla u(y)|^2 \mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) dy \\
 &\leq \frac{1}{C} \int_{y \in \Gamma_c(\mathcal{J}_c^m)} |\nabla u(y)|^2 \mu_o(\mathcal{J}_c^m \cap A_c(y)) dy \\
 &< +\infty.
 \end{aligned}$$

On en conclut donc que  $\mathcal{J}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$  et  $\mathcal{J} \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ , ce qui termine la démonstration du théorème 3.1.2.

### 3.4 Démonstration du théorème 3.1.4

Comme dans le cas discret, la preuve du théorème 3.1.4 repose sur deux lemmes. Leurs preuves sont identiques à leurs analogues discrets. Pour faciliter la lecture, nous en redonnons les grandes étapes. Rappelons que l'on se donne une fonction harmonique positive sur un ouvert  $U$  de  $M$ . On veut montrer que pour  $\mu$ -presque tout point  $\theta$  tangential pour  $U$ , (c'est-à-dire tel que  $\Gamma_c^\theta \setminus U$  est borné pour tout  $c > 0$ ), la fonction  $u$  converge non-tangentielllement en  $\theta$ .

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $U$  un sous-ensemble ouvert de  $M$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangential pour  $U$ , le mouvement brownien finit  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque-sûrement sa vie dans  $U$ .*

*Démonstration.* Soient  $c_0 > 0$  la constante fournie par le lemme 3.3.7,  $c > c_0$  et  $A^U$  l'ensemble des points  $\theta \in \partial M$  qui sont tangentiels pour  $U$ . Posons, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A_N^U := \{\theta \in \partial M \mid \Gamma_c^\theta \setminus U \subset B(o, N)\}$$

et montrons que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in A_N^U$ , le mouvement brownien finit  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement sa vie dans  $U$ . Par le corollaire 3.3.8, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in A_N^U$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, le mouvement brownien finit sa vie dans  $\Gamma_c(A_N^U)$ . Pour un tel point  $\theta \in A_N^U$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, le mouvement brownien quitte la boule  $B(o, N)$  et donc finit sa vie dans  $\Gamma_c^\theta \setminus B(o, N) \subset U$ .  $\square$

**Lemme 3.4.2.** *Soit  $U$  un sous-ensemble ouvert connexe de  $M$  tel que  $o \in U$  et soit  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $U$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty) > 0$ .*

*Démonstration.* Nous avons démontré à plusieurs reprises ce type de propriétés, nous donnons donc moins de détails ici. Soit  $\theta$  tangentiel pour  $U$  tel que  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement, le mouvement brownien finit sa vie dans  $U$ . La fonction  $h(z) = K(z, \theta) \cdot \mathbb{P}_z^\theta(\tau = +\infty)$  est harmonique positive. Par le principe du minimum sur l'ensemble connexe  $U$ , elle est donc soit identiquement nulle, soit strictement positive. Soit  $\tau_N$  le temps de sortie de la boule  $B(o, N)$ . Il existe  $N$  tel que  $\mathbb{P}_o^\theta("X_t$  reste dans  $U$  après  $N") > 0$ . On applique alors la propriété forte de Markov au temps  $\tau_N$  pour obtenir la stricte positivité de  $h$ .  $\square$

Bien que l'esprit soit le même que dans le cas discret, la démonstration du théorème 3.1.4 demande quelques précautions. Dans le cas discret, le corollaire 2.5.3 assure que la convergence stochastique en  $\theta$  entraîne la convergence non-tangentielle en  $\theta$ . Cela provient du bon comportement de la marche aléatoire conditionnée avec les tubes non-tangentiels (2.5.2). Bien que nous ayons une propriété analogue dans le cas continu (proposition 3.3.4), le même argument ne fonctionne pas, la fonction harmonique  $u$  n'étant pas nécessairement uniformément continue sur le tube  $\Gamma_c^\theta$ . Pour contourner cette difficulté, F. Mouton considère la fonction  $\ln(u+1)$  et montre au moyen d'une version infinitésimale de l'inégalité de Harnack de Cheng-Yau ([CY75]) que cette fonction est uniformément continue sur une pointe du tube  $\Gamma_c^\theta$ . Nous nous contentons ici d'utiliser l'inégalité de Harnack du théorème 3.3.1.

*Démonstration du théorème 3.1.4.* Comme  $U$  est ouvert, il a un nombre dénombrable de composantes connexes et on peut supposer sans perte de généralité que  $U$  est connexe. On peut également supposer que  $o \in U$ . On note à nouveau  $\tau$  le temps de sortie de  $U$ . Comme  $u$  est harmonique positive sur  $U$ ,  $(u(X_{t \wedge \tau}))$  est une martingale locale positive sur  $[0, \tau[$ . Elle converge donc  $\mathbb{P}_o$ -presque sûrement. Par la formule (3.2.3), pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$ ,  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement,  $(u(X_{t \wedge \tau}))$  converge. En combinant ce qui précède avec le lemme 3.4.2 et la loi asymptotique du 0-1, on obtient que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $U$ ,

$$\mathbb{P}_o^\theta(\tau = +\infty \text{ et } (u(X_t)) \text{ converge}) = 1.$$

Donc  $u$  converge stochastiquement en  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $u$ . Soit un tel point  $\theta$  et notons  $\ell$  la limite stochastique de  $u$  en  $\theta$ . Supposons qu'il n'y ait pas convergence non-tangentielle vers  $\ell$  en  $\theta$ . On peut trouver

$c > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et une suite de points  $(y_k)_k$  de  $\Gamma_c^\theta \setminus B(o, R)$  tels que  $y_k \rightarrow \theta$  et  $|u(y_k) - \ell| > 2\varepsilon$ , où  $R > 0$  est tel que  $\Gamma_{c+1}^\theta \setminus B(o, R) \subset U$ . Nous devons décomposer la suite de la preuve en deux cas.

Supposons dans un premier temps qu'il existe  $m > 0$  tel que pour tout  $k$ ,  $u(y_k) \leq m$ . Puisque  $u$  est positive sur  $U$  et donc sur  $\Gamma_{c+1} \setminus B(o, R)$ , on peut appliquer l'inégalité de Harnack sur les boules (théorème 3.3.1) et il existe  $0 < \lambda < 1$  indépendant de  $k$  tel que pour tout  $k$  et tout  $y \in B(y_k, \lambda)$ ,  $1 - \varepsilon/m \leq u(y)/u(y_k) \leq 1 + \varepsilon/m$ , et donc

$$|u(y_k) - u(y)| \leq m \left| 1 - \frac{u(y)}{u(y_k)} \right| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout  $k$  et tout  $y \in B(y_k, \lambda)$ ,  $|u(y) - \ell| > \varepsilon$ . D'après la proposition 3.3.4, le mouvement brownien rencontre  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement une infinité de  $B_k$ . Soit  $\omega$  une trajectoire générique, c'est-à-dire telle que  $(X_t(\omega))$  rencontre une infinité de  $B_k$ ,  $\tau = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(X_t(\omega)) = \ell$ . On peut choisir  $t_0$  tel que pour tout  $t \geq t_0$ ,  $|u(X_t(\omega)) - \ell| \leq \varepsilon$ . Par compacité,  $(X_t(\omega))_{t \leq t_0}$  rencontre un nombre fini de boules  $B_k$  et le chemin  $(X_t(\omega))_{t > t_0}$  rencontre au moins une boule  $B_{k_1}$ . Soit  $t_1 > t_0$  tel que  $X_{t_1}(\omega) \in B_{k_1}$ . Alors

$$0 < \varepsilon < |u(X_{t_1}(\omega)) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On obtient donc une contradiction et  $u$  converge non-tangentiellement vers  $\ell$  en  $\theta$ .

Il reste à traiter le cas où pour tout  $m > 0$ , il existe  $k$  tel que  $u(y_k) > m$ . Par l'inégalité de Harnack sur les boules, il existe  $0 < \lambda < 1$  indépendant de  $k$  tel que pour tout  $k$  et tout  $y \in B(y_k, \lambda)$ ,  $u(y_k) \leq 2u(y)$ . Ainsi, pour tout  $m > 0$ , il existe  $k_m$  tel que pour tout  $y \in B(y_{k_m}, \lambda)$ ,  $u(y) \geq m/2$ . D'un autre côté, le mouvement brownien rencontre  $\mathbb{P}_o^\theta$ -presque sûrement une infinité de boules  $B(y_{k_m}, \lambda)$ . Soit  $\omega$  une trajectoire générique, c'est-à-dire telle que  $(X_t(\omega))$  rencontre une infinité de  $B_{k_m}$ ,  $\tau = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(X_t(\omega)) = \ell$ . On peut choisir  $t_0$  tel que pour tout  $t \geq t_0$ ,  $u(X_t(\omega)) \leq 2\ell$ . Mais  $(X_t(\omega))_{t \geq t_0}$  rencontre une infinité de boules  $B(y_{k_m}, \lambda)$  avec  $m > 4\ell$  et pour tout point  $y$  dans une telle boule,  $u(y) > 2\ell$ . On obtient une contradiction et  $u$  converge non-tangentiellement vers  $\ell$  en  $\theta$ .

Finalement,  $u$  converge non-tangentiellement vers  $\ell$  en  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $U$ . □

On termine cette section par la preuve du corollaire 3.1.5.

*Démonstration du corollaire 3.1.5.* Il suffit de montrer que  $u$  converge non-tangentiellement en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \partial M$  où  $u$  est non-tangentiellement



minorée. Fixons  $c > c_0$  et pour  $m \in \mathbb{N}$ , notons

$$A_c^m := \{\theta \in \partial M \mid \forall x \in \Gamma_c^\theta, u(x) \geq -m\}.$$

Il suffit de montrer, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la presque inclusion  $A_c^m \overset{\sim}{\subset} \mathcal{L}$ . Fixons un entier  $m \in \mathbb{N}$  et posons  $U := \Gamma_c(A_c^m)$ . La fonction  $u + m$  est harmonique positive sur  $U$ . Par le théorème 3.1.4, elle converge non-tangentiellement en  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $U$  et il en est de même pour  $u$ . Le corollaire 3.3.9 implique que  $\mu$ -presque tout  $\theta \in A_c^m$  est tangentiel pour  $U$ , ce qui termine la preuve du corollaire.  $\square$

### 3.5 Démonstration du théorème 3.1.6

Quitte à considérer la fonction harmonique  $u + r$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $r = 0$ . Montrons que  $u$  converge non-tangentiellement en  $\mu$ -presque tout point  $\theta$  tel que  $D_c^0(\theta) < +\infty$ . Il est suffisant de montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{D}_c^m := \{\theta \in \partial M \mid D_c^0(\theta) \leq m\} \overset{\sim}{\subset} \mathcal{L}.$$

Par définition de  $\mathcal{D}_c^m$ ,

$$\int_{\mathcal{D}_c^m} D_c^0(\theta) d\mu_o(\theta) \leq m.$$

Soit  $\Gamma := \Gamma_c(\mathcal{D}_c^m)$  et  $A_c(x) := \{\theta \in \partial M \mid x \in \Gamma_c^\theta\}$ . Alors

$$\int_{\mathcal{D}_c^m} D_c^0(\theta) d\mu_o(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{x \in \Gamma} \mu_o(A_c(x) \cap \mathcal{D}_c^m) \Delta|u|(dx). \quad (3.5.1)$$

L'idée de la preuve est similaire à celle de la presque inclusion  $\mathcal{J} \overset{\sim}{\subset} \mathcal{L}$ . On cherche à estimer la quantité (3.5.1) en contrôlant  $\mu_o(A_c(x) \cap \mathcal{D}_c^m)$  par la fonction de Green  $G$ . En appliquant la méthode précédente, on montre qu'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  tels que

- $V := \{x \in M \mid \mathbb{P}_x(X_\infty \in \mathcal{D}_c^m) > \alpha\} \subset \Gamma$ ;
- $\forall x \in V, G(o, x) \leq C \cdot \mu_o(A_c(x) \cap \mathcal{D}_c^m)$ .

En regroupant ces informations, on obtient que

$$I := - \int_{x \in V} G(o, x) \Delta|u|(dx) < +\infty$$

On va maintenant appliquer le lemme suivant que l'on peut trouver dans [Mou07]. La preuve utilise deux fois la formule de Green.

**Lemme 3.5.1.** *Soit  $U$  un domaine borné régulier de  $M$  tel que  $o \in U$ , soit  $\tau$  le temps de sortie de  $U$  et soit  $u$  une fonction harmonique sur  $M$ . On a alors*

$$\mathbb{E}_o[|u(X_\tau)|] = |u(o)| - \int_{x \in U} G_U(o, x) \Delta |u|(dx)$$

Soit  $V_k$  une suite croissante de domaines bornés réguliers contenant  $o$  telle que  $\bigcup_k V_k = V$ . Soit  $\tau_k$  le temps de sortie de  $V_k$ . En appliquant pour tout  $k$  le lemme à l'ensemble  $V_k$  et en utilisant l'inégalité  $G_{V_k} \leq G$ , on obtient

$$\sup_k \mathbb{E}_o[|u(X_{\tau_k})|] \leq |u(o)| + I < +\infty.$$

On peut alors décomposer  $u$  comme la différence de deux fonctions harmoniques positives sur  $V$ . Par le théorème 3.1.4, chacune converge en  $\mu$ -presque tout  $\theta$  tangentiel pour  $V$  et il en est donc de même pour  $u$ . Mais par le lemme 3.2.2, l'application  $x \mapsto \mathbb{P}_o(X_\infty \in \mathcal{D}_c^m)$  converge non-tangentiellement vers 1 en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{D}_c^m$ . Par définition, un tel point  $\theta$  est donc tangentiel pour  $V$ . Finalement,  $u$  converge non-tangentiellement en  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{D}_c^m$  et  $\mathcal{D}_c^m \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{L}$ .

---

---

## Deuxième partie

# Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg

# Chapitre 4

## Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ et les mesures tangentes dans $\mathbb{H}^n$

L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$  et différents objets associés tels que la distance sous-riemannienne de Carnot-Carathéodory, les sous-groupes homogènes de  $\mathbb{H}^n$  ou encore les géodésiques. Nous consacrons également quelques pages à la notion de mesure tangente dans  $\mathbb{H}^n$  et nous construisons un exemple de mesure de Radon qui admet en presque tout point toutes les mesures de Radon non-nulles de  $\mathbb{H}^n$  comme mesure tangente.

### 4.1 Définition de $\mathbb{H}^n$

Nous décrivons brièvement le groupe de Heisenberg dans cette section. Pour plus de détails, on pourra consulter [Ste93, CDPT07]. En tant qu'ensemble, le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$  peut être identifié à  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Un point  $P \in \mathbb{H}^n$  est noté arbitrairement  $P = (p_1, \dots, p_{2n}, p_{2n+1})$  ou  $P = (p'; p_{2n+1})$ , avec  $p' \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $p_{2n+1} \in \mathbb{R}$ . L'opération de groupe de  $\mathbb{H}^n$  est donnée, pour  $P, Q \in \mathbb{H}^n$  par

$$P \cdot Q = \left( p_1 + q_1, \dots, p_{2n} + q_{2n}, p_{2n+1} + q_{2n+1} - 2 \sum_{i=1}^n (p_i q_{n+i} - p_{n+i} q_i) \right).$$

Posons  $A(P, Q) := -2 \sum_{i=1}^n (p_i q_{n+i} - p_{n+i} q_i)$ . L'élément neutre du groupe est  $0 = (0; 0)$  et l'inverse d'un point  $P$  est  $P^{-1} = (-p'; -p_{2n+1})$ .

Nous noterons  $\tau_Q : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  la *translation à gauche* donnée par

$$\tau_Q(P) := Q \cdot P.$$

La mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^{2n+1}$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  est invariante à gauche (et à droite), il s'agit de la mesure de Haar de  $\mathbb{H}^n$ . Notons également pour  $r > 0$ ,  $\delta_r : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  la *dilatation* :

$$\delta_r(P) := (rp'; r^2 p_{2n+1}).$$

Si  $E$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , alors

$$\mathcal{L}^{2n+1}(\delta_r(E)) = r^{2n+2} \mathcal{L}^{2n+1}(E).$$

Comme pour tout groupe de Carnot, on peut retrouver les structures algébriques et métriques de  $\mathbb{H}^n$  au travers de la fonction exponentielle, définie sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de  $\mathbb{H}^n$ . La base standard de  $\mathfrak{h}$  est donnée, pour  $i = 1, \dots, n$  par

$$\begin{aligned} X_i(P) &:= \partial_{p_i} + 2p_{n+i} \partial_{p_{2n+1}}, \\ Y_i(P) &:= \partial_{p_{i+n}} - 2p_i \partial_{p_{2n+1}} \\ \text{et } T(P) &:= \partial_{p_{2n+1}}. \end{aligned}$$

Dans le cas  $n = 1$ , nous noterons  $X$  et  $Y$  à la place de  $X_1$  et  $Y_1$ . Le *sous-fibré horizontal*  $\mathfrak{h}_1$  est le sous-espace de  $\mathfrak{h}$  engendré par  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  et  $\mathfrak{h}_2 = \text{span}\{[X_i, Y_i]\} = \text{span}\{T\}$  est le centre de l'algèbre. Ainsi,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2.$$

On dira que le groupe de Heisenberg est un groupe de Carnot à deux étages.

## 4.2 Les distances sur $\mathbb{H}^n$

On dit qu'une courbe absolument continue  $\gamma$  définie sur un intervalle  $[0, s_0] \subset \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{H}^n$  est *horizontale* si  $\gamma'$  est une section horizontale, c'est-à-dire si en presque tout  $s \in [0, s_0]$ ,  $\gamma'(s)$  appartient à la fibre horizontale  $(\mathfrak{h}_1)_{\gamma(s)}$  (i.e.  $\gamma'(s) = \sum_{i=1}^n a_i(s) X_i(\gamma(s)) + B_i(s) Y_i(\gamma(s))$ ). La longueur de cette courbe est dans ce cas donnée par

$$\ell_c(\gamma) = \int_0^{s_0} \|\gamma'(s)\|_{\mathbb{H}} ds,$$

où  $\|\sum_{i=1}^n (a_i X_i + b_i Y_i)\|_{\mathbb{H}}^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)$ . Si une courbe n'est pas horizontale, sa longueur vaut  $+\infty$ . Tout couple de points de  $\mathbb{H}^n$  peut être relié par une courbe horizontale (théorème de Chow, [Cho39, Ras38]), ce qui nous permet de définir une distance naturelle sur  $\mathbb{H}^n$  ([Mit85]).

**Définition 4.2.1.** Si  $P, Q \in \mathbb{H}^n$ , leur distance de Carnot-Carathéodory  $d_c(P, Q)$  est définie par

$$d_c(P, Q) := \inf\{\ell_c(\gamma)\}$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes horizontales  $\gamma$  définies sur un intervalle  $[0, s_0]$  telle que  $\gamma(0) = P$  et  $\gamma(s_0) = Q$ .

**Proposition 4.2.2.** Les translations à gauche et les rotations autour de l'axe vertical  $\mathbb{T} := \{P \in \mathbb{H}^n \mid p' = 0\}$  sont des isométries de  $(\mathbb{H}^n, d_c)$ . La dilatation  $\delta_r$  multiplie les distances par  $r$ .

De plus, pour tout sous-ensemble borné  $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ , il existe des constantes  $0 < c_1(\Omega) < c_2(\Omega)$  telles que si  $(P, Q) \in \Omega^2$ ,

$$c_1(\Omega)\|P - Q\|_{\mathbb{R}^{2n+1}} \leq d_c(P, Q) \leq c_2(\Omega)\|P - Q\|_{\mathbb{R}^{2n+1}}^{1/2}.$$

En particulier,  $(\mathbb{H}^n, d_c)$  et  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^{2n+1}})$  ont la même topologie,  $\mathbb{H}^n$  est localement compact et  $\mathbb{H}^n$  est de dimension topologique  $2n+1$ . En revanche,  $\mathbb{H}^n$  est de dimension de Hausdorff  $2n + 2$ . On a d'ailleurs  $\mathcal{L}^{2n+1}(B_c(P, r)) = r^{2n+2} \mathcal{L}^{2n+1}(B(0, 1))$ .

Il est en général difficile de calculer  $d_c(P, Q)$ . Il existe cependant des distances équivalentes à  $d_c$  qui sont plus faciles à manipuler et qui conservent les bonnes propriétés de  $d_c$ , c'est-à-dire l'invariance par translation à gauche et le bon comportement par les dilatations du groupe. On les construit généralement à partir de normes homogènes. Une bonne présentation des normes homogènes peut être trouvée dans la thèse de N. Juillet ([Jui08], section 1.1.3). Une fonction  $\|\cdot\|$  est une *norme homogène* si elle satisfait les propriétés suivantes :

- la fonction  $\|\cdot\|$  est continue sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et s'annule uniquement en 0 ;
- pour tout  $r > 0$  et tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,  $\|\delta_r(P)\| = r\|P\|$  ;
- pour tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,  $\|P^{-1}\| = \|P\|$ .

On définit alors la "métrique" associée à  $\|\cdot\|$  par  $d(P, Q) := \|P^{-1} \cdot Q\|$ . La fonction  $d$  ne satisfait en général pas l'inégalité triangulaire. En revanche, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tous  $P, Q, R \in \mathbb{H}^n$ ,

$$d(P, R) \leq C(d(P, Q) + d(Q, R)).$$

On parle alors de *quasi-métrique*.

Toutes les quasi-métriques construites à partir de normes homogènes sont équivalentes entre elles et équivalentes à la métrique de Carnot-Carathéodory (voir par exemple [Jui08] proposition 1.1.9 pour une preuve).

**Exemple 4.2.3.** La norme homogène  $\|P\|_\infty := \max\{\|p'\|_{\mathbb{R}^{2n}}, |p_{2n+1}|^{1/2}\}$  définit une véritable distance  $d_\infty$  sur  $\mathbb{H}^n$ .



**Exemple 4.2.4.** La norme homogène  $\|P\| := (\|p'\|_{\mathbb{R}^{2n}}^4 + |p_{2n+1}|^2)^{1/4}$  définit une véritable distance  $d$  sur  $\mathbb{H}^n$ , appelée distance de Korányi-Reimann.

Désormais, la notation  $d$  fera référence à la distance de Korányi-Reimann. Nous noterons alors  $U(P, r)$  (resp.  $B(P, r)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $P$  et de rayon  $r$  pour la distance  $d$  et  $U_c(P, r)$  (resp.  $B_c(P, r)$ ) la boule analogue pour la distance de Carnot-Carathéodory  $d_c$ .

### 4.3 Les sous-groupes homogènes de $\mathbb{H}^n$

Les sous-groupes homogènes dans le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$  joueront dans la suite le rôle des sous-espaces vectoriels pour  $\mathbb{R}^n$ . Nous rappellerons par exemple au chapitre 5 un théorème de P. Mattila, R. Serapioni et F. Serra Cassano [MSSC10] qui donne des caractérisations d'un ensemble rectifiable dans  $\mathbb{H}^n$  par l'existence en presque tout point d'un sous-groupe (homogène) tangent approximatif, ou encore par l'existence en presque tout point d'un sous-groupe homogène supportant toutes les mesures tangentes en ce point.

**Définition 4.3.1.** Un sous-groupe  $\mathbb{G}$  de  $\mathbb{H}^n$  sera dit homogène s'il est invariant par les dilatations  $\delta_r$ , i.e. pour tout  $r > 0$ ,  $\delta_r(\mathbb{G}) = \mathbb{G}$ .

Nous pouvons classer l'ensemble des sous-groupes homogènes de  $\mathbb{H}^n$  en deux catégories, les sous-groupes verticaux et les sous-groupes horizontaux. Notons

$$\mathbb{T} := \{P \in \mathbb{H}^n \mid p' = 0\} \text{ et } H := \{P \in \mathbb{H}^n \mid p_{2n+1} = 0\} = \exp \mathfrak{h}_1.$$

**Exemple 4.3.2.** L'ensemble  $\mathbb{T}$  forme un sous-groupe homogène de  $\mathbb{H}^n$ . En revanche,  $H$  n'est pas un sous-groupe de  $\mathbb{H}^n$ .

Notons  $\mathcal{G}(H, k)$  la grassmannienne formée des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  dans  $H$  et posons  $\mathcal{G}(H) := \bigcup_{k=1}^{2n} \mathcal{G}(H, k)$ .

**Définition 4.3.3.** Pour  $\mathfrak{L} \in \mathcal{G}(H)$ , posons

$$\mathbb{V}_{\mathfrak{L}} := \mathfrak{L} \times \mathbb{T}.$$

Tous les ensembles  $\mathbb{V}_{\mathfrak{L}}$ , pour  $\mathfrak{L} \in \mathcal{G}(H)$ , sont des sous-groupes homogènes de  $\mathbb{H}^n$  que l'on appelle *sous-groupes verticaux*. Les sous-groupes homogènes non-verticaux sont appelés *horizontaux*. Ce sont des éléments de  $\mathcal{G}(H)$ . Notons que  $\mathfrak{L} \in \mathcal{G}(H)$  est un sous-groupe si et seulement si pour tous  $P, Q \in \mathfrak{L}$ ,  $A(P, Q) = 0$ .

**Remarque 4.3.4** ([FFP07]). *Les métriques  $d$  et  $d_c$  sont additives sur les sous-espaces  $\mathfrak{L} \in \mathcal{G}(H, 1)$ . Par invariance par translation, elles le sont aussi sur les translatés  $P \cdot \mathfrak{L}$ .*

Comme nous le verrons au chapitre suivant, une définition possible de la rectifiabilité dans  $\mathbb{H}^n$  fait intervenir la notion de graphe lipschitzien intrinsèque. La définition de ces graphes repose sur les sous-groupes complémentaires de  $\mathbb{H}^n$ .

**Définition 4.3.5.** *Deux sous-groupes homogènes  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  de  $\mathbb{H}^n$  sont des sous-groupes complémentaires de  $\mathbb{H}^n$  (on notera alors  $\mathbb{H}^n = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ ) si  $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{0\}$  et si pour tout  $P \in \mathbb{H}^n$ , il existe  $P_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$  et  $P_{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}$  tels que  $P = P_{\mathbb{B}} \cdot P_{\mathbb{A}}$ .*

**Proposition 4.3.6** ([FSSC11]). *Si  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont deux sous-groupes complémentaires de  $\mathbb{H}^n$ , alors tout point  $P \in \mathbb{H}^n$  a des uniques composantes  $P_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$  et  $P_{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}$  telles que  $P = P_{\mathbb{B}} \cdot P_{\mathbb{A}}$ . Les applications  $P \mapsto P_{\mathbb{A}}$  et  $P \mapsto P_{\mathbb{B}}$  sont continues et il existe une constante  $c = c(\mathbb{A}, \mathbb{B}) > 0$  telle que*

$$c(\|P_{\mathbb{A}}\| + \|P_{\mathbb{B}}\|) \leq \|P\| \leq \|P_{\mathbb{A}}\| + \|P_{\mathbb{B}}\|.$$

Dans  $\mathbb{H}^n$ , tout sous-groupe horizontal  $\mathbb{A}$  admet un sous-groupe complémentaire vertical  $\mathbb{B}$  et tout sous-groupe vertical  $\mathbb{B}$  de dimension topologique supérieure ou égale à  $n + 1$  admet un sous-groupe complémentaire horizontal  $\mathbb{A}$ .

**Proposition 4.3.7** ([AS09]). *Un sous-groupe horizontal est de dimension topologique et de Hausdorff  $k$ , pour  $1 \leq k \leq n$  et il est isomorphe et isométrique à  $\mathbb{R}^k$ . Un sous-groupe vertical peut avoir pour dimension topologique  $k$ , pour  $1 \leq k \leq 2n + 1$ . Sa dimension de Hausdorff sera alors  $k + 1$ . Tout couple  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  de sous-groupes complémentaires de  $\mathbb{H}^n$  est du type*

1.  $\mathbb{A}$  est horizontale de dimension  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  ;
2.  $\mathbb{B}$  est vertical de dimension  $2n + 1 - k$ .

Nous noterons  $\mathbb{G}(\mathbb{H}^n, k)$  l'ensemble des sous-groupes homogènes de dimension topologique  $k$  admettant un sous-groupe complémentaire.

## 4.4 Courbes horizontales et géodésiques de $\mathbb{H}^1$

Dans cette section, nous décrivons les courbes géodésiques de  $\mathbb{H}^1$ . Bien qu'une description similaire existe dans  $\mathbb{H}^n$ , nous nous contenterons ici du cas  $n = 1$ , par simplicité d'exposition et puisque c'est le contexte dans lequel nous utiliserons, au chapitre 6, les résultats cités.

### 4.4.1 Les courbes horizontales dans $\mathbb{H}^1$

Nous avons défini une courbe horizontale de  $\mathbb{H}^1$  comme une courbe absolument continue  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  (on écrit  $\gamma(s) = (x(s), y(s), t(s))$ ) telle qu'en presque tout  $s$ ,  $\gamma'(s)$  peut s'écrire sous la forme

$$\gamma'(s) = a(s)X(\gamma(s)) + b(s)Y(\gamma(s)).$$

L'écriture de  $\gamma'(s)$  dans la base euclidienne donne donc

$$\gamma'(s) = a(s)\frac{\partial}{\partial x} + b(s)\frac{\partial}{\partial y} + 2(a(s)y(s) - b(s)x(s))\frac{\partial}{\partial t}.$$

Ainsi, pour  $s < s'$ ,

$$t(s') = t(s) + 2 \int_s^{s'} (ydx - xdy). \quad (4.4.1)$$

**Remarque 4.4.1.** *La forme différentielle  $ydx - xdy$  est la forme d'aire algébrique.*

Notons  $\gamma_H = (x, y)$  la projection de la courbe  $\gamma$  sur le plan horizontal  $H = \mathbb{R}^2$ . L'équation (4.4.1) nous apprend que pour caractériser une courbe horizontale  $\gamma$ , il est suffisant de connaître  $\gamma(s)$  pour un temps arbitraire  $s$  et la courbe projetée  $\gamma_H$ . La troisième coordonnées  $t(s) - t(0)$  est égale à l'aire algébrique balayée par la courbe  $\gamma_H$  (voir la figure 4.4.1 pour une illustration).

Pour une courbe horizontale  $\gamma$ ,

$$\ell_c(\gamma) = \ell_{\mathbb{R}^2}(\gamma_H),$$

où  $\ell_{\mathbb{R}^2}$  est la longueur usuelle dans  $\mathbb{R}^2$ .

### 4.4.2 Description des géodésiques de $\mathbb{H}^1$

L'espace métrique  $(\mathbb{H}^1, d_c)$  est géodésique et les géodésiques peuvent être calculées explicitement. En revanche, il n'y a pas en général unicité du segment géodésique reliant deux points fixés. Nous renvoyons à [Kor85, Mon00, AR04] pour une discussion plus approfondie. Les courbes géodésiques d'origine  $0 \in \mathbb{H}^1$  sont des courbes lisses  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  de la forme

$$\gamma_1(s) = \frac{\alpha \sin(\phi s) + \beta(1 - \cos(\phi s))}{\phi};$$

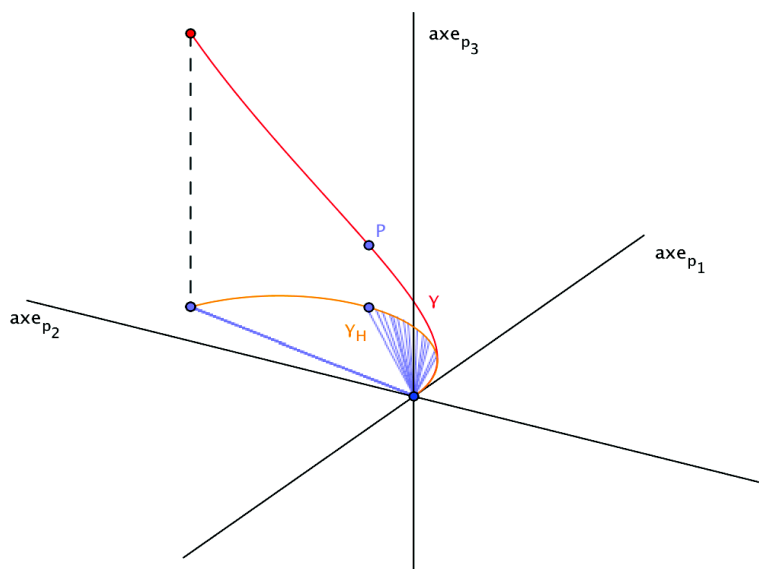


FIGURE 4.4.1 – Un segment géodésique

$$\gamma_2(s) = \frac{\beta \sin(\phi s) - \alpha(1 - \cos(\phi s))}{\phi};$$

$$\gamma_3(s) = 2 \frac{\phi s - \sin(\phi s)}{\phi^2}.$$

Elles dépendent des trois paramètres  $\alpha, \beta, \phi \in \mathbb{R}$ . Pour obtenir la paramétrisation par longueur d'arc, il suffit de prendre  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Un segment géodésique dans  $\mathbb{H}^1$  est représenté dans la figure 4.4.1. Les géodésiques de  $\mathbb{H}^1$  n'ayant pas pour origine 0 sont obtenues par translation à gauche.

Dans le cas où  $\phi = 0$ , la formule doit être comprise au sens limite et  $\gamma$  est une géodésique bi-infinie. Il s'agit dans ce cas d'un sous-groupe horizontal  $\mathfrak{L} \in \mathbb{G}(\mathbb{H}^1, 1)$ .

Dans le cas où  $\phi \neq 0$ , la courbe  $\gamma$  est une géodésique sur  $[0, s_0]$  si et seulement si  $s_0 \leq \frac{2\pi}{|\phi|}$ .

La proposition suivante réunit des propriétés fondamentales des géodésiques de  $\mathbb{H}^1$ . On peut la trouver énoncée de cette manière dans [MR05].

**Proposition 4.4.2.** .

1. Pour tout point  $P \in \mathbb{H}^1 \setminus \mathbb{T}$ , il existe un unique segment géodésique entre 0 et  $P$ .
2. Pour tout point  $P \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$  et tout couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , il existe un unique segment géodésique  $\gamma$  reliant 0 et  $P$  tel que

$\gamma'(0) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ . De plus, la réunion des images de tous les segments géodésiques entre 0 et  $P$  est le bord d'un ensemble ouvert convexe et invariant par les rotations de  $\mathbb{R}^3$  qui fixent  $\mathbb{T}$ .

3. L'image de la géodésique reliant  $P = (p_1, p_2, p_3)$  à  $P^* = (-p_1, -p_2, p_3)$  est le segment  $[P, P^*]$  de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Pour  $\phi \neq 0$ ,  $\gamma_H$  est un arc de cercle de rayon  $\frac{1}{|\phi|}$ .
5. Une géodésique  $\gamma = [0, s_0] \rightarrow \mathbb{H}^1$  de paramètre  $\phi \in \mathbb{R}^*$  et  $s_0 < \frac{2\pi}{|\phi|}$  (resp.  $\phi = 0$  et  $s_0 \geq 0$ ) peut être étendue de manière unique sur  $\left[0, \frac{2\pi}{|\phi|}\right]$  (resp.  $[0, s'_0]$  pour tout  $s'_0 \geq s_0$ ).
6. L'application  $\Psi : \{(\alpha, \beta, \phi, s) \mid \alpha^2 + \beta^2 = 1, \phi \in \mathbb{R}, s \in ]0, 2\pi/|\phi|[\} \rightarrow \mathbb{H}^1 \setminus \mathbb{T}$  donnée par

$$\Psi(\alpha, \beta, \phi, s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$$

est un homéomorphisme.

## 4.5 Mesures tangentes dans $\mathbb{H}^n$

Cette section est consacrée à la notion de mesure tangente associée à une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$ . Les mesures tangentes ont été introduites par D. Preiss dans [Pre87]. Elles donnent des informations sur le comportement local d'une mesure de Radon, comme la dérivée d'une fonction donne des informations sur le comportement local de la fonction. En revanche, une mesure de Radon admet en général plusieurs mesures tangentes en un même point. Nous construisons en suivant les idées de T. O'Neil [O'N95], un exemple de mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$  qui admet en presque tout point de son support toutes les mesures de Radon non-nulles comme mesure tangente.

### 4.5.1 Définition

Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mesures de Radon sur  $\mathbb{H}^n$ . Rappelons qu'une suite  $(\mu_k)_k$  dans  $\mathcal{M}$  converge faiblement vers  $\mu$  dans  $\mathcal{M}$  (on note  $\mu_k \rightharpoonup \mu$ ) si pour toute fonction continue à support compact  $g : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int g d\mu_k = \int g d\mu$ . Il peut être utile d'utiliser une métrique sur l'espace des mesures. Notons  $\mathcal{L}(r)$  l'ensemble des fonctions lipschitziennes  $g : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $Lip(g) \leq 1$  et  $supp(g) \subset B(0, r)$ . Pour deux mesures  $\mu, \nu \in \mathcal{M}$  et un réel  $r > 0$ , notons

$$F_r(\mu, \nu) := \sup \left\{ \left| \int g d\mu - \int g d\nu \right| \mid g \in \mathcal{L}(r) \right\}.$$

On peut vérifier que  $F_r$  est une distance sur l'ensemble des mesures de Radon à support dans  $B(0, r)$ . Une suite  $(\mu_k) \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\mu \in \mathcal{M}$  si et seulement si pour tout  $r > 0$ ,  $F_r(\mu_k, \mu) \rightarrow 0$  (voir [Mat95, Mat05]).

L'image  $f\#\mu$  par une application  $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  de la mesure  $\mu \in \mathcal{M}$  est définie par

$$f\#\mu(E) := \mu(f^{-1}(E)), \text{ pour tout } E \subset \mathbb{H}^n.$$

Pour  $A \in \mathbb{H}^n$  et  $r > 0$ , notons  $T_{A,r} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  l'application définie, pour  $P \in \mathbb{H}^n$ , par

$$T_{A,r}(P) := \delta_{\frac{1}{r}}(A^{-1} \cdot P).$$

On peut à présent donner la définition d'une mesure tangente. L'idée est d'effectuer une suite de zooms  $T_{A,r_i}\#\mu$  de la mesure  $\mu$  et de normaliser cette suite de telle manière qu'une limite faible existe.

**Définition 4.5.1.** *Soit  $\mu \in \mathcal{M}$ . On dit que  $\nu$  est une mesure tangente à  $\mu$  en  $A \in \mathbb{H}^n$  si  $\nu \in \mathcal{M}$ ,  $\nu(\mathbb{H}^n) > 0$  et s'il existe des nombres  $c_i > 0$  et  $r_i > 0, i = \mathbb{N}^*$  tels que  $r_i \rightarrow 0$  et*

$$c_i T_{A,r_i}\#\mu \rightharpoonup \nu.$$

On note  $\text{Tan}(\mu, A)$  l'ensemble des mesures tangentes à  $\mu$  en  $A$ .

**Remarque 4.5.2.** *Les nombres  $c_i$  sont des constantes de normalisation destinées à garder la mesure limite  $\nu$  non-triviale et localement finie. Il suffit souvent de prendre  $c_i = \mu(B(A, r_i))^{-1}$ , comme le montre le lemme suivant. La preuve est identique à celle que P. Mattila expose ([Mat95], remarque 14.4) dans le cadre euclidien.*

On définit respectivement les *s-densités supérieures et inférieures* d'une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{H}^n$  par :

$$\Theta^{*s}(\mu, P) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(P, r))}{r^s} \quad (4.5.1)$$

et

$$\Theta_*^s(\mu, P) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(P, r))}{r^s}. \quad (4.5.2)$$

Si ces deux quantités sont égales, leur valeur commune  $\Theta^s(\mu, P)$  est appelée la *s-densité* de  $\mu$  en  $P$ .

**Lemme 4.5.3.** *Soient  $\mu \in \mathcal{M}$  et  $s > 0$  tels que pour  $\mu$  presque tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,*

$$0 < \Theta_*^s(\mu, P) \leq \Theta^s(\mu, P) < \infty.$$

Alors pour  $\mu$  presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$  et pour toute mesure  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$ , on a  $0 \in \text{supp } \nu$  et toute suite  $(r_i)$  de nombres positifs tendant vers 0 admet une sous-suite  $(r_{i_k})$  telle que l'on ait, pour une constante strictement positive  $c$ ,

$$\nu = c \lim_{k \rightarrow \infty} r_{i_k}^{-s} T_{A, r_{i_k}} \# \mu.$$

La proposition suivante résume certaines propriétés connues de  $\text{Tan}(\mu, A)$ .

**Proposition 4.5.4.** *Soit  $\mu \in \mathcal{M}$  et  $A \in \mathbb{H}^n$  :*

1.  $c\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  pour tout  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  et  $c > 0$  ;
2.  $T_{0,r} \# \nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  pour tout  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  et  $r > 0$  ;
3.  $\text{Tan}(\mu, A)$  est fermé dans  $\mathcal{M}$ .

Lorsque l'on travaille avec les mesures tangentes, on est souvent amené à utiliser la propriété suivante (parfois appelée le principe de Preiss) qui assure que toute mesure tangente d'une mesure tangente est une mesure tangente.

**Lemme 4.5.5.** *Soit  $\mu \in \mathcal{M}$ . Pour  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ , on a la propriété suivante : pour toute mesure  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$ , tout point  $P \in \text{supp } \nu$  et toute mesure  $\lambda \in \text{Tan}(\nu, P)$ , on a  $\lambda \in T(\mu, A)$ .*

**Exemple 4.5.6.** *Nous verrons (théorème 5.3.3) que lorsque  $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}^n$  est une surface régulière (nous dirons une surface  $\mathbb{H}$ -régulière) de dimension de Hausdorff  $k_m$ , alors pour tout  $P \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}^{k_m} \llcorner \mathcal{S}$  admet une unique mesure tangente en  $P$ , où  $\mathcal{S}^{k_m}$  est la mesure sphérique de dimension  $k_m$  (voir l'annexe C pour une définition). Il existe un sous-groupe homogène  $T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P)$  tel que*

$$\text{Tan}(\mathcal{S}^{k_m} \llcorner \mathcal{S}, P) = \{c \mathcal{S}^{k_m} \llcorner T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P)\}.$$

En revanche, il existe des cas dégénérés de mesure admettant en presque tout point un très grand nombre de mesures tangentes. Nous construisons un tel exemple au théorème 4.5.7.

## 4.5.2 Un exemple dégénéré

P. Mattila a montré ([Mat05]) que dans un groupe métrique localement compact muni de dilatations naturelles (en particulier dans  $\mathbb{H}^n$ ), une mesure de Radon admet en presque tout point une unique mesure tangente (unique à multiplication par une constante près) si et seulement en presque tout point, cette unique mesure tangente est une mesure de Haar d'un sous-groupe homogène (voir théorème 5.3.2). L'objectif de cette sous-section est de démontrer le résultat suivant, qui atteste qu'il existe des mesures de Radon admettant en presque tout point toutes les mesures de Radon non-nulles comme mesures tangentes.

**Théorème 4.5.7.** *Il existe une mesure non-nulle  $\mu \in \mathcal{M}$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ ,*

$$\text{Tan}(\mu, A) = \mathcal{M} \setminus \{0\}.$$

La preuve de ce théorème va se dérouler en trois étapes. Dans une première courte étape, nous allons réduire le problème en remplaçant  $\mathcal{M}$  par un sous-ensemble dénombrable de mesures. La deuxième étape sera consacrée à la construction de la mesure  $\mu$ . Nous montrerons au cours de la troisième étape que celle-ci vérifie bien

$$\text{Tan}(\mu, A) = \mathcal{M} \setminus \{0\}$$

en  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ .

La construction suit les idées de T. O’Neil [O’N95]. Une des principales difficultés ici vient du fait que le groupe de Heisenberg n’est pas commutatif. Avant de débiter la preuve, nous allons établir un lemme et son corollaire, qui permettent d’obtenir un contrôle sur le défaut de commutativité de  $\mathbb{H}^n$ . Des estimées similaires peuvent être obtenues dans tout groupe de Carnot. La construction proposée ici fonctionne donc dans tous les groupes de Carnot.

**Lemme 4.5.8.** *Pour tous  $P, Q \in \mathbb{H}^n$ ,*

$$d(P, Q^{-1} \cdot P \cdot Q) \leq (8n)^{\frac{1}{2}} \|P\|^{\frac{1}{2}} \|Q\|^{\frac{1}{2}}.$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que

$$P^{-1} \cdot Q^{-1} \cdot P \cdot Q = \left( 0, -4 \sum_{i=1}^n (p_i q_{i+n} - p_{i+n} q_i) \right)$$

et que pour  $i = 1, \dots, 2n$ ,  $|p_i| \leq \|P\|$ ,  $|q_i| \leq \|Q\|$ . □

**Corollaire 4.5.9.** *Pour tous  $P, Q, R, S \in \mathbb{H}^n$ ,*

1.  $d(P \cdot R, Q \cdot R) \leq d(P, Q) + (8n)^{\frac{1}{2}} \|R\|^{\frac{1}{2}} d(P, Q)^{\frac{1}{2}}$  ;
2.  $d(P \cdot R, Q \cdot S) \leq d(P, Q) + (8n)^{\frac{1}{2}} \|R\|^{\frac{1}{2}} d(P, Q)^{\frac{1}{2}} + d(R, S)$  ;
3.  $d(P \cdot R, Q \cdot S) \geq d(P, Q) - (8n)^{\frac{1}{2}} \|R\|^{\frac{1}{2}} d(P, Q)^{\frac{1}{2}} - d(R, S)$ .

*Démonstration.* La démonstration repose uniquement sur le lemme 4.5.8, l’inégalité triangulaire et l’invariance de la métrique par translation à gauche. Pour la première estimée, il suffit de remarquer que

$$d(P \cdot R, Q \cdot R) = d(0, R^{-1} \cdot P^{-1} \cdot Q \cdot R) \leq d(0, P^{-1} \cdot Q) + d(P^{-1} \cdot Q, R^{-1} \cdot P^{-1} \cdot Q \cdot R).$$



Les deux autres estimées s'obtiennent de manière similaire :

$$\begin{aligned} d(P \cdot R, Q \cdot S) &= d(R^{-1} \cdot Q^{-1} \cdot P \cdot R, R^{-1} \cdot S) \\ &\leq d(R, S) + d(P \cdot R, Q \cdot R). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(P, Q) &\leq d(0, R^{-1} \cdot P \cdot Q \cdot S) + d(R^{-1} \cdot P^{-1} \cdot Q \cdot S, P^{-1} \cdot S) \\ &\leq d(P \cdot R, Q \cdot S) + d(R^{-1} \cdot P^{-1} \cdot Q \cdot R \cdot R^{-1} \cdot S, P^{-1} \cdot S) \\ &\leq d(P \cdot R, Q \cdot S) + d(R^{-1} \cdot P^{-1} \cdot Q \cdot R, P^{-1} \cdot Q) + d(R, S). \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant commencer la preuve du théorème 4.5.7.

**Etape 1 :**

Pour  $P \in \mathbb{H}^n$ , notons  $\delta_P$  la mesure de Dirac en  $P$ . L'ensemble

$$\mathcal{Z} := \left\{ \alpha_0 \delta_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \delta_{P_i} \mid m \in \{2, 3, \dots\}, \alpha_i \in \mathbb{Q}^+, P_i \in \mathbb{Q}^{2n+1}, \|P_i\| \leq 1 \right. \\ \left. \text{pour } i \in \{0, \dots, m-1\}, \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i = 1 \text{ et } P_i \neq P_j \text{ if } i \neq j \right\}$$

est dénombrable, donc l'ensemble

$$\bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}^+} aT_{0,b} \# \mathcal{Z}$$

est dénombrable et dense dans  $\mathcal{M}$ . Par la proposition 4.5.4, il est suffisant de construire une mesure  $\mu$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ ,  $\mathcal{Z} \subset \text{Tan}(\mu, A)$ . Dans toute la suite,  $g : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sera une fonction 1-lipschitzienne à support compact.

**Etape 2 :**

Soit  $(\mu_k)_k$  une suite dans  $\mathcal{Z}$  telle que chaque élément de  $\mathcal{Z}$  apparaît une infinité de fois dans la suite. Chaque terme  $\mu_k$  est de la forme

$$\mu_k = \alpha(k, 0) \delta_0 + \sum_{i=1}^{m_k-1} \alpha(k, i) \delta_{P(k,i)}.$$

Pour des raisons techniques, définissons

$$\sigma_k := \min_{0 \leq i \neq j \leq m_k-1} d(P(k, i), P(k, j)).$$

Définissons également une suite  $(s_k)_k$  de nombres réels qui croît suffisamment vite. On peut par exemple la choisir telle que

$$s_1 = 100 \text{ et } \sqrt{s_{k+1}} > n \frac{2^{k+10}}{\sigma_k} s_k. \quad (4.5.3)$$

Les suites  $(r_i)$  dans la définition des mesures tangentes seront des sous-suites de  $(1/s_k)$ . Si  $\nu \in \mathcal{Z}$ , on peut trouver une suite d'indices  $(k_j)_{j \geq 1}$  telle que pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\nu = \mu_{k_j} = \alpha(k_j, 0)\delta_0 + \sum_{i=1}^{m_{k_j}-1} \alpha(k_j, i)\delta_{P(k_j, i)}.$$

On obtient ainsi pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\int_{\mathbb{H}^n} g(P) d\nu(P) = \alpha(k_j, 0)g(0) + \sum_{i=1}^{m_{k_j}-1} \alpha(k_j, i)g(P(k_j, i)).$$

L'idée de la construction de T. O'neil est de considérer l'espace d'indices

$$\Sigma := \prod_{k=1}^{\infty} \{0, \dots, m_k - 1\},$$

et de définir une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Sigma$  en posant

$$\mathbb{P}(\eta_\ell) := \prod_{k=1}^{\ell} \alpha(k, \eta_k), \text{ où } \eta_\ell := (\eta_1, \dots, \eta_\ell) \times \prod_{k \geq \ell+1} \{0, \dots, m_k - 1\}.$$

Ainsi,  $\mathbb{P}(\{\eta \in \Sigma \mid \eta_k = i\}) = \alpha(k, i)$  et on peut écrire pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\int_{\mathbb{H}^n} g(P) d\nu(P) = \int_{\Sigma} g(P(k_j, \eta_{k_j})) d\mathbb{P}(\eta).$$

On construit alors la mesure  $\mu$  comme l'image de la mesure  $\mathbb{P}$  par une application  $\pi : \Sigma \rightarrow B(0, 1)$  bien choisie. On définit, pour  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$\pi_{k_0}(\eta) := \prod_{k=k_0}^{\infty} \tau_{1/s_k}(P(k, \eta_k))$$

et on pose

$$\pi(\eta) := \pi_1(\eta),$$

où le symbole  $\prod$  est bien entendu utilisé ici pour la loi de groupe de  $\mathbb{H}^n$ . La suite  $(s_k)$  a été choisie suffisamment croissante pour que l'application  $\pi$  soit bien définie et injective. Nous le vérifions ci-dessous (lemme 4.5.10).

On obtient enfin la mesure que nous cherchons en posant

$$\mu := \pi \# \mathbb{P}.$$

Pour vérifier qu'en  $\mu$ -presque tout point  $A \in \mathbb{H}^n$ ,  $\mathcal{Z} \subset \text{Tan}(\mu, A)$ , il nous faudra contrôler une quantité de la forme

$$\left\| \int_{\mathbb{H}^n} c_j g(\tau_{1/r_j}(A^{-1} \cdot Q)) d\mu(Q) - \int_{\mathbb{H}^n} g(Q) d\nu(Q) \right\|.$$

Un des intérêts de la construction de la mesure  $\mu$  est que cette expression peut se réécrire comme une intégrale contre la mesure  $\mu$  :

$$\left\| \int_{\pi(\Sigma)} [c_j g(\tau_{1/r_j}(A^{-1} \cdot Q)) - g(P(k_j, [\pi^{-1}(Q)]_{k_j}))] d\mu(Q) \right\|.$$

Avant de vérifier que  $\mu$  est bien la mesure que nous cherchons, nous allons établir plusieurs estimations assez grossières qui seront utiles par la suite. Les quantités manipulées sont assez compliquées. Le point important à remarquer est qu'il suffit de choisir  $(s_k)$  suffisamment croissante pour que la construction fonctionne. D'après (4.5.3),

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s_k}} \leq \frac{\sigma_{k_0}}{2^{k_0+10} n s_{k_0}}. \quad (4.5.4)$$

Soit  $\eta \in \Sigma$ . Comme pour tout  $k \geq 1$ ,  $P(k, \eta_k) \in B(0, 1)$ , on déduit de l'inégalité (4.5.3) que ,

$$\begin{aligned} \|\pi_{k_0+1}(\eta)\| &\leq \sum_{k \geq k_0+1} \frac{1}{s_k} \\ &\leq \frac{\sigma_{k_0}^2}{2^{k_0+10} n s_{k_0}}. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

L'application  $\pi$  est donc bien définie et à valeurs dans  $B(0, 1)$ .

De la même manière, si  $\eta$  et  $\eta'$  sont dans  $\Sigma$ , alors d'après le corollaire 4.5.9,

$$\begin{aligned}
 d(\pi_{k_0}(\eta), \pi_{k_0}(\eta')) &\leq \frac{2}{s_{k_0}} + \sqrt{8n} \left( \frac{4}{2^{k_0+10} n s_{k_0}} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{s_{k_0}} \right)^{1/2} \\
 &\quad + d(\pi_{k_0+1}(\eta), \pi_{k_0+1}(\eta')) \\
 &\leq \sum_{k \geq k_0} \frac{3}{s_k} \\
 &\leq \sum_{k \geq k_0} \frac{3}{\sqrt{s_k}} \\
 &\leq \frac{3\sigma_{k_0-1}}{2^{k_0+9} n s_{k_0-1}}. \tag{4.5.6}
 \end{aligned}$$

**Lemme 4.5.10.** *L'application  $\pi$  est injective.*

*Démonstration.* Soient  $\eta$  et  $\eta'$  dans  $\Sigma$  tels que  $\eta \neq \eta'$  et  $k_0$  le premier indice tel que  $\eta_{k_0} \neq \eta'_{k_0}$ . Le corollaire 4.5.9 (3) et les inégalités (4.5.5) et (4.5.6) donnent alors

$$\begin{aligned}
 d(\pi(\eta), \pi(\eta')) &= d(\pi_{k_0}(\eta), \pi_{k_0}(\eta')) \\
 &\geq \frac{\sigma_{k_0}}{s_{k_0}} - \frac{1}{\sqrt{2^{k_0+4}}} \frac{\sigma_{k_0}}{s_{k_0}} - \frac{3\sigma_{k_0}}{2^{k_0+10} n s_{k_0}} \\
 &\geq \frac{\sigma_{k_0}}{2s_{k_0}} > 0. \tag{4.5.7}
 \end{aligned}$$

□

**Etape 3 :**

Le lemme suivant va permettre de choisir l'ensemble de  $\mu$ -mesure pleine  $\pi(\mathcal{I})$  tel que pour tout  $A \in \pi(\mathcal{I})$ ,  $\mathcal{Z} \subset \text{Tan}(\mu, A)$ .

**Lemme 4.5.11.** *Soient  $\nu \in \mathcal{Z}$  et  $(k_j)_{j \geq 1}$  une suite strictement croissante telle que pour tout  $j \geq 1$ ,  $\mu_{k_j} = \nu$ . On pose*

$$\mathcal{I}_\nu := \{ \eta \in \Sigma \mid \eta_{k_j} = 0 \text{ pour une infinité de } j \}.$$

Alors  $\mathbb{P}(\mathcal{I}_\nu) = 1$  et donc

$$\mu(\pi(\mathcal{I}_\nu)) = 1.$$

*Démonstration.* Pour tout  $j \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(\eta_{k_j} = 0) = \alpha(k_j, 0) = \alpha > 0$ . Ainsi,  $\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(\eta_{k_j} = 0) = \infty$  et le lemme découle du lemme de Borel-Cantelli. □

Posons alors

$$\mathcal{I} := \bigcup_{\nu \in \mathcal{S}} \mathcal{I}_\nu.$$

Puisque  $\mathcal{Z}$  est dénombrable,  $\mu(\pi(\mathcal{I})) = 1$ . Afin de simplifier les notations, on note pour tout point  $Q \in \pi(\Sigma)$ ,  $Q_k := P(k, [\pi^{-1}(Q)]_k)$ . On a alors

$$Q = \prod_{k \geq 1} \tau_{1/s_k}(Q_k).$$

Soient  $A \in \pi(\mathcal{I}), \bar{\eta} \in \mathcal{I}$  tel que  $A = \pi(\bar{\eta})$  et soit  $\nu \in \mathcal{Z}$ . Nous allons montrer qu'alors,  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$ .

Comme  $\bar{\eta} \in \mathcal{I}$ , il existe un ensemble infini  $N \subset \cup_{j \geq 1} \{k_j\}$  tel que pour tout  $k \in N$ ,  $A_k = 0$  et  $\mu_k = \nu$ . Posons  $r_j := \frac{1}{s_{\ell(j)}}$ , où  $\ell(j)$  est le  $j$ -ième terme de  $N$ .

Comme le support de  $g$  est compact, il existe  $r > 0$  tel que  $\text{supp}(g) \subset B(0, r)$ . On choisit alors  $J \in \mathbb{N}$  tel que  $2^{\ell(J)+9}n > r$ . Le reste de la preuve consiste à étudier précisément la quantité  $\|\tau_{1/r_j}(A^{-1} \cdot Q)\| = \|\tau_{s_{\ell(j)}}(A^{-1} \cdot Q)\|$  pour  $j \geq J$ . Soit  $Q \in B(0, 1)$ .

**Cas 1 :**  $Q_k = A_k$  pour  $k \leq \ell(j) - 1$  (nous noterons ici  $\ell$  au lieu de  $\ell(j)$  pour simplifier les expressions).

Par l'inégalité (4.5.6),

$$s_\ell d \left( \prod_{k \geq \ell+1} \tau_{1/s_k}(A_k), \prod_{k \geq \ell+1} \tau_{1/s_k}(Q_k) \right) \leq s_\ell \frac{3\sigma_\ell}{2^{\ell+10}n s_\ell} \quad (4.5.8)$$

Comme  $A_\ell = 0$ ,

$$d(Q_\ell, \tau_{s_\ell}(A^{-1} \cdot Q)) = d \left( Q_\ell^{-1} \cdot \left( \prod_{k \geq \ell+1} \tau_{s_\ell/s_k}(A_k) \right) \cdot Q_k, \prod_{k \geq \ell+1} \tau_{s_\ell/s_k}(Q_k) \right).$$

Ainsi, par le lemme 4.5.8 et les inégalités (4.5.5) et (4.5.8),

$$\begin{aligned} d(Q_\ell, \tau_{s_\ell}(A^{-1} \cdot Q)) &\leq \sqrt{8n} \|Q_\ell\|^{1/2} \left\| \prod_{k \geq \ell+1} \tau_{s_\ell/s_k}(A_k) \right\|^{1/2} \\ &+ s_\ell d \left( \prod_{k \geq \ell+1} \tau_{1/s_k}(A_k), \prod_{k \geq \ell+1} \tau_{1/s_k}(Q_k) \right) \\ &\leq \frac{\sigma_\ell}{\sqrt{2^{\ell+7}}} + s_\ell \frac{3\sigma_\ell}{2^{\ell+10}n s_\ell} \\ &\leq \frac{\sigma_\ell}{\sqrt{2^{\ell+7}}} + \frac{3\sigma_\ell}{2^{\ell+10}n}. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

**Cas 2 :** Il existe  $u \leq \ell - 1$  tel que  $Q_k = A_k$  pour  $k \leq u - 1$  et  $Q_u \neq A_u$ .  
D'après l'inégalité (4.5.7),

$$d \left( \prod_{k \geq u} \tau_{1/s_k}(A_k), \prod_{k \geq u} \tau_{1/s_k}(Q_k) \right) \geq \frac{\sigma_u}{2s_u}.$$

Or  $s_\ell \frac{\sigma_u}{2s_u} > r$ , donc

$$\|\tau_{s_\ell}(A^{-1} \cdot Q)\| > r.$$

Ainsi, dans le cas 2,  $g(\tau_{s_\ell}(A^{-1} \cdot Q)) = 0$ .

Posons

$$X_j := \{Q \in \pi(\Sigma) \mid Q_k = A_k \text{ pour } k \leq \ell(j) - 1\}$$

et  $c_j := \frac{1}{\mu(X_j)}$ . On obtient

$$c_j \int_{\pi(\Sigma)} g(\tau_{s_{\ell(j)}}(A^{-1} \cdot Q)) d\mu(Q) = c_j \int_{X_j} g(\tau_{s_{\ell(j)}}(A^{-1} \cdot Q)) d\mu(Q).$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \int_{X_j} g(Q_{\ell(j)}) d\mu(Q) &= \mu(X_j) \int_{\pi(\Sigma)} g(X_{\ell(j)}) d\mu(Q) \\ &= \mu(X_j) \int_{\mathbb{H}^n} g(Q) d\nu(Q). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} &\left| c_j \int_{\mathbb{H}^n} g \left( \tau_{\frac{1}{r_j}}(A^{-1} \cdot Q) \right) d\mu(Q) - \int_{\mathbb{H}^n} g(Q) d\nu(Q) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\mu(X_j)} \int_{X_j} \left( g(\tau_{s_{\ell(j)}}(A^{-1} \cdot Q)) - g(Q_{\ell(j)}) \right) d\mu(Q) \right| \end{aligned}$$

Comme  $g$  est 1-lipschitzienne, l'inégalité (4.5.8) donne

$$\begin{aligned} \left| c_j \int_{\mathbb{H}^n} g \left( \tau_{\frac{1}{r_j}}(A^{-1} \cdot Q) \right) d\mu(Q) - \int_{\mathbb{H}^n} g(Q) d\nu(Q) \right| &\leq d \left( \tau_{s_{\ell(j)}}(A^{-1} \cdot Q), Q_{\ell(j)} \right) \\ &\longrightarrow_{j \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  et le théorème est démontré.

---

## Chapitre 5

# Rectifiabilité dans le groupe de Heisenberg

Dans les espaces euclidiens, la définition classique d'un ensemble rectifiable a été introduite par H. Federer (par A. Besicovitch dans le plan). Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est  $m$ -rectifiable s'il est recouvert, à un ensemble de  $H^m$ -mesure nulle près, par la réunion  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(\mathbb{R}^m)$  des images de  $\mathbb{R}^m$  par un nombre dénombrable d'applications lipschitziennes. La définition est équivalente si l'on remplace les images d'applications lipschitziennes par des sous-variétés  $C^1$ . Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est alors dit  $m$ -purement non-rectifiable s'il ne contient aucun sous-ensemble rectifiable de  $H^m$ -mesure non nulle. L. Ambrosio et B. Kirchheim ([AK00]) ont étudié les ensembles rectifiables dans les espaces métriques généraux définis au moyen des images lipschitziennes de  $\mathbb{R}^m$ . Cependant, cette définition n'est pas adaptée au groupe de Heisenberg. En effet, en appliquant un théorème de Rademacher, prouvé par P. Pansu [Pan89] (pour la notion de Pansu-différentiabilité), aux applications lipschitziennes d'un espace euclidien à valeurs dans le groupe de Heisenberg, S. Semmes a montré que l'image par une application lipschitzienne définie sur  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n + 1$ , et à valeurs dans  $\mathbb{H}^n$  est de  $H^m$ -mesure nulle. En particulier,  $\mathbb{H}^n$  n'est pas rectifiable dans le sens précédent. Le groupe de Heisenberg et plus généralement les groupes de Carnot nécessitent donc une théorie de la rectifiabilité spécifique. On peut cependant suivre le modèle de Federer, pourvu que l'on ait des notions de graphe lipschitzien et de sous-variété  $C^1$  adaptées à la structure de groupe de  $\mathbb{H}^n$ . Nous exposons ici l'approche développée par B. Franchi, R. Serapioni et F. Serra-Cassano ([FSSC01] en codimension 1, puis [FSSC07] et [FSSC11] en toutes dimensions). Dans une première partie, nous donnons la définition et les principales propriétés des graphes lipschitziens intrinsèques qu'ils ont introduit. Nous présentons ensuite dans la section 5.2 les surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières qui représentent dans le



groupe de Heisenberg l'analogie des sous-variétés  $C^1$ . Cela nous permettra d'introduire dans la section 5.3 les ensembles rectifiables et de donner les différentes caractérisations de ces ensembles obtenues par P. Mattila, R. Serapioni et F. Serra-Cassano ([MSSC10]). Ces caractérisations sont très similaires aux résultats bien connus dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous présentons dans la section 5.4 une tentative inachevée de caractérisation d'un ensemble rectifiable de  $\mathbb{H}^n$  par l'existence de valeur principale de certaines intégrales singulières. Enfin, dans la section 5.5, nous montrons que les graphes lipschitziens intrinsèques permettent de proposer une définition d'un ensemble uniformément rectifiable dans le groupe de Heisenberg. La théorie de l'uniforme rectifiabilité n'a, à notre connaissance, par encore été étudiée dans  $\mathbb{H}^n$ . Une motivation pour étudier la rectifiabilité uniforme dans  $\mathbb{H}^n$  est donnée par le problème isopérimétrique et plus précisément la régularité du bord des ensembles isopérimétriques. Nous détaillons cela à la fin du chapitre.

## 5.1 Graphes lipschitziens intrinsèques

**Définition 5.1.1.** *Soit  $\mathbb{G}$  un sous-groupe homogène de  $\mathbb{H}^n$ . Un ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}^n$  est un  $\mathbb{G}$ -graphe si  $\mathcal{S}$  intersecte chaque ensemble  $P \cdot \mathbb{G}$ ,  $P \in \mathbb{H}^n$  en au plus un point.*

Les notions de graphes intrinsèques et euclidiens sont différentes (voir l'exemple 2.5 de [FSSC06]). Une propriété essentielle de ces graphes intrinsèques (c'est même ce qui les rend intrinsèques) est l'invariance par translations et dilatations : si  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{G}$ -graphe,  $\tau_P \mathcal{S}$  et  $\delta_r \mathcal{S}$  sont aussi des  $\mathbb{G}$ -graphes. Soient  $\mathbb{G}_1$  et  $\mathbb{G}_2$  des sous-groupes complémentaires. Le *graphe* d'une application  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est l'ensemble  $graphe(f) := \{P \cdot f(P) \mid P \in \mathcal{E}\}$ .

**Définition 5.1.2.** *Soient  $\mathbb{G}_1$  et  $\mathbb{G}_2$  des sous-groupes complémentaires dans  $\mathbb{H}^n$  et  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$ . La fonction  $f$  est  $L$ -lipschitzienne intrinsèque si pour tout  $Q \in graphe(f)$ ,*

$$C_{\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2}(Q, \frac{1}{L}) \cap graphe(f) = \{Q\}$$

où  $C_{\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2}(Q, \alpha) = Q \cdot C_{\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2}(0, \alpha)$  et  $C_{\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2}(0, \alpha) = \{P \in \mathbb{H}^n \mid \|P_{\mathbb{G}_1}\| \leq \alpha \|P_{\mathbb{G}_2}\|\}$ .

Cette définition ne prend pas en compte le fait que  $\mathbb{G}_1$  (resp.  $\mathbb{G}_2$ ) est horizontal ou vertical. On peut donner une définition métrique équivalente, qui dépend de cette information. Lorsque nous décomposerons  $\mathbb{H}^n$  en deux sous-groupes complémentaires  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$ , nous noterons  $\mathbb{A}$  le sous-groupe horizontal et  $\mathbb{B}$  le sous-groupe vertical.

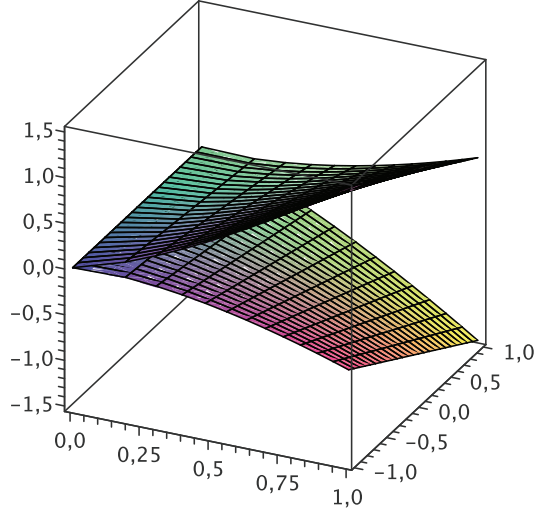


FIGURE 5.1.1 – Le graphe lipschitzien intrinsèque de l'exemple 5.1.3

1.  $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$  est lipschitzienne intrinsèque s'il existe  $L > 0$  telle que pour tous  $B, B' \in \mathbb{B}$ ,

$$\|f(B)^{-1} \cdot f(B')\| \leq L \|f(B)^{-1} \cdot B^{-1} \cdot B' \cdot f(B)\|;$$

2.  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  est lipschitzienne intrinsèque s'il existe  $L > 0$  telle que pour tous  $A, A' \in \mathbb{A}$ ,

$$\|A'^{-1} \cdot A \cdot f(A)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A' \cdot f(A')\| \leq L \|A^{-1} \cdot A'\|.$$

On peut montrer que les fonctions lipschitziennes intrinsèques sont  $\frac{1}{2}$ -holdériennes pour la métrique de Carnot-Carathéodory. En revanche, l'exemple 3.3 de [FSSC06] montre que les notions de fonction lipschitzienne dans le sens métrique habituel pour la distance de Carnot-Carathéodory et de fonction lipschitzienne intrinsèque sont indépendantes.

**Exemple 5.1.3.** Notons  $\mathbb{A} := \{P \in \mathbb{H}^1 \mid p_2 = p_3 = 0\}$  et son sous-groupe complémentaire  $\mathbb{B} := \{P \in \mathbb{H}^1 \mid p_1 = 0\}$ . La figure 5.1.1 représente le graphe lipschitzien intrinsèque de la fonction lipschitzienne intrinsèque  $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$  définie par  $f((0, p_2, p_3)) = (|p_1|^{2/3}, 0, 0)$ . Notons que  $\text{graphe}(f)$  n'est pas un graphe euclidien de  $\mathbb{R}^3$  dans aucun voisinage de l'origine. La figure 5.1.2 représente  $\text{graphe}(f)$  et le cône  $C_{\mathbb{B}, \mathbb{A}}(0, 1/2)$ .

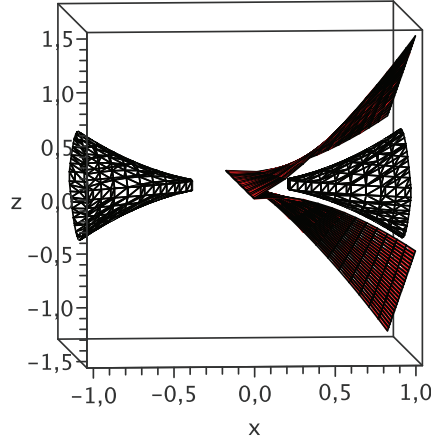


FIGURE 5.1.2 – Exemple 5.1.3

**Définition 5.1.4.** Soient  $\mathbb{G}_1$  et  $\mathbb{G}_2$  des sous-groupes complémentaires de  $\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbb{G}_1$  de dimension topologique  $k$ . Un  $\mathbb{G}_2$ -graphe  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{G}_2$ -graphe  $L$ -lipschitzien de dimension  $k$  s'il existe une fonction  $L$ -lipschitzienne intrinsèque  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  telle que  $\mathcal{S} = \text{graphe}(f)$ .

On peut montrer ([FSSC06]) que la dimension (métrique) du graphe d'une fonction lipschitzienne intrinsèque  $f : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est la même que celle de  $\mathbb{G}_1$  et que ce graphe est Ahlfors-régulier de la même dimension (voir l'annexe C pour la définition d'un ensemble Ahlfors-régulier).

On peut aussi montrer que si  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  est lipschitzienne intrinsèque, alors la paramétrisation naturelle de  $\text{graphe}(f)$

$$\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{H}^n, A \mapsto A \cdot f(A)$$

est lipschitzienne au sens métrique. En revanche, même si  $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$  est très régulière (par exemple  $f(B) = (1, 0, 0) \in \mathbb{A}$ ), l'application

$$\Phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}^n, B \mapsto B \cdot f(B)$$

n'est pas nécessairement lipschitzienne au sens métrique.

Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  deux sous-groupes complémentaires avec  $\mathbb{A}$  un sous-groupe homogène de dimension 1.  $\mathbb{A}$  peut s'écrire  $\mathbb{A} = \{\exp(t\mathfrak{A}) \mid t \in \mathbb{R}\}$  avec  $\mathfrak{A} \in \mathfrak{h}_1$ .

Une application  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$  peut alors s'écrire  $f(B) = \exp(\varphi(B)\mathfrak{A})$  avec  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est lipschitzienne intrinsèque, alors son sous-graphe (et son sur-graphe)  $E_f^- := \{B \cdot \exp(t\mathfrak{A}) \mid B \in \mathcal{E}, t < \varphi(B)\}$  est un ensemble de périmètre localement fini ([FSSC11]). Nous ne définissons pas ici les ensembles de périmètre fini. Notons simplement que ces ensembles sont à l'origine du développement par B. Franchi, R. Serapioni et F. Serra Cassano ([FSSC01]) de la notion de rectifiabilité intrinsèque que nous présentons à la section 5.3.

## 5.2 Surfaces $\mathbb{H}$ -régulières

### 5.2.1 Pansu différentiabilité

La notion de  $P$ -différentiabilité, adaptée à la structure de groupe de  $\mathbb{H}^n$  a été introduite par P. Pansu dans [Pan89]. Pour pouvoir la définir, il nous faut d'abord introduire les fonctions  $H$ -linéaires, qui jouent le rôle des applications linéaires dans la notion classique de différentiabilité.

**Définition 5.2.1.** *Une application  $L : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  est dite  $H$ -linéaire si  $L$  est un homomorphisme homogène, i.e. si  $L$  est un morphisme de groupe et si pour tout  $r > 0$  et tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,*

$$L(\delta_r P) = \delta_r L(P).$$

La norme de  $L$  est alors  $\|L\| := \sup\{\|L(P)\| \mid \|P\| \leq 1\}$ .

**Définition 5.2.2.** *Une application  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  est  $P$ -différentiable en  $P_0 \in \mathcal{E}$  s'il existe une application  $H$ -linéaire  $d_{\mathbb{H}}f_{P_0} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  telle que*

$$\|d_{\mathbb{H}}f_{P_0}(P_0^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot f(P_0)^{-1} \cdot f(P)\| = o(\|P_0^{-1} \cdot P\|), \text{ quand } \|P_0^{-1} \cdot P\| \rightarrow 0.$$

*L'application  $f$  est continûment  $P$ -différentiable sur  $\mathcal{E}$  si  $f$  est  $P$ -différentiable pour tout  $P_0 \in \mathcal{E}$  et si la différentielle dépend continûment de  $P_0$ . On note alors  $C_H^1(\mathcal{E})$  l'ensemble des applications continûment  $P$ -différentiables sur  $\mathcal{E}$ .*

**Remarque 5.2.3.** *Les deux définitions précédentes s'adaptent immédiatement aux applications entre deux groupes de Carnot quelconques.*

Donnons une caractérisation des applications continûment  $P$ -différentiables.

**Théorème 5.2.4.** *Pour une application  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ , on a l'équivalence  $f \in C_H^1(\mathcal{E})$  si et seulement si pour tout champ de vecteur  $X \in \mathfrak{h}_1$  horizontal invariant à gauche, la dérivée partielle  $Xf(P) = \frac{d}{dt}[\exp(tX)(P)]_{t=0}$  est continue sur  $\mathcal{E}$  et pour tout  $P \in \mathcal{E}$ , le vecteur  $Xf(P)$  appartient à la distribution horizontale  $(\mathfrak{h}_1)_{f(P)}$  au point  $f(P)$ .*

Signalons enfin que P. Pansu a obtenu dans [Pan89] un théorème de type Rademacher pour les fonctions lipschitziennes entre groupes de Carnot, en prouvant qu'elles sont presque partout  $P$ -différentiables.

### 5.2.2 Définition des surfaces $\mathbb{H}$ -régulières

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition des surfaces  $C^1$  intrinsèques de  $\mathbb{H}^n$  que l'on appelle surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières. La classe des surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières est connue pour former une bonne généralisation dans  $\mathbb{H}^n$  (et même dans des groupes de Carnot plus généraux), des sous-variétés  $C^1$  (voir par exemple [AK00], [CM06], [Pau04] et [Vit08]). Elles sont définies de deux manières différentes suivant leur dimension topologique.

**Définition 5.2.5.** *Un sous-ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}^n$  est une surface  $\mathbb{H}$ -régulière de dimension  $d$  si :*

1. *Pour  $1 \leq k \leq n$  : pour tout  $P \in \mathcal{S}$ , il existe des ouverts  $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$ ,  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$  et une fonction  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  tels que  $P \in \mathcal{U}$ ,  $\phi$  est injective, continûment Pansu différentiable avec  $d_{\mathbb{H}}\phi_P$  injective et*

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{U} = \phi(\mathcal{V});$$

2. *Pour  $n + 1 \leq k \leq 2n$  : pour tout  $P \in \mathcal{S}$ , il existe un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$  et une fonction  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1-k}$  tels que  $P \in \mathcal{U}$ ,  $f \in [C_H^1(\mathcal{U})]^{2n+1-k}$  avec  $d_{\mathbb{H}}f_Q$  surjective pour tout  $Q \in \mathcal{U}$  et*

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{U} = \{Q \in \mathcal{U} \mid f(Q) = 0\}.$$

**Remarque 5.2.6.** *Pour  $1 \leq k \leq n$ , les sous-variétés  $\mathbb{H}$ -régulières de dimension  $k$  forment une sous-classe des sous-variétés euclidiennes  $C^1$  de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . En revanche, les sous-variétés  $\mathbb{H}$ -régulières de dimension  $k$  pour  $n + 1 \leq k \leq 2n$  peuvent être très irrégulières d'un point de vue euclidien. Dans [KSC04], les auteurs donnent un exemple d'hypersurface  $\mathbb{H}$ -régulière de  $\mathbb{H}^1$  telle que sa dimension de Hausdorff pour la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$  est 2,5.*

De la même manière que les sous-variétés  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  admettent en tout point un plan tangent, les surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières admettent en tout point un groupe tangent, qui est un sous-groupe homogène de  $\mathbb{H}^n$ . Nous avons défini les surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières de deux manières suivant leur dimension, nous faisons de même pour définir les groupes tangents.

**Définition 5.2.7.** *Soit  $\mathcal{S}$  une  $k$ -surface  $\mathbb{H}$ -régulière dans  $\mathbb{H}^n$  et  $\phi$  et  $f$  comme dans la définition 5.2.5. Le groupe tangent à  $\mathcal{S}$  en  $P_0 \in \mathcal{S}$ , noté  $T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P_0)$  est le sous-groupe homogène de  $\mathbb{H}^n$  défini par*

1. Pour  $1 \leq k \leq n$  :

$$T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P_0) := \{d_{\mathbb{H}}\phi_{x_0}(x) \mid x \in \mathbb{R}^k\}, \text{ où } \phi(x_0) = P_0;$$

2. Pour  $n + 1 \leq k \leq 2n$  :

$$T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P_0) := \{P \in \mathbb{H}^n \mid d_{\mathbb{H}}f_{P_0}(P) = 0\}.$$

Ainsi, si  $1 \leq k \leq n$ , pour tout  $P \in \mathcal{S}$ ,  $T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P)$  est un sous-groupe horizontal de  $\mathbb{H}^n$ . De plus, le plan tangent euclidien à  $\mathcal{S}$  en  $P$  coïncide avec  $T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P)$  (voir théorème 3.5 de [FSSC07]). Si  $n + 1 \leq k \leq 2n$ , alors  $T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P)$  est un sous-groupe vertical de  $\mathbb{H}^n$ .

Nous terminons cette section en énonçant un résultat de G. Arena et R. Serapioni ([AS09]) permettant de faire un lien entre les graphes lipschitziens intrinsèques et les surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières.

**Théorème 5.2.8.** *Une surface  $\mathbb{H}$ -régulière  $\mathcal{S}$  est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne intrinsèque, i.e. pour tout  $P \in \mathcal{S}$ , il existe un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$  tel que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$  est le graphe d'une fonction lipschitzienne intrinsèque.*

## 5.3 Rectifiabilité

Maintenant que des notions intrinsèques de graphe lipschitzien et de surface  $\mathbb{H}$ -régulière ont été définies, nous pouvons naturellement définir deux types d'ensembles rectifiables de  $\mathbb{H}^n$ . Les ensembles recouverts, à ensemble négligeable près, par des graphes lipschitziens intrinsèques et ceux recouverts, à ensemble négligeable près, par des surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières. P. Mattila, R. Serapioni et F. Serra-Cassano ([MSSC10]) ont montré deux théorèmes caractérisant ces ensembles rectifiables (théorèmes 5.3.10 et 5.3.11) en termes d'unicité en presque tout point des mesures tangentes et des sous-groupes tangents approximatifs. Il en ressort que la bonne définition pour les ensembles de petite dimension topologique ( $1 \leq k \leq n$ ) semble être celle en termes de graphes lipschitziens intrinsèques, alors que pour les ensembles de grande dimension topologique ( $n + 1 \leq k \leq 2n$ ), la seconde définition semble être plus adaptée. Dans cette section, nous énonçons les théorèmes 5.3.10 et 5.3.11 en donnant toutes les définitions nécessaires à leur compréhension.

### 5.3.1 Retour sur les mesures tangentes

Une caractérisation classique d'un ensemble rectifiable dans les espaces euclidiens s'énonce en termes d'unicité des mesures tangentes en presque tout point (voir [Pre87] et [Mat95] théorème 16.7). Une caractérisation analogue est valable dans  $\mathbb{H}^n$ .

**Définition 5.3.1.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$ . On dit que  $\mu$  a une unique mesure tangente  $\nu$  en  $A$  si  $\nu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$  telle que

$$\text{Tan}(\mu, A) = \{c\nu \mid 0 < c < \infty\}.$$

Le théorème suivant a été prouvé par P. Mattila [Mat05] dans le cadre plus général des groupes métriques localement compacts munis de dilatations :

**Théorème 5.3.2.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$ . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mu$  a une unique mesure tangente  $\nu_A$  en  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$  ;
2. pour  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ , il existe un sous-groupe homogène fermé  $\mathbb{G}_A$  de  $\mathbb{H}^n$  pour lequel

$$\text{Tan}(\mu, A) = \{c\lambda_A \mid 0 < c < \infty\}$$

où  $\lambda_A$  est une mesure de Haar à gauche de  $\mathbb{G}_A$ .

De plus, si ces conditions sont satisfaites, il est possible de choisir  $\lambda_A$  telle que

$$\frac{1}{\mu(B(A, r))} T_{A,r} \# \mu \rightharpoonup \lambda_A, \text{ faiblement quand } r \rightarrow 0.$$

Remarquons que  $\mathbb{G}_A$  n'admet pas nécessairement de sous-groupe homogène complémentaire. En revanche, une surface  $\mathbb{H}$ -régulière  $\mathcal{S}$  admet, en tout point  $P \in \mathcal{S}$ , une unique mesure tangente, supportée par  $T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P)$ , qui est un sous-groupe homogène admettant un complémentaire homogène [MSSC10]. Pour un entier  $k_m$ , on note à nouveau  $\mathcal{S}^{k_m}$  la mesure de Hausdorff sphérique de dimension  $k_m$  (voir l'annexe C pour la définition). Le théorème suivant n'est connu que pour cette mesure de Hausdorff sphérique, c'est pourquoi les différentes caractérisations d'un ensemble rectifiable seront données en termes de cette mesure. Mais puisque pour tout  $A \subset \mathbb{H}^n$ ,  $H^{k_m}(A) \leq \mathcal{S}^{k_m}(A) \leq 2^{k_m} H^{k_m}(A)$ , les ensembles rectifiables sont les mêmes pour les deux mesures.

**Théorème 5.3.3** ([MSSC10]). Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}^n$  une surface  $\mathbb{H}$ -régulière de dimension  $k$ . Notons  $k_m$  sa dimension de Hausdorff (i.e.  $k_m = k$  si  $1 \leq k \leq n$  et  $k_m = k + 1$  si  $n + 1 \leq k \leq 2n$ ) et

$$\mathcal{S}_{P_0, r} := \{P \in \mathbb{H}^n \mid P_0 \cdot \delta_r(P_0^{-1} \cdot P) \in \mathcal{S}\},$$

pour  $P_0 \in \mathbb{H}^n$  et  $r > 0$ . On a alors pour  $P_0 \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}^{k_m}(\mathcal{S}_{P_0, r} \cap U(0, 1))}{\alpha_{k_m} r^{k_m}} &= \frac{\mathcal{S}^{k_m}(T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P_0) \cap U(0, 1))}{\alpha_{k_m}} \\ &= \frac{H_{Euc}^k(T_{\mathbb{H}}\mathcal{S}(P_0) \cap U(0, 1))}{\alpha_{k_m}} = 1. \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{1}{r^{k_m}} T_{P_0, r} \#(\mathcal{S}^{k_m} \lfloor \mathcal{S}) \rightharpoonup \mathcal{S}^{k_m} \lfloor T_{\mathbb{H}} \mathcal{S}(P_0)$$

faiblement quand  $r \rightarrow 0$ . Ainsi

$$\text{Tan}(\mathcal{S}^{k_m} \lfloor \mathcal{S}, P_0) = \{c \mathcal{S}^{k_m} \lfloor T_{\mathbb{H}} \mathcal{S}(P_0) \mid 0 < c < \infty\}.$$

### 5.3.2 Sous-groupes tangents approximatifs

Dans  $\mathbb{R}^n$ , l'existence en presque tout point d'un unique plan tangent approximatif est une condition équivalente à la rectifiabilité ([Mat95]). Il existe une propriété similaire dans  $\mathbb{H}^n$ , en remplaçant les plans par des sous-groupes homogènes. Si  $E \subset \mathbb{H}^n$  est  $\mathcal{S}^{k_m}$ -mesurable avec  $\mathcal{S}^{k_m} \lfloor E$  localement finie, on définit la  $k_m$ -densité supérieure de  $E$  en  $P \in \mathbb{H}^n$  comme

$$\Theta^{*k_m}(E, P) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}^{k_m}(E \cap B(P, r))}{\alpha_{k_m} r^{k_m}}.$$

Il s'agit donc de la densité supérieure  $\Theta^{*k_m}(\mathcal{S}^{k_m} \lfloor R, P)$  associée à la mesure  $\mathcal{S}^{k_m} \lfloor E$ . On définit de manière similaire la densité inférieure  $\Theta_*^{k_m}(E, P)$ .

**Définition 5.3.4.** Soit  $E \subset \mathbb{H}^n$  un ensemble  $\mathcal{S}^{k_m}$ -mesurable. On dit que le sous-groupe homogène  $\mathbb{T}_P$ , de dimension topologique  $k$  et de dimension métrique  $k_m$  est un  $k$ -groupe tangent approximatif de  $E$  en  $P$  si  $\Theta^{*k_m}(E, P) > 0$  et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}^{k_m}(E \cap B(P, r) \setminus X(P, \mathbb{T}_P, s))}{r^{k_m}} = 0,$$

pour tout  $0 < s < 1$ , où  $X(P, \mathbb{T}_P, s) := \{Q \in \mathbb{H}^n \mid d(P^{-1} \cdot Q, \mathbb{T}_P) < sd(P, Q)\}$ . On note  $\text{apTan}_{\mathbb{H}}^k(E, P)$  l'ensemble des  $k$ -groupes tangents approximatifs à  $E$  en  $P$ .

Les groupes tangents approximatifs sont presque partout uniques (voir [MSSC10]).

**Proposition 5.3.5.** Soit  $E \subset \mathbb{H}^n$  un ensemble  $\mathcal{S}^{k_m}$ -mesurable, avec  $\mathcal{S}^{k_m}(E) < +\infty$  et soit  $A$  l'ensemble des points  $P \in E$  pour lesquels  $E$  admet un  $k$ -sous-groupe tangent approximatif en  $P$  de dimension métrique  $k_m$ . Alors

1.  $A$  est  $\mathcal{S}^{k_m}$  mesurable ;
2.  $E$  a un unique  $k$ -sous-groupe tangent approximatif  $\mathbb{T}_P$  en  $\mathcal{S}^{k_m}$ -presque tout  $P \in A$  ;
3. L'application  $P \mapsto \mathbb{T}_P$  est  $\mathcal{S}^{k_m}$  mesurable.



### 5.3.3 Ensembles rectifiables

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction de la section, les notions de graphe lipschitzien intrinsèque et de surface  $\mathbb{H}$ -régulière nous permettent de donner deux définitions d'un ensemble rectifiable. Nous aurons donc deux notations pour une ensemble rectifiable,  $(k, \mathbb{H}_L)$ -rectifiable s'il fait référence à la définition avec les graphe lipschitziens intrinsèques et  $(k, \mathbb{H})$ -rectifiable s'il fait référence aux surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières.

**Définition 5.3.6.** *On dit que  $E \subset \mathbb{H}^n$  est  $(k, \mathbb{H})$ -rectifiable s'il existe une suite  $(\mathcal{S}_i)_i$  de surfaces  $\mathbb{H}$ -régulières de dimension  $k$  telles que*

$$\mathcal{S}^{k_m} \left( E \setminus \bigcup_i \mathcal{S}_i \right) = 0,$$

où  $k_m = 1$  si  $1 \leq k \leq n$  et  $k_m = k + 1$  si  $n + 1 \leq k \leq 2n$ .

**Remarque 5.3.7.** *Dans le cas où  $n + 1 \leq k \leq 2n$ , un ensemble  $E$   $k$ -rectifiable au sens euclidien est  $(k, \mathbb{H})$ -rectifiable. Inversement, pour  $1 \leq k \leq n$ , un ensemble  $(k, \mathbb{H})$ -rectifiable est  $k$ -rectifiable au sens euclidien alors que le contraire est faux.*

**Définition 5.3.8.** *Soit  $1 \leq k \leq n$  (donc  $k_m = k$ ). On dit que  $E \subset \mathbb{H}^n$  est  $(k, \mathbb{H}_L)$ -rectifiable s'il existe des applications lipschitziennes intrinsèques  $f_i : A_i \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{H}^n$  telles que*

$$\mathcal{S}^k \left( E \setminus \bigcup_i f_i(A_i) \right) = 0.$$

Remarquons que l'on aurait pu donner, comme définition équivalente :  $E$  est recouvert, à ensemble négligeable près, par une union de graphes lipschitziens intrinsèques. En effet, si  $\mathcal{S}$  est le graphe d'une application lipschitzienne intrinsèque  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ , alors l'application  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{H}^n, A \mapsto A \cdot f(A)$  est lipschitzienne au sens métrique et  $\mathbb{A}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^k$ . Inversement si  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{H}^n$  est lipschitzienne,  $f(\mathbb{R}^k)$  est un graphe lipschitzien intrinsèque.

**Remarque 5.3.9.** *Pour  $1 \leq k \leq n$ , si  $E$  est  $(k, \mathbb{H})$ -rectifiable, alors il est  $(k, \mathbb{H}_L)$ -rectifiable.*

Les deux théorèmes suivants donnent différentes caractérisations d'un ensemble rectifiable en terme d'existence en presque tout point d'une unique mesure tangente ou d'un unique groupe tangent approximatif. Notons que P. Mattila, R. Serapioni et F. Serra-Cassano [MSSC10] ont obtenus ces caractérisations pour les ensembles  $(k, \mathbb{H}_L)$ -rectifiables en basse dimension,  $1 \leq k \leq n$ , et pour les ensembles  $(k, \mathbb{H})$ -rectifiables en "grande" dimension,  $n + 1 \leq k \leq 2n$ .

**Théorème 5.3.10.** *Soient  $1 \leq k \leq n$  un entier et  $E \subset \mathbb{H}^n$  un borélien tel que  $\mathcal{S}^k \lfloor E$  est localement finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $E$  est  $(k, \mathbb{H}_L)$ -rectifiable ;
2. Pour  $\mathcal{S}^k$ -presque tout  $P \in E$ , il existe  $\mathbb{T}_P \in \mathbb{G}(\mathbb{H}^n, k)$  avec

$$\frac{1}{r^k} T_{P,r} \# (\mathcal{S}^k \lfloor E) \rightarrow \mathcal{S}^k \lfloor \mathbb{T}_P, \text{ quand } r \rightarrow 0;$$

3. Pour  $\mathcal{S}^k$ -presque tout  $P \in E$ , il existe  $\mathbb{T}_P \in \mathbb{G}(\mathbb{H}^n, k)$  tel que

$$\mathbb{T}_P = \text{apTan}_{\mathbb{H}}^k(E, P);$$

4. Pour  $\mathcal{S}^k$ -presque tout  $P \in E$ , il existe  $\mathbb{T}_P \in \mathbb{G}(\mathbb{H}^n, k)$  tel que

$$\text{Tan}(\mathcal{S}^k \lfloor E, P) = \{c \mathcal{S}^k \lfloor \mathbb{T}_P \mid 0 < c < \infty\}.$$

Remarquons que la condition (5) du théorème 5.3.11 ne fait référence à aucun sous-groupe particulier, ni à aucun concept de différentiabilité. C'est un argument supplémentaire qui atteste que cette notion de rectifiabilité est naturelle. Notons également qu'en "grande" dimension ( $n + 1 \leq k \leq 2n$ ), l'hypothèse suivante sur la densité inférieure  $\Theta_*^{k_m}(E, P) > 0$  a dû être faite alors qu'elle n'est pas nécessaire dans le cas euclidien.

**Théorème 5.3.11.** *Soient  $n + 1 \leq k \leq 2n$  un entier et  $E \subset \mathbb{H}^n$  un borélien tel que  $\mathcal{S}^{k_m} \lfloor E$  est localement finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $E$  est  $(k, \mathbb{H})$ -rectifiable ;
2. Pour  $\mathcal{S}^{k_m}$ -presque tout  $P \in E$ , il existe  $\mathbb{T}_P \in \mathbb{G}(\mathbb{H}^n, k)$  avec

$$\frac{1}{r^{k_m}} T_{P,r} \# (\mathcal{S}^{k_m} \lfloor E) \rightarrow \mathcal{S}^{k_m} \lfloor \mathbb{T}_P, \text{ quand } r \rightarrow 0;$$

3. Pour  $\mathcal{S}^{k_m}$ -presque tout  $P \in E$ ,  $\Theta_*^{k_m}(E, P) > 0$  et il existe  $\mathbb{T}_P \in \mathbb{G}(\mathbb{H}^n, k)$  tel que

$$\mathbb{T}_P = \text{apTan}_{\mathbb{H}}^k(E, P);$$

4. Pour  $\mathcal{S}^{k_m}$ -presque tout  $P \in E$ ,  $\Theta_*^{k_m}(E, P) > 0$  et il existe  $\mathbb{T}_P \in \mathbb{G}(\mathbb{H}^n, k)$  tel que

$$\text{Tan}(\mathcal{S}^{k_m} \lfloor E, P) = \{c \mathcal{S}^{k_m} \lfloor \mathbb{T}_P \mid 0 < c < \infty\};$$

5. Pour  $\mathcal{S}^{k_m}$ -presque tout  $P \in E$ ,  $\Theta_*^{k_m}(E, P) > 0$  et il existe une mesure de Radon  $\lambda_P$  telle que

$$\text{Tan}(\mathcal{S}^{k_m} \lfloor E, P) = \{c \lambda_P \mid 0 < c < \infty\}.$$

## 5.4 Intégrales singulières

Il existe dans  $\mathbb{R}^n$  un lien fort entre les ensembles rectifiables et l'existence presque partout des valeurs principales de l'intégrale singulière associée aux noyaux de Riesz. L'objectif de cette section est de présenter certains résultats (en particulier ceux de V. Chousionis et P. Mattila [CM11a]) concernant les intégrales singulières dans  $\mathbb{H}^n$ . Nous espérons pouvoir utiliser ces résultats pour obtenir une condition de rectifiabilité analogue à la condition euclidienne, ce n'est hélas pas le cas. Pour un ensemble  $E$   $H^m$ -mesurable dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $H^m(E) < \infty$ ,  $E$  est  $m$ -rectifiable si et seulement si pour  $H^m$ -presque tout  $x \in E$ ,  $\Theta_*^m(E, x) > 0$  et l'intégrale singulière associée au noyau de Riesz admet une valeur principale en  $x$  (voir [Mat95] théorème 20.28). Nous rappelons, définition 5.4.6, ce que signifie admettre une valeur principale pour une mesure de Radon dans  $\mathbb{H}^n$ , la définition dans  $\mathbb{R}^n$  est similaire (voir l'équation (20.4) dans [Mat95]).

Commençons par définir les noyaux de Riesz sur  $\mathbb{H}^n$ , analogues des noyaux de Riesz sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 5.4.1.** *Les noyaux de Riesz de dimension  $s$  sur  $\mathbb{H}^n$ ,  $s \in ]0, 2n+1]$  sont définis par*

$$R_s(P) = (R_{s,1}(P), \dots, R_{s,2n+1}(P)),$$

où pour  $i = 1, \dots, 2n$ ,

$$R_{s,i}(P) = \frac{p_i}{\|P\|^{s+1}}$$

et

$$R_{s,2n+1}(P) = \frac{p_{2n+1}}{\|P\|^{s+2}}.$$

**Remarque 5.4.2.** *Ces noyaux sont anti-symétriques,*

$$R_s(P^{-1}) = (R_s(P))^{-1},$$

et  $s$ -homogènes,

$$R_s(\delta_r(P)) = \delta_{\frac{1}{r^s}}(R_s(P)).$$

**Définition 5.4.3.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$ . Pour  $f \in L^1(\mu)$ , on définit la  $s$ -transformée de Riesz tronquée par*

$$\mathcal{R}_s^\epsilon(f)(P) := \left( \mathcal{R}_{s,i}^\epsilon(f)(P) \right)_{i=1}^{2n+1},$$

où pour  $i = 1, \dots, 2n+1$ ,

$$\mathcal{R}_{s,i}^\epsilon(f)(P) = \int_{\mathbb{H}^n \setminus B(P, \epsilon)} R_{s,i}(P^{-1} \cdot Q) f(Q) d\mu(Q).$$

La  $s$ -transformée de Riesz maximale est alors définie par

$$\mathcal{R}_s^*(f)(P) := \left( \mathcal{R}_{s,i}^*(f)(P) \right)_{i=1}^{2n+1},$$

où pour  $i = 1, \dots, 2n+1$ ,

$$\mathcal{R}_{s,i}^*(f)(P) := \sup_{\varepsilon > 0} |\mathcal{R}_{s,i}^\varepsilon(f)(P)|.$$

V. Chouhionis et P. Mattila ont montré le résultat suivant :

**Théorème 5.4.4** ([CM11a]). *Soient  $s \in ]0, 2n+2[$  et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,*

$$0 < \Theta_*^s(\mu, P) \leq \Theta^{*s}(\mu, P) < +\infty \quad (5.4.1)$$

et

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \left\| \left( \int_{B(P,1) \setminus B(P,\varepsilon)} R_{s,i}(P^{-1} \cdot Q) d\mu(Q) \right)_{i=1}^{2n+1} \right\| < +\infty. \quad (5.4.2)$$

Alors  $s$  est un entier dans  $[1, 2n+1]$  et pour  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ , l'ensemble  $\text{Tan}(\mu, A)$  contient des mesures qui sont la restriction de  $H^s$  à un sous-groupe homogène de  $\mathbb{H}^n$  de dimension de Hausdorff  $s$ .

**Remarque 5.4.5.** Si  $\mathcal{R}_s^*$  est borné sur  $L^2(\mu)$ , c'est-à-dire si l'opérateur maximal associé à chaque coordonnée  $\mathcal{R}_{s,i}^*$ ,  $i = 1, \dots, 2n+1$ , est borné sur  $L^2(\mu)$  (i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'opérateur  $\mathcal{R}_{s,i}^\varepsilon$  est borné sur  $L^2(\mu)$ , indépendamment de  $\varepsilon$ , voir section 5.5), alors en particulier la condition (5.4.2) est vérifiée.

**Définition 5.4.6.** Une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{H}^n$  admet une valeur principale en  $P \in \mathbb{H}^n$  si la limite

$$\mathcal{R}_s \mu(P) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_s^\varepsilon(1)(P) \quad (5.4.3)$$

existe.

Introduisons maintenant la notion de mesure symétrique dans  $\mathbb{H}^n$ . On montre alors que comme dans le cadre euclidien, une mesure de Radon qui admet en presque tout point une valeur principale et des densités inférieures et supérieures non-nulles et finies est symétrique (lemme 5.4.9).

**Définition 5.4.7.** Soit  $\nu$  une mesure de Radon non-nulle sur  $\mathbb{H}^n$ . Un point  $P \in \text{supp } \nu$  est dit symétrique pour  $\nu$  si pour tout  $r > 0$ ,

$$\int_{B(P,r)} P^{-1} \cdot Q d\nu(Q) = 0.$$

On note  $S(\nu)$  l'ensemble des points symétriques pour  $\nu$  et on dit que  $\nu$  est symétrique si  $\text{supp } \nu \subset S(\nu)$ .

**Lemme 5.4.8.** Soient  $\nu$  une mesure de Radon non-nulle sur  $\mathbb{H}^n$  et  $s > 0$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes pour  $P \in \mathbb{H}^n$  :

1.  $P \in S(\nu)$  ;
2.  $\int_{B(P,r') \setminus B(P,r)} R_s(P^{-1} \cdot Q) d\nu(Q) = 0$  pour  $0 < r < r' < \infty$  ;
3. (a) Pour toute fonction borélienne  $\phi$  définie sur  $]0, \infty[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et vérifiant  $\int \|P^{-1} \cdot Q\| \phi(\|P^{-1} \cdot Q\|) d\nu(Q) < \infty$ ,

$$\int (P^{-1} \cdot Q)_i \phi(\|P^{-1} \cdot Q\|) d\nu(Q) = 0, \quad i = 1, \dots, 2n;$$

- (b) Pour toute fonction borélienne  $\psi$  définie sur  $]0, \infty[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et vérifiant  $\int \|P^{-1} \cdot Q\|^2 \psi(\|P^{-1} \cdot Q\|) d\nu(Q) < \infty$ ,

$$\int (P^{-1} \cdot Q)_{2n+1} \psi(\|P^{-1} \cdot Q\|) d\nu(Q) = 0.$$

*Démonstration.* Pour montrer que l'assertion 3 implique l'assertion 1, il suffit de choisir  $\phi(t) = \psi(t) = \mathbf{1}_{\{t \leq r\}}$ .

Pour montrer que 3 implique 2, on choisit  $\phi(t) = \frac{1}{t^{s+1}} \mathbf{1}_{\{r \leq t \leq r'\}}$  et  $\psi(t) = \frac{1}{t^{s+2}} \mathbf{1}_{\{r \leq t \leq r'\}}$ .

Supposons désormais l'assertion 2 satisfaite. L'assertion 3(a) est vérifiée si  $t \mapsto t^{s+1} \phi(t)$  est la fonction caractéristique d'un intervalle compact de  $]0, \infty[$ . En effet pour  $i = 1, \dots, 2n$ , on a

$$\int (P^{-1} \cdot Q)_i \phi(\|P^{-1} \cdot Q\|) d\nu(Q) = \int R_{s,i}(P^{-1} \cdot Q) \|P^{-1} \cdot Q\|^{s+1} \phi(\|P^{-1} \cdot Q\|) d\nu(Q).$$

Le cas général se montre alors par approximation. On procède de manière similaire pour montrer l'assertion 3(b).

Il reste à montrer que 1 implique 3. Cela est vrai pour  $\phi(t) = \psi(t) = \mathbf{1}_{\{t \leq r\}}$ . Le cas général se montre à nouveau par approximation.  $\square$

**Lemme 5.4.9.** Soient  $s \in ]0, n + 2[$  et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$  telles que pour  $\mu$ -presque tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,  $\Theta_*^s(\mu, P)$  et  $\mathcal{R}_s \mu(P)$  existe. Alors en  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ , toute mesure  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  est symétrique avec  $0 \in S(\nu)$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $P \in \mathbb{H}^n$  tel que  $\mathcal{R}_s \mu(P)$  existe. Alors

$$\lim_{0 < \eta < \delta \rightarrow 0} \int_{B(P,\delta) \setminus B(P,\eta)} R_s(P^{-1} \cdot Q) d\mu(Q) = 0. \quad (5.4.4)$$

On applique le théorème d'Egoroff à la suite de fonctions mesurables

$$\sup_{0 < \eta < \delta < 1/i} \left| \int_{B(P, \delta) \setminus B(P, \eta)} R_s(P^{-1} \cdot Q) d\mu(Q) \right|.$$

Il existe donc un compact  $F$  tel que  $\mu(\mathbb{H}^n \setminus F) < \varepsilon$  et la convergence dans (5.4.4) est uniforme sur  $F$ . On peut de plus choisir  $F$  tel que pour tout  $P \in F$ ,  $\Theta_*^s(\mu, P) > 0$ .

Soit  $A \in F$  un point de  $\mu$ -densité de  $F$ , *i.e.* un point tel que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(A, r) \setminus F)}{\mu(B(A, r))} = 0. \quad (5.4.5)$$

D'après le théorème de différenciation des mesures (qui est valide dans le groupe de Heisenberg, bien que le lemme de recouvrement de Besicovitch ne le soit pas), la condition (5.4.5) est vérifiée pour  $\mu$ -presque tout  $A \in F$ , il suffit donc de s'intéresser à de tels points. Soient  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  et  $P \in \text{supp } \nu$ . D'après le lemme 4.5.3, il existe  $c > 0$  et une suite  $r_j \rightarrow 0$  telles que

$$\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} c r_j T_{A, r_j} \# \mu.$$

Montrons que  $P \in S(\nu)$ . Pour  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &< \nu(U(P, r)) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} r_j^{-s} (T_{A, r_j} \# \mu)(U, P, r) \\ &= \liminf_{r \rightarrow 0} r_j^{-s} \mu(U(A \cdot \delta_{r_j}(P), r r_j)) \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} r_j^{-s} \mu(F \cap U(A \cdot \delta_{r_j}(P), r r_j)). \end{aligned}$$

En particulier, pour tout  $r > 0$ ,  $F \cap U(A \cdot \delta_{r_j}(P), r r_j) \neq \emptyset$  pour tout  $j$  suffisamment grand. On peut donc choisir une suite  $(A_j) \in F^{\mathbb{N}}$  telle que  $P_j := \delta_{\frac{1}{r_j}}(A^{-1} \cdot A_j) \rightarrow P$ . Soient maintenant  $0 < r < r' < \infty$  tels que  $\nu(\partial B(P, r)) = \nu(\partial B(P, r')) = 0$ , ce qui est vrai pour tous sauf un nombre

dénombrable de  $0 < r < r' < \infty$ . Pour  $i = 1, \dots, 2n + 1$ ,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{B(P,r') \setminus B(P,r)} R_{s,i}(P^{-1} \cdot Q) d\nu(Q) \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{B(P_j,r') \setminus B(P_j,r)} R_{s,i}(P_j^{-1} \cdot Q) d\nu(Q) \right| \\
 & = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{r_j^s} \int_{B(A \cdot \delta_{r_j}(P_j), r' r_j) \setminus B(A \cdot \delta_{r_j}(P_j), r r_j)} R_{s,i}(P_j^{-1} \cdot \delta_{1/r_j}(A^{-1} \cdot Q)) d\mu(Q) \right| \\
 & = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{B(A_j, r' r_j) \setminus B(A_j, r r_j)} R_{s,i}(A_j^{-1} \cdot Q) d\mu(Q) \right| = 0 \text{ par le (5.4.4).}
 \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\int_{B(P,r') \setminus B(P,r)} R_s(P^{-1} \cdot Q) d\nu(Q) = 0.$$

Par approximation, cette égalité est satisfaite pour tout  $0 < r < r' < \infty$  et donc  $P \in S(\nu)$ .  $\square$

On montre de manière très similaire le lemme suivant (on pourra se référer à [Mat95], p.190).

**Lemme 5.4.10.** *Soient  $s > 0$  et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,*

$$0 < \Theta_*^s(\mu, P) \leq \Theta^{s*}(\mu, P) < \infty.$$

*Alors pour  $\mu$ -presque tout  $A \in \mathbb{H}^n$ , toute mesure  $\nu \in \text{Tan}(\mu, A)$  est Ahlfors-régulière de dimension  $s$ .*

Dans le cadre euclidien, on peut montrer ([Mat95], théorème 20.9) que si une mesure  $\nu$  est symétrique et  $s$ -Ahlfors-régulière, alors  $s$  est un entier et  $\nu$  est égal à  $cH^s \llcorner V$ , où  $c$  est une constante et  $V$  un plan de dimension  $s$ .

Nous n'avons pas été en mesure de montrer un tel résultat dans  $\mathbb{H}^n$ . Le seul résultat dans ce sens est celui de [CM11a] qui s'applique à ce cadre. En effet, le lemme 5.4.9 nous assure que si  $s \in ]0, n + 2[$  et  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $P \in \mathbb{H}^n$ ,

$$0 < \Theta_*^s(\mu, P) \leq \Theta^{s*}(\mu, P) < \infty$$

et  $\mathcal{R}_s\mu(P)$  existe, alors les conditions du théorème 5.4.4 sont satisfaites. La preuve de ce théorème repose sur la proposition suivante. Lorsque la mesure  $\mu$  admet en presque tout point une valeur principale, la symétrie des mesures tangentes (lemme 5.4.9) en simplifie fortement la preuve. Rappelons que  $\mathcal{G}(H, d)$  est la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $d$  dans  $H$  (section 4.3).

**Proposition 5.4.11.** *Soient  $\mathcal{L} \in \mathcal{G}(H, d)$  et  $\nu$  une mesure symétrique Ahlfors-régulière de dimension  $s$ .*

1. *Si  $\text{supp } \nu \subset \mathbb{V}_{\mathcal{L}}$ ,  $\text{supp } \nu \neq \mathbb{V}_{\mathcal{L}}$ , alors il existe  $B \in \text{supp } \nu$  et  $\sigma \in \text{Tan}(\nu, B)$  tels que soit  $\text{supp } \sigma \subset \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$  pour un  $\mathfrak{M} \in \mathcal{G}(2n, d-1)$  avec  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{L}$ , soit  $\text{supp } \sigma \subset \mathcal{L}$ .*
2. *Si  $\text{supp } \nu \subset \mathcal{L}$ ,  $\text{supp } \nu \neq \mathcal{L}$ , il existe  $B \in \text{supp } \nu$  et  $\sigma \in \text{Tan}(\nu, B)$  tels que  $\text{supp } \sigma \subset \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$  pour un  $\mathfrak{M} \in \mathcal{G}(2n, d-1)$  avec  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{L}$ .*

## 5.5 Rectifiabilité uniforme

La théorie de la rectifiabilité uniforme dans  $\mathbb{R}^n$  a été intensivement étudiée et développée par G. David et S. Semmes. En première approximation, les ensembles uniformément rectifiables sont ceux qu'on obtient lorsque l'on cherche à rendre quantitative et invariante par changement d'échelle la notion de rectifiabilité. Un ensemble uniformément rectifiable est évidemment rectifiable. Nous sommes intéressés par la théorie de la rectifiabilité uniforme dans le groupe de Heisenberg et plus généralement dans les groupes de Carnot. Il existe de nombreuses caractérisations des ensembles uniformément rectifiables dans  $\mathbb{R}^n$  (voir [DS91] et [DS93]), nous n'en donnons que quelques unes ici.

Supposons que  $m$  et  $n$  soient des entiers avec  $0 < m < n$  et notons  $E$  un sous-ensemble  $m$ -Ahlfors-régulier fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

En dimension 1, il existe un critère simple de 1-uniforme rectifiabilité :  $E$  est uniformément 1-rectifiable si et seulement si  $E$  est contenu dans une courbe localement rectifiable  $\Gamma$  telle qu'il existe  $C < \infty$  avec

$$H^1(\Gamma \cap B(x, r)) \leq Cr \text{ pour } x \in \Gamma, r > 0.$$

Le cas de la dimension 1 est particulier. Donnons maintenant des critères classiques valides en toute dimension. Un ensemble  $E$  est *uniformément  $m$ -rectifiable* si et seulement s'il satisfait *BPLI* (pour "Big Pieces of Lipschitz Images"), *i.e.* s'il existe des nombres  $\theta, M > 0$  tels que pour tout  $x \in E$  et



$r > 0$ , il existe une application lipschitzienne  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $Lip(f) \leq M$  et

$$H^m(E \cap B(x, r) \cap f(B(0, r))) \geq \theta r^m.$$

Notons qu'une telle caractérisation est également valide avec des applications bi-lipschitziennes. On pourra se référer à l'article [Tor95] de T. Toro pour des résultats en ce sens. Pour les ensembles de dimension métrique  $m \in \{1, \dots, n\}$  dans  $\mathbb{H}^n$ , un critère basé sur les images d'applications lipschitziennes ne semble pas poser de problème et s'accorde avec les notions intrinsèques d'ensemble rectifiable, puisque nous avons vu que la paramétrisation naturelle  $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{H}^n, A \mapsto f(A) \cdot A$  d'une application lipschitzienne intrinsèque  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ , où  $\mathbb{A}$  est un sous-groupe horizontal de dimension  $m$  (et  $\mathbb{B}$  un sous-groupe vertical complémentaire), est lipschitzienne au sens métrique. En revanche si  $m \in \{n+1, \dots, 2n\}$  et  $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$  est lipschitzienne intrinsèque, l'application  $\Phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}^n, B \mapsto B \cdot f(B)$  n'est en général pas lipschitzienne au sens métrique. Nous avons par ailleurs vu que l'image de  $\mathbb{R}^m$  par une application lipschitzienne au sens métrique à valeurs dans  $\mathbb{H}^n$  est de  $H^m$ -mesure nulle.

Un autre critère de rectifiabilité uniforme est lié à la qualité de l'approximation de l'ensemble  $E$  par des plans de dimension  $m$ . Il faut pour cela introduire les nombres  $\beta_1$ , une version  $L^1$  des nombres  $\beta$  de Jones. Pour  $x \in E$  et  $t > 0$ , on pose

$$\beta_1^{Euc}(x, t, E) := \inf_V t^{-m} \int_{y \in E \cap B(x, t)} \frac{d(y, V)}{t} dH^m(y),$$

où l'infimum est pris sur tous les sous-espaces affines de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $E$  est uniformément  $m$ -rectifiable si et seulement s'il existe  $C < \infty$  tel que pour tout  $x \in E$  et  $r > 0$

$$\int_0^r \int_{E \cap B(x, r)} t^{-1} \beta_1^{Euc}(x, t, E)^2 dH^m(x) dt \leq Cr^m.$$

Nous discutons de manière plus approfondie des nombres  $\beta$  et de ce type de condition au chapitre suivant. Nous verrons en particulier qu'au moins en dimension 1, ce type de critère s'adapte bien au groupe de Heisenberg.

Une condition similaire à BPLI, mais plus forte est la condition BPLG. Elle n'implique cette fois plus les images d'applications lipschitziennes, mais seulement des graphes lipschitziens. Les graphes lipschitziens intrinsèques définis section 6.1 se prêtent donc naturellement à une telle condition dans  $\mathbb{H}^n$ .

**Définition 5.5.1.** On dit que  $E \subset \mathbb{H}^n$  satisfait BPLG si  $E$  est  $k_m$ -Ahlfors régulier pour un entier  $k_m$  et s'il existe des constantes  $M, \theta > 0$  telles que pour tout  $P \in E$  et tout  $r > 0$ , il existe un graphe  $M$ -lipschitzien intrinsèque  $\mathcal{S}$  de dimension métrique  $k_m$  tel que

$$\mathcal{S}^{k_m}(E \cap \mathcal{S} \cap B(P, r)) \geq \theta \cdot r^{k_m}.$$

**Proposition 5.5.2.** Si  $E$  satisfait BPLG, alors  $E$  est recouvert, à un ensemble négligeable près, par une union de graphes lipschitziens intrinsèques.

La preuve, basée sur le lemme de recouvrement, est identique à l'analogie euclidien :

*Démonstration.* Soient  $P_0 \in E$  et  $r_0 > 0$ . Il suffit de montrer que  $E_0 := E \cap B(P_0, r_0)$  vérifie la conclusion de la proposition. Soit  $\mathcal{S}_0$  un graphe  $M$ -lipschitzien intrinsèque tel que

$$\mathcal{S}^{k_m}(E_0 \cap \mathcal{S}_0) \geq \theta \cdot r_0^{k_m}.$$

Notons

$$\mathcal{F} := \{B(P, r) \mid P \in E_0, 5B(P, r) \subset B(P_0, R_0) \text{ et } B(P, r) \cap \mathcal{S}_0 \cap E_0 = \emptyset\}.$$

Par un lemme de recouvrement bien connu, on obtient une famille  $(B_1^i)_{i \in I}$  de boules disjointes telles que  $E_0 \setminus \mathcal{S}_0 \subset \bigcup_{i \in I} 5B_1^i$ . On note alors  $(\mathcal{S}_1^i)_{i \in I}$  une famille de graphes  $M$ -lipschitziens intrinsèques tels que

$$\mathcal{S}^{k_m}(E_0 \cap \mathcal{S}_1^i \cap B_1^i) \geq \theta \cdot \left(r_1^{(i)}\right)^{k_m} \geq \frac{\theta}{C} \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \cap B_1^i).$$

Alors il existe un entier  $\ell_1$  tel que

$$\mathcal{S}^{k_m}(E_0 \setminus \mathcal{S}_0) \leq 5^{k_m} \sum_{i \in I} \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \cap B_1^i) \leq 6^{k_m} \sum_{i=0}^{\ell_1} \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \cap B_1^i).$$

On pose  $E_1 := E_0 \setminus \left(\mathcal{S}_0 \cup \left(\bigcup_{i=0}^{\ell_1} \mathcal{S}_1^i\right)\right)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{k_m}(E_1) &\leq \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \setminus \mathcal{S}_0) - \sum_{i=0}^{\ell_1} \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \cap \mathcal{S}_1^i \cap B_1^i) \\ &\leq \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \setminus \mathcal{S}_0) - \frac{\theta}{C} \sum_{i=0}^{\ell_1} \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \cap B_1^i) \\ &\leq \left(1 - \frac{\theta}{C} 6^{-k_m}\right) \mathcal{S}^{k_m}(E_0 \setminus \mathcal{S}_0) \end{aligned}$$

En renouvelant la construction, on recouvre bien  $E_0$ , à ensemble de  $\mathcal{S}^{k_m}$ -mesure nulle près, par une union dénombrable de graphe lipschitziens intrinsèques.  $\square$

Nous énonçons maintenant un dernier critère de rectifiabilité uniforme. Il s'agit en réalité de la motivation initiale de G. David et S. Semmes pour l'introduction des ensembles uniformément rectifiables : comprendre sur quels types d'ensembles de dimension  $m$  les intégrales singulières standard sont bornées sur  $L^2$ , le terme standard faisant référence aux intégrales singulières que nous définissons immédiatement. Soit  $m$  un entier tel que  $0 < m \leq n$  et  $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continûment différentiable avec pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $K(-x) = -K(x)$ ,  $|K(x)| \leq C|x|^{-m}$  et  $|\nabla^j K(x)| \leq C(j)|x|^{-m-j}$ . Une telle fonction sera appelée un *noyau standard*. Si  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir l'opérateur d'intégrale singulière tronquée  $T^\varepsilon$ , pour  $f \in L^1(\mu)$ , par

$$T^\varepsilon(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \varepsilon)} K(x - y)f(y)d\mu(y),$$

et l'opérateur maximal correspondant par

$$T^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T^\varepsilon(f)(x)|.$$

On dit alors que l'opérateur d'intégrale singulière  $T$  est *borné sur  $L^2(\mu)$*  si les opérateurs  $T^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  sont bornés uniformément sur  $L^2(\mu)$ . Si  $E$  est  $m$ -Ahlfors-régulier et si l'opérateur d'intégrale singulière associé à chacun des noyaux standard  $K$  est borné sur  $L^2(H^m \llcorner E)$ , alors  $E$  est uniformément  $m$ -rectifiable ([DS91]). Réciproquement, si  $E$  est uniformément  $m$ -rectifiable, alors les opérateurs d'intégrales singulières associés aux noyaux standard  $K$  sont bornés sur  $L^2(H^m \llcorner E)$ . On peut se poser des questions similaires dans  $\mathbb{H}^n$ . Bien que l'on dispose de théorèmes de type  $T(b)$  dans ce cadre, montrer la bornitude sur  $L^2(H^m \llcorner \mathcal{S})$  de l'opérateur d'intégrale singulière associé au noyau de Riesz  $\mathcal{R}_m$  (comme défini à la section 5.4) sur un graphe intrinséquement lipschitzien  $\mathcal{S}$  est une question difficile. Elle semble plus abordable pour le noyau associé à la solution fondamentale du laplacien sous-riemannien  $\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^n X_i + Y_i$  (voir les commentaires de conclusion de [CM11b]).

Nous terminons cette section en présentant un problème ouvert qui motive l'étude de la rectifiabilité uniforme dans le groupe de Heisenberg. Dans  $\mathbb{R}^n$ , les ensembles Ahlfors-réguliers de codimension 1 qui vérifient la condition B (voir la figure 5.5.1 et la définition ci-dessous) possèdent des propriétés de rectifiabilité assez fortes.

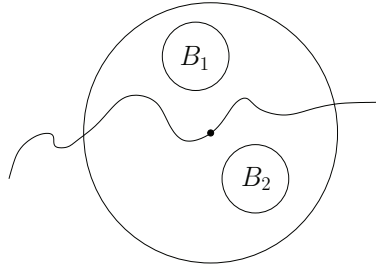


FIGURE 5.5.1 – La condition B

**Définition 5.5.3.** Soit  $G$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On dira que  $\partial G$  vérifie (localement) la condition B s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in \partial G$  et tout  $r \in ]0, 1]$ , il existe deux boules  $B_1 \subset G \cap B(x, r)$  et  $B_2 \subset B(x, r) \setminus \overline{G}$ , toutes deux de rayon  $\geq C^{-1}r$ .

**Théorème 5.5.4** ([DJ90, DS93]). Soit  $G$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant la condition B et tel que  $\partial G$  soit Ahlfors-régulier de codimension 1. Alors  $\partial G$  vérifie la condition BPLG. En particulier,  $\partial G$  est uniformément rectifiable.

Dans le groupe de Heisenberg, G.P. Leonardi et S. Rigot ont montré ([LR03]) que le bord des ensembles isopérimétriques, c'est-à-dire des ensembles qui réalisent l'égalité dans l'inégalité isopérimétrique, vérifient la condition B et sont Ahlfors-régulier de codimension 1. Il est donc naturel de se demander si ces ensembles satisfont la propriété BPLG (voir la définition 5.5.1) ou même simplement des propriétés de rectifiabilité uniforme.

---

## Chapitre 6

# Problème géométrique du voyageur de commerce

Le problème géométrique du voyageur de commerce peut s'énoncer de cette manière : sous quelles conditions quantitatives un sous-ensemble compact  $E \subset X$  est-il contenu dans une courbe rectifiable de  $X$ , *i.e.* une courbe de longueur finie ?

Avant d'entrer dans les détails du problème du voyageur de commerce, rappelons qu'une *courbe*  $\gamma$  dans un espace métrique  $(X, d)$  est une application continue  $\gamma : I \rightarrow X$ , ou son image, où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle. Si  $\gamma$  est lipschitzienne, on parlera de *courbe lipschitzienne*. Nous rappelons maintenant comment définir la longueur de  $\gamma$ . Supposons pour simplifier que  $I$  est compact,  $I = [a, b]$  avec  $a < b$ . La *longueur* de  $\gamma$  est donnée par

$$\ell(\gamma) := \sum_{i=1}^N d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})),$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$  de  $[a, b]$ . Une courbe est *rectifiable* si sa longueur est finie. Par abus de notations, il nous arrivera de noter  $\ell(\Gamma)$  pour un continuum  $\Gamma$  d'un espace géodésique doublant  $X$  tel que  $H^1(X) < +\infty$ . Cela n'a pas d'importance ici, puisque d'après la proposition 6.4.3, il existe pour un tel continuum  $\Gamma$  une courbe lipschitzienne qui contient  $\Gamma$  et qui est de longueur comparable à  $\Gamma$ .

Revenons maintenant au problème géométrique du voyageur de commerce. P. Jones ([Jon90]) a considéré le cas de l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^n, d_{Euc})$ . Pour cela, il a eu l'idée d'introduire les nombres  $\beta_\infty^{Euc}(x, t, E)$  définis de la manière suivante, pour un sous-ensemble compact  $E \subset \mathbb{R}^n$  : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

et tout  $t > 0$ , on définit, si  $E \cap B(x, t) \neq \emptyset$ ,

$$\beta_{\infty}^{Euc}(x, t, E) := \inf_{\mathfrak{L}} \sup_{y \in E \cap B(x, t)} \left( \frac{d_{Euc}(y, \mathfrak{L})}{t} \right),$$

où l'infimum est pris sur toutes les droites  $\mathfrak{L}$  de  $\mathbb{R}^n$ , et si  $E \cap B(x, t) = \emptyset$ ,  $\beta_{\infty}^{Euc}(x, t, E) = 0$ . Les  $\beta_{\infty}^{Euc}$  mesurent donc la qualité de l'approximation de  $E$  par des droites, en tout point et à toute échelle. La condition de P. Jones s'énonce alors ainsi :

**Théorème 6.0.5** ([Jon90], [Oki92]). *Soit  $E$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une courbe rectifiable  $\Gamma$  contenant  $E$  si et seulement si la quantité*

$$\beta_{\infty}^{Euc}(E) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\text{diam } E} \beta_{\infty}^{Euc}(x, t, E)^2 dx \frac{dt}{t^n}$$

est finie et on a alors

$$C^{-1}(\beta_{\infty}^{Euc}(E) + \text{diam } E) \leq \inf_{\Gamma \supset E} H^1(\Gamma) \leq C(\beta_{\infty}^{Euc}(E) + \text{diam } E),$$

où  $C > 0$  est une constante dépendant uniquement de  $n$ .

P. Jones ([Jon90]) a montré le théorème dans  $\mathbb{R}^2$ . En toute dimension, il a démontré que la condition  $\beta_{\infty}^{Euc}(E) < \infty$  implique que  $E$  est contenu dans une courbe rectifiable et K. Okikiolu ([Oki92]) a prouvé la réciproque. Dans ce résultat, la constante  $C$  dépend exponentiellement de la dimension  $n$ . R. Schul ([Sch07b]) a récemment montré qu'en fait  $C$  dépend faiblement de la dimension : il a obtenu un résultat similaire dans les espaces de Hilbert séparables.

Il est naturel d'essayer d'obtenir le même type de résultats dans d'autres espaces métriques.

F. Ferrari, B. Franchi et H. Pajot ont donné un analogue du théorème de P. Jones pour le premier groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^1 =: \mathbb{H}$ , en utilisant les  $\mathbb{H}$ -droites. Pour pouvoir l'énoncer, nous avons besoin de donner quelques définitions. Nous appellerons une  $\mathbb{H}$ -droite un ensemble  $\mathfrak{L}$  de la forme  $\mathfrak{L} = a \cdot \mathfrak{R}$  où  $a$  est un point de  $\mathbb{H}$  et  $\mathfrak{R}$  est une droite euclidienne contenu dans le plan  $H := \{P \in \mathbb{H} \mid p_3 = 0\}$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{G}(\mathbb{H}, 1)$ . Nous noterons  $\mathfrak{G}(\mathbb{H}, 1)$  l'ensemble des  $\mathbb{H}$ -droites. Pour un ensemble compact  $E \subset \mathbb{H}$ , un point  $P \in \mathbb{H}$  et un réel  $t > 0$ , on pose alors

$$\beta_{\infty}^{\mathbb{H}}(P, t, E) := \inf_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{G}(\mathbb{H}, 1)} \sup_{Q \in E \cap B_c(P, t)} \frac{d_c(Q, \mathfrak{L})}{t}$$

et

$$\beta_{\infty}^{\mathbb{H}}(E) := \int_{\mathbb{H}} \int_0^{+\infty} \beta_{\infty}^{\mathbb{H}}(P, t, E)^2 dP \frac{dt}{t^4},$$

où  $dP$  désigne l'intégration par rapport à la mesure de Hausdorff  $H_c^4$  de  $(\mathbb{H}, d_c)$ . Le 4 dans  $dt/t^4$  correspond, comme dans le cas euclidien, à la dimension de Hausdorff de  $\mathbb{H}$ .

**Théorème 6.0.6** ([FFP07]). *Soit  $E \subset \mathbb{H}$  un ensemble compact. Alors  $E$  est contenu dans une courbe rectifiable  $\Gamma$  si  $\beta_{\infty}^{\mathbb{H}}(E) < \infty$ , et de plus,*

$$\inf_{\Gamma \supset E} \ell(\Gamma) \leq C(\text{diam } E + \beta_{\infty}^{\mathbb{H}}(E)).$$

N. Juillet a montré ([Jui10]) que le critère de F. Ferrari, B. Franchi et H. Pajot n'est pas nécessaire pour qu'un ensemble compact  $E \subset \mathbb{H}$  soit recouvert par une courbe rectifiable.

I. Hahlomaa ([Hah05]) s'est intéressé au cas des espaces métriques généraux  $(X, d)$ . Pour remplacer l'absence de bonne définition de droite dans un espace métrique général, il a défini des nombres  $\beta^X$  en utilisant la *courbure de Menger*  $c(\cdot)$ . Soient  $x_1, x_2, x_3 \in X$  trois points distincts et  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathbb{R}^2$  tels que  $d(x_i, x_j) = |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$  pour  $1 \leq i, j \leq 3$ . Si  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  sont colinéaires, on définit

$$c(x_1, x_2, x_3) := 0.$$

Sinon, notons  $R$  le rayon du cercle passant par  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ . On pose alors

$$c(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{R}.$$

On définit alors la longueur d'une partie  $E$  compacte de  $X$  par

$$\ell(E) := \inf\{\text{Lip}(f) \mid f : E' \rightarrow E \text{ est une surjection et } E' \subset [0, 1]\},$$

puis pour  $x \in X$  et  $t > 0$ , les nombres

$$\beta^X(x, t, E) := \sup\{c(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in E \cap B(x, t), \\ d(x_i, x_j) \leq C_2^{-1}t, \forall i \neq j\},$$

où  $C_2$  est une grande constante. Soient  $C_1 \leq C_2$  une constante et  $\Delta = (\Delta_k)_k$  un *réseau* de  $E$ , c'est-à-dire que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on considère un ensemble  $\Delta_k$  de points  $2^{-k}$ -denses de  $E$ , *i.e.*

1. si  $x, y \in \Delta_k$  avec  $x \neq y$ ,  $d(x, y) > 2^{-k}$ ;



2. pour tout  $y \in E$ , il existe  $x \in \Delta_k$  tel que  $d(x, y) \leq 2^{-k}$ .

On définit enfin

$$\beta^X(E) := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{x \in \Delta_j} \beta^X(x, C_1 2^{-j}, E)^2 (2^{-j})^3 \mid (\Delta_j)_j \text{ réseau de } E \right\}$$

**Théorème 6.0.7** ([Hah05]). *Il existe une constante absolue  $C < \infty$  telle que pour tout espace métrique  $(X, d)$  et toute partie compacte  $E \subset X$ ,*

$$\ell(E) \leq C(\beta^X(E) + \text{diam } E).$$

Notons que lorsque  $d(x_1, x_2) \leq d(x_2, x_3) \leq d(x_1, x_3) \leq C_2 \cdot d(x_1, x_2)$ , alors

$$c^2(x_1, x_2, x_3) \text{diam}\{x_1, x_2, x_3\}^3 \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - d(x_1, x_3).$$

Cela nous permet de montrer facilement au moyen du théorème 6.2.1 que dans le groupe de Heisenberg, si  $\beta_\infty^{\mathbb{H}}(P, t) \leq \varepsilon_0$  pour une constante  $\varepsilon_0$  très petite, alors

$$\beta^X(P, t)^2 t^3 \leq C \cdot \beta_\infty^{\mathbb{H}}(P, 2t)^2 t.$$

Puisque  $\beta^X(P, t)$  est borné, on a évidemment

$$\beta^X(P, t)^2 t^3 \leq C \cdot \beta_\infty^{\mathbb{H}}(P, 2t)^2 t$$

dans le cas où  $\beta_\infty^{\mathbb{H}}(P, t) \geq \varepsilon_0$ . Nous ne sommes en revanche pas en mesure de montrer les inégalités inverses et donc de comparer complètement les résultats de [FFP07] et [Hah05].

Intéressons nous maintenant au cas où l'ensemble compact  $E$  est 1-régulier. Rappelons qu'un ensemble  $E \subset X$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est  $k$ -régulier (ou *Ahlfors-régulier de dimension  $k$* ) si et seulement si  $E$  est fermé et s'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $x \in E$  et tout  $r \in ]0, \text{diam } E[$ ,

$$C_0^{-1} r^k \leq H^k(E \cap B(x, r)) \leq C_0 r^k.$$

Au début des années 1990, G. David et S. Semmes ont donné une version du théorème géométrique du voyageur de commerce de P. Jones pour des ensembles  $d$ -régulier  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Ils ont pour cela considéré des versions  $L^q$  des nombres  $\beta_\infty^{Euc}$  de Jones. Nous n'en donnons ici que la version en dimension 1, l'énoncé en dimension supérieur est très proche. Pour tout  $q \geq 1$ , tout  $x \in E$  et tout  $t > 0$ , on définit

$$\beta_q^{Euc}(x, t, E) := \inf_{\mathfrak{L}} \left( \frac{1}{t} \int_{y \in E \cap B(x, t)} \left( \frac{d_{Euc}(y, \mathfrak{L})}{t} \right)^q dH^1(y) \right)^{1/q},$$

où l'infimum est pris sur les droites  $\mathfrak{L}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 6.0.8** ([DS91], [DS93]). *Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble 1-régulier compact de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\beta_q^{Euc}(x, t, E)^2 dH^1(x) \frac{dt}{t}$  définit une mesure de Carleson sur  $E \times \mathbb{R}^+$ , i.e. il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in E$  et tout  $r > 0$ ,*

$$\int_{y \in E \cap B(x, R)} \int_0^R \beta_q^{Euc}(y, t, E)^2 dH^1(y) \frac{dt}{t} \leq Cr,$$

*si et seulement si  $E \subset \Gamma$ , où  $\Gamma$  est une courbe Ahlfors-régulière.*

La preuve de ce résultat repose essentiellement sur la décomposition de la couronne. H. Pajot a un peu plus tard donné une preuve plus simple d'une des deux implications du théorème de G. David et S. Semmes, en s'inspirant de l'algorithme utilisé par Jones dans sa construction. Il a montré que pour un sous-ensemble 1-régulier compact  $E \subset \mathbb{R}^n$ , si  $\beta_q^{Euc}(x, t, E)^2 dH^1(x) \frac{dt}{t}$  définit une mesure de Carleson sur  $E \times \mathbb{R}^+$ , alors  $E$  est inclus dans une courbe Ahlfors-régulière. Sa construction donne en outre

**Théorème 6.0.9** ([Paj96]). *Soit  $E$  un ensemble 1-régulier compact de  $\mathbb{R}^n$ . Si*

$$\beta_q^{Euc}(E) = \int_E \int_0^{\text{diam } E} \beta_q^{Euc}(x, t, E)^2 dH^1(x) \frac{dt}{t} < \infty,$$

*alors  $E \subset \Gamma$ , où  $\Gamma$  est une courbe de longueur finie, et on a de plus,*

$$\inf_{\Gamma \supset E} H^1(\Gamma) \leq C(\beta_q^{Euc}(E)^2 + \text{diam } E).$$

I. Hahlomaa ([Hah07]) a démontré le théorème suivant, valide dans un espace métrique géodésique complet :

**Théorème 6.0.10.** *Soit  $E$  un ensemble 1-régulier d'un espace métrique géodésique complet  $(X, d)$ . Supposons que pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ ,*

$$\iiint_{A(x, r, E)} c^2(u, v, w) dH^1|_E(w) dH^1|_E(v) dH^1|_E(u) \leq Cr,$$

*où  $A(x, r, E)$  est l'ensemble des triplets  $x_1, x_2, x_3 \in E \cap B(x, r)$  tels que*

$$C_2 \cdot d(x_i, x_j) \geq \text{diam } \{x_1, x_2, x_3\}.$$

*Alors  $E$  est contenu dans un ensemble 1-régulier connexe  $\Gamma$ .*

R. Schul a prouvé dans [Sch07a] la réciproque de ce résultat :

**Théorème 6.0.11.** *Soit  $\Gamma$  un ensemble 1-régulier connexe d'un espace métrique  $(X, d)$ . Alors pour tout  $x \in \Gamma$  et tout  $r > 0$ ,*

$$\iiint_{A(x,r,\Gamma)} c^2(u, v, w) dH_{|\Gamma}^1(w) dH_{|\Gamma}^1(v) dH_{|\Gamma}^1(u) \leq Cr.$$

Nous nous intéressons dans la suite de ce chapitre au résultat analogue pour les nombres  $\beta_q^{\mathbb{H}}$  dans le groupe de Heisenberg (théorèmes 6.3.1 et 6.3.2). Avant cela, nous donnons à la section suivante un tableau récapitulatif de tous les résultats cités ci-dessus. Nous expliquons ensuite à la section 6.2 les principales étapes de la construction de P. Jones ([Jon90]). Les estimées reposent fortement sur le théorème de Pythagore. Nous verrons comment H. Pajot ([Paj96]) a adapté cette construction pour obtenir les estimées avec les nombres  $\beta_q^{Euc}$ , puis comment F. Ferrari, B. Franchi et H. Pajot ([FFP07]) ont procédé pour obtenir une construction analogue dans le cadre du groupe de Heisenberg, où le théorème de Pythagore n'est plus valide. Nous énonçons à la section 6.3 les théorèmes 6.3.1 et 6.3.2, puis nous consacrons les cinq dernières sections de ce chapitre à leurs démonstrations.

## 6.1 Récapitulatif des résultats existant

Les résultats énoncés ci-dessus étant nombreux, nous donnons ici deux tableaux récapitulatifs, l'un pour les versions "standards" et l'autre pour les versions "Ahlfors-régulières" des théorèmes de voyageur de commerce. Nous préférons ici des formulations discrètes car elles montrent plus clairement les similitudes entre les différents énoncés. En contrepartie, il nous faut définir quelques quantités. Pour un sous-ensemble  $E$  d'un espace métrique  $(\mathcal{M}, d)$ , notons  $\Delta^E := (\Delta_k^E)_k$  un réseau tel que  $\Delta_k^E \subset \Delta_{k+1}^E$ . On pose alors

$$\mathcal{D}^E := \{B(x, C_2 2^{-k}) \mid x \in \Delta_k^E \text{ pour un entier } k, k \geq k_0\}.$$

Soit  $Q$  une boule de  $\mathcal{M}$ . Dans le cas où  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ , on pose

$$\beta_{\infty}^{Euc}(Q) := \frac{1}{\text{diam}(Q)} \inf_{\mathfrak{L}} \sup_{x \in E \cap Q} d(x, \mathfrak{L})$$

et sa variante  $L^q$

$$\beta_q^{Euc}(Q) := \frac{1}{\text{diam}(Q)} \inf_{\mathfrak{L}} \left\{ \int_Q \left( \frac{d(y, \mathfrak{L})}{\text{diam}(Q)} \right)^q dx \right\}^{1/q}.$$

Les quantités analogues dans le groupe de Heisenberg se définissent de manière similaire. Enfin, dans le cas où  $\mathcal{M} = X$ , on définit

$$\beta^X(Q) := \text{diam}(Q) \sup_{\substack{x_1, x_2, x_3 \in Q \\ C_2 d(x_i, x_j) \geq \text{diam}(Q)}} c^2(x_1, x_2, x_3).$$

CHAPITRE 6. PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

---

Nous sommes maintenant en mesure de récapituler les différents énoncés des théorèmes de voyageur de commerce cités ci-dessus par les deux tableaux suivants :

Auteur(s)	Type d'espace	Théorème
Jones, Okikiolo, Schul	$\mathbb{R}^n$ ou un espace de Hilbert de dimension infinie	Pour tout ensemble connexe $\Gamma \supset E$ , $\sum_{\mathcal{D}^E} \beta_{\infty, \Gamma}^{Euc}(Q)^2 \text{diam}(Q) \lesssim H^1(\Gamma)$
Jones, Schul	$\mathbb{R}^n$ ou un espace de Hilbert de dimension infinie	Il existe $\Gamma \supset E$ connexe tel que $H^1(\Gamma) \lesssim \text{diam}(E) + \sum_{\mathcal{D}^E} \beta_{\infty}^{Euc}(Q)^2 \text{diam}(Q)$
Hahlomaa	espace métrique	$\ell(E) \lesssim \text{diam}(E) + \sum_{\mathcal{D}^E} \beta^X(Q)^2 \text{diam}(Q)$
Schul	espace métrique	Il n'existe pas de constante $C$ indépendante de $E$ telle que pour tout ensemble connexe $\Gamma \supset E$ , $\sum_{\mathcal{D}^E} \beta^X(Q)^2 \text{diam}(Q) \leq CH^1(\Gamma)$
Franchi, Ferrari, Pajot	groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1$	Il existe $\Gamma \supset E$ connexe tel que $H^1(\Gamma) \lesssim \text{diam}(E) + \sum_{\mathcal{D}^E} \beta_{\infty}^{\mathbb{H}}(Q)^2 \text{diam}(Q)$
Juillet	groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1$	Il existe une courbe $\Gamma$ de longueur finie telle que pour tout réseau dyadique $\mathcal{D}^{\Gamma}$ , $\sum_{\mathcal{D}^E} \beta_{\infty}^{\mathbb{H}}(Q)^2 \text{diam}(Q) = +\infty$

CHAPITRE 6. PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

---

Auteur(s)	Type d'espace	Théorème
David, Semmes	$\mathbb{R}^n$	Soit $1 \leq q \leq \infty$ . Si $E$ est contenu dans un ensemble 1-Ahlfors-régulier connexe alors pour tout $x \in E$ et tout $0 < r < \text{diam}(E)$ ,  $\sum_{Q \in \mathcal{D}^E, Q \subset B(x,r)} \beta_q^{Euc}(Q)^2 \text{diam}(Q) \lesssim R$
David, Semmes, Pajot	$\mathbb{R}^n$	Soit $1 \leq q \leq \infty$ . Si pour tout $x \in E$ et tout $0 < r < \text{diam}(E)$ , $\sum_{Q \in \mathcal{D}^E, Q \subset B(x,r)} \beta_q^{Euc}(Q)^2 \text{diam}(Q) \lesssim r$ , alors il existe un ensemble 1-Ahlfors-régulier connexe $\Gamma \supset E$ tel que  $H^1(\Gamma) \lesssim \text{diam}(E) + \sum_{\mathcal{D}^E} \beta_q^{Euc}(Q)^2 \text{diam}(Q)$
Hahlomaa	espace métrique géodésique	Si pour tout $x \in E$ et tout $0 < r$ ,  $\iiint_{A(E,x,r)} c^2(u,v,w) dH_{ E}^1(w) dH_{ E}^1(v) dH_{ E}^1(u) \lesssim r$ ,  alors il existe un ensemble 1-Ahlfors-régulier $\Gamma \supset E$
Schul	espace métrique géodésique	Soit $\Gamma$ un ensemble 1-Ahlfors-régulier connexe. Pour tout $x \in \Gamma$ et tout $0 < r$ ,  $\iiint_{A(E,x,r)} c^2(u,v,w) dH_{ \Gamma}^1(w) dH_{ \Gamma}^1(v) dH_{ \Gamma}^1(u) \lesssim r$
Petit	groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^1$	Soit $1 \leq q \leq \infty$ . Si pour tout $x \in E$ et tout $0 < r < \text{diam}(E)$ , $\sum_{Q \in \mathcal{D}^E, Q \subset B_c(x,r)} \beta_q^{\mathbb{H}}(Q)^2 \text{diam}(Q) \lesssim r$ , alors il existe un ensemble 1-Ahlfors-régulier connexe $\Gamma \supset E$ tel que  $H^1(\Gamma) \lesssim \text{diam}(E) + \sum_{\mathcal{D}^E} \beta_q^{\mathbb{H}}(Q)^2 \text{diam}(Q)$

## 6.2 Idées de la construction de P. Jones

Soit  $E$  un ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\text{diam } E = 1$  et  $\beta_\infty^{Euc}(E) < +\infty$ . On considère un réseau  $(\Delta_k)_k$  de  $E$  tel que pour tout  $k$ ,  $\Delta_k \subset \Delta_{k+1}$ . Il suffit de construire par récurrence une suite de continua  $\Gamma_k$  formés de segments dont les extrémités sont les points de  $\Delta_k$  et tels que l'on est capable d'estimer la longueur ajoutée à chaque étape  $\ell(\Gamma_{k+1}) - \ell(\Gamma_k)$  en fonction des  $\beta_\infty^{Euc}$ . En passant ensuite à la limite (théorème C.0.3), on obtient un continuum  $\Gamma$  qui contient  $E$  et dont on contrôle la  $H^1$ -mesure au moyen de  $\beta_\infty^{Euc}(E)$ . Ceci est suffisant, puisqu'il existe une courbe contenant  $\Gamma$  et dont la longueur est comparable à celle de  $\Gamma$  (voir proposition 6.4.3). Expliquons comment construire  $\Gamma_{k+1}$  à partir de  $\Gamma_k$ . Supposons donc que  $\Gamma_k$  ait été construit et considérons un point  $x \in \Delta_{k+1} \setminus \Delta_k$ . Nous voulons, en "déformant"  $\Gamma_k$ , construire une nouvelle ligne polygonale contenant  $x$ . Les modifications seront locales, mais pour simplifier les notations, nous noterons tout de même  $\Gamma_{k+1}$  le continuum obtenu en insérant  $x$ . Plusieurs cas peuvent se présenter. Notons  $C_1 > 0$  une grande constante et  $\varepsilon_0 > 0$  une constante très petite.

**Cas A :**  $\beta_\infty^{Euc}(x, C_1 2^{-k}, E) \geq \varepsilon_0$ .

Dans ce cas, on ajoute à  $\Gamma_k$  tous les segments de la forme  $[y, x]$ , où  $y$  décrit  $\Delta_k \cap B(x, C_1 2^{-k})$ . La longueur ainsi ajoutée est alors

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_{k+1}) - \ell(\Gamma_k) &\leq C \cdot 2^{-k} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon_0} \beta_\infty^{Euc}(x, C_1 2^{-k}, E) 2^{-k}. \end{aligned}$$

**Cas B :**  $\beta_\infty^{Euc}(x, C 2^{-k}, E) < \varepsilon_0$ .

Cela signifie, si  $\varepsilon_0$  est suffisamment petit, que  $E \cap B(x, C 2^{-k})$  est très plat. Pour insérer  $x$  dans  $\Gamma_k$ , on est alors confronté naturellement à plusieurs cas :

*Cas 1 :*  $K^{-1} d_{Euc}(x, z) \leq d_{Euc}(x, y) \leq K d_{Euc}(x, z)$ . On remplace alors le segment  $[y, z]$  de  $\Gamma_k$  par les deux segments  $[y, x]$  et  $[x, z]$ . Comme la distance de  $x$  à la droite passant par  $y$  et  $z$  est comparable à  $\beta_\infty^{Euc}(x, C 2^{-k}, E) 2^{-k}$ , le théorème de Pythagore donne

$$d_{Euc}(y, x) + d_{Euc}(x, z) - d_{Euc}(y, z) \leq C \beta_\infty^{Euc}(x, C 2^{-k}, E) 2^{-k}.$$

*Cas 2 :*  $d_{Euc}(x, z) \geq K d_{Euc}(x, y)$ . La nouvelle courbe  $\Gamma_{k+1}$  est obtenue en ajoutant à  $\Gamma_k$  le segment  $[y, 2x - y]$ . Il faut noter que le segment  $[y, z]$  sera dans ce cas contenu dans la courbe finale  $\Gamma$ . Si  $K$  est choisi assez grand, la longueur ajoutée dans ce cas est très petite devant  $\frac{1}{3} \ell([y, z])$ . En fait, on choisit  $K$  de telle manière que la somme totale des longueurs des segments ajoutés en  $y$  et en  $z$  à toutes les étapes soit majorée par  $\frac{1}{3} \ell([y, z])$ . Ainsi la

somme des longueurs ajoutées à toutes les étapes par le procédé du cas 2 est majorée par  $\frac{1}{3}H^1(\Gamma)$ .

On obtient donc

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) - \ell(\Gamma_0) &\leq \sum_k \ell(\Gamma_{k+1}) - \ell(\Gamma_k) \\ &\leq C \sum_k \sum_{x \in \Delta_k} \beta_\infty^{Euc}(x, C2^{-k}, E)^2 2^{-k} + \frac{1}{3}\ell(\Gamma). \end{aligned}$$

Mais comme  $\ell(\Gamma_0) \leq C \text{diam } E$ , cela donne

$$\ell(\Gamma) \leq C(\beta_\infty^{Euc}(E) + \text{diam } E).$$

Dans le cas où  $q \neq \infty$ , la difficulté principale est que l'estimation du cas A ne fonctionne plus aussi simplement. Nous verrons qu'il suffit de savoir le faire pour  $q = 1$ . De manière informelle, l'idée de [Paj96] est d'associer à chaque point  $x \in E$  une suite de points  $(x_k)$  de  $E$  convergeant vers  $x$  et telle que, pour tout  $k$ , la distance entre  $x_k$  et une droite  $\mathfrak{L}_k$  approximant bien  $E \cap B(x, C2^{-k})$  est contrôlée par les nombres  $\beta_1^{Euc}$ . A la place d'insérer  $x \in \Delta_k$ , on insère alors  $x_k$ , ce qui permet de contrôler la longueur ajoutée en termes des nombres  $\beta_1^{Euc}$ . A nouveau, le théorème de Pythagore est essentiel ici. Dans le groupe de Heisenberg muni de la distance de Carnot-Carathéodory, F. Ferrari, B. Franchi et H. Pajot ont comparé certains triangles de Carnot-Carathéodory aux triangles de comparaison euclidiens. Bien que le groupe de Heisenberg ne soit pas un espace d'Alexandrov ([BBI01]), ils ont montré que les triangles "presques équilatéraux" dans  $\mathbb{H}$  sont plus épais que leurs triangles de comparaison euclidiens. Cela donne le résultat suivant, que nous utiliserons comme le théorème de Pythagore dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 6.2.1.** *Soient  $\mathfrak{L} \in \mathfrak{G}(\mathbb{H}, 1)$  et  $t > 0$  fixés et soient  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{H}$  tels que*

1.  $d_c(P_1, P_2) \geq d_c(P_1, P_3) \geq d_c(P_2, P_3)$  ;
2. *il existe  $c_{i,j} > 0, C_{i,j} > 0$  pour  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$  tels que*

$$c_{i,j}t \leq d_c(P_i, P_j) \leq C_{i,j}t.$$

*Supposons de plus*

$$\beta_c := \max\{t^{-1}d_c(P_i, \mathfrak{L}); i = 1, 2, 3\} \leq \frac{1}{4} \min\{c_{i,j}, i, i = 1, 2, 3, i \neq j\}.$$

*Alors il existe  $C > 0, C = C(c_{i,j}, C_{i,j})$  telle que*

$$d_c(P_3, P_1) + d_c(P_3, P_2) - d_c(P_1, P_2) \leq Ct\beta_c^2.$$

La construction des auteurs suit essentiellement l'algorithme de P. Jones, les segments étant remplacés par des segments géodésiques. La construction présentée ici est inspirée des approches de [Paj96] et [FFP07].

### 6.3 Présentation des principaux résultats

Soit  $E \subset \mathbb{H}$  un ensemble 1-régulier. Pour  $q \geq 1$ ,  $P \in E$  et  $t > 0$ , on définit

$$\beta_q(P, t) := \inf_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{G}(\mathbb{H}, 1)} \left( \frac{1}{t} \int_{Q \in E \cap B(P, t)} \left( \frac{d_c(Q, \mathfrak{L})}{t} \right)^q dQ \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bien que la notation  $\beta_q^{\mathbb{H}}(P, t, E)$  serait plus en accord avec les notations précédentes, nous lui préférons  $\beta_q(P, t)$  pour simplifier les expressions. Tous les nombres  $\beta_q$  sont pris par rapport à l'ensemble  $E \subset \mathbb{H}$  considéré. Le but de ce chapitre est de donner une preuve des deux théorèmes suivants, dont nous ne sommes pour l'instant pas en mesure de prouver la réciproque. Soit  $q \geq 1$ .

**Théorème 6.3.1.** *Soit  $E$  un ensemble 1-régulier compact de  $\mathbb{H}$ . Si la mesure  $\beta_q(P, t)^2 dP \frac{dt}{t}$  définit une mesure de Carleson sur  $E \times \mathbb{R}^+$ , i.e. s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $P \in E$ , tout  $s > 0$ ,*

$$\int_{Q \in E \cap B(P, s)} \int_0^s \beta_q(Q, t)^2 dQ \frac{dt}{t} \leq Cs, \quad (6.3.1)$$

alors  $E \subset \Gamma$ , où  $\Gamma$  est une courbe Ahlfors-régulière.

**Théorème 6.3.2.** *Soit  $E$  un ensemble 1-régulier compact de  $\mathbb{H}$ . Si*

$$\beta_q(E) = \int_E \int_0^{\text{diam } E} \beta_q(P, t)^2 dP \frac{dt}{t} < \infty,$$

alors  $E \subset \Gamma$ , où  $\Gamma$  est une courbe de longueur finie. On a de plus

$$\inf_{\Gamma \supset E} H^1(\Gamma) \leq C(\beta_q(E) + \text{diam } E).$$

### 6.4 Préliminaires

Soit désormais  $E$  un ensemble 1-régulier compact de  $\mathbb{H}$ . Remarquons dans un premier temps qu'il suffit de démontrer les deux théorèmes pour  $q = 1$  :

**Lemme 6.4.1.** *Pour tout  $1 \leq q < \infty$ , tout  $P \in E$  et tout  $t > 0$ ,*

$$\beta_1(P, t) \leq C_0^{1-\frac{1}{q}} \beta_q(P, t),$$

où  $C_0$  est la constante de régularité de  $E$ .



*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{L} \in \mathfrak{G}(\mathbb{H}, 1)$  une  $\mathbb{H}$ -droite. Par l'inégalité de Hölder et par régularité de  $E$ ,

$$\begin{aligned} \beta_1(P, t) &\leq \frac{1}{t} \left( \int_{Q \in E \cap B_c(P, t)} \left( \frac{d_c(Q, \mathfrak{L})}{t} \right)^q dQ \right)^{\frac{1}{q}} H^1(E \cap B(P, t))^{1-\frac{1}{q}} \\ &\leq C_0^{1-\frac{1}{q}} \left( \frac{1}{t} \int_{Q \in E \cap B_c(P, t)} \left( \frac{d_c(Q, \mathfrak{L})}{t} \right)^q dQ \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat en prenant l'infimum sur les  $\mathbb{H}$ -droites  $\mathfrak{L}$  dans le membre de droite.  $\square$

**Lemme 6.4.2.** *Pour tout  $P \in E$  et tout  $t > 0$ ,*

$$\beta_\infty(P, t) \leq C \beta_1(P, 2t)^{\frac{1}{2}},$$

où la constante  $C$  dépend uniquement de la constante de régularité de  $E$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathfrak{L}$  une  $\mathbb{H}$ -droite telle que  $\beta_1(P, 2t)$  est atteint et  $Q$  le point de  $E \cap B_c(P, t)$  le plus éloigné de  $\mathfrak{L}$ . On distingue alors deux cas.

Soit  $d_c(Q, \mathfrak{L}) > t$ , mais alors tout point  $R \in E \cap B_c(Q, t/2) \subset E \cap B_c(P, 2t)$  vérifie  $d_c(R, \mathfrak{L}) > t/2$ , donc  $\beta_1(P, 2t) \geq C$ . Mais puisque  $\beta_\infty(P, t) \leq 1$ , on obtient le lemme 6.4.2 dans ce cas.

Soit  $d_c(Q, \mathfrak{L}) \leq t$ . Notons alors  $r := \frac{1}{2}d_c(Q, \mathfrak{L})$ . Pour tout  $R \in B_c(Q, r)$ , on a

$$d_c(R, \mathfrak{L}) \geq r.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \beta_1(P, 2t) &= \frac{1}{2t} \int_{T \in E \cap B_c(P, 2t)} \frac{d_c(T, \mathfrak{L})}{2t} dT \\ &\geq \frac{1}{4t^2} \int_{T \in E \cap B_c(Q, r)} d_c(T, \mathfrak{L}) dT \\ &\geq \frac{r}{4t^2} H^1(E \cap B_c(Q, r)) \\ &\geq \frac{1}{4C_0} \left( \frac{r}{t} \right)^2 \\ &\geq C \beta_\infty(P, t)^2. \end{aligned}$$

Le lemme 6.4.2 est prouvé.  $\square$

Le résultat suivant affirme qu'un continuum de 1-mesure de Hausdorff finie est contenu dans une courbe rectifiable de  $H^1$ -mesure comparable. Pour prouver les théorèmes 6.3.1 et 6.3.2, nous allons donc construire un continuum  $\Gamma$  contenant  $E$ .

**Proposition 6.4.3** ([DS93, FFP07]). *Soit  $X$  un espace géodésique doublant et soit  $\Gamma$  un continuum dans  $X$  avec  $H^1(\Gamma) < +\infty$ . Alors, il existe une courbe lipschitzienne  $\Gamma' = \gamma'([0, L])$  dans  $X$  telle que*

1.  $\Gamma \subset \Gamma'$  ;
2.  $H^1(\Gamma) \leq L \leq CH^1(\Gamma)$ , où  $C > 0$  est une constante dépendant seulement de la constante de doublement de  $X$  ;
3.  $|\dot{\gamma}'|(t) = 1$  pour presque tout  $t \in [0, L]$ , où, lorsque la limite existe,  $|\dot{\gamma}'|(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\gamma'(t+s), \gamma'(t))}{|s|}$ .

**Remarque 6.4.4.** *La longueur de la courbe  $\Gamma'$  est comparable à  $L$ , et donc  $C^{-1}H^1(\Gamma) \leq \ell(\Gamma') \leq CH^1(\Gamma)$ .*

On considère des constantes positives  $N$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $A$  telles que  $N$  est un entier très grand et

$$2^N \ll C_1 \ll (2^N)^2 \ll C_2 \ll A^{-1}.$$

Dans [FFP07], les auteurs contrôlent la longueur ajoutée lorsqu'on insère un point  $P$  à l'étape  $k$  de la construction par le nombre  $\beta_1(P, 2^{-k})$ . Cette méthode ne fonctionne plus si l'on souhaite avoir un contrôle en termes des nombres  $\beta_1$ . Pour contourner cette difficulté, nous allons associer à tout point  $P \in E$  et tout entier  $k \geq 1$  une suite de points  $(P^{(j)})_{j \geq k}$  de  $E$  convergeant vers  $P$  et ayant de bonnes propriétés (voir le lemme 6.4.5). A l'étape  $k$  de la construction, nous insérerons  $P^{(k)}$  à la place de  $P$ .

**Lemme 6.4.5.** *Soient  $P \in E$ ,  $k \geq 1$  et pour tout  $j \geq k - 1$ , soit  $\mathfrak{L}_j$  une  $\mathbb{H}$ -droite telle que*

$$\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) = \frac{1}{C_2 2^{-jN}} \int_{Q \in E \cap B_c(P, C_2 2^{-jN})} \frac{d(Q, \mathfrak{L}_j)}{C_2 2^{-jN}} dQ.$$

*Il existe une suite  $(P^{(j)})_{j \geq k-1}$  de points de  $E$  telle que*

1.  $P^{(k-1)} = P^{(k)} = P^{(k+1)} \in B_c(P, A 2^{-(k+1)N})$  et

$$d_c(P^{(k-1)}, \mathfrak{L}_{k-1}) \leq C \beta_1(P, C_2 2^{-(k-1)N}) 2^{-(k-1)N},$$

$$d_c(P^{(k)}, \mathfrak{L}_k) \leq C \beta_1(P, C_2 2^{-kN}) 2^{-kN},$$

$$d_c(P^{(k+1)}, \mathfrak{L}_{k+1}) \leq C \beta_1(P, C_2 2^{-(k+1)N}) 2^{-(k+1)N};$$

2. Pour tout  $j > k + 1$ ,  $P^{(j)} \in B_c(P, A2^{-jN})$  et

$$d_c(P^{(j)}, \mathfrak{L}_j) \leq C\beta_1(P, C_22^{-jN})2^{-jN}.$$

*Démonstration.* Soit un réel  $t > 0$ . Notons  $\mathfrak{D}$  une  $\mathbb{H}$ -droite pour laquelle  $\beta_1(P, C_2t)$  est atteint. L'inégalité de Tchebychev donne

$$\begin{aligned} & H^1(\{Q \in E \cap B_c(P, At) \mid d_c(Q, \mathfrak{D}) \geq C\beta_1(P, C_2t)t\}) \\ & \leq \frac{1}{C\beta_1(P, C_2t)t} \int_{Q \in E \cap B_c(P, At)} d_c(Q, \mathfrak{D}) dQ \\ & \leq C^{-1}C_2^2t \\ & \leq (C^{-1}C_2^2C_0A^{-1}) H^1(E \cap B_c(P, At)). \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & H^1(\{Q \in E \cap B_c(P, At) \mid d_c(Q, \mathfrak{D}) \leq C\beta_1(P, C_2t)t\}) \\ & \geq \left(1 - \frac{C_2^2C_0}{CA}\right) H^1(E \cap B_c(P, At)). \end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité avec  $t = 2^{-jN}$  et  $C$  assez grand, on obtient alors, pour tout  $j > k + 1$ ,  $P^{(j)}$  avec les propriétés voulues.

Pour obtenir un même point  $P^{(k-1)} = P^{(k)} = P^{(k+1)}$  qui satisfait aux inégalités voulues pour les trois échelles, on commence par remarquer que,

$$\frac{H^1(E \cap B_c(P, A2^{-(k+1)N}))}{H^1(E \cap B_c(P, A2^{-kN}))} \geq C_0^{-2}2^{-N}$$

et

$$\frac{H^1(E \cap B_c(P, A2^{-(k+1)N}))}{H^1(E \cap B_c(P, A2^{-(k-1)N}))} \geq C_0^{-4}2^{-2N}.$$

Associé à l'inégalité (6.4.1), cela donne

$$\begin{aligned} & H^1(\{Q \in E \cap B_c(P, A2^{-(k-1)N}) \mid d_c(Q, \mathfrak{L}_{k-1}) \geq C\beta_1(P, C_22^{-(k-1)N})2^{-(k-1)N}\}) \\ & \leq \frac{C_2^2C_0^52^{2N}}{A \cdot C} H^1(E \cap B_c(P, A2^{-(k+1)N})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H^1(\{Q \in E \cap B_c(P, A2^{-kN}) \mid d_c(Q, \mathfrak{L}_k) \geq C\beta_1(P, C_22^{-kN})2^{-kN}\}) \\ & \leq \frac{C_2^2C_0^32^{2N}}{A \cdot C} H^1(E \cap B_c(P, A2^{-(k+1)N})). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H^1(\{Q \in E \cap B_c(P, A2^{-(k+1)N}) \mid d_c(Q, \mathfrak{L}_{k+1}) \geq C\beta_1(P, C_22^{-(k+1)N})2^{-(k+1)N}\}) \\ \leq \frac{C_2^2 C_0}{A \cdot C} H^1(E \cap B_c(P, A2^{-(k+1)N})). \end{aligned}$$

Puisque les constantes  $C_0, C_2, N$  et  $A$  sont fixées, il suffit de choisir  $C$  assez grand pour pouvoir trouver un point  $P^{(k)} \in E \cap B_c(P, A2^{-(k+1)N})$  tel que

$$\begin{aligned} d(P^{(k)}, \mathfrak{L}_{k-1}) &\leq C\beta_1(P, C_22^{-(k-1)N})2^{-(k-1)N}, \\ d(P^{(k)}, \mathfrak{L}_k) &\leq C\beta_1(P, C_22^{-kN})2^{-kN} \end{aligned}$$

et

$$d(P^{(k)}, \mathfrak{L}_{k+1}) \leq C\beta_1(P, C_22^{-(k+1)N})2^{-(k+1)N}.$$

□

**Remarque 6.4.6.** *L'entier  $k$  correspond à l'échelle à laquelle on veut insérer le point  $P$ . Notons que si  $P^{(j)}$  vérifie la propriété du lemme à l'échelle suivante  $2^{-(j+1)N}$ , on choisira toujours  $P^{(j+1)} = P^{(j)}$ .*

**Lemme 6.4.7.** *Si  $K > 0$  est un réel assez grand, pour deux points  $P$  et  $Q$  de  $E$  tels que  $d_c(P, Q) \leq \frac{C_2}{K}2^{-jN}$ , on a*

$$d_c(Q^{(j)}, \mathfrak{L}_j) \leq C\beta_1(P, 2C_22^{-jN})2^{-jN},$$

où  $\mathfrak{L}_j$  est une  $\mathbb{H}$ -droite telle que

$$\beta_1(P, C_22^{-jN}, E) = \frac{1}{C_22^{-jN}} \int_{Q \in E \cap B_c(P, C_22^{-jN})} \frac{d(Q, \mathfrak{L}_j)}{C_22^{-jN}} dQ.$$

*Démonstration.* Soient  $P$  et  $Q$  deux points de  $E$  tels que  $d_c(P, Q) \leq \frac{C_2}{K}2^{-jN}$ . On divise la preuve en deux cas différents : le cas où  $\beta_1(P, 2C_22^{-jN}) \geq \varepsilon_0$  et celui où  $\beta_1(P, 2C_22^{-jN}) < \varepsilon_0$ , pour une constante  $\varepsilon_0 > 0$  très petite.

**Cas 1 :**  $\beta_1(P, 2C_22^{-jN}) \geq \varepsilon_0$ . Dans ce cas, il suffit d'effectuer des majorations grossières :

$$\begin{aligned} d_c(Q^{(j)}, \mathfrak{L}_j) &\leq d_c(Q^{(j)}, P^{(j)}) + d_c(P^{(j)}, \mathfrak{L}_j) \\ &\leq C2^{-jN} + C\beta_1(P, 2C_22^{-jN})2^{-jN} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon_0}\beta_1(P, 2C_22^{-jN})2^{-jN} + C\beta_1(P, 2C_22^{-jN})2^{-jN} \\ &\leq C\beta_1(P, 2C_22^{-jN})2^{-jN}. \end{aligned}$$

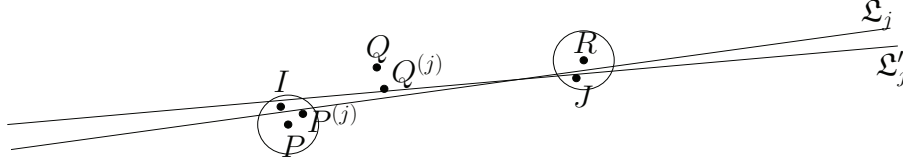


FIGURE 6.4.1 – Lemme 6.4.7

**Cas 2 :**  $\beta_1(P, 2C_22^{-jN}) < \varepsilon_0$ . Pour alléger les notations, posons  $t = C_22^{-jN}$ . Notons que  $B_c(Q, t) \subset B_c(P, 2t)$  si  $K$  est assez grand et donc que  $\beta_1(Q, t) \leq 4\beta_1(P, 2t)$ . Soient  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$  deux  $\mathbb{H}$ -droites telles que respectivement

$$\beta_1(P, t) = \frac{1}{t} \int_{R \in E \cap B_c(P, t)} \frac{d(R, \mathfrak{D}_1)}{t} dR$$

et

$$\beta_1(Q, t) = \frac{1}{t} \int_{R \in E \cap B_c(Q, t)} \frac{d(R, \mathfrak{D}_2)}{t} dR.$$

Nous allons montrer que si la constante  $\varepsilon_0$  est choisie assez petite, les ensembles  $\mathfrak{D}_1 \cap B_c(P, t)$  et  $\mathfrak{D}_2 \cap B_c(P, t)$  sont à distance de Hausdorff contrôlée par  $C\beta_1(P, 2t)t$  (on pourra consulter l'annexe C pour un rappel sur la distance de Hausdorff). Bien que la mise en oeuvre de la preuve soit délicate, l'idée est simple : on montre dans un premier temps qu'il existe un point  $I \in \mathfrak{D}_1$  "proche" de  $P$  et un point  $J \in \mathfrak{D}_2$  "loin" de  $P$  (voir figure 6.4.1) tels que

$$d_c(I, \mathfrak{D}_1) \leq C\beta_1(P, 2t)t \text{ et } d_c(J, \mathfrak{D}_1) \leq C\beta_1(P, 2t)t.$$

On en déduit ensuite que les deux  $\mathbb{H}$ -droites sont "proches", au moins dans la boule  $B_c(P, t)$ .

Choisissons un point  $R \in E \cap (B_c(P, t/10) \setminus B_c(P, 2K^{-1}t))$ . Un tel point existe si  $K$  est assez grande, puisque  $E$  est uniformément parfait (car Ahlfors-régulier). On a ainsi  $d_c(P, R) > 2K^{-1}t$ . Soit une constante  $\delta > 0$  suffisamment petite pour que  $d_H(B_c(P, 2\delta t), B_c(R, 2\delta t)) \geq K^{-1}t$ ,  $B_c(P, 2\delta t) \subset B_c(Q, t)$  et  $B_c(R, 2\delta t) \subset B_c(P, t) \cap B_c(Q, t)$ . Une telle constante  $\delta$  existe toujours si  $K$  est assez grande, puisque  $d_c(P, Q) \leq t/K$ . Notons alors

$$\mathcal{A}_P := \{T \in B_c(P, \delta t) \cap E \mid d_c(T, \mathfrak{D}_1) + d_c(T, \mathfrak{D}_2) \geq C\beta_1(P, 2t)t\}.$$

Par l'inégalité de Tchebychev,

$$\begin{aligned}
 H^1(\mathcal{A}_P) &\leq \frac{1}{C\beta_1(P, 2t)t} \int_{T \in B_c(P, \delta t) \cap E} \{d_c(T, \mathfrak{D}_1) + d_c(T, \mathfrak{D}_2)\} dT \\
 &\leq \frac{t}{C\beta_1(P, 2t)} \left[ \frac{1}{t} \int_{T \in B_c(P, \delta t) \cap E} \frac{d_c(T, \mathfrak{D}_1)}{t} dT \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{t} \int_{T \in B_c(P, \delta t) \cap E} \frac{d_c(T, \mathfrak{D}_2)}{t} dT \right] \\
 &\leq \frac{t}{C\beta_1(P, 2t)} [\beta_1(P, t) + \beta_1(Q, t)].
 \end{aligned}$$

Mais puisque  $\beta_1(Q, t) \leq 4\beta_1(P, 2t)$ , on obtient

$$H^1(\mathcal{A}_P) \leq \frac{8}{C}t.$$

Par Ahlfors-régularité,

$$H^1(B_c(P, \delta t) \cap E) \geq C_0^{-1}\delta t.$$

Ainsi, si  $C$  est assez grande, il existe un point  $I \in B_c(P, \delta t) \cap E$  tel que pour  $i = 1, 2$ ,

$$d_c(I, \mathfrak{D}_i) \leq C\beta_1(P, 2t)t.$$

Le même argument nous assure de l'existence d'un point  $J \in B_c(R, \delta t) \cap E$  tel que pour  $i = 1, 2$ ,

$$d_c(J, \mathfrak{D}_i) \leq C\beta_1(P, 2t)t.$$

On en déduit alors que si  $\varepsilon_0$  est assez petite, on peut trouver deux points  $I_2 \in B_c(P, 2\delta t)$  et  $J_2 \in B_c(R, 2\delta t)$  sur la  $\mathbb{H}$ -droite  $\mathfrak{D}_2$ , à distance contrôlée par  $C\beta_1(P, 2t)t$  de la  $\mathbb{H}$ -droite  $\mathfrak{D}_1$ . Ces deux points vérifient  $d_c(I_2, J_2) \geq \frac{t}{K}$ .

Nous allons maintenant en déduire que si  $\varepsilon_0$  est assez petite, les points de  $\mathfrak{D}_2 \cap B_c(P, t)$  sont à distance contrôlée par  $C\beta_1(P, 2t)t$  de  $\mathfrak{D}_1$ . On utilise pour cela le fait que les  $\mathbb{H}$ -droites ne sont pas n'importe quelles géodésique dans  $\mathbb{H}$ , elles sont "presques euclidiennes". Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que la  $\mathbb{H}$ -droite  $\mathfrak{D}_1$  soit dans  $\mathbb{G}(\mathbb{H}, 1)$ , *i.e.* que  $\mathfrak{D}_1$  soit une droite euclidienne passant par 0 et contenue dans le plan horizontal  $H$ . Remarquons maintenant les faits suivantes :

- Comme  $d_c(I_2) \leq C\beta_1(P, 2t)t$ , si on note  $(i_1, i_2, i_3)$  les coordonnées de  $I_2$ , on a

$$d_{\mathbb{R}^2}((i_1, i_2), \mathfrak{D}_1) \leq C\beta_1(P, 2t)t$$

$$\text{et } |i_3| \leq C\beta_1(P, 2t)^2t^2.$$

- Des majorations similaires sont valides pour les coordonnées  $(j_1, j_2, j_3)$  de  $J_2$ .
- La projection de la  $\mathbb{H}$ -droite  $\mathfrak{D}_2$  sur  $H$  est une droite affine, *i.e.* avec les notations du chapitre précédent un élément de  $\mathcal{G}(H, 1)$ .
- $d_c(I_2, J_2) \geq \frac{t}{K}$ .

Ainsi, quitte à agrandir la constante  $C$ , on a pour tout  $T = (t_1, t_2, t_3) \in \mathfrak{D}_2 \cap B_c(P, t)$ ,  $d_{\mathbb{R}^2}((t_1, t_2), \mathfrak{D}_1) \leq C\beta_1(P, 2t)t$  et  $|t_3| \leq C\beta_1(P, 2t)^2t^2$ . En particulier,  $d_c(T, \mathfrak{D}_1) \leq C\beta_1(P, 2t)t$ . On peut évidemment échanger le rôle de  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$  et on obtient

$$d_H(\mathfrak{D}_1 \cap B_c(P, t), \mathfrak{D}_2 \cap B_c(P, t)) \leq C\beta_1(P, 2t)t.$$

Il nous reste à appliquer ce résultat à  $t = C_22^{-jN}$  : si on note  $\mathfrak{L}'_j$  la  $\mathbb{H}$ -droite obtenue par le lemme 6.4.5 pour le point  $Q$  à l'échelle  $j$ , on a  $d_c(Q^{(j)}, \mathfrak{L}'_j) \leq C\beta_1(P, 2t)t$ . On vient de montrer que

$$d_H(\mathfrak{L}'_j \cap B_c(P, t), \mathfrak{L}_j \cap B_c(P, t)) \leq C\beta_1(P, 2t)t,$$

donc  $d_c(Q^{(j)}, \mathfrak{L}_j) \leq C\beta_1(P, 2t)t$ , ce qui termine la preuve du cas 2.  $\square$

La notion d'ordre a été introduite par I. Hahlomaa ([Hah05]), puis utilisée par B. Franchi, F. Ferrari et H. Pajot ([FFP07]). Pour nous assurer qu'un ordre  $[P_1, \dots, P_n]$  est préservé par passage aux points  $P_i^{(k)}$ , nous introduisons la notion de  $\eta$ -ordre,  $\eta \geq 0$ . Le cas  $\eta = 0$  correspond à la notion utilisée par [FFP07].

**Définition 6.4.8.** Soient  $F$  un ensemble fini dans  $\mathbb{H}$  et  $\eta \geq 0$ . On dit que  $[P_1, \dots, P_n]$  est un  $\eta$ -ordre de  $F$  si  $F = \{P_1, \dots, P_n\}$  et dès que  $i < j < k$ ,

$$d(P_i, P_k) \geq \max\{d(P_i, P_j), d(P_j, P_k)\} + \eta.$$

On dit que  $F$  est  $\eta$ -ordonnable s'il existe un  $\eta$ -ordre de  $F$ . On parle d'ordre lorsque la valeur de  $\eta$  n'a pas d'importance.

Le lemme suivant provient de [FFP07]. La preuve est courte, nous la reproduisons donc ici.

**Lemme 6.4.9** ([FFP07]). Soit  $F$  un sous-ensemble fini d'une droite  $\mathfrak{L}$  de  $\mathfrak{G}(\mathbb{H}, 1)$ . Alors  $F$  est ordonnable.

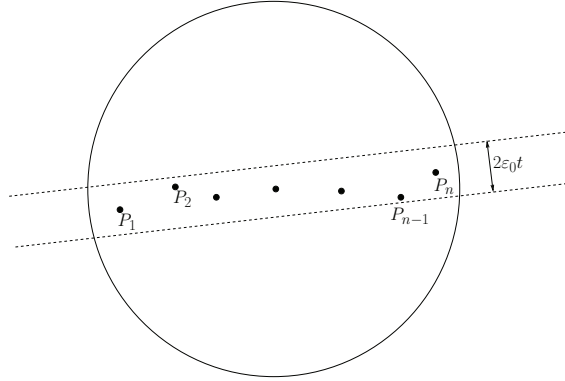


FIGURE 6.4.2 – Proposition 6.4.10

*Démonstration.* On peut supposer sans perte de généralité que  $\mathfrak{L}$  est contenu dans le plan  $H = \{P \in \mathbb{H} \mid p_2 = p_3 = 0\}$ . Il est alors facile d'ordonner les points  $P_1 = (x_1, 0, 0), \dots, P_n = (x_n, 0, 0)$  de  $F$  tels que  $x_1 < \dots < x_n$ . Fixons maintenant  $1 \leq i < j < k \leq n$ . La métrique  $d_c$  est additive sur les  $\mathbb{H}$ -droites, donc  $d_c(P_i, P_k) = d_c(P_i, P_j) + d_c(P_j, P_k)$ . Cela prouve bien que  $[P_1, \dots, P_n]$  est un ordre de  $F$ .  $\square$

Si l'ensemble  $F$  n'est plus contenu dans une  $\mathbb{H}$ -droite, mais tout de même suffisamment bien approché par une  $\mathbb{H}$ -droite, la conclusion reste vraie. Rappelons que la notation  $U_c(P, t)$  correspond à la boule ouverte de centre  $P$  et de rayon  $t$  pour la métrique de Carnot-Carathéodory.

**Proposition 6.4.10.** *Soit  $E \subset \mathbb{H}$ . Fixons  $K_0, k_0 > 0$  et posons  $\varepsilon_0 = \frac{k_0}{100K_0}$ . Si  $P \in \mathbb{H}$  et  $t > 0$  sont tels que  $\beta_\infty(P, K_0t) \leq \varepsilon_0$  et si  $F \subset E \cap U_c(P, K_0t)$  est tel que pour tous  $Q \neq Q' \in F$ ,  $d_c(Q, Q') \geq k_0t$ , alors  $F$  est fini et  $(\frac{k_0}{2}t)$ -ordonnable.*

*Démonstration.* L'ensemble  $F$  est fini par Ahlfors-régularité de  $(\mathbb{H}, d_c)$ . Par définition, l'hypothèse  $\beta_\infty(P, K_0t) \leq \varepsilon_0$  entraîne l'existence d'une  $\mathbb{H}$ -droite  $\mathfrak{L}$  telle que pour tout  $Q \in E \cap U_c(P, K_0t)$ ,

$$d_c(Q, \mathfrak{L}) \leq 2K_0\varepsilon_0t.$$

Pour tout  $Q \in U_c(P, K_0t)$ , notons  $\Pi_{\mathfrak{L}}(Q)$  un point de  $\mathfrak{L}$  tel que  $d_c(Q, \Pi_{\mathfrak{L}}(Q)) = d_c(Q, \mathfrak{L})$ . Si  $Q$  et  $Q'$  sont deux points distincts de  $F$ , alors  $\Pi_{\mathfrak{L}}(Q) \neq \Pi_{\mathfrak{L}}(Q')$ . En effet, supposons que l'on ait égalité. Alors  $d_c(Q, Q') \leq d_c(Q, \Pi_{\mathfrak{L}}(Q)) + d_c(\Pi_{\mathfrak{L}}(Q), Q') \leq 4K_0\varepsilon_0t$ , ce qui contredit l'hypothèse  $d_c(Q, Q') \geq k_0t$ . Par le lemme précédent, l'ensemble  $\Pi_{\mathfrak{L}}(F) := \{\Pi_{\mathfrak{L}}(Q) \mid Q \in F\}$  est ordonnable. En



fait, comme  $d_c$  est additive sur les  $\mathbb{H}$ -droites, on peut même écrire  $\Pi_{\mathfrak{L}}(F) = \{A_i \mid i = 1, \dots, n\}$  tel que dès que  $i < j < k$ ,

$$d_c(A_i, A_k) = d_c(A_i, A_j) + d_c(A_j, A_k).$$

Notons  $Q_1, \dots, Q_n$  les points de  $F$  tels que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Pi_{\mathfrak{L}}(Q_i) = A_i$ . Il reste à vérifier que  $[Q_1, \dots, Q_n]$  est un  $\frac{k_0}{2}t$ -ordre de  $F$ . Fixons  $1 \leq i < j < k \leq n$ . L'inégalité triangulaire et le choix de  $\mathfrak{L}$  donnent

$$\begin{aligned} d_c(\Pi_{\mathfrak{L}}(Q_i), \Pi_{\mathfrak{L}}(Q_k)) &\leq d_c(Q_i, Q_k) + 4\varepsilon_0 K_0 t, \\ d_c(Q_i, Q_j) &\leq d_c(\Pi_{\mathfrak{L}}(Q_i), \Pi_{\mathfrak{L}}(Q_j)) + 4\varepsilon_0 K_0 t, \\ d_c(Q_j, Q_k) &\leq d_c(\Pi_{\mathfrak{L}}(Q_j), \Pi_{\mathfrak{L}}(Q_k)) + 4\varepsilon_0 K_0 t. \end{aligned}$$

Comme  $d_c(\Pi_{\mathfrak{L}}(Q_i), \Pi_{\mathfrak{L}}(Q_k)) = d_c(\Pi_{\mathfrak{L}}(Q_i), \Pi_{\mathfrak{L}}(Q_j)) + d_c(\Pi_{\mathfrak{L}}(Q_j), \Pi_{\mathfrak{L}}(Q_k))$ , on obtient

$$d_c(Q_i, Q_k) \geq d_c(Q_i, Q_j) + d_c(Q_j, Q_k) - 12\varepsilon_0 K_0 t.$$

Supposons par exemple que  $\max\{d_c(Q_i, Q_j), d_c(Q_j, Q_k)\} = d_c(Q_i, Q_j)$ . Puisque  $d_c(Q_j, Q_k) \geq k_0 t$ , on obtient

$$d_c(Q_i, Q_k) \geq d_c(Q_i, Q_j) + (k_0 - 12\varepsilon_0 K_0)t \geq d_c(Q_i, Q_j) + \frac{k_0}{2}t.$$

La proposition est démontrée.  $\square$

Le lemme suivant permet de s'assurer que lorsqu'on a un  $2^{-jN}$ -ordre  $[P_1, \dots, P_n]$ , par exemple donné par la proposition précédente, alors le passage des points  $P_i$  aux points  $P_i^{(j-1)}$  ne bouleverse pas l'ordre, c'est-à-dire  $[P_1^{(j-1)}, \dots, P_n^{(j-1)}]$  est un ordre.

**Lemme 6.4.11.** *Si  $[P_1, \dots, P_n]$  est un  $2^{-jN}$ -ordre de  $\{P_1, \dots, P_n\}$ , alors  $[P_1^{(j-1)}, \dots, P_n^{(j-1)}]$  est un ordre de  $\{P_1^{(j-1)}, \dots, P_n^{(j-1)}\}$ .*

*Démonstration.* Par définition, pour  $P \in \Delta_j$ ,  $d_c(P, P^{(j-1)}) \leq A2^{-(j-1)N}$ . Soient  $1 \leq k < \ell < m \leq n$ . Par hypothèse,  $d(P_k, P_m) \geq \max\{d(P_k, P_\ell), d(P_\ell, P_m)\} + 2^{-jN}$ , donc

$$d(P_k^{(j-1)}, P_m^{(j-1)}) \geq \max\{d(P_k^{(j-1)}, P_\ell^{(j-1)}), d(P_\ell^{(j-1)}, P_m^{(j-1)})\} + 2^{-jN} - 4A2^{-(j-1)N}.$$

Nous avons choisi  $A$  assez petite pour que  $2^{-jN} - 4A2^{-(j-1)N} \geq 0$ , le lemme est donc démontré.  $\square$

## 6.5 Hypothèses de récurrence

Nous pouvons maintenant commencer la construction des continua  $\Gamma_j$ . Si  $P$  et  $Q$  sont deux points de  $\mathbb{H}$ , nous noterons  $[P, Q]$  un segment géodésique les joignant. On suppose désormais que  $\text{diam } E = 1$ , ce qui ne change rien. Nous allons commencer par choisir des ensembles  $(\Delta_j)_j$  de points de  $E$  qui sont des réseaux de points  $2^{-jN}$  denses.

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on considère un sous-ensemble maximal  $\Delta_j$  de  $E$  tel que

1. Pour tous  $P \neq Q \in \Delta_j$ ,  $d_c(P, Q) > 2^{-jN}$  ;
2. Pour tout  $P \in E$ , il existe  $Q \in \Delta_j$  tel que  $d_c(P, Q) \leq 2^{-jN}$ .

On peut toujours construire ces ensembles tels que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_j \subset \Delta_{j+1}$ . Nous noterons  $A_{j+1} = \Delta_{j+1} \setminus \Delta_j$  et  $\tilde{\Delta}_j := \{P^{(j)} \mid P \in \Delta_j\}$ . D'après le lemme 6.4.5, si  $P \in A_j$ ,  $P^{(j-1)} = P^{(j)} = P^{(j+1)}$ .

On suppose désormais que  $\beta_1(E) < +\infty$ . Notre but est de construire un continuum  $\Gamma$  qui contient tous les points de  $E$  et telle que  $\ell(\Gamma) \leq C(\beta_1(E) + \text{diam } E)$ . Pour cela, on construit par récurrence une suite  $(\Gamma_j)_j$  de continua tels que pour tout  $j$ ,  $\tilde{\Delta}_j \subset \Gamma_j$  et tels que la  $H^1$ -mesure ajoutée à chaque étape de la construction est contrôlée à l'aide des nombres  $\beta_1$ . La construction de  $\Gamma_j$  à partir de  $\Gamma_{j-1}$  se déroule en deux étapes. Dans un premier temps, on construit à partir de  $\Gamma_{j-1}$  un ensemble  $\tilde{\Gamma}_j$  tel que pour tout  $P \in \Delta_j$ ,  $P^{(j-1)} \in \tilde{\Gamma}_j$ . On construit ensuite  $\Gamma_j$  à partir de  $\tilde{\Gamma}_j$  en "remplaçant" les points  $P^{(j-1)}$  de  $\tilde{\Gamma}_j$  par les points  $P^{(j)}$  correspondant.

Supposons que  $\Delta_0 = \{P_0, Q_0\}$ . Choisissons deux points  $a_0(P_0)$  et  $a_0(Q_0)$  tels que  $d_c(P_0^{(0)}, a_0(P_0)) = d_c(Q_0^{(0)}, a_0(Q_0)) = C_1$ ,  $d_c(Q_0^{(0)}, a_0(P_0)) \geq C_1$  et  $d_c(P_0^{(0)}, a_0(Q_0)) \geq C_1$ . On pose alors

$$\Gamma_0 := [a_0(P_0), P_0^{(0)}] \cup [P_0^{(0)}, Q_0^{(0)}] \cup [Q_0^{(0)}, a_0(Q_0)].$$

Par récurrence, supposons que les ensembles connexes  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{j-1}$  ont été construits, tels que pour tout  $k = 1, \dots, j-1$ ,  $\Gamma_k$  est une réunion connexe d'un nombre fini de segments géodésiques, c'est-à-dire  $\Gamma_k = \bigcup_{P, Q \in \mathcal{G}_k} [P, Q]$ , où  $\mathcal{G}_k$  est l'ensemble des extrémités des segments géodésiques de  $\Gamma_k$ . On suppose également que les propriétés suivantes sont satisfaites :

(P1) L'ensemble  $\tilde{\Delta}_k$  est contenu dans  $\mathcal{G}_k$  et si  $S$  est un segment géodésique de  $\Gamma_k$ , au moins une de ses extrémités est dans  $\tilde{\Delta}_k$ . Dans le cas où une seule des extrémités  $P^{(k)}$  d'un segment est contenue dans  $\tilde{\Delta}_k$ , l'autre extrémité sera notées  $a_k(P)$ .

(P2) Pour tout  $P \in \Delta_k$ , si  $\Delta_k \cap U_c(P, C_1 2^{-kN})$  a un ordre  $[P_1, \dots, P_n]$ , alors  $\left[ P_i^{(k)}, P_{i+1}^{(k)} \right] \subset \Gamma_k$  pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ . Ces segments sont les segments "normaux" du continuum  $\Gamma_k$ .

(P3) Pour tout  $P \in \Delta_k$ , si  $\Delta_k \cap U_c(P, C_1 2^{-kN})$  a un ordre  $[P_1, \dots, P_n]$  tel que  $P = P_n$ , alors  $P^{(k)}$  appartient à un segment  $[P^{(k)}, a_k(P)] \subset \Gamma_k$  tel que  $d_c(P^{(k)}, a_k(P)) \geq C_1 2^{-kN}$  et  $[P_{n-1}^{(k)}, P^{(k)}, a_k(P)]$  est un ordre. Ces segments  $[P^{(k)}, a_k(P)]$  sont les extrémités du continuum  $\Gamma_k$ .

(P4) Pour tout  $P \in \Delta_k$ , si  $\Delta_k \cap U_c(P, C_1 2^{-kN}) = \{P\}$ , alors il existe deux points  $T_1, T_2$  tels que les segments  $[T_1, P^{(k)}]$  et  $[P^{(k)}, T_2]$  sont dans  $\Gamma_k$ , de longueurs  $\geq C_1 2^{-kN}$  et  $[T_1, P^{(k)}, T_2]$  est un ordre.

Il est évident que  $\Gamma_0$  vérifie les propriétés (P1) et (P2). Les précautions prises dans le choix de  $a_0(P_0)$  et  $a_0(Q_0)$  assurent que

$$d_c(a_0(P_0), Q_0^{(0)}) \geq C_1 = \max\{d_c(a_0(P_0), P_0^{(0)}), d_c(P_0^{(0)}, Q_0^{(0)})\}$$

$$\text{et } d_c(a_0(Q_0), P_0^{(0)}) \geq C_1 = \max\{d_c(a_0(Q_0), Q_0^{(0)}), d_c(Q_0^{(0)}, P_0^{(0)})\}.$$

Ainsi,  $\Gamma_0$  satisfait (P3) et (P4).

## 6.6 Construction de $\tilde{\Gamma}_j$ à partir de $\Gamma_{j-1}$

Dans cette section, nous allons construire à partir de  $\Gamma_{j-1}$  un ensemble  $\tilde{\Gamma}_j$  contenant les points  $P^{(j-1)}$ , pour  $P \in \Delta_j$ . Soit  $P \in A_j$  et supposons que  $P^{(j-1)} = P^{(j)} \notin \mathcal{G}_{j-1}$ , l'ensemble des extrémités des segments de  $\Gamma_{j-1}$ , sinon il n'y a rien à faire. Soit  $R_0 \in \Delta_{j-1}$  le point le plus proche de  $P$  tel que  $d_c(R_0, P) \leq 2^{-(j-1)N}$ . Un tel point existe par définition de l'ensemble  $\Delta_{j-1}$ . On a donc en particulier,  $d_c(R_0^{(j-1)}, P^{(j-1)}) \leq (1 + 2A)2^{-(j-1)N}$ .

**Remarque 6.6.1.** Si  $C_1$  est assez grand,  $U_c(R_0, C_1 2^{-(j+1)N}) \subset U_c(P, C_1 2^{-jN})$ .

En effet, pour tout  $Q \in U_c(R_0, C_1 2^{-(j+1)N})$ ,

$$\begin{aligned} d_c(Q, P) &< 2^{-(j-1)N} + C_1 2^{-(j+1)N} \\ &< C_1 2^{-jN}. \end{aligned}$$

Nous divisons la construction de  $\tilde{\Gamma}_j$  en plusieurs cas.

**Cas A :**  $\beta_\infty(P, C_2 2^{-jN}) \geq \varepsilon_0$

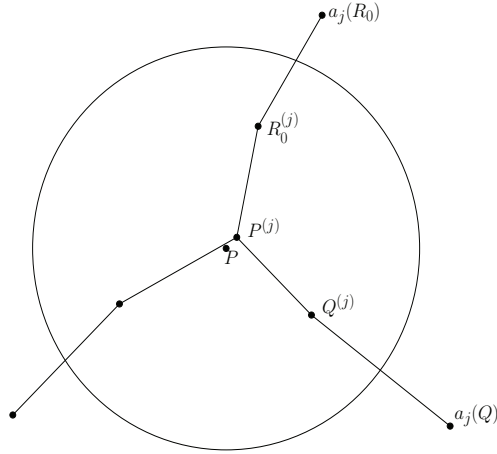


FIGURE 6.6.1 – Cas A

Dans ce cas, on considère pour tout  $Q \in U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$  un point  $a_j(Q)$  tel que  $d_c(Q^{(j)}, a_j(Q)) = C_1 2^{-jN}$  et  $[P^{(j)}, Q^{(j)}, a_j(Q)]$  soit un ordre. On ajoute alors à  $\Gamma_{j-1}$  les segments  $[P^{(j-1)}, Q^{(j-1)}]$  et  $[Q^{(j-1)}, a_j(Q)]$  (on pourra se référer à la figure 6.6.1 pour une illustration). Par Ahlfors-régularité,  $\text{card}(U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j)$  est borné uniformément en  $j$ , donc

$$\ell(\tilde{\Gamma}_j) - \ell(\Gamma_{j-1}) \leq C 2^{-jN} \quad (6.6.1)$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon_0^4} 2^{-jN} \beta_\infty(P, C_2 2^{-jN})^4 \quad (6.6.2)$$

$$\leq C \beta_1(P, C_2 2^{-jN+1})^2 2^{-jN}. \quad (6.6.3)$$

**Remarque 6.6.2.** Pour simplifier, nous utilisons ici la notation  $\tilde{\Gamma}_j$  bien que celle-ci porte à confusion, puisque seules des modifications locales de  $\Gamma_{j-1}$  autour de  $P$  ont été effectuées alors que l'ensemble  $\tilde{\Gamma}_j$  doit contenir tous les points  $P^{(j-1)}$  avec  $P \in \Delta_j$ . En insérant  $P^{(j-1)}$ , nous avons en réalité obtenue une version locale du véritable ensemble  $\tilde{\Gamma}_j$ .

**Cas B :**  $\beta_\infty(P, C_2 2^{-jN}) < \varepsilon_0$ .

Comme  $\beta_\infty(P, C_1 2^{-jN}) \leq \frac{C_2}{C_1} \beta_\infty(P, C_2 2^{-jN})$ , si  $\varepsilon_0$  est assez petit, la proposition 6.4.10 assure que  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$  a un  $2^{-jN}$ -ordre  $[P_1, \dots, P_n]$  et donc en particulier  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_{j-1}$  a un  $2^{-jN}$ -ordre.

**Cas B1 :** Il existe un  $2^{-jN}$ -ordre  $[P_1, \dots, P_n]$  de  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$  tel que le sous-ordre  $[Q_1, \dots, Q_m]$  de  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_{j-1}$  vérifie  $R_0 \neq Q_1$  et

$R_0 \neq Q_m$ .

Notons  $i_0 \in \{2, \dots, m-1\}$  l'indice tel que  $Q_{i_0} = R_0$ . Il existe une application croissante  $r : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que  $Q_i = P_{r(i)}$ . La propriété (P2) assure que les segments  $[Q_{i_0-1}^{(j-1)}, Q_{i_0}^{(j-1)}]$  et  $[Q_{i_0}^{(j-1)}, Q_{i_0+1}^{(j-1)}]$  sont dans  $\Gamma_{j-1}$ . L'ensemble  $\tilde{\Gamma}_j$  est obtenu en remplaçant  $[Q_{i_0-1}^{(j-1)}, Q_{i_0}^{(j-1)}] \cup [Q_{i_0}^{(j-1)}, Q_{i_0+1}^{(j-1)}]$  par

$$\left[ P_{r(i_0-1)}^{(j-1)}, P_{r(i_0-1)+1}^{(j-1)} \right] \cup \dots \cup \left[ P_{r(i_0)-1}^{(j-1)}, P_{r(i_0)}^{(j-1)} \right] \cup \dots \cup \left[ P_{r(i_0+1)-1}^{(j-1)}, P_{r(i_0+1)}^{(j-1)} \right].$$

La figure 6.6.2 illustre cette construction. Il nous faut estimer la longueur ajoutée en effectuant cette opération.

$$\begin{aligned} \ell(\tilde{\Gamma}_j) - \ell(\Gamma_{j-1}) &= \sum_{k=r(i_0-1)}^{r(i_0+1)-1} d_c(P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}) \\ &\quad - \left( d_c(Q_{i_0-1}^{(j-1)}, Q_{i_0}^{(j-1)}) + d_c(Q_{i_0}^{(j-1)}, Q_{i_0+1}^{(j-1)}) \right). \end{aligned}$$

On décompose la somme en deux termes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  avec

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \sum_{k=r(i_0-1)}^{r(i_0)-1} d_c(P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}) - d_c(P_{r(i_0-1)}^{(j-1)}, P_{r(i_0)}^{(j-1)}), \\ \Sigma_2 &:= \sum_{k=r(i_0)}^{r(i_0+1)-1} d_c(P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}) - d_c(P_{r(i_0)}^{(j-1)}, P_{r(i_0+1)}^{(j-1)}). \end{aligned}$$

Nous allons estimer  $\Sigma_1$ , le calcul sera identique pour  $\Sigma_2$ . Pour simplifier les notations, supposons le temps du calcul que  $r(i_0 - 1) = 1$  et  $r(i_0) = s_0$ . On a alors

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \sum_{k=1}^{s_0-1} d_c(P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}) - d_c(P_1^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}) \\ &= \sum_{k=1}^{s_0-2} \left( d_c(P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}) + d_c(P_{k+1}^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}) - d_c(P_k^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}) \right). \end{aligned}$$

Nous allons estimer chaque terme de la somme en utilisant le théorème 6.2.1. Pour cela, vérifions que  $P_k^{(j-1)}$ ,  $P_{k+1}^{(j-1)}$  et  $P_{s_0}^{(j-1)}$  satisfont les hypothèses du théorème. Comme  $[P_k, P_{k+1}, P_{s_0}]$  est un  $2^{-jN}$ -ordre de  $\{P_k, P_{k+1}, P_{s_0}\}$ , on est assuré par le lemme 6.4.11 que  $[P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}]$  est un ordre de  $\{P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}\}$ . Nous avons aussi (si la constante  $A$  est assez petite),

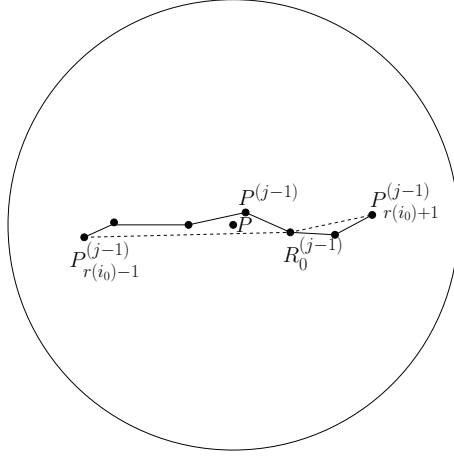


FIGURE 6.6.2 – Cas B1

puisque  $P_k, P_{k+1}$  et  $P_{s_0}$  sont des points de  $\Delta_j \cap U_c(P, C_1 2^{-jN})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 2^{-jN} &\leq d_c(P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}) \leq 4C_1 2^{-jN}; \\ \frac{1}{2} 2^{-jN} &\leq d_c(P_{k+1}^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}) \leq 4C_1 2^{-jN}; \\ \frac{1}{2} 2^{-jN} &\leq d_c(P_{s_0}^{(j-1)}, P_k^{(j-1)}) \leq 4C_1 2^{-jN}. \end{aligned}$$

Notons  $\mathfrak{L}_{j-1}$  une droite telle que

$$\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N}) = \frac{1}{C_2 2^{-(j-1)N}} \int_{Q \in E \cap B_c(P, C_2 2^{-(j-1)N})} \frac{d_c(Q, \mathfrak{L}_{j-1})}{C_2 2^{-(j-1)N}} dQ.$$

Le lemme 6.4.7 nous assure que si  $C_2$  est suffisamment grande devant  $C_1$ , alors

$$\begin{aligned} - d_c(P_k^{(j-1)}, \mathfrak{L}_{j-1}) &\leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N}) 2^{-(j-1)N}; \\ - d_c(P_{k+1}^{(j-1)}, \mathfrak{L}_{j-1}) &\leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N}) 2^{-(j-1)N}; \\ - d_c(P_{s_0}^{(j-1)}, \mathfrak{L}_{j-1}) &\leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N}) 2^{-(j-1)N}. \end{aligned}$$

Donc par exemple, si  $\varepsilon_0$  est assez petit,

$$\frac{d_c(P_k^{(j-1)}, \mathfrak{L}_{j-1})}{2^{-(j-1)N}} \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N}) \leq \frac{1}{2^{N+3}}.$$

On peut appliquer le théorème 6.2.1 à l'échelle  $t = 2^{-(j-1)N}$  et on obtient

$$\begin{aligned} d_c(P_k^{(j-1)}, P_{k+1}^{(j-1)}) + d_c(P_{k+1}^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}) - d_c(P_k^{(j-1)}, P_{s_0}^{(j-1)}) \\ \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N}) 2^{-(j-1)N}. \end{aligned}$$

Comme le cardinal de  $U_c(P, C_1 2^{-(j-1)N}) \cap \Delta_j$  est borné uniformément, cela donne

$$\Sigma_1 \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N})^2 2^{-(j-1)N}.$$

Et puisque la même estimée est vérifiée pour  $\Sigma_2$ , on obtient

$$\ell(\tilde{\Gamma}_j) - \ell(\Gamma_{j-1}) \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j-1)N})^2 2^{-(j-1)N}.$$

**Cas B2 :** Pour tout  $2^{-jN}$ -ordre  $[P_1, \dots, P_n]$  de  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$ , le sous-ordre  $[Q_1, \dots, Q_m]$  de  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_{j-1}$  vérifie  $R_0 = Q_1$  ou  $R_0 = Q_m$ .

Par la propriété (P3), il existe un point  $a_{j-1}(R_0)$  tel que  $[R_0^{(j-1)}, a_{j-1}(R_0)] \subset \Gamma_{j-1}$  et  $\ell([R_0^{(j-1)}, a_{j-1}(R_0)]) \geq C_1 2^{-(j-1)N} \geq 2C_1 2^{-jN}$ .

**Remarque 6.6.3.** *Ce segment ne subira plus que des transformations mineures dans la suite de la construction. En particulier, sa longueur restera inchangée. De la même manière, si  $P, Q \in \Delta_k$ ,  $[P^{(k)}, Q^{(k)}] \subset \Gamma_k$  et  $d_c(P, Q) \geq C_1 2^{-kN}$ , alors pour tout  $j \geq k$ ,  $[P^{(j)}, Q^{(j)}] \subset \Gamma_j$ .*

Notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des segments géodésiques  $[R, T]$  tels qu'il existe  $k$  tel que pour tout  $j \geq k$ ,  $R^{(j)}, T^{(j)} \in \mathcal{G}_j$  et  $[R^{(j)}, T^{(j)}] \subset \Gamma_j$ . Ces segments  $[R, T]$  feront partis, à la fin de la construction, du continuum  $\Gamma$ . Ils vont nous permettre de contrôler la longueur totale ajoutée. Pour un segment  $S \in \mathcal{A}$ , notons  $\tau_1(S)$  la longueur ajoutée à  $S$  en appliquant le cas 1 ci-dessous, et  $\tau_2(S)$  celle en appliquant le cas 2.

**Cas B2(i) :**  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_{j-1} = \{R_0\}$ .

La propriété (P4) nous assure de l'existence de deux points  $T_1$  et  $T_2$  tels que les segments  $[T_1, R_0^{(j-1)}]$  et  $[R_0^{(j-1)}, T_2]$  sont dans  $\Gamma_{j-1}$ , de longueur minorée par  $C_1 2^{-(j-1)N}$ . Deux cas peuvent alors se présenter.

*Cas 1 :*  $d_c(T_1, R_0) \geq C_2 2^{-jN}$  ou  $d_c(T_2, R_0) \geq C_2 2^{-jN}$ .

Supposons par exemple que l'inégalité a lieu pour  $T_1$ . On commence par choisir deux points  $a_j(P_1)$  et  $a_j(P_n)$  tels que  $d_c(a_j(P_1), P_1^{(j)}) = C_1 2^{-jN}$ ,  $d_c(a_j(P_n), P_n^{(j)}) = C_1 2^{-jN}$ ,  $[a_j(P_1), P_1^{(j)}, P_2^{(j)}]$  est un ordre et  $[a_j(P_n), P_n^{(j)}, P_{n-1}^{(j)}]$  est un ordre. On ajoute alors à  $\Gamma_{j-1}$  les segments

$$[a_j(P_1), P_1^{(j)}] \cup [P_1^{(j)}, P_2^{(j)}] \cup \dots \cup [P_{n-1}^{(j)}, P_n^{(j)}] \cup [P_n^{(j)}, a_j(P_n)].$$

Cette construction est illustrée par la figure 6.6.3. Rappelons que pour les points  $P \in A_j$ ,  $P^{(j-1)} = P^{(j)}$ . On a ajouté une longueur

$$d_c(a_j(P_1), P_1^{(j)}) + d_c(a_j(P_n), P_n^{(j)}) + \sum_{k=1}^{n-1} d_c(P_k^{(j)}, P_{k+1}^{(j)}) \leq (2C_1 + C) 2^{-jN}.$$

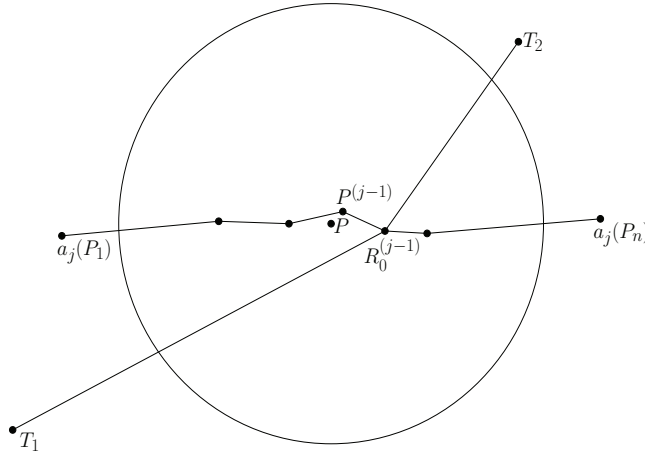


FIGURE 6.6.3 – Cas B2(i) cas 1

Notons  $k_0$  la première génération où une telle transformation impliquant les points  $R_0$  et  $T_1$  intervient. En prenant en compte le fait qu'une telle transformation peut arriver pour le point  $R_0$  comme pour le point  $T_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \tau_1([T_1, R_0]) &\leq 2 \sum_{j=k_0}^{\infty} (2C_1 + C) 2^{-jN} \\ &\leq C 2^{-k_0 N} \\ &\leq \frac{C}{C_2} d_c(T_1, R_0). \end{aligned}$$

Si on choisit  $C_2$  assez grand, cela donne

$$\tau_1([T_1, R_0]) \leq \frac{d_c(T_1, R_0)}{10^3}.$$

*Cas 2* :  $d_c(T_1, R_0) < C_2 2^{-jN}$  et  $d_c(T_2, R_0) < C_2 2^{-jN}$ .

Passons directement à l'étape  $j + 1$  de la construction. La proposition 6.4.10 nous assure que  $(U_c(P, 10 \cdot 2^{-(j-1)N}) \cap \Delta_{j+1}) \cup \{T_1\}$  admet un ordre  $[P_0 = T_1, P_1, \dots, P_n]$ . Remarquons que le point  $P$  appartient à  $\{P_1, \dots, P_n\}$ . La construction décrite ci-dessous est illustrée par la figure 6.6.4. Notons  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $R_0 = P_{i_0}$ . On commence par insérer les points  $P_1, \dots, P_{i_0}$ . Choisissons un point  $a_{j+1}(P_1)$  tel que  $d_c(a_{j+1}(P_1), P_1^{(j+1)}) = C_1 2^{-(j+1)N}$  et  $[a_{j+1}(P_1), P_1^{(j+1)}, P_2^{(j+1)}]$  soit un ordre. Pour estimer la longueur ajoutée, il suffit de remarquer que toutes ces étapes reviennent à ajouter dans un premier



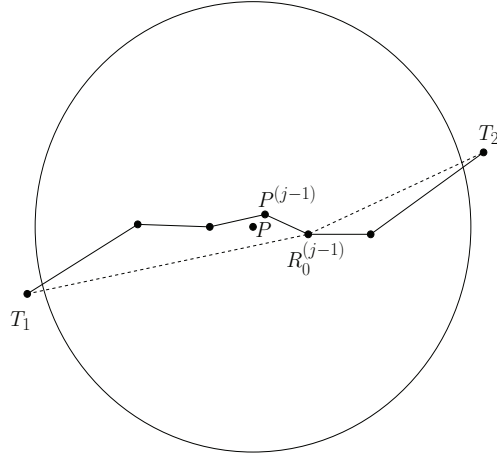


FIGURE 6.6.4 – Cas B2(i) cas 2

temps les segments géodésiques

$$[a_{j+1}(P_1), P_1^{(j+1)}] \cup [P_1^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}],$$

puis à remplacer  $[P_1^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}]$  par

$$[P_1^{(j+1)}, P_2^{(j+1)}] \cup \dots \cup [P_{i_0-1}^{(j+1)}, P_{i_0}^{(j+1)}].$$

**Remarque 6.6.4.** Cette transformation aura lieu une unique fois en  $R_0$  pour le segment  $[T_1, R_0]$ , car la prochaine fois qu'une telle situation se présente en  $R_0$ , on utilisera le segment  $[P_{i_0-1}, R_0]$ .

Finalement,

$$\begin{aligned} \tau_2([R_0, T_1]) &\leq 2 \left( d_c(a_{j+1}(P_1), P_1^{(j+1)}) + d_c(P_1^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) \right) \\ &+ 2 \left( \sum_{k=1}^{i_0-1} d_c(P_k^{(j+1)}, P_{k+1}^{(j+1)}) - d_c(P_1^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) \right) \\ &\leq 2 \left( d_c(a_{j+1}(P_1), P_1^{(j+1)}) + d_c(P_1^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) \right) \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{i_0-2} \left( d_c(P_k^{(j+1)}, P_{k+1}^{(j+1)}) + d_c(P_{k+1}^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) \right. \\ &\quad \left. - d_c(P_k^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) \right). \end{aligned}$$

Le premier terme est facile à estimer : si  $N$  est assez grand,

$$\begin{aligned} d_c(a_{j+1}(P_1), P_1^{(j+1)}) + d_c(P_1^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) \\ \leq (C_1 2^{-N} + 2 \cdot A \cdot 2^{-N} + 20 \cdot 2^N) 2^{-jN} \\ \leq \frac{C_1}{2 \cdot 10^3} 2^{-jN} \\ \leq \frac{d_c(T_1, R_0)}{2 \cdot 10^3}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on procède comme pour le cas B1. On a

$$\begin{aligned} d_c(P_k^{(j+1)}, P_{k+1}^{(j+1)}) + d_c(P_{k+1}^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) - d_c(P_k^{(j+1)}, R_0^{(j+1)}) \\ \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j+1)N}) 2^{-(j+1)N}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\tau_2([T_1, R_0]) \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j+1)N}) 2^{-(j+1)N} + \frac{d_c(T_1, R_0)}{10^3}.$$

On utilise la même méthode pour les points  $P_{i_0}, \dots, P_n, T_2$  et on obtient

$$\tau_2([T_2, R_0]) \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-(j+1)N}) 2^{-(j+1)N} + \frac{d_c(T_1, R_0)}{10^3}.$$

**Cas B2(ii) :**  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_{j-1} \neq \{R_0\}$ .

Dans ce cas,  $Q_m = R_0$  et  $m > 1$ . Il existe alors  $j_0 < i_0$  avec  $Q_{m-1} = P_{j_0}$  et  $R_0 = P_{i_0}$ . On insère alors les points  $P_{j_0}, \dots, P_{i_0}$  en utilisant la méthode du cas B1, et les points  $P_{i_0}, \dots, P_n$  en utilisant le cas B2(i). On obtient donc le même type d'estimées que précédemment.

## 6.7 Construction de $\Gamma_j$ à partir de $\tilde{\Gamma}_j$

Pour passer de  $\tilde{\Gamma}_j$  à  $\Gamma_j$ , on fait un "changement de génération" en remplaçant les points  $P^{(j-1)}$  par les points  $P^{(j)}$ , tout en nous efforçant de conserver les hypothèses de récurrence (P1), (P2), (P3) et (P4).

Un segment de  $\tilde{\Gamma}_j$  dont les deux extrémités sont des points  $P^{(j-1)}, Q^{(j-1)}$  avec  $P, Q \in \Delta_j$  est remplacé par un segment  $[P^{(j)}, Q^{(j)}]$ .

Considérons maintenant un segment de  $\tilde{\Gamma}_j$  qui n'est pas constitué de deux extrémités  $P^{(j-1)}, Q^{(j-1)}$  avec  $P, Q \in \Delta_j$ . Soit il a été ajouté au cours de la construction de  $\tilde{\Gamma}_j$  à parti de  $\Gamma_{j-1}$  au moyen du Cas A ou du Cas B2 : dans ce cas, il est de la forme  $[P^{(j)}, a_j(P)]$  et on ne le modifie pas. Soit ce segment est plus ancien, il est de la forme  $[P^{(j-1)}, a_{j-1}(P)]$ . On remplace

alors  $[P^{(j-1)}, a_{j-1}(P)]$  par le segment  $[P^{(j)}, a_j(P)]$ , où  $a_j(P)$  est un point tel que  $d_c(a_j(P), P^{(j)}) = d_c(a_{j-1}(P), P^{(j-1)})$  et tel que l'ordre autour de  $P$  est respecté.

**Remarque 6.7.1.** *Rappelons que si  $P \in A_j$  ou  $P \in A_{j-1}$ ,  $P^{(j-1)} = P^{(j)}$ . Si  $P^{(j-1)}$  satisfait la condition du lemme 6.4.5 à l'échelle  $2^{-jN}$ , alors  $P^{(j-1)} = P^{(j)}$ . Ainsi, le lecteur doit garder en tête que  $P^{(j-1)}$  est remplacé par un point différent  $P^{(j)}$  si  $P^{(j-1)}$  est relativement loin d'une  $\mathbb{H}$ -droite  $\mathcal{L}_j$  telle que  $\beta_1(P, C_2 2^{-jN})$  est atteint.*

Notons que l'ensemble connexe  $\Gamma_j$  construit à partir de  $\tilde{\Gamma}_j$  vérifie les propriétés de récurrence (P1), (P2), (P3) et (P4). En effet, il est immédiat de vérifier que ces ensembles satisfont les propriétés (P1), (P3) et (P4). Montrons rapidement que la propriété (P2) est satisfaite par  $\Gamma_j$ . Choisissons un point  $P \in \Delta_j$  tel que  $U_c(P, C_1 2^{-jN})$  a un ordre  $[P_1, \dots, P_n]$  et un indice  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Supposons que  $P_i \in A_j$  (on raisonne de la même façon si  $P_{i+1} \in A_j$ ). Dans ce cas, soit  $\beta_\infty(P_i, C_1 2^{-jN}) < \varepsilon_0$  et alors  $P_i$  a été inséré en suivant l'ordre sur  $U_c(P_i, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$ , donc en particulier  $[P_i^{(j)}, P_{i+1}^{(j)}] \subset \Gamma_j$ ; soit  $\beta_\infty(P_i, C_1 2^{-jN}) \geq \varepsilon_0$  et alors on a joint tous les points de  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$  (en particulier  $P_{i+1}$ ) à  $P_i$ .

Si les deux points  $P_i$  et  $P_{i+1}$  n'appartiennent pas à  $A_j$ , alors il existe une génération  $g_i$  telle que  $P_i \in A_{g_i}$  et  $P_{i+1} \in \Delta_{g_i}$  ou l'inverse. Par récurrence,  $[P_i^{(g_i)}, P_{i+1}^{(g_i)}] \subset \Gamma_{g_i}$ . Mais puisque  $P_i$  et  $P_{i+1}$  restent voisins dans l'ordre de  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$ , aucun point n'a été inséré entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$  durant les étapes  $g_i, \dots, j$  de la construction et on a encore  $[P_i^{(j)}, P_{i+1}^{(j)}] \subset \Gamma_j$ . La propriété (P2) est donc vérifiée.

Il nous faut maintenant estimer la longueur ajoutée en passant de  $\tilde{\Gamma}_j$  à  $\Gamma_j$ .

**Remarque 6.7.2.** *Pour estimer cette longueur, il suffit de s'intéresser au cas des segments  $[P^{(j)}, Q^{(j)}]$  dont les deux extrémités sont dans  $\tilde{\Delta}_j$ , puisque les longueurs des autres segments restent inchangées.*

Rappelons que  $\mathcal{A}$  désigne l'ensemble des segments  $[P, Q]$  tels qu'il existe un entier  $k$  tel que pour tout  $j \geq k$ ,  $P^{(j)}, Q^{(j)} \in \mathcal{G}_j$  et  $[P^{(j)}, Q^{(j)}] \subset \Gamma_j$ . Pour un segment  $I \in \mathcal{A}$ , notons  $\tau_3(I)$  la longueur ajoutée par changement de génération, c'est-à-dire lorsque l'on remplace  $[P^{(j-1)}, Q^{(j-1)}]$  par  $[P^{(j)}, Q^{(j)}]$ .

Soit un segment  $[P^{(j)}, Q^{(j)}] \subset \Gamma_j$  avec  $P, Q \in \Delta_j$ . La première chose à remarquer est que par construction des suites de points  $(P^{(j)})_j$ , si  $P \in A_{j-1}$  ou  $P \in A_j$ , alors  $P^{(j-1)} = P^{(j)}$ . Comme les seuls segments qui nous intéressent ici sont ceux qui ont été modifiés lors de la transformation de  $\tilde{\Gamma}_j$  à  $\Gamma_j$ , on

peut supposer  $P \in \Delta_{j-2}$  tel que  $P^{(j-1)} \neq P^{(j)}$  et  $Q \in \Delta_j$ .

À nouveau on distingue deux cas : le cas où  $\beta_\infty(P, C_2 2^{(-jN)})$  est grand (Cas A), et celui où cette quantité est petite (Cas B).

**Cas A** :  $\beta_\infty(P, C_2 2^{-jN}) \geq \varepsilon_0$ .

On obtient

$$\begin{aligned} \ell([P^{(j)}, Q^{(j)}]) - \ell([P^{(j-1)}, Q^{(j-1)}]) &\leq 2A 2^{-jN} + 2A 2^{-(j-1)N} \\ &\leq C\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) 2^{-jN}. \end{aligned}$$

**Cas B** :  $\beta_\infty(P, C_2 2^{-jN}) < \varepsilon_0$ .

On est là encore amené à distinguer plusieurs cas.

**Cas B1** :  $d_c(P, Q) \geq C_1 2^{-jN}$ .

Dans ce cas,  $[P, Q] \in \mathcal{A}$ . Notons  $k_0 \leq j$  le premier indice tel que  $d_c(P, Q) \geq C_1 2^{-k_0 N}$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \ell([P^{(j)}, Q^{(j)}]) - \ell([P^{(j-1)}, Q^{(j-1)}]) &\leq 2A \cdot 2^{-jN} + 2A \cdot 2^{-(j-1)N} \\ &\leq 2A(1 + 2^N) \cdot 2^{-jN} \\ &\leq \frac{2A(1 + 2^N) d_c(P, Q)}{C_1 2^{(j-k_0)N}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne, si  $C_1$  est assez grand,

$$\tau_3([P, Q]) \leq \frac{d_c(P, Q)}{10^3}.$$

Notons que s'il existe  $T \neq Q$  tel que  $[P^{(j)}, T] \subset \Gamma_j$ , on peut de la même manière contrôler la longueur ajoutée en passant de  $[P^{(j)}, Q^{(j)}]$  à  $[P^{(j-1)}, Q^{(j-1)}]$  en fonction de  $d_c(P, T)$ .

**Cas B2** :  $d_c(P, Q) < C_1 2^{-jN}$ .

Remarquons tout d'abord que dans ce cas, on a forcément  $Q \in A_j$  ou  $A_{j-1}$ , puisque si  $Q \in \Delta_{j-2}$ ,  $d_c(P, Q) \geq 2^{-(j-2)N} \geq C_1 2^{-jN}$ . Comme  $\beta_\infty(P, C_2 2^{-jN}) < \varepsilon_0$ ,  $U_c(P, C_1 2^{-jN}) \cap \Delta_j$  a un ordre  $[P_1, \dots, P_n]$ . Mais puisque  $[P^{(j)}, Q^{(j)}] \subset \Gamma_j$ , il existe (quitte à prendre l'ordre inverse  $[P_n, \dots, P_1]$ )  $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $P_{i_0} = P$  et  $P_{i_0+1} = Q$ . Si  $i_0 = 1$ , alors d'après la propriété (P3), il existe  $T$  tel que  $[P^{(j)}, T] \subset \Gamma_j$  et  $d_c(P, T) \geq C_1 2^{-jN}$ , on est ramené au Cas B1, ou plutôt à la remarque avant le Cas B2. On peut donc supposer  $i_0 > 1$ . Notons alors  $R = P_{i_0-1}$ . Puisque  $d_c(P, R) \leq C_1 2^{-jN}$ ,  $R \in A_{j-1}$  ou  $R \in A_j$ , et donc  $R^{(j-1)} = R^{(j)}$ . Notons  $\mathfrak{L}_j$  une droite telle que

$$\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) = \frac{1}{C_2 2^{-jN}} \int_{T \in E \cap B_c(P, C_2 2^{-jN})} \frac{d_c(T, \mathfrak{L}_j)}{C_2 2^{-jN}} dT.$$

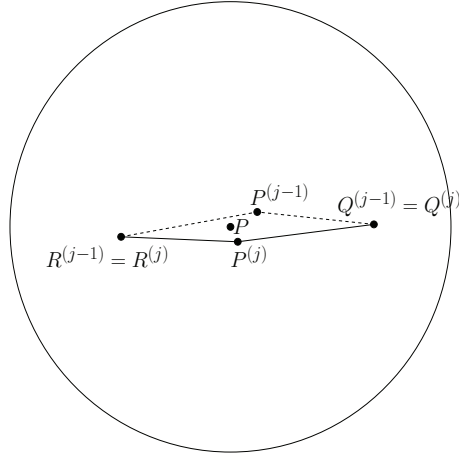


FIGURE 6.7.1 – Cas B2

Le lemme 6.4.7 nous assure que si  $C_2$  est assez grand devant  $C_1$ , alors

- $d_c(P^{(j)}, \mathfrak{L}_j) \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) 2^{-jN}$  ;
- $d_c(Q^{(j)}, \mathfrak{L}_j) \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) 2^{-jN}$  ;
- $d_c(R^{(j)}, \mathfrak{L}_j) \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) 2^{-jN}$ .

Par le théorème 6.2.1, on obtient donc

$$d_c(Q^{(j)}, P^{(j)}) + d_c(P^{(j)}, R^{(j)}) \leq d_c(Q^{(j)}, R^{(j)}) + C\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) 2^{-jN}.$$

Mais comme  $Q^{(j-1)} = Q^{(j)}$  et  $R^{(j-1)} = R^{(j)}$ ,  $d_c(Q^{(j)}, R^{(j)}) \leq d_c(Q^{(j-1)}, P^{(j-1)}) + d_c(P^{(j-1)}, R^{(j-1)})$  et donc

$$\begin{aligned} d_c(Q^{(j)}, P^{(j)}) + d_c(P^{(j)}, R^{(j)}) - d_c(Q^{(j-1)}, P^{(j-1)}) - d_c(P^{(j-1)}, R^{(j-1)}) \\ \leq C\beta_1(P, C_2 2^{-jN}) 2^{-jN}. \end{aligned}$$

## 6.8 Conclusion

En itérant le processus décrit dans les deux sections précédentes, on construit une suite d'ensembles connexes  $(\Gamma_j)_j$  tels que  $\tilde{\Delta}_j \subset \Gamma_j$ . Le théorème C.0.3 affirme qu'il existe une sous-suite (encore notée  $(\Gamma_j)_j$ ) qui converge vers un ensemble connexe  $\Gamma$  qui contient  $E$ .

On obtient finalement,

$$H^1(\Gamma) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \ell(\tilde{\Gamma}_{j+1}) - \ell(\Gamma_j) \right) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \ell(\Gamma_{j+1}) - \ell(\tilde{\Gamma}_{j+1}) \right) + \ell(\Gamma_0).$$

D'après les résultats de la section 4 :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \ell(\tilde{\Gamma}_{j+1}) - \ell(\Gamma_j) \right) &\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{P \in \Delta_j} \beta_1(P, C_2 2^{-jN})^2 2^{-jN} \\ &\quad + \sum_{I \in \mathcal{A}} \tau_1(I) + \sum_{I \in \mathcal{A}} \tau_2(I) \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{P \in \Delta_j} \beta_1(P, C_2 2^{-jN})^2 2^{-jN} + \frac{2}{10^3} H^1(\Gamma). \end{aligned}$$

Les estimées de la section 5 donnent :

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \ell(\Gamma_{j+1}) - \ell(\tilde{\Gamma}_{j+1}) \right) \leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{P \in \Delta_j} \beta_1(P, C_2 2^{-jN})^2 2^{-jN} + \sum_{I \in \mathcal{A}} \tau_3(I).$$

On obtient ainsi

$$H^1(\Gamma) \leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{P \in \Delta_j} \beta_1(P, C_2 2^{-jN})^2 2^{-jN} + \frac{3}{10^3} H^1(\Gamma) + C \text{diam} E.$$

La quantité  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{P \in \Delta_j} \beta_1(P, C_2 2^{-jN})^2 2^{-jN}$  est une version discrète de  $\beta_1(E)$ . On obtient ainsi

$$H^1(\Gamma) \leq C(\beta_1(E) + \text{diam} E),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 6.3.2.

Il nous reste à montrer que sous l'hypothèse de type Carleson du théorème 6.3.1, l'ensemble  $\Gamma$  est Ahlfors-régulier. Il suffit de démontrer l'inégalité de droite de la condition d'Ahlfors-régularité, l'inégalité de gauche étant immédiate par connexité.

Considérons un point  $P \in \Gamma$  et un réel  $0 < s < \text{diam} \Gamma$ . Soit  $k_s$  l'entier tel que  $2^{-(k_s+1)N} \leq s \leq 2^{-k_s N}$ . Notons  $\Gamma(P, s)$  l'ensemble  $\Gamma \cap B_c(P, s)$  et pour tout  $j > 0$ ,  $\Gamma_j(P, s) = \Gamma_j \cap B_c(P, s)$ .

Le nombre de segments de  $\Gamma_{k_s}$  intersectant  $B_c(P, s)$  est borné uniformément en  $P$  et en  $s$ , donc

$$\ell(\Gamma_{k_s}(P, s)) \leq Cs.$$

Les calculs effectués pour évaluer  $\ell(\Gamma)$  s'appliquent et en notant  $\Delta_j^s$  l'ensemble  $\Delta_j \cap B_c(P, s)$ , on obtient

$$\ell(\Gamma(P, s)) \leq C \sum_{j \geq k} \sum_{Q \in \Delta_j^s} \beta_1(Q, C_2 2^{-jN})^2 2^{-jN} + Cs.$$

D'après l'hypothèse (6.3.1) du théorème 6.3.1,

$$\ell(\Gamma(P, s)) \leq Cs.$$

On obtient donc bien que pour tout  $P \in \Gamma$  et tout  $0 < s < \text{diam}\Gamma$ ,

$$C^{-1}s \leq H^1(\Gamma \cap B_c(P, s)) \leq Cs,$$

ce qui termine la preuve du théorème 6.3.1.

# Annexe A

## La bornitude non-tangentielle implique la convergence non-tangentielle

Dans l'article [Pet12], nous avons montré directement, dans le cas d'un graphe hyperbolique (sous les hypothèses du théorème 2.7.12), l'équivalence en presque tout point du bord géométrique entre la convergence non-tangentielle et la bornitude non-tangentielle. Nous reproduisons ici l'argument, bien que celui-ci soit inutilement long. Considérons donc  $X$  un graphe hyperbolique au sens de Gromov, coercif, quasi-étoilé et  $p$  une fonction de transition markovienne admissible telle que  $p^*$  est sous-markovienne. Notons à nouveau  $\Gamma_c^\theta$  le tube non-tangentiel d'épaisseur  $c > 0$  et de sommet  $\theta \in \partial X$  défini par

$$\Gamma_c^\theta := \{x \in X \mid \exists \gamma \text{ un rayon géodésique entre } o \text{ et } \theta \text{ tel que } d(x, \gamma) < c\}.$$

L'objectif est de montrer directement la presque inclusion  $\mathcal{N} \tilde{\subset} \mathcal{L}$ .

Comme pour montrer chaque résultat de ce type, on commence par remarquer qu'il nous suffit de démontrer la presque inclusion  $\mathcal{N}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{L}_{c-m_1}$  pour tout  $c > c_0 + m_1$  et tout  $m \in \mathbb{N}$ , où l'on rappelle que  $c_0$  est la constante fournie par le lemme 2.7.10,  $m_1$  la constante fournie par l'hypothèse d'admissibilité de  $p$  (plus précisément la condition de rang borné dans cette hypothèse) et où l'on a posé

$$\mathcal{N}_c^m = \left\{ \theta \in \partial X \mid \sup_{x \in \Gamma_c^\theta} |u(x)| \leq m \right\}.$$

Nous montrons dans un premier temps que  $\mathcal{N}_c^m \tilde{\subset} \mathcal{L}^*$  et nous en déduisons ensuite la presque-inclusion voulue. Nous utiliserons pour cela une méthode développée par J. Brossard [Bro78].



Soit  $c > m_1 + c_0$ . Pour cela, appliquons le lemme 2.5.4 à l'ensemble borélien  $\mathcal{N}_c^m$ . On obtient que pour  $\mu$ -presque tout point  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque sûrement,  $(X_k)_{k \geq 0}$  finit sa vie dans  $\Gamma := \Gamma_{c-m_1}(\mathcal{N}_c^m)$ . Soit  $\theta$  un tel point. Remarquons que pour tout  $x \in \Gamma$  et tout  $y \in X$  tel que  $d(x, y) \leq m_1$ ,  $|u(y)| \leq m$ . Cela implique en particulier que pour  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et tout  $y \in X$  tel que  $d(y, X_n(\omega)) \leq m_1$ , on ait  $|u(y)| \leq m$ . Comme  $X$  est localement borné,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque sûrement,  $\widetilde{\mathcal{N}}^* < +\infty$ . Ainsi,  $\mathbb{P}_z^\theta(\widetilde{\mathcal{N}}^{**}) = 1$ ,  $\theta \in \widetilde{\mathcal{N}}^*$  et donc  $\mathcal{N}_c^m \widetilde{\subset} \widetilde{\mathcal{N}}^*$  (voir la section 2.4 pour les définitions des ensembles  $\widetilde{\mathcal{N}}^*$ ,  $\widetilde{\mathcal{N}}^{**}$  et  $\widetilde{\mathcal{N}}^*$ ). Cependant, par la proposition 2.4.3,  $\widetilde{\mathcal{N}}^* \widetilde{\subset} \mathcal{L}^*$  et donc

$$\mathcal{N}_c^m \widetilde{\subset} \mathcal{L}^*.$$

Prouvons maintenant que  $\mathcal{N}_c^m \widetilde{\subset} \mathcal{L}_{c-m_1}$ . On vient de démontrer que pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque sûrement,  $(u(X_n))_n$  a une limite finie  $\ell(\theta)$ . Cela définit une fonction  $\ell$  sur  $\mathcal{N}_c^m$ . À nouveau par le lemme 2.5.4, pour  $\mu$ -presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_z^\theta$ -presque sûrement,  $X_n$  est dans  $\Gamma$  pour  $n$  assez grand. Puisque  $|u|$  est majorée par  $m$  sur  $\Gamma$ , cela implique que  $|\ell| \leq m$  sur  $\mathcal{N}_c^m$ .

La fin de la preuve utilise une méthode développée par J. Brossard [Bro78]. Nous allons décomposer  $u$  sur  $\Gamma$  comme somme de trois fonctions pour lesquelles nous aurons convergence non-tangentielle en presque tout point de  $\mathcal{N}_c^m$ .

Définissons la fonction

$$f(z) := \mathbb{E}_z [(\ell \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{N}_c^m})(X_\infty)].$$

Le lemme de représentation des fonctions harmoniques bornées ([Anc90, Woe00]) nous assure que  $f$  est une fonction harmonique bornée qui converge non-tangentiellement en  $\mu$ -presque tout point  $\theta \in \partial X$  vers  $(\ell \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{N}_c^m})(\theta)$ . Notons  $\tau$  le temps de sortie de l'ensemble  $\Gamma$  et  $\tau_k$  le temps de sortie de  $B(o, k)$ . Comme  $u$  est harmonique bornée sur l'ensemble épaissi

$$\widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{B(o, k)} = \{y \in X \mid d(y, \Gamma \cap B(o, k)) \leq m_1\},$$

qui est un ensemble borné,  $u(z) = \mathbb{E}_z[u(X_{\tau \wedge \tau_k})]$ . Si  $\tau = +\infty$ ,  $\mathbb{P}_z$ -presque sûrement,  $(X_n)_n$  converge vers un point  $X_\infty \in \mathcal{N}_c^m$  et donc  $\mathbb{P}_z$ -presque sûrement,  $(u(X_n))_n$  tend vers  $\ell(X_\infty)$ . On peut étendre  $u$  à  $\mathcal{N}_c^m$  en posant pour  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $u(\theta) := \ell(\theta)$ . Puisque  $|u|$  est majorée par  $m$  sur  $\Gamma$ , On peut appliquer le théorème de Lebesgue pour obtenir

$$\forall z \in \Gamma, u(z) = \mathbb{E}_z[u(X_\tau)].$$

ANNEXE A. LA BORNITUDE NT IMPLIQUE LA CONVERGENCE NT

En décomposant l'événement  $\{X_\infty \in \mathcal{N}_c^m\}$  en la réunion

$$\{\tau < \infty \mid X_\infty \in \mathcal{N}_c^m\} \cup \{\tau = \infty\}$$

on obtient, pour  $z \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathbb{E}_z[u(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] + \mathbb{E}_z[u(X_\infty) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau = \infty\}}] \\ &= \mathbb{E}_z[u(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] + \mathbb{E}_z[u(X_\infty) \cdot \mathbf{1}_{\{X_\infty \in \mathcal{N}_c^m\}}] \\ &\quad - \mathbb{E}_z[u(X_\infty) \cdot \mathbf{1}_{\{X_\infty \in \mathcal{N}_c^m\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]. \end{aligned}$$

Cela donne la décomposition de  $u$  annoncée. En effet, notons  $g(z) = \mathbb{E}_z[u(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$  et  $h(z) = -\mathbb{E}_z[u(X_\infty) \cdot \mathbf{1}_{\{X_\infty \in \mathcal{N}_c^m\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$ . On a  $u = f + g + h$  sur  $\Gamma$ .

Il reste à prouver qu'en presque tout point  $\theta$  dans  $\mathcal{N}_c^m$ , les fonctions  $g(z)$  et  $h(z)$  convergent vers 0 quand  $z$  tend vers  $\theta$  en restant dans le cône  $\Gamma_{c-m_1}^\theta$ . Comme  $u$  est bornée sur  $\tilde{\Gamma} = \{y \in X \mid d(y, \Gamma) \leq m_1\}$ , si  $\tau < \infty$ ,  $|u(X_\tau)| \leq m$  et

$$|g(z)| \leq m \cdot \mathbb{P}_z(\tau < \infty).$$

De la même manière, pour presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $|u(\theta)| \leq m$  et on obtient facilement en conditionnant

$$|h(z)| \leq m \cdot \mathbb{P}_z(\tau < \infty).$$

Il est maintenant suffisant de montrer que pour presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,  $\mathbb{P}_z(\tau < \infty)$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $\theta$  en restant dans  $\Gamma_{c-m_1}^\theta$ . Cela provient du lemme 2.7.10. En effet, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall z \notin \Gamma, \mathbb{P}_z(X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m) \geq \eta$$

et cela est vrai en particulier pour tout  $z \in \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$ . La propriété forte de

ANNEXE A. LA BORNITUDE NT IMPLIQUE LA CONVERGENCE NT

---

Markov implique que pour tout  $z \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_z(X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m) &= \mathbb{P}_z(\{X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m\} \cap \{\tau < \infty\}) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_z(\{X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m\} \cap \{\tau = i\}) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_z [\mathbb{E}_z [\mathbf{1}_{\{X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=i\}} | \mathcal{F}_i]] \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_z [\mathbb{E}_z [\mathbf{1}_{\{X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m\}} | \mathcal{F}_i] \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=i\}}] \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_z [\mathbb{P}_{X_i}(X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=i\}}] \\
 &= \mathbb{E}_z [\mathbb{P}_{X_\tau}(X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] \\
 &\geq \eta \cdot \mathbb{P}_z(\tau < \infty).
 \end{aligned}$$

Par le théorème de représentation des fonctions harmoniques bornées, pour presque tout  $\theta \in \mathcal{N}_c^m$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ z \in \Gamma_{c-m_1}^\theta}} \mathbb{P}_z(X_\infty \notin \mathcal{N}_c^m) = 0.$$

On a donc démontré que  $\mathcal{N}_c^m \overset{\sim}{\subset} \mathcal{L}_{c-m_1}$  et donc que  $\mathcal{N} \overset{\sim}{\subset} \mathcal{L}$ .

# Annexe B

## Un lemme analytique pour de l'uniforme continuité

Pour un sous-ensemble  $U \subset M$ , nous noterons  $H_1^p(U)$  l'espace de Sobolev des fonctions de  $L^p(U)$  dont le gradient est dans  $L^p(U)$ . Nous noterons aussi  $C_c^\infty(U)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact sur  $U$ . Le lemme suivant a été démontré par F. Mouton dans sa thèse ([Mou94]) pour une variété à courbure négative pincée. Le seul moment où l'hypothèse de courbure est utilisée est pour un plongement de Sobolev de  $H_1^1(M)$  dans  $L^{\frac{d}{d-1}}(M)$ . Ce plongement est valide sous les seules hypothèses de courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité strictement positif (voir [Heb99], proposition 3.6).

**Lemme B.0.1.** *Soit  $M$  une variété complète, de courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité non nul  $\kappa$ . Pour tout réel  $\lambda > 0$  et tout rayon  $R \in ]0, \kappa/2[$ , il existe une constante  $C$  telle que :*

*si  $f$  est une fonction positive ou nulle, localement bornée et de gradient localement borné, vérifiant  $\Delta f \leq \lambda f$  au sens des distributions, alors*

$$\forall x \in M, \|f\|_\infty^{B(x,R)} \leq C \|f\|_2^{B(x,2R)}.$$

*Démonstration.* Nous allons montrer dans un premier temps que l'hypothèse  $\Delta f \leq \lambda f$  entraîne une inégalité du type

$$\|\eta|\nabla f^\beta|\|_2 \leq C_\beta (\|\eta f^\beta\|_2 + \|\nabla \eta f^\beta\|_2), \quad (\text{B.0.1})$$

où  $\beta \geq 1$ ,  $\eta$  est une fonction plateau et  $C_\beta$  est une constante ne dépendant que de  $\beta$  et  $\lambda$ .

L'inégalité  $\Delta f \leq \lambda f$ , au sens des distributions, signifie que pour tout  $h \in C_c^\infty(M)$ ,

$$h \geq 0 \Rightarrow \langle \Delta f, h \rangle \leq \lambda \langle f, h \rangle.$$

Comme  $f$  est une fonction et  $\nabla f$  une fonction vectorielle,

$$\langle f, h \rangle = \int fh$$

et par intégration par partie

$$\langle \Delta f, h \rangle = \int g(\nabla f, \nabla h).$$

Ainsi, si  $h \in C_c^\infty(M)$  est positive ou nulle,

$$\int g(\nabla f, \nabla h) \leq \lambda \int fh. \quad (\text{B.0.2})$$

Notons désormais  $\eta \in C_c^\infty(M)$  une fonction plateau que l'on précisera ultérieurement et  $\beta \geq 1$ . L'idée maintenant est d'appliquer l'inégalité (B.0.2) à la fonction  $\eta^2 f^{2\beta-1}$ . Comme  $f \in H_{1,loc}^\infty(M)$ , la fonction  $(f^{2\beta-1} + 1/n)|_{supp \eta}$  est dans  $H_1^\infty(supp \eta)$ . Elle peut donc être approchée à  $1/n$  près par une fonction  $h_n$  de  $C^\infty(supp \eta)$  :

$$\left\| f^{2\beta-1} + \frac{1}{n} - h_n \right\|_\infty^{supp \eta} + \left\| \nabla \left( f^{2\beta-1} + \frac{1}{n} - h_n \right) \right\|_\infty^{supp \eta} \leq \frac{1}{n}.$$

En particulier,  $\|f^{2\beta-1} + \frac{1}{n} - h_n\|_\infty^{supp \eta} \leq 1/n$ , donc presque partout,  $h_n \geq f^{2\beta-1} \geq 0$ . On a aussi

$$\begin{aligned} \|\eta^2 f^{2\beta-1} - \eta^2 h_n\|_{H_1^\infty}^{supp \eta} &\leq \|\eta^2 (f^{2\beta-1} - h_n)\|_\infty^{supp \eta} + \|\nabla \eta^2\| (f^{2\beta-1} - h_n) \|_\infty^{supp \eta} \\ &\quad + \|\eta^2 |\nabla (f^{2\beta-1} - h_n)|\|_\infty^{supp \eta} \\ &\leq (1 + \sup |\nabla \eta^2|) \|f^{2\beta-1} - h_n\|_{H_1^\infty}^{supp \eta} \\ &\leq (1 + \sup |\nabla \eta^2|) \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

donc la fonction  $\eta^2 h_n$  tend vers  $\eta^2 f^{2\beta-1}$  dans  $H_1^\infty(supp \eta)$ , donc aussi dans  $H_1^2(supp \eta)$ . Comme la fonction  $f$  est dans  $H_1^\infty(supp \eta)$ , elle est aussi dans  $H_1^2(supp \eta)$  et les applications

$$v \mapsto \int_{supp \eta} fv \quad \text{et} \quad v \mapsto \int_{supp \eta} g(\nabla f, \nabla v)$$

sont continues sur  $H_1^2(supp \eta)$ . La fonction  $\eta^2$  est positive et dans  $C_c^\infty(M)$ , donc  $\eta^2 h_n$  est positive et dans  $C_c^\infty(M)$  (en prolongeant  $h_n$  en une fonction  $C^\infty$  sur  $M$ ). On peut donc lui appliquer l'inégalité (B.0.2) :

$$\int_{supp \eta} g(\nabla f, \nabla (\eta^2 h_n)) = \int g(\nabla f, \nabla (\eta^2 h_n)) \leq \lambda \int_{supp \eta} f \eta^2 h_n \leq \int_{supp \eta} f \eta^2 h_n.$$

En passant à la limite dans  $H_1^2(\text{supp } \eta)$ , on obtient :

$$\int g(\nabla f, \nabla(\eta^2 f^{2\beta-1})) = \int_{\text{supp } \eta} g(\nabla f, \nabla(\eta^2 f^{2\beta-1})) \leq \lambda \int_{\text{supp } \eta} f^{2\beta} \eta^2 \leq \int f^{2\beta} \eta^2.$$

En dérivant le produit  $\eta^2 f^{2\beta-1}$ , on obtient

$$\int \eta^2 g(\nabla f, \nabla f^{2\beta-1}) \leq \lambda \int \eta^2 f^{2\beta} - 2 \int \eta f^{2\beta-1} g(\nabla f, \nabla \eta). \quad (\text{B.0.3})$$

Observons que

$$\int \eta^2 g(\nabla f, \nabla f^{2\beta-1}) = (2\beta - 1) \int \eta^2 f^{2\beta-2} |\nabla f|^2 = \frac{2\beta - 1}{\beta^2} \int \eta^2 |\nabla f^\beta|^2,$$

et que

$$-2 \int \eta f^{2\beta-1} g(\nabla f, \nabla \eta) \leq 2 \int \eta f^{2\beta-1} |\nabla f| |\nabla \eta|.$$

En appliquant l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$  avec  $a = \sqrt{2} |\nabla \eta| f^\beta$  et  $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta f^{\beta-1} |\nabla f|$ , cela donne

$$\begin{aligned} 2 \int \eta f^{2\beta-1} |\nabla f| |\nabla \eta| &\leq 2 \int |\nabla \eta|^2 f^{2\beta} + \frac{1}{2} \int \eta^2 f^{2\beta-2} |\nabla f|^2 \\ &= 2 \int |\nabla \eta|^2 f^{2\beta} + \frac{1}{2\beta^2} \int \eta^2 |\nabla f^\beta|^2 \end{aligned}$$

En reportant tout dans l'inégalité (B.0.3), cela donne

$$\frac{4\beta - 3}{2\beta^2} \int \eta^2 |\nabla f^\beta|^2 \leq \lambda \int \eta^2 f^{2\beta} + 2 \int |\nabla \eta|^2 f^{2\beta},$$

ce qui se traduit par

$$\|\eta |\nabla f^\beta|\|_2 \leq \sqrt{\frac{2\beta^2}{4\beta - 3}} \sqrt{\lambda \|\eta f^\beta\|_2^2 + 2 \|\nabla \eta |f^\beta|\|_2^2}.$$

Appliquons cette fois-ci l'inégalité  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$  et notons  $C_\lambda := \sup\{\sqrt{\lambda}, \sqrt{2}\}$ , pour obtenir

$$\|\eta |\nabla f^\beta|\|_2 \leq C_\lambda \sqrt{\frac{2\beta^2}{4\beta - 3}} (\|\eta f^\beta\|_2 + \|\nabla \eta |f^\beta|\|_2), \quad (\text{B.0.4})$$

qui est exactement l'inégalité annoncée.

La variété  $M$  est complète, de courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité non nul, donc on peut appliquer l'inégalité de Sobolev qui assure que  $H_1^1(M)$  se plonge continûment dans  $L^{\frac{d}{d-1}}(M)$  (voir [Var89] et [Heb99] proposition 3.6), *i.e.* qu'il existe une constante  $C_1$  telle que pour toute fonction  $v \in H_1^1(M)$ ,

$$\|v\|_{\frac{d}{d-1}} \leq C_1 (\|v\|_1 + \|\nabla v\|_1).$$

La fonction  $\eta^2 f^{2\beta}$  étant dans  $H_1^\infty(\text{supp } \eta)$ , donc dans  $H_1^1(\text{supp } \eta)$  et dans  $H_1^1(M)$ ,

$$\begin{aligned} \|\eta^2 f^{2\beta}\|_{\frac{d}{d-1}} &\leq C_1 (\|\eta^2 f^{2\beta}\|_1 + \|\nabla(\eta^2 f^{2\beta})\|_1) \\ &\leq C_1 (\|\eta^2 f^{2\beta}\|_1 + \|2\eta|\nabla\eta|f^{2\beta}\|_1 + \|2\eta^2 f^\beta |\nabla f^\beta|\|_1) \\ &\leq C_1 (\|\eta f^\beta\|_2^2 + 2\|\eta f^\beta\|_2 \|\nabla\eta|f^\beta\|_2 + 2\|\eta f^\beta\|_2 \|\eta|\nabla f^\beta|\|_2) \\ &\leq 2C_1 (\|\eta f^\beta\|_2 + \|\nabla\eta|f^\beta\|_2 + \|\eta|\nabla f^\beta|\|_2)^2. \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité (B.0.4) pour obtenir

$$\|\eta f^\beta\|_{\frac{2d}{d-1}}^2 = \|\eta^2 f^{2\beta}\|_{\frac{d}{d-1}} \leq 2C_1 \left(1 + C_\lambda \sqrt{\frac{2\beta^2}{4\beta - 3}}\right)^2 (\|\eta f^\beta\|_2 + \|\nabla\eta|f^\beta\|_2)^2,$$

ce qui donne

$$\|\eta f^\beta\|_{\frac{2d}{d-1}}^2 \leq \sqrt{2C_1} \left(1 + C_\lambda \sqrt{\frac{2\beta^2}{4\beta - 3}}\right) (\|\eta f^\beta\|_2 + \|\nabla\eta|f^\beta\|_2).$$

Il nous faut maintenant choisir la fonction plateau  $\eta$ . On commence par choisir  $k^-$  et  $k^+$  tels que  $1 < k^- < k^+ \leq 2$ , puis on choisit une fonction plateau  $\eta \in C_c^\infty(M)$  telle que

$$\text{supp } \eta \subset B(x, k^+ R), \quad \eta = 1 \text{ sur } B(x, k^- R) \quad \text{et } |\nabla\eta| \leq \frac{2}{R(k^+ - k^-)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|f^\beta\|_{\frac{2d}{d-1}}^{B(x, k^- R)} &\leq \sqrt{2C_1} \left(1 + C_\lambda \sqrt{\frac{2\beta^2}{4\beta - 3}}\right) \left(1 + \frac{2}{R(k^+ - k^-)}\right) \|f^\beta\|_2^{B(x, k^+ R)} \\ &\leq C_2 \frac{\sqrt{\beta}}{k^+ - k^-} \|f^\beta\|_2^{B(x, k^+ R)}, \end{aligned}$$

---

ANNEXE B. UN LEMME ANALYTIQUE

---

où  $C_2$  est une constante qui dépend seulement de  $\lambda$  et  $R$ . Si on note  $\chi = \frac{d}{d-1}$ , on a

$$\|f\|_{2\beta\chi}^{B(x,k^-R)} \leq C_2^{\frac{1}{\beta}} \frac{\beta^{\frac{1}{2\beta}}}{(k^+ - k^-)^{\frac{1}{\beta}}} \|f\|_{2\beta}^{B(x,k^+R)}.$$

On choisit alors des suites  $(k_n^+)$ ,  $(k_n^-)$  et  $(\beta_n)$  de la manière suivante :

$$k_0^+ = 2, k_1^+ = \frac{3}{2}, \dots, k_n^+ = 1 + 2^{-n}, \dots$$

On prend, pour tout  $n$ ,  $k_n^- = k_{n+1}^+ = 1 + 2^{-(n+1)}$  et  $\beta_n = \chi^n$ . A l'étape  $n$ , on a comme inégalité

$$\|f\|_{2\beta_{n+1}}^{B(x,k_{n+1}^+R)} \leq C_2^{\frac{1}{\beta_n}} \frac{\beta_n^{\frac{1}{2\beta_n}}}{(k_n^+ - k_{n+1}^+)^{\frac{1}{\beta_n}}} \|f\|_{2\beta_n}^{B(x,k_n^+R)}$$

et par récurrence

$$\begin{aligned} \|f\|_{2\beta_{n+1}}^{B(x,R)} &\leq \|f\|_{2\beta_{n+1}}^{B(x,k_{n+1}^+R)} \leq (2C_2)^{\chi^{-n}} (2\sqrt{\chi})^{n\chi^{-n}} \|f\|_{2\beta_n}^{B(x,k_n^+R)} \\ &\leq \dots \leq (2C_2)^{(1+\chi^{-1}+\dots+\chi^{-n})} (2\sqrt{\chi})^{(0+\chi^{-1}+\dots+n\chi^{-n})} \|f\|_2^{B(x,2R)}. \end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient

$$\|f\|_{\infty}^{B(x,R)} \leq (2C_2)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\chi}}} (2\sqrt{\chi})^{\frac{1}{\chi(1-\frac{1}{\chi})^2}} \|f\|_2^{B(x,2R)},$$

ce qui prouve le lemme. □



---

# Annexe C

## Courbes de longueur finie dans les espaces métriques

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

Pour tout  $s > 0$ , la *mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle*  $H^s$  est la mesure Borel régulière définie pour tout  $E \subset X$  par

$$H^s(E) := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ et } \text{diam } E_i \leq \delta \right\}.$$

Si on impose que les ensembles  $E_i$  qui recouvrent  $E$  soient des boules, on obtient une nouvelle mesure, comparable à la mesure de Hausdorff et appelée la *mesure de Hausdorff sphérique  $s$ -dimensionnelle* est la mesure Borel régulière définie pour tout  $E \subset X$  par

$$\mathcal{S}^s(E) := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \text{ et } 2r_i \leq \delta \right\}.$$

La mesure de Hausdorff et la mesure de Hausdorff sphérique sont comparables : pour tout  $E \subset X$ ,

$$H^s(E) \leq \mathcal{S}^s(E) \leq 2^s H^s(E).$$

Un ensemble  $E \subset X$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est  *$s$ -régulier* (ou *Ahlfors-régulier de dimension  $s$* ) si et seulement si  $E$  est fermé et s'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $x \in E$  et tout  $r \in ]0, \text{diam } E[$ ,

$$C_0^{-1} r^s \leq H^s(E \cap B(x, r)) \leq C_0 r^s.$$

Dans ce cas, la dimension de Hausdorff  $Hdim(E)$  de  $E$  est  $s$ . Notons que cette condition impose peu de restrictions sur la géométrie de  $E$ . Le Cantor

4-coins est par exemple 1-régulier. Les propriétés géométriques et analytiques des ensembles Ahlfors-réguliers ont été largement étudiées dans [DS91, DS93].

Rappelons que la *distance de Hausdorff* entre deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $X$  est définie par

$$d_H(A, B) := \inf\{r > 0 \mid A \subset V_r(B) \text{ et } B \subset V_r(A)\},$$

où  $V_r(A)$  désigne le  $r$ -voisinage de  $A$  dans  $X$ . Notons  $\mathcal{M}(X)$  l'ensemble formé des sous-ensembles fermés de  $X$ . Dans le cas où  $X$  est compact,  $\mathcal{M}(X)$  muni de la distance de Hausdorff est compact.

**Définition C.0.2.** Une suite  $(x_n^j)_{j \in \mathbb{Z}, n=1, \dots, N_j}$  de points de  $E$  est un  $(A, N)$  quasi-réseau pour un nombre réel  $A < 1$  et un entier non nul  $N$  si

1. pour tous  $x_m^j, x_n^j, m \neq n, d(x_m^j, x_n^j) > (1 - A)2^{-jN}$  ;
2. pour tout  $y \in E$ , il existe  $n \in \{1, \dots, N_j\}$  tel que  $d(y, x_n^j) \leq (1 + A)2^{-jN}$ .

Le théorème suivant est un point clé de la démonstration des théorèmes 6.3.1 et 6.3.2. Il permet d'affirmer qu'une sous-suite de la suite de continua  $\Gamma_j$  que l'on construit récursivement converge (au sens de la distance de Hausdorff) et que la limite est un continuum qui contient bien l'ensemble 1-régulier considéré.

**Théorème C.0.3.** Soient  $X$  un espace métrique propre et  $E$  un sous-ensemble compact de  $X$ . Soient  $(x_n^j)_{j \in \mathbb{Z}, n=1, \dots, N_j}$  un  $(A, N)$ -quasi-réseau de  $E$  et soit  $(\Gamma_j)$  une suite de continua de diamètres uniformément bornés et tels que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , tout  $n \in \{1, \dots, N_j\}$ ,  $x_n^j \in \Gamma_j$ . Alors il existe une sous-suite  $(\Gamma_{j_k})$  de  $(\Gamma_j)$  qui converge pour la métrique de Hausdorff  $d_H$ . De plus  $\Gamma$  est un continuum contenant  $E$  et tel que

$$H^1(\Gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} H^1(\Gamma_{j_k}).$$

Ce théorème se démontre aisément en utilisant les deux remarques suivantes :

Une suite de sous-ensembles fermés  $(K_n)$  de  $X$  qui converge au sens de Hausdorff vers un sous-ensemble fermé  $K$  converge *au sens de Kuratowski* vers  $K$ , c'est-à-dire que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. si  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k}$  pour une sous-suite  $(x_{n_k})$  d'une suite  $(x_n)$  telle que pour tout  $n$ ,  $x_n \in K_n$ , alors  $x \in K$  ;
2. si  $x \in K$ , il existe une suite  $(x_n)$  telle que pour tout  $n$ ,  $x_n \in K_n$  et  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

D'après le théorème de Golab, si  $(K_n)$  est une suite de compacts connexes dans  $X$  qui converge vers  $K$  au sens de Hausdorff, alors  $K$  est connexe et

$$H^1(K) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} H^1(K_n).$$

# Bibliographie

- [AC92] M.T. Anderson and J. Cheeger.  $C^\alpha$ -compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below. *J. Differential Geom.*, 35(2) :265–281, 1992.
- [AK00] L. Ambrosio and B. Kirchheim. Rectifiable sets in metric and Banach spaces. *Math. Ann.*, 318(3) :527–555, 2000.
- [Anc87] A. Ancona. Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary. *Ann. of Math. (2)*, 125(3) :495–536, 1987.
- [Anc88] A. Ancona. Positive harmonic functions and hyperbolicity. In *Potential theory—surveys and problems (Prague, 1987)*, volume 1344 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–23. Springer, Berlin, 1988.
- [Anc90] A. Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In *École d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII—1988*, volume 1427 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–112. Springer, Berlin, 1990.
- [AP08] L. Atanasi and M.A. Picardello. The Lusin area function and local admissible convergence of harmonic functions on homogeneous trees. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(6) :3327–3343, 2008.
- [AR04] L. Ambrosio and S. Rigot. Optimal mass transportation in the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 208(2) :261–301, 2004.
- [AS85] M.T. Anderson and R. Schoen. Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature. *Ann. of Math. (2)*, 121(3) :429–461, 1985.
- [AS09] G. Arena and R. Serapioni. Intrinsic regular submanifolds in Heisenberg groups are differentiable graphs. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 35(4) :517–536, 2009.
- [BB07] S. Blachère and S. Brofferio. Internal diffusion limited aggregation on discrete groups having exponential growth. *Probab. Theory Related Fields*, 137(3-4) :323–343, 2007.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [BBI01] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [BC88] J. Brossard and L. Chevalier. Classe  $L \log L$  et densité de l'intégrale d'aire dans  $\mathbf{R}_+^{n+1}$ . *Ann. of Math. (2)*, 128(3) :603–618, 1988.
- [Bel96] A. Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. In *Sub-Riemannian geometry*, volume 144 of *Progr. Math.*, pages 1–78. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [Ber01] D. Bertacchi. Random walks on Diestel-Leader graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 71 :205–224, 2001.
- [BH99] M.R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BHK01] M. Bonk, J. Heinonen, and P. Koskela. Uniformizing Gromov hyperbolic spaces. *Astérisque*, (270) :viii+99, 2001.
- [BHM11] S. Blachère, P. Haïssinsky, and P. Mathieu. Harmonic measures versus quasi-conformal measures for hyperbolic groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 44(4) :683–721, 2011.
- [BLU07] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, and F. Uguzzoni. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [BP03] M. Bourdon and H. Pajot. Cohomologie  $l_p$  et espaces de Besov. *J. Reine Angew. Math.*, 558 :85–108, 2003.
- [Bro78] J. Brossard. Comportement “non-tangentiel” et comportement “brownien” des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Démonstration probabiliste d'un théorème de Calderon et Stein. In *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, volume 649 of *Lecture Notes in Math.*, pages 378–397. Springer, Berlin, 1978.
- [Bro88] J. Brossard. Densité de l'intégrale d'aire dans  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  et limites non tangentielles. *Invent. Math.*, 93(2) :297–308, 1988.
- [Bus82] P. Buser. A note on the isoperimetric constant. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(2) :213–230, 1982.
- [BW05] S. Brofferio and W. Woess. Green kernel estimates and the full Martin boundary for random walks on lamplighter groups and

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Diestel-Leader graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(6) :1101–1123, 2005.
- [Cal50a] A.P. Calderón. On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 :55–61, 1950.
- [Cal50b] A.P. Calderón. On the behaviour of harmonic functions at the boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 :47–54, 1950.
- [Cal77] A.P. Calderón. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74(4) :1324–1327, 1977.
- [Cao00] J. Cao. Cheeger isoperimetric constants of Gromov-hyperbolic spaces with quasi-poles. *Commun. Contemp. Math.*, 2(4) :511–533, 2000.
- [Car09] C. Carathéodory. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. *Math. Ann.*, 67(3) :355–386, 1909.
- [Car72] P. Cartier. Fonctions harmoniques sur un arbre. In *Symposia Mathematica, Vol. IX (Convegno di Calcolo delle Probabilità, INDAM, Rome, 1971)*, pages 203–270. Academic Press, London, 1972.
- [CDG94] L. Capogna, D. Danielli, and N. Garofalo. The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality. *Comm. Anal. Geom.*, 2(2) :203–215, 1994.
- [CDPT07] L. Capogna, D. Danielli, S.D. Pauls, and J.T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [CG72] J. Cheeger and D. Gromoll. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. *Ann. of Math. (2)*, 96 :413–443, 1972.
- [Che70] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
- [Cho39] W.L. Chow. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.*, 117 :98–105, 1939.
- [CK10] J. Cheeger and B. Kleiner. Differentiating maps into  $L^1$ , and the geometry of BV functions. *Ann. of Math. (2)*, 171(2) :1347–1385, 2010.
- [CM06] G. Citti and M. Manfredini. Implicit function theorem in Carnot-Carathéodory spaces. *Commun. Contemp. Math.*, 8(5) :657–680, 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [CM11a] V. Chousionis and P. Mattila. Singular integrals on Ahlfors-David regular subsets of the Heisenberg group. *J. Geom. Anal.*, 21(1) :56–77, 2011.
- [CM11b] V. Chousionis and P. Mattila. Singular integrals on self-similar sets and removability for lipschitz harmonic functions in heisenberg groups. *arXiv :1012.2281v2 [math.AP]*, 2011.
- [CMM82] R.R. Coifman, A. McIntosh, and Y. Meyer. L’intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes. *Ann. of Math. (2)*, 116(2) :361–387, 1982.
- [CS06] G. Citti and A. Sarti. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space. *J. Math. Imaging Vision*, 24(3) :307–326, 2006.
- [CY75] S.Y. Cheng and S.T. Yau. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(3) :333–354, 1975.
- [CZ52] A.P. Calderón and A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.*, 88 :85–139, 1952.
- [Dav05] G. David. *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, volume 233 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [Der75] Y. Derriennic. Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 32(4) :261–276, 1975.
- [DG54] E. De Giorgi. Su una teoria generale della misura  $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio ad  $r$  dimensioni. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 36 :191–213, 1954.
- [DG06] E. De Giorgi. *Selected papers*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Edited by Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Marco Forti, Mario Miranda and Sergio Spagnolo.
- [DJ90] G. David and D. Jerison. Lipschitz approximation to hypersurfaces, harmonic measure, and singular integrals. *Indiana Univ. Math. J.*, 39(3) :831–845, 1990.
- [Doo57] J.L. Doob. Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. Soc. Math. France*, 85 :431–458, 1957.
- [DS91] G. David and S. Semmes. Singular integrals and rectifiable sets in  $\mathbf{R}^n$  : Beyond Lipschitz graphs. *Astérisque*, (193) :152, 1991.
- [DS93] G. David and S. Semmes. *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, volume 38 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Dur84] R. Durrett. *Brownian motion and martingales in analysis*. Wadsworth Mathematics Series. Wadsworth International Group, Belmont, CA, 1984.
- [Ele97] G. Elek. The  $l_p$ -cohomology and the conformal dimension of hyperbolic cones. *Geom. Dedicata*, 68(3) :263–279, 1997.
- [Fat06] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 30(1) :335–400, 1906.
- [FFP07] F. Ferrari, B. Franchi, and H. Pajot. The geometric traveling salesman problem in the Heisenberg group. *Rev. Mat. Iberoam.*, 23(2) :437–480, 2007.
- [FS82] G.B. Folland and E.M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups*, volume 28 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982.
- [FSSC01] B. Franchi, R. Serapioni, and F. Serra Cassano. Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group. *Math. Ann.*, 321(3) :479–531, 2001.
- [FSSC06] B. Franchi, R. Serapioni, and F. Serra Cassano. Intrinsic Lipschitz graphs in Heisenberg groups. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 7(3) :423–441, 2006.
- [FSSC07] B. Franchi, R. Serapioni, and F. Serra Cassano. Regular submanifolds, graphs and area formula in Heisenberg groups. *Adv. Math.*, 211(1) :152–203, 2007.
- [FSSC11] B. Franchi, R. Serapioni, and F. Serra Cassano. Differentiability of intrinsic Lipschitz functions within Heisenberg groups. *J. Geom. Anal.*, 21(4) :1044–1084, 2011.
- [GDLH90] É. Ghys and P. De La Harpe. Espaces métriques hyperboliques. In *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, volume 83 of *Progr. Math.*, pages 27–45. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [GN96] N. Garofalo and D.M. Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(10) :1081–1144, 1996.
- [Gro81] M. Gromov. Hyperbolic manifolds, groups and actions. In *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y.,*



## BIBLIOGRAPHIE

---

- 1978), volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 183–213. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [GS85] R.F. Gundy and M.L. Silverstein. The density of the area integral in  $\mathbf{R}_+^{n+1}$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 35(1) :215–229, 1985.
- [Gun83] R.F. Gundy. The density of the area integral. In *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981)*, Wadsworth Math. Ser., pages 138–149. Wadsworth, Belmont, CA, 1983.
- [Hah05] I. Hahlomaa. Menger curvature and Lipschitz parametrizations in metric spaces. *Fund. Math.*, 185(2) :143–169, 2005.
- [Hah07] I. Hahlomaa. Curvature integral and Lipschitz parametrization in 1-regular metric spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 32(1) :99–123, 2007.
- [Heb99] E. Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds : Sobolev spaces and inequalities*, volume 5 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.
- [Hei95] J. Heinonen. Calculus on Carnot groups. In *Fall School in Analysis (Jyväskylä, 1994)*, volume 68 of *Report*, pages 1–31. Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 1995.
- [Hei01] J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Hör67] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.
- [Jon90] P.W. Jones. Rectifiable sets and the traveling salesman problem. *Invent. Math.*, 102(1) :1–15, 1990.
- [Jui08] N. Juillet. *Optimal transport and geometric analysis in Heisenberg groups*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2008.
- [Jui10] N. Juillet. A counterexample for the geometric traveling salesman problem in the Heisenberg group. *Rev. Mat. Iberoam.*, 26(3) :1035–1056, 2010.
- [Koh73] J.J. Kohn. Pseudo-differential operators and hypoellipticity. In *Partial differential equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*, pages 61–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Kor85] A. Korányi. Geometric properties of Heisenberg-type groups. *Adv. in Math.*, 56(1) :28–38, 1985.
- [KSC04] B. Kirchheim and F. Serra Cassano. Rectifiability and parameterization of intrinsic regular surfaces in the Heisenberg group. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(4) :871–896, 2004.
- [KW02] V.A. Kaimanovich and W. Woess. Boundary and entropy of space homogeneous Markov chains. *Ann. Probab.*, 30(1) :323–363, 2002.
- [LM05] G.P. Leonardi and S. Masnou. On the isoperimetric problem in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^n$ . *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 184(4) :533–553, 2005.
- [LR03] G.P. Leonardi and S. Rigot. Isoperimetric sets on Carnot groups. *Houston J. Math.*, 29(3) :609–637 (electronic), 2003.
- [Mag06] V. Magnani. Characteristic points, rectifiability and perimeter measure on stratified groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 8(4) :585–609, 2006.
- [Mal78] P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 195–263, New York, 1978. Wiley.
- [Mat95] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.
- [Mat05] P. Mattila. Measures with unique tangent measures in metric groups. *Math. Scand.*, 97(2) :298–308, 2005.
- [Mit85] J. Mitchell. On Carnot-Carathéodory metrics. *J. Differential Geom.*, 21(1) :35–45, 1985.
- [MMV96] P. Mattila, M.S. Melnikov, and J. Verdera. The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability. *Ann. of Math. (2)*, 144(1) :127–136, 1996.
- [Mon00] R. Monti. Some properties of Carnot-Carathéodory balls in the Heisenberg group. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 11(3) :155–167 (2001), 2000.
- [Mon03] R. Monti. Brunn-Minkowski and isoperimetric inequality in the Heisenberg group. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 28(1) :99–109, 2003.
- [Mon08] R. Monti. Heisenberg isoperimetric problem. The axial case. *Adv. Calc. Var.*, 1(1) :93–121, 2008.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Mou94] F. Mouton. *Convergence Non-Tangentielle des Fonctions Harmoniques en Courbure Négatives*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1994.
- [Mou95] F. Mouton. Comportement asymptotique des fonctions harmoniques en courbure négative. *Comment. Math. Helv.*, 70(3) :475–505, 1995.
- [Mou00] F. Mouton. Comportement asymptotique des fonctions harmoniques sur les arbres. In *Séminaire de Probabilités, XXXIV*, volume 1729 of *Lecture Notes in Math.*, pages 353–373. Springer, Berlin, 2000.
- [Mou07] F. Mouton. Local Fatou theorem and the density of energy on manifolds of negative curvature. *Rev. Mat. Iberoam.*, 23(1) :1–16, 2007.
- [Mou10] F. Mouton. Non-tangential, radial and stochastic asymptotic properties of harmonic functions on trees. *arXiv :1004.4416v1[math.MG]*, 2010.
- [MR05] R. Monti and M. Rickly. Geodetically convex sets in the Heisenberg group. *J. Convex Anal.*, 12(1) :187–196, 2005.
- [MR09] R. Monti and M. Rickly. Convex isoperimetric sets in the Heisenberg group. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 8(2) :391–415, 2009.
- [MS89] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(5) :577–685, 1989.
- [MSSC10] P. Mattila, R. Serapioni, and F. Serra Cassano. Characterizations of intrinsic rectifiability in Heisenberg groups. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 9(4) :687–723, 2010.
- [MZ38] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund. A theorem of Lusin. Part I. *Duke Math. J.*, 4(3) :473–485, 1938.
- [Oki92] K. Okikiolu. Characterization of subsets of rectifiable curves in  $\mathbf{R}^n$ . *J. London Math. Soc. (2)*, 46(2) :336–348, 1992.
- [O’N95] T. O’Neil. A measure with a large set of tangent measures. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(7) :2217–2220, 1995.
- [Paj96] H. Pajot. Sous-ensembles de courbes Ahlfors-régulières et nombres de Jones. *Publ. Mat.*, 40(2) :497–526, 1996.
- [Pan89] P. Pansu. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. *Ann. of Math. (2)*, 129(1) :1–60, 1989.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Pau04] S.D. Pauls. A notion of rectifiability modeled on Carnot groups. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(1) :49–81, 2004.
- [Pet12] C. Petit. Harmonic functions on hyperbolic graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(1) :235–248, 2012.
- [Pic10] M.A. Picardello. Local admissible convergence of harmonic functions on non-homogeneous trees. *Colloq. Math.*, 118(2) :419–444, 2010.
- [Pre87] D. Preiss. Geometry of measures in  $\mathbf{R}^n$  : distribution, rectifiability, and densities. *Ann. of Math. (2)*, 125(3) :537–643, 1987.
- [Pri16] J. Priwaloff. Sur les fonctions conjuguées. *Bull. Soc. Math. France*, 44 :100–103, 1916.
- [Ras38] P.K. Rashevsky. About connecting two points of a completely nonholonomic space by admissible curve. *Uch. Zapiski Ped. Inst. Libknechta*, 2 :83–94, 1938.
- [Sch07a] R. Schul. Ahlfors-regular curves in metric spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 32(2) :437–460, 2007.
- [Sch07b] R. Schul. Subsets of rectifiable curves in Hilbert space—the analyst’s TSP. *J. Anal. Math.*, 103 :331–375, 2007.
- [Sem96] S. Semmes. On the nonexistence of bi-Lipschitz parameterizations and geometric problems about  $A_\infty$ -weights. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 12(2) :337–410, 1996.
- [Spe43] D.C. Spencer. A function-theoretic identity. *Amer. J. Math.*, 65 :147–160, 1943.
- [Ste61] E.M. Stein. On the theory of harmonic functions of several variables. II. Behavior near the boundary. *Acta Math.*, 106 :137–174, 1961.
- [Ste93] E.M. Stein. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [Tor95] T. Toro. Geometric conditions and existence of bi-Lipschitz parameterizations. *Duke Math. J.*, 77(1) :193–227, 1995.
- [Väi05] J. Väisälä. Gromov hyperbolic spaces. *Expo. Math.*, 23(3) :187–231, 2005.
- [Var89] N.Th. Varopoulos. Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. I. The semigroup technique. *Bull. Sci. Math.*, 113(3) :253–277, 1989.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Vit08] D. Vittono. *Submanifolds in Carnot groups*, volume 7 of *Tesi. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Series) [Theses of Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)]*. Edizioni della Normale, Pisa, 2008. Thesis, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2008.
- [Woe00] W. Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Woe05] W. Woess. Lamplighters, Diestel-Leader graphs, random walks, and harmonic functions. *Combin. Probab. Comput.*, 14(3) :415–433, 2005.
- [Yau75] S.T. Yau. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 :201–228, 1975.

---

---

## Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux thèmes d'analyse géométrique.

Le premier concerne le comportement asymptotique des fonctions harmoniques en relation avec la géométrie, sur des graphes et des variétés. Nous étudions des critères de convergence au bord des fonctions harmoniques, comme celui de la bornitude non-tangentielle, de la finitude de l'énergie ou encore de la densité de l'énergie. Nous nous plaçons pour cela dans différents cadres comme les graphes hyperboliques au sens de Gromov, les variétés hyperboliques au sens de Gromov, les graphes de Diestel-Leader ou encore dans un cadre abstrait pour obtenir des résultats pour les points du bord minimal de Martin. Les méthodes probabilistes utilisées exploitent le lien entre les fonctions harmoniques et les martingales.

Le deuxième problème abordé dans cette thèse concerne l'étude des propriétés des ensembles rectifiables de dimension 1 dans le groupe de Heisenberg, en relation avec des opérateurs d'intégrales singulières. Nous étendons à ce contexte sous-riemannien une partie des résultats de la théorie des ensembles uniformément rectifiables de David et Semmes. Nous obtenons notamment un théorème géométrique du voyageur de commerce qui fournit une condition pour qu'un ensemble Ahlfors-régulier du premier groupe de Heisenberg soit contenu dans une courbe Ahlfors-régulière.

## Abstract

In this thesis, we are interested in two topics of geometric analysis.

The first one is concerned with the asymptotic behaviour of harmonic functions in connection with geometry on graphs and manifolds. We study criteria for convergence at boundary of harmonic functions such as non-tangential boundedness, finiteness of non-tangential energy or finiteness of the energy density. We deal with Gromov hyperbolic manifolds, Gromov hyperbolic graphs, Diestel-Leader graphs and with an abstract frame to obtain criteria at minimal Martin boundary points. The methods, coming from probability theory and metric geometry, use the relation between harmonic functions and martingales.

The second problem concerns the rectifiability properties of 1-dimensional sets in the Heisenberg group in connection with the boundedness of singular integral operators. We extend to this sub-Riemannian setting parts of the theory of uniformly rectifiable sets due to David and Semmes. In particular, we obtain a geometric traveling salesman theorem which provides a condition for an Ahlfors regular set of the first Heisenberg group to be contained in an Ahlfors regular curve.