



**HAL**  
open science

# Etude des dispersions et incertitudes en optimisation et dans l'analyse des valeurs propres

Rémi Croquet

► **To cite this version:**

Rémi Croquet. Etude des dispersions et incertitudes en optimisation et dans l'analyse des valeurs propres. Autre [cond-mat.other]. INSA de Rouen, 2012. Français. NNT: 2012ISAM0006. tel-00740583

**HAL Id: tel-00740583**

**<https://theses.hal.science/tel-00740583>**

Submitted on 10 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN

ÉCOLE DOCTORALE SPMII

Sciences Physiques, Mathématiques et de l'Information pour l'Ingénieur

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur en sciences**

de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen

**Mention : Mécanique**

Présentée et soutenue par

Rémi CROQUET

le 22 juin 2012

## Étude des dispersions et incertitudes en optimisation et dans l'analyse des valeurs propres

**Jury :**

M. Alaa CHATEAUNEUF	:	Université Blaise Pascal - Clermont II	-	<i>Rapporteur</i>
M. Abdelkhalak EL-HAMI	:	I.N.S.A. de Rouen	-	<i>Directeur de thèse</i>
M. Olivier LE MAÎTRE	:	LIMSI - CNRS	-	<i>Président du jury</i>
M. Didier LEMOSSE	:	I.N.S.A. de Rouen	-	<i>Encadrant</i>
M. Rodolphe LE RICHE	:	Ecole des Mines de Saint-Etienne	-	<i>Examineur</i>
M. Rubens SAMPAIO	:	PUC - Rio de Janeiro	-	<i>Rapporteur</i>
M. Eduardo SOUZA DE CURSI	:	I.N.S.A. de Rouen	-	<i>Directeur de thèse</i>

**Laboratoire d'Optimisation et de Fiabilité  
en Mécanique des Structures (LOFIMS)**



# Remerciements

La curiosité a été le principal moteur de ce travail. Aussi, je tiens tout d'abord à remercier Eduardo Souza de Cursi pour la générosité avec laquelle il partage son imagination et l'étendue de ses connaissances. Avec ces qualités, la découverte de nouveaux horizons scientifiques a été pour moi un réel plaisir. Je veux également remercier Didier Lemosse. Sa rigueur, ses remarques, jamais complaisantes, et son sens de l'humour ont permis d'assurer des séances de travail toujours joyeuses et souvent productives. Mes remerciements vont également à Abdelkhalak El-Hami. Son expertise a permis d'apporter un second regard critique à mes travaux. Ils sont tous les trois assurés de ma plus grande sympathie.

Je souhaite également rendre hommage à Alaa Chateaufort et Rubens Sampaio pour leur travail de rapporteurs. Je les remercie ainsi pour le temps qu'ils ont pu passer à évaluer mon travail ainsi que pour la pertinence de leurs remarques. Je remercie également Olivier Le Maître qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Ses nombreux conseils ont été précieux pour prendre du recul sur mon travail. Je remercie également Monsieur Rodolphe Le Riche qui a accepté de venir examiner ce travail à la lumière de son expérience.

Cette thèse n'aurait pas pu se réaliser sans la confiance de Jean-Louis Billoët, directeur de l'INSA de Rouen, qui a assuré le financement de ce travail. Dans bien des contextes, il a su se révéler un interlocuteur attentif. Je lui en suis particulièrement reconnaissant. Merci également à Élie Rivolaen et Matthieu Tourbier. L'accueil que j'ai pu recevoir dans leur département a permis de rendre mes premières expériences d'enseignement particulièrement agréables.

Ce travail au long cours a également pu voir le jour grâce au soutien quotidien de mon entourage, tant professionnel que dans ma vie privée. Merci à Danielle, secrétaire assidue, toujours disponible et à l'écoute. Merci à tout le personnel du laboratoire et de l'INSA, aux doctorants, aux chercheurs, aux stagiaires. Leur bonne humeur a été un grand soutien. Merci également à tous les enseignants et tous les chercheurs que j'ai pu rencontrer jusqu'ici pour la générosité avec laquelle ils ont partagé leurs connaissances.

Merci à tous mes amis. Ceux que je connais depuis toujours et ceux que j'ai rencontrés plus récemment. Que d'aventures déjà passées ensemble... Il y en aura beaucoup d'autres et j'espère avoir le privilège de toujours avoir de tels compagnons à mes côtés.

Enfin, je souhaite remercier ma famille. Pour m'avoir transmis cette soif de découverte et m'offrir les conditions pour l'atténuer, je tiens à les assurer de ma plus profonde reconnaissance. Et merci à Ariane, avec qui j'ai le bonheur de partager mon quotidien, et qui me donne le courage de toujours avoir des projets.



# Résumé

La prise en compte des incertitudes est devenue un enjeu majeur en ingénierie. En effet, afin de maintenir une activité compétitive, l'industrie doit être capable de maîtriser parfaitement les processus de conception afin d'identifier des éléments susceptibles de générer des économies. Ces opérations conduisent le plus souvent à réduire l'ensemble des environnements pour lesquelles le produit reste fonctionnel. Ne pas prendre en compte les incertitudes en présence peut ainsi conduire à des dysfonctionnements futurs. Dans cette thèse, deux stratégies visant à étudier l'influence des aléas sont présentées.

Après une première présentation des outils de modélisation des incertitudes, la question de leur quantification est abordée. Deux problèmes particuliers seront l'occasion de développer une nouvelle méthodologie : la caractérisation de la dispersion affectant la solution d'un problème d'optimisation comportant des paramètres aléatoires et le calcul des valeurs propres généralisées de matrices aux coefficients aléatoires. Les méthodes usuelles de représentation des variables aléatoires sur une famille totale dans un Hilbert sont alors présentées. De nouvelles méthodes, adaptées à chacun des problèmes, sont introduites afin de calculer les coefficients de ces développements. Ces stratégies sont basées sur l'adaptation au cadre stochastique de méthodes déterministes adaptées à chaque problème : ici, les méthodes de Newton et de la puissance itérée. Ces différentes techniques sont évaluées sur plusieurs exemples.

L'étude de la propagation des incertitudes permet leur intégration dans la phase de conception. Les outils de l'optimisation fiabiliste permettent alors de trouver un compromis entre un coût minimum et une fiabilité accrue. L'emploi de ces méthodes est toutefois coûteux en temps de calcul. Pour pallier cet inconvénient, nous proposons une stratégie permettant de déterminer une solution approchée du problème. Cette configuration est fiable et proche de l'optimum. En fonction des contraintes en temps de calcul ou de précision, l'utilisation de différentes mesures de fiabilité, basées soit sur des approximations soit sur des évaluations statistiques, est possible.



# Abstract

Taking uncertainties into account has become a major issue in current engineering. Indeed, in order to maintain a competitive activity, industry has to develop a perfect command of design process, thus making it possible to generate substantial savings. Unfortunately, these operations are often synonymous with a reduction of safety margins. Then, omission of uncertainties during design phases can lead to future malfunctionings. In this work, we aim at studying influence of the impact of uncertainties on structures through two strategies.

After an introduction about the different techniques to model uncertainties, the question of quantifying the latter is addressed. Focusing on two particular issues will make it possible to develop a new methodology on that purpose. First, we will tackle the issue of characterizing dispersion affecting the solution of an optimization problem whose objective or constraints are random. Afterwards, we will deal with computation of random matrices eigenelements. For both cases, we present standard scheme to represent random variables spanning suitable Hilbert spaces. Coefficients of these developments are hence derived thanks to adapted methods introduced on purpose. Corresponding strategies are based on transposing standard deterministic numerical schemes into stochastic framework. Efficiency and accuracy of these techniques are assessed on different examples.

Analyzing uncertainties propagation makes it possible to take them into account during design steps. Tools provided by reliability-based optimization turn out to be useful to reach a balance between a lowest cost and a satisfying reliability. However, use of such approaches can lead to prohibitive computational effort. To overcome this difficulty, a new strategy is proposed to derive an approximated solution of the problem. The computed configuration has hence to be reliable and close to optimal. Depending on requirements on computational time or accuracy, it is shown that several measurements of reliability can be used.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte . . . . .	1
1.2	Problématique et objectifs du travail . . . . .	2
1.3	Organisation du mémoire . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Traitement des incertitudes en optimisation</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	6
2.2	Sources d'incertitudes, modélisation et probabilités . . . . .	6
2.2.1	Nature et sources des incertitudes . . . . .	6
2.2.2	Modélisation de données incertaines . . . . .	7
2.2.3	Théorie des probabilités . . . . .	8
2.2.3.1	Variables et vecteurs aléatoires . . . . .	8
2.2.3.2	Modélisation d'une variable aléatoire par un jugement d'expert . . . . .	9
2.2.3.3	Modélisation d'une variable aléatoire par un échantillon . . . . .	11
2.2.4	Réponse d'un modèle stochastique . . . . .	11
2.2.4.1	Propagation des incertitudes . . . . .	12
2.2.4.2	Analyse de sensibilité . . . . .	13
2.3	Optimisation . . . . .	15
2.3.1	Définition du problème d'optimisation . . . . .	15
2.3.2	Quelques propriétés des problèmes d'optimisation . . . . .	16
2.3.3	Méthodes de résolution . . . . .	18
2.3.3.1	Méthodes locales . . . . .	18
2.3.3.2	Méthodes globales . . . . .	19
2.4	Incertaines en optimisation . . . . .	21
2.4.1	Optimisation robuste . . . . .	21
2.4.2	Programmation stochastique . . . . .	22
2.4.3	Optimisation fiabiliste . . . . .	23
2.4.4	Quantification des incertitudes en optimisation et dans l'identification . . . . .	23
2.5	Conclusion . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Quantification des incertitudes par des approches probabilistes</b>	<b>27</b>
3.1	Quantification des incertitudes par des approches probabilistes . . . . .	28
3.2	Représentation et approximation d'une variable aléatoire . . . . .	30
3.2.1	Représentation d'une variable aléatoire . . . . .	31
3.2.2	Choix de la famille d'approximation . . . . .	31
3.2.3	Calcul des coefficients . . . . .	32
3.3	Dispersion et incertitudes en optimisation . . . . .	35

3.3.1	Présentation du problème . . . . .	35
3.3.2	Représentation et approximation de l'optimum . . . . .	36
3.3.3	Approches intrusives . . . . .	37
3.3.3.1	Méthode de Galerkin : projection des conditions d'optimalité du premier ordre . . . . .	37
3.3.3.2	Un schéma de Newton stochastique . . . . .	41
3.3.4	Utilisation de méthodes non-intrusives . . . . .	48
3.3.4.1	Ajustement des moments . . . . .	48
3.3.4.2	Les méthodes à base de régression . . . . .	50
3.3.5	Exemples numériques . . . . .	53
3.3.5.1	Exemple 1 : problème d'optimisation quadratique . . . . .	53
3.3.5.2	Exemple 2 : identification du module d'Young d'une poutre en flexion . . . . .	57
3.3.5.3	Exemple 3 : calcul de valeurs propres . . . . .	59
3.3.6	Conclusion . . . . .	63
3.4	Valeurs propres d'une matrice à coefficients aléatoires . . . . .	65
3.4.1	Formalisation du problème . . . . .	66
3.4.2	Une méthode de Galerkin pour les problèmes aux valeurs propres généralisées . . . . .	66
3.4.3	Puissance itérée pour une matrice aux coefficients aléatoires . . . . .	68
3.4.4	Exemples numériques . . . . .	71
3.4.4.1	Un système masses-ressorts à deux degrés de liberté avec une raideur aléatoire . . . . .	71
3.4.4.2	Un système masses-ressorts à deux degrés de liberté avec des raideurs et des masses aléatoires . . . . .	75
3.4.4.3	Vibration d'une barre de module d'Young et de masse volumique aléatoires . . . . .	78
3.4.5	Conclusion . . . . .	80
3.5	Conclusion . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Optimisation fiabiliste</b> . . . . .	<b>85</b>
4.1	Analyse de fiabilité des structures . . . . .	87
4.1.1	Probabilité de défaillance et espace normalisé . . . . .	87
4.1.2	Analyse de fiabilité par des méthodes d'approximation . . . . .	91
4.1.3	Analyse de fiabilité par une méthode de simulation . . . . .	95
4.1.4	Utilisation des métamodèles dans l'analyse de fiabilité . . . . .	97
4.1.5	Fiabilité des systèmes . . . . .	98
4.1.6	Fiabilité dépendant du temps . . . . .	99
4.2	Optimisation fiabiliste . . . . .	101
4.2.1	Formalisation du problème de l'optimisation fiabiliste . . . . .	101
4.2.2	Résolution numérique du problème d'optimisation fiabiliste . . . . .	102
4.2.2.1	Utilisation des méthodes de simulations dans l'opti- misation fiabiliste . . . . .	102

---

4.2.2.2	Reformulation du problème de l'optimisation fiabiliste avec l'approximation FORM . . . . .	105
4.3	Une méthode itérative approchée de projection sur des ensembles critiques . . . . .	108
4.3.1	Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par indice de fiabilité . . . . .	109
4.3.2	Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par probabilité de défaillance . . . . .	112
4.3.2.1	Mise en évidence des limitations de l'approximation FORM . . . . .	112
4.3.2.2	Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par probabilité de défaillance . . . . .	114
4.4	Applications numériques . . . . .	117
4.4.1	Optimisation fiabiliste : résolution d'un problème mathématique	117
4.4.2	Optimisation fiabiliste d'un poteau . . . . .	121
4.4.3	Optimisation fiabiliste d'une équerre sous des contraintes dynamiques . . . . .	123
4.4.4	Optimisation fiabiliste d'une poutre en béton armé . . . . .	125
4.5	Conclusion . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>133</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>
<b>A</b>	<b>La méthode SORA</b>	<b>163</b>
A.1	L'approche par mesure de performance . . . . .	163
A.2	L'algorithme SORA . . . . .	163
<b>B</b>	<b>Un algorithme d'optimisation déterministe : SQP</b>	<b>165</b>



# Introduction générale

---

## 1.1 Contexte

Un modèle mathématique est une représentation abstraite, et souvent partielle, de la réalité. Depuis les premières utilisations de ces images, dans le courant du XVII<sup>ème</sup> siècle, les formalismes ont largement évolués. Ceux-ci ont permis aux scientifiques de mieux comprendre notre environnement. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, des enjeux économiques liés au fort développement industriel ont conduit les ingénieurs à s'approprier ces méthodes afin d'améliorer leurs pratiques de façon plus systématique. L'essor de l'informatique a finalement donné lieu à la mise en place de nombreuses techniques permettant de trouver des solutions numériques aux équations représentant les lois de la nature. Aujourd'hui, la combinaison de ces différents facteurs permet aux concepteurs d'imaginer des produits dont ils connaissent *a priori* le comportement.

En dépit de leur sophistication, ces modèles ne peuvent pas reproduire parfaitement la réalité. D'une part, la représentation d'un phénomène naturel passe souvent par l'omission de certains facteurs considérés comme négligeables. D'autre part, un modèle fait la plupart du temps intervenir un certain nombre de paramètres qu'il est nécessaire d'ajuster. Toutefois, il est souvent difficile de calibrer ces grandeurs. Certains facteurs évoluant avec le temps, leur valeur exacte est inconnue au moment de la conception. C'est par exemple le cas de la sollicitation produite par le vent sur un pont ou de l'altération d'un matériau par un processus de dégradation. Par ailleurs, de nombreux paramètres d'un modèle sont ajustés de sorte à rapprocher les prédictions théoriques de mesures des phénomènes physiques. ces observations sont souvent biaisées par la précision finie des dispositifs expérimentaux. En particulier, dans le cadre de l'élasticité linéaire, les propriétés d'un matériau, telles que sa masse volumique ou son module d'Young, ne seront en règle générale connues que de manière approximative.

La prise en compte de ces incertitudes est donc devenue un enjeu majeur en ingénierie. En effet, afin de maintenir une activité compétitive, les industriels doivent être capables de maîtriser parfaitement les processus de conception afin d'identifier des éléments susceptibles de générer des économies. Ces opérations conduisent alors le plus souvent à réduire l'ensemble des environnements et des états pour lesquels le produit reste fonctionnel. Ne pas prendre en compte les incertitudes en présence lors de la conception peut ainsi conduire à des dysfonctionnements futurs.

## 1.2 Problématique et objectifs du travail

Deux enjeux fondamentaux se posent alors. D'un côté, il est nécessaire de déterminer la façon dont les incertitudes vont affecter les prédictions d'un modèle. D'un autre côté, des méthodes doivent être proposées afin d'intégrer cette variabilité dans le processus de conception.

La première étape de propagation des incertitudes est en effet nécessaire pour appréhender l'ensemble des issues possibles d'un phénomène. Cette phase aura également pour but de quantifier les fréquences d'apparition des différentes réalisations. Dans le cadre de ce manuscrit, deux situations fréquemment rencontrées en conception concentreront particulièrement notre attention.

Tout d'abord, nous nous intéresserons à l'étude de la **dispersion de la solution d'un problème d'optimisation** lorsque des paramètres aléatoires perturbent l'objectif ou les contraintes. Ce travail se situe donc dans la continuité des analyses développées dans le cadre sans contrainte par Holdorf Lopez [Holdorf Lopez 2010]. L'optimisation a pour but d'identifier, dans un ensemble de configurations admissibles, celle qui minimise un coût prédéfini. Il s'agit donc d'un outil précieux, tant pour planifier une production que pour dimensionner des structures mécaniques ou déterminer un contrôle optimal. Or, il n'est pas rare que le coût ou certaines contraintes s'exerçant sur les variables ne soient pas parfaitement déterminés. L'analyse de l'impact des variations de ces paramètres sur l'optimum fournira donc des informations utiles pour en évaluer la qualité.

Dans un deuxième temps, nous nous focaliserons sur le **calcul des valeurs propres généralisées de matrices aux coefficients aléatoires**. Les problèmes aux valeurs propres généralisées apparaissent fréquemment lors de la conception de structures. Ils permettent, par exemple, l'étude des propriétés dynamiques d'un système modélisé par éléments finis. Or, la variabilité des propriétés des matériaux ou de la géométrie a tendance à modifier les matrices de masse et de raideur. Ces perturbations sont alors répercutées sur les éléments propres et sur le comportement de la structure. La caractérisation de la dispersion des modes propres due aux incertitudes passe donc par l'étude des valeurs propres des matrices aléatoires.

Les analyses précédentes ne constituent qu'une première étape dans la prise en compte des incertitudes. En effet, une fois l'influence des aléas quantifiée, il est nécessaire de mettre en place des outils permettant d'intégrer la variabilité dans le processus de conception. Dans ce contexte, les techniques de l'optimisation vont se révéler efficaces pour proposer des configurations de coût minimum. Toutefois, cette réduction des coûts passe le plus souvent par une diminution des marges de sécurité. Une légère altération des conditions de fabrication ou de fonctionnement peut alors conduire rapidement à la ruine du système. La définition de contraintes incorporant les incertitudes permet de gérer les effets antagonistes de l'optimisation et des variations. Ces méthodes d'**optimisation fiabiliste** possèdent néanmoins un coût élevé en terme de temps de calcul. Nous chercherons donc un algorithme plus efficace permettant de déterminer des conceptions fiables de faible coût.

## 1.3 Organisation du mémoire

Dans le cadre de la conception, le traitement des incertitudes et les outils de l'optimisation sont donc voués à être utilisés ensemble. Ainsi, dans un premier chapitre, nous rappellerons les éléments de base de la modélisation des incertitudes et de l'optimisation. Cette première partie sera également l'occasion de faire le point sur les différentes approches permettant de coupler les deux problématiques.

Le second chapitre est consacré à la quantification des incertitudes. Nous ferons dans un premier temps le bilan des principales méthodes utilisées à cet effet. Cet état de l'art présenté, nous pourrions nous attacher à l'étude de deux problèmes particuliers : l'analyse de la dispersion de la solution d'un problème d'optimisation comprenant des paramètres incertains et le calcul des solutions d'un problème aux valeurs propres généralisées de matrices aléatoires. Nous tâcherons de présenter plusieurs alternatives permettant de résoudre chacun des problèmes. Deux classes d'algorithmes seront notamment présentées : les méthodes intrusives et les méthodes non-intrusives. Pour les premières, une démarche originale permettant l'adaptation de méthodes déterministes au cadre stochastique permettra de compléter les traditionnelles méthodes de Galerkin. Les approches non-intrusives, basées sur l'analyse d'échantillons déterministes, sont généralement une alternative aux méthodes précédentes. Après une présentation de ces techniques, nous proposons une stratégie permettant la mise en place de schémas hybrides visant à cumuler les avantages des deux approches. Enfin, l'étude de différents problèmes nous permettra d'évaluer la pertinence des méthodes présentées.

Enfin, un dernier chapitre est consacré à l'étude des problèmes d'optimisation fiable. Pour identifier les actuelles limitations, nous présenterons un état de l'art des méthodes d'analyse de fiabilité et de leur couplage avec des algorithmes d'optimisation. Nous nous attacherons alors à la production d'une famille de méthodes permettant de déterminer efficacement une approximation fiable de la solution. Cette nouvelle stratégie est basée sur une séquence de projections sur des nouveaux espaces linéarisés jugés fiables. Afin de s'affranchir des limitations des approches fiables standards basées sur des approximations, nous proposons un nouveau schéma intégrant une mesure de fiabilité par des techniques de simulation. La qualité de chacune de ces stratégies en terme de précision et de temps de calcul est finalement évaluée sur des exemples issus de problèmes d'ingénierie.

Une conclusion permettra enfin de faire le bilan des travaux effectués et d'en dégager des perspectives.





# Traitement des incertitudes en optimisation

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2.2</b>	<b>Sources d'incertitudes, modélisation et probabilités</b>	<b>6</b>
2.2.1	Nature et sources des incertitudes	6
2.2.2	Modélisation de données incertaines	7
2.2.3	Théorie des probabilités	8
2.2.4	Réponse d'un modèle stochastique	11
<b>2.3</b>	<b>Optimisation</b>	<b>15</b>
2.3.1	Définition du problème d'optimisation	15
2.3.2	Quelques propriétés des problèmes d'optimisation	16
2.3.3	Méthodes de résolution	18
<b>2.4</b>	<b>Incertitudes en optimisation</b>	<b>21</b>
2.4.1	Optimisation robuste	21
2.4.2	Programmation stochastique	22
2.4.3	Optimisation fiabiliste	23
2.4.4	Quantification des incertitudes en optimisation et dans l'identification	23
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>

---

## 2.1 Introduction

L'optimisation est généralement une opération de réduction d'une quantité définie. Ce processus prend place naturellement dans notre environnement et dans nos activités. Par exemple, beaucoup de systèmes naturels évoluent de sorte à minimiser leur énergie potentielle. La modélisation de ces phénomènes repose alors grandement sur notre capacité à reproduire artificiellement ces procédés. En parallèle, des problèmes d'optimisation ont rapidement émergé des activités humaines. En effet, il n'est pas rare de voir un investisseur chercher à maximiser ses profits ou des ingénieurs à rendre optimales les performances d'un système.

En pratique, ces opérations impliquent souvent des paramètres dont les valeurs ne sont pas parfaitement connues. Dans des situations où le niveau d'information semble néanmoins suffisant, Wets précise qu'il est possible de considérer ces variables comme des quantités déterministes fixées [Wets 1989]. L'auteur indique que les mêmes hypothèses peuvent être raisonnablement faites lorsque l'influence des variables sur le résultat est négligeable. Toutefois, dans de nombreuses situations, ces conditions ne sont pas satisfaites et la prise en compte des incertitudes se révèle nécessaire. Négliger la variabilité des paramètres du modèle pourrait en effet conduire à des résultats dont l'interprétation serait fallacieuse.

Les travaux présentés dans cette thèse traitent donc de la prise en compte des incertitudes dans des problèmes d'optimisation. Nous présentons dans ce chapitre les principaux éléments relatifs à chacune des théories. Dans un premier temps, les principaux éléments de la théorie des probabilités sont rappelés. Une attention toute particulière est apportée aux techniques permettant de modéliser une grandeur aléatoire par une variable de distribution connue. Ensuite, nous poserons les principales définitions liées aux problèmes d'optimisation et les théorèmes majeurs qui s'y réfèrent. Ces propriétés permettront d'identifier les principales classes d'algorithmes de résolution. Ces notions présentées, nous introduirons finalement les différentes approches adoptées pour concilier les deux objectifs de manière sommaire.

## 2.2 Sources d'incertitudes, modélisation et probabilités

### 2.2.1 Nature et sources des incertitudes

L'incertitude d'un événement présent ou à venir est souvent décrite comme l'incapacité à prédire précisément son issue. Sous un aspect universel, cette proposition cache en fait deux réalités bien différentes. Un événement peut être incertain car il possède une variabilité naturelle qu'il n'est pas possible d'éliminer. Il est alors courant de parler d'**incertitude aléatoire**. L'incertitude sur le résultat d'un jet de dés peut, par exemple, être qualifiée d'aléatoire. Inversement, lorsque l'incertitude est liée à un manque de connaissance réductible sur l'issue de l'événement, nous pourrions parler d'**incertitude épistémique**. Ainsi, la précision de la prédiction dépendra de la quantité d'information disponible et du degré d'expertise de l'ob-

servateur. Ces incertitudes correspondent souvent aux erreurs commises par des instruments de mesure, des procédés de fabrication ou des données limitées.

Toutefois, Sudret souligne que chacun de ces types d'incertitude peut être présent dans un même système [Sudret 2007]. En règle générale, il est donc difficile de distinguer précisément les contributions de l'une ou l'autre des catégories. Ainsi, dans la suite de ce mémoire, aucun distinguo ne sera fait entre ces deux classes.

Dans le contexte de l'optimisation, Holdorf rappelle les sources d'incertitudes identifiées dans le cadre du projet "Optimisation Multi-Disciplinaire" de l'Agence Nationale de la Recherche [Holdorf Lopez 2010] :

1. les incertitudes de *modèle* ;
2. les incertitudes sur les *paramètres du modèle* ;
3. les incertitudes *numériques* ;
4. les incertitudes sur la *globalité des solutions*.

Les incertitudes du modèle portent autant sur le modèle physique, qui fournit une représentation de la réalité, que sur les méthodes utilisées pour le traiter numériquement. Les dernières sources d'incertitudes, quant à elles, sont spécifiques à l'étude des problèmes d'optimisation. Elles sont liées à l'absence d'information sur les fonctions à optimiser qui pourraient permettre de conclure qu'un optimum est global.

Dans cette thèse, seules les incertitudes sur les paramètres du modèle seront prises en compte. La modélisation de ces aléas est alors un prérequis pour mener à bien des études plus complexes.

### 2.2.2 Modélisation de données incertaines

Afin de pouvoir étudier rigoureusement les incertitudes et leurs impacts, il est nécessaire de leur donner un formalisme précis permettant d'effectuer des calculs. Plusieurs paradigmes peuvent alors être utilisés pour représenter ces variabilités.

La prise en compte d'erreurs de mesure a rapidement poussé les ingénieurs à prendre en compte les incertitudes de mesure à l'aide d'intervalles. Le développement des arithmétiques d'intervalle dans les années 60 a permis de généraliser ces techniques et d'étudier la propagation des incertitudes dans des modèles [Moore 1967]. Cette approche est efficace lorsque seul l'intervalle où fluctuent les paramètres est connu. Toutefois, aucune hypothèse ne peut être faite sur la répartition des valeurs au sein de l'intervalle. L'apparition de la logique floue a permis de résoudre partiellement ce problème en introduisant des fonctions d'appartenance traduisant le degré d'appartenance à un ensemble [Zadeh 1965].

Dans les cas où une notion de distribution statistique est disponible, la théorie des probabilités offre un outil approprié pour la modélisation des paramètres incertains. Dans cette approche, ces quantités sont modélisées par des variables, des processus ou des champs aléatoires. L'utilisation de la théorie des

évidences peut également être vue comme une extension de l'usage des probabilités [Dempster 1968]. Dans cette théorie, les auteurs introduisent des fonctions de croyances et de plausibilité qui encadrent la probabilité d'un événement. La définition de ces fonctions permet notamment de prendre en compte des prédictions contradictoires d'experts différents.

Dans ce travail, nous prenons le parti d'utiliser la théorie des probabilités. Celle-ci bénéficie en effet d'un cadre théorique riche permettant une étude précise de l'impact de la variabilité des paramètres.

## 2.2.3 Théorie des probabilités

### 2.2.3.1 Variables et vecteurs aléatoires

La modélisation des données incertaines par la théorie des probabilités repose fortement sur la notion de *variable aléatoire* [Saporta 2006]. Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Une variable aléatoire  $Y$  est une fonction  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -mesurable de  $\Omega$  dans l'espace des états  $E$ . Cette définition permet d'introduire la distribution de probabilité  $\mathbb{P}_Y$  pour la variable aléatoire  $Y$  :

$$\mathbb{P}_Y(\Gamma) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\Gamma)), \quad \forall \Gamma \subset E \quad (2.1)$$

où  $Y^{-1}(\Gamma)$  est l'image réciproque de  $\Gamma$  par  $Y$ . L'image par  $Y$  d'un  $\omega \in \Omega$  donné est noté  $y(\omega)$ . C'est une réalisation de la variable aléatoire  $Y$ . Ainsi, dans la suite de ce travail, les lettres majuscules feront en général référence à des variables aléatoires et les minuscules à une de leur réalisation. De même, afin de simplifier les notations, nous noterons dans la suite  $y$  à la place de  $y(\omega)$ .

Lorsque l'espace d'état  $E \subset \mathbb{R}$ , la variable aléatoire  $Y$  est dite réelle. La fonction de répartition de  $Y$  est l'application  $F_Y : E \rightarrow [0; 1]$  définie par

$$F_Y(x) = \mathbb{P}_Y([-\infty; x]) \quad (2.2)$$

Cette fonction porte l'ensemble de l'information disponible sur la variable aléatoire. Lorsque  $F_Y$  est dérivable, on peut en déduire la densité de probabilité  $f_Y$

$$f_Y(x) = \frac{dF_Y(x)}{dx} \quad (2.3)$$

Cette fonction permet notamment le calcul des moments statistiques :

$$\text{Espérance} = m_Y = \mathbb{E}[Y] = \int_E x f_Y(x) dx \quad (2.4)$$

$$\text{Variance} = s_Y^2 = \mathbb{E}[(Y - m_Y)^2] = \int_E (x - m_Y)^2 f_Y(x) dx \quad (2.5)$$

$$\text{Moment d'ordre } r = M_r[Y] = \mathbb{E}[(Y)^r] = \int_E x^r f_Y(x) dx \quad (2.6)$$

$$\text{Asymétrie} = \mathbb{E}[(Y - m_Y)^3] / M_3[Y] \quad (2.7)$$

$$\text{Aplatissement, ou kurtosis} = \mathbb{E}[(Y - m_Y)^4]/M_4[Y] \quad (2.8)$$

Le coefficient de variations  $cv_Y = \sqrt{s_Y^2}/m_Y$  fournit alors une information pertinente sur la variabilité de  $Y$ .

Les notions précédentes s'étendent au cas des vecteurs aléatoires. Un vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  de dimension  $n$  est une application  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow E \subset \mathbb{R}^n$ . Les composantes de  $\mathbf{Y}$  sont des variables aléatoires :

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t \quad (2.9)$$

La densité de probabilité jointe est notée  $f_{\mathbf{Y}}$  et vérifie :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}[\Gamma] = \int_{\Gamma} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

Cette densité de probabilité jointe contient toutes les informations sur le vecteur aléatoire. On en déduit la densité de probabilité marginale de la composante  $Y_k$  de  $\mathbf{Y}$  :

$$f_{Y_k}(y_k) = \int_{E_{\tilde{\mathbf{Y}}_k}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\tilde{\mathbf{y}}_k \quad (2.11)$$

où  $d\tilde{\mathbf{y}}_k = dy_1 \dots dy_{k-1} dy_{k+1} \dots dy_n$  et  $E_{\tilde{\mathbf{Y}}_k}$  est le sous-ensemble de l'espace d'état où la  $k$ -ième composante est fixée  $E_{\tilde{\mathbf{Y}}_k} = \{\mathbf{y} \in E : y_k \text{ fixé}\}$ . La densité jointe  $f_{Y_k Y_l}$  entre deux composantes  $Y_k$  et  $Y_l$  est définie de manière analogue :

$$f_{Y_k Y_l}(y_k, y_l) = \int_{E_{\tilde{\mathbf{Y}}_{kl}}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\tilde{\mathbf{y}}_{kl} \quad (2.12)$$

Nous pouvons également noter que la densité jointe de vecteurs indépendants est le produit tensoriel des densités. Par ailleurs, l'espérance de  $\mathbf{Y}$  est le vecteur  $\mathbf{m}_{\mathbf{Y}}$  contenant l'espérance de chacune des composantes.

La fonction de densité jointe portant toute l'information disponible sur un vecteur aléatoire, nous ferons l'hypothèse, dans la suite de ce travail, que cette fonction est connue pour tous les vecteurs aléatoires en entrée d'un problème. Cela revient à choisir une loi permettant la modélisation probabiliste de chacun de ces paramètres. Dans les deux sections suivantes, nous présenterons donc quelques procédures permettant de faire un tel choix.

### 2.2.3.2 Modélisation d'une variable aléatoire par un jugement d'expert

L'attribution d'une loi de probabilité à un paramètre considéré comme aléatoire est souvent difficile. En effet, en ingénierie, il n'est pas rare qu'un tel choix doive être fait en ne disposant que de peu d'information. Des connaissances subjectives supplémentaires permettent alors de compléter les données objectives. Le plus souvent, ces données additionnelles seront issues des connaissances d'un expert. Par exemple, des essais de mesure d'un module d'élasticité d'une éprouvette permettent d'étudier la dispersion statistique des propriétés de ce matériau. Ces observations pourront être complétées par l'hypothèse selon laquelle ce module doit être positif.

Une variable aléatoire pouvant prendre des valeurs négatives ne correspond donc pas à un bon modèle.

Le principe du *maximum d'entropie*, introduit par Shannon dans le cadre de la théorie de la communication, se révèle alors être un outil puissant pour choisir un modèle [Shannon 1948]. Ce principe permet de déterminer une variable aléatoire prenant en compte toute la connaissance subjective sans faire d'hypothèse supplémentaire [Jaynes 1957]. La densité de probabilité inconnue  $f_Y$  doit alors maximiser l'entropie de Shannon :

$$ES(f_Y) = - \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) \log f_Y(y) dy \quad (2.13)$$

sous des contraintes définies par les informations disponibles. Par exemple, si un jugement subjectif permet de fixer a priori l'espérance  $m_Y$  de  $Y$  la contrainte :

$$\int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy - m_Y = 0 \quad (2.14)$$

devra être satisfaite. D'autres contraintes, sur les moments d'ordres supérieures ou sur des bornes peuvent également être prises en compte. A ces contraintes, s'ajoute la restriction

$$\int_{\mathbb{R}} f_Y(y) dy - 1 = 0 \quad (2.15)$$

nécessaire afin que  $f_Y$  soit bien une densité de probabilité. La solution de ce problème de maximisation en dimension infinie sera donc la densité de probabilité satisfaisant l'ensemble des contraintes et contenant le moins d'information. Son choix n'est donc pas arbitraire.

A chaque ensemble de connaissances *a priori* correspondra donc une distribution. En appliquant cette méthodologie, Park propose entre autres les modélisations suivantes [Park 2009] :

1. Loi uniforme si la variable prend ses valeurs dans un domaine borné ;
2. Loi exponentielle si la plage de variation est semi-bornée d'espérance connue
3. Loi normale si la plage de variation est infinie et que l'espérance et la variance sont connus

Lorsque des informations additionnelles issues des statistiques sont également apportées, il est fréquent d'estimer par inférence bayésienne les paramètres de ces lois trouvées *a priori*.

La généralisation de cette approche au cas de matrices aléatoires a également été établie [Mehta 2004]. Ces techniques permettent de définir les lois de probabilités de chaque coefficient de la matrice lorsque seules des caractéristiques globales sont connues. Soize introduit par exemple une méthode de calcul de la distribution des coefficients d'une matrice aléatoire symétrique définie positive de moyenne donnée [Soize 2005a][Soize 2005b].

### 2.2.3.3 Modélisation d'une variable aléatoire par un échantillon

La méthodologie précédente présente l'avantage de ne pas requérir d'information statistique pour être opérationnelle. Toutefois, le problème de la modélisation d'un paramètre incertain dont on connaît un échantillon est également régulièrement rencontré en ingénierie. Les éléments de cet échantillon sont alors considérés comme des réalisations indépendantes de variables aléatoires de même loi. Il convient de retrouver cette distribution de probabilité inconnue.

Il est classique de classer les méthodes permettant de résoudre ce problème en deux catégories :

- les approches paramétriques, dans lesquels des hypothèses sont faites sur la loi de probabilité ;
- les approches non-paramétriques pour lesquelles aucune hypothèse sur les lois n'est nécessaire.

Ces deux approches et les techniques de calcul qui s'y réfèrent sont présentées dans les paragraphes suivants.

**Méthodes paramétriques** Dans le cadre des approches paramétriques, l'objectif de la modélisation sera de déterminer les paramètres  $\theta$  d'une famille de distribution  $f_Y(y, \theta)$  choisie au préalable. Pour calculer ces paramètres à partir de l'échantillon, Perrin identifie trois méthodes [Perrin 2008]. Tout d'abord, la *méthode des moments* consiste à ajuster les paramètres de sorte à faire correspondre les moments statistiques de l'échantillon aux moments de la distribution de  $Y$ .

La méthode du *maximum de vraisemblance* consiste à optimiser les paramètres pour maximiser la vraisemblance de l'échantillon [Saporta 2006]. Cette méthode revient à chercher la densité de  $Y$  telle que l'échantillon observé soit le plus probable.

Enfin, l'*estimation bayésienne* fournit un cadre élégant pour déterminer la valeur de ces paramètres en les traitant comme des variables aléatoires. En partant d'une loi de probabilité proposée par un expert, dite *a priori*, le théorème de Bayes permet de déduire une valeur corrigée *a posteriori* de la distribution en tenant compte de l'échantillon.

**Méthodes non-paramétriques** Les méthodes précédentes, bien qu'efficaces, dépendent fortement du choix de la famille de distributions paramétrées. Les approches non-paramétriques ont pour objectif de s'affranchir de ces hypothèses. Des estimateurs fonctionnels de la densité  $f_Y$  doivent être mis en place. Les méthodes les plus utilisées sont alors la construction d'histogramme ou la définition d'estimateur à noyau [Parzen 1962]. Cette dernière possède l'avantage de fournir une estimation de la densité plus lisse que celle obtenue avec un histogramme.

### 2.2.4 Réponse d'un modèle stochastique

Les méthodes d'ingénierie probabiliste consistent à intégrer la variabilité de paramètres incertains dans des études généralement déterministes. La prise en compte



de ces aléas entraîne alors une variabilité du système étudié qu'il s'agit d'examiner. Les paragraphes suivants présentent les différents points de vue qu'il est alors courant d'adopter pour étudier ces dispersions.

### 2.2.4.1 Propagation des incertitudes

Le sujet central de cette thèse est l'étude de l'impact de paramètres incertains dans des procédures d'optimisation. Toutefois, le problème de l'étude de la propagation des incertitudes peut se poser dans un contexte beaucoup plus général. Il a par exemple trouvé de nombreuses applications, entre autres, en mécanique [Sudret 2007], en chimie [Mathelin 2010] ou en électromagnétisme [Shen 2010].

Sudret propose d'écrire le modèle sous la forme d'une fonction  $\mathcal{M} : \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} = \mathcal{M}(\mathbf{y})$  [Sudret 2007]. Cette fonction, souvent trop compliquée pour être exprimée sous forme analytique, associe donc un ensemble d'observations à un ensemble de paramètres d'entrée. Dans le cadre de l'optimisation, cette fonction est jouée par l'algorithme d'optimisation, qui, pour un problème défini par des coûts et des contraintes donnés, associe la solution optimale.

Si le vecteur des paramètres  $\mathbf{Y}$  est un vecteur aléatoire, alors le vecteur des observations  $\mathbf{X}$  devient également aléatoire. La complexité de la fonction  $\mathcal{M}$  rend difficile l'expression de ce vecteur sous forme analytique. Les méthodes de l'ingénierie probabiliste visent à fournir malgré tout un cadre à son étude. Sudret identifie notamment trois catégories de méthodes, définies à partir de l'information statistique à calculer (figure 2.1).

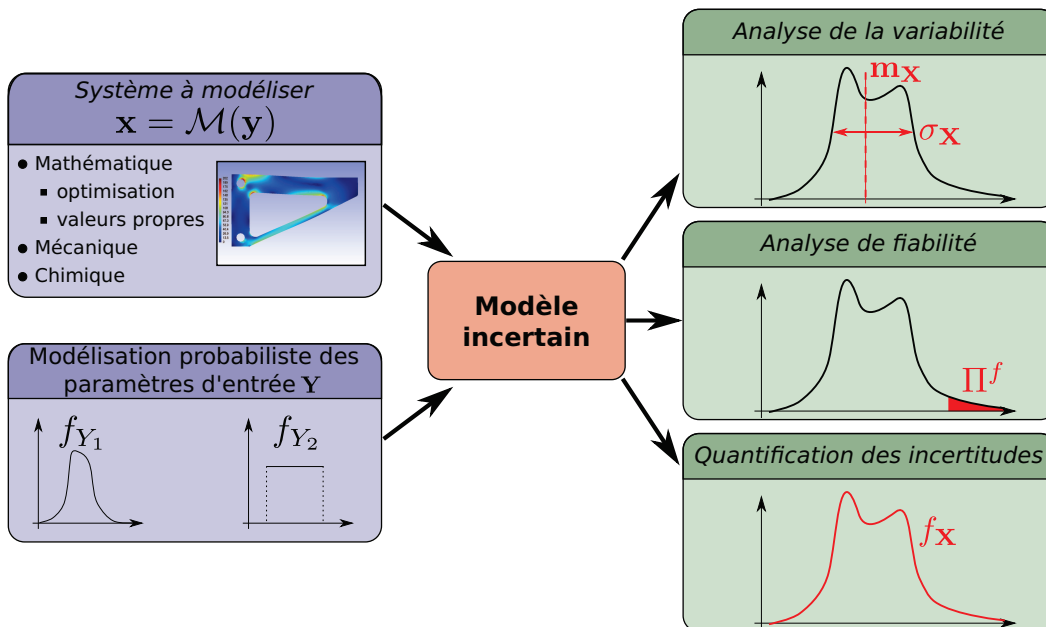


FIG. 2.1 – Méthodes d'étude de la propagation des incertitudes [Sudret 2007]

**Analyse de la variabilité** Les méthodes d'analyse de la variabilité ont pour objectif de déterminer les moments de la réponse. Elles apportent surtout des informations sur le comportement global du système. Les estimateurs classiques des statistiques inférentielles permettent de déterminer ces quantités à l'aide de schéma de Monte Carlo [Saporta 2006]. De nombreuses méthodes reposent également sur le développement de Taylor de  $M$  au voisinage des valeurs moyennes des paramètres. Une relation entre la variabilité des paramètres d'entrée et celle du modèle est alors construite. Cette approche a été couramment utilisée pour l'étude de système mécanique stochastique [Liu 1988]. Dans le cadre de l'optimisation de problème avec des paramètres aléatoires, Guest a appliqué un raisonnement analogue afin réduire la variance de l'optimum [Guest 2008]. Enfin, certains auteurs préconisent le calcul des moments de la réponse par intégration numérique.

**Approches fiabilistes** Les approches fiabilistes visent au contraire à quantifier précisément la distribution de la queue de probabilité. Dans ce cadre, les phénomènes considérés correspondent à des situations extrêmes. Ces événements étant rares par définition, l'emploi des méthodes de simulation traditionnelles ne sera pas adapté. Une telle étude requiert donc d'utiliser de méthodes spécifiques présentées dans le chapitre 4.

**Quantification des incertitudes** La recherche de la distribution de probabilité entière est le plus souvent appelée quantification des incertitudes. Cette étude est la plus complète car elle permet, en théorie, de calculer aussi bien les moments que les queues de distribution. Dans le chapitre 3, des techniques de quantification des incertitudes dans le cadre de la résolution de problèmes d'optimisation aux paramètres incertains seront présentées. Ces méthodes seront également étendues au problème de l'analyse de stabilité.

#### 2.2.4.2 Analyse de sensibilité

Dans les paragraphes précédents, nous avons mis en évidence le lien entre la variabilité des paramètres en entrée du problème et celle de la réponse du modèle. Toutefois, la modélisation complète d'un phénomène complexe implique souvent l'emploi d'un grand nombre de paramètres aléatoires. L'étude de l'influence relative de chacun des paramètres sur la solution peut alors permettre de réduire le nombre de variables à prendre en compte en ne gardant que les plus significatifs. Cet examen est souvent appelé *analyse de sensibilité*. Cette sensibilité peut être estimée au niveau local ou au niveau global.

**Analyse de sensibilité locale** L'analyse de sensibilité locale s'intéresse à l'impact sur la réponse du modèle des variations des paramètres autour d'une valeur nominale. La plupart de ces méthodes reposent alors sur le calcul des gradients des observations par rapport aux paramètres incertains [Homma 1996]. Dans [Sudret 2007], l'auteur précise que ces quantités peuvent souvent être déduites directement des résultats d'une étude préalable de la propagation des incertitudes. Ditlevsen propose par exemple une mesure directe de la sensibilité après une analyse

de fiabilité [Ditlevsen 2005]. Madsen en déduit également un facteur de sensibilité d'omission exprimant l'erreur commise en remplaçant un paramètre variable par une valeur fixe [Madsen 1988].

**Analyse de sensibilité globale** Inversement, les méthodes globales cherchent à quantifier l'influence des paramètres en entrée en tenant compte de l'ensemble de leur domaine de variation. Plus que la dépendance du modèle aux paramètres, c'est bien l'incertitude sur la réponse générée par la variabilité des entrées qui est alors mesurée. Deux catégories de techniques sont souvent présentées [Saltelli 2004]. D'une part, les méthodes basées sur des principe de régression. Elles consistent à construire un modèle linéaire de la réponse par régression sur les paramètres incertains [Homma 1996]. Les coefficients de Pearson du modèle permettent de mesurer les corrélations. Toutefois, cette méthode ne prend pas bien en compte les non-linéarité du modèle  $\mathcal{M}$ . Pour pallier ce problème, des techniques basées sur l'analyse de la variance offrent une alternative attrayante. Ces méthodes ont pour objectif de calculer la part de variance de la réponse expliquée par chaque variable en entrée. La proportion de la variance totale ainsi justifiée est souvent appelé indice de Sobol du premier ordre [Sobol 2001]. Les indices de Sobol d'ordre supérieur sont obtenus en tenant compte des interactions entre les variables. Ces indices constituent de très bons indicateurs mais leur évaluation, le plus souvent par des méthodes de Monte-Carlo, est coûteuse.

## 2.3 Optimisation

L'étude de la propagation des incertitudes dans les procédures d'optimisation suit le schéma général décrit sur la figure 2.1. En parallèle de la modélisation probabiliste des paramètres incertains, la première étape de ce processus correspond donc à la définition du problème déterministe à étudier. Nous proposons dans cette section une présentation de ces problèmes d'optimisation et des principaux algorithmes de résolution qui s'y réfèrent. Une introduction plus complète concernant ces problèmes pourra être trouvée dans le livre de Nocedal et Wright [Nocedal 2000].

### 2.3.1 Définition du problème d'optimisation

L'optimisation d'un système est la recherche d'une configuration meilleure que les autres. La recherche de cet optimum passe par une première étape de modélisation qui consiste à exprimer le problème en des termes mathématiques. Trois éléments doivent alors être recherchés :

- les *variables de conception* : ce sont les paramètres du système sur lesquels le concepteur peut agir afin de rechercher la performance optimale. Dans le cadre de ce travail, nous considérons un nombre fini  $I$  de variables représentées par un vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_I)^t$  de  $\mathbb{R}^I$ .
- la *fonction objectif* permet de classer les performances des différentes configurations les unes par rapport aux autres. Il s'agit le plus souvent d'une fonction des variables de conception  $f : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- l'*espace de conception*  $S$  auquel le vecteur des paramètres de conception doit appartenir. En effet, des restrictions sur les variables peuvent être imposées, limitant ainsi la recherche de la solution à un sous-espace  $S$  de  $\mathbb{R}^I$ . Cet ensemble est habituellement défini comme l'intersection d'espaces définis par  $K_i$  contraintes d'inégalité et  $K_e$  contraintes d'égalité. Ces contraintes sont exprimées comme des fonctions des paramètres de conception. Elles sont respectivement notées :

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^I : g_{k_i}(\mathbf{x}) \leq 0, k_i = 1..K_i \text{ et } h_{k_e}(\mathbf{x}) = 0, k_e = 1..K_e \} \quad (2.16)$$

Cette étape préalable est souvent compliquée. En effet, plusieurs objectifs antagonistes peuvent apparaître lors de la recherche de ces différents éléments. Par exemple, le choix des paramètres de conception doit faire l'arbitrage entre un modèle complet difficile à résoudre et un modèle simpliste ne rendant pas bien compte de la réalité. Par ailleurs, la recherche de la meilleure performance économique d'un produit se fait souvent au détriment de sa durée de vie ou des conditions de travail des opérateurs. La plupart de ces problèmes seront résolus par le savoir faire de l'utilisateur. Finalement, le problème d'optimisation consiste à rechercher une des configurations  $\mathbf{x}^*$  telle que :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{x \in S} \{ f(\mathbf{x}) \} \quad (2.17)$$

Une fois le modèle mathématique élaboré, un ensemble d’algorithmes permettent de déterminer numériquement une solution de ce problème. Le choix d’un de ces algorithmes ne doit toutefois pas être arbitraire. En pratique, il n’existe en effet aucun algorithme qui soit universellement meilleur que les autres. Pour les problèmes d’optimisation combinatoire, le “No Free Lunch Theorem” précise par exemple qu’en considérant l’ensemble des problèmes d’optimisation, l’efficacité moyenne de chaque algorithme est la même [Wolpert 1997]. Le choix de l’algorithme d’optimisation revient donc au concepteur. Cette décision doit intégrer les spécificités du problème afin d’atteindre un niveau de performance satisfaisant.

### 2.3.2 Quelques propriétés des problèmes d’optimisation

Nous rappelons dans cette section quelques propriétés sur les problèmes d’optimisation. Face aux caractéristiques d’un problème donné, le concepteur pourra alors choisir un algorithme adapté.

**Optima locaux et globaux** En l’absence d’hypothèses particulières, un problème d’optimisation peut posséder plusieurs minima globaux et locaux (voir figure 2.2). Toutefois, la plupart des algorithmes d’optimisation ne pourront ga-

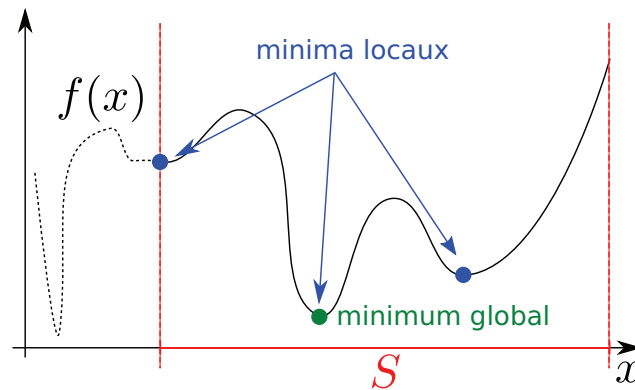


FIG. 2.2 – Optima locaux et globaux

rantir que l’obtention d’un minimum local. Par ailleurs, il n’existe généralement aucun moyen simple de vérifier si un optimum est local ou global. La recherche d’un optimum global se révélera donc souvent être un exercice difficile. Néanmoins, pour certaines classes de problèmes, l’existence d’un unique optimum peut être démontrée.

**Problèmes convexes** Les problèmes convexes bénéficient par exemple de la propriété précédente. Ils jouent donc un rôle central en optimisation. Un problème est qualifié de convexe si la fonction objectif  $f$  et le domaine  $S$  défini par les contraintes sont convexes. Seules la concavité des fonctions  $g_{k_i}$  et la linéarité des fonctions  $h_{k_e}$  permettent de conclure que  $S$  est convexe. Les problèmes d’optimisation linéaires sont des exemples de problèmes convexes.

**Conditions d'optimalité** Lorsque l'existence et l'unicité d'une solution sont avérées, l'écriture d'une condition nécessaire d'optimalité peut permettre une résolution directe du problème (2.17). Dans le cas où aucune contrainte ne restreint l'espace de recherche, cette condition est donnée par l'annulation du gradient de la fonction objectif. Dans le cas de problèmes contraints, l'écriture des conditions nécessaires d'optimalité passent par la définition du lagrangien  $L$  [Nocedal 2000] :

$$L : \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^{K_e} \times \mathbb{R}^{K_i} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.18)$$

$$\text{avec } L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k_e=1}^{K_e} \lambda_{k_e} h_{k_e}(\mathbf{x}) + \sum_{k_i=1}^{K_i} \mu_{k_i} g_{k_i}(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

où les vecteurs inconnus  $\lambda \in \mathbb{R}^{K_e}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^{K_i}$  contiennent les multiplicateurs de Lagrange associés à chaque contrainte. Cette nouvelle fonction permet de relaxer les contraintes en ajoutant une pénalité à la fonction objectif lorsque les restrictions ne sont pas satisfaites. Sous certaines hypothèses, la solution du problème d'optimisation est un point col du lagrangien. Dans ce cadre, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sont des conditions nécessaires d'optimalité.

**Conditions de Karush-Kuhn-Tucker** Soit  $\mathbf{x}^*$  un minimum local du problème (2.17), où les fonctions  $f$ ,  $g_{k_i}$  et  $h_{k_e}$  sont toutes continûment différentiables. Si les contraintes sont toutes linéairement indépendantes en  $\mathbf{x}^*$ , alors il existe un vecteur unique  $\lambda^* \in \mathbb{R}^{K_e}$  et un vecteur unique  $\mu^* \in \mathbb{R}^{K_i}$  tels que

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (2.20)$$

$$h_{k_e}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad 1 \leq k_e \leq K_e \quad (2.21)$$

$$g_{k_i}(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad 1 \leq k_i \leq K_i \quad (2.22)$$

$$\mu_{k_i} \geq 0, \quad 1 \leq k_i \leq K_i \quad (2.23)$$

$$\mu_{k_i} g_{k_i}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad 1 \leq k_i \leq K_i \quad (2.24)$$

Il faut cependant noter qu'un éventuel maximum local serait solution des mêmes équations. Une contrainte sur les dérivées secondes du lagrangien permet alors de discriminer les minima. Si les fonctions objectifs et contraintes sont deux fois différentiables, alors les équations suivantes doivent également être vérifiées par une solution du problème de minimisation :

$$\mathbf{y}^t \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \neq 0 \text{ satisfaisant} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{y}^t \nabla h_{k_e}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad 1 \leq k_e \leq K_e \quad (2.26)$$

$$\mathbf{y}^t \nabla g_{k_i}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad 1 \leq k_i \leq K_i \text{ tel que } g_{k_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.27)$$

La résolution de ces équations permet donc l'identification de points critiques. Plusieurs algorithmes sont donc basés sur la recherche directe d'une solution satisfaisant ces relations. Nous pouvons également souligner qu'aucune hypothèse n'a été faite sur la convexité des fonctions impliquées. Toutefois, pour des problèmes non convexes, ces conditions ne permettent pas de conclure si l'optimum calculé est local ou global.

### 2.3.3 Méthodes de résolution

La résolution numérique du problème d'optimisation nécessite l'utilisation de méthodes spécifiques. La plupart de ces méthodes sont itératives et génèrent une séquence de vecteurs de conception  $\mathbf{x}^{(it)}$  et de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda^{(it)}$  et  $\mu^{(it)}$ . Les itérés successifs sont construits de façon à faire converger ces suites vers les solutions du problème. On peut alors distinguer les méthodes locales, qui visent à converger vers un optimum local, des méthodes cherchant à assurer une convergence vers l'optimum global.

#### 2.3.3.1 Méthodes locales

De nombreux algorithmes existent dans la littérature pour tenter d'identifier un optimum local. Parmi ces algorithmes, nous distinguons ceux traitant de problèmes sans contrainte et ceux permettant d'intégrer des restrictions.

**Optimisation sans contrainte** De nombreuses méthodes proposent de résoudre un problème d'optimisation sans contrainte. Les différentes approches peuvent être classées selon l'information qu'elles requièrent sur les dérivées. Les méthodes d'ordre zéro ne font pas intervenir les dérivées de la fonction objectif. C'est par exemple le cas de la méthode de *Nelder-Mead* où une suite de simplexes de plus en plus petits encadrent l'optimum [Nelder 1965]. Les méthodes utilisant les dérivées premières de la fonction objectif comptent notamment les méthodes de plus forte pente et de *gradient conjugué* et ses variations [Fletcher 1964]. Les méthodes de *quasi-Newton*, grâce à une approximation des dérivées secondes, bénéficient également d'une grande efficacité tout en n'évaluant que le gradient de la fonction coût [Broyden 1970]. Enfin, les méthodes de *Newton* sont reconnues pour leur ordre de convergence quadratique et la facilité de leur implémentation. Toutefois, l'évaluation de la matrice hessienne est coûteuse et rend cette méthode peu utilisable pour résoudre des problèmes comportant de nombreuses variables.

Les méthodes précédentes définissent une base pour l'élaboration d'algorithmes plus performants. Nocedal précise que deux philosophies sont souvent employées à cet effet [Nocedal 2000]. D'un côté, les méthodes citées sont utilisées pour définir une direction de descente. Des méthodes de *recherche linéaire* permettent alors de déterminer un pas de descente acceptable [Wolfe 1969]. A l'inverse, les autres techniques définissent une *région de confiance* sur laquelle un modèle de la fonction objectif est construit. Des algorithmes *ad hoc* sont alors utilisés pour minimiser ce modèle sur cette région [Powell 1970].

**Optimisation sous contraintes** Les méthodes d'optimisation destinées à prendre en compte des contraintes sont le plus souvent des adaptations des algorithmes déjà présentés. Les algorithmes du gradient projeté et du gradient conjugué projeté permettent de résoudre des problèmes contraints en projetant, à chaque itération, la direction de descente sur l'ensemble admissible. Cette méthode est

notamment utilisée pour résoudre des problèmes quadratiques [Nocedal 2000]. La méthode d'*Uzawa* consiste à appliquer successivement des algorithmes d'optimisation sans contrainte pour trouver les paramètres de conception qui minimisent le lagrangien et les multiplicateur de Lagrange qui rendent cette fonction maximale. La méthode du *lagrangien augmenté* est également basée sur la minimisation du lagrangien auquel une pénalité est ajoutée. Enfin, la méthode de *programmation quadratique séquentielle* est une adaptation de la méthode de Newton appliquée à la résolution des équations de Karush-Kuhn-Tucker [Boggs 1995]. Cette méthode est décrite plus précisément dans l'annexe B.

### 2.3.3.2 Méthodes globales

Inversement, certaines méthodes ont été développées spécifiquement pour rechercher un optimum global. Ces méthodes sont souvent classées en trois catégories.

**Méthodes déterministes** Le plus souvent, les méthodes d'optimisation globale déterministes cherchent à énumérer les solutions pour trouver la meilleure. Cette approche directe étant le plus souvent impossible, ces algorithmes mettent alors en place des stratégies pour n'évaluer que les solutions potentiellement bonnes. Les méthodes de "branch and bound", couramment utilisées en optimisation combinatoire, ont pu être adaptées à certains problèmes d'optimisation non-linéaire en variables continues. Les étapes d'évaluation bénéficient alors d'un traitement particulier, en utilisant par exemple les résultats de la programmation DC [Hoai 2002] ou de l'analyse par intervalles ([Kearfott 1992]). Ces méthodes ont l'avantage de bénéficier de forts développements théoriques qui garantissent l'obtention d'une solution globalement optimale. Toutefois, ces méthodes sont souvent difficiles à implémenter. Elles nécessitent par ailleurs d'importants temps de calcul. À l'inverse, la programmation dynamique, introduite par Bellman, est également une ressource précieuse pour résoudre certaines classes de problèmes. Mais son champ d'application demeure restreint [Bellman 1954].

**Méthodes stochastiques** Les méthodes stochastiques proposent une approche probabiliste de la recherche de l'optimum global. Elles bénéficient le plus souvent de justifications théoriques qui garantissent, sous certaines conditions, l'obtention d'une solution optimale globale. Les méthodes d'échantillonnage direct consistent à tirer des points au hasard dans le domaine admissible et à ne garder que les meilleurs. Des améliorations utilisant des méthodes de tirage avancées ont permis d'augmenter l'efficacité de ces techniques. La méthode du recuit simulé est ainsi basée sur la génération d'une chaîne de Markov dont l'état stationnaire correspond à l'optimum global [Kirkpatrick 1983]. Un autre schéma est adopté par Souza qui propose d'intégrer un ensemble de perturbations aléatoires à une méthodes de descente de gradients [Souza de Cursi 1995].



**Métaheuristiques** Les métaheuristiques constituent un ensemble de méthodes construites de manières plus ou moins empiriques [Luke 2009]. Leur principal défaut est donc souvent l'absence de garanties sur le caractère optimal de la solution. Le concepteur est souvent seul juge de la qualité du résultat. Ces approches sont en revanche robustes et s'appliquent à une grande variété de problèmes. Leur utilisation est donc facilement accessible. Les algorithmes basés sur la génération et l'évolution d'une population définissent une vaste classe de métaheuristiques. Les algorithmes évolutionnaires, comme l'algorithme génétique [Goldberg 1989], appartiennent à cette classe et sont définis en reproduisant les mécanismes de la sélection naturelle. Les algorithmes d'optimisation par essaim particulaire [Kennedy 1995] et par colonies de fourmis [Dorigo 2005] utilisent des modèles d'organisation sociale observés dans la nature. Malgré leur bonne capacité à fournir des solutions de qualité, ces méthodes sont le plus souvent peu performantes. Une approche souvent fructueuse pour obtenir des algorithmes performants consiste finalement à créer des méthodes hybrides. Celles-ci combinent des métaheuristiques pour identifier des zones susceptibles de contenir un optimum global et des méthodes locales permettant d'accélérer la convergence [Souza De Cursi 1999].

## 2.4 Incertitudes en optimisation

Dans de nombreux cas, le problème d'optimisation dépendra d'un ensemble de paramètres  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^J$  sur lesquels le concepteur ne pourra pas agir. On peut par exemple définir un problème de régression au sens des moindres carrés de façon générale. Ce problème dépend alors de la valeur des points de régression. Une fois ces points fixés, le problème peut être résolu numériquement. Pour prendre en compte la dépendance du problème à ces paramètres, les définitions précédentes des fonctions objectifs et des contraintes sont légèrement modifiées. Le problème d'optimisation pour  $\mathbf{y}_0$  fixé est alors la recherche de la configuration  $\mathbf{x}^*$  solution du système :

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{y}_0) = \arg \min_{x \in S(\mathbf{y}_0)} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)\} \quad (2.28)$$

$$S(\mathbf{y}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I : g_{k_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \leq 0, k_i = 1..K_i \text{ et } h_{k_e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) = 0, k_e = 1..K_e\} \quad (2.29)$$

où,  $f : \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction objectif,  $g_{k_i} : \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h_{k_e} : \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}$  sont les contraintes dépendant à la fois des paramètres de conception et des paramètres  $\mathbf{y}$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons donc les diverses approches envisagées dans la littérature pour traiter ce problème. Un bref rappel des principales contributions dans chaque domaine permettra de montrer en quoi ces approches diffèrent les unes des autres.

### 2.4.1 Optimisation robuste

Lorsque le caractère incertain des paramètres n'est pas pris en compte, le choix d'une valeur arbitraire conduit à une configuration particulière. Ainsi, la variabilité future des paramètres incertains peut introduire des perturbations sur le comportement final du système. Les approches présentées dans ce paragraphe ont alors été développées pour tenter de réduire l'influence de ces perturbations.

Une première approche, qualifiée de conception robuste, consiste à minimiser les perturbations autour de la performance optimale [Doltsinis 2004] [Beyer 2007]. Les travaux menés par Taguchi [Taguchi 1986] dans les années 1980 ont permis d'initier les méthodes de conception robuste par une prise en compte systématique des incertitudes. Cette méthode est basée sur la séparation des variables du problème en deux ensembles : les variables de contrôles et les variables incertaines. Taguchi introduit un ensemble de méthodes basées sur la théorie des plans d'expériences [Taguchi 1987][Koehler 1996] pour identifier une configuration des variables de contrôles maximisant le rapport signal sur bruit. Cette méthode a depuis subi un certain nombre de critiques, notamment sur le nombre important d'expériences à mener [Trosset 1997] et sur le choix du rapport signal sur bruit comme objectif [Abraham 1992].

Pour pallier ces défauts, une seconde approche consiste à traiter le problème de la conception robuste dans le formalisme de l'optimisation. En définissant une

mesure de la robustesse [Otto 1993][Ben-Tal 2002][Beyer 2007], on se ramène à un problème d'optimisation multi-objectif : minimisation du coût et maximisation de la robustesse. A l'heure actuelle, de nombreuses méthodes sont d'ores et déjà éprouvées pour résoudre ce type de problème. Nous pouvons citer, entre autres, la méthode de la somme pondérée [Das 1997], la programmation par compromis [Chen 1999], l'optimisation physique [Messac 2002].

Toutefois, l'évaluation de la nouvelle fonction objectif de ces problèmes n'est pas une chose aisée. En effet, le calcul de la robustesse de la solution n'est que rarement accessible de façon analytique [Schuëller 2008]. Deux cheminements sont alors possibles : l'approche déterministe et l'approche directe. Dans la première, une approximation de la mesure de variabilité est calculée ce qui rend la résolution du problème par des algorithmes standard de l'optimisation non-linéaire possible. Guest [Guest 2008] propose par exemple un développement de Taylor des contraintes et de la fonction objectif pour résoudre un problème d'optimisation robuste de topologie. D'autres travaux se concentrent sur le calcul direct de la variance par intégration numérique [Huang 2006]. Dans l'approche qualifiée de directe [Schuëller 2008], des techniques de simulations comme la méthode de Monte-Carlo, les plans d'expériences ou du tirage d'importance sont utilisées pour fournir des données statistiques sur la dispersion [Ang 1992] [Au 2001a]. Cette approche peut être améliorée par l'utilisation de métamodèles. Ces approximations utilisent les données des simulations pour estimer la mesure de robustesse correspondant à différentes conceptions [Stinstra 2008] [Goethals 2009]. Récemment, les approches probabilistes non-paramétriques ont également été utilisées pour quantifier les dispersions lorsque des incertitudes de modèles doivent être intégrées [Capiez-Lernout 2008].

### 2.4.2 Programmation stochastique

La programmation stochastique peut être vue comme une extension de l'optimisation robuste. En effet, cette approche traite de la minimisation de l'espérance de la fonction objectif [Wets 1989]. Ce n'est toutefois pas dans le contexte de la réduction de la variance qu'elle a été développée. Ces techniques se focalisent davantage sur les problèmes linéaires requérant une prise de décision antérieure à la connaissance d'un certain nombre de facteurs. Un des exemples les plus traités est celui de la programmation avec recours [Kleywegt 2001]. Il s'agit de maximiser la rentabilité d'un plan de production sans que les prix de vente futurs soient connus. Sahinidis [Sahinidis 2004] précise que la formulation originale du problème a évolué pour traiter des problèmes plus généraux, comme la prise en compte de contrainte en probabilité [Prékopa 1970] et des non-linéarité [Bastin 2004]. La programmation dynamique [Bertsekas 1976], l'optimisation de fonctionnelle [Barty 2007] et la programmation en nombre entier [Laporte 1993] se sont également vu dotées d'un cadre stochastique.

Deux catégories d'algorithmes sont principalement utilisées pour résoudre ce type de problèmes. D'une part, les algorithmes d'approximation, basés sur une esti-

mation statistique du quasi-gradient [Kiefer 1952][Robbins 1951]. D'autre part, les méthodes de simulation qui résolvent un échantillon de problèmes [Kleywegt 2001][Shapiro 2008].

Ces méthodes ont sû trouver des applications dans de nombreux domaines, tels que la planification de production [Pereira 1991], la recherche d'itinéraires [Liu 2004] ou la finance [Yu 2003].

### 2.4.3 Optimisation fiabiliste

Les approches précédentes peuvent être rattachées à une démarche s'apparentant à l'analyse de la variabilité telle qu'elle est définie sur la figure 2.1. De ce point de vue, l'objectif optimisation fiabiliste est orthogonal à ces démarches. En effet, loin de prendre en compte les effets moyens mesurés par les différents moments statistiques, ce sont les phénomènes correspondant aux queues des distributions qui sont ici analysés. Le principe de l'optimisation fiabiliste est alors le dimensionnement de structures économiques intégrant le coût d'une éventuelle défaillance liée à un événement rare. Malheureusement, les scénarios menant à la défaillance sont souvent mal connus. Ils peuvent par exemple être liés à des propriétés des matériaux incertaines ou bien à des sollicitations aléatoires. Ces incertitudes doivent donc être pleinement associées à la phase de dimensionnement.

Les approches visant à intégrer ce coût de défaillance peuvent différer. Certains auteurs intègrent l'espérance de ce coût à la fonction objectif [Kuschel 2000] quand d'autres préfèrent définir des restrictions imposant une probabilité de défaillance maximale [Madsen 1992]. L'utilisation de coefficients de sécurité semi-analytiques, combiné à des règles de construction empiriques, permet souvent de lever partiellement le problème. Toutefois, ces méthodes, fréquemment utilisées dans l'industrie, conduisent le plus souvent à des structures aux propriétés mal connues. Dans le meilleur des cas, les structures bénéficient d'un niveau de fiabilité satisfaisant mais d'un coût trop élevé. Toutefois, dans les situations les pires, rien ne permet de garantir que les exigences fiabilistes sont satisfaites.

La prise en compte plus des incertitudes par des techniques spécifiques permet de concilier avec précisions ces deux phénomènes. Le chapitre 4 de cette thèse est consacré à l'étude de ces méthodes. Afin de présenter les limitations de ces approches, nous présenterons dans cette section les différentes problématiques de l'optimisation fiabiliste et les techniques utilisées pour les résoudre. De nouvelles méthodes sont alors également introduites et évaluées.

### 2.4.4 Quantification des incertitudes en optimisation et dans l'identification

Dans sa thèse, Holdorf s'intéresse au problème général de l'étude des dispersions du résultat d'un problème d'optimisation sans contrainte [Holdorf Lopez 2010]. Différentes stratégies sont proposées pour déterminer la distribution de probabilité de l'extremum d'une fonction faisant intervenir des paramètres incertains. Cette

étude correspondant à la dernière situation présentée sur la figure 2.1, elle est fondamentalement différente des approches présentées jusqu'ici.

Cette approche peut être vue comme une généralisation des problématiques abordées dans le cadre de l'identification en présence d'incertitudes. En effet, le but de ces techniques est de retrouver la valeur des paramètres inconnus d'un modèle à partir de mesures disponibles. Il est fréquent que ces valeurs soient identifiées en minimisant une mesure de l'erreur entre les données expérimentales et les prédictions du modèle. L'apparition d'erreurs de mesure ou de conditions d'expérimentation mal connues tend alors à faire apparaître des incertitudes dans les données. Ces variations peuvent alors affecter les estimations des paramètres à déterminer et influencer sur les résultats de prévisions futures. L'étude des dispersions de ces valeurs identifiées est donc primordiale [Perrin 2008].

Certains auteurs s'intéressent au calcul direct de la distribution de probabilité des paramètres à identifier. C'est le cas de Du qui s'intéresse à la recherche d'une loi de probabilité discrète lorsque seuls les valeurs fractiles des observations incertaines sont connues [Du 2006].

Inversement, il est courant de chercher à exprimer les paramètres inconnues comme une variable aléatoire dont la distribution sera déterminée par post-traitement. Des méthodes classiques d'approximation par des séries, comme le chaos polynomial, peuvent être utilisées pour construire ces variables [Ghanem 1991]. Le but de l'identification est alors le calcul des paramètres déterministes du développement. Berveiller précise toutefois que l'utilisation d'une méthode des moindres carrés pour quantifier l'écart entre les données expérimentales aléatoires et les prédictions n'est pas toujours accessible [Desceliers 2006]. Il propose alors de mesurer la distance entre les deux jeux de données en calculant la vraisemblance de l'échantillon. Les paramètres à identifier sont choisis de sorte à maximiser la vraisemblance. Cette méthode a été adaptée à l'identification de champs stochastiques dans le cadre de mesures de champs de déplacement [Desceliers 2006] ou de recalage modal [Desceliers 2007]. Stefanou utilise également cette approche pour identifier des géométries inconnues à partir d'images floues [Stefanou 2009]. Plus récemment, Arnst a proposé de mesurer l'erreur non plus par la vraisemblance mais par la distribution *a posteriori* [Arnst 2010]. S'appuyant sur cette approche, Soize a alors présenté une méthodologie permettant d'identifier un très grand nombre de paramètres lorsque peu de données expérimentales sont disponibles [Soize 2010]. En parallèle, les auteurs de [Ghanem 2006] évaluent la précision des procédures bayésiennes pour identifier les propriétés d'un champ aléatoire. Perrin note également qu'une approche bayésienne permet la mise à jour de paramètres pour des modèles évolutifs [Perrin 2008].

Dans [Soize 2008], les auteurs proposent d'utiliser la théorie des matrices aléatoires pour identifier les propriétés de matrices incertaines. Les approches par moindre carré et maximum de vraisemblance sont alors comparées pour vérifier leur capacité à résoudre le problème. Ritto propose une approche similaire pour identifier les sollicitations aléatoires sur un système non-linéaire [Ritto 2010].

---

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu rappeler les problématiques liées au traitement des incertitudes en ingénierie. La mise en place d'outils de calcul nécessaires à leur traitement systématique nous a mené à évoquer les problèmes de modélisation de ces phénomènes, notamment en utilisant la théorie des probabilités. Les principales techniques de modélisation ont également été rappelées et se révéleront utiles dans les chapitres suivants. Nous avons par ailleurs introduit les principales questions liées à l'optimisation non-linéaire et aux méthodes numériques s'attachant à leur résolution. Dans une troisième partie, nous avons fait le bilan des différentes approches permettant l'intégration du traitement des incertitudes dans l'optimisation à travers trois thématiques : la réduction de la variabilité, les approches fiabilistes et la quantification des incertitudes.

Dans le prochain chapitre, nous nous attacherons à proposer une extension des méthodes de quantification des incertitudes. Nous nous concentrons en particulier sur l'étude de la dispersion de la solution d'un problème d'optimisation sous contraintes. Nous verrons alors comment ces méthodes peuvent être étendues à d'autres types de problèmes.



# Quantification des incertitudes par des approches probabilistes

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Quantification des incertitudes par des approches probabi-</b>	
	<b>listes</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>Représentation et approximation d'une variable aléatoire</b> .	<b>30</b>
3.2.1	Représentation d'une variable aléatoire . . . . .	31
3.2.2	Choix de la famille d'approximation . . . . .	31
3.2.3	Calcul des coefficients . . . . .	32
<b>3.3</b>	<b>Dispersion et incertitudes en optimisation</b> . . . . .	<b>35</b>
3.3.1	Présentation du problème . . . . .	35
3.3.2	Représentation et approximation de l'optimum . . . . .	36
3.3.3	Approches intrusives . . . . .	37
3.3.4	Utilisation de méthodes non-intrusives . . . . .	48
3.3.5	Exemples numériques . . . . .	53
3.3.6	Conclusion . . . . .	63
<b>3.4</b>	<b>Valeurs propres d'une matrice à coefficients aléatoires</b> . . .	<b>65</b>
3.4.1	Formalisation du problème . . . . .	66
3.4.2	Une méthode de Galerkin pour les problèmes aux valeurs propres généralisées . . . . .	66
3.4.3	Puissance itérée pour une matrice aux coefficients aléatoires .	68
3.4.4	Exemples numériques . . . . .	71
3.4.5	Conclusion . . . . .	80
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>82</b>

---



L'augmentation rapide des moyens informatiques a eu tendance ces dernières années à démocratiser l'utilisation des outils de simulations nécessaires à la compréhension de certains phénomènes physiques ou économiques. Jusqu'alors de telles études étaient menées par de coûteuses méthodes d'expérimentation. Dans un tel contexte, la variabilité des paramètres expérimentaux non contrôlables pouvait être prise en compte par la multiplication des essais. Par exemple, la mesure des propriétés d'un matériau fera intervenir plusieurs échantillons. La dispersion des résultats permet de fournir un intervalle de confiance pour les grandeurs mesurées. Inversement, le déterminisme informatique conduira un algorithme à toujours fournir le même résultat. La compréhension, par l'outil numérique, des dispersions liées à des phénomènes aléatoires a donc nécessité le développement de méthodes spécifiques. Ces méthodes de propagation et de quantification des incertitudes ont précisément pour objectif de mesurer l'impact de la variabilité de paramètres inconnus sur les systèmes étudiés.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la quantification des incertitudes dans deux cadres. Dans un premier temps, l'étude de problèmes d'optimisation sous contraintes intégrant des paramètres aléatoires concentrera notre attention. Dans une telle situation, la solution du problème dépend des réalisations des aléas. Nous chercherons donc à mesurer cette dispersion statistique par des approches intrusives et non-intrusives. Les premières sont basées sur le développement de méthodes numériques permettant de résoudre des équations d'optimalité stochastiques. Une démarche originale est notamment présentée en proposant une adaptation de la méthode de Newton au cadre des problèmes aléatoires. Les approches non-intrusives sont basées sur le traitement de données obtenues par des algorithmes déterministes. Ces différentes méthodes seront comparées sur des exemples.

Dans un second temps, nous nous intéresserons aux problèmes de calcul des valeurs propres généralisées de matrices possédant des coefficients aléatoires. Une fois encore, un nouvel algorithme intrusif basé sur l'adaptation d'une méthode déterministe sera développé. Cette approche sera comparée aux résultats obtenus par une méthode de Galerkin classique et des techniques non-intrusives. Afin de tirer parti des avantages de chaque stratégie, un schéma hybride fondé sur une adaptation intrusive de l'algorithme de la puissance itérée et une étape non-intrusive de renormalisation est proposé. La pertinence de ces variantes est évaluée sur des problèmes de dynamique.

### **3.1 Quantification des incertitudes par des approches probabilistes**

De forts besoins en ingénierie ont conduit de nombreux auteurs à coupler des méthodes de simulations avec des outils probabilistes. Dans le cadre du calcul des structures, la théorie des éléments finis stochastiques introduite par Ghanem et Spanos a connu des développements particulièrement importants [Ghanem 1991]. Ces nouvelles approches ont notamment su être adaptées afin d'utiliser les puissants

outils de simulations employés dans un cadre déterministe [Berveiller 2005]. Initialement développées dans le contexte de l'élasticité linéaire, ces méthodes se sont vite étendues à des problèmes de thermique [Hien 1997][Narayanan 2004], d'acoustique [Elman 2005], de mécanique des fluides [Le Maître 2001][Le Maître 2006] ou d'étude des matériaux composites [Nghah 2007]. Par ailleurs, l'étude de formulations théoriques plus générales, telles que les inégalités variationnelles, ont permis de traiter des phénomènes complexes : problèmes de contact [Arnst 2011], modélisation de milieux poreux [Forster 2010].

La particularité des systèmes d'équations à résoudre dans le cadre des éléments finis stochastiques a également conduit certains chercheurs à proposer des méthodes numériques adaptées [Ghanem 1996][Pellissetti 2000]. Ces améliorations permettent de limiter la taille des éléments en mémoire et de réduire les temps de calcul. Des algorithmes parallèles tirant parti de ces propriétés ont également permis d'obtenir des implémentations efficaces [Keese 2005].

Dans un souci d'efficacité, de nombreux efforts ont également été faits afin d'adapter des méthodes éprouvées dans le cadre déterministe. La mise en oeuvre de méthodes de réduction de modèle a notamment fait l'objet de nombreux travaux. Ces techniques ont pour objectif de réduire le nombre de degrés de liberté d'un système mécanique. Sarsri propose ainsi de coupler les outils des éléments finis stochastiques à des méthodes de synthèse modale [Sarsri 2011]. Soize suggère également une stratégie d'étude dynamique d'une structure comportant des modes locaux et globaux dans les basses fréquences [Soize 2011]. La projection des équations sur la base réduite des modes permet de réduire drastiquement la taille du problème. Par ailleurs, l'utilisation de matrices aléatoires prend en compte de façon efficace la forte influence des incertitudes sur les modes locaux. Une approche alternative consiste à considérer les grandeurs inconnues comme des champs stochastiques. Les méthodes classiques de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) permettent alors une décomposition spectrale sur la base des vecteurs propres de la matrice de covariance [Bellizzi 2006][Doostan 2007][Le Maître 2010b]. Toutefois, cette matrice est inconnue tant que le problème n'est pas résolu. Des techniques particulières doivent donc être employées afin de l'estimer statistiquement. Pour pallier cet inconvénient, Nouy propose d'utiliser une Décomposition aux valeurs Propres Généralisées (GPD) [Nouy 2007]. Cette technique permet de bénéficier d'une base *a priori* sans faire d'hypothèse sur la solution. Cette méthode a par la suite été adaptée à des études dynamiques [Chevreuil 2012] ainsi qu'à la résolution de problèmes non-linéaires [Nouy 2008].

Soize souligne cependant que ces approches dépendent fortement de la modélisation des incertitudes. Afin de prendre en compte les erreurs de modèles, il introduit donc une nouvelle procédure de calcul des matrices impliquées dans le calcul. En remarquant que les matrices utilisées dans le calcul des structures doivent présenter certaines propriétés de symétrie ou de positivité, l'auteur propose de les modéliser par des matrices aléatoires [Soize 2005a]. La définition de nouveaux ensembles de matrices permet ainsi à l'auteur de proposer des outils de calcul parfaitement opérationnels [Soize 2003]. L'application de cette stratégie à de nombreux

problèmes s’est révélée fructueuse : dynamique des structures [Desceliers 2004], modélisation de tenseur d’élasticité anisotropes [Guilleminot 2011], dynamique de systèmes à plusieurs corps rigides [Batou 2011], identification de paramètres en présence d’incertitude [Ritto 2010]. Dans [Sampaio 2010], Sampaio compare les résultats obtenus avec une telle modélisation à ceux observés lorsque chacun des paramètres incertains est modélisé par une loi donnée. Cette confrontation permet de mettre en évidence la plus grande variabilité introduite par le premier type de modèles.

Enfin, les méthodes de quantification des incertitudes ont pu être appliquées dans des cadres très différents du calcul de structures. L’étude temporelle de systèmes dynamiques aux paramètres incertains a par exemple été l’objet de nombreux développements. En effet, l’évolution sur de longues périodes de tels systèmes entraîne de fortes non-linéarités dans les réponses à étudier. Ainsi, en cas d’application directe des méthodes précédentes à l’étude des trajectoires d’un système dynamique, le nombre de termes intervenant dans les développements sur le chaos polynomial augmente de façon non-linéaire avec la durée de simulation. Des méthodes de traitement spécifiques doivent donc être mises en place. Une approche élégante permettant d’étudier les trajectoires est par exemple introduite par Le Maître. Elle est basée sur l’introduction d’un “temps normalisé ” permettant de conserver les trajectoires observées en phase avec une référence [Le Maître 2010a]. Certains auteurs se sont intéressés non plus aux trajectoires mais à certaines grandeurs caractéristiques du système. Beran propose ainsi un schéma de projection des équations définissant les cycles limites [Beran 2006]. Une alternative consiste à décrire les cycles limites sous la forme de courbes paramétrées indépendantes du temps [Witteveen 2008][Croquet 2010]. Nechak propose quant à lui une analyse des intervalles de stabilité et des amplitudes maximales observées sur des systèmes dynamiques avec friction [Nechak 2011].

Dans sa thèse, Holdorf Lopez adapte ces outils à l’étude de problèmes d’optimisation sans contrainte [Holdorf Lopez 2010][Holdorf Lopez 2011]. Son étude concerne l’influence de paramètres incertains présents dans la fonction objectif sur la solution du problème. L’extension de ces méthodes consistera le point de départ de nos travaux sur la quantification des incertitudes.

## 3.2 Représentation et approximation d’une variable aléatoire

Nous avons établi dans le chapitre précédent qu’une variable aléatoire est une fonction numérique définie sur un ensemble  $\Omega$ . Une variable aléatoire  $X$  appartient donc à un espace de dimension infinie se prêtant mal au calcul numérique. L’introduction d’une approximation de dimension finie de cette variable aléatoire est par conséquent un préalable à toute implémentation efficace. La plupart des méthodes d’approximation reposent sur la décomposition de la variable en un développement sur une famille totale de fonctions dépendant de variables connues  $\mathbf{Y}$ . Les mani-

pulations algébriques sont alors effectuées non plus sur la fonction mais sur les coefficients réels ou complexes du développement. Soize et Ghanem ainsi proposent une méthodologie rigoureuse pour définir une telle approximation [Soize 2009].

### 3.2.1 Représentation d'une variable aléatoire

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $\mathbf{Y} = (Y_1 \dots Y_{J_Y})^t$  un vecteur aléatoire défini sur cet espace à valeurs dans  $E_{\mathbf{Y}} \subset \mathbb{R}^{J_Y}$ . On suppose connue la loi  $\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$  de ce vecteur. Nous cherchons à approcher la variable  $X$ , de loi connue ou non, et à valeur dans  $E_X \subset \mathbb{R}$ . A cet effet, exprimons cette variable comme l'image de  $\mathbf{Y}$  par une fonction  $f$  à déterminer appartenant à un espace de Hilbert adéquat, *i.e.*  $X = f(\mathbf{Y})$ . On se restreindra ainsi le plus souvent au cas de l'étude des variables  $X$  à variance finie, c'est à dire :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}} [|f(\mathbf{Y})|^2] < +\infty \quad (3.1)$$

Dans ce cas, on a  $V = L^2_{\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}}(E_{\mathbf{Y}}, E_X)$  qui est bien un espace de Hilbert. Sur cet espace on peut définir le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}} [fg]$ . Il est également possible d'introduire une famille totale  $\Psi = \{\psi_p\}_{p \geq 1}$  avec  $\psi_p \in V$ .  $f$  peut alors être exprimée comme une série de ces fonctions :

$$f = \sum_{p \geq 1} f_p^* \psi_p \Rightarrow X = f(\mathbf{Y}) = \sum_{p \geq 1} f_p^* \psi_p(\mathbf{Y}) \quad (3.2)$$

où les  $f_p^* \in \mathbb{R}$  sont des coefficients déterministes à calculer. Une approximation satisfaisante de  $X$  est obtenue en projetant la forme développée sur un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension finie :

$$f = \sum_{p \geq 1} f_p^* \psi_p \approx \sum_{p=1}^P f_p \psi_p \quad (3.3)$$

Cette dernière approximation est alors adaptée au calcul numérique et à l'implémentation de méthodes adéquates.

### 3.2.2 Choix de la famille d'approximation

Si n'importe quelle famille génératrice de  $V$  peut être utilisée pour l'approximation, l'approche spectrale introduite par Wiener reste particulièrement populaire dans le cadre de la mécanique stochastique [Wiener 1938]. Cette approche, appelée Chaos Polynomial, consiste à utiliser un ensemble  $\mathbf{Y}$  de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes deux à deux  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  ainsi qu'une base d'approximation formée des polynômes d'Hermite multidimensionnels de ces variables. Dans ce cas, l'orthogonalité de la famille par rapport à la mesure de  $\mathbf{Y}$  permet de définir une base hilbertienne. Cette propriété permet souvent de calculer facilement les coefficients du développement par projection et de quantifier précisément l'erreur d'approximation [Ghanem 1991]. La généralisation de cette méthodologie à

des variables non-gaussiennes et aux familles de polynômes orthogonaux associées a été proposée par Xiu et Karnadiakis [Xiu 2002].

Les approximations précédentes, basées sur l'utilisation de polynômes orthogonaux, ne sont toutefois pas satisfaisantes lorsque les variables aléatoires à approcher ne sont pas régulières. Afin de mieux reproduire les phénomènes locaux tout en conservant de bonnes propriétés d'orthogonalité, l'utilisation d'ondelettes de Wiener-Haar a été proposée plus récemment [Le Maître 2004]. Bien que les propriétés d'orthogonalité ne soient pas conservées, l'utilisation d'approximation par des fonctions de forme de type éléments-finis a également été indiquée [Deb 2001]. Pour ces dernières, les résultats précis développés dans le contexte des approches déterministes permettent d'obtenir de bonnes estimations sur la qualité des solutions. De même, l'utilisation de polynômes de Lagrange permet de définir une base de fonctions à partir d'une discrétisation de l'espace d'états des variables aléatoires [Xiu 2005].

### 3.2.3 Calcul des coefficients

La représentation d'une variable aléatoire par ses coefficients dans le développement sur une famille génératrice rend possible la résolution numérique de nombreux problèmes stochastiques. Des procédures opérationnelles permettant le calcul de ces coefficients restent à déterminer.

**Méthodes de projection** Lorsque la famille de représentation est orthogonale, les coefficients peuvent être déterminés à l'aide de résultats classiques de projection sur une base hilbertienne [Field 2004] :

$$f_p = \frac{\langle f, \psi_p \rangle}{\|\psi_p\|^2} = \frac{\int_{E_{\mathbf{Y}}} f(\mathbf{y}) \psi_p(\mathbf{y}) d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}{\|\psi_p\|^2} \quad (3.4)$$

Cette formulation fait intervenir la fonction  $f$ . Berveiller souligne que lorsque  $X$  suit une loi connue,  $f$  est donnée par une transformation isoprobabiliste entre cette loi et celle de  $\mathbf{y}$  [Berveiller 2005]. Field fournit une étude numérique complète sur la précision d'un tel schéma [Field 2004].

Toutefois, dans de nombreux cas, la distribution de  $X$  est inconnue et sa détermination est l'objectif des calculs. Le calcul analytique de l'intégrale multiple (3.4) est par conséquent souvent irréalisable. L'utilisation de méthodes numériques de quadrature ([Field 2002] [Le Maître 2002]) ou de procédures de Monte Carlo ([Field 2000] [Ghiocel 2002]) sont parfois utilisées comme alternatives. Les temps de calculs induits par ces méthodes sont cependant souvent rédhibitoires.

**Utilisation d'un échantillon** Pour pallier ce problème, des approches basées sur d'autres principes que la projection ont été introduites. Ces techniques sont le plus souvent basées sur l'ajustement des coefficients à partir d'un

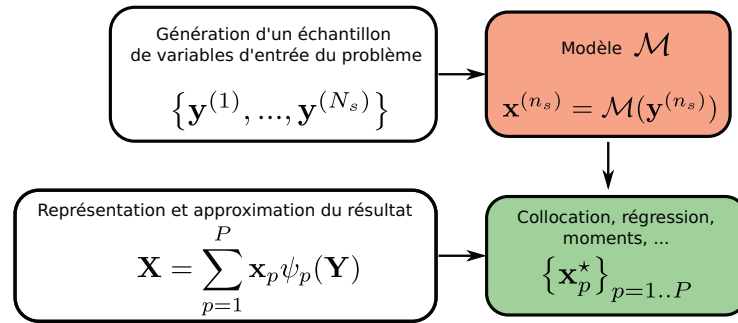


FIG. 3.1 – Utilisation d'un échantillon pour le calcul des coefficients de l'approximation

échantillon  $\{\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N_p)}\}$  de réalisations de  $\mathbf{Y}$  et des réalisations correspondantes,  $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N_p)}\}$ , de  $X$ .

Dans le cadre du chaos polynômial, la méthode de collocation a été proposée par Webster [Webster 1996]. Cette approche a été introduite afin que l'approximation par chaos polynômial soit interpolante. Afin de s'affranchir des restrictions de cette première approche, Isukapalli introduit une méthode de surface de réponse stochastique [Isukapalli 1999]. L'approximation n'est plus interpolante mais minimise l'erreur quadratique moyenne aux points de régression. Berveiller propose dans sa thèse une étude complète de ces méthodes de régression dans le contexte des éléments finis stochastiques [Berveiller 2005]. Ces travaux conduisent notamment l'auteur à fournir un certain nombre de recommandations sur la construction du plan d'expérience. En montrant l'équivalence de cette approche avec le schéma de projection, Sudret construit par ailleurs un schéma hybride de régression pondérée [Sudret 2007]. Plus récemment, cette méthode a été améliorée pour calculer une approximation possédant peu de coefficients non-nuls [Blatman 2009].

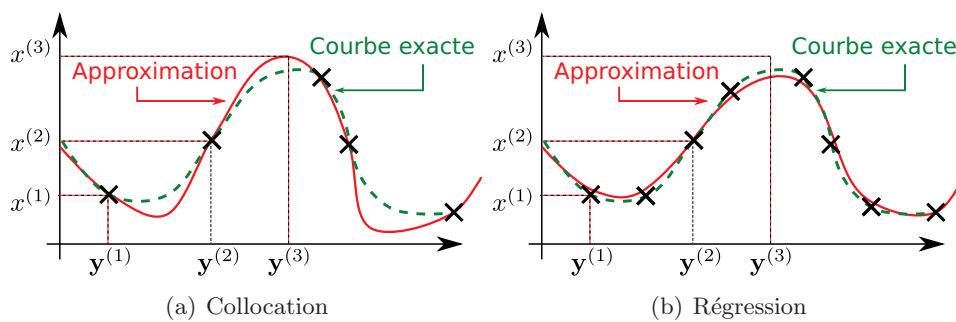


FIG. 3.2 – Calcul des coefficients à l'aide d'un échantillon

Les approches précédentes souffrent cependant d'un inconvénient majeur : le nombre de fonctions de base augmente généralement de manière exponentielle lors de l'ajout de nouvelles variables. En opérant selon un schéma inverse, semblable à une démarche de discrétisation par éléments finis [Acharjee 2007], la méthode de collocation stochastique permet de s'affranchir partiellement de ces

difficultés [Babuska 2004][Xiu 2005]. Au lieu d'imposer une famille  $\Psi$  et de déduire un plan d'expérience, cette stratégie consiste à fixer a priori un certain nombre de points de collocation et d'en déduire des fonctions interpolantes. Autrement dit, les inconnues ne sont plus les coefficients mais les fonctions d'approximation. La réduction du nombre de points de l'échantillon est ainsi primordiale. Ainsi, l'utilisation de plans d'expériences creux, isotropiques ou anisotropiques, s'est révélée fructueuse [Xiu 2005][Nobile 2008b]. Doostan propose par ailleurs d'alléger davantage les modèles en utilisant des méthodes de séparations des variables [Doostan 2009]. Différents travaux se sont également attachés à l'obtention de résultats sur l'analyse de convergence de ces méthodes afin de fournir des estimations de l'erreur [Babuska 2007][Nobile 2008a]. D'autre part, des résultats sur les aspects numériques sont également présentés, tant en terme d'implémentation que de comparaison avec d'autres approches [Mathelin 2003][Eldred 2011] .

Enfin, disposant d'un échantillon d'observations, Holdorf propose une autre approche pour déterminer les coefficients de l'approximation [Holdorf Lopez 2010]. Les inconnues sont en effet ajustées de sorte à minimiser l'écart entre les moments statistiques de l'échantillon et de l'approximation. Toutefois, cette méthode assure une convergence en loi des variables et non une convergence en moyenne quadratique.

Ces méthodes sont très générales et ne tiennent pas compte des spécificités de chaque problème. Dans les prochaines sections, d'autres approches seront présentées. Celles-ci seront basées sur les propriétés des équations à résoudre et nécessiteront des implémentations spécifiques.

### 3.3 Dispersion et incertitudes en optimisation

#### 3.3.1 Présentation du problème

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement de la solution d'un problème d'optimisation sous contrainte lorsque des paramètres sont aléatoires. Une formulation classique d'un problème d'optimisation déterministe est de trouver  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^I$  tel que

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{x \in S} \{f(\mathbf{x})\} \quad (3.5)$$

où  $S$  est le domaine admissible donné par :

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I : g_{k_i}(\mathbf{x}) \leq 0, k_i = 1..K_i \text{ et } h_{k_e}(\mathbf{x}) = 0, k_e = 1..K_e\} \quad (3.6)$$

Ici, nous nous concentrons sur la situation où les fonctions  $f$ ,  $g_{k_i}$  et  $h_{k_e}$  dépendent de paramètres incertains. Les variations de ces paramètres entraînent alors une dispersion de la solution optimale. Par exemple, considérons un problème simple faisant intervenir un paramètre  $\alpha$  dans la contrainte :

$$x^* = \arg \min_x \{x : x \geq \exp \alpha\} \quad (3.7)$$

Ce problème est convexe et l'unique solution est donnée par :

$$x^* = \exp \alpha \quad (3.8)$$

Nous pouvons constater que la solution dépend de la valeur du paramètre  $\alpha$ . Par conséquent, si  $\alpha$  est une variable aléatoire connue, la solution  $x^*$  peut également être considérée comme une variable aléatoire. Cette étude traite alors de la quantification de la dispersion de l'optimum relative aux variations des paramètres en entrée, c'est à dire la détermination de la distribution statistique de  $x^*$ .

En modélisant les paramètres en entrée par des variables aléatoires, il devient facile de traiter l'exemple précédent. Considérons le cas où le paramètre incertain  $\alpha$  est modélisé par une variable aléatoire  $Y$  de loi uniforme sur  $[0 ; 1]$ . Nous cherchons alors la distribution de  $X^*$  satisfaisant :

$$X^* = \arg \min_X \quad (3.9)$$

$$\text{tel que : } \exp Y - X \leq 0 \quad (3.10)$$

La solution de ce problème est effectivement donnée par  $X^* = \exp Y$ . La connaissance de la distribution de  $Y$  rend possible le calcul de la fonction de répartition de  $X^*$  :

$$F_{X^*}(x) = \mathbb{P}_Y[X^*(Y) \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_Y(\log x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$



Soulignons que nous nous intéressons ici au cas général d'une fonction objectif et de contraintes incertaines. Dans ce cadre, le problème est défini comme le calcul de la fonction de répartition de la variable aléatoire  $\mathbf{X}^*$  satisfaisant :

$$\mathbf{X}^* = \arg \min_{\mathbf{X} \in V} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (3.12)$$

$$\text{tel que : } g_{k_i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq 0 \quad k_i = 1..K_i \quad (3.13)$$

$$h_{k_e}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0 \quad k_e = 1..K_e \quad (3.14)$$

où  $V$  est l'espace vectoriel dans lequel la solution est recherchée et  $\mathbf{Y}$  est un vecteur aléatoire de  $\Omega$  dans  $E_{\mathbf{Y}} \subset \mathbb{R}^J$ .  $\mathbf{X}^*$  peut donc être vu comme l'application associant, pour chaque  $\omega \in \Omega$ , la réalisation  $\mathbf{y}(\omega) \in \mathbb{R}^J$  des paramètres d'entrée à la solution  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^I$ .

Une restriction doit cependant être faite sur le nombre de solutions globales correspondant à une réalisation  $y(\omega)$ . Pour cette valeur des optima, l'ensemble des paramètres  $\mathbf{x}^*(\omega)$  doit être réduit à un unique vecteur de  $S$ . En d'autres termes, l'application  $\omega \mapsto \mathbf{x}^*(\omega)$  doit être univoque. Cette restriction n'impose cependant pas d'hypothèse sur la convexité des problèmes traités, ni même sur l'existence d'autres optima globaux en dehors de  $S$ .

Le but de cette section est donc d'introduire une méthodologie pour l'étude de la dispersion du point optimal. Dans [Holdorf Lopez 2011], plusieurs stratégies ont déjà été présentées pour traiter les problèmes sans contrainte. En plus d'un standard schéma de projection, l'auteur propose d'utiliser des algorithmes de la programmation stochastique pour résoudre le problème de quantification. Cette approche n'est toutefois pas adaptée à l'intégration de contraintes sur les variables. Dans cette section, nous nous attacherons à lever cette restrictions en traitant de nouvelles techniques.

### 3.3.2 Représentation et approximation de l'optimum

Comme nous l'avons souligné précédemment (voir page 30), une variable aléatoire est un objet mathématique appartenant à un espace de dimension infinie  $V$ . En tant que tel, il n'est pas toujours aisé d'effectuer des opérations numériques sur ces fonctions. L'approximation des variables aléatoires par une projection sur un espace de dimension fini est un préalable aux méthodes que nous introduisons. Ainsi, nous considérons que le vecteur solution du problème d'optimisation  $\mathbf{X}^*$  :

$$\mathbf{X}^* = \sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p^* \psi_p(\mathbf{Y}) \quad (3.15)$$

où les  $\psi_p$  sont des éléments indicés d'une famille  $\Psi$  totale dans  $V$  de fonctions des variables d'entrée  $\mathbf{Y}$ . Les coefficients  $\mathbf{x}_p^* \in \mathbb{R}^I$  sont des vecteurs déterministes à déterminer. Les approches introduites dans cette partie sont destinées à calculer efficacement ces valeurs. Il est d'usage de les classer en deux catégories : d'une part les

méthodes intrusives tirant parti des propriétés du problème traité et nécessitant une implémentation spécifique, d'autre part, les méthodes non-intrusives qui sont plus générales. Elles peuvent être vues comme un post-traitement spécifique appliqué à un échantillon obtenu par des méthodes déterministes.

### 3.3.3 Approches intrusives

Nous présentons dans cette partie deux méthodes pour quantifier la dispersion du résultat d'un problème d'optimisation sous des contraintes d'égalité, ie  $K = K_e$ . Cette restriction permet de simplifier les conditions d'optimalité du premier ordre en n'introduisant pas de contrainte de complémentarité. La première stratégie est une adaptation des méthodes de Galerkin classiques employées dans un cadre stochastique [Ghanem 1991]. Dans un second temps, une approche originale consistant à adapter un algorithme déterministe, la méthode de Newton, sera présentée.

#### 3.3.3.1 Méthode de Galerkin : projection des conditions d'optimalité du premier ordre

**Présentation de la méthode** La recherche de l'optimum d'un problème déterministe d'optimisation sous contraintes d'égalité par le biais de la résolution des conditions KKT est une approche classique [Nocedal 2000]. C'est par exemple la stratégie adoptée dans le développement de l'algorithme SQP présenté en annexe B. Ces conditions nécessaires, rappelées page 17, indiquent que la solution  $\mathbf{x}^*$  du problème et le multiplicateur de Lagrange  $\lambda^{*t}$  qui lui est associé sont des points selles du lagrangien  $L$ . Dans un contexte purement déterministe, cette fonction est définie par :

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^t \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{h} = (h_1(\mathbf{x}, \lambda), \dots, h_K(\mathbf{x}, \lambda))^t$  et  $\lambda$  est le  $K$ - vecteur des multiplicateurs de Lagrange. La condition d'optimalité du premier ordre s'écrit alors :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.18)$$

Ce système non-linéaire déterministe possède  $N + K$  equations et autant d'inconnues. Il peut donc être résolu à l'aide de méthodes numériques classiques.

Nous proposons d'adapter cette stratégie à la résolution du problème (3.12). Ainsi, dans un contexte de prise en compte des aléas, les conditions d'optimalité peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial L}{\partial X_i}(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}^*, \mathbf{Y}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda_k}(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}^*, \mathbf{Y}) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.20)$$

où  $X_i$  et  $\Lambda_k$  sont respectivement les  $n$ -ième et  $k$ -ième composante des vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{\Lambda}$ . Nous faisons l'hypothèse que ces vecteurs appartiennent à un espace vectoriel  $V$  dont on connaît une famille totale  $\Psi$  de fonctions de  $\mathbf{Y}$ . Les vecteurs inconnus peuvent alors être approchés par :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = (X_1, \dots, X_I)^t = \sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p \psi_p(\mathbf{Y}) \quad (3.21)$$

$$\mathbf{\Lambda}(\lambda, \mathbf{Y}) = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_K)^t = \sum_{p=1}^P \lambda_p \psi_p(\mathbf{Y}) \quad (3.22)$$

Les coefficients  $\mathbf{x}_p = (x_{p1}, \dots, x_{pI})^t \in \mathbb{R}^I$  et  $\lambda_p = (\lambda_{p1}, \dots, \lambda_{pK})^t \in \mathbb{R}^K$  sont des vecteurs déterministes. Dans un souci de simplification des écritures, introduisons le  $I \times K$ -vecteur  $\mathbf{x}$  contenant l'ensemble des coefficients  $x_{ip}$ . De même, nous introduisons le vecteur  $\lambda$  contenant les coefficients  $\lambda_{kp}$ . Les conditions d'optimalité deviennent alors un système d'équations algébriques stochastiques :

$$\frac{\partial L}{\partial X_i}(\mathbf{X}(\mathbf{x}^*, \mathbf{Y}), \mathbf{\Lambda}(\lambda^*, \mathbf{Y})) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda_k}(\mathbf{X}(\mathbf{x}^*, \mathbf{Y}), \mathbf{\Lambda}(\lambda^*, \mathbf{Y})) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.24)$$

Ces  $I + K$  équations stochastiques peuvent être projetées sur l'espace généré par les combinaisons linéaires de la famille  $\{\psi_p\}_{p=1..P}$  par une procédure de Galerkin. Cette opération permet d'obtenir  $P \times (I + K)$  équations :

$$\int_{E_{\mathbf{Y}}} \frac{\partial L}{\partial X_i}(\mathbf{X}(\mathbf{x}^*, \mathbf{Y}), \mathbf{\Lambda}(\lambda^*, \mathbf{Y})) \psi_p(\mathbf{Y}) d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = 0 \quad \forall i, \forall p \quad (3.25)$$

$$\int_{E_{\mathbf{Y}}} \frac{\partial L}{\partial \Lambda_k}(\mathbf{X}(\mathbf{x}^*, \mathbf{Y}), \mathbf{\Lambda}(\lambda^*, \mathbf{Y})) \psi_p(\mathbf{Y}) d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = 0 \quad \forall k, \forall p \quad (3.26)$$

où  $d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$  est la mesure de probabilité associée à la loi jointe du vecteur  $\mathbf{Y}$ . Les  $P \times (I + K)$  inconnues de  $\mathbf{x}^*$  et  $\lambda^*$  sont les solutions du système non-linéaire précédent. Ces équations déterministes peuvent alors être résolues par des méthodes classiques [Press 2007].

Soulignons toutefois que cette méthode souffre des mêmes affres que sa contrepartie déterministe. En effet, la résolution directe des conditions KKT du premier ordre peut mener à des solutions parasites qui ne sont pas des minima du problème initial : les maxima et les points cols possèdent par exemple la même caractérisation. Par ailleurs, le comportement des algorithmes itératifs classiquement utilisés pour la résolution du système dépend fortement du point de départ de la suite. Par conséquent, il sera difficile, en règle générale, d'assurer que l'optimum global a été atteint.

**Application à un problème simple** Nous pouvons illustrer cette procédure en l'appliquant à la résolution du problème modèle (3.9). En introduisant une variable d'écart, le problème s'écrit

$$\begin{aligned} X^* &= \arg \min_{\mathbf{x}} X_1^2 \\ \text{tel que : } & X_1 - X_2^2 - \exp Y = 0 \end{aligned}$$

Le lagrangien du problème s'écrit alors :

$$L(X_1, X_2, \Lambda) = X_1^2 + \Lambda(X_1 - X_2^2 - \exp Y)$$

Les variables d'optimisation et le multiplicateur de Lagrange sont des variables aléatoires. Ils sont approchés par des développements sur la famille  $\Psi = \{1, Y\}$  :

$$X_1^* = x_{10} + x_{11}Y \quad X_2^* = x_{20} + x_{21}Y \quad \Lambda^* = \lambda_0 + \lambda_1Y$$

où les coefficients  $x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}, \lambda_0, \lambda_1$  sont des inconnues à déterminer. On dispose pour cela des trois équations stochastiques issues des conditions d'optimalité du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X_1}(X_1^*, X_2^*, \Lambda^*) = 2X_1^* + \Lambda^* & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_2}(X_1^*, X_2^*, \Lambda^*) = -2X_2^* \Lambda^* & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Lambda}(X_1^*, X_2^*, \Lambda^*) = X_1^* - X_2^{*2} - \exp Y & = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Pour obtenir suffisamment d'équations déterministes sur les coefficients, nous pouvons projeter ces équations sur chacune des fonctions de la famille d'approximation. En pratique, ces projections peuvent être évaluées par des méthodes de quadratures numériques ou des techniques de simulation. Ici, les intégrales peuvent être aisément évaluées de façon analytique :

- $\mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial X_1} \psi_0 \right] = \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial X_1} \times 1 \right] = \mathbb{E}_Y [2X_1^* + \Lambda^*]$   
 $= \mathbb{E}_Y [2(x_{10} + x_{11}Y) + (\lambda_0 + \lambda_1Y)]$   
 $= 2x_{10} + \lambda_0 + (2x_{11} + \lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y]$
- $\mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial X_1} \psi_1 \right] = \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial X_1} \times Y \right] = \mathbb{E}_Y [(2X_1^* + \Lambda^*)Y]$   
 $= \mathbb{E}_Y [(2(x_{10} + x_{11}Y) + (\lambda_0 + \lambda_1Y))Y]$   
 $= (2x_{10} + \lambda_0)\mathbb{E}_Y [Y] + (2x_{11} + \lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y^2]$
- $\mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial X_2} \psi_0 \right] = \mathbb{E}_Y [-2X_2^* \Lambda^*]$   
 $= \mathbb{E}_Y [-2(x_{20} + x_{21}Y) \cdot (\lambda_0 + \lambda_1Y)]$   
 $= -2(x_{20}\lambda_0 + (x_{21}\lambda_0 + x_{20}\lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y] + x_{21}\lambda_1\mathbb{E}_Y [Y^2])$
- $\mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial X_2} \psi_1 \right] = \mathbb{E}_Y [-2X_2^* \Lambda^* Y]$   
 $= \mathbb{E}_Y [-2(x_{20} + x_{21}Y) \cdot (\lambda_0 + \lambda_1Y)Y]$   
 $= -2(x_{20}\lambda_0\mathbb{E}_Y [Y] + (x_{21}\lambda_0 + x_{20}\lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y^2] + x_{21}\lambda_1\mathbb{E}_Y [Y^3])$

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial \Lambda} \psi_0 \right] &= \mathbb{E}_Y \left[ X_1^* - X_2^{*2} - \exp Y \right] \\
 &= \mathbb{E}_Y \left[ (x_{10} + x_{11}Y) - (x_{20} + x_{21}Y)^2 - \exp Y \right] \\
 &= (x_{10} - x_{20}^2) + (x_{11} - 2x_{20}x_{21})\mathbb{E}_Y [Y] - x_{21}^2\mathbb{E}_Y [Y^2] - \mathbb{E}_Y [\exp Y] \\
 \\
 \bullet \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial L}{\partial \Lambda} \psi_1 \right] &= \mathbb{E}_Y \left[ (X_1^* - X_2^{*2} - \exp Y)Y \right] \\
 &= \mathbb{E}_Y \left[ ((x_{10} + x_{11}Y) - (x_{20} + x_{21}Y)^2 - \exp Y)Y \right] \\
 &= (x_{10} - x_{20}^2)\mathbb{E}_Y [Y] + (x_{11} - 2x_{20}x_{21})\mathbb{E}_Y [Y^2] - x_{21}^2\mathbb{E}_Y [Y^3] \\
 &\quad - \mathbb{E}_Y [Y \exp Y]
 \end{aligned}$$

Finalement, les coefficients peuvent être déterminés en résolvant le système non-linéaire :

$$\begin{bmatrix}
 2x_{10} + \lambda_0 + (2x_{11} + \lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y] \\
 (2x_{10} + \lambda_0)\mathbb{E}_Y [Y] + (2x_{11} + \lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y^2] \\
 -2(x_{20}\lambda_0 + (x_{21}\lambda_0 + x_{20}\lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y] + x_{21}\lambda_1\mathbb{E}_Y [Y^2]) \\
 -2(x_{20}\lambda_0\mathbb{E}_Y [Y] + (x_{21}\lambda_0 + x_{20}\lambda_1)\mathbb{E}_Y [Y^2] + x_{21}\lambda_1\mathbb{E}_Y [Y^3]) \\
 (x_{10} - x_{20}^2) + (x_{11} - 2x_{20}x_{21})\mathbb{E}_Y [Y] - x_{21}^2\mathbb{E}_Y [Y^2] - \mathbb{E}_Y [\exp Y] \\
 (x_{10} - x_{20}^2)\mathbb{E}_Y [Y] + (x_{11} - 2x_{20}x_{21})\mathbb{E}_Y [Y^2] - x_{21}^2\mathbb{E}_Y [Y^3] - \mathbb{E}_Y [Y \exp Y]
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Ce système déterministe peut être résolu par les algorithmes standards de la programmation non-linéaire.

**Exemple numérique simple** Nous appliquons cette méthodologie à la résolution numérique du problème (3.9) posé en introduction. Les variables inconnues  $X^*$  et  $\Lambda^*$  sont recherchées dans l'espace engendré par la base canonique des polynômes de degré 5 :  $\Psi = \{1, Y, Y^2, Y^3, Y^4, Y^5\}$ . La résolution du système non-linéaire (3.25) étant réalisée par un algorithme de Newton-Raphson, des valeurs initiales des coefficients doivent être déterminées. Ces coefficients ont tous été fixés arbitrairement à 1. Afin de prendre en compte les contraintes d'inégalité, une variable d'écart a été introduite.

	Moyenne	Variance	Asymétrie	Applatissement
Calcul	1.7183	0.2420	0.0064	0.0083
Exact	1.7183	0.2420	0.0063	0.0084

TAB. 3.1 – Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : moments de la solution des équations de KKT projetés

Le tableau 3.1 et la figure 3.3 illustrent les résultats obtenus. Sur le premier, on constate une bonne adéquation entre les moments de la solution exacte et ceux de l'approximation calculée. Sur le graphe, la superposition des deux courbes indique également que l'algorithme a été capable d'identifier la solution de ce problème simple. L'étude de la répartition de l'erreur montre qu'en dépit d'oscillations, la répartition des défauts est relativement homogène.

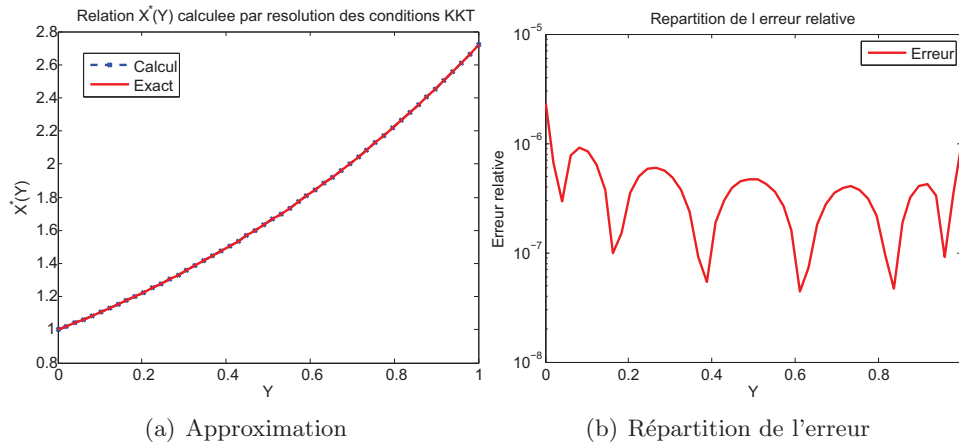


FIG. 3.3 – Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : approximation  $X^*(Y)$  par résolution des équations d'optimalité

Le tableau 3.2 présente les performances observées. En dépit du faible nombre d'inconnues, on remarque la quantité particulièrement élevée d'appels aux fonctions définissant le problème. Le temps de calcul est par conséquent important.

Nb appels cont.	Nb appels obj.	Nb itérations	Temps (s)
283320	137040	5	40

TAB. 3.2 – Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : performances

**Conclusion** Une limitation majeure de cette approche est liée à l'importante quantité de calcul à effectuer. En effet, l'évaluation des équations (3.25) dans un processus itératif peut entraîner des temps de calcul prohibitif. La méthode introduite dans le prochain paragraphe permet de dépasser partiellement cette limitation.

### 3.3.3.2 Un schéma de Newton stochastique

**Présentation de la méthode** Dans le paragraphe précédent, une méthode de résolution des équations d'équilibre de la solution de (3.25) a été proposée. Afin d'obtenir un problème soluble par des méthodes traditionnelles, le problème stochastique a été transformé en un problème déterministe équivalent. En appliquant la démarche inverse, une alternative originale est présentée dans cette section. Un schéma numérique est appliqué directement sur les variables aléatoires. Les opérations prescrites par cette procédure sont alors projetées sur un espace de dimension finie.

Une application de cette stratégie à la méthode de Newton est présentée ici. Une suite de vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}^{(it)}$  est construite de sorte à converger vers  $\mathbf{X}^*$ .

Dans le même temps, une suite de vecteurs  $\Lambda^{(it)}$  est définie de sorte à converger vers le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, pourvu que les vecteurs initiaux  $\mathbf{X}^{(0)}$  et  $\Lambda^{(0)}$  soient donnés, les suites peuvent être fabriquées itérativement :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(it+1)} \\ \Lambda^{(it+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(it)} \\ \Lambda^{(it)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{X}}^{(it)} \\ \mathbf{D}_{\Lambda}^{(it)} \end{pmatrix}$$

où les directions  $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}^{(l)}$  et  $\mathbf{D}_{\Lambda}^{(l)}$  sont des vecteurs aléatoires à déterminer. Dans un souci de simplification des notations, le rang de l'itération courante ( $it$ ) n'est plus noté dans la suite des calculs. A l'image de ce qui était fait dans la section précédente, il est nécessaire, pour obtenir un schéma numérique implémentable, que les inconnues soient définies sur un espace de dimension finie. Ainsi, les vecteurs aléatoires sont exprimés à l'aide d'une famille  $\Psi$  de fonctions de  $\mathbf{Y}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^P \begin{pmatrix} \mathbf{x}_p \\ \lambda_p \end{pmatrix} \psi_p(\mathbf{Y}) \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{D}_{\Lambda} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^P \begin{pmatrix} \mathbf{d}_p^{\mathbf{X}} \\ \mathbf{d}_p^{\Lambda} \end{pmatrix} \psi_p(\mathbf{Y})$$

où les coefficients  $\mathbf{x}_p$ ,  $\lambda_p$ ,  $\mathbf{d}_p^{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{d}_p^{\Lambda}$  sont des vecteurs déterministes. Un double indice  $d_{ip}^{\mathbf{X}}$  représente la  $i$ -ème composante du vecteur  $\mathbf{d}_p^{\mathbf{X}}$ . Nous définissons ici la direction de descente en appliquant la méthode de Newton à l'équation (3.23). Ainsi, la définition précédente de la fonction de Lagrange permet de calculer cette direction à chaque itération en résolvant le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{X}}^2 L(\mathbf{X}, \Lambda) & \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{h}(\mathbf{X})^t \\ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{h}(\mathbf{X}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{D}_{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{X}} L(\mathbf{X}, \Lambda) \\ -\mathbf{h}(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

où  $\nabla_{\mathbf{X}}^2 L(\mathbf{X}, \Lambda)$  représente la matrice hessienne de la fonction de Lagrange par rapport aux variables d'optimisation  $\mathbf{X}$ . De même  $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{h}(\mathbf{X})$  est la matrice jacobienne du vecteur des contraintes  $\mathbf{h}(\mathbf{X})$ . Ce système définit  $K + I$  équations sur des variables aléatoires. Nous cherchons donc à transformer ces équations afin de calculer directement les coefficients  $\mathbf{d}_p^{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{d}_p^{\Lambda}$  adaptés. A cet effet, chaque ligne de (3.28) est projetée sur une fonction  $\psi_p$  de la famille  $\Psi$ . Ainsi,  $P \times (I + K)$  équations sont obtenues :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^I \sum_{q=1}^P a_{ipjq} d_{jq}^{\mathbf{X}} + \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^P b_{ipkq} d_{kq}^{\Lambda} &= d_{ip} \quad \forall i = 1, \dots, I \text{ et } p = 1, \dots, P \\ \sum_{j=1}^I \sum_{q=1}^P b_{jqkp} d_{jq}^{\mathbf{X}} &= g_{kp} \quad \forall k = 1, \dots, K \text{ and } p = 1, \dots, P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } a_{ipjq} &= \int_{E_{\mathbf{Y}}} \frac{\partial^2 L}{\partial X_i \partial X_j}(\mathbf{X}^{(it)}, \boldsymbol{\Lambda}^{(it)}) \psi_p(\mathbf{y}) \psi_q(\mathbf{y}) d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) & (3.29) \\
b_{ipkq} &= \int_{E_{\mathbf{Y}}} \frac{\partial h_k}{\partial X_i}(\mathbf{X}^{(it)}) \psi_p(\mathbf{y}) \psi_q(\mathbf{y}) d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \\
d_{ip} &= - \int_{E_{\mathbf{Y}}} \frac{\partial L}{\partial X_i}(\mathbf{X}^{(it)}, \boldsymbol{\Lambda}^{(it)}) \psi_p(\mathbf{y}) d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \\
g_{kp} &= - \int_{E_{\mathbf{Y}}} h_k(\mathbf{X}^{(it)}) \psi_p(\mathbf{y}) d\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Cet ensemble d'équations forme un système linéaire carré de dimension  $P(I + K)$ . Les vecteurs inconnus  $\{\mathbf{d}_q^{\mathbf{X}}\}_q$  sont assemblés dans le vecteur  $\mathbf{d}^{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{IP}$ . Pour cela, nous définissons une bijection  $\overset{P}{\leftrightarrow}$ , associant un indice  $\alpha \in \mathbb{N}^{IP}$  au double indice  $(i, p) \in \mathbb{N}^I \times \mathbb{N}^P$ . Le même type de numérotation peut être appliqué afin de définir vecteur des coefficients des multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{d}^{\boldsymbol{\Lambda}} = (\mathbf{d}_1^{\boldsymbol{\Lambda}}, \dots, \mathbf{d}_P^{\boldsymbol{\Lambda}})^t$  est introduit. A cet effet, la bijection  $\overset{K}{\leftrightarrow}$  entre  $\mathbb{N}^K \times \mathbb{N}^P$  et  $\mathbb{N}^{KP}$  est introduite. Finalement, le système linéaire peut être écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^t \\ \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{\mathbf{X}} \\ \mathbf{d}^{\boldsymbol{\Lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } \mathcal{A} &= [\mathcal{A}_{\alpha\beta}] & \text{où } \mathcal{A}_{\alpha\beta} &= a_{ipjq} \text{ tel que } \alpha \overset{P}{\leftrightarrow} (i, p) \text{ et } \beta \overset{P}{\leftrightarrow} (j, q) & (3.31) \\
\mathcal{B} &= [\mathcal{B}_{\alpha\beta}] & \text{où } \mathcal{B}_{\alpha\beta} &= b_{ipkq} \text{ tel que } \alpha \overset{P}{\leftrightarrow} (i, p) \text{ et } \beta \overset{K}{\leftrightarrow} (k, q) \\
\mathcal{D} &= [\mathcal{D}_{\alpha\beta}] & \text{où } \mathcal{D}_{\alpha\beta} &= d_{ipkq} \text{ tel que } \alpha \overset{P}{\leftrightarrow} (i, p) \\
\mathcal{G} &= [\mathcal{G}_{\alpha\beta}] & \text{où } \mathcal{G}_{\alpha\beta} &= g_{ipkq} \text{ tel que } \beta \overset{K}{\leftrightarrow} (k, q)
\end{aligned}$$

La résolution de ce système peut être réalisée à l'aide des algorithmes usuels de l'algèbre linéaire. Comme dans la méthode définie dans la section précédente, cette matrice doit être calculée à chaque itération. Or, le coût de calcul engendré par les différentes intégrations multidimensionnelles peut être important. Toutefois, ces calculs peuvent être évités grâce à l'utilisation des méthodes d'approximation développées dans le cadre des approches de quasi-Newton [Nocedal 2000]. Les mises à jour Broyden permettent ainsi d'obtenir une approximation de la matrice des dérivées secondes en utilisant seulement la matrice de l'itération précédente et les dérivées premières [Broyden 1965]. La matrice hessienne n'est donc calculée qu'à la première itération.



**Application à un problème simple** Encore une fois, nous pouvons illustrer cette procédure en l'appliquant à la résolution du problème modèle (3.9). Après introduction d'une variable d'écart  $X_2$ , le problème s'écrit

$$X^* = \arg \min_{\mathbf{X}} X_1^2$$

tel que :  $X_1 - X_2^2 - \exp Y = 0$

Le lagrangien du problème est donné par :

$$L(\mathbf{X}, \Lambda) = X_1^2 + \Lambda(X_1 - X_2^2 - \exp Y)$$

Ses dérivées premières et secondes par rapport à chacune des variables sont donc :

- $\nabla_{\mathbf{X}} L = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial X_1} \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_1 + \Lambda \\ -2X_2\Lambda \end{pmatrix}$
- $\nabla_{\Lambda} L = \left( \frac{\partial L}{\partial \Lambda} \right) = ( X_1 - X_2^2 - \exp Y )$
- $\nabla_{\mathbf{X}}^2 L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\Lambda \end{pmatrix}$
- $\nabla_{\mathbf{X}\Lambda}^2 L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial \Lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial \Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2X_2\Lambda \end{pmatrix}$

Les variables d'optimisation et le multiplicateur de Lagrange sont des variables aléatoires. Ils sont approchés par des développements sur la famille  $\Psi = \{1, Y\}$  :

$$X_1^* = x_{10}^* + x_{11}^* Y \quad , \quad X_2^* = x_{20}^* + x_{21}^* Y \quad \text{et} \quad \Lambda^* = \lambda_0^* + \lambda_1^* Y$$

où les coefficients  $x_{10}^*, x_{11}^*, x_{20}^*, x_{21}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*$  sont des inconnues à déterminer. Pour les calculer, nous construisons des suites  $\{X_1^{(it)}\}_{it>1}$ ,  $\{X_2^{(it)}\}_{it>1}$  et  $\{\Lambda^{(it)}\}_{it>1}$  avec :

$$X_1^{(it+1)} = X_1^{(it)} + D_1^{(it)} \quad , \quad X_2^{(it+1)} = X_2^{(it)} + D_2^{(it)} \quad \text{et} \quad \Lambda^{(it+1)} = \Lambda^{(it)} + D_{\Lambda}^{(it)}$$

Afin de permettre les calculs, ces variables aléatoires sont elles-mêmes exprimées sous forme de développements sur la famille  $\Psi$  :

$$X_1^{(it)} = x_{10}^{(it)} + x_{11}^{(it)} Y \quad , \quad X_2^{(it)} = x_{20}^{(it)} + x_{21}^{(it)} Y \quad \text{et} \quad \Lambda^{(it)} = \lambda_0^{(it)} + \lambda_1^{(it)} Y$$

$$D_1^{(it)} = d_{10}^{(it)} + d_{11}^{(it)} Y \quad , \quad D_2^{(it)} = d_{20}^{(it)} + d_{21}^{(it)} Y \quad \text{et} \quad D_{\Lambda}^{(it)} = d_{\lambda_0}^{(it)} + d_{\lambda_1}^{(it)} Y$$

A l'itération 0 les coefficients du développement de  $X_1^{(0)}$ ,  $X_2^{(0)}$  et  $\Lambda^{(0)}$  sont considérés comme donnés. Il est alors nécessaire de calculer les coefficients du développement

de la direction de descente. A cet effet, les inconnues sont assemblées dans deux vecteurs :

$$\mathbf{d}^{\mathbf{X},(0)} = (d_{10}^{(0)}, d_{11}^{(0)}, d_{20}^{(0)}, d_{21}^{(0)})^t \quad \text{et} \quad \mathbf{d}^{\mathbf{\Lambda},(0)} = (d_{\lambda 0}^{(0)}, d_{\lambda 1}^{(0)})^t$$

Le choix de cet assemblage fixe les deux règles d'indiciage :

$$\begin{aligned} \alpha = 1 &\stackrel{P}{\leftrightarrow} (i, p) = (1, 0) \text{ ie } d_1^{\mathbf{X},(0)} = d_{10}^{(0)} \\ \alpha = 2 &\stackrel{P}{\leftrightarrow} (i, p) = (1, 1) \text{ ie } d_2^{\mathbf{X},(0)} = d_{11}^{(0)} \\ \alpha = 3 &\stackrel{P}{\leftrightarrow} (i, p) = (2, 0) \text{ ie } d_3^{\mathbf{X},(0)} = d_{20}^{(0)} \\ \alpha = 4 &\stackrel{P}{\leftrightarrow} (i, p) = (2, 1) \text{ ie } d_4^{\mathbf{X},(0)} = d_{21}^{(0)} \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \alpha = 1 &\stackrel{K}{\leftrightarrow} (i, p) = (1, 0) \text{ ie } d_1^{\mathbf{\Lambda},(0)} = d_{\lambda 0}^{(0)} \\ \alpha = 2 &\stackrel{K}{\leftrightarrow} (i, p) = (1, 1) \text{ ie } d_2^{\mathbf{\Lambda},(0)} = d_{\lambda 1}^{(0)} \end{aligned}$$

En appliquant la méthode de Newton au lagrangien, nous avons montré que ces vecteurs sont solutions du système (3.30) :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(0)} & \mathcal{B}^{(0)t} \\ \mathcal{B}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{\mathbf{X},(0)} \\ \mathbf{d}^{\mathbf{\Lambda},(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(0)} \\ \mathcal{G}^{(0)} \end{pmatrix}$$

La matrice  $\mathcal{A}^{(0)}$  de taille  $4 \times 4$  est formée des coefficients  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{(0)}$  donnée par la relation :

$$\text{Si } \alpha \stackrel{P}{\leftrightarrow} (i, p) \text{ et } \beta \stackrel{P}{\leftrightarrow} (j, q) \text{ alors } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{(0)} = a_{ipjq}^{(0)}$$

Cette relation permet le calcul des différents coefficients :

- $A_{11}^{(0)} = a_{1010}^{(0)} = \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_1}(\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{\Lambda}^{(0)}) \psi_0 \psi_0 \right] = \mathbb{E}_Y [2 \times 1 \times 1] = 2$
- $A_{21}^{(0)} = a_{1110}^{(0)} = \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_1}(\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{\Lambda}^{(0)}) \psi_1 \psi_0 \right] = \mathbb{E}_Y [2 \times Y \times 1] = 2\mathbb{E}_Y [Y]$   
 $= a_{1011}^{(0)} = A_{12}^{(0)}$
- $A_{31}^{(0)} = a_{2010}^{(0)} = \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1}(\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{\Lambda}^{(0)}) \psi_0 \psi_0 \right] = \mathbb{E}_Y [0 \times 1 \times 1] = 0$   
 $= a_{1020}^{(0)} = A_{13}^{(0)}$
- $A_{41}^{(0)} = a_{2110}^{(0)} = \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1}(\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{\Lambda}^{(0)}) \psi_1 \psi_0 \right] = \mathbb{E}_Y [0 \times Y \times 1] = 0$   
 $= a_{1120}^{(0)} = A_{23}^{(0)}$   
 $= a_{2011}^{(0)} = A_{32}^{(0)}$   
 $= a_{1021}^{(0)} = A_{14}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \bullet A_{44}^{(0)} &= a_{2121}^{(0)} = \mathbb{E}_Y \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_2}(\mathbf{X}^{(0)}, \boldsymbol{\Lambda}^{(0)}) \psi_1 \psi_1 \right] = \mathbb{E}_Y [-2\Lambda^{(0)} \times Y \times Y] = 0 \\ &= \mathbb{E}_Y \left[ -2(\lambda_0^{(0)} + \lambda_1^{(0)} Y) Y^2 \right] = -2 \left( \lambda_0^{(0)} \mathbb{E}_Y [Y^2] + \lambda_1^{(0)} \mathbb{E}_Y [Y^3] \right) \end{aligned}$$

Tous les coefficients de la matrice  $\mathcal{A}^{(0)}$  peuvent être calculés ainsi. En pratique, il est possible d'effectuer le calcul des espérances par des méthodes d'intégration numérique. Par ailleurs, nous pouvons constater que des symétries permettent d'économiser l'évaluation de certains coefficients.

La matrice  $\mathcal{B}^{(0)} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^2$  ainsi que les vecteurs  $\mathcal{D}^{(0)} \in \mathbb{R}^4$  et  $\mathcal{G}^{(0)} \in \mathbb{R}$  peuvent être déterminées de la même manière. La résolution du système (3.30) permet de déterminer les coefficients du développement de la première direction de descente. Ces coefficients sont alors utilisés pour construire les nouvelles variables aléatoires  $X_1^{(1)}$ ,  $X_2^{(1)}$  et  $\Lambda^{(1)}$  :

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= \left( x_{10}^{(0)} + d_{10}^{(0)} \right) + \left( x_{11}^{(0)} + d_{11}^{(0)} \right) Y = x_{10}^{(1)} + x_{11}^{(1)} Y \\ X_2^{(1)} &= \left( x_{20}^{(0)} + d_{20}^{(0)} \right) + \left( x_{21}^{(0)} + d_{21}^{(0)} \right) Y = x_{20}^{(1)} + x_{21}^{(1)} Y \\ \Lambda^{(1)} &= \left( \lambda_{10}^{(0)} + d_{\lambda 0}^{(0)} \right) + \left( \lambda_{11}^{(0)} + d_{\lambda 1}^{(0)} \right) Y = \lambda_0^{(1)} + \lambda_1^{(1)} Y \end{aligned}$$

L'itération de ce procédé permet de définir une suite de variables aléatoires. Dans le prochain paragraphe, nous vérifierons que cette séquence converge vers la solution du problème.

**Exemple numérique simple** Afin de valider ces hypothèses, nous appliquons cette stratégie à la résolution du problème (3.9) énoncé dans l'introduction. Comme pour la méthode précédente, la base canonique des polynômes de degré 5 est utilisée et les coefficients du développement sont initialisés à 1. Le tableau 3.3 et les figures 3.4 présentent les résultats obtenus en appliquant ce schéma avec un calcul exact de la matrice hessienne ou avec une approximation de Broyden. Ces observations permettent de conclure que les deux approches ont bien permis d'identifier la solution. Une analyse plus fine de l'erreur permet toutefois de constater que l'erreur commise par la méthode de Newton est plus faible.

Méthode	Moyenne	Variance	Asymétrie	Applatissement
Newton	1.7183	0.2420	0.0064	0.0084
Quasi-Newton	1.7183	0.2424	0.0064	0.0085
Exact	1.7183	0.2420	0.0063	0.0084

TAB. 3.3 – Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : moments de la solution calculée par les méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées

Enfin, le tableau 3.8 présente les performances de chaque méthode. Les deux méthodes introduites ici ont été bien plus rapide que la résolution directe des

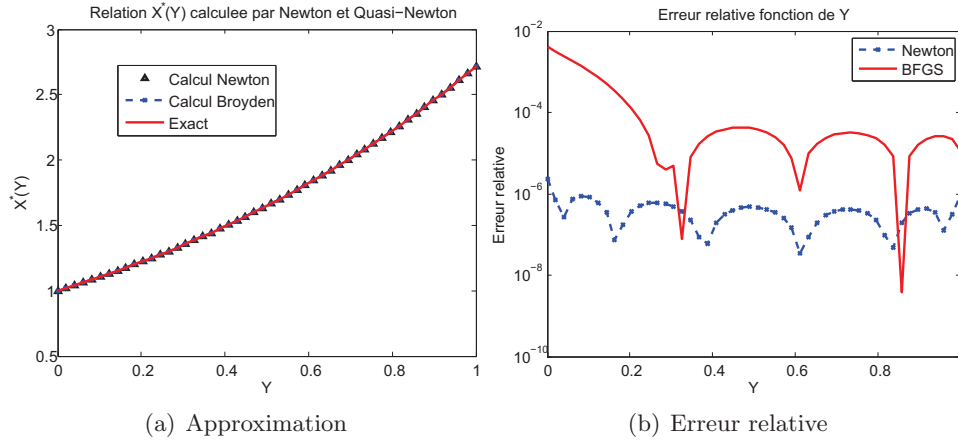


FIG. 3.4 – Quantification des incertitudes sur un problème d’optimisation simple : approximation  $X^*(Y)$  par les méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées et répartition des erreurs relatives

équations de KKT projetés. Toutefois, nous pouvons constater que sur ce cas, la méthode de Quasi-Newton est moins intéressante que la méthode de Newton, du point de vue du temps de calcul. Si chaque itération est plus rapide, les erreurs incorporées dans le calcul de la matrice hessienne contribuent à une nette augmentation du nombre d’itérations nécessaire à l’obtention de la convergence.

Méthode	Nb appels cont.	Nb appels obj.	Nb itérations	Temps (s)
Galerkin KKT	283320	137040	5	40.0
Newton	73618	43464	3	2.0
Quasi-Newton	96756	50100	28	8.0

TAB. 3.4 – Quantification des incertitudes sur un problème d’optimisation simple : performances des méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées

**Conclusion** Cette méthodologie permet de définir une vaste catégorie d’algorithmes grâce à l’adaptation directe des schémas déterministes. Sur cet exemple, le problème des temps de calcul importants a été partiellement résolu. Toutefois, l’approche présentée basée sur la méthode de Newton présente les mêmes inconvénients que sa contrepartie déterministe : en fonction du point de départ, l’algorithme peut converger vers des minima locaux, voire diverger. En outre, des solutions parasites peuvent être calculées car les conditions KKT du premier ordre caractérisent de la même manière minima, maxima et points selles.

### 3.3.4 Utilisation de méthodes non-intrusives

Dans le cadre déterministe, les problèmes précédents ont été résolus par l'emploi de méthodes *ad hoc*. Toutefois, l'adaptation de ces techniques spécifiques au contexte stochastique n'est pas aisée. Par contre, il est parfaitement envisageable de les utiliser pour générer un échantillon  $\{\mathbf{x}^{*(n_s)}\}_{n_s}$  de  $N_s$  solutions de problèmes déterministes définies pour des valeurs fixées des paramètres incertains  $\{\mathbf{y}^{(n_s)}\}_{n_s}$ . Chaque  $\mathbf{x}^{*(n_s)}$  est alors solution de :

$$\mathbf{x}^{*(n_s)} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{y}^{(n_s)})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(n_s)}) \quad (3.32)$$

L'emploi de méthodes adaptées pour ajuster le modèle (3.15) à cet échantillon permettra alors de calculer les coefficients du développement. Cette stratégie est souvent qualifiée de non-intrusive car elle ne nécessite pas de modifications des implémentations existantes [Sudret 2004][Sudret 2007]. Plusieurs variantes existent, correspondant à autant de mesures de l'ajustement entre le modèle et l'échantillon. Nous nous concentrons ici sur deux techniques : l'ajustement des moments et les méthodes à base de régression.

#### 3.3.4.1 Ajustement des moments

Cette méthode non-intrusive requiert le calcul préalable d'un échantillon de  $N_s$  solutions  $\{\mathbf{x}^{*(1)}, \dots, \mathbf{x}^{*(N_s)}\}$ . Pourvu que le nombre de tirages  $N_s$  soit suffisamment important, il est possible de calculer les  $N_m$  premiers moments empiriques de la distribution :

$$\mathbf{M}_{n_m} = \mathbb{E}[(\mathbf{X}^*)^{n_m}] \approx \frac{1}{N_s} \sum_{n_s=1}^{N_s} \left(\mathbf{x}^{*(n_s)}\right)^{n_m}, \quad 1 \leq n_m \leq N_m$$

Pour un ensemble de coefficients  $\mathbf{x}_p$  donnés, les moments  $\mathbf{m}_{n_m}^*$  de la variable  $\sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p \psi_p(\mathbf{Y})$  peuvent être calculés par des méthodes de Monte Carlo ou de quadrature numérique. Le vecteurs aléatoire solution  $\mathbf{X}^*$  est finalement déterminé au moyen d'une procédure d'ajustement entre les  $N_m$  moments empiriques  $\mathbf{M}_{n_m}$  et les moments  $\mathbf{m}_{n_m}^*$  du modèle :

$$\mathbf{X}^* = \sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p^* \psi_p(\mathbf{Y})$$

avec  $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_P^*) = \arg \min_{\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^I} \sum_{n_m=1}^{N_m} \|\mathbf{m}_{n_m}^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_P) - \mathbf{M}_{n_m}\| \quad (3.33)$

Néanmoins, une remarque doit être faite sur le sens à donner à la solution obtenue. En effet, le théorème de continuité de Lévy précise que la convergence d'une

séquence de variable aléatoires  $\{Z_l\}_{l \geq 0} \rightarrow Z$  construite par une approche d'ajustement des moments est faible [Revuz 1997]. En d'autres termes, les distributions respectives des variables  $Z_l$  convergent simplement vers la distribution de  $Y$ . Dans le cadre de notre étude, cela signifie que la procédure décrite permet une bonne estimation de la distribution de  $\mathbf{X}^*$ . En revanche, aucune garantie sur la qualité de la relation calculée entre  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{X}^*$  n'est fournie.

Par ailleurs, l'équation (3.33) est fortement non-convexe. Par conséquent, l'utilisation de procédures d'optimisation globale coûteuses est recommandée pour obtenir une solution de qualité. Les performances en terme de temps de calcul sont également dégradées par l'importante quantité de solutions déterministes à obtenir pour construire l'échantillon. En effet, pour être suffisamment précis, le calcul des moments empiriques requiert un panel raisonnablement grand.

**Exemple numérique simple** Afin d'illustrer ces observations, nous appliquons la méthode d'ajustement des moments à l'exemple traité précédemment. Encore une fois, la solution est cherchée sous la forme de coefficients d'un polynôme de degré 5. L'ajustement est réalisé relativement au cinq premiers moments statistiques. Le tableau 3.5 contient les moments statistiques de la solution obtenus pour des échantillons de taille croissante. Nous pouvons remarquer que pour des échantillons trop petits, la précision des moments de référence n'est pas suffisante et conduit à l'identification de distributions erronées. Néanmoins, lorsqu'une quantité satisfaisante d'observations est disponible, les propriétés statistiques du résultat sont proches de celles souhaitées.

Nb échantillon	Moyenne	Variance	Asymétrie	Applatissement
10	1.3965	0.1492	0.0280	0.0219
100	1.7616	0.2721	0.0104	0.0101
1000	1.7522	0.2417	0.0036	0.0078
5000	1.7214	0.2427	0.0064	0.0085
Exact	1.7183	0.2420	0.0063	0.0084

TAB. 3.5 – Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : moments de la solution calculée par une méthode d'ajustement des moments

Malgré l'obtention d'un résultat possédant la bonne distribution, la figure 3.5 met en évidence une des faiblesses de cette approche. En effet, nous avons déjà mentionné que cette méthode fournit un cadre pour identifier la loi du résultat. Mais aucune garantie n'est fournie sur sa capacité à reproduire correctement la relation  $X^*(Y)$ . Ainsi, nous pouvons observer que les courbes identifiées ne correspondent pas au résultat attendu.

Enfin, le tableau 3.6 présente les performances de l'algorithme avec des échantillons de taille croissante. La seconde colonne contient le temps consacré à la

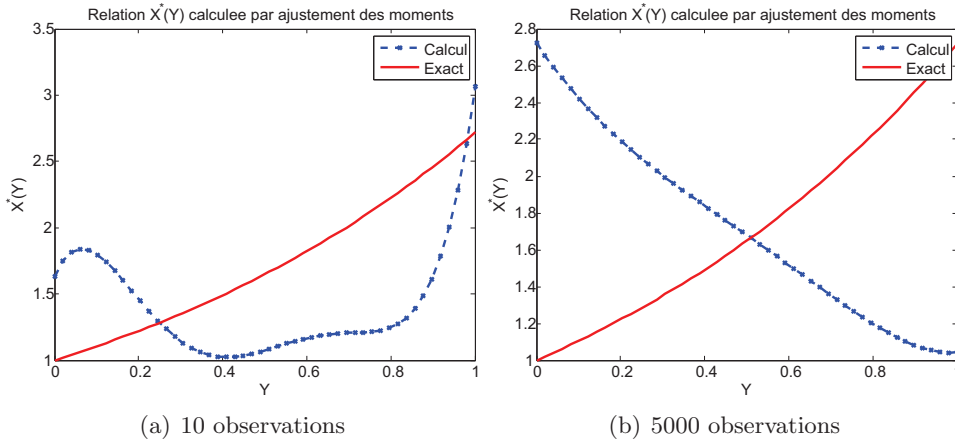


FIG. 3.5 – Quantification des incertitudes sur un problème d’optimisation simple : approximation  $X^*(Y)$  par ajustement des moments

phase préliminaire de création de l’échantillon par des appels à l’algorithme d’optimisation déterministe. La troisième colonne expose le temps employé à la résolution du problème d’ajustement. Nous pouvons constater que le coût de calcul nécessaire à l’obtention d’une solution de qualité est particulièrement élevé.

Nb échantillon	Temps échantillon (s)	Temps ajustement (s)
10	0.3	0.7
100	1.5	4.4
1000	4.0	34.85
5000	19.1	185.0

TAB. 3.6 – Quantification des incertitudes sur un problème d’optimisation simple : performances des méthodes d’ajustement des moments

**Conclusion** Malgré la simplicité apparente de son implémentation, cette méthode présente souvent l’inconvénient d’entraîner des temps de calcul important. Le paragraphe suivant introduit finalement une méthode plus efficace.

### 3.3.4.2 Les méthodes à base de régression

**Méthode de collocation** La méthode de collocation est une méthode non-intrusive introduite par Webster dans le cadre du calcul des coefficients d’un polynôme de chaos [Webster 1996]. Le principe est d’ajuster les coefficients du modèle pour satisfaire des relations d’égalité entre  $N_s$  observations et les prédictions correspondantes :

$$\mathbf{x}^{*(n_s)} = \sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p^* \psi_p \left( \mathbf{y}^{(n_s)} \right), \quad n_s = 1..N_s \quad (3.34)$$

Pour que ce système soit déterminé, il est nécessaire que le nombre d'échantillons  $N_s$  soit égal au nombre  $P$  de vecteurs à déterminer. Autrement dit, le nombre d'expériences est déterminé par le nombre de coefficients inconnus. Berveiller note que cette restriction peut se révéler importante en présence d'une grande variabilité et ainsi conduire à de très mauvais résultats [Berveiller 2005].

**Régression au sens des moindres carrés** Pour pallier ce défaut et bénéficier d'un nombre arbitraire d'expérimentation, de nombreuses techniques ont été introduites afin de relaxer la contrainte (3.34). Par exemple, l'emploi de méthodes de surface de réponse [Faravelli 1989][Gayton 2004] et de régression [Isukapalli 1999] [Berveiller 2006][Sudret 2007] s'est révélé fructueux pour calculer les coefficients d'un développement sur le chaos polynômial. Dans ces approches, la stricte égalité aux points de régression n'est pas imposée mais une mesure de l'erreur quadratique moyenne  $S^2$  entre le modèle et les observations doit être minimisée :

$$S^2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_s}) = \sum_{n_s=1}^{N_s} \|\mathbf{x}^{*(n_s)} - \sum_{p=1}^{N_s} \mathbf{x}_p \psi_p(\mathbf{y}^{(n_s)})\|^2 \quad (3.35)$$

L'écriture des conditions d'optimalité du premier ordre permet d'obtenir un système linéaire de  $I \times P$  équations et autant d'inconnues. Berveiller précise que lorsque le nombre de points de régression est trop faible, le système peut être mal conditionné [Berveiller 2005]. L'auteur conseil alors l'emploi de méthodes de résolution spécifiques, telle que la décomposition en valeurs singulières [Press 2007].

**Choix des points de régression** Dans le cadre du calcul des coefficients du développement par une méthode de régression, le nombre de points dans le plan d'expérience n'est pas prescrit par le nombre d'inconnues. Le choix du plan d'expérience et du nombre de points de régression est donc laissé aux soins du concepteur. L'utilisation de points purement aléatoires est souvent à proscrire [Berveiller 2005]. L'utilisation des méthodes de construction de plans d'expérience, comme l'hypercube latin, est par contre indiquée [Choi 2004]. Dans le cadre du chaos polynômial, Isukapalli propose l'utilisation de racines de polynômes orthogonaux [Isukapalli 1999]. En adoptant cette stratégie, Berveiller présente dans sa thèse une étude numérique sur la taille du plan d'expérience. En parallèle, l'introduction d'une matrice d'information a permis à Sudret de quantifier la précision des schémas de régression et de proposer une méthode efficace pour déterminer le nombre de points à utiliser [Sudret 2008].

**Exemple numérique simple** Afin d'illustrer ces propos, nous appliquons cette stratégie à la résolution du problème modèle. Les coefficients du polynôme de degré 5 servant d'approximation à la fonction  $X^*(Y)$  sont évalués par régression. La figure 3.6 représente les résultats obtenus avec deux ensembles de points de régression. Sur



le graphe de gauche, six points de régression ( $N_s = P$ ) sont choisis parmi les racines des polynômes d’Hermite de degré 6, conformément aux propositions introduites dans [Isukapalli 1999]. Inversement, à taille d’échantillon constante, la courbe de droite est obtenu en prenant un choix peu judicieux de points de régression. Dans ce second cas, les points sont placés aléatoirement sur l’intervalle  $[0.8; 1]$ . Nous pouvons constater que la qualité de la solution dépend du plan d’expérience utilisé pour construire le panel de réponses. Toutefois, le respect des indications émises dans la littérature semble induire des résultats satisfaisants.

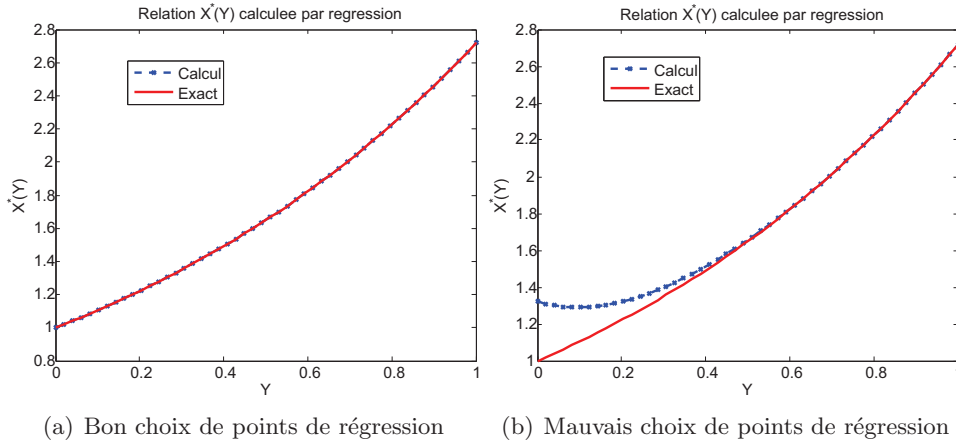


FIG. 3.6 – Quantification des incertitudes sur un problème d’optimisation simple : approximation  $X^*(Y)$  par régression

Le tableau 3.7 corrobore ces observations. En effet, les propriétés statistiques de l’approximation calculée sont en adéquation avec la solution de référence. Lorsque l’échantillon a été obtenu par construction d’un plan d’expérience de qualité, la précision de la méthode de régression est très satisfaisante.

Qualité panel	Moyenne	Variance	Asymétrie	Applatissement
Bonne	1.7183	0.2420	0.0064	0.0084
Mauvaise	1.7692	0.1908	0.0074	0.0054
Exact	1.7183	0.2420	0.0063	0.0084

TAB. 3.7 – Quantification des incertitudes sur un problème d’optimisation simple : moments de la solution calculée par régression

Enfin, nous nous intéressons aux performances de la méthode de régression en temps de calcul. Nous pouvons constater dans le tableau 3.8 que le nombre d’appels aux fonctions définissant le problème d’optimisation est très faible. Par conséquent, les temps de calcul engendrés sont minimes.

**Conclusion** La méthode de régression est une alternative intéressante pour résoudre le problème de quantification des incertitudes en optimisation. En effet,

Nb appels cont.	Nb appels obj.	Temps éch. (s)	Temps régression (s)
68	34	0.2685	0.0218

TAB. 3.8 – Quantification des incertitudes sur un problème d’optimisation simple : performances des méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées

elle est à la fois précise et particulièrement efficace. Son caractère non-intrusif rend également son implémentation aisée et permet d’utiliser les méthodes d’optimisation les plus performantes. Cependant, l’étude d’un exemple a permis de mettre en lien la précision de la solution et la qualité du plan d’expérience. Néanmoins, les indications présentées dans la littérature permettent de choisir un échantillon satisfaisant.

### 3.3.5 Exemples numériques

Dans cette partie, la qualité des solutions fournies par les différentes approches est analysée sur des exemples numériques. Trois exemples sont résolus, tant avec les approches intrusives que les approches à base d’échantillon.

#### 3.3.5.1 Exemple 1 : problème d’optimisation quadratique

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la résolution numérique du problème :

$$X^* = \arg \min_X X^2$$

tel que :  $Y - X \leq 0$

où  $Y$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 0.5)$  tronquée sur  $[-1, 1]$ . La fonction de répartition de  $Y$  est notée  $F_Y$ . L’unique solution de ce problème d’optimisation convexe est donnée par  $X^*(Y) = \max(Y ; 0)$ . Par conséquent, la fonction de répartition est :

$$F_{X^*}(\alpha) = \mathbb{P}[X^* \leq \alpha] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ F_Y(\alpha) & \text{si } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Les méthodes intrusives de quantification introduites dans la section précédente ne traitent que les problèmes présentant des contraintes d’égalité. Pour résoudre le problème présenté ici, des variables d’écart sont introduites :

$$(X^*, S^*) = \arg \min_{X, S} X^2$$

tel que :  $Y - X - S^2 = 0$

Pour résoudre ce problème, l’inconnue  $X^*$  est approchée par un développement sur la base canonique des polynômes de la variable  $Y$ . L’estimation des cinq premiers

moments nécessaires à la procédure d'ajustement est réalisée grâce à un échantillon de 1000 observations aléatoires. Les points de régression sont choisis en suivant les indications présentées dans [Isukapalli 1999].

Les figures 3.7 à 3.10 montrent les approximations de la fonction  $X^*(Y)$  calculées avec les différents schémas et les fonctions de répartition correspondantes. Cette étude qualitative permet de constater une bonne adéquation entre la courbe exacte et les approximations.

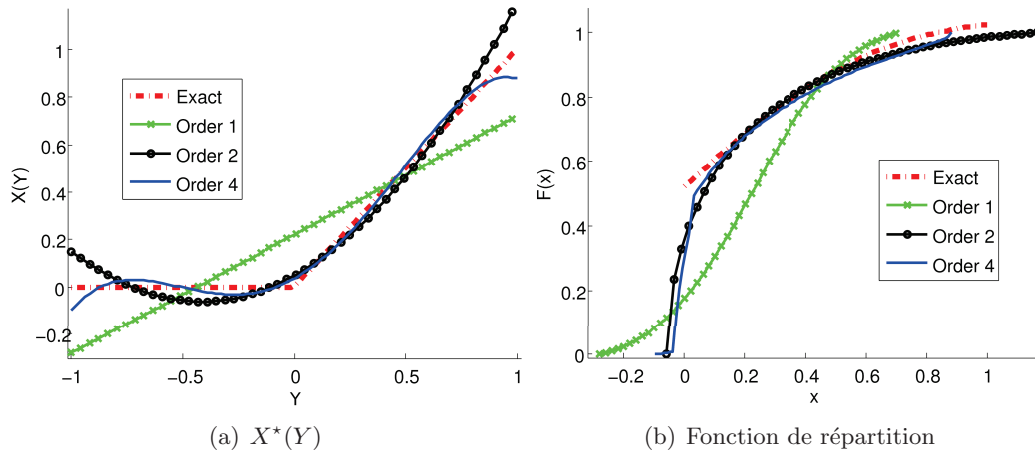


FIG. 3.7 – Exemple 1 : résolution des équations de KKT projetées

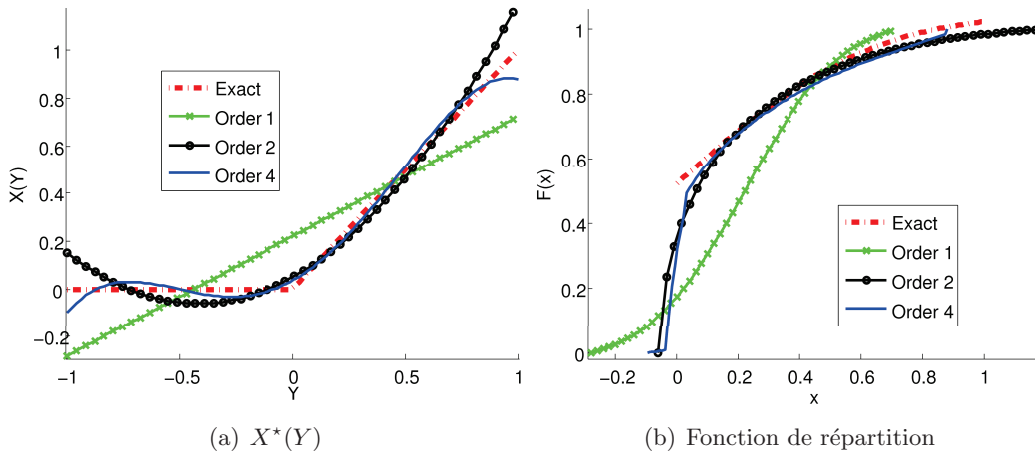


FIG. 3.8 – Exemple 1 : méthode de Newton projetée

Une étude quantitative peut être menée en introduisant une mesure de l'erreur quadratique moyenne  $\varepsilon^2$  entre les fonctions de  $Y$   $G_{ref}$  et son approximation  $G_{app}$  :

$$\varepsilon^2(G) = \sqrt{\int_{E_Y} (G_{ref}(y) - G_{app}(y))^2 d\mathbb{P}_Y(y)} \quad (3.36)$$

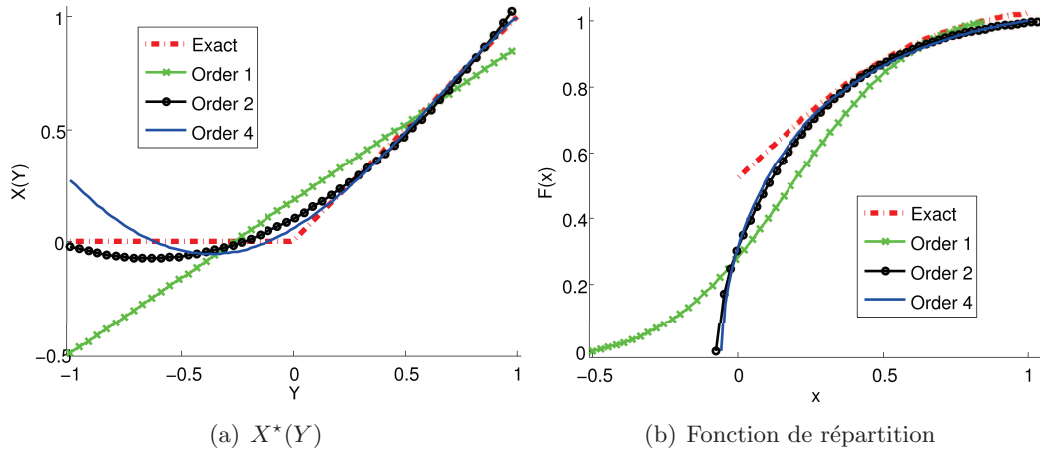


FIG. 3.9 – Exemple 1 : ajustement des moments

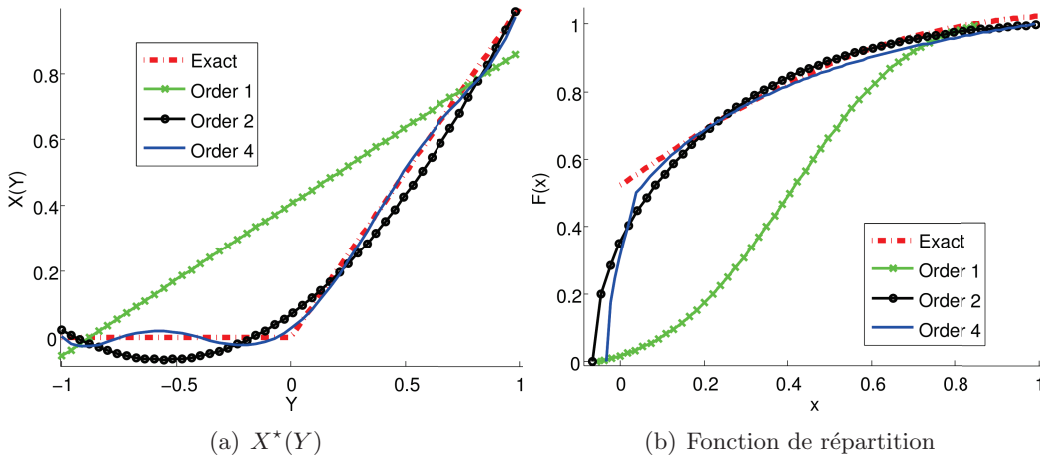


FIG. 3.10 – Exemple 1 : méthode de régression

La figure 3.11(a) représente l'évolution de l'erreur quadratique moyenne pour l'approximation  $X^*(Y)$  lorsque différentes méthodes sont employées. La figure 3.11(b), elle, se concentre sur l'erreur commise sur la fonction de répartition.

Nous pouvons voir sur ces figures que les approches basées sur la méthode de Newton et l'ajustement des moments ne parviennent pas à donner des approximations d'ordre supérieur à 7 et 6 respectivement. L'approche de quasi-Newton n'a, quant à elle, fourni des résultats satisfaisants que pour des ordres très faibles. Pour la méthode de Newton, cette non convergence peut être expliquée en partie par l'accumulation d'erreurs numériques pendant les étapes d'évaluation par quadrature des équations (3.29). De même, ces erreurs contribuent aux oscillations de l'erreur quadratique moyenne observée lors de la résolution des équations KKT et au manque de stabilité de la méthode de quasi-Newton. Les problèmes de convergence de l'approche par ajustement des moments sont liés à des problèmes d'optimisation

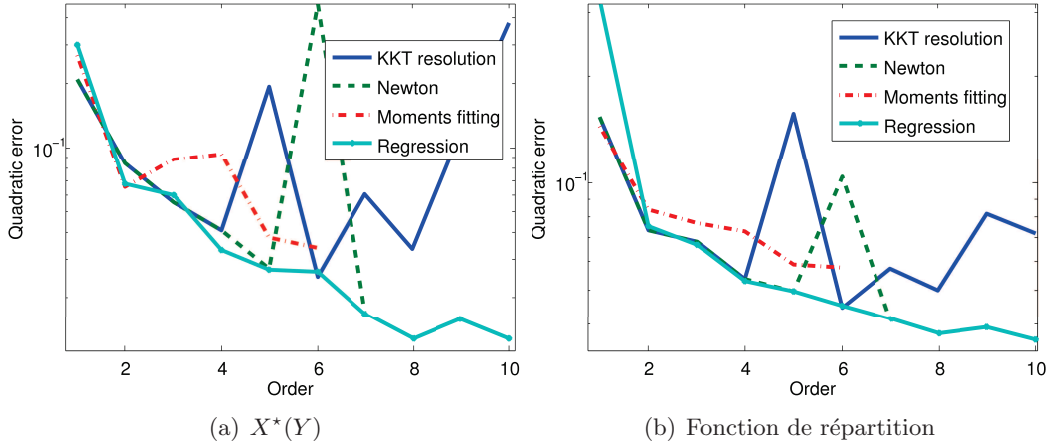


FIG. 3.11 – Exemple 1 : comparaison des erreurs quadratiques moyennes

non-convexe. Il est en effet difficile de déterminer l'optimum global du problème de minimisation de l'erreur sur les moments. De plus, le nombre important de simulations à effectuer pour obtenir une estimation précise des moments mène à des temps de calcul prohibitifs.

Enfin, la figure 3.12 illustre l'évolution des temps de calcul nécessaires à chaque méthode pour fournir un résultat. Nous pouvons constater que pour les méthodes de résolution des équations KKT, de Newton et d'ajustement des moments, les temps de calcul augmentent quasiment de manière exponentielle par rapport au nombre de variables. Parmi ces méthodes, l'adaptation de la méthode de Newton semble toutefois plus efficace. Cependant, l'approche par régression se démarque particulièrement en présentant des temps de calcul demeurant très faibles.

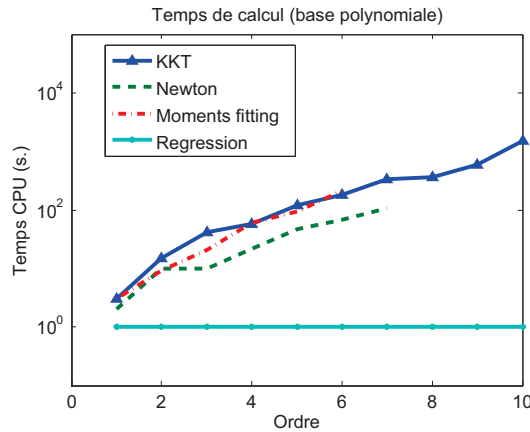


FIG. 3.12 – Exemple 1 : comparaison et évolution des temps de calcul

Sur cet exemple, la méthode de régression s'illustre par ses performances, tant en terme de précision que d'efficacité. Cependant, dans la mesure où la solution analytique n'est pas dérivable partout, nous pouvons nous demander si l'utilisation

de la base très régulière des fonctions polynômiales est adaptée. Dans l'exemple 3, l'emploi de bases de type splines sera introduit et comparé à l'utilisation de polynômes.

### 3.3.5.2 Exemple 2 : identification du module d'Young d'une poutre en flexion

Nous nous intéressons ici au problème d'identification du module d'Young  $e$  d'une poutre de section rectangulaire. Cet exemple a été introduit par [Perrin 2008] dans le cadre de l'identification de systèmes incertains. L'identification est effectuée par des mesures de la flèche de la poutre en flexion sur deux appuis représentée sur la figure 3.13.

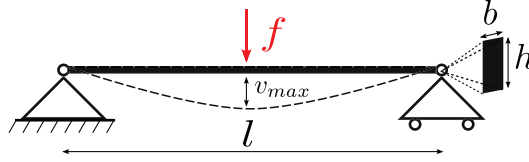


FIG. 3.13 – Exemple 2 : identification du module d'Young d'une poutre en flexion

La géométrie de la poutre est considérée comme déterministe avec  $l = 2m$ ,  $b = h = 20cm$ . Un chargement ponctuel est appliqué au centre de la poutre. Dans le modèle de l'élasticité linéaire, la théorie de la résistance des matériaux prédit que la flèche  $v_{mod}$  est égale à :

$$v_{mod} = \frac{fl^3}{4ebh^3}$$

Théoriquement, une mesure du déplacement maximal pourrait mener à l'identification du module d'élasticité  $e$ . Cependant, les conditions expérimentales peuvent introduire des erreurs sur le chargement  $f$  et la mesure de la flèche. Ce comportement aléatoire peut être modélisé en introduisant le déplacement aléatoire mesuré  $V_{mes}$  :

$$V_{mes} = \frac{Fl^3}{4ebh^3} + \Theta$$

où  $F \sim \mathcal{N}(m_F, s_F)$  représente le chargement aléatoire et  $\Theta \sim \mathcal{N}(m_\Theta, s_\Theta)$  modélise l'erreur commise en mesurant le déplacement. Pour l'application numérique, nous fixons  $m_F = 10kN$ ,  $s_F = 1kN$ ,  $m_\Theta = 0mm$ ,  $s_\Theta = 1mm$ . De plus, pour simuler les données expérimentales, le module d'Young  $e$  est fixé à  $10GPa$ . Il est alors possible d'identifier une estimation  $E^*$  du module d'Young réel  $e$  en résolvant :

$$E^* = \arg \min_E (v_{mod}(E) - V_{mes}(F, \Theta))^2 = \arg \min_E \left( \frac{fl^3}{4Ebh^3} - \left( \frac{Fl^3}{4ebh^3} + \Theta \right) \right)^2$$

La solution analytique  $E_{ex}^*$  est donnée par :

$$E_{ex}^* = \frac{fe}{F + \frac{4ebh^3}{l^3}\Theta}$$

Cette solution de référence permet d'évaluer la qualité de la méthodologie employée pour l'identification. Afin d'étudier les dispersions dans ce problème, la solution  $E^*$  est recherchée dans l'espace engendré par le produit tensoriel des bases canoniques des polynômes de chacune des deux variables.

Le tableau 3.9 contient ainsi les intervalles de confiance à 95% calculés avec les différentes méthodes. Nous pouvons constater que chaque stratégie a été capable de calculer avec succès un tel intervalle.

	KKT	Newton	Moments	Regression	Exact
Order 1	[7.99 ; 12.63]	[7.99 ; 12.63]	[7.75 ; 12.65]	[8.41 ; 13.72]	[8.22 ; 12.93]
Order 2	[8.24 ; 12.92]	[8.24 ; 12.92]	[8.21 ; 12.90]	[8.16 ; 13.08]	[8.22 ; 12.93]
Order 3	[8.22 ; 12.94]	[8.22 ; 12.93]	[8.16 ; 13.10]	[8.23 ; 12.94]	[8.22 ; 12.93]
Order 4	[8.22 ; 12.93]	[8.22 ; 12.93]	[8.17 ; 13.08]	[8.21 ; 12.93]	[8.22 ; 12.93]
Order 5	[8.22 ; 12.93]	[8.22 ; 12.93]	[8.21 ; 13.05]	[8.22 ; 12.93]	[8.22 ; 12.93]

TAB. 3.9 – Exemple 2 : intervalles de confiance à 95% du module d'Young (GPa)

Une évaluation quantitative de la qualité des approximations numériques peut à nouveau être fournie par l'étude de l'erreur quadratique moyenne. Les figures 3.14 représentent l'évolution de cette erreur lorsque l'ordre du développement augmente. Sur cet exemple, nous pouvons observer que l'approche par ajustement des moments échoue dans sa tentative d'approcher la relation entre  $\mathbf{Y} = (F, \Theta)^t$  et  $E^*$ . Par contre, l'approximation de la fonction de répartition de  $E^*$  est de meilleure qualité. Les autres approches, quant à elles, ont donné des résultats satisfaisants.

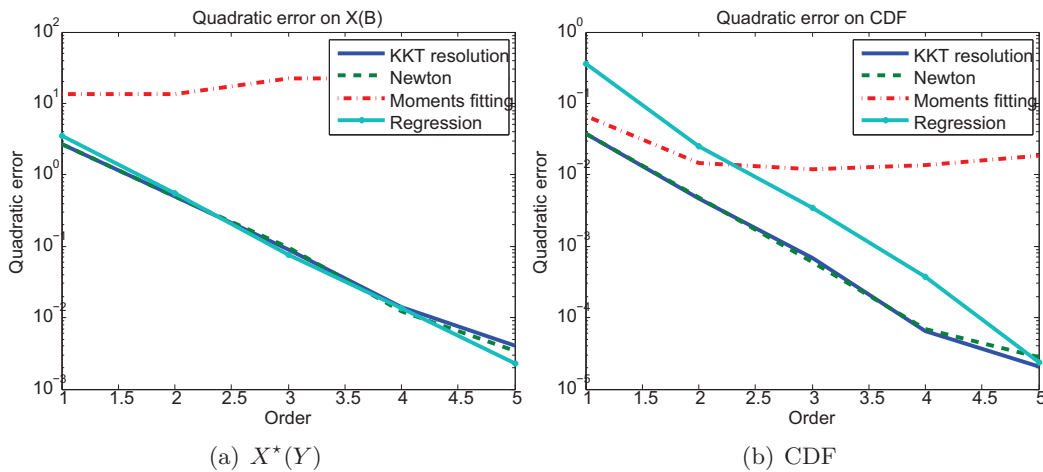


FIG. 3.14 – Exemple 2 : évolution et comparaison des erreurs quadratiques moyennes

### 3.3.5.3 Exemple 3 : calcul de valeurs propres

Dans ce dernier exemple, nous appliquons les méthodes précédentes au calcul de valeurs propres. Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive de taille  $I \times I$ . Soit  $\mathbf{v}^{(1)}$  le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda^{(1)}$  de plus petit module. Dans ce cas,  $\mathbf{v}^{(1)}$  satisfait l'équation de Ritz :

$$\mathbf{v}^{(1)} = \arg \min_{\|\mathbf{v}\|=1} \mathbf{v}^t A \mathbf{v} \quad (3.37)$$

De plus, la valeur propre correspondante est donnée par :

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{v}^{(1)t} A \mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|^2} \quad (3.38)$$

Dans la situation où les coefficients de  $A$  dépendent d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$ , les éléments propres deviennent également aléatoires. Par conséquent, nous introduisons les notations  $A(\mathbf{Y})$  pour la matrice aux coefficients aléatoires ainsi que  $\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{Y})$  et  $\Lambda^{(1)}(\mathbf{Y})$  pour ses éléments propres. Une fois encore, le vecteur aléatoire  $\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{Y})$  peut être caractérisé par l'équation de Ritz :

$$\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{Y}) = \arg \min_{\|\mathbf{V}\|=1} \mathbf{V}^t A(\mathbf{Y}) \mathbf{V} \quad (3.39)$$

Finalement, la valeur propre correspondante est donnée par l'équation :

$$\Lambda_1(\mathbf{Y}) = \frac{\mathbf{V}^{(1)t} A(\mathbf{Y}) \mathbf{V}^{(1)}}{\|\mathbf{V}^{(1)}\|^2} \quad (3.40)$$

Ainsi, nous appliquons cette méthodologie au calcul de la plus petite valeur propre de la matrice :

$$A(Y) = \begin{pmatrix} 2 - Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

où  $Y$  suit une loi uniforme continue sur  $[0; 2]$ . Pour ces paramètres, la valeur de la plus petite valeur propre est donnée par :

$$\Lambda^{(1)*}(Y) = \min(Y, 2 - Y)$$

et sa fonction de répartition  $F_\Lambda$  est :

$$F_\Lambda(\alpha) = \mathbb{P} \left[ \Lambda^{(1)*} \leq \alpha \right] = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \alpha < 0 \\ \alpha & , \text{ si } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 1 & , \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Une fois encore, nous pouvons remarquer que la solution  $\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{Y})$  n'est pas différentiable. La base des fonctions polynômiales ne contenant que des applications régulières, celle-ci peut ne pas reproduire correctement les singularités. Ainsi, nous proposons d'étudier le cas où une autre base de fonctions est utilisée. Une famille de fonction splines linéaires par morceaux est employée. Pour un développement



d'ordre  $P$  d'une fonction définie sur l'intervalle  $E_Y = [y_{min}; y_{max}]$ , nous introduisons le pas de discrétisation  $\Delta Y = (y_{max} - y_{min}) / (P - 1)$ . La base  $\Psi = \{\psi_p\}_{1 \leq p \leq P}$  est définie par

$$\psi_p(Y) = \begin{cases} 1 - |Y - p\Delta Y| / \Delta Y & , \text{ si } |Y - p\Delta Y| \leq \Delta Y \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (3.41)$$

Avant de résoudre ce problème, un point important peut être discuté concernant la méthodologie à employer. Contrairement aux exemples précédents, l'objet de l'étude n'est plus directement le vecteur solution du problème d'optimisation mais la valeur de la fonction objectif à l'optimum. Pour les méthodes intrusives présentées, cette valeur n'est pas accessible directement mais peut être déduite d'un traitement spécifique de la solution. La même stratégie peut être adoptée pour les méthodes non-intrusives. Toutefois, pour chaque résolution du problème déterministe, la solution du problème et la valeur correspondante de l'objectif sont calculées. Il est donc possible d'effectuer l'ajustement non seulement sur le vecteur solution mais aussi directement sur la valeur du coût. Par exemple, sur les figures 3.16 et 3.17, la méthode "Regression  $\Lambda$ " fait référence à l'application de la régression directement sur l'échantillon de valeurs propres. Inversement, l'approche nommée "Regression  $X$ " correspond au calcul des vecteurs propres par régression puis à l'obtention des valeurs propres par post-traitement.

L'application directe de cette méthodologie au cadre de l'ajustement des moments n'est toutefois pas judicieuse. La qualité de la relation entre le vecteur  $Y$  et le vecteur propre n'étant pas garantie, il n'est pas possible de générer les valeurs propres en utilisant la formule (3.40). Par ailleurs, l'application de l'ajustement des moments aux vecteurs propres ne permet de déduire que la distribution marginale de chaque composante. La mise en place d'une méthode de génération aléatoire des vecteurs propres nécessiterait par contre d'ajuster les moments de la distribution conjointe. Malheureusement, cette technique se révélerait encore plus coûteuse et ne paraît pas applicable en pratique. Les résultats présentés ici sont donc issus d'un ajustement appliqué directement à l'ensemble des observations des valeurs propres et non des vecteurs propres.

Un exemple des résultats obtenus est présenté sur la figure 3.15. Ces graphes correspondent à l'approximation de la relation  $\Lambda^{(1)*}(Y)$  calculés par la méthode de Newton stochastique et à la fonction de répartition de  $\Lambda^{(1)*}$  correspondante. Nous constatons une bonne adéquation entre l'approximation et le résultat exact lorsque l'ordre du développement est suffisant.

Afin de quantifier plus précisément la qualité des différents résultats, une étude sur l'erreur quadratique moyenne est menée pour lorsque des bases de splines et de polynômes sont utilisées. Les résultats correspondants sont illustrés par les figures 3.16 et 3.17. D'une part, nous pouvons observer que la procédure d'ajustement des moments ne fournit pas une bonne approximation de la relation entre  $Y$  et la valeur propre. D'autre part, les autres méthodes reproduisent bien cette correspondance. De plus, nous remarquons que l'emploi de la base des fonctions splines a mené à des résultats de précision accrue. Les oscillations de l'erreur correspondent au cas

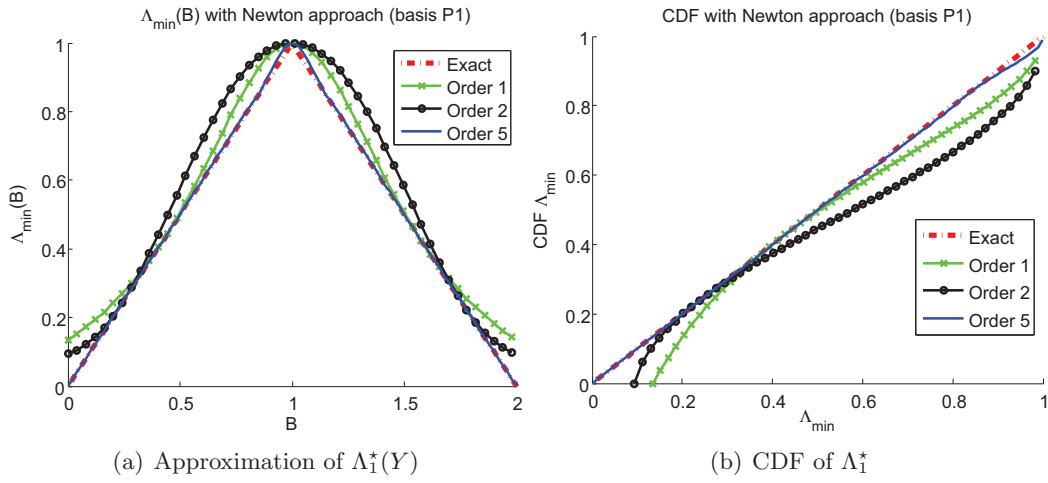


FIG. 3.15 – Exemple 3 : approximation de la relation  $\Lambda^{(1)*}(Y)$  et fonction de répartition calculée par la méthode de Newton projetée pour une base de splines

où l'un des points de contrôle de la spline est situé sur la singularité  $y = 0$ . Dans ce cas particulier, la solution exacte appartient à l'espace engendré par les splines et la représentation est exacte.

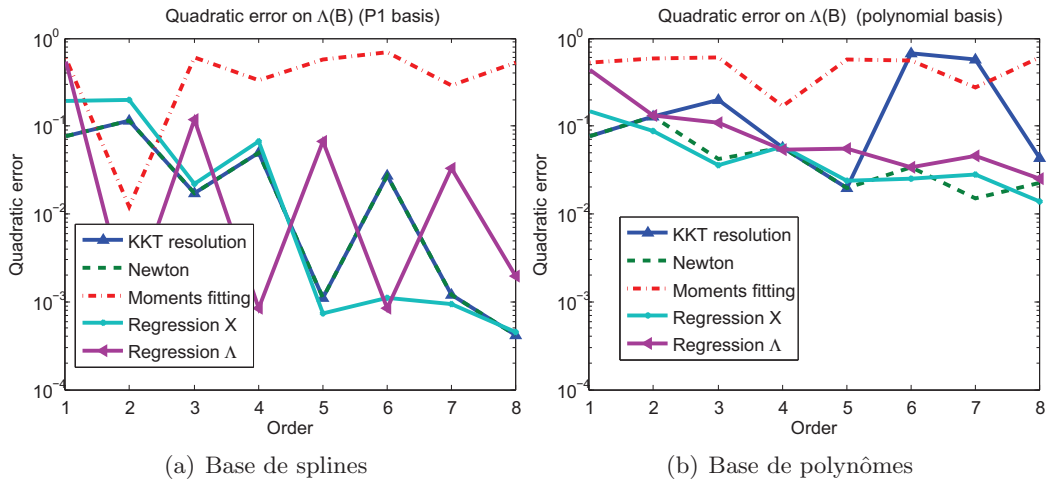


FIG. 3.16 – Exemple 3 : erreur quadratique moyenne sur la relation  $\Lambda_1^*(Y)$

De la même manière, l'erreur quadratique moyenne a été calculée sur les fonctions de répartition. L'évolution de ces quantités est représentée sur la figure 3.17. Bien que le schéma d'ajustement des moments ne fournisse pas de bonne approximation de la fonction  $\Lambda^{(1)*}(Y)$ , nous pouvons remarquer que la distribution statistique est bien estimée.

Enfin, nous nous intéressons aux performances de chacun des algorithmes. La figure 3.18 présente l'évolution du temps de calcul requis par la résolution de ce

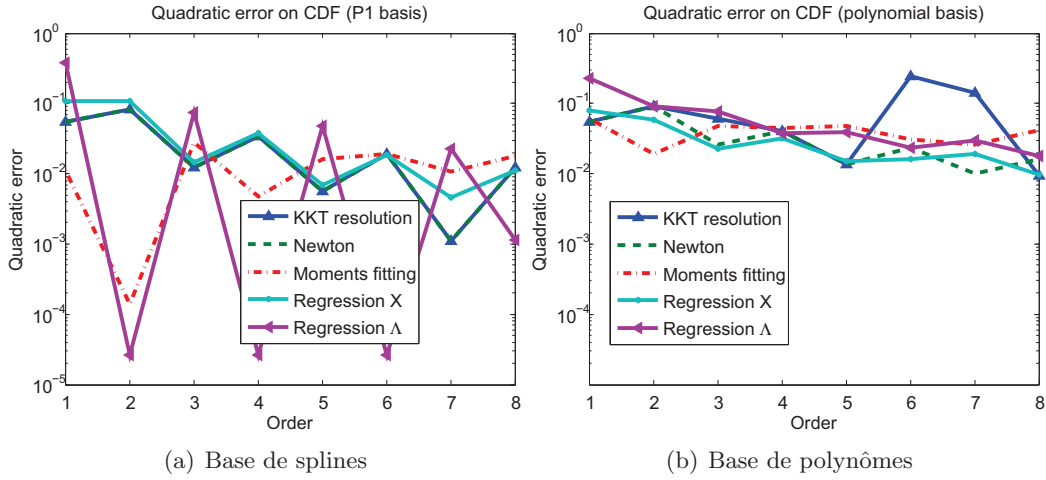


FIG. 3.17 – Exemple 3 : erreur quadratique moyenne sur la fonction de répartition  $F_\Lambda$

problème. Dans un souci de clarté, les méthodes de régression sont représentées par le même jeu de données, qu'elles prennent en compte les vecteurs propres ou les valeurs propres. Ces méthodes, en plus de leur bonne précision, sont encore une fois particulièrement efficaces. Par contre, il semble que le choix de la famille d'approximation n'influence que peu les temps de calcul.

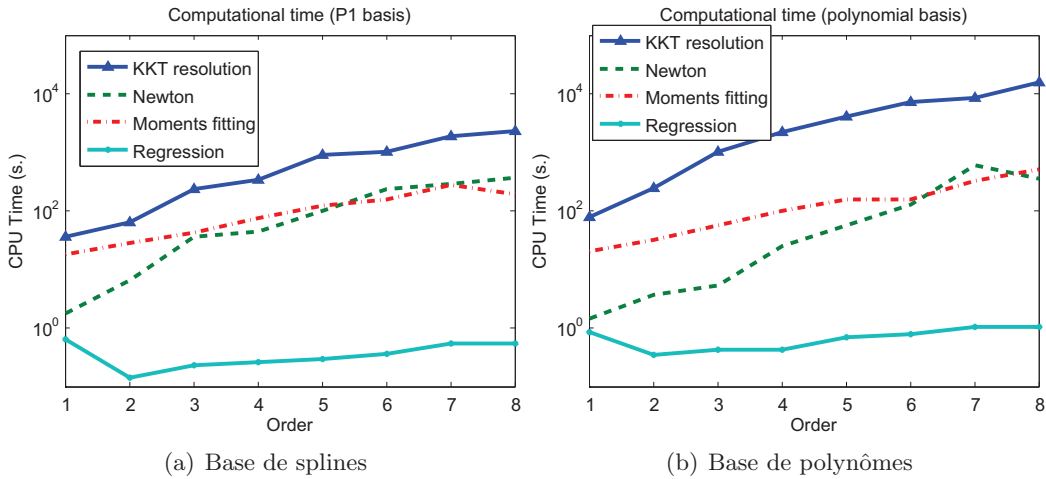


FIG. 3.18 – Exemple 3 : temps CPU pour le calcul de l'approximation  $\Lambda_1^*(Y)$

Sur ce dernier exemple, nous avons pu constater que chaque méthode a permis de déterminer des résultats satisfaisants. Par ailleurs, l'avantage de l'utilisation d'une base de fonctions splines en terme de précision a été mesuré. Dans ce contexte, la combinaison de l'utilisation de cette famille et d'une méthode de régression semble être une alternative robuste, précise pour résoudre le problème de quantification de manière efficace.

### 3.3.6 Conclusion

Dans la continuité des travaux de Holdorf Lopez, nous nous sommes intéressés dans cette section à l'étude de problèmes d'optimisation contenant des paramètres aléatoires. Plutôt que de chercher à contrôler les aléas, nous avons été menés à quantifier l'influence de ces perturbations sur la solution optimale. Certains des outils usuels de la quantification des incertitudes ont pu être réutilisés à cet effet. C'est par exemple le cas des techniques de représentation des variables aléatoires en série de fonctions connues. L'utilisation de ces représentations permet de travailler sur des variables appartenant à des espaces de dimension finie adaptés au calcul numérique. Les inconnues ne sont alors plus des fonctions mais des coefficients réels.

Plusieurs approches ont été présentées pour déterminer ces quantités. D'un côté, les approches non-intrusives introduites dans le contexte des éléments finis stochastiques se sont montrées adaptées à des applications en optimisation. D'un autre côté, des méthodes plus spécifiques ont été introduites. Nous avons montré que la projection des équations stochastiques sur la base d'approximation permet d'obtenir un système d'équations non-linéaires menant à la solution. Cette approche entraînant des temps de calcul importants, le développement d'une méthode de Newton adaptée au contexte non-déterministe s'est révélée une alternative intéressante. Cette stratégie offre notamment une nouvelle méthodologie permettant de résoudre des problèmes stochastiques avec précision.

La résolution de différents problèmes a permis de mettre en évidence les inconvénients et les avantages de chacune des méthodes. Le problème du calcul des valeurs propres de matrices aléatoires a notamment été évoqué. Ce problème étant courant dans les sciences de l'ingénieur, il fait l'objet de développements approfondis dans la prochaine section.

### Synthèse

On cherche à déterminer la fonction de répartition de  $\mathbf{X}^*$  solution de :

$$\mathbf{X}^* = \arg \min_{\mathbf{X} \in V} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

tel que :  $h_{k_e}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0 \quad k_e = 1..K_e$

Le lagrangien de ce problème s'écrit :

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \lambda) = f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \lambda^t \mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

Les vecteurs des variables et des multiplicateurs de Lagrange sont approchés par :

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{Y}) = \sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p^* \psi_p(\mathbf{Y}) \quad \text{et} \quad \Lambda^*(\lambda^*, \mathbf{Y}) = \sum_{p=1}^P \lambda_p^* \psi_p(\mathbf{Y})$$

Les coefficients sont calculés par des méthodes intrusives et non-intrusives

### Résolution des conditions d'optimalité par une approche de Galerkin

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X_i}(\mathbf{X}^*, \Lambda^*, \mathbf{Y}) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Lambda_k}(\mathbf{X}^*, \Lambda^*, \mathbf{Y}) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Galerkin}} \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} \left[ \frac{\partial L}{\partial X_i}(\mathbf{X}(\mathbf{x}^*, \mathbf{Y}), \Lambda(\lambda^*, \mathbf{Y})) \psi_p(\mathbf{Y}) \right] = 0 \\ \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} \left[ \frac{\partial L}{\partial \Lambda_k}(\mathbf{X}(\mathbf{x}^*, \mathbf{Y}), \Lambda(\lambda^*, \mathbf{Y})) \psi_p(\mathbf{Y}) \right] = 0 \end{cases}$$

### Méthode de Newton stochastique

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(it+1)} \\ \Lambda^{(it+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(it)} \\ \Lambda^{(it)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{X}}^{(it)} \\ \mathbf{D}_{\Lambda}^{(it)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{D}_{\Lambda} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^P \begin{pmatrix} \mathbf{d}_p^{\mathbf{X}} \\ \mathbf{d}_p^{\Lambda} \end{pmatrix} \psi_p(\mathbf{Y})$$

La direction de descente stochastique est déterminée par la méthode de Newton :

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{X}}^2 L & \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{h}^t \\ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{h} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{D}_{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{X}} L \\ -\mathbf{h} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Galerkin}} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^t \\ \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{\mathbf{X}} \\ \mathbf{d}^{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix}$$

avec  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{G}$  sont données par les équations (3.29) et (3.31).

### Méthodes non-intrusives

1. Génération d'un échantillon de vecteurs aléatoires  $\{\mathbf{y}^{(n_s)}\}_{1..N_s}$
2. Résolution des problèmes déterministes :  $\mathbf{x}^{*(n_s)} = \arg \min_{\mathbf{x} \in S(\mathbf{y}^{(n_s)})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(n_s)})$
3. Calcul des coefficients du développement
  - Moments  $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_P^*) = \arg \min_{\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^I} \sum_{n_m=1}^{N_m} \|\mathbf{m}_{n_m}^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_P) - \mathbf{M}_{n_m}\|$
  - Régression  $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_P^*) = \arg \min_{\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^I} \sum_{n_s=1}^{N_s} \|\mathbf{x}^{*(n_s)} - \sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p \psi_p(\mathbf{y}^{(n_s)})\|^2$

### 3.4 Valeurs propres d'une matrice à coefficients aléatoires

Le calcul des éléments propres d'une matrice est la clé de voute de nombreuses études d'ingénierie. Par exemple, l'analyse modale d'un bâtiment ou le calcul du facteur de flambement d'une colonne requièrent la résolution d'un problème aux valeurs propres généralisées. De plus, afin d'éviter d'éventuels dysfonctionnement futurs, ces études doivent être menées dès la phase de conception de la structure. Toutefois, les propriétés évoquées dépendent en partie du choix des matériaux, de la géométrie ou de facteurs environnementaux. Ces paramètres ne sont pas toujours parfaitement connus pendant la phase de conception. Par exemple, le module d'élasticité du matériau peut présenter un certain niveau de variabilité, introduisant ainsi des incertitudes sur la raideur de la structure. La production de conceptions de confiance nécessite donc l'intégration de ces incertitudes. En particulier, le concepteur devra quantifier les distributions et les propriétés statistiques des fréquences propres et des charges critiques de flambement. A cet égard, l'étude des éléments propres d'une matrice présentant des coefficients aléatoires deviendra nécessaire.

Ce sujet a fait l'objet de plusieurs travaux dans la littérature. La théorie des matrices aléatoires a notamment fourni un cadre de travail très général pour ces analyses. Dans ce contexte, la distribution de probabilité est donnée au niveau de la matrice et non plus des coefficients. Pour de tels endomorphismes, des expressions analytiques des moments statistiques et des densités de probabilités des éléments propres peuvent être trouvées [Soize 2003][Anderson 2009]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la situation où les coefficients sont considérés comme des fonctions de variables aléatoires de lois connues. Dans ce cadre, il n'existe aucune formule générale pour décrire les éléments propres. Cependant, plusieurs approches numériques ont été proposées pour résoudre ce problème. Les techniques de perturbations, basées sur un développement de Taylor, ont été proposées dans [Song 1995]. Dans [Pradlwarter 2002], les auteurs proposent d'améliorer cette approche pour traiter des problèmes de grande taille. En parallèle, Rahman a développé une méthode basée sur la décomposition dimensionnelle pour étudier la dispersion des valeurs propres [Rahman 2006b]. L'utilisation du chaos polynômial a également été proposée pour approcher les éléments propres [Ghanem 2007]. Une méthode de Galerkin appliquée aux équations du problème aux valeurs propres est alors utilisée pour déduire des équations sur les coefficients du développement. Enfin, Souza a proposé plus récemment une adaptation de l'algorithme des sous-espace itérés pour résoudre un problème stochastique aux valeurs propres [Souza de Cursi 2011].

Dans cette section, nous nous intéresserons au développement de méthodes capables de traiter les problèmes aux valeurs propres généralisées. Sur le modèle des travaux de Ghanem et de Souza, nous introduirons successivement une approche basée sur la méthode de Galerkin et une adaptation de l'algorithme de la puissance itérée. Plusieurs exemples nous permettrons de comparer ces méthodes à une approche non-intrusive.

### 3.4.1 Formalisation du problème

Dans cette partie, nous nous concentrons sur l'étude des propriétés dynamiques de systèmes mécaniques. La situation modèle est un système modélisé par une matrice de raideur  $\mathbb{K}(\mathbf{Y})$  et une matrice de masse  $\mathbb{M}(\mathbf{Y})$  dépendant du vecteur aléatoire  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^J$  de distribution connue. La dépendance des matrices au vecteur  $\mathbf{Y}$  amène à traiter les coefficients des matrices  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  comme étant aléatoires. Dans la suite, la notation  $\mathbb{K}(\mathbf{Y})$  (resp.  $\mathbb{M}(\mathbf{Y})$ ) utilisée pour souligner la dépendance des matrices aux vecteur  $\mathbf{Y}$  sera abandonnée au profit de l'écriture simplifiée  $\mathbb{K}$  (resp.  $\mathbb{M}$ ). On considère par ailleurs que les matrices  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  demeurent réelles, symétriques et définies positives de taille  $N \times N$  lorsque le système possède  $N$  degrés de liberté et que les modes de corps rigides ont été supprimés. Les fréquences propres  $\Omega_l$  sont les nombres réels positifs  $\Omega_l = \sqrt{\Lambda_l}$  où  $\Lambda_l$  est une valeur propre généralisée de la paire  $(\mathbb{K}, \mathbb{M})$  :

$$\mathbb{K}\mathbf{X}_l = \Lambda_l \mathbb{M}\mathbf{X}_l \quad \text{presque sûrement} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_l \neq 0 \quad \text{presque sûrement} \quad (3.42)$$

Pour chaque réalisation du vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$ , une nouvelle solution de l'équation (3.42) peut être déterminée. En d'autres termes, les vecteurs propres et les valeurs propres peuvent également être traitées comme des variables aléatoires. Par conséquent, ces quantités seront représentées par des caractères en majuscule dans la suite. Par ailleurs, l'indice  $l$  ne sera pas noté dans la suite de la section. Il est toutefois nécessaire de garder à l'esprit que  $N$  valeurs propres sont à considérer.

### 3.4.2 Une méthode de Galerkin pour les problèmes aux valeurs propres généralisées

Une approche de type Galerkin a déjà été introduite par Ghanem et Ghosh pour résoudre des problèmes aux valeurs propres [Ghanem 2007]. Dans cette section, nous souhaitons étendre cette stratégie au cas des problèmes aux valeurs propres généralisées. En effet, en dépit du caractère inversible des matrices de masse considérées, la réalisation de cette opération pour chaque réalisation des paramètres aléatoires se révélerait difficile. Une méthode spécifique est donc introduite ici pour pallier cette limitation. Une seconde différence entre les deux méthodes peut par ailleurs être soulignée. Alors que Ghanem développe sa méthode à partir d'une extension sur le chaos polynômial de la matrice de raideur, les calculs seront effectués ici sur l'opérateur initial. Dans ce contexte, le problème aux valeurs propres généralisées peut être défini comme le calcul du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}^*$  et de la variable aléatoire  $\Lambda^*$  tels que

$$\mathbb{K}\mathbf{X}^* = \Lambda^* \mathbb{M}\mathbf{X}^* \quad p.s. \quad (3.43)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{X}^{*t} \mathbf{X}^* = 1 \quad p.s. \quad (3.44)$$

Le système d'équations non-linéaires (3.43) peut être écrit pour chaque ligne :

$$\sum_{m=1}^N K_{nm} X_m^* = \Lambda^* \sum_{m=1}^N M_{nm} X_m^* \quad p.s. \quad \forall 1 \leq n \leq N \quad (3.45)$$

A l'image de ce qui a déjà été présenté, les éléments propres  $\Lambda^*$  et  $\mathbf{X}^*$  peuvent être exprimés comme un développement sur une famille  $\Psi = \{\psi_p\}_{p \geq 1}$ . A nouveau, nous choisissons  $\Psi$  comme une famille de fonctions dépendant des variables en entrée du problème  $\mathbf{Y}$ . Le traitement informatique du problème nécessitant une approximation de dimension finie, nous ne considérons qu'un nombre fini  $P$  d'éléments de cette famille. Les quantités inconnues sont donc approchées par :

$$\mathbf{X}^* \approx \mathbf{X} = \sum_{q=1}^P \mathbf{x}_q \psi_q(\mathbf{Y}) = \sum_{q=1}^P \begin{pmatrix} x_{1q} \\ \dots \\ x_{Nq} \end{pmatrix} \psi_q(\mathbf{Y}) \quad (3.46)$$

$$\text{et } \Lambda^* \approx \Lambda = \sum_{q=1}^P \lambda_q \psi_q(\mathbf{Y}) \quad (3.47)$$

Ainsi, les éléments propres peuvent être remplacés par leur approximation dans les équations (3.45) et (3.44). Les coefficients des deux développements doivent donc satisfaire les équations :

$$\sum_{m=1}^N \sum_{q=1}^P K_{nm} x_{mq} \psi_q(\mathbf{Y}) = \sum_{m=1}^N \sum_{q_1=1}^P \sum_{q_2=1}^P \lambda_{q_1} M_{nm} x_{mq_2} \psi_{q_1}(\mathbf{Y}) \psi_{q_2}(\mathbf{Y}) \quad p.s. \quad (3.48)$$

$$\text{et } \sum_{m=1}^N \sum_{q_1=1}^P \sum_{q_2=1}^P x_{mq_1} x_{mq_2} \psi_{q_1}(\mathbf{Y}) \psi_{q_2}(\mathbf{Y}) = 1 \quad p.s. \quad (3.49)$$

La projection de chacune de ces équations sur les  $P$  éléments de  $\Psi$  permet de générer une solution telle que le résidu des équations précédentes est orthogonal à l'espace engendré par  $\{\psi_1, \dots, \psi_P\}$ . Cette procédure de Galerkin permet en outre d'obtenir un système déterminé de  $(N+1)P$  équations non-linéaire sur les coefficients :

$$F_{np}(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{m=1}^N \sum_{q=1}^P x_{mq} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [K_{nm} \psi_q \psi_p] \quad (3.50)$$

$$- \sum_{m=1}^N \sum_{q_1=1}^P \sum_{q_2=1}^P \lambda_{q_1} x_{mq_2} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [M_{nm} \psi_{q_1} \psi_{q_2} \psi_p] \quad (3.51)$$

$$= 0 \quad \forall 1 \leq p \leq P \quad \forall 1 \leq n \leq N \quad (3.52)$$

$$\text{et } G_p(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{m=1}^N \sum_{q_1=1}^P \sum_{q_2=1}^P x_{mq_1} x_{mq_2} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\psi_p \psi_{q_1} \psi_{q_2}] \quad (3.53)$$

$$- \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\psi_p] = 0 \quad \forall 1 \leq p \leq P \quad (3.54)$$

où  $\mathbb{E}_{\mathbf{Y}}$  représente l'espérance par rapport à la distribution conjointe de  $\mathbf{Y}$ . De plus,  $\mathbf{x}$  est le  $N \times P$ -vecteur défini par les coefficients inconnus  $\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{1P}, \dots, x_{N1}, \dots, x_{NP})^t$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_P)^t$ . Les équations précédentes portant uniquement sur des scalaires, leur résolution est possible à l'aide de



schémas numériques usuels.

Néanmoins, afin de simplifier la formulation du problème et de fournir un cadre adapté à l'implémentation, les équations précédentes peuvent être écrites en terme de produit matrice-matrice et matrice-vecteur. A cet effet, nous introduisons les matrices  $\mathcal{K}^{dir}$ ,  $\mathcal{M}_q^{dir}$ ,  $\mathcal{H}_q^{dir}$  ainsi que les vecteurs  $\mathcal{F}^{dir}$ ,  $\mathcal{E}^{dir}$ , organisé selon le même ordre que  $\mathbf{x}$ . Cette construction peut être réalisée par l'introduction d'une bijection entre un couple d'indice  $(n, p) \in \mathbb{N}^N \times \mathbb{N}^P$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^{NP}$ . En utilisant ces notations, les équations (3.50) et (3.53) deviennent :

$$\mathcal{F}^{dir}(\mathbf{x}, \lambda) = \left( \mathcal{K}^{dir} - \sum_{q=1}^P \lambda_q \mathcal{M}_q^{dir} \right) \mathbf{x} = 0 \quad (3.55)$$

$$\text{et } G_p^{dir}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^t \mathcal{H}_p^{dir} \mathbf{x} - \mathcal{E}_p^{dir} = 0 \quad \forall 1 \leq p \leq P \quad (3.56)$$

où  $\mathcal{F}^{dir}$  est un  $NP$ -vecteur dont les composantes sont  $F_{np}$ ,

$$\mathcal{K}^{dir} = \left[ \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{dir} \right]_{\alpha, \beta=1, NP} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{dir} = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [K_{nm} \psi_p \psi_r] \quad (3.57)$$

$$\mathcal{M}_q^{dir} = \left[ \left\{ \mathcal{M}_q^{dir} \right\}_{\alpha\beta} \right]_{\alpha, \beta=1, NP} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{M}_q^{dir} \right\}_{\alpha\beta} = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [M_{nm} \psi_q \psi_p \psi_r] \quad (3.58)$$

avec  $\alpha \leftrightarrow (n, p)$ ,  $\beta \leftrightarrow (m, r)$

$$\mathcal{H}_q^{dir} = \mathbb{I}_N \otimes \mathcal{G}_q^{dir} \quad \text{avec } \mathcal{G}_q^{dir} \in \mathbb{R}^{P \times P} \text{ défini par } \mathcal{G}_q^{dir} = [\mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\psi_r \psi_s \psi_q]]_{r, s=1, P} \quad (3.59)$$

$$\mathcal{E}^{dir} = \left( \mathcal{E}_1^{dir}, \dots, \mathcal{E}_P^{dir} \right)^t \quad \text{avec } \mathcal{E}_p^{dir} = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\psi_p] \quad (3.60)$$

où  $\otimes$  représente le produit de Kronecker. D'un point de vue numérique, le calcul de ces matrices est la partie la plus coûteuse en temps. En effet, le nombre d'intégrales multidimensionnelles à calculer augmente avec la complexité  $O(P^3 N^2)$ . Cependant, ces intégrales sont indépendantes des valeurs de  $\mathbf{x}$  et  $\lambda$ . Autrement dit, elles ne seront calculées qu'une seule fois, lors d'une phase d'initialisation. De plus, l'évaluation de ces intégrales peut être réalisée par une méthode de Monte Carlo. Ce type de schémas pourra notamment se révéler utile lorsque de nombreuses variables aléatoires seront prises en compte.

### 3.4.3 Puissance itérée pour une matrice aux coefficients aléatoires

Dans le paragraphe précédent, nous avons établi un ensemble d'approximations des équations initiales. Nous proposons ici une alternative basée sur les travaux récents de Souza [Souza de Cursi 2011]. Cette méthode repose sur le même principe que l'adaptation de la méthode de Newton dans le cadre de l'optimisation. Un schéma numérique usuel est écrit formellement sur les quantités stochastiques inconnues. Ce schéma permet de définir une séquence de transformations de variables de dimensions infinies. Au moyen d'une procédure de Galerkin, chacune des équations

du schéma est projetée sur un espace de dimension finie. Un nouvel algorithme sur les coefficients du développement des inconnues est ainsi obtenu.

Dans le cadre des problèmes aux valeurs propres purement déterministes, la méthode de la puissance itérée est reconnue pour son efficacité. Cette technique permet le calcul de la valeur propre de plus grand module. Dans le contexte du problème stochastique (3.43), cet algorithme peut être décrit comme la construction d'une suite de vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}^{(it)}$  générée par l'itération :

1. Résolution de  $\mathbb{M}\mathbf{Z}^{(it+1)} = \mathbb{K}\mathbf{X}^{(it)}$
2.  $\mathbf{X}^{(it+1)} = \mathbf{Z}^{(it+1)} / \|\mathbf{Z}^{(it+1)}\|$

A l'image de la procédure suivie pour les équations (3.46), les vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}^{(it)} = (X_1^{(it)}, \dots, X_N^{(it)})^t$  et  $\mathbf{Z}^{(it)} = (Z_1^{(it)}, \dots, Z_N^{(it)})^t$  peuvent être écrit comme des développements sur la base des fonctions de  $\Psi$ . Les coefficients correspondant sont assemblés dans deux  $N \times P$ -vecteurs réels, respectivement notés  $\mathbf{x}^{(it)}$  et  $\mathbf{z}^{(it)}$ . Chaque étape de l'algorithme précédent correspond à une équation de dimension infinie pouvant être approchée par un ensemble fini d'égalités. En astreignant le résidu de chaque équation à être orthogonal à  $\{\psi_1, \dots, \psi_P\}$ , le schéma précédent peut s'écrire :

1. Etape 1 : calculer  $\mathbf{z}^{(it+1)}$ , solution du système linéaire :

$$\sum_{m=1}^N \sum_{q=1}^P z_{nq}^{(it+1)} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [M_{nm} \psi_q \psi_p] = \sum_{m=1}^N \sum_{q=1}^P x_{nq}^{(it)} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [K_{nm} \psi_q \psi_p] \quad (3.61)$$

$$\forall 1 \leq p \leq P \quad \forall 1 \leq n \leq N$$

2. Etape 2 : calculer  $\mathbf{x}^{(it+1)}$ , solution du système linéaire

$$\sum_{q=1}^P x_{nq}^{(it+1)} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\psi_q \psi_p] = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} \left[ \frac{\sum_{q=1}^P z_{nq}^{(it+1)} \psi_q \psi_p}{\sqrt{\sum_{m=1}^N \sum_{q_1=1}^P \sum_{q_2=1}^P z_{mq_1}^{(it+1)} z_{mq_2}^{(it+1)} \psi_{q_1} \psi_{q_2}}} \right] \quad (3.62)$$

$$\forall 1 \leq p \leq P \quad \forall 1 \leq n \leq N$$

A nouveau, les équations précédentes peuvent être écrites sous une forme synthétique adaptée au calcul numérique. On introduit à cet effet les matrices :

$$\mathcal{K}^{pow} = \left[ \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{pow} \right]_{\alpha,\beta=1,NP} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{pow} = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [K_{nm} \psi_p \psi_r] \quad (3.63)$$

$$\alpha \leftrightarrow (n, p), \quad \beta \leftrightarrow (m, r)$$

$$\mathcal{M}^{pow} = \left[ \{\mathcal{M}^{pow}\}_{\alpha\beta} \right]_{\alpha,\beta=1,NP} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{M}^{pow}\}_{\alpha\beta} = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [M_{nm} \psi_p \psi_r] \quad (3.64)$$

$$\alpha \leftrightarrow (n, p), \quad \beta \leftrightarrow (m, r)$$

$$\mathcal{H}^{pow} = \mathbb{I}_N \otimes \mathcal{G}^{pow} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}^{pow} \in \mathbb{R}^{P \times P} \quad \text{défini par} \quad \mathcal{G}^{pow} = [\mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\psi_r \psi_s]]_{r,s=1,P} \quad (3.65)$$

L'équation (3.62) nécessite néanmoins un traitement plus particulier et l'introduction d'une fonction non-linéaire  $\mathcal{U}^{pow} : \mathbb{R}^{NP} \mapsto \mathbb{R}^{NP}$  :

$$\mathcal{U}^{pow}(\mathbf{z}) = (\mathcal{U}_1(\mathbf{z}), \dots, \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{z}), \dots, \mathcal{U}_{NP}(\mathbf{z}))^t, \quad \alpha \leftrightarrow (n, p) \quad (3.66)$$

où  $\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{z})$  est donné par le membre de droite de l'équation (3.62). Avec ces notations, l'algorithme initial peut être écrit :

1. Etape 1 : calculer  $\mathbf{z}^{(it+1)}$ , solution du système linéaire :

$$\mathcal{M}^{pow} \mathbf{z}^{(it+1)} = \mathcal{K}^{pow} \mathbf{x}^{(it)} \quad (3.67)$$

2. Etape 2 : calculer  $\mathbf{x}^{(it+1)}$ , solution du système linéaire :

$$\mathcal{H}^{pow} \mathbf{x}^{(it+1)} = \mathcal{U}^{pow}(\mathbf{z}^{(it+1)}) \quad (3.68)$$

Ce schéma présente plusieurs avantages par rapport à la méthode de Galerkin déjà introduite. A l'image de cette dernière, les matrices  $\mathcal{K}^{pow}$ ,  $\mathcal{M}^{pow}$  et  $\mathcal{H}^{pow}$  ne sont calculées que pendant la phase d'initialisation. Par ailleurs, le nombre d'intégrales multidimensionnelles pour l'assemblage des matrices s'accroît avec la complexité  $O(P^2 N^2)$  au lieu de  $O(P^3 N^2)$ . En considérant l'augmentation factorielle de  $P$  lors de l'ajout de nouvelles variables, cette différence de complexité peut se révéler décisive. Cependant, il faut noter que la coûteuse évaluation de la fonction  $\mathcal{U}^{pow}$  est nécessaire à chaque itération.

Une alternative permettant d'éviter le calcul de cette fonction non-linéaire est l'utilisation d'un schéma mixte, à l'image de celui introduit par Arnst dans le cadre des inégalité variationnelles [Arnst 2011]. Dans un tel schéma, la première phase de l'algorithme est identique. Toutefois, la phase de normalisation, problématique, est résolue par une méthode de collocation. Autrement dit, à chaque itération, une nouvelle approximation de  $\mathbf{Z}^{(it+1)}$  sur la famille  $\Psi$  est calculée grâce à la première étape. Il est alors aisé de générer un échantillon de  $N_s$  vecteurs normés

$$\mathbf{x}^{(it+1), n_s} = \mathbf{Z}^{(it+1)}(\mathbf{y}^{(n_s)}) / \|\mathbf{Z}^{(it+1)}(\mathbf{y}^{(n_s)})\|$$

servant de support à la collocation. La pertinence et l'efficacité de ce schéma seront évaluées par des exemples numériques.

Un autre avantage important de l'approche par puissance itérée réside dans la faible dépendance du résultat au point de départ  $\mathbf{X}^{(0)}$  des itérations. Contrairement aux algorithmes employés pour résoudre un système non-linéaire, certaines hypothèses peu restrictives permettent de garantir la convergence de la méthode de la puissance itérée vers les éléments propres prévus. La seule condition suffisante est en effet que le point de départ  $\mathbf{X}^{(0)}$  ne soit pas orthogonal à l'espace propre associé à la valeur propre de plus grand module. Ce point fondamental se révèle à l'usage le principal avantage de l'approche par puissance itérée.

Enfin, il est clair que cette technique définit une méthodologie générale adaptée au calcul numérique dans un contexte aléatoire. Par exemple, la méthode de la

puissance inverse pour le calcul des valeurs propres de plus petit module peut être adaptée de manière similaire. On parvient en effet à traiter les matrices aléatoires en inversant le rôle joué par les matrices de masse et de raideur dans les équations précédentes. De la même manière, les méthode de déflation, de translation d'opérateur ou les approches par sous-espaces itérés seront accessibles à moindre effort.

### 3.4.4 Exemples numériques

#### 3.4.4.1 Un système masses-ressorts à deux degrés de liberté avec une raideur aléatoire

Dans ce premier exemple, nous nous intéressons à la caractérisation des propriétés dynamiques du système à deux degrés de liberté illustré sur la figure 3.19. Les deux masses  $m_1$  et  $m_2$ , considérées comme déterministes, sont prises respectivement égales à  $1.5kg$  et  $0.75kg$ . La raideur  $k_1$  du premier ressort est également déterministe et vaut  $k_1 = 1000N.m^{-1}$ . Inversement, la raideur  $K_2$  est considérée comme aléatoire. Connaissant la valeur moyenne, la positivité et l'existence d'une variance finie, le principe du maximum d'entropie suggère l'emploi d'une variable aléatoire de loi gamma en guise de modèle [Sampaio 2010]. Les paramètres de forme et d'échelle sont pris égaux à  $\kappa_2 = 100$  et  $\theta_2 = 1.5$ . Ces valeurs correspondent à une moyenne  $\mathbb{E}[K_2] = 150N.m^{-1}$  et à un coefficient de variation  $cv_{K_2} = 0.1$ . Les déplacements des masses sont assemblés dans le vecteur  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))^t$ .

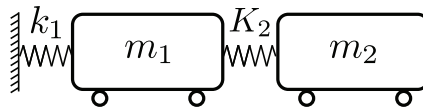


FIG. 3.19 – Exemple 1 : système masses-ressorts à deux degrés de liberté avec une raideur aléatoire

Le comportement dynamique de ce système est donné par un système d'équation bien connu :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} k_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbb{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbb{K}_1 \mathbf{u} = 0 \quad (3.69)$$

Une fréquence naturelle  $\Omega$  de ce système et son mode propre correspondant  $\mathbf{U}_\Omega$  sont solutions du problème aux valeurs propres généralisées :

$$(\mathbb{K}_1 - \Omega^2 \mathbb{M}_1) \mathbf{U}_\Omega = 0 \quad (3.70)$$

Chacune des deux valeurs propres est calculée en utilisant l'approche directe, la méthode basée sur la puissance itérée ainsi que par collocation. Les polynômes de degré 2 ont été utilisés pour former la famille d'approximation  $\Psi$ . Nous pouvons également noter que dans le cas de l'utilisation de la puissance itérée, la plus petite des valeurs propres est déterminée par une adaptation de la puissance inverse.

Le système non-linéaire fourni par l'approche directe est résolu par une méthode de Newton. Par conséquent, le résultat identifié dépend fortement du point de départ. Pour pallier cet inconvénient, une première approximation, de mauvaise précision, est calculée par une méthode de collocation et sert à la première itération.

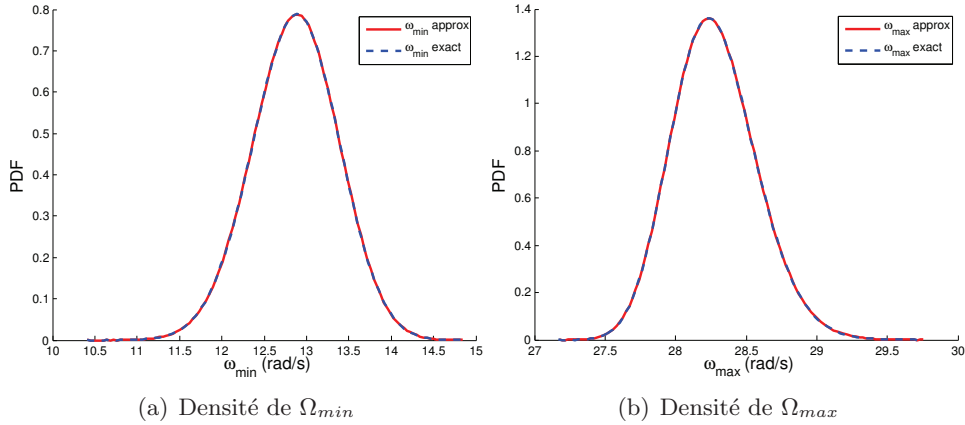


FIG. 3.20 – Exemple 1 : densité de probabilité des valeurs propres calculées par la méthode de Galerkin (base polynômiale, P=2)

Erreur	$\Omega_{min}$	$\Omega_{max}$
Galerkin	$4.10^{-4}$	$7.10^{-4}$
Puis. itérée	$5.10^{-4}$	$7.10^{-4}$
Colloc	$2.10^{-3}$	$3.10^{-3}$

TAB. 3.10 – Exemple 1 : erreurs quadratiques moyennes sur les densités de probabilité

La figure 3.20 représente les densités de probabilité des deux fréquences propres calculées par la méthode de Galerkin. Les trois méthodes présentant des résultats très proches, le calcul de l'erreur quadratique moyenne commise sur la densité a été évaluée. Ces mesures sont présentées dans la table 3.10. En dépit de l'ordre d'approximation relativement faible (P=2), chaque méthode présente des résultats de bonne qualité. Sur cet exemple, les méthodes intrusives fournissent des résultats significativement plus précis que l'approche par collocation.

Les tableaux 3.11 et 3.12 présentent les statistiques des valeurs propres calculées avec chaque méthodes. Sont également présentés les résultats obtenus lorsque les différentes matrices sont calculées par des méthodes de simulations (hypercubes latins avec 2000 réalisations) et l'approche hybride puissance itérée - collocation. Toutes ces techniques sont venues à bout du problème avec une précisions satisfaisante.

En revanche, l'étude des performances présentées dans le tableau 3.13 révèle de profondes différences. On peut d'abord constater que lorsque que l'assemblage des matrices est fait par quadrature, la méthode de Galerkin est plus rapide que la

Méthode	Espérance	Ecart-type	IC 95%	IC 99%
Exact	12.89	0.51	[11.87 ; 13.87]	[11.54 ; 14.16]
Galerkin	12.89	0.51	[11.87 ; 13.86]	[11.54 ; 14.16]
Galerkin (MC)	12.89	0.51	[11.87 ; 13.87]	[11.55 ; 14.16]
Puis. inv.	12.89	0.51	[11.87 ; 13.86]	[11.54 ; 14.16]
Puis. inv. (MC)	12.89	0.51	[11.87 ; 13.87]	[11.55 ; 14.16]
Puis. inv. + colloc	12.89	0.51	[11.87 ; 13.86]	[11.54 ; 14.16]
Collocation	12.89	0.51	[11.87 ; 13.86]	[11.54 ; 14.16]

TAB. 3.11 – Exemple 1 : comparaison des statistiques de  $\Omega_{min}$  (base polynômiale, P=2)

Méthode	Espérance	Ecart-type	IC 95%	IC 99%
Exact	28.29	0.30	[27.74 ; 28.91]	[27.60 ; 29.14]
Galerkin	28.29	0.30	[27.75 ; 28.91]	[27.60 ; 29.14]
Galerkin (MC)	28.29	0.30	[27.75 ; 28.92]	[27.61 ; 29.15]
Puis. ité.	28.29	0.30	[27.75 ; 28.92]	[27.60 ; 29.14]
Puis. ité. (MC)	28.29	0.30	[27.75 ; 28.95]	[27.61 ; 29.15]
Puis. ité. + colloc	28.29	0.30	[27.75 ; 28.92]	[27.60 ; 29.14]
Collocation	28.29	0.30	[27.74 ; 28.92]	[27.60 ; 29.14]

TAB. 3.12 – Exemple 1 : comparaison des statistiques de  $\Omega_{max}$  (base polynômiale, P=2)

puissance itérée. La situation est inversée lorsque l'évaluation des intégrales est faite par une méthode de simulation ou que la phase de normalisation par projection des équations est remplacée par de la collocation. Cette observation permet de confirmer que la tâche la plus coûteuse de la méthode de la puissance itérée dans sa version originelle est bien liée à l'évaluation de la fonction non-linéaire (3.62). Dans tous les cas, la méthode de collocation, bien que légèrement moins précise, demeure de loin la plus efficace.

On constate également le coût important de l'évaluation des matrices nécessaires aux différents calculs par des méthodes de simulation. Toutefois, dans de nombreuses situations, l'emploi de telles approches sera recommandé. Par exemple, si de nombreuses variables aléatoires interviennent dans le problème, l'emploi de formules de quadrature devient complexe. Ainsi, nous proposons dans le tableau 3.14 une étude paramétrique permettant de déterminer la taille du plan d'expérience. Une mesure cumulée des erreurs commises sur les matrices évaluées de façon aléatoire par rapport à une référence déterministe permet de quantifier la qualité des solutions. De même, le rapport du temps de calcul par simulation par rapport à une évaluation par quadrature est présenté. On constate ainsi que l'utilisation de plans d'expérience augmente fortement la précision des calculs. A précision constante, il est donc possible de réduire très fortement le nombre de tirages à réaliser.

Ordre	Méthode	Calcul. matrices (s)	Résol. pb. (s)	Total (s)
P=2	Galerkin	0.93	0.22	1.15
	Galerkin (MC)	49.67	0.25	49.91
	Puis. ité.	0.75	0.56	1.31
	Puis. ité. (MC)	33.79	0.56	34.34
	Puis. ité. + colloc	0.71	0.06	0.77
	Collocation	0	0.04	0.04
P=3	Galerkin	1.27	0.21	1.48
	Galerkin (MC)	92.06	0.24	92.30
	Puis. ité.	0.99	0.72	1.70
	Puis. ité. (MC)	55.69	0.72	56.40
	Puis. ité. + colloc	0.93	0.05	0.98
	Collocation	0	0.05	0.05

TAB. 3.13 – Exemple 1 : temps de calcul requis par les différentes méthodes de calcul des valeurs propres

	Taille échantillon	10	20	50	100	200	500	1000
Monte Carlo	Temps adim.	0.2	0.4	1.0	2.0	4.1	10.5	20.8
	Err. cumul. moy.	3.55	2.45	1.59	1.10	0.81	0.49	0.35
	Err. cumul. max.	8	5.64	3.94	2.75	1.99	1.5	0.92
Hypercube latin	Temps adim.	0.2	0.4	0.9	1.8	3.6	8.8	18.6
	Err. cumul. moy.	1.30	0.67	0.27	0.14	0.07	0.03	0.01
	Err. cumul. max.	2.67	1.33	0.55	0.4	0.16	0.07	0.04

TAB. 3.14 – Exemple 1 : influence du plan d'expérience lors de l'initialisation des matrices par des méthodes de simulation

### 3.4.4.2 Un système masses-ressorts à deux degrés de liberté avec des raideurs et des masses aléatoires

Nous reprenons dans cet exemple le système dynamique précédent. Cette fois, tous les paramètres sont considérés comme étant aléatoires. Les mêmes arguments nous amènent à modéliser les raideurs et les masses par des variables aléatoires suivant des lois gamma. Le tableau 3.15 récapitule les statistiques de ces grandeurs et les paramètres  $\kappa$  et  $\theta$  correspondants.

Les intégrales de dimension quatre devant être évaluées au cours des différents calculs sont calculées par une méthode de simulation. Nous utilisons à cet effet un plan d'expérience de type latin hypercube comportant 2000 tirages.

Paramètre	Loi	Espérance	Coeff. var.	$\kappa$	$\theta$
$K_1$	Gamma	1000N/m	0.1	100	1.0000
$K_2$	Gamma	150N/m	0.1	100	1.5000
$M_1$	Gamma	1.5kg	0.1	100	0.0150
$M_2$	Gamma	0.75kg	0.1	100	0.0075

TAB. 3.15 – Exemple 2 : modélisation des masses et raideurs aléatoires

Les éléments propres sont approximés à l'aide des polynômes de plusieurs variables de degré total inférieur ou égal à 1 :

$$\Psi = \{1, K_1, K_2, M_1, M_2\}$$

Le calcul des coefficients est alors effectué par les méthodes de Galerkin, de la puissance itérée avec et sans collocation et par collocation pure. Une illustration de la densités de probabilité de chacune des valeurs propres est fournie par la figure 3.21. Ces graphes présente les résultats obtenus par la méthode hybride "puissance itérée-collocation".

Une première analyse de l'erreur quadratique moyenne est présentée dans la table 3.16. Nous pouvons d'abord constaté que la méthode de Galerkin, dans sa version initiale ne donne pas de résultats suffisamment précis. Une étude des résidus permet de constater que l'algorithme de minimisation employé n'est pas parvenu à converger. La forte non-linéarité du système à résoudre est donc, dans cet exemple, un frein à l'utilisation de cette approche directe. En effet, le choix du point de départ de l'algorithme devient déterminant pour obtenir une solution de qualité. Ainsi, la figure 3.22 présente la densité de probabilité de  $\Omega_{max}$  pour deux choix de points initiaux : sur le graphe de gauche, le point de départ a été choisi de façon aléatoire ; sur la partie de droite, une application de la méthode de collocation a permis d'obtenir une première approximation. Une stratégie particulière de choix du point initial doit être mise en place pour améliorer la qualité du résultat.

En revanche, les résultats observés lors de l'emploi des méthodes de la puissance itérée et de la méthode de collocation sont nettement plus satisfaisants. L'écart entre les méthodes en terme de précision est toutefois moins significatif que dans le premier exemple. Cette observation peut être expliquée par l'utilisation de méthodes de



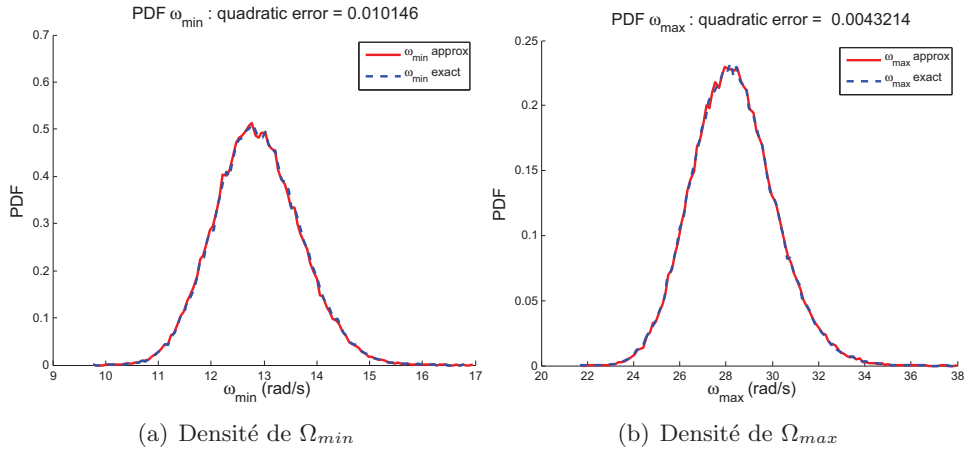


FIG. 3.21 – Exemple 1 : densité de probabilité des valeurs propres calculées par les méthode de la puissance itérée et de la puissance inverse avec collocation des équations de normalisation (base polynômiale, degré total  $\leq 1$ )

simulation pour le calcul des intégrales multidimensionnelles. Ces schémas ont alors tendance à introduire davantage d’erreurs dans le calcul des matrices nécessaires aux méthodes intrusives.

Erreur ( $\times 10^{-3}$ )	$\Omega_{min}$	$\Omega_{max}$
Galerkin	441	194
Galerkin + init colloc	9	4
Puis. itérée	12	5
Puis. itérée + colloc	10	5
Colloc	13	10

TAB. 3.16 – Exemple 2 : erreurs quadratiques moyennes sur les densités de probabilité

Finalement, nous nous intéressons la capacité de chacune des stratégies à fournir des informations statistiques sur les valeurs propres. Les tableaux 3.17 et 3.18 représentent ainsi les premiers moments et les intervalles de confiance calculés. On peut alors constater que les deux versions de l’algorithme de la puissance itérée ont été capables de déterminer une solution de qualité. L’utilisation de l’approche hybride “puissance itérée-collocation” permet une nette réduction du temps de calcul. En revanche, le coût de calcul demeure largement plus élevé que lors de l’utilisation de la collocation pure.

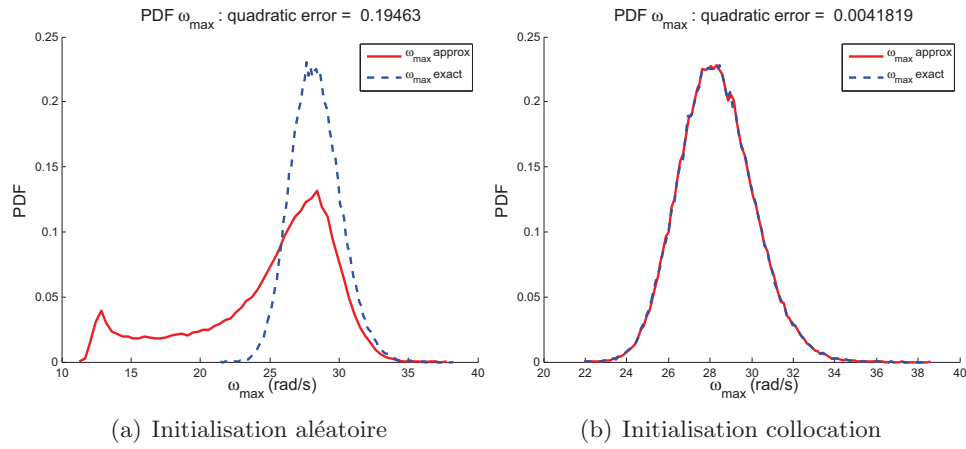


FIG. 3.22 – Exemple 1 : densité de probabilité de  $\Omega_{max}$  par la méthode de Galerkin (base polynômiale, degré total  $\leq 1$ )

Méthode	Espérance	Ecart-type	IC 99%	Temps (s)
Exact	12.91	0.81	[10.95 ; 15.12]	
Galerkin	14.84	2.55	[11.36 ; 28.72]	518
Galerkin + init. colloc	12.91	0.81	[10.96 ; 15.15]	518
Puis. ité.	12.89	0.80	[10.95 ; 15.07]	332
Puis. ité. + colloc	12.91	0.81	[10.98 ; 15.14]	246
Collocation	12.92	0.99	[11.60 ; 16.67]	< 1

TAB. 3.17 – Exemple 2 : comparaison des statistiques de  $\Omega_{min}$  (base polynômiale, degré total  $\leq 1$ )

Méthode	Espérance	Ecart-type	IC 99%	Temps (s)
Exact	28.39	1.78	[24.26 ; 33.43]	
Galerkin	14.84	2.55	[11.36 ; 28.72]	518
Galerkin + init. colloc	28.39	1.78	[24.2398 ; 33.4164]	518
Puis. ité.	28.41	1.77	[24.29 ; 33.45]	332
Puis. ité. + colloc	28.39	1.78	[24.20 ; 33.43]	246
Collocation	27.98	1.84	[24.23 ; 33.40]	< 1

TAB. 3.18 – Exemple 2 : comparaison des statistiques de  $\Omega_{max}$  (base polynômiale, degré total  $\leq 1$ )

### 3.4.4.3 Vibration d'une barre de module d'Young et de masse volumique aléatoires

Nous nous intéressons maintenant à la détermination de la plus petite fréquence propre d'une barre dont les deux extrémités sont fixées. La longueur de cette barre vaut  $l = 1000mm$  et sa section  $a = 314mm^2$ . Dans cet exemple, le module d'Young  $E$  et la masse volumique  $\rho$  sont considérés incertains et uniformes en tout point. Du fait de leur positivité et de la connaissance de certaines propriétés statistiques, ces grandeurs sont modélisées par des variables aléatoires de loi gamma. Le tableau 3.19 présente les valeurs des paramètres de forme  $\kappa$  et d'échelle  $\theta$  de chacune de ces lois.

Paramètre	Loi	Espérance	Coeff. var.	$\kappa$	$\theta$
$E$	Gamma	250MPa	0.05	100	2.5
$\rho$	Gamma	7500kg.m <sup>-3</sup>	0.05	100	75

TAB. 3.19 – Exemple 3 : modélisation de la masse volumique et du module d'Young aléatoires

La barre est modélisée par les équations de l'élasticité linéaire unidimensionnelle. Les déplacements sont alors solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$Eu_{xx} = \rho u_{tt} \quad (3.71)$$

Pour un tel modèle, la  $n^{\text{ième}}$  fréquence propre peut être calculée de façon analytique. Elle est donnée par :

$$\Omega_n^{exact} = \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} n\pi \quad (3.72)$$

D'un point de vue numérique, les équations du modèle sont discrétisées par 20 éléments finis linéaires.

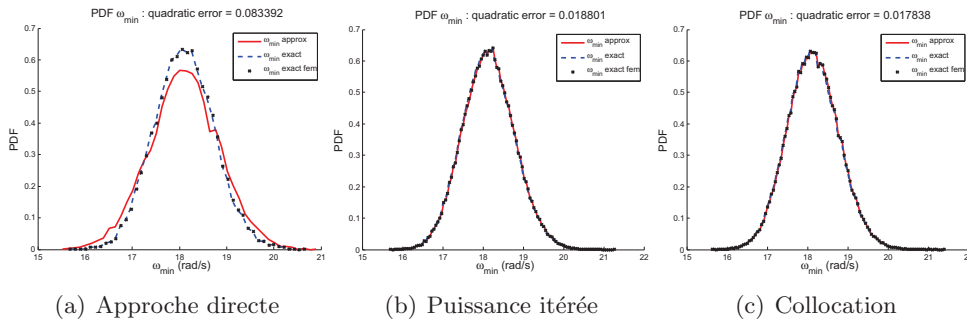


FIG. 3.23 – Exemple 3 : densité de probabilité de la plus petite fréquence propre d'une barre bloquée à ses extrémités (base polynômiale, degré total  $\leq 1$ )

Pour cet exemple, les éléments propres sont approchés par des polynômes de deux variables de degré total inférieur ou égal à 1. Les matrices nécessaires à la

mise en place des méthodes de Galerkin et de la puissance itérée sont évaluées par quadrature. On s'intéresse alors au calcul de la densité de probabilité de la plus petite fréquence propre. Ces densités sont représentées sur la figure 3.23. Sur ces graphes, les solutions approchées issues du calcul (en rouge) sont comparées à la solution analytique donnée par l'équation (3.72) (courbe en pointillés). La dernière courbe, représentée par des étoiles noires, correspond à la solution exacte du problème discrétisé. La superposition des courbes en pointillés et en étoiles permet de vérifier la qualité de la discrétisation par éléments finis de la barre.

Nous pouvons par ailleurs constater que les méthodes de la puissance itérée et de collocation permettent de reproduire correctement la dispersion de la plus petite fréquence propre. En revanche, l'approche directe ne permet pas de copier l'ensemble de la densité de manière satisfaisante, en dépit d'une initialisation par collocation.

Méthode	Espérance	Ecart-type	IC 99%	Erreur	Temps (s)
Exact	18.15	0.64	[16.57 ; 19.86]		
Exact F.E.M	18.17	0.64	[16.59 ; 19.88]		
Galerkin	18.16	0.74	[16.21 ; 20.06]	0.083	191
Puis. ité.	18.17	0.64	[16.58 ; 19.87]	0.019	171
Puis. ité. + col	18.18	0.64	[16.59 ; 19.88]	0.015	155
Collocation	18.17	0.64	[16.57 ; 19.88]	0.018	< 1

TAB. 3.20 – Exemple 3 : comparaison des statistiques de la plus petite fréquence propre d'une barre bloquée à ses extrémités (base polynômiale, degré total  $\leq 1$ )

Le tableau 3.20 permet de confirmer ces observations. On constate que la méthode hybride puissance itérée-collocation fournit les meilleurs résultats en terme de précision. En dépit des améliorations obtenues par rapport aux approches purement intrusives, nous pouvons également constater que cette méthode demeure néanmoins coûteuse en temps de calcul.

### 3.4.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons pu nous consacrer à la caractérisation numériques des éléments propres d'une matrice aux coefficients aléatoires. Nous nous sommes en particulier intéressés au cas où la distribution des paramètres du problème est connue. Les outils usuels de représentation des variables aléatoires et de quantification des incertitudes ont été appliqués à des méthodes de résolution de problèmes aux valeurs propres. Trois schémas ont été proposés : le premier est basée sur la résolution classique d'un problème en dimension infinie par une méthode de Galerkin, le second est une adaptation de la méthode des puissance itérées et le dernier consiste en une méthode non-intrusive de collocation. Une technique hybride basée sur le couplage de la méthode de la puissance itérée et de l'approche par collocation a également été présentée.

L'étude de trois problèmes de dynamique a permis d'évaluer la qualité de chacune des techniques. Sur la base de ces observations, deux constats peuvent être faits : d'un côté, la méthode de collocation présente des performances nettement plus intéressante ; d'un autre côté, la méthode de la puissance itérée demeure plus précise lorsque le problème est affecté par de fortes non-linéarité. Sur ces exemples, la création d'un schéma mixte semble constituer une alternative intéressante pour tirer partie des avantages de chacune des méthodes.

Plusieurs axes d'améliorations s'offrent toutefois à ces méthodes. Concernant les méthodes intrusives, la principale difficulté rencontrée est le calcul des intégrales en grandes dimensions. L'emploi de méthodes de simulation couplées à la théorie des plans d'expérience a permis d'obtenir un moyen fiable d'évaluer ces grandeurs. Toutefois, nous pouvons constater que ces techniques demeurent coûteuses en temps de calcul. L'emploi de schémas de quadrature en grande dimension et une implémentation parallèle pourraient contribuer au traitement de problèmes plus complexes.

### Synthèse

On cherche à déterminer la fonction de répartition de  $\mathbf{X}$  et  $\Lambda$ , solutions du problème aux valeurs propres :

$$\mathbb{K}(\mathbf{Y})\mathbf{X} = \Lambda\mathbb{M}(\mathbf{Y})\mathbf{X} \quad p.s. \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^t\mathbf{X} = 1 \quad p.s. \quad (3.73)$$

Les vecteurs propres et les valeurs propres sont approchés par :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \sum_{p=1}^P \mathbf{x}_p \psi_p(\mathbf{Y}) \quad \text{et} \quad \Lambda(\lambda, \mathbf{Y}) = \sum_{p=1}^P \lambda_p \psi_p(\mathbf{Y})$$

Les coefficients  $\mathbf{x}$  et  $\lambda$  sont calculés par des méthodes intrusives et non-intrusives

#### Résolution du problème non-linéaire par une approche de Galerkin

$$\text{Eq (3.73)} \xrightarrow{\text{Galerkin}} \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\mathbb{K}(\mathbf{Y})\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})\psi_p(\mathbf{Y}) = \Lambda(\lambda, \mathbf{Y})\mathbb{M}(\mathbf{Y})\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})\psi_p(\mathbf{Y})] \\ \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\mathbf{X}^t(\mathbf{x}, \mathbf{Y})\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})\psi_p(\mathbf{Y}) = \psi_p(\mathbf{Y})] \end{cases}$$

Après assemblage, les coefficients  $\mathbf{x}$  et  $\lambda$  sont solutions du système :

$$\left( \mathcal{K}^{dir} - \sum_{q=1}^P \lambda_q \mathcal{M}_q^{dir} \right) \mathbf{x} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^t \mathcal{H}_q^{dir} \mathbf{x} - \mathcal{E}_q^{dir} = 0$$

où les matrices  $\mathcal{K}^{dir}$ ,  $\mathcal{M}_q^{dir}$ ,  $\mathcal{H}_q^{dir}$  sont définies par les équations (3.57) à (3.60).

#### Méthode de la puissance itérée stochastique

$$\begin{cases} \mathbb{M}\mathbf{Z}^{(it+1)} = \mathbb{K}\mathbf{X}^{(it)} \\ \mathbf{X}^{(it+1)} = \mathbf{Z}^{(it+1)} / \|\mathbf{Z}^{(it+1)}\| \end{cases} \xrightarrow{\text{Gal.}} \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\mathbb{M}\mathbf{Z}^{(it+1)}\psi_p] = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\mathbb{K}\mathbf{X}^{(it)}\psi_p] \\ \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\mathbf{X}^{(it+1)}\psi_p] = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}} [\mathbf{Z}^{(it+1)} / \|\mathbf{Z}^{(it+1)}\| \psi_p] \end{cases}$$

Après assemblage, on construit une suite de coefficients  $\mathbf{x}^{(it)}$  :

$$\mathcal{M}^{pow}_{\mathbf{Z}^{(it+1)}} = \mathcal{K}^{pow}_{\mathbf{X}^{(it)}} \quad \text{puis} \quad \mathcal{H}^{pow}_{\mathbf{X}^{(it+1)}} = \mathcal{U}^{pow}(\mathbf{Z}^{(it+1)})$$

où les matrices  $\mathcal{K}^{pow}$ ,  $\mathcal{M}^{pow}$ ,  $\mathcal{H}^{pow}$  et la fonction  $\mathcal{U}^{pow}$  sont définies par les équations (3.63) à (3.65).

- L'étape de normalisation peut être réalisée par collocation.

#### Méthodes non-intrusives

1. Génération d'un échantillon  $\{\mathbf{y}^{(n_s)}\}_{1..N_s}$  de réalisation de  $\mathbf{Y}$
2. Résolution des problèmes déterministes :  $\mathbb{K}(\mathbf{y}^{(n_s)})\mathbf{x}^{(n_s)} = \lambda^{(n_s)}\mathbb{M}(\mathbf{y}^{(n_s)})\mathbf{x}^{(n_s)}$
3. Calcul des coefficients du développement
  - Collocation :  $(\Lambda(\lambda, \mathbf{y}^{(n_s)}), \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(n_s)})) = (\lambda^{(n_s)}, \mathbf{x}^{(n_s)})$

### 3.5 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la façon dont les incertitudes affectant les paramètres d'un modèle sont propagées jusqu'au résultat. La littérature regorge de développements dans le cadre de la simulation de phénomènes physiques, avec, notamment, la mise en place de la méthode des éléments finis stochastiques. Deux autres types d'analyse ont été présentés ici. Dans un premier temps, nous nous sommes concentrés sur l'étude de l'influence d'aléas sur les paramètres d'un problème d'optimisation. Ensuite, une étude de la dispersion des valeurs propres d'une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires de loi connue a été menée. Pour chacun de ces deux problèmes, la mise en place d'approximations de dimension finie des variables aléatoires est nécessaire en vue d'un traitement informatique. Une revue des méthodes proposées dans la littérature a permis de montrer comment la construction de telles approximations est possible. La plupart de ces méthodes sont basées sur la représentation des quantités aléatoires sous la forme de développement sur une famille adaptée de fonctions. Seuls les coefficients à associer à chaque élément de la base sont alors inconnus. Le travail présenté ici consiste à mettre en place des stratégies permettant le calcul de ces coefficients.

Plusieurs techniques ont été développées afin de parvenir à cet objectif. D'un côté, les méthodes qualifiées de non-intrusives, développées dans le cadre des éléments finis stochastiques fournissent un cadre de travail générique et facilement utilisable. A l'opposé, les méthodes intrusives nécessitent une implémentation spécifique à l'étude de chaque problème. Dans ce manuscrit, deux types de méthodes intrusives ont été identifiées.

La première catégorie correspond à une adaptation directe de la méthode de Galerkin à un contexte stochastique : une projection des équations définissant le problème sur la base d'approximation permet l'obtention d'équations non-linéaires portant sur un nombre fini de variables. Cette approche, à la base des éléments finis stochastiques, se révèle malgré tout coûteuse en temps de calcul. Par ailleurs, sur les exemples traités, elle conduit à des problèmes numériques importants liés à la résolution d'un problème non-linéaire déterministe.

L'introduction d'une nouvelle catégorie de méthodes intrusives constitue alors une originalité de ce travail. Nous proposons en effet d'appliquer formellement les schémas numériques déterministes usuels à la résolution des problèmes stochastiques. La projection des équations définissant chaque étape de l'algorithme conduit à l'obtention d'opérations portant directement sur les coefficients inconnus. Ces équations permettent alors de calculer une suite de variables aléatoires convergeant vers la solution. Dans le cadre de l'optimisation, cette stratégie a été appliquée avec succès à la méthode de Newton. Son application à la méthode de la puissance itérée a par ailleurs permis la résolution de problèmes aux valeurs propres stochastiques. Toutefois, l'application de cette stratégie à quelques exemples académiques nous invite à penser que la réalisation de certaines étapes de ces nouveaux algorithmes peut être coûteuse en temps de calcul. Pour pallier cette difficulté, nous avons proposé de remplacer ces étapes onéreuses par l'utilisation localisée de méthodes non-intrusives.

Dans le cadre des problèmes traités ici, ces nouveaux schémas mixtes ont permis de fournir de façon efficace des résultats précis.

Une des principales difficultés rencontrées dans l'utilisation massive des méthodes précédentes relève de l'évaluation d'intégrales multidimensionnelles. Nous avons pu montrer ici l'intérêt de l'utilisation de plans d'expérience lors de l'évaluation de ces quantités par des méthodes de simulation. Il existe toutefois dans la littérature de nombreuses alternatives pour résoudre ce problème. La plupart de ces solutions sont basées sur l'emploi de méthode de simulations [Papageorgiou 1997][Sloan 1998], de quadrature sur des grilles creuses [Bungartz 2003] ou d'implémentations parallèles [Schürer 2001]. L'application de ces techniques aux méthodes intrusives de quantification des incertitudes constitue un premier axe d'amélioration. Une alternative séduisante au traitement de ce problème pourrait également résider dans l'utilisation de polynômes de chaos. Une telle famille d'approximation, orthogonale, permettrait d'une part de simplifier les calculs en produisant des structures creuses. D'autre part, l'existence de schémas de quadrature efficaces basés sur les mesures de probabilité utilisées permettrait de réduire le nombre de calculs intervenant dans l'évaluation des espérances.

Par ailleurs, malgré la qualité des résultats numériques fournis ici par les adaptations au cadre stochastique des méthodes de Newton et de la puissance itérée, il n'existe à notre connaissance aucun résultat théorique permettant de justifier ces observations. Une analyse plus fine de ces nouveaux schémas devrait être menée pour fournir de tels arguments. La généralisation de ces approches à la résolution de systèmes d'équations algébriques et d'équations différentielles pourrait alors être envisagée.





# Optimisation fiabiliste

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Analyse de fiabilité des structures</b>	<b>87</b>
4.1.1	Probabilité de défaillance et espace normalisé	87
4.1.2	Analyse de fiabilité par des méthodes d'approximation	91
4.1.3	Analyse de fiabilité par une méthode de simulation	95
4.1.4	Utilisation des métamodèles dans l'analyse de fiabilité	97
4.1.5	Fiabilité des systèmes	98
4.1.6	Fiabilité dépendant du temps	99
<b>4.2</b>	<b>Optimisation fiabiliste</b>	<b>101</b>
4.2.1	Formalisation du problème de l'optimisation fiabiliste	101
4.2.2	Résolution numérique du problème d'optimisation fiabiliste	102
<b>4.3</b>	<b>Une méthode itérative approchée de projection sur des ensembles critiques</b>	<b>108</b>
4.3.1	Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par indice de fiabilité	109
4.3.2	Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par probabilité de défaillance	112
<b>4.4</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>117</b>
4.4.1	Optimisation fiabiliste : résolution d'un problème mathématique	117
4.4.2	Optimisation fiabiliste d'un poteau	121
4.4.3	Optimisation fiabiliste d'une équerre sous des contraintes dynamiques	123
4.4.4	Optimisation fiabiliste d'une poutre en béton armé	125
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>130</b>

---

Jusque dans la seconde moitié du vingtième siècle, les méthodes de dimensionnement étaient en effet très largement basées sur le savoir faire d'experts. D'une part, leur expérience, conjuguée à des essais sur des prototypes, permettait d'estimer la qualité d'une structure. D'autre part, des règles subjectives permettaient de proposer des solutions qui pouvaient sembler économiquement avantageuses. L'avènement des fortes puissances de calcul ainsi que des outils de simulations efficaces ont permis de proposer des modèles numériques pertinents comme alternatives aux essais sur des prototypes. En particulier, les nombreux essais requis pour améliorer la qualité des structures étaient alors réalisables numériquement. Si les essais sont numériques, les règles d'amélioration de la configuration des structures sont encore très largement empiriques. Au début des années 1960, ces procédures sont toutefois formalisées sous la forme de problème d'optimisation non-linéaire pour lesquels des théories existent déjà [Hernandez 2010]. L'optimisation des structures a alors pu bénéficier des importantes avancées dans l'optimisation, tant au niveau des méthodes que des problèmes traités [Arora 2007].

Un axe de recherche s'est en particulier développé depuis le début des années 70 [Moses 1967]. Il s'agit de rechercher une solution de moindre coût tout en intégrant le traitement d'incertitudes sur les conditions de fonctionnement des structures. Puisque l'environnement dans lequel les structures sont amenées à évoluer est en partie incertain, ces aléas doivent en effet pouvoir être pris en compte dès la phase de conception. En particulier, les ingénieurs cherchent souvent à s'assurer qu'une structure résiste à des sollicitations extrêmes. Dans le domaine du génie civil, par exemple, des règles de calcul sont utilisées depuis longtemps pour intégrer ces phénomènes dans le dimensionnement. Pour éviter les défaillances, des coefficients partiels de sécurité sont le plus souvent appliqués. En augmentant artificiellement les chargements et en abaissant les résistances lors des calculs de dimensionnement, ils permettent de se prémunir contre les aléas. Une fois de plus, ces coefficients sont majoritairement issus d'une connaissance empirique de la réalité. Ils sont de plus calibrés pour une grande classe de structures, ne tirant donc pas parti d'éventuelles spécificités. Ils ont alors tendance à entraîner des structures, certes fiables, mais également onéreuses. La recherche d'une solution fiable et économique implique donc la résolution de deux problèmes *a priori* antagonistes. L'*optimisation fiabiliste* consiste alors à mettre en place des procédures d'optimisation permettant l'intégration des données probabilistes.

Dans ce chapitre une nouvelle méthode d'optimisation fiabiliste est introduite. Cette technique est basée sur une suite de projections des dimensions d'une structure sur des ensembles qui satisfont de plus en plus les critères de fiabilité. Afin de pouvoir comprendre ce qu'apporte cet algorithme, les principaux concepts et les définitions les plus importantes sont mises en évidence dans un état de l'art de l'optimisation fiabiliste. Ainsi, après avoir introduit les notions liées à la fiabilité et à l'analyse de fiabilité, les principales méthodes permettant la résolution numérique d'un problème d'optimisation fiabiliste seront présentées. Finalement, les dernières parties de ce chapitre seront consacrées respectivement à la présentation de nouveaux schémas de résolution. Ces méthodes sont basées sur une séquence de

projection de la configuration optimale sur des demi-espaces construits pour satisfaire le niveau de fiabilité requis. Dans cette première approche, le niveau de fiabilité est indiqué par un indice de fiabilité déterminé par une méthode d'approximation. Pour pallier les inconvénients de ces méthodes, la définition d'un indice de fiabilité généralisé permet un couplage original du schéma de projection avec des techniques d'évaluation de la fiabilité par simulation. La précision et l'efficacité de ces méthodes sont évaluées sur des exemples de dimensionnement de structures.

## 4.1 Analyse de fiabilité des structures

### 4.1.1 Probabilité de défaillance et espace normalisé

La conception d'une structure doit prendre en compte un certain nombre de règles de conception. Ces règles permettent par exemple de tenir compte des limites mécaniques des matériaux ou des restrictions imposées pour le bon fonctionnement d'une structure. Par exemple, dans les règles de construction de structures en béton armé, il est usuel de définir une contrainte maximale admissible dans le matériau [AFNOR 1992]. Chacune des règles est alors associée à un scénario, ou mode, de défaillance : si la règle de bonne conception n'est pas respectée, le scénario correspondant est défaillant. Chacune de ces règles sépare donc les configurations sûres de celles qui sont considérées comme défaillantes. La *fiabilité* est alors définie comme la probabilité qu'une structure ne soit pas défaillante. L'analyse de fiabilité implique alors l'évaluation de la probabilité de défaillance de la structure  $\Pi^f$  par rapport à chacun de ces scénarios de défaillance. Afin de fournir un cadre d'étude général et efficace à ce calcul des probabilités de défaillance, un formalisme mathématique traduisant le problème peut être introduit.

**Variables de conception et variables aléatoires :** Afin de décrire les paramètres du problème, deux ensembles de variables peuvent d'abord être introduit :

- les variables de conception  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I$  correspondent à l'ensemble des paramètres déterministes sur lesquels les concepteurs peuvent jouer afin d'obtenir une structure satisfaisante.
- les variables aléatoires sont placées dans un vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  dont les réalisations sont notées  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^J$ . Chaque variable aléatoire  $Y_j$  intervient dans le scénario de défaillance et peut modéliser, par exemple, une propriété mal connue d'un matériau ou un chargement incertain *a priori*. Dans le cadre de l'optimisation fiabiliste, il est en général admis que la loi de probabilité conjointe  $P_{\mathbf{Y}}$  du vecteur  $\mathbf{Y}$  est connue.

Ces deux vecteurs de paramètres permettent alors de formuler les scénarios de défaillance sous forme de fonctions mathématiques.

**Fonctions de performance :** A chaque scénario est associé une de ces fonctions, appelées *fonctions de performance* [Lemaire 2005]. Chaque fonction de performance

$G_k$  dépend de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{Y}$ . Ainsi, pour une configuration  $\mathbf{x}$  et une réalisation  $\mathbf{y}$  fixées, le scénario  $k$  est dit défaillant si  $G_k(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0$  (figure 4.1).

Un exemple simple est fourni par la règle selon laquelle la contrainte maximale présente dans la structure, notée  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$ , doit être inférieure à une contrainte limite  $\sigma_{max}$ . La fonction de performance  $G$  correspondante pourra s'écrire :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \sigma_{max} - \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \quad (4.1)$$

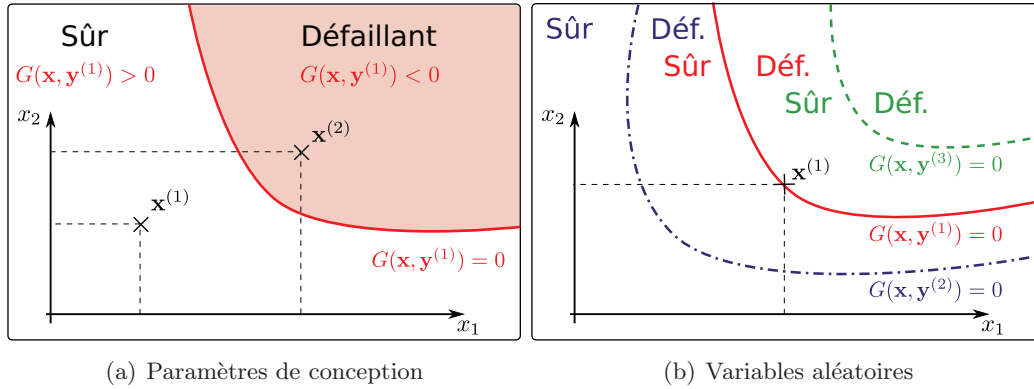


FIG. 4.1 – Domaine de défaillance : variation des paramètres de conception et des variables aléatoires dans l'espace physique

L'espace défini par l'ensemble des couples  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  tels que  $G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  est quant à lui appelé état-limite. On peut également définir l'ensemble  $D_Y^f(\mathbf{x})$  des réalisations conduisant une configuration  $\mathbf{x}$  à la défaillance par l'équation

$$D_k^{f,Y}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^J : G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \quad (4.2)$$

De manière analogue, l'ensemble des configuration présentant des défaillances pour une réalisation donnée peut être introduit :

$$D_k^{f,x}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I : G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \quad (4.3)$$

L'introduction de tels espaces permet alors de définir formellement la notion de probabilité de défaillance.

**Probabilité de défaillance :** La définition précédente de la fonction de performance  $G_k$  permet de caractériser la probabilité de défaillance  $\Pi_k^f(\mathbf{x})$  du scénario  $k$  pour la configuration  $\mathbf{x}$ . Elle correspond alors à la probabilité que  $G_k$  soit négative. Cette probabilité peut donc être calculée à l'aide de l'équation :

$$\Pi_k^f(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{Y}} [G_k(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0] = \int_{D_k^{f,Y}(\mathbf{x})} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) dy_1 \dots dy_J \quad (4.4)$$

où  $f_{\mathbf{Y}}$  est la densité jointe du vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$ . Toutefois, le calcul direct de cette intégrale est souvent compliqué. En effet, il s'agit d'une intégrale multidimensionnelle. De manière générale, quand le nombre de variable aléatoire en jeu devient

important, les temps de calcul en jeu pour une évaluation numérique augmentent exponentiellement. Par ailleurs, le domaine d'intégration  $D_k^{f,Y}(\mathbf{x})$  est souvent mal défini. En effet, il est fréquent qu'une fonction de performance  $G_k$  ne soit pas définie explicitement en fonction des paramètres  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{Y}$ . C'est par exemple le cas de la fonction proposée dans l'équation (4.1) où la contrainte peut être évaluée à l'aide d'un modèle par éléments finis.

L'équation (4.4) introduit la notion de probabilité de défaillance pour une fonction de performance. Toutefois, en ingénierie, il est courant que plusieurs scénarios de défaillance puissent intervenir. On parle alors de fiabilité d'un système. La section 4.1.5 est consacrée à la présentation des principales méthodes utilisées pour résoudre ces problèmes.

**Espace normalisé :** Des méthodes spécifiques doivent alors être mises en place pour calculer efficacement l'intégrale (4.4). Toutefois, cette formulation fait intervenir le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  qui dépend du problème traité. Afin de fournir un cadre général de travail pour développer des techniques d'analyse de fiabilité, il est usuel d'introduire un vecteur aléatoire  $\mathbf{U}$  normalisé à valeurs dans  $\mathbb{R}^J$  [Ditlevsen 2005]. Les composantes de ce vecteur sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes les unes des autres. Dans cet espace normalisé, les lignes de niveau de la densité de probabilité sont des cercles centrés 0 (figure 4.1). Pour qu'à un point de l'espace normalisé corresponde une réalisation du vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$ , on construit une bijection entre les deux espaces.

**Transformations isoprobabilistes :** On introduit alors une transformation isoprobabiliste  $T$  telle que :

$$\mathbf{Y} = T(\mathbf{U}) = (T_1(\mathbf{U}), \dots, T_J(\mathbf{U}))^t \quad (4.5)$$

$$\text{et réciproquement } \mathbf{U} = T^{-1}(\mathbf{Y}) = (T_1^{-1}(\mathbf{Y}), \dots, T_J^{-1}(\mathbf{Y}))^t \quad (4.6)$$

Lorsque les variables  $Y_j$  sont indépendantes, il est facile de construire une telle bijection. Dans ce cas, la transformation  $T$  est isoprobabiliste si :

$$Y_j = T_j(U_j) \iff \Phi(u_j) = F_{Y_j}(y_j) = F_{Y_j}(T_j(u_j)) \quad \forall u_j \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

où  $\Phi$  et  $F_{Y_j}$  sont respectivement les fonctions de répartition de la loi normale centrée réduite et de  $Y_j$ . Afin que l'égalité précédente soit satisfaite, on construit  $T$  de sorte que :

$$Y_j = T_j(U_j) = F_{Y_j}^{-1}(\Phi(U_j)) \text{ et } U_j = T^{-1}(Y_j) = \Phi^{-1}(F_{Y_j}(Y_j)) \quad (4.8)$$

Un exemple simple de cette transformation est obtenu quand les variables aléatoires  $Y_j$  sont indépendantes et  $Y_j \sim \mathcal{N}(m_j, s_j)$ . Les relations  $T$  et sa réciproque  $T^{-1}$  sont alors affines :

$$Y_j = m_j + s_j U_j \text{ et } U_j = \frac{Y_j - m_j}{s_j} \quad (4.9)$$

De plus lorsque les fonctions de répartition  $F_{Y_j}$  sont strictement croissantes, les relations (4.8) permettent une expression analytique des dérivées. On peut alors vérifier :

$$\frac{dT_j}{dU_j}(U_j) = \frac{\phi(U_j)}{f_{Y_j}(F_{Y_j}^{-1}(\Phi(U_j)))} \quad (4.10)$$

où  $\phi$  est la densité de la loi normale centrée réduite,  $f_{Y_j}$  est la densité de la variable  $Y_j$ . Ces formules de dérivation seront particulièrement utiles par la suite lorsque des analyses de sensibilité par rapport aux variables aléatoires devront être faites.

Lorsque les variables aléatoires  $Y_j$  ne sont pas indépendantes, la construction de la transformation  $T$  est plus compliquée. Dans le cadre de l'analyse de fiabilité, les transformations de Rosenblatt et Nataf sont alors souvent employées [Lemaire 2005]. La transformation de Rosenblatt est une transformation simple permettant de transformer un ensemble de variables aléatoires corrélées de loi de probabilité conjointe connue en un ensemble de variables uniformes sur  $[0; 1]$  décorréelées [Rosenblatt 1952]. On peut créer ces variables décorréelées par une série de conditionnements successifs. Les nouvelles variables uniformes sont facilement transformées pour générer des variables gaussiennes centrées réduites. Toutefois, la densité de probabilité jointe n'est pas toujours connue. La transformation de Nataf est alors plus adaptée. Cette seconde technique requiert en effet les seules lois marginales ainsi que la matrice de corrélation [Liu 1986b].

**Fonctions de performance normalisées :** Pour tirer pleinement parti de la mise en place de l'espace des variables normalisées, il est nécessaire d'exprimer les fonctions de performance dans ce nouvel espace. A la fonction de performance  $G_k$ , on associe la fonction  $H_k$  définie par :

$$H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = G_k(\mathbf{x}, \mathbf{T}(\mathbf{u})) \quad (4.11)$$

Le calcul du gradient de cette nouvelle fonction par rapport aux variables normalisées est rendu possible par les règles usuelles de dérivation des fonctions composées :

$$\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{T}(\mathbf{u})]^t \nabla_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{u})) \quad (4.12)$$

où  $\nabla_{\mathbf{u}}$  et  $\nabla_{\mathbf{y}}$  désignent respectivement les opérateurs de dérivation par rapport aux variables normalisées et aux variables aléatoires du problème. Dans le cadre de variables aléatoires indépendantes, le gradient de la transformation  $T$  est donné par la formule (4.10). Le calcul du gradient de  $G_k$ , quand à lui, peut être obtenu analytiquement ou en employant des numériques adéquates.

Les calculs ultérieurs seront alors amenés à se placer soit dans l'espace physique décrivant les paramètres de conception du problème, soit dans l'espace normalisé décrivant les variables aléatoires. Lors d'opérations dans l'espace physique, différentes réalisations conduisent à autant d'états limites différents (figure 4.1). En particulier, une conception donnée qui se trouve dans le domaine sûr pour une réalisation des variables aléatoires peut très bien se retrouver dans une situation

de défaillance pour une autre réalisation. Dans l'espace normalisé des variables aléatoires, la situation est opposée. A une conception est associé un état limite. Les différents points de l'espace normalisé, qui correspondent à des réalisations des variables normalisées, peuvent alors se situer soit dans un état entraînant une défaillance, soit dans le domaine sûr (figure 4.2).

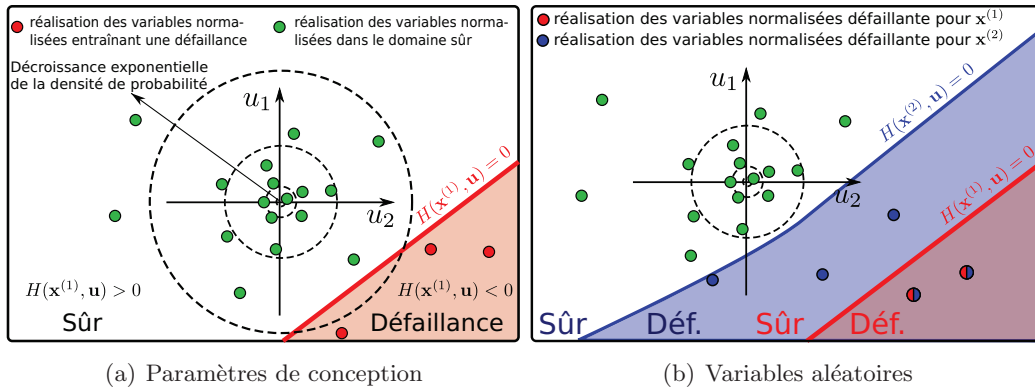


FIG. 4.2 – Domaine de défaillance : variation des paramètres de conception et des variables aléatoires dans l'espace normalisé

Les différentes méthodes développées pour l'analyse de fiabilité auront alors tendance à exploiter l'une ou l'autre de ces propriétés. Ces méthodes ont toutes pour objectif d'évaluer la probabilité de défaillance d'une structure. Pour un état limite, cette probabilité est définie par l'équation (4.4). Cette intégrale étant souvent difficile à calculer directement, nous rappelons dans les trois sections suivantes les principales méthodes permettant d'avoir une estimation de cette grandeur. Nous présenterons ensuite le traitement spécifique qui s'applique au cas de l'étude d'une structure présentant plusieurs modes de défaillance ou lorsque certaines propriétés évoluent au cours du temps.

#### 4.1.2 Analyse de fiabilité par des méthodes d'approximation

Plusieurs stratégies peuvent être mises à profit pour tenter d'estimer la valeur de l'intégrale (4.4). La première stratégie consiste à remplacer la zone de défaillance  $D^{f,Y}(\mathbf{x})$ , *a priori* compliquée, par un autre domaine plus simple. Pour cette approximation, le calcul de la probabilité devient alors aisé. Dans ce cadre, la méthode de fiabilité du premier ordre (First Order Reliability Method, ou FORM) constitue une première approche.

La méthode FORM, introduite dans [Hasofer 1974], est basée sur l'obtention d'un point de défaillance le plus probable  $\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})$  pour le mode de défaillance  $k$ . Ce point est la réalisation des variables normalisées la plus probable qui conduit à une défaillance du mode  $k$ . Dans l'espace normalisé, les lignes de niveaux de la densité de probabilité jointe étant des cercles centrés sur l'origine du repère, ce point est



solution du problème :

$$\beta_k(\mathbf{x}) = \|\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})\| = \min \{\|\mathbf{u}\| : H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\} \quad (4.13)$$

La distance euclidienne de ce point à l'origine, communément appelée *indice de fiabilité*  $\beta_k(\mathbf{x})$ , est alors caractéristique de la probabilité de défaillance du scénario  $k$ . L'approximation FORM consiste en effet à remplacer l'état limite normalisé  $H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  par son hyperplan tangent au point  $\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})$  (voir la figure 4.3). L'invariance

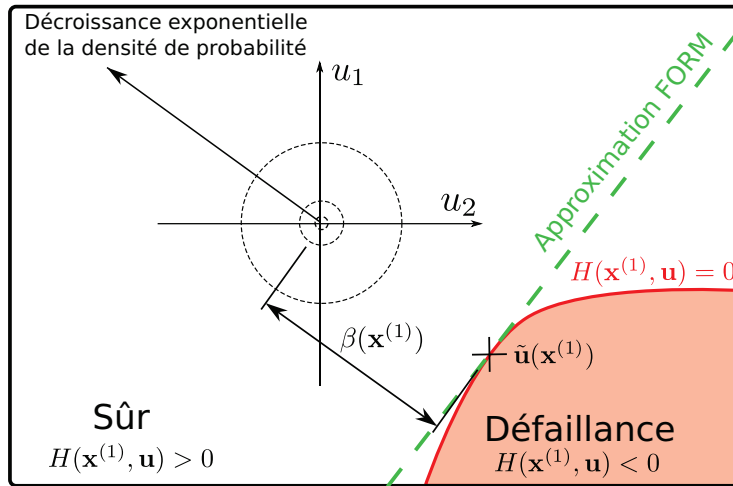


FIG. 4.3 – Approximation FORM, point de défaillance le plus probable et indice de fiabilité

par rotation de la densité de probabilité ainsi que la décroissance exponentielle de la densité de probabilité permettent alors d'approcher la valeur de la probabilité de défaillance. En effet, dans ce contexte, nous pouvons faire l'hypothèse que la contribution principale à cette probabilité est due au point de défaillance le plus probable  $\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})$ . L'équation (4.14), où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, fournit alors une approximation de  $\Pi_k^f$ .

$$\Pi_k^f(\mathbf{x}) \approx \Phi(-\beta_k(\mathbf{x})) \quad (4.14)$$

De nombreux algorithmes ont été développés pour résoudre le problème (4.13). Dans [Liu 1991], les auteurs mènent une étude sur les différentes approches permettant cette résolution. Ils comparent d'une part les méthodes classiques d'optimisation non-linéaire, et d'autre part l'algorithme HLRF mis en place par Hasofer, Lind, Rackwitz et Fiessler [Hasofer 1974][Rackwitz 1978].

Les algorithmes de la programmation non-linéaire proposent un cadre d'application plus général. Ainsi, la formulation du problème (4.13) peut être enrichie pour traiter des problèmes plus complexes. Par exemple, dans [Luo 2009], les auteurs introduisent une contrainte supplémentaire pour traiter des problèmes faisant intervenir des variables incertaines bornées dont les distributions ne sont pas connues.

Au contraire, l'algorithme HLRF, tire parti de la forme particulière du problème d'analyse de fiabilité et Liu et Der Kiureghian soulignent son efficacité. Par ailleurs, sa mise en oeuvre se révèle aisée. Il est en effet basé sur une recherche itérative du point de défaillance le plus probable dans l'espace normalisé. Le calcul du nouvel itéré  $\mathbf{u}_k^{(it+1)}$  est déterminé par la recherche d'une direction de descente  $\eta^{(it)}$  et d'une projection sur l'état limite  $H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$  :

$$\mathbf{u}_k^{(it+1)} = \left( \left( \mathbf{u}_k^{(it)} \right)^t \eta^{(it)} \right) \eta^{(it)} + \frac{H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k^{(it)})}{\|\nabla_u H_k(\mathbf{u}_k^{(it)})\|} \eta^{(it)} \quad (4.15)$$

où  $\eta^{(it)}$  est la direction de plus forte pente de  $H_k$  au point  $\mathbf{u}_k^{(it)}$  :

$$\eta^{(it)} = - \frac{\nabla_u H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k^{(it)})}{\|\nabla_u H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k^{(it)})\|} \quad (4.16)$$

Malgré ces avantages, l'algorithme HLRF peut souffrir d'un manque de stabilité et de robustesse dans les états limites ne sont pas des hyperplans. Dans [Liu 1986a], les auteurs proposent ainsi une amélioration de l'algorithme en incorporant une phase de recherche linéaire afin de renforcer les propriétés de convergence. Cette dernière approche apparaît alors comme un bon compromis entre robustesse et rapidité. Dans [Haukaas 2006], une modification de cette étape de recherche linéaire est proposée afin de rendre l'algorithme d'optimisation plus apte à opérer de concert avec des méthodes d'analyse par éléments finis. Par ailleurs, lorsque ces méthodes sont utilisées pour évaluer les fonctions de performance, les gradients sont souvent amenés à être calculés par différences finies. Si l'incrément choisi pour ce calcul donne une variation de la réponse trop petite, les dérivées sont alors mal estimées et l'algorithme peut ne pas converger. Afin de prendre en compte ces phénomènes, Nguyen propose une amélioration de l'algorithme HLRF permettant un contrôle de l'erreur numérique [Nguyen 2007].

En parallèle, Grandhi et Wang [Grandhi 1998] proposent de remplacer l'état limite par une approximation non linéaire à chaque étape de l'algorithme. Cette approximation est basée sur la définition de nouvelles variables prenant en compte la non-linéarité du problème. Il est utile de préciser que l'approximation ne fait pas intervenir le calcul de dérivées, permettant ainsi l'obtention d'un algorithme particulièrement efficace.

D'autres types d'algorithmes peuvent bien entendu être utilisés pour résoudre ce problème. Par exemple, dans les cas où le domaine de défaillance à  $\mathbf{x}$  fixé est non convexe, l'existence de minima locaux peut perturber l'analyse de fiabilité. Pour ces problèmes, les algorithmes précédents n'offrent aucune garantie sur la caractère global de l'optimal calculé. Pour favoriser l'obtention d'un optimum global, Rojas propose par exemple d'utiliser des métaheuristiques bioinspirées [Rojas 2006].

Dans [Rackwitz 2001], l'auteur montre sur des exemples numériques simples que dans le cas où les états limites à  $\mathbf{x}$  fixé ne sont pas plans, l'approximation FORM conduit à des erreurs importantes. En particulier, il montre que pour des

domaines de défaillance  $D^{f,Y}(\mathbf{x})$  convexes, l'approximation est trop conservatrice. Au contraire, un domaine de défaillance concave entraînera une sous-estimation de la probabilité de défaillance. Une meilleure approximation de la probabilité de défaillance est alors obtenue en remplaçant l'état limite non par un hyperplan mais par une hypersurface quadratique : on parlera alors souvent de méthode SORM (Second Order Reliability Method) [Fiessler 1979].

En tenant compte de cette approximation, Tvedt [Tvedt 1990] propose un résultat permettant d'estimer la probabilité de défaillance. Ce résultat fait intervenir les rayons de courbure au point de défaillance le plus probable et le calcul d'une intégrale impropre. Cette intégrale, à évaluer numériquement, rend l'utilisation de cette formule difficile. Au début des années 90, Breitung fournit alors une approximation de la probabilité de défaillance basée sur une étude asymptotique [Breitung 1984]. Il propose en effet d'approcher la probabilité de défaillance par :

$$\Pi_k^f(\mathbf{x}) \approx \Phi(-\beta_k(\mathbf{x})) \prod_{j=1}^{J-1} \left(1 - \beta_k(\mathbf{x}) \kappa_k^j(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}_k)\right)^{-1/2} \quad (4.17)$$

où les  $\kappa_k^j$  sont les courbures principales de l'hypersurface quadratique approximant l'état limite  $k$  au point de défaillance le plus probable. La probabilité de défaillance estimée par la méthode FORM est alors corrigée par des termes faisant intervenir les courbures. Cette formule étant obtenue à partir d'un développement asymptotique, elle fournit une approximation satisfaisante de la probabilité de défaillance pour des valeurs de  $\beta_k$  suffisamment grande. Dans [Rackwitz 2001], l'auteur propose d'utiliser cette approximation pour des valeurs de  $\beta_k$  supérieure à 1. Pour des valeurs plus petites, la formule de Tvedt donne alors de meilleurs résultats.

Un problème majeur de ces deux approximations est soulevé par Rackwitz dans [Rackwitz 2001]. En effet, les deux approximations FORM et SORM sont basées sur l'hypothèse que la région autour du point de défaillance contribue la plus largement à la probabilité de défaillance. L'auteur cite en effet le cas d'un problème où deux points de défaillance les plus probables peuvent être identifiés. Dans ce cas, les approches précédentes fourniraient une estimation erronée de la fiabilité de la structure. Pour résoudre ce problème, Der Kiureghian propose l'utilisation d'une heuristique pour identifier plusieurs points de défaillance les plus probables [Kiureghian 1998]. Cette approche est basée sur la résolution successive de problèmes de fiabilité modifiés. A chaque étape, les fonctions de performances sont perturbées afin d'éloigner les états limites de l'origine dans le voisinage des points de défaillance déjà identifiés. Après le calcul des différents points de défaillances les plus probables, des techniques usuelles de la fiabilité des systèmes permettent d'obtenir une bonne approximation de la probabilité de défaillance.

Dans [Valdebenito 2010], les auteurs jugent pertinent d'inclure dans les approches d'analyse de la fiabilité basées sur des techniques d'approximation les méthodes de réduction de dimension (DRM)[Xu 2005]. Le principe de cette classe de méthode est différent des approximations faites dans FORM et SORM. Il s'agit ici d'approcher les fonctions de performance par des sommes de fonctions

ne dépendant chacune que d'une ou quelques variables. Dans [Rahman 2006a], les auteurs construisent une telle approximation de la fonction de performance autour du point de défaillance le plus probable. Cette nouvelle fonction étant alors rapide à évaluer, une épreuve de Monte Carlo leur permet finalement d'approcher la probabilité de défaillance avec une très bonne précision.

### 4.1.3 Analyse de fiabilité par une méthode de simulation

Dans le cadre de l'analyse de fiabilité, les méthodes de simulation tentent de calculer la probabilité de défaillance d'un scénario à partir d'un échantillon  $\{\mathbf{y}^{(n_s)}\}_{n_s=1..N_s}$  de réalisation du vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$ . La méthode de simulation la plus connue est la méthode de Monte Carlo [Rubinstein 1981]. Cette méthode est devenue particulièrement populaire grâce à sa robustesse et à sa facilité d'utilisation. Après génération de l'échantillon des variables d'entrée du problème, la probabilité de défaillance est estimée par :

$$\Pi_k^f(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N_s} \sum_{n_s=1}^{N_s} 1_{\{G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{(n_s)}) \leq 0\}} \quad (4.18)$$

où la fonction  $1_{\{G_k(\mathbf{x}, \cdot)\}}$  est l'indicatrice du domaine  $\{\mathbf{y} : G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\}$ . Autrement dit, la probabilité de défaillance est définie par le quotient du nombre de réalisation conduisant à une défaillance et du nombre total d'expériences (figure 4.4). Il est généralement estimé qu'il faut entre  $10^{n+2}$  et  $10^{n+3}$  échantillons pour obtenir une précision de l'ordre  $10^{-n}$ . Or, dans le cadre de l'analyse de fiabilité, les probabilités de défaillance à estimer sont infimes. Lorsque chaque évaluation de la fonction de performance est coûteuse en temps de calcul, l'utilisation de cette procédure devient rapidement inadaptée.

Des méthodes plus spécifiques ont alors été développées pour calculer de façon précise et plus rapide des probabilités de défaillance [Schuëller 2004]. Les méthodes de tirage d'importance consistent alors à générer des tirages qui conduisent fréquemment à la défaillance d'un scénario [Schuëller 1987]. Pour cela, il est nécessaire de générer un échantillon de réalisations  $\{\mathbf{v}^{(n_s)}\}_{n_s=1..N_s}$  d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{V}$  de densité de probabilité  $\Upsilon_{\mathbf{x}}$  associée à la configuration  $\mathbf{x}$ . Schuëller propose alors d'écrire la probabilité de défaillance en utilisant cette densité :

$$\Pi_k^f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^J} 1_{\{G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0\}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^J} \frac{1_{\{G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < 0\}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v})}{\Upsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})} \Upsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (4.19)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbf{V}} \left[ \frac{1_{\{G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < 0\}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v})}{\Upsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})} \right] \quad (4.20)$$

L'échantillon de réalisations de  $\mathbf{V}$  peut alors servir à estimer la quantité précédente :

$$\hat{\Pi}_k^f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_s} \sum_{n_s=1}^{N_s} \frac{1_{\{G(\mathbf{x}, \mathbf{v}^{(n_s)}) < 0\}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v}^{(n_s)})}{\Upsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}^{(n_s)})} \quad (4.21)$$

Dans [Schuëller 2004], Schuëller souligne que la densité optimale pour le tirage d'importance est donnée par :

$$\Upsilon_{\mathbf{x}}^{opt}(\mathbf{v}) = \frac{1_{\{G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < 0\}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v})}{\Pi_k^f(\mathbf{x})} \quad (4.22)$$

Cet estimateur a en effet la propriété de posséder une variance nulle. Toutefois, il est illusoire d'espérer pouvoir utiliser ce résultat car la probabilité  $\Pi_k^f$  est bien entendu inconnue.

Plusieurs stratégies existent alors pour déterminer la densité de probabilité  $\Upsilon$  à utiliser pour générer l'échantillon. Dans [Schuëller 1987], les auteurs proposent d'effectuer des tirages gaussiens autour du point de défaillance le plus probable. En effet, la région autour de ce point est supposée être celle qui contribue le plus à la défaillance de la structure. Des tirages localisés dans cette zone permettent alors d'avoir le plus d'information possible (figure 4.4). Une autre technique populaire est introduite dans [Ang 1992]. Un échantillon de points situés dans la zone contribuant le plus à la probabilité de défaillance permet de définir une densité  $\Upsilon$  à l'aide d'un estimateur à noyau. Initialement, il a été proposé de construire cet échantillon à l'aide d'une méthode de rejet de valeurs générées selon la densité  $f_{\mathbf{Y}}$ . Pour pallier la faible efficacité de cette méthode, il a été suggéré par la suite de générer ces valeurs à l'aide d'une procédure de Monte Carlo par chaînes de Markov [Au 1999]. L'algorithme de Metropolis-Hastings est alors utilisé pour générer une séquence de réalisation par chaîne de Markov dont la loi stationnaire a pour densité  $\Upsilon_{opt}$  [Metropolis 1953]. Cet algorithme est particulièrement adapté car la loi stationnaire ne doit être connue qu'à une constante multiplicative près. Le dénominateur inconnu  $\Pi_k^f$  de l'équation (4.22) peut donc être omis. En plus de son efficacité et de sa précision, les auteurs soulignent que cette méthode a l'avantage de prendre implicitement en compte les cas où plusieurs zones contribuent fortement à la probabilité de défaillance.

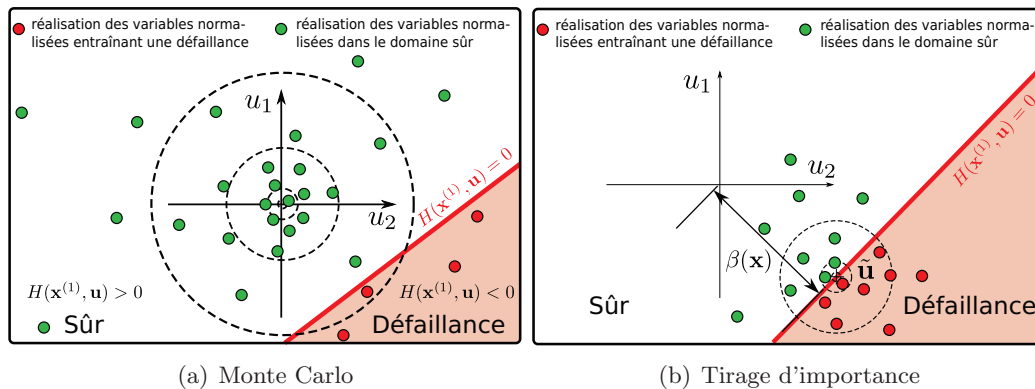


FIG. 4.4 – Analyse de fiabilité : méthodes de simulation

Plus récemment, la simulation par sous-ensemble a été proposée comme alternative au tirage d'importance pour calculer les faibles probabilités de défaillance

[Au 2001b]. La “subset simulation” est basée sur la réécriture du scénario de défaillance de la structure comme une suite croissante d’événements intermédiaires. La probabilité de défaillance est exprimée comme un produit de probabilités conditionnelles définies à partir de ces événements. Chacune de ces probabilités conditionnelles est alors suffisamment grande pour être correctement évaluée par une méthode de simulation. Une fois encore, les algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov se révèlent être des outils précieux pour simuler ces lois conditionnelles.

Les méthodes de “line sampling” ont également été développées pour résoudre des problèmes d’analyse de fiabilité dans de grande dimension [Pradlwarter 2007]. Une méthode de Monte Carlo est utilisée pour générer un échantillon de directions de recherches dans l’espace normalisé. Pour chacun de ces axes, une méthode de recherche linéaire efficace permet de déterminer les intersections avec les états limites. La connaissance de ces points d’intersection rend possible un calcul analytique de la probabilité de défaillance conditionnée par la direction de recherche. Un estimateur de la probabilité de défaillance présentant une faible variance est ainsi proposé.

Dans [Schuëller 2007], ces différentes méthodes d’analyse de fiabilité basées sur la simulation ont été testées et comparées. Les méthodes de “line sampling” ont montré de bons résultats dans les cas où des directions importantes avaient pu être évaluées a priori. Les méthodes qualifiées de “subset simulation” se sont quant à elle montrées à la fois efficaces, précises et robustes. Par ailleurs, les auteurs de [Schuëller 2004] relèvent les qualités des schémas de tirage d’importance, tout en mettant en garde contre des coûts de calcul importants.

#### 4.1.4 Utilisation des métamodèles dans l’analyse de fiabilité

Dans les méthodes d’analyse de fiabilité précédentes, les différentes améliorations avaient pour objectif la réduction du nombre d’évaluations des fonctions de performances. En effet, dans le cadre de l’analyse des structures, il est fréquent que ces fonctions soient définies par des limitations mécaniques nécessitant le recours à des méthodes de simulations. L’utilisation de métamodèles est une démarche visant à approcher ces fonctions difficiles à évaluer par des modèles analytiques dont l’évaluation sera rapide. La majorité des temps de calcul sera alors concentrée dans la phase de construction du modèle. Cette approximation déterminée, l’évaluation des probabilités de défaillance devient aisée, soit de manière analytique, soit par des méthodes de simulation.

La méthode des surfaces de réponse a été rapidement développée dans le cadre l’analyse de fiabilité [Faravelli 1989][Kleiber 2004]. Dans ces méthodes, les fonctions de performance sont remplacées par des surfaces quadratiques basées sur un développement de Taylor. Un échantillon de réponses permet le calcul des coefficients inconnus, le plus souvent par moindres carrés [Kaymaz 2005]. La construction d’un échantillon de qualité est souvent assurée par l’utilisation des techniques issues de la théorie des plans d’expérience. Plusieurs auteurs ont présenté des variantes de ces méthodes, visant à résoudre les problèmes liés à l’emploi de polynômes de degrés 2 en guise d’approximation. Par exemple, Schueremans suggère l’emploi d’une base

de splines pour mieux prendre en compte les comportements locaux des fonctions de performances [Schueremans 2005].

La méthode des éléments finis stochastiques introduite par Ghanem [Ghanem 1991] permet le même type d'approximation pour quantifier la propagation des incertitudes en modifiant les tenseurs usuels de l'élasticité linéaire [Sudret 2002]. Des variantes non-intrusives de ces schémas pour traiter des problèmes de fiabilité ont également été présentées [Berveiller 2006][Kim 2006]. Ces méthodes peuvent alors être vues comme une généralisation des méthodes de surfaces de réponse.

Kaymaz propose une alternative visant à créer un métamodèle par interpolation d'un échantillon de réponses [Kaymaz 2005]. Cette interpolation est basée sur des méthodes de krigeage. Ces techniques permettent de tenir compte des corrélations spatiales entre les différentes réponses obtenues. Contrairement aux méthodes de moindres carrés usuelles où tous les points de régression ont un même poids, les données de l'échantillon les plus proches contribuent ici le plus à la construction du modèle. La comparaison de cette approche avec les schémas classiques de modélisation par surface de réponses révèle alors leur précision accrue.

Enfin, des méthodes issues de l'informatique et des problèmes de classification ont été plus récemment adaptées au cadre de l'analyse de fiabilité. Ces techniques visent à fournir des systèmes capables de prédire la défaillance ou le bon fonctionnement d'une structure. La plupart de ces méthodes reposent sur une première phase d'apprentissage où un échantillon de réponses est utilisé. C'est lors de cette première étape que le modèle est construit. Ce dernier se révèle alors capable de prédire efficacement la valeur de la fonction de performance ou l'appartenance au domaine de défaillance pour d'autres réalisations des variables aléatoires. Les réseaux de neurones ont ainsi été introduits par Hurtado pour remplacer le recours à une analyse par éléments finis lors de l'étude de fiabilité [Hurtado 2001][Papadrakakis 2002]. Les séparateurs à vaste marge fournissent également un ensemble d'outils adaptés au calcul des probabilités de défaillance [Hurtado 2007]. En effet, ces méthodes sont basées sur la construction d'un hyperplan séparant deux ensembles de points. En cherchant à discriminer les réponses fiables de celles défaillantes, le séparateur joue ici un rôle proche de celui de l'état limite.

Dans [Bourinet 2011], une approche basée sur le couplage entre un métamodèle à base de séparateur à vaste marge et une méthode de "subset simulation" est introduite. Des exemples numériques permettent alors aux auteurs de montrer la précision et l'efficacité de ce schéma.

#### 4.1.5 Fiabilité des systèmes

Les méthodes présentées dans les paragraphes précédents traitent de l'analyse de fiabilité par rapport à un mode de défaillance. Or, une structure mécanique est souvent constituée de plusieurs composants possédants parfois plusieurs scénarios de défaillance chacun. De plus, ces composants interagissent et la défaillance d'un seul d'entre eux peut conduire à la ruine de l'ensemble du système. Le calcul de la

probabilité de défaillance de la structure est alors souvent appelé *analyse de fiabilité système* et joue un rôle primordial dans le dimensionnement.

L'analyse de fiabilité d'un système est fondée sur la connaissance de la fiabilité de chacun des composants. A chaque composant est associé un mode de défaillance. La probabilité de défaillance de la structure dépend alors de tous les modes de défaillance ainsi que de l'ensemble des interactions entre ces scénarios de défaillance. Par exemple, la défaillance d'un *système en série* aura lieu suite à la ruine d'au moins un des composants. Inversement, dans les *système en parallèle*, l'ensemble des composants devra être défaillant pour conclure à l'effondrement du système. Certains *systèmes mixtes* peuvent combiner ces interactions. Le nombre important de combinaisons entre les modes de défaillance des composants rend alors difficile le calcul exact de la probabilité de défaillance du système.

De nombreuses méthodes ont été présentées dans la littérature pour s'affranchir de ces limitations. Rackwitz présente un ensemble de bornes destinées à encadrer la probabilité de défaillance du système après une analyse de fiabilité des composants [Rackwitz 2001]. De même, un certain nombre d'approximations sont proposées pour estimer facilement ces quantités. Plusieurs auteurs ont proposé des approches pour adapter ces résultats au calcul d'un indice de fiabilité système [Moses 1997].

Thoft-Christensen propose d'intégrer l'indice de fiabilité du système au niveau de l'indice de chaque composant [Thoft-Christensen 1986]. Plus tard, Enevoldsen suggérera une procédure pour faire le lien entre ces différents indices [Enevoldsen 1993].

L'existence de telles procédures justifiera un certain nombre de simplifications dans la suite de ce manuscrit. En effet, d'éventuelles restrictions sur la défaillance du système pouvant être intégrées au niveau des composants, nous pourrions considérer chacun des modes séparément. Nous ferons alors implicitement l'hypothèse que les indices calculés peuvent être corrigé pour intégrer une approche système.

#### 4.1.6 Fiabilité dépendant du temps

Nous avons établi dans les sections précédentes que les états limites sont souvent formulés en terme de sollicitations et de résistances. Or, il est courant que ces propriétés soient amenées à évoluer au cours de la vie d'une structure. Les chargements sont par exemple liés à la forte variabilité de l'environnement. Les résistances, quant à elles, sont souvent altérées par des mécanismes de vieillissement de la structure tels que la corrosion ou l'endommagement par fatigue.

La combinaison de ces phénomènes conduit le plus souvent à des variations des propriétés fiabilistes des structures. Les outils de la théorie de la fiabilité présentés jusqu'alors ne tiennent pas compte de cette variabilité temporelle. Il est alors courant de parler de fiabilité indépendante du temps. A l'inverse, la fiabilité dépendant du temps vise à intégrer l'évolution des propriétés structurales. Ces méthodes reposent fortement sur une modélisation précise des mécanismes de détérioration et sur la modélisation des chargements par des processus stochastiques.

Dans ce contexte, Aoues identifie trois catégories de méthodes permettant l'esti-



mation d'une probabilité de ruine pour des études intégrant la variabilité temporelle [Aoues 2008]. Tout d'abord, les méthodes basées sur un calcul asymptotique dans le cadre de processus bien particuliers. Ces approches reposent essentiellement sur des résultats théoriques sur les processus stochastiques. D'autres méthodes proposent des reformulation du problème initial afin d'utiliser les outils de l'analyse de fiabilité indépendante du temps [Andrieu-Renaud 2004]. Enfin, les méthodes de Monte Carlo permettent de traiter simplement ces problèmes, au prix de temps de calcul importants.

Dans cette thèse, les résultats proposés sont limités à des problèmes de fiabilité indépendants du temps.

## 4.2 Optimisation fiabiliste

### 4.2.1 Formalisation du problème de l'optimisation fiabiliste

Plusieurs formulations du problème de l'optimisation fiabiliste existent dans la littérature. Historiquement, les premiers problèmes posés consistaient à rechercher la configuration rendant minimales les espérances des coûts initiaux et des coûts de défaillance [Moses 1997]. Toutefois, la mauvaise connaissance des coûts liés à la défaillance du système rend cette approche difficilement utilisable. Une alternative plus adaptée consiste à minimiser le coût initial en assurant que la probabilité de défaillance associée soit inférieure à un certain seuil. Si  $G(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$  est la fonction de performance associée à l'ensemble du système, le problème d'optimisation fiabiliste est la recherche du vecteur  $\check{\mathbf{x}}$  :

$$\check{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I} f(\mathbf{x}) \quad (4.23)$$

$$\text{tel que} = \begin{cases} P_{\mathbf{Y}} [G(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0] \leq \Pi_{sys}^* \\ g_{k_{det}}(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \quad 1 \leq k_{det} \leq K_{det} \quad (4.24)$$

où  $\Pi_{sys}^*$  est la plus grande probabilité de défaillance tolérée du système, et  $g_{k_{det}}$  correspond à une contrainte déterministe. Ces contraintes supplémentaires sont souvent liées à des restrictions sur les bornes de dimensionnement ou sur la forme générale des structures. Elles influent en général fortement sur la solution. Leur prise en compte dans les algorithmes d'optimisation fiabiliste est donc primordiale.

Lorsque les scénarios de défaillance sont décrits par plusieurs fonctions de performance, cette formulation n'est pas non plus adaptée aux calculs. Ici, nous faisons l'hypothèse que tous les modes de défaillance peuvent être traités séparément. On parle alors d'optimisation fiabiliste des composants. Toutefois, nous avons vu dans la section 4.1.5 que moyennant une adaptation des probabilités cibles pour chaque état limite, il est souvent possible de ramener un problème de fiabilité d'un système à un problème lié à ses composants. Sous cette hypothèse, la recherche d'un optimum fiable peut s'écrire :

$$\check{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I} f(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

$$\text{tel que} = \begin{cases} \Pi_k^f(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{Y}} [G_k(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0] \leq \Pi_k^* & , 1 \leq k \leq K \\ g_{k_{det}}(\mathbf{x}) \geq 0 & , 1 \leq k_{det} \leq K_{det} \end{cases} \quad (4.26)$$

où  $\Pi_k^*$  est la plus grande probabilité de défaillance tolérée pour le mode  $k$ . Dès lors qu'une nouvelle configuration  $\mathbf{x}$  sera proposée, une nouvelle analyse de fiabilité devra donc être menée pour chacune des fonctions de performance. Le coût important de ces phases de calcul des probabilités de défaillance associé aux nombreuses évaluations qui devront être faites rendent indispensable la mise en place de stratégies de résolution efficaces.

### 4.2.2 Résolution numérique du problème d'optimisation fiabiliste

En règle générale, les algorithmes d'optimisation fiabiliste sont basés sur l'interaction de deux procédures. La première correspond à l'algorithme d'optimisation et cherche à identifier les meilleurs paramètres. La seconde permet une évaluation des contraintes probabilistes et contribue majoritairement au temps de calcul. Il doit également être noté que de nombreux algorithmes d'optimisation nécessitent le gradient des contraintes fiabilistes. Au delà du coût en temps, une mauvaise évaluation des gradients peut conduire à des problèmes de convergence. De nombreux travaux ont été effectués depuis une vingtaine d'année pour proposer des méthodes efficaces et robustes permettant d'outrepasser ces limitations. Une présentation exhaustive de ces avancées est présentée dans [Valdebenito 2010].

Dans cette section, nous présentons un état de l'art des contributions les plus significatives dans ce domaine. Dans un premier temps, les méthodes proposant une résolution directe du problème (4.25) seront présentées. Ces méthodes s'appuient sur l'utilisation de méthodes de simulation. En parallèle du développement de ces algorithmes, de nombreuses reformulations du problème ont été proposées en utilisant l'approximation FORM. Les méthodes permettant leur résolution seront alors exposées dans un second temps.

#### 4.2.2.1 Utilisation des méthodes de simulations dans l'optimisation fiabiliste

Il est possible de résoudre directement le problème d'optimisation fiabiliste (4.25). Cette résolution passe par l'estimation de la probabilité de défaillance. Encore une fois, cette probabilité de défaillance peut être calculée à l'aide de méthodes de simulation. Dans ce cadre, Valdebenito [Valdebenito 2010] répertorie les algorithmes d'optimisation fiabiliste basée sur des méthodes de simulations en trois catégories : les algorithmes utilisant des métamodèles, les approches découplées et les techniques permettant une intégration directe du problème de fiabilité dans la boucle d'optimisation.

#### Utilisation de métamodèles et de techniques de simulations avancées

Une approche basique pour résoudre le problème (4.25) consiste à évaluer la probabilité de défaillance par une méthode de Monte Carlo et à utiliser cette estimation directement dans une procédure d'optimisation non-linéaire. A chaque fois qu'une analyse de fiabilité est nécessaire, une telle estimation est produite. Toutefois, il est évident que cette approche, coûteuse, ne peut pas être utilisée en pratique. Il est cependant possible d'obtenir des variantes plus efficaces en utilisant les méthodes d'analyse de fiabilité exposées en début de chapitre à la place d'un simple schéma de Monte Carlo. Ainsi, les méthodes basées sur les surfaces de réponses ont été fréquemment utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation fiabiliste.

Gasser propose ainsi d'approcher les fonctions de performance par des surfaces de réponse quadratiques [Gasser 1997]. Ils utilisent alors ces modèles et des techniques de tirages d'importance pour résoudre le problème de minimisation de coût

de défaillance (4.23). Dans la continuité de ces travaux, Foschi propose une comparaison de cette approche avec des résultats issus d'une méthode de Monte Carlo et d'une approximation FORM. Il montre ainsi la précision et l'efficacité de cette approche [Foschi 2002].

Papadrakakis propose une stratégie permettant de résoudre des problèmes d'optimisation fiabiliste contenant de fortes non-linéarités [Papadrakakis 2002]. Pour ces problèmes, il est fréquent que les algorithmes de descente de l'optimisation non-linéaire ne parviennent pas à identifier un optimum global. Un algorithme évolutionnaires est utilisé pour pallier ce problème. En parallèle, un réseau de neurone combiné à une schéma de Monte Carlo permet de réaliser les estimations de la probabilité de défaillance.

Dans [Arenbeck 2010], les états limites du problèmes d'optimisation fiabiliste sont remplacés à chaque étape par des séparateurs à vaste marge. Ce modèle permet de conclure rapidement à la défaillance ou non d'une structure. Une méthode de Monte Carlo peut alors être utilisée pour l'analyse de fiabilité. L'optimisation est réalisée quant à elle par un schéma de programmation quadratique séquentielle (SQP).

**Mise en place de méthodes découplées** L'évaluation des contraintes de fiabilité du problème (4.25) à chaque étape de l'algorithme d'optimisation peut se révéler coûteuse. Une alternative consiste à effectuer les étapes d'optimisation et de calcul des probabilités de défaillance l'une à la suite de l'autre : on parle alors d'approches découplées.

Dans son article, Gasser propose ainsi de construire un modèle de la probabilité de défaillance [Gasser 1997]. Ce modèle propose une approximation donnant une expression analytique de cette probabilité en fonction des paramètres d'optimisation. Le modèle est ici construit comme une exponentielle d'un polynôme des variables de conception. Les coefficients inconnus de ce polynômes sont déterminés par collocation. Finalement, la phase d'optimisation est menée en tenant compte de cette probabilité approchée.

Jensen met en place une variante de cette méthode [Jensen 2007]. Au lieu de définir un modèle de la probabilité de défaillance défini pour l'ensemble des paramètres de conception, une approximation locale est construite. A chaque cycle d'optimisation, une telle approximation est construite autour de l'optimum précédent. Pour que le modèle local reste de bonne qualité, les contraintes de bornes sur les variables de conception sont alors changées à chaque cycle. L'utilisation de méthodes de "subset simulation" pour la calibration du modèle permet par ailleurs la mise en place d'un schéma efficace.

Dans [Valdebenito 2011], Valdebenito utilise le même type d'approximation de la probabilité de défaillance. A l'instar d'un développement de Taylor, les auteurs proposent d'évaluer les coefficients de l'approximation à l'aide des dérivées de ces probabilités par rapport aux paramètres de conception. Cette approche permet d'éviter le recours à une estimation par moindres carrés qui pourrait se révéler coûteuse. Les

sensibilités de la probabilité de défaillance par rapport aux variables d'optimisation sont évaluées efficacement grâce à une procédure ad hoc ne nécessitant qu'une seule analyse de fiabilité.

Une construction originale de l'approximation de la relation explicite entre probabilité de défaillance et variables de conception est introduite dans [Au 2005]. Au introduit la notion de problème de fiabilité augmenté qui consiste à calculer la probabilité de défaillance en traitant les paramètres d'optimisation comme des variables aléatoires. La loi conditionnelle de la défaillance augmentée par rapport aux variables d'optimisation correspond alors au modèle recherché. L'auteur propose ainsi un schéma basé sur la génération de cette loi par une méthode de simulation efficace. Toutefois, l'emploi de cette méthode à l'optimisation fiabiliste n'est proposée qu'en guise de perspective et aucun essai n'a été fait sur de tels problèmes. Par ailleurs, l'auteur souligne le manque d'efficacité de cette approche lorsque le nombre de paramètres de conception augmente.

Une approche basée sur l'obtention de coefficients de sécurité est proposée par Ching [Ching 2010]. Une expression de ces coefficients dépendant des paramètres de conception est obtenue après une étude de quantiles croissants de la fonction de performance. Les restrictions probabilistes sont alors traduites par une application directe des facteurs de sécurité aux fonctions de performance.

Royset propose une nouvelle formulation du problème pour découpler optimisation et traitement des contraintes fiabilistes [Royset 2001]. L'auteur définit à cet effet une boule dans l'espace normalisé dont le rayon est évalué par une analyse de fiabilité. Les contraintes probabilistes sont remplacées par des restrictions imposant à la valeur minimale des fonctions de performance dans cette boule d'être positive. Cette dernière restriction s'exprime comme une infinité de contraintes. Elle est alors traitée par des algorithmes de la programmation semi-infinie.

**Couplage direct des méthodes de simulation et d'optimisation** Une autre approche consiste à modifier le problème d'optimisation fiabiliste afin de traiter les restrictions fiabilistes comme des contraintes ordinaires. Marti propose ainsi une reformulation du problème d'optimisation fiabiliste en un problème d'optimisation stochastique sous contraintes en intégrant la probabilité de défaillance dans la fonction objectif [Marti 1997].

Royset propose également une approche basée sur l'intégration directe des contraintes probabilistes dans un algorithme d'optimisation non-linéaire [Royset 2004]. Afin d'éviter le calcul du gradient des probabilités de défaillance par des schémas coûteux, une démarche liée aux méthodes d'approximation des dérivées dans l'optimisation stochastique est introduite. Le gradient peut alors être estimé par des méthodes de simulations performantes et la qualité de l'approximation est contrôlée par des bornes précises.

Dans [Taflanidis 2008], les auteurs reprennent dans l'algorithme "Stochastic Subset Optimization" l'idée de Au consistant à traiter les paramètres d'optimisation comme des variables aléatoires pour définir une analyse de fiabilité augmentée

[Au 2005]. Les variables aléatoires et les paramètres de conception sont alors générés par une méthode de “subset simulation”. Des outils adaptés permettent d’identifier les zones contenant des réalisations des paramètres de conception à la fois fiables et économiques. Ce processus est alors itéré autour de cette zone.

Plus récemment, Jensen propose un cadre général pour combiner efficacement des techniques classiques d’optimisation et d’analyse de fiabilité pour des problèmes contenant beaucoup de variables aléatoires [Jensen 2009]. Cette méthodologie repose d’abord sur une nouvelle approximation du gradient des probabilités de défaillance. Cette approximation ne nécessite qu’une seule analyse de fiabilité. Ce gradient rend alors possible le calcul de directions admissibles. Par ailleurs, une méthode de recherche linéaire basée sur une approximation polynômiale de la probabilité de défaillance est présentée. Elle permet d’intégrer les contraintes de fiabilité dans une phase de minimisation d’une fonction de mérite. L’utilisation d’algorithmes de simulation efficaces mène finalement à une méthode performante.

#### 4.2.2.2 Reformulation du problème de l’optimisation fiabiliste avec l’approximation FORM

Les méthodes basées sur l’estimation des contraintes fiabilistes par des méthodes de simulations nécessitent souvent un grand nombre d’évaluations des fonctions de performances. L’importance des temps de calcul engendrés par ces méthodes est souvent rédhibitoire. Une alternative est offerte par l’approximation FORM. Elle permet une reformulation du problème d’optimisation fiabiliste (4.25) sous la forme de deux problèmes d’optimisation imbriqués :

1. Optimisation dans l’espace physique des paramètres de conception :

$$\check{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (4.27)$$

$$\text{tel que : } g_{k_{det}}(\mathbf{x}) = 0 \quad 1 \leq k_{det} \leq K_{det} \quad (4.28)$$

$$\beta_k(\mathbf{x}) \geq \beta_k^* \quad 1 \leq k \leq K \quad (4.29)$$

2. Analyse de fiabilité :

$$\beta_k(\mathbf{x}) = \|\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})\| = \min \{\|\mathbf{u}\| : H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\} \quad (4.30)$$

où  $\beta_k^*$  est l’indice de fiabilité cible du mode  $k$ . Cet indice peut être calculé à partir de la probabilité de défaillance maximale  $\Pi_k^*$  par la relation

$$\beta_k^* = -\Phi^{-1}(\Pi_k^*) \quad (4.31)$$

Aoues propose une classification des algorithmes résolvant ce problème en trois catégories : les approches à deux niveaux, à un niveau et les méthodes séquentielles découplées [Aoues 2010]. Les paragraphes suivants sont donc consacrés à la présentation de ces méthodes.

**Formulations à deux niveaux** La résolution direct du problème approché (4.27) est souvent qualifiée de Reliability Index Approach (RIA) dans la littérature. Cette démarche souffre des affres liés à FORM mais bénéficie également des solutions qui y ont été apportées. Toutefois, cette approche essuie souvent des problèmes de stabilité liés à la difficulté de résoudre le problème d’optimisation (4.30).

Pour pallier ce problème, Tu propose alors une méthode appelée Performance Measure Approche (PMA) [Tu 1999]. Les restrictions fiabilistes sont transformées en des contraintes de performance minimale pour un indice de fiabilité requis. Une fois encore, cette formulation passe par la réécriture des contraintes fiabilistes sous la forme d’un problème d’optimisation imbriqué. Le point de moindre performance est alors le point de l’espace normalisé qui minimise la fonction de performance tout en vérifiant la fiabilité cible. Plusieurs algorithmes ont été développés pour résoudre ce problème de fiabilité inverse : “Conjugate Mean-Value”, “Advanced Mean-Value” ou “Hybrid Mean-Value” [Youn 2003]. Plusieurs chercheurs ont alors montré que ce paradigme se révèle plus stable que l’approche RIA [Lee 2002][Youn 2004]. Cependant, la résolution des deux problèmes d’optimisation imbriqués demeure coûteuse en temps de calcul. Pour résoudre ces difficultés, deux stratégies ont vu le jour : les méthodes à un niveau et les approches séquentielles découplées.

**Formulations à un niveau** L’objectif des approches à un niveau est d’éviter la résolution itérative du problème de fiabilité au sein du processus d’optimisation de la structure. Cette fin est souvent atteinte en réécrivant le problème de sorte à ne résoudre qu’un seul problème d’optimisation.

Madsen propose ainsi d’intégrer les conditions KKT du problème de fiabilité comme des contraintes du problèmes d’optimisation de la structure [Madsen 1992]. L’optimisation a alors lieu dans un espace contenant à la fois les paramètres de conception et les points de défaillances les plus probables de chaque état limite. Kuschel a plus tard améliorer cette méthode en intégrant l’espérance du coût de défaillance dans la fonction objectif [Kuschel 2000]. Ces approches souffrant des problèmes de stabilité de la RIA, Agarwal a proposé une adaptation de cette technique dans le contexte de la PMA [Agarwal 2007].

Kharmanda suggère également l’emploi d’un espace hybride pour résoudre le problème (4.1.2)[Kharmanda 2008]. Cet espace hybride contient à la fois les variables de conception et les variables permettant la recherche des points de défaillance les plus probables. Les contraintes de fiabilité sont intégrés par la définition d’un terme de pénalité dans la fonction objectif.

Ces méthodes présentent l’inconvénient d’augmenter fortement le nombre de variables à optimiser. Pour résoudre ce problème, Chen propose la méthode “Single Loop Single Vector” basée sur la PMA et dans laquelle les contraintes fiabilistes sont transformées en restrictions déterministes[Chen 1997]. Au lieu d’utiliser directement le point de performance minimale, une approximation de ce point est proposée. Cette approximation correspond à une valeur fractile de l’état limite. Elle est déduite d’une simple analyse de sensibilité, rendant ainsi son calcul très rapide, quelque

soit la valeur des paramètres d'optimisation. Tirant parti de l'efficacité de cette approche, Liang a proposé la méthode SLA qui permet de traiter le cas de systèmes en série [Liang 2007].

**Formulations séquentielles découplées** Dans le cadre des méthodes séquentielles découplées, l'idée principale est de transformer le problème initial en une succession de problèmes d'optimisation déterministe. Le lien avec les restrictions fiabilistes peut alors être fait entre deux cycles d'optimisation par des analyses de fiabilité.

C'est dans ce cadre que Wu a introduit une méthode qualifiée de "Safety Factor Approach" (SFA) [Wu 1998]. Plusieurs cycles d'optimisation déterministe sont menés successivement. Entre chaque cycle, une analyse de fiabilité rend possible le calcul de facteurs de sécurité à appliquer sur les fonctions de performance pour tenir compte des restrictions probabilistes. Ces facteurs doivent permettre une translation satisfaisante des états limites. Toutefois, l'évaluation de ces facteurs ainsi que la résolution du problème de fiabilité peuvent être coûteuses.

La méthode de "Sequential Optimization and Reliability Assessment" (SORA) introduite par Du s'affranchit de ces limitations [Du 2004]. La traduction des contraintes probabilistes en restrictions déterministes est encore une fois réalisée par la définition de nouveaux états limites. Ces derniers sont définis par l'application de coefficients de sécurité non plus sur les fonctions de performance mais directement sur les variables aléatoires. Le calcul des coefficients adéquats est réalisé entre chaque cycle d'optimisation grâce au calcul des points de moindre performance.

Cheng propose de résoudre le problème d'optimisation fiabiliste (4.30) en l'approchant par une séquence de problèmes approchés (SAP) [Cheng 2006]. Chaque sous-problème utilise une approximation linéaire des contraintes sur les indices de fiabilité. De plus, les indices de fiabilité ne sont pas calculés à chaque étape. Au contraire, une approximation est déduite par récurrence d'une itération à l'autre. Afin de rendre la méthode plus robuste, Yi a proposé plus récemment une adaptation de cette approche dans le cadre de la PMA [Yi 2008].

Dans [Kharmanda 2008] et [Holdorf Lopez 2011], les auteurs proposent une démarche différente. Ils proposent en effet de n'effectuer qu'une seule étape de d'optimisation purement déterministe. L'application directe de coefficients partiels de sécurité sur les variables de conception permet alors de garantir la fiabilité de la structure. Ces coefficients sont obtenus par une analyse de sensibilité des états limites au point de défaillance le plus probable. Les conditions d'optimalité KKT du problème de fiabilité (4.30) permettent alors une expression analytique de ces facteurs. Toutefois, cette approche n'est valable que pour des problèmes ne présentant qu'un mode de défaillance. Par ailleurs, afin de pouvoir appliquer directement les coefficients de sécurité sur les variables de conception, il est nécessaire que ces variables soient les seules à être considérées comme aléatoires.



**Comparaisons de ces approches** De nombreux auteurs se sont intéressés à la comparaison des méthodes basées sur une reformulation du problème (4.30). Dans [Tu 1999], les auteurs présentent ainsi les avantages des méthodes basées sur la PMA plutôt que sur la RIA. Dans [Yang 2004], les auteurs examinent l'efficacité des méthodes SLSV, SORA et SFA. Afin d'obtenir d'autres indicateurs, notamment sur la stabilité et la robustesse des algorithmes, Aoues a également confronté plusieurs de ces méthodes [Aoues 2010].

En dépit des nombreux progrès qui ont été accomplis, la plupart de ces méthodes recherchant une solution exacte du problème d'optimisation demeurent assez coûteuses en temps de calcul. Dans ce contexte, les méthodes basées sur la recherche d'une solution approchée fiable, comme celle introduite par Holdorf, se révèlent être une alternative intéressante. Toutefois, les approches présentées souffrent dans leurs versions actuelles de deux inconvénients majeurs : elles sont limitées à un seul état limite et les incertitudes ne peuvent être portées que par les variables d'optimisation. Nous proposons dans les sections suivantes une extension de ces approches permettant de lever ces restrictions.

### 4.3 Une méthode itérative approchée de projection sur des ensembles critiques

Malgré les bonnes performances des algorithmes basés sur l'approximation FORM, la recherche d'une solution exacte au problème d'optimisation fiabiliste (4.27) demeure coûteuse. L'approche dite Optimal Safety Factor (OSF), proposée dans [Holdorf Lopez 2011], fournit un axe de recherche intéressant pour réduire les temps de calcul. Le calcul s'opère en deux phases. Dans une première étape, une optimisation déterministe est menée en fixant les variables aléatoires à leur valeur nominale. Dans un second temps, la configuration est modifiée pour satisfaire un niveau de fiabilité prescrit. Toutefois, à ce stade, la fonction objectif n'est plus prise en compte dans les calculs. Le résultat fourni est alors fiable mais aucun critère ne permet de qualifier la qualité économique de la solution.

Dans ce chapitre, nous proposons un nouvel algorithme fondé sur la même approximation. Cette démarche originale permet de surmonter un certain nombre d'obstacles rencontrés dans le cadre de l'OSF. Elle est basée sur la construction d'un domaine critique contenant les configurations fiables. À chaque fois qu'un tel ensemble pourra être construit, une projection orthogonale sur cet espace du vecteur des variables de conception permettra d'obtenir une solution fiable.

La construction des ensembles critiques fait intervenir les outils classiques de l'analyse de fiabilité. Dans un premier temps, une approche efficace utilisant l'approximation FORM sera donc présentée. Nous verrons alors qu'il est possible de s'affranchir facilement du formalisme issu de cette approximation. Une variante plus générale de l'algorithme pourra alors être définie. Le couplage de cette méthode à des outils de simulation efficaces permettra de fournir un algorithme performant et robuste.

### 4.3.1 Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par indice de fiabilité

**Optimisation déterministe :** La première étape de l'algorithme consiste à effectuer une optimisation de la structure sous des contraintes déterministes. La solution de ce problème est notée  $\mathbf{x}^*$ . Cette phase de réduction des coûts est effectuée en fixant les variables aléatoires à leur valeur nominale. En fonction du problème, des quantiles ou des moyennes pourront par exemple être utilisés. Ce choix n'aura pas d'influence sur la fiabilité des résultats futurs. En revanche, la qualité économique de la solution finale  $\check{\mathbf{x}}$  du problème peut dépendre de ce choix. En effet, cette première phase constitue la seule étape d'optimisation de l'algorithme, les étapes suivantes n'étant dévolues qu'à la fiabilisation de  $\mathbf{x}^*$ . Il paraît donc plus judicieux de chercher à effectuer cette optimisation dans des conditions proches de celles qui satureront les contraintes de fiabilité. Le choix des quantiles pourra donc sembler judicieux.

**Variables critiques** Une fois le résultat  $\mathbf{x}^*$  de l'optimisation déterministe obtenu, nous proposons une approche destinée à identifier une modification de cette configuration pour satisfaire les contraintes de fiabilité. Cette seconde étape repose sur la définition d'un ensemble critique contenant les configurations fiables. Cet espace repose sur les propriétés du problème d'analyse de fiabilité (4.30). Dans [Holdorf Lopez 2011], l'auteur rappelle que les conditions d'optimalité du premier ordre de ce problème impliquent la relation :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}) = -\beta_k(\mathbf{x}) \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}_k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}_k)\|} \quad (4.32)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  désigne le point de défaillance le plus probable du mode  $k$ . Ce vecteur, tout comme l'indice de fiabilité qui lui est associé, peut être calculé par les algorithmes classiques de l'optimisation fiabiliste. Cependant, pour une configuration  $\mathbf{x}$  donné, rien ne garantit que l'indice de fiabilité observé  $\beta_k(\mathbf{x})$  soit égal à l'indice cible  $\beta_k^*$ . Formellement, il est néanmoins possible d'écrire la condition (4.32) pour le point de défaillance  $\hat{\mathbf{u}}$  qui permettrait de satisfaire la fiabilité cible :

$$\hat{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}) = -\beta_k^* \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}_k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}_k)\|} \quad (4.33)$$

La résolution de cette équation peut être faite par une analyse de fiabilité inverse. Toutefois, une telle analyse entraînerait un coût supplémentaire important. Une linéarisation des fonctions de performance autour de chacun de leur point de défaillance le plus probable permet toutefois de simplifier cette équation. En effet, on peut alors utiliser l'approximation :

$$\frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}_k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{u}}_k)\|} \approx \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}_k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}_k)\|} \quad (4.34)$$

En soustrayant terme à terme les équations (4.33) et (4.32), une approximation explicite de  $\hat{\mathbf{u}}_k$  peut être obtenue :

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k - (\beta^* - \beta_k(\mathbf{x}^*)) \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_k)\|} \quad (4.35)$$

Ce point correspond à une approximation du point de défaillance qu'il faudrait avoir pour vérifier les restrictions sur l'indice de fiabilité. La figure 4.5 illustre la façon dont ce point est calculé. Cette valeur critique peut également être vue comme la réalisation des variables aléatoires normalisées qui appartient à la sphère de rayon  $\beta_k^*$  et qui dégrade le plus la structure. Elle peut alors être exprimée dans l'espace physique par le biais de la transformation  $T$  :

$$\hat{\mathbf{y}}_k = T(\hat{\mathbf{u}}_k) \quad (4.36)$$

De même, le gradient des fonctions de performances normalisées pourra être calculé à partir des gradients dans l'espace des variables aléatoires physiques grâce à la relation (4.12).

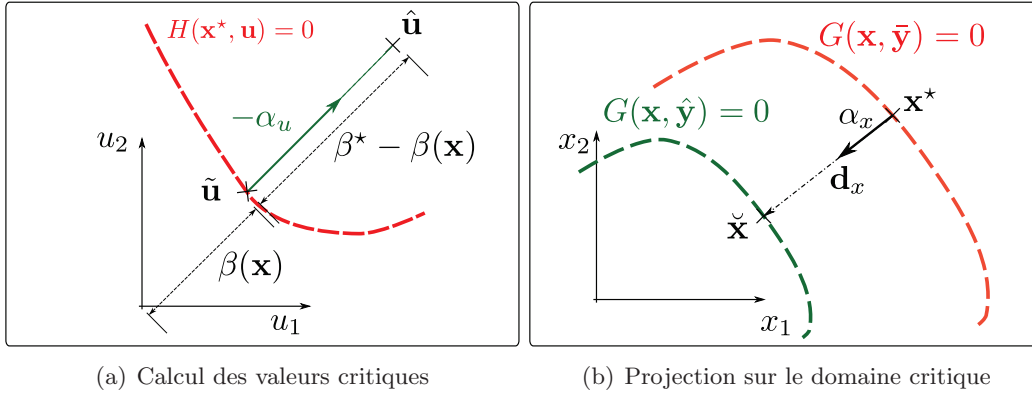


FIG. 4.5 – Projection sur les ensembles critiques

**Projection sur l'ensemble critique** Pour chaque mode de défaillance, cette nouvelle réalisation définit un nouvel état limite à  $\hat{\mathbf{y}}_k$  fixé :  $\{x \in \mathbb{R}^I : G_k(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}_k) = 0\}$ . L'ensemble des configuration  $\mathbf{x}$  associé à cet état limite est appelé ensemble critique. Il va permettre le calcul d'un nouveau vecteur  $\check{\mathbf{x}}$  des paramètres de conception satisfaisant les exigences de fiabilité (figure 4.5). En effet, pour cette configuration, le système doit rester opérationnel, même pour la réalisation critique  $\hat{\mathbf{y}}_k$ . Ce raisonnement conduit à la restriction :

$$G_k(\check{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}_k) \geq 0 \quad 1 \leq k \leq K \quad (4.37)$$

Le nouveau vecteur  $\check{\mathbf{x}}$  peut être recherché sous la forme d'une perturbation de  $\mathbf{x}^*$

$$\check{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* + \mathbf{d}_x \quad (4.38)$$

Comme aucune phase d'optimisation n'a lieu à ce stade, il est raisonnable de chercher la nouvelle configuration au plus proche de l'optimum déterministe. Cette heuristique ne garantit pas l'optimalité de  $\check{\mathbf{x}}$  mais constitue tout de même un critère de sélection convenable. La recherche de la nouvelle configuration satisfaisant les

critères de fiabilité s'apparente donc à la résolution du problème d'optimisation déterministe. Il s'agit de trouver la perturbation  $\mathbf{d}_x$  de norme minimale permettant d'assurer les contraintes (4.37). Ce problème correspond à la projection orthogonale de  $\mathbf{x}^*$  sur l'ensemble critique.

Cette opération peut à son tour se révéler coûteuse en temps de calcul. En effet, l'évaluation des contraintes (4.37) au cours d'un processus d'optimisation peut requérir de nombreuses analyses par éléments finis. Pour pallier ce problème, il est possible de construire une approximation linéaire  $G_k^{app}$  de la fonction de performance  $k$  :

$$G_k^{app}(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}_x, \hat{\mathbf{y}}_k) \approx G_k(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{y}}_k) + \nabla_x^t G_k(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{y}}_k) \mathbf{d}_x \quad (4.39)$$

Il faut souligner que dans cette approximation, la dépendance entre les valeurs critiques  $\hat{\mathbf{y}}_k$  et les variables de conception a été négligée en plus des termes non-linéaires. Sous cette approximation, le problème de projection des variables de conception sur l'ensemble critique est décrit par le système (4.40) :

$$\mathbf{d}_x = \arg \min_{\delta_x} \delta_x^t \delta_x \quad (4.40)$$

$$\text{tel que :} \quad g_{k_{det}}(\mathbf{x}^* + \delta_x) \geq 0 \quad 1 \leq k_{det} \leq K_{det} \quad (4.41)$$

$$G_k(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{y}}_k) + \nabla_x^t G_k(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{y}}_k) \delta_x \geq 0 \quad 1 \leq k \leq K \quad (4.42)$$

Ce problème peut finalement être résolu très rapidement à l'aide des algorithmes de la programmation non-linéaire.

**Mise en place d'un schéma itératif** L'écriture du schéma précédent a nécessité deux linéarisations successives. La première a permis l'obtention d'une formule explicite pour le calcul des valeurs critiques des variables aléatoires. La seconde a donné lieu à une simplification du problème de projection sur l'ensemble critique. Ces approximations peuvent conduire à des valeurs de  $\hat{\mathbf{y}}_k$  et  $\check{\mathbf{x}}$  qui ne respectent pas les contraintes de fiabilité. Pour pallier cette difficulté, il peut être nécessaire d'itérer une partie du procédé jusqu'à l'obtention des indices de fiabilité requis. Les valeurs critiques et les points de défaillance les plus probables calculés à l'itération (*it*) pour le mode  $k$  sont respectivement notées  $\hat{\mathbf{y}}_k^{(it)}$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_k^{(it)}$ . La configuration fiable pour ces valeurs est notée  $\check{\mathbf{x}}^{(it)}$ . L'algorithme de Projections Itératives sur des Ensembles Critiques (PIEC) peut alors s'écrire :

**Interprétation en termes de facteurs de sécurité** Les valeurs critiques  $\hat{\mathbf{y}}_k$  de chaque mode de défaillance jouent un rôle clé dans l'obtention d'une solution acceptable. En effet, ces valeurs correspondent au scénario dégradant le plus la structure pour une probabilité donnée. Ces valeurs critiques auront par exemple souvent tendance à augmenter artificiellement les chargements et réduire les résistances. En ingénierie, ces pratiques sont courantes et consistent souvent à appliquer aux quantités incertaines des coefficients de sécurité empiriques. L'interprétation des valeurs critiques en terme de facteurs de sécurité peut alors permettre de comparer les résultats de l'optimisation fiabiliste avec les pratiques usuelles des ingénieurs. On

**Algorithme 1** PIEC**Précondition :**  $\check{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{x}^*$  et  $it = 0$ 

- 1: Analyse de fiabilité pour la configuration  $\check{\mathbf{x}}^{(0)}$
- 2: **Tant que** Conditions de fiabilité non satisfaites **faire**
- 3:   **Pour** Chaque mode de défaillance  $k$  **faire**
- 4:     Calcul des gradients  $\nabla_u H_k(\mathbf{x}^{(it)}, \tilde{\mathbf{u}}_k^{(it)})$
- 5:     Calcul des valeurs critiques  $\hat{\mathbf{u}}_k^{(it)}$  avec l'équation (4.33)
- 6:     Calcul de  $G_k(\check{\mathbf{x}}^{(it)}, \hat{\mathbf{y}}_k^{(it)})$  et  $\nabla_x G_k(\check{\mathbf{x}}^{(it)}, \hat{\mathbf{y}}_k^{(it)})$
- 7:   **Fin Pour**
- 8:   Calcul de  $\mathbf{d}_x^{(it)}$  en résolvant le problème de projection (4.40)
- 9:    $\check{\mathbf{x}}^{(it+1)} = \check{\mathbf{x}}^{(it)} + \mathbf{d}_x^{(it)}$
- 10: Analyse de fiabilité pour la configuration  $\check{\mathbf{x}}^{(it+1)}$
- 11:  $it = it + 1$
- 12: **Fin Tant que**
- 13:  $\check{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{x}}^{(it)}$  et  $\hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{y}}_k^{(it)}$
- 14: **Retour**  $\check{\mathbf{x}}$

définit alors le coefficient partiel de sécurité pour la variable aléatoire  $Y_j$  et le mode  $k$  par :

$$\gamma_{k,j} = \frac{\hat{y}_{k,j}}{\bar{y}_j} \quad (4.43)$$

où  $\bar{y}_j$  correspond à la valeur médiane de  $Y_j$ .

### 4.3.2 Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par probabilité de défaillance

#### 4.3.2.1 Mise en évidence des limitations de l'approximation FORM

Dans de nombreuses applications en ingénierie, les états limites sont relativement réguliers. Le calcul des probabilités de ruine avec FORM est dans ce cas suffisamment précis et la méthode PIEC fournit des résultats satisfaisants. Toutefois, si les fonctions de performances sont fortement non-linéaires, cette procédure hérite naturellement des défauts de l'approximation : mauvaise estimation de la probabilité de défaillance et difficulté de prendre en compte plusieurs points de défaillance, entre autres. Appliquons par exemple l'algorithme 1 au problème suivant :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \quad (4.44)$$

$$\text{tel que :} \quad P_{\mathbf{Y}} [G(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^*) \quad (4.45)$$

$$\text{avec} \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = (\beta^*)^2 - (x_1 + Y_1 - \beta^*)^2 - (x_2 + Y_2)^2 + \alpha(x_1 + Y_1)^2 \quad (4.46)$$

où  $Y_1$  et  $Y_2$  suivent des lois normales centrées réduites,  $\beta^* = 2$  et  $\alpha = 0.6$ . La figure 4.6(a) présente les courbes de niveau de la fonction objectif ainsi que l'état limite quand les variables aléatoires sont fixées à leur valeur moyenne. Le point optimal

pour ce problème déterministe est  $\mathbf{x}^* = (0, 0)^t$ . Toutefois, les variables aléatoires agissent comme une perturbation de ce point optimal. La figure 4.6(b) montre l'état limite tracé dans l'espace des variables aléatoires pour la configuration  $\mathbf{x}^*$ . La courbe bleue représente l'état limite correspondant à l'approximation FORM. Le point de défaillance étant localisé à l'origine, on en déduit que  $\beta(\mathbf{x}^*) = 0$  et que la fiabilité requise n'est pas atteinte.

L'algorithme PIEC est appliqué et identifie le point  $\check{\mathbf{x}}(\beta^*, 0)$  comme configuration fiable. L'unique point de défaillance le plus probable associé est  $\tilde{\mathbf{y}}(\check{\mathbf{x}}) = (-\beta^*, 0)$  (figure 4.6(c)). La restriction sur l'indice de fiabilité  $\beta(\check{\mathbf{x}}) \geq \beta^*$  est donc satisfaite. Sur cette figure, la zone bleue représente sur l'ensemble des points que l'approximation FORM considère comme sûrs. Nous remarquons que cette zone contient de nombreuses réalisations défaillantes ayant quasiment la même probabilité d'apparition que le point de défaillance le plus probable.

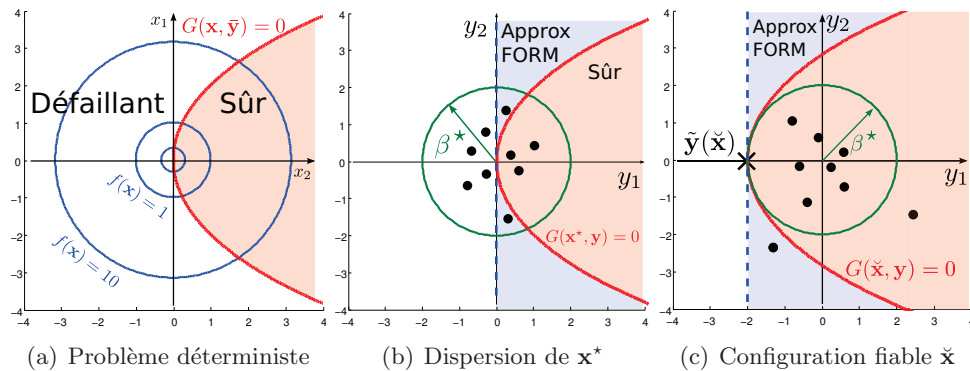


FIG. 4.6 – Limites de l'approximation FORM : géométrie du problème, dispersion de l'optimum et approximation FORM pour la configuration fiable

Une estimation de la probabilité de défaillance réelle permet de se convaincre du manque de précision de l'approximation au premier ordre. En effet, la probabilité de défaillance cible est  $\Phi(-\beta^*) \approx 0.0228$ . Une analyse de fiabilité par tirage d'importance nous indique que  $\Pi^f(\check{\mathbf{x}}) \approx 0.0467$ . A titre de comparaison, on peut calculer un indice de fiabilité généralisé :

$$\beta^g(\check{\mathbf{x}}) = -\Phi^{-1} \left( \Pi^f(\check{\mathbf{x}}) \right) \quad (4.47)$$

qui vaut ici  $\beta^g(\check{\mathbf{x}}) \approx 1.67$ . Bien que  $\check{\mathbf{x}}$  soit une solution exacte du problème formulé dans le cadre de FORM, la fiabilité associée à notre solution est largement inférieure à celle requise.

Ce non-respect des contraintes de fiabilité est évidemment dû à la mauvaise estimation de la probabilité de défaillance par l'approximation FORM. Pour résoudre cette épineuse question, nous introduisons dans le paragraphe suivant une variante de la méthode PIEC utilisant l'indice de fiabilité généralisé (4.47). Ce nouvel algorithme permettra alors d'assurer l'obtention d'une structure aux propriétés satisfaisantes.

### 4.3.2.2 Projections itératives sur des ensembles critiques : approche par probabilité de défaillance

La mise en évidence du manque de précision de l'approximation FORM incite à développer un schéma permettant la prise en compte exacte des contraintes de fiabilité. La méthode PIEC se révèle être une bonne base pour fournir un algorithme d'optimisation fiabiliste précis. La plupart des méthodes efficaces de l'optimisation fiabiliste reposent fortement sur le formalisme FORM dont il sera difficile de s'affranchir. En effet, la reformulation du problème initiale en un problème découpé ou un problème à un niveau est le plus souvent basée sur l'utilisation des propriétés intrinsèques de l'approximation, comme le "point de performance minimale" ou les conditions d'optimalité du problème (4.13).

A contrario, la méthode PIEC peut aisément se dégager des hypothèses des méthodes d'approximation. Une heuristique est alors construite sur le même principe : calcul de valeurs critiques et projection sur l'ensemble critique correspondant. On introduit pour cela les notions de valeurs critiques  $\hat{\mathbf{y}}_k^g$  et d'indice de fiabilité généralisé  $\beta^g$ .

L'indice de fiabilité généralisé est une mesure exacte de la probabilité de défaillance. Cet indice peut être défini par l'équation (4.48) :

$$\beta_k^g(\check{\mathbf{x}}) = -\Phi^{-1}\left(\Pi_k^f(\check{\mathbf{x}})\right) \quad (4.48)$$

Il peut alors être estimé par une méthode de simulation efficace. Le calcul de la probabilité de défaillance par des méthodes de tirage aléatoire a déjà été évoqué dans la section 4.2.2.1. Ces méthodes ont fait l'objet d'importants développements et sont maintenant précises et efficaces. Dans la suite du manuscrit, les méthodes de tirage d'importance seront donc utilisées en guise d'outils de calcul de la probabilité de défaillance.

Dans la version antérieure de l'algorithme, le point critique était défini comme la réalisation dans l'espace normalisé qui appartenait à la sphère centrée de rayon  $\beta^*$  qui rendait la fonction de performance la plus négative. Il était construit en s'éloignant du point de défaillance le plus probable dans la direction de plus forte décroissance. La longueur de cette perturbation était telle qu'elle permettait de compléter l'erreur sur l'indice de fiabilité. On définit la valeur critique normalisée  $\hat{\mathbf{u}}_k^g$  par analogie :

$$\hat{\mathbf{u}}_k^g = \tilde{\mathbf{u}}_k - (\beta^* - \beta_k^g(\mathbf{x}^*)) \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_k)\|} \quad (4.49)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  représente le point de défaillance le plus probable. De cette valeur, on déduit  $\hat{\mathbf{y}}_k^g$  par l'entremise de la transformation isoprobabiliste  $T$ .

Une fois calculées les réalisations critiques des variables aléatoires, le schéma de projection demeure identique. Encore une fois, du fait des linéarisations successives, l'algorithme peut ne pas converger en une itération. La répétition du procédé permet alors de corriger les erreurs et de converger vers une solution  $\check{\mathbf{x}}^g$  fiable. L'algorithme

de la Projection Itérative sur les Ensembles Critiques Généralisés, PIECG, peut alors s'écrire :

---

**Algorithme 2** PIECG

---

**Précondition :**  $\check{\mathbf{x}}^{g(0)} = \mathbf{x}^*$  et  $it = 0$

Analyse de fiabilité pour la configuration  $\check{\mathbf{x}}^{(0)}$  :  $\tilde{\mathbf{u}}_k(\check{\mathbf{x}}^{g(0)})$  et  $\beta_k(\check{\mathbf{x}}^{g(0)})$

Calcul des indices de fiabilité généralisés par simulation :  $\beta_k^g(\check{\mathbf{x}}^{g(0)})$

**Tant que** Conditions de fiabilité non satisfaites **faire**

**Pour** Chaque mode de défaillance  $k$  **faire**

    Calcul des gradients  $\nabla_u H_k(\mathbf{x}^{(it)}, \tilde{\mathbf{u}}_k^{(it)})$

    Calcul des valeurs critiques  $\hat{\mathbf{u}}_k^{g(it)}$  avec l'équation (4.49)

    Calcul de  $G_k(\check{\mathbf{x}}^{g(it)}, \hat{\mathbf{y}}_k^{g(it)})$  et  $\nabla_x G_k(\check{\mathbf{x}}^{g(it)}, \hat{\mathbf{y}}_k^{g(it)})$

**Fin Pour**

  Calcul de  $\mathbf{d}_x^{(it)}$  en résolvant le problème annexe (4.40)

$\check{\mathbf{x}}^{g(it+1)} = \check{\mathbf{x}}^{g(it)} + \mathbf{d}_x^{(it)}$

  Analyse de fiabilité pour la configuration  $\check{\mathbf{x}}^{g(it+1)}$

  Calcul des indices de fiabilité généralisés par simulation :  $\beta_k^g(\check{\mathbf{x}}^{g(it+1)})$

$it = it + 1$

**Fin Tant que**

$\check{\mathbf{x}}^g = \check{\mathbf{x}}^{g(it)}$  et  $\hat{\mathbf{y}}_k^g = \hat{\mathbf{y}}_k^{g(it)}$

**Retour**  $\check{\mathbf{x}}^g$

---

On peut appliquer ce nouvel algorithme à la résolution du problème (4.44). L'analyse de fiabilité est effectuée par un tirage d'importance centré sur le point de défaillance le plus probable. Afin de ne pas perturber la convergence de la méthode, on effectue un grand nombre de tirages (5000) lors du calcul de la probabilité de défaillance. Une mesure précise de  $\beta^g$  est ainsi obtenue. Dans une application réelle, une étude plus approfondie de la convergence des méthodes de simulations permettrait de diminuer drastiquement le nombre d'échantillons à observer. La figure 4.7(b) montre par exemple la convergence rapide de l'estimateur par tirage d'importance vers la probabilité attendue  $\Pi^f(\check{\mathbf{x}}^g)$ .

L'algorithme PIECG effectue 3 itérations avant de converger vers la solution fiable. Cette solution est  $\check{\mathbf{x}}^g = (2.36, 0)^t$ . La configuration correspondante est représentée sur la figure 4.7(a). On voit sur cette illustration que l'état limite a été translaté afin de ne plus être tangent au cercle de rayon  $\beta^*$ . Une analyse de fiabilité permet de confirmer que la probabilité de défaillance de cette nouvelle configuration est 0.235.

Cet algorithme PIECG est une adaptation directe de la méthode PIEC. En effet, seules les étapes de calcul des indices de fiabilité cible généralisés ont été rajoutées. Les temps de calculs induits par ces procédures supplémentaires peuvent être conséquents et devenir prépondérants. Ainsi, sur l'exemple précédent, 20137 évaluations de la fonction état limite ont été réalisées alors que seules 127 appels avaient été nécessaires lors de l'exécution de la méthode PIEC. Afin de réduire ces



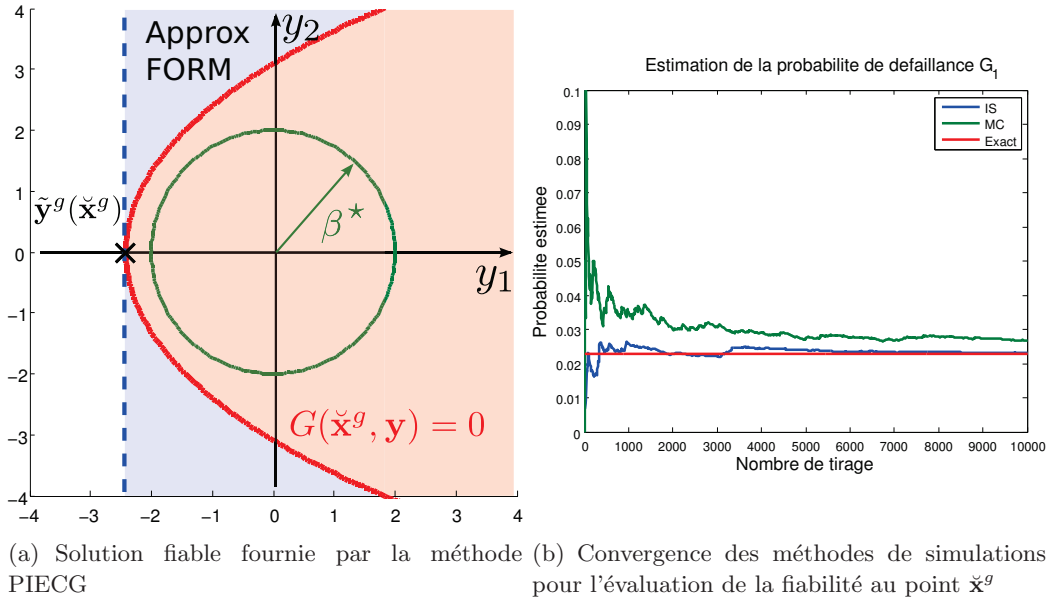


FIG. 4.7 – Limites de l'approximation FORM : solution fiable fournie par l'algorithme PIECG

temps de calcul, l'utilisation de méthodes de simulations plus efficaces est recommandée. Par ailleurs, il est possible de créer un algorithme hybride. Un premier vecteur  $\check{\mathbf{x}}$  est généré par la méthode PIEC puis cette configuration est modifiée par l'approche généralisée. On propose alors l'algorithme PIECH :

---

### Algorithme 3 PIECH

---

**Précondition :**  $\mathbf{x}^{(0)}$

- 1:  $\mathbf{x}^* \leftarrow$  Optimisation déterministe de  $\mathbf{x}^{(0)}$  pour la réalisation  $\bar{\mathbf{y}}$
  - 2:  $\check{\mathbf{x}} \leftarrow$   $PIEC(\mathbf{x}^*)$
  - 3:  $\check{\mathbf{x}}^g \leftarrow$   $PIECG(\check{\mathbf{x}})$
  - 4: **Retour**  $\check{\mathbf{x}}^g$
- 

L'application de l'algorithme PIECH sur le problème précédent a convergé après seulement une itération de chacune des méthodes PIEC et PIECG. Le coût total est de 10129 appels à la fonction de performance, soit une diminution de moitié par rapport à une approche directe par PIECG.

## 4.4 Applications numériques

Nous appliquons dans cette section les algorithmes développés précédemment à différents exemples. Les résultats obtenus nous permettent de conclure quant à l'efficacité, la précision et la robustesse de ces méthodes. L'ensemble des optimisations déterministes a été effectué grâce à un algorithme SQP [Nocedal 2000].

### 4.4.1 Optimisation fiabiliste : résolution d'un problème mathématique

Ce premier exemple est couramment utilisé dans la littérature traitant de l'optimisation fiabiliste afin de tester différents algorithmes [Yang 2004]. Ce problème peut être formulé par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{m}_Y} \quad & f(\mathbf{m}_Y) = m_{Y_1} + m_{Y_2} \\ \text{tel que} \quad & \begin{cases} P_{\mathbf{Y}} [G_k(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^*), \quad k = 1 \dots 3 \\ 0 \leq \mathbf{m}_Y \leq 10 \end{cases} \end{aligned}$$

avec les fonctions de performance :

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) &= Y_1^2 Y_2 / 20 - 1 \\ G_2(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) &= (Y_1 + Y_2 - 5)^2 / 30 - (Y_1 - Y_2 - 12)^2 / 120 - 1 \\ G_3(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) &= 80 / (Y_1^2 + 8Y_2 + 5) - 1 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{Y}$  est un vecteur gaussien. Les variables d'optimisation sont les valeurs moyennes  $\mathbf{m}_Y$  de  $\mathbf{Y}$ . L'écart type des deux variables  $Y_1$  et  $Y_2$  est fixé à  $s_Y = 0.3$ . La solution est calculée pour deux indices de fiabilité cible  $\beta^* = 2$  et  $\beta^* = 3$ . Ces indices correspondent respectivement à des probabilités de défaillance de  $\Pi_k^* = 0.023$  et  $\Pi_k^* = 0.0013$ .

**Résolution du problème par la méthode PIEC :** La figure 4.8 montre la construction itérative de la configuration fiable par la méthode PIEC. Le domaine de sûreté est représenté par la zone grise. La solution optimale déterministe  $\mathbf{x}^*$  est située sur une frontière du domaine. Une suite de vecteurs des variables de conception est générée jusqu'à satisfaction des critères de fiabilité. Chacun de ces vecteurs est représenté par une croix rouge. Sur la figure 4.8(b), il est possible de remarquer que la configuration fiable  $\check{\mathbf{x}}$  se trouve à une distance  $3s$  de l'état limite. Cette distance correspond bien à une longueur  $\beta = 3$  dans l'espace normalisé. Pour cette configuration, le point de défaillance le plus probable et les réalisations critiques  $\hat{\mathbf{y}}_k$  coïncident pour les modes  $G_1$  et  $G_2$ . Pendant la phase de projection, le troisième mode de défaillance n'intervient jamais car son indice de fiabilité demeure supérieur à  $\beta^*$ .

Afin d'évaluer la qualité de la solution fournie par notre algorithme, une solution de référence a été obtenue au moyen de l'algorithme SORA (Sequential Optimization and Reliability Assessment) présentée en annexe A. SORA est en effet reconnu pour

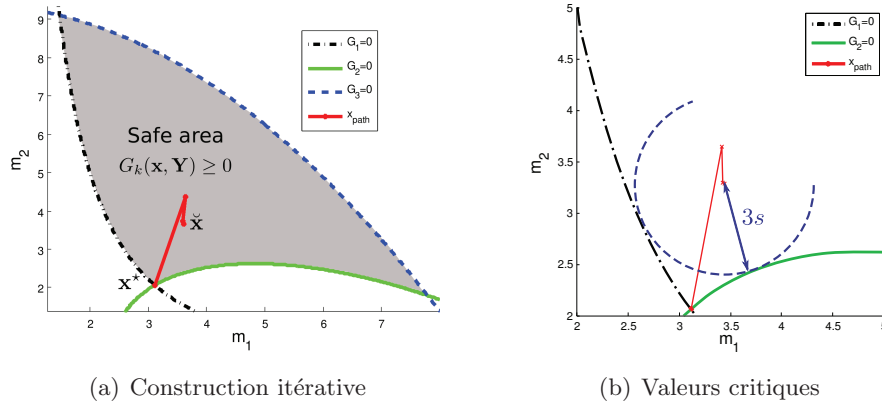


FIG. 4.8 – Exemple 1 : construction itérative d'une configuration fiable

être à la fois précis, robuste et efficace [Aoues 2010]. Le point de départ des deux méthodes est pris égal à  $\mathbf{m}_Y^{(0)} = (1, 1)^t$ . L'optimisation déterministe est effectuée par un algorithme SQP. Les tableaux 4.1 et 4.2 présentent une comparaison des résultats obtenus avec PIEC et SORA. La méthode de projection itérative semble donner de bons résultats. L'indice de fiabilité cible a en effet été obtenu pour  $\beta^* = 2$  et  $\beta^* = 3$ . De plus, la valeur de la fonction objectif pour les résultats des deux approches est très proche. Ce résultat est satisfaisant car le schéma PIEC ne fournit qu'une solution approchée du problème d'optimisation fiabiliste. Par ailleurs, la colonne "G-eval" contient le nombre d'évaluations des fonctions de performance dans chacun des cas. Nous pouvons noter que l'effort de calcul a été nettement moindre avec la méthode PIEC.

Méthode	G-eval	$\min \beta_k(\check{\mathbf{x}})$	$\min \beta_k^g(\check{\mathbf{x}})$	$f(\check{\mathbf{x}})$
PIEC	146	2.00	1.97	6.19
SORA	347	2.00	1.96	6.19

TAB. 4.1 – Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires normales,  $\beta^* = 2$ 

Méthode	G-eval	$\min \beta_k(\check{\mathbf{x}})$	$\min \beta_k^g(\check{\mathbf{x}})$	$f(\check{\mathbf{x}})$
PIEC	198	3.00	2.96	6.72
SORA	379	2.99	2.96	6.72

TAB. 4.2 – Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires normales,  $\beta^* = 3$ 

Le même problème a été résolu dans le cas où les variables aléatoires sont non gaussiennes. Les tableaux 4.3 et 4.4 récapitulent les résultats lorsque  $Y_1$  et  $Y_2$  suivent des loi lognormales dont les moyennes et écarts types sont respectivement  $m_{Y_1}$ ,  $m_{Y_2}$

et  $s_1 = s_2 = 0.3$ . Encore une fois, l'algorithme PIEC a permis d'identifier une solution proche de celle fournie par SORA. De plus, le nombre d'évaluations des fonctions de performance requis par PIEC demeure plus faible que ce qui est observé avec SORA. L'algorithme de projection itérative semble donc capable d'identifier à moindre coût des résultats respectant les indices de fiabilité cible.

Méthode	G-eval	$\min \beta_k(\check{\mathbf{x}})$	$\min \beta_k^g(\check{\mathbf{x}})$	$f(\check{\mathbf{x}})$
PIEC	142	2.00	1.99	6.14
SORA	311	2.00	2.00	6.14

TAB. 4.3 – Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires lognormales,  $\beta^* = 2$

Méthode	G-eval	$\min \beta_k(\check{\mathbf{x}})$	$\min \beta_k^g(\check{\mathbf{x}})$	$f(\check{\mathbf{x}})$
PIEC	186	3.00	3.00	6.59
SORA	392	3.00	2.98	6.58

TAB. 4.4 – Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires lognormales,  $\beta^* = 3$

Toutefois, un calcul a posteriori de la probabilité de défaillance par des méthodes de simulations permet de constater que le niveau de fiabilité requis n'a pas été atteint. En effet, la quatrième colonne des tableaux 4.1 et 4.2 contient les valeurs du plus petit indice de fiabilité généralisé observé. Aucune des deux méthodes basées sur l'approximation FORM n'est parvenue à obtenir une probabilité de défaillance suffisamment petite. On constate néanmoins que ce résultat est moins net dans le cas des variables lognormales (tableaux 4.3 et 4.4). Cette observation est liée au fait que ce sont les fractiles inférieurs des variables aléatoires qui vont saturer les contraintes de fiabilité. Or, pour des variables lognormales, ces fractiles inférieurs sont plus proches de la médiane que pour les variables gaussiennes.

**Résolution par la méthode PIECG** Le constat précédent nous incite à appliquer les algorithmes utilisant un calcul non approché de la probabilité de défaillance. Cette valeur est calculée ici par simulation. Une méthode de tirage d'importance est utilisée pour accélérer les calculs. Pour chaque état limite, un échantillon de 3000 réalisations dans l'espace normalisé des variables aléatoires est tiré selon une loi gaussienne réduite centré sur le point de défaillance le plus probable. Les courbes présentées sur la figure 4.9 montrent la convergence de la probabilité de défaillance estimée par une méthode de Monte Carlo et par tirage d'importance. Nous pouvons remarquer, entre autre, la précision accrue du tirage d'importance. Ce schéma bénéficie également d'une vitesse de convergence nettement supérieure à celle observée avec une méthode de simulation simple.

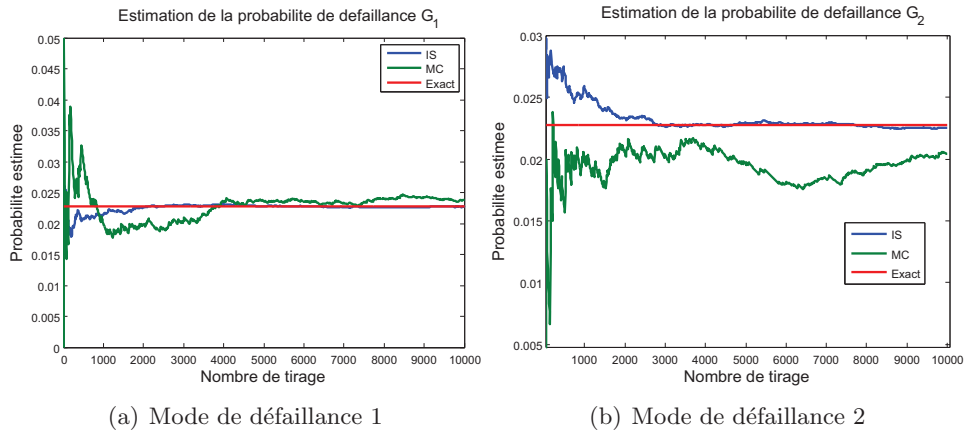


FIG. 4.9 – Exemple 1 : évaluation des probabilités de défaillances par des méthodes de simulation au point  $\check{\mathbf{x}}^g$

Le tableau 4.5 récapitule les résultats obtenus avec les différentes méthodes. Cette fois, les probabilités de défaillance cible ont bien été atteintes. En effet, les indices de fiabilité généralisés sont égaux aux indices cibles. On remarque également que le plus petit indice de fiabilité est devenu inférieur à l'objectif. La convexité de la fonction de performance  $G_2$  permet d'expliquer ce phénomène car FORM a alors tendance à surévaluer la probabilité de ruine. On remarque également que malgré l'amélioration fournie par l'utilisation de PIECH, les méthodes à base de simulation demeurent extrêmement plus coûteuses que les méthodes basées uniquement sur l'approximation.

Méthode	G-eval	$\min \beta_k(\check{\mathbf{x}}^g)$	$\min \beta_k^g(\check{\mathbf{x}}^g)$	$f(\check{\mathbf{x}}^g)$
PIEC	146	2.00	1.97	6.19
PIECG	18146	1.95	2.00	6.20
PIECH	12186	1.95	2.00	6.20

TAB. 4.5 – Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC, PIECG et PIECH, variables aléatoires normales,  $\beta^* = 2$

Sur ce premier exemple, nous avons pu constater l'efficacité de l'algorithme PIEC pour résoudre des problèmes d'optimisation fiabiliste présentant plusieurs modes de défaillance. Nous avons également mis en évidence les lacunes de cet algorithme liées à l'utilisation de l'approximation FORM. Ces défauts peuvent être surmontés en utilisant les approches PIECG ou PIECH.

#### 4.4.2 Optimisation fiabiliste d'un poteau

Ce second exemple est également courant dans la littérature RBDO [Royset 2001][Holdorf Lopez 2011]. Il s'agit de l'optimisation d'un poteau court possédant une section rectangulaire. Les dimensions  $h$  et  $b$  de cette section constituent les variables d'optimisation. La colonne est soumise à un chargement normal  $F$  ainsi qu'une flexion bi-axiale définie par les moments  $M_1$  et  $M_2$ . Ces sollicitations sont considérées comme étant aléatoires. La limite élastique  $F_y$  du matériau est également incertaine et elle est modélisée par une variable aléatoire. Nous cherchons la section d'aire  $s$  minimale satisfaisant une contrainte définie par le comportement élasto-plastique du matériau. La fonction de performance s'écrit alors :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = 1 - \frac{4M_1}{bh^2F_y} - \frac{4M_2}{b^2hF_y} - \frac{F^2}{(bhF_y)^2} \quad (4.50)$$

Le problème d'optimisation fiabiliste complet est défini après l'introduction d'une contrainte déterministe sur la forme de la section. Cette contrainte influence fortement la configuration finale et sa prise en compte est essentielle. Le problème à résoudre est finalement :

$$\min \quad \mathcal{A} = hb \quad (4.51)$$

$$\text{tel que :} \quad 0.5 \leq b/h \leq 2 \quad (4.52)$$

$$P_{\mathbf{Y}} [G(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^*) \quad (4.53)$$

où  $\beta^*$  est l'indice de fiabilité cible. Dans cet exemple, l'indice minimum à atteindre est fixé à  $\beta^* = 3$ . Les variables aléatoires  $F$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  et  $F_y$  suivent des distributions normales. Leurs valeurs moyennes sont respectivement fixées à  $2500kN$ ,  $250kN.m$ ,  $125kN.m$  et  $40MPa$ . Parallèlement, les écarts types sont donnés par le biais des coefficients de variation qui valent respectivement 0.2, 0.3, 0.3 et 0.1.

La table 4.6 présente les résultats obtenus lorsque le problème est résolu avec les méthodes PIEC et SORA. Ces résultats permettent de valider la solution fournie par PIEC. Nous pouvons en effet constater que l'indice de fiabilité cible a été atteint. Par ailleurs, la section  $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}})$  de la configuration fiable donnée par PIEC est très proche du résultat issu de SORA. Encore une fois, ce résultat est positif car aucune garantie n'est offerte sur le caractère optimal de la solution de PIEC. Par ailleurs, la colonne "G-eval" contient le nombre d'appels de la fonction de performance. Malgré l'évaluation séquentielle de l'indice de fiabilité, nous pouvons constater que la méthode PIEC apporte un gain satisfaisant en terme de temps de calcul.

Le tableau 4.6 présente également les indices de fiabilité généralisés de chacune des deux configurations. Bien que les critères sur les indices de fiabilité soient satisfaits, les indices généralisés sont inférieurs au niveau de fiabilité requis. Autrement dit, la méthode FORM ne fournit pas, ici, une approximation de qualité de la probabilité de ruine. L'utilisation de méthodes faisant intervenir des indices de fiabilité généralisés permet de s'affranchir de cette limitation.

Les courbes présentées sur la figure 4.10 permettent de comparer les évolutions des indices de fiabilité et des indices généralisés lors de l'utilisation des différentes

Méthode	$\check{h}$	$\check{b}$	$\mathcal{A}(\check{\mathbf{x}})$	$\beta(\check{\mathbf{x}})$	$\beta^g(\check{\mathbf{x}})$	G-eval
PIEC	0.346	0.555	0.192	3.00	2.95	157
SORA	0.309	0.618	0.191	3.00	2.95	276

TAB. 4.6 – Exemple 2 : configuration fiable de la section (comparaison des résultats de SORA et de PIEC)

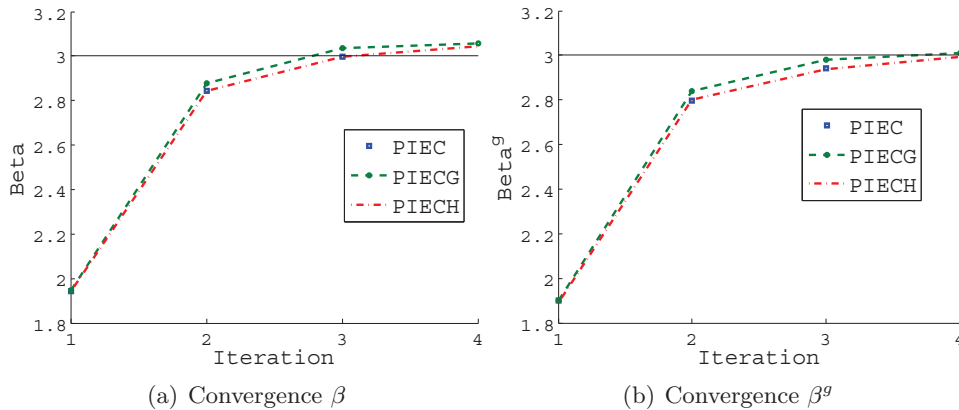


FIG. 4.10 – Exemple 2 : convergence des indices de fiabilité  $\beta$  et  $\beta^g$  au cours des itérations

méthodes. La figure de droite permet de constater que les méthodes PIECG et PIECH fournissent un niveau de fiabilité satisfaisant après 4 itérations. Au contraire, la méthode PIEC, dont les résultats sont représentés par des carrés bleus, ne parvient pas à atteindre la probabilité cible. Le graphe de gauche permet en effet de constater que l'approximation FORM a tendance à surestimer les indices de fiabilités.

Le tableau 4.7 permet, lui, de comparer quantitativement les résultats obtenus en utilisant les méthodes PIEC, PIECG et PIECH. De nouveau, nous pouvons constater que les méthodes basées sur une évaluation exacte de la probabilité de défaillance permettent le dimensionnement d'une structure respectant les prescriptions sur la fiabilité. Toutefois, ce respect des conditions de sûreté est obtenu au prix d'une forte augmentation de la quantité de calculs. La méthode PIECH ne requiert néanmoins qu'une seule itération en plus du schéma utilisant FORM. Le coût de calcul supplémentaire est alors essentiellement concentré par les deux analyses de fiabilité requises. L'emploi de méthodes de simulation plus évoluées devrait conduire à une réduction drastique du nombre d'appels à la fonction de performance.

Enfin, le tableau 4.8 contient les coefficients partiels de sécurité calculés par chaque méthode. On peut constater que les coefficients obtenus par la méthode PIEC et ceux prescrits par SORA présentent de légères différences. Ainsi, malgré un niveau de fiabilité niveau identique, les scénarios de défaillance critiques pris en compte par chacune des méthodes sont différents. Par ailleurs, on peut noter que

Méthode	$\check{h}$	$\check{b}$	$\mathcal{A}(\check{\mathbf{x}})$	$\beta(\check{\mathbf{x}})$	$\beta^g(\check{\mathbf{x}})$	Nb-ité	G-eval
PIEC	0.346	0.555	0.192	3.00	2.95	3	157
PIECG	0.346	0.558	0.193	3.04	3.00	4	24141
PIECH	0.346	0.558	0.193	3.04	3.00	3+1	12161

TAB. 4.7 – Exemple 2 : configuration fiable de la section (comparaison des résultats de PIEC, PIECG et PIEH)

les coefficients issus de PIECG et PIECH sont plus contraignants que ceux indiqués par PIEC.

Méthode	$\gamma_{F_y}$	$\gamma_F$	$\gamma_{M_1}$	$\gamma_{M_2}$
SORA	0.78	1.24	1.33	1.33
PIEC	0.78	1.24	1.37	1.30
PIECG	0.77	1.24	1.38	1.31
PIECH	0.77	1.24	1.38	1.31

TAB. 4.8 – Exemple 2 : facteurs de sécurité

Enfin, les résultats précédents permettent également de constater que la contrainte déterministe (4.52) a bien été prise en compte par son ajout dans le schéma de projection.

#### 4.4.3 Optimisation fiabiliste d'une équerre sous des contraintes dynamiques

Dans cette application, une équerre est optimisée de sorte à satisfaire des restrictions sur ses propriétés mécaniques et dynamiques. La géométrie de cette structure est présentée sur la figure 4.11.

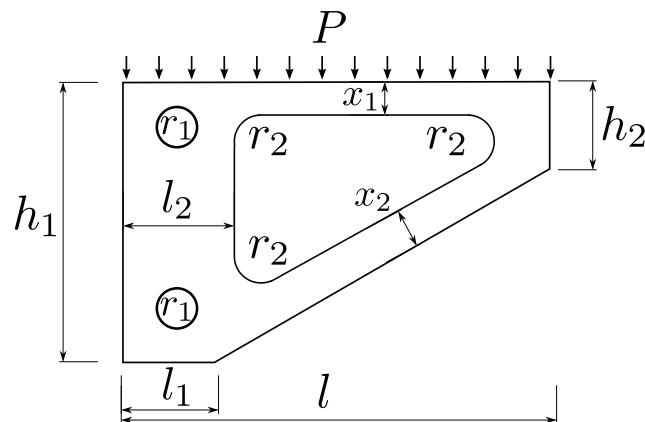


FIG. 4.11 – Exemple 3 : géométrie et notations



L'équerre d'épaisseur  $1mm$  est encadrée au niveau des deux trous de rayon  $r_1 = 6mm$  dont les centres sont situés respectivement en  $(l_1/2, h_1 - l_1/2)$  et  $(l_1/2, l_1/2)$ . La hauteur et la longueur de la structure sont  $h_1 = 100mm$  et  $l = 175mm$ . Les longueurs  $l_1$ ,  $l_2$  et  $h_2$  sont prises égales à  $25mm$ . Les rayons de courbure du trou central sont  $r_2 = 8mm$ . Les dimensions  $x_1$  et  $x_2$  constituent les variables d'optimisation. Ces variables sont assemblées dans le vecteur  $\mathbf{x}$ .

La structure est faite d'un acier dont le module d'Young  $E$  incertain est modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale. Sa valeur moyenne est  $m_E = 200GPa$  et son coefficient de variation est  $cv_E = 10\%$ . Le coefficient de Poisson et la masse volumique sont déterministes et fixés respectivement à  $0.2$  et  $7850kg.m^{-3}$ . Par ailleurs, un chargement vertical uniforme est appliqué à l'équerre. Toutefois, l'intensité de cette force est incertaine. Elle est donc modélisée par une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m_P = 5.10^3N.m^{-1}$  et de coefficient de variation  $cv_P = 15\%$ .

L'optimisation a alors pour but de minimiser la masse de cette pièce. Toutefois, deux modes de défaillance doivent être pris en compte. La première fonction de performance porte sur les propriétés dynamiques de la structure. Pour satisfaire des conditions de fonctionnement, la plus petite fréquence propre  $f_1$  doit nécessairement être supérieure ou égale à  $f_{min} = 57Hz$ . Par ailleurs, la valeur maximale de la contrainte équivalente de Von Mises, notée  $\sigma_{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$ , ne doit pas excéder la limite élastique  $\sigma_{max} = 202MPa$ . Le problème d'optimisation fiabiliste s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{masse}(\mathbf{x}) & (4.54) \\ \text{tel que : } \quad & P_{\mathbf{Y}} [f_1(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) - f_{min} \leq 0] \leq \Phi(-\beta^*) \\ & P_{\mathbf{Y}} [\sigma_{max} - \sigma_{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^*) \end{aligned}$$

où  $\text{masse}(\mathbf{x})$  est la masse de la structure correspondant à la configuration  $\mathbf{x}$ . L'indice de fiabilité cible est  $\beta^* = 3$ . Les dimensions initiales sont  $x_1 = x_2 = 25mm$ , ce qui correspond à une masse de  $760g$ .

Dans cet exemple, l'évaluation des fonctions de performance requiert l'utilisation d'une analyse par éléments finis. L'utilisation conjointe des logiciels libres Gmsh [Geuzaine 2009] et Code\_Aster [Code\_Aster 2011] fournit un outil adapté à notre problème. L'emploi de ces outils de simulation de pair avec une implémentation de l'algorithme SQP mène à la solution du problème d'optimisation déterministe :  $\mathbf{x}^* = (24.8mm, 7.6mm)$  dont la masse est  $583g$ .

Méthode	$\check{x}_1$	$\check{x}_2$	$\text{masse}(\check{\mathbf{x}})$	$\beta(\check{\mathbf{x}})$	$\beta^g(\check{\mathbf{x}})$	MEF
PIEC	27.8mm	11.5mm	658g	(2.99 ; 2.99)	(2.99 ; 2.98)	145
SORA	27.9mm	11.4mm	658g	(2.99 ; 2.98)	(2.99 ; 2.98)	236

TAB. 4.9 – Exemple 3 : configurations fiables

Le tableau 4.9 résume les résultats obtenus avec les méthodes PIEC et SORA. Les configurations fiables  $\check{\mathbf{x}}$  sont proches et satisfont les exigences sur les indices

de fiabilité. Une analyse de fiabilité par une méthode de tirage d'importance afin de vérifier la qualité du résultat. Grâce à la faible non-linéarité du problème, l'approximation FORM conduit à des résultats fiables avec une bonne précision.

Encore une fois, en dépit des approximations introduites par PIEC, la solution demeure proche de l'optimal indiqué par SORA. La dernière colonne, représente le nombre d'analyses par éléments finis qui ont été nécessaires pour obtenir chacune des solutions. L'approche PIEC fournit alors une réduction intéressante du nombre de simulations (dernière colonne).

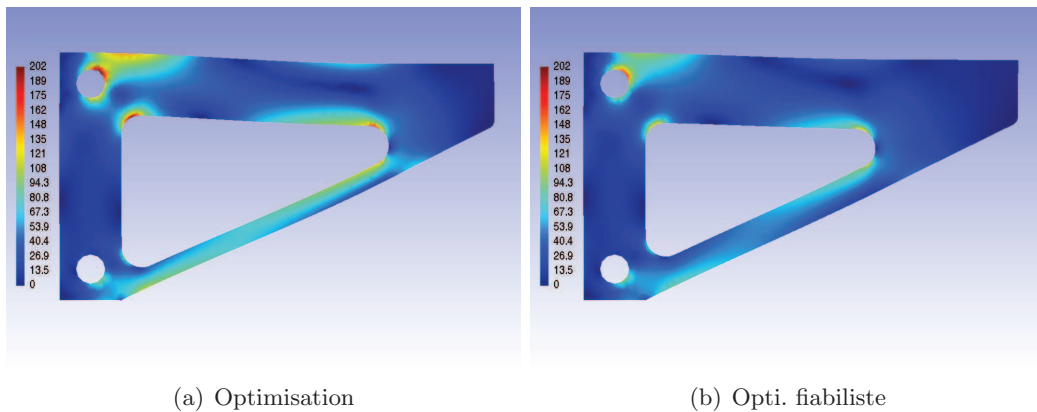


FIG. 4.12 – Exemple 3 : déplacement (coefficient  $\times 30$ ) et champ de contrainte équivalente de Von Mises (en MPa) pour les résultats de l'optimisation et l'optimisation fiabiliste de la structure.

La figure 4.12 montrent les géométries optimales et fiables. On peut constater que la configuration fiable conduit à des contraintes plus faibles dans la structure. Ces marges de sécurité sont le fruit de la prise en compte des valeurs critiques des variables aléatoires dans le dimensionnement. Ces valeurs critiques peuvent être interprétées en terme de coefficients partiels de sécurité. Concernant la limitation sur l'état de contrainte maximale, les facteurs de sécurité correspondant sont par exemple  $\gamma_E = 1$  et  $\gamma_P = 1.4$ . Le coefficient de sécurité  $\gamma_E$  demeure égal à 1 car la contrainte maximale ne dépend bien sûr pas du module Young. De même, les coefficients de sécurité appliqués pour satisfaire les performances dynamiques sont  $\gamma_E = 0.7$  et  $\gamma_P = 1$ .

#### 4.4.4 Optimisation fiabiliste d'une poutre en béton armé

On s'intéresse dans cet exemple à l'optimisation fiabiliste d'une poutre en béton armé. Généralement, les structures en béton armé doivent satisfaire deux familles d'états limites :

- les états limites ultimes (ELU) : il s'agit de la capacité de résistance maximale de la structure ;
- les états limites de service (ELS) : ces contraintes sont associées au bon fonctionnement de la structure.

Nous cherchons ici à obtenir des poutres de coût de construction minimal en tenant compte des limitations sur les états limites ultimes. Pour atteindre cet objectif, les variables d'optimisation sont la hauteur  $h$ , la largeur  $b$ , la section des aciers longitudinaux  $a_s$ , la section des étriers  $a_{sw}$  ainsi que l'écart  $\varepsilon$  entre ces derniers. La figure 4.13 représente ces grandeurs. Ces variables sont assemblées dans le vecteur des variables d'optimisation  $\mathbf{x}$ . La longueur de la poutre est fixée à  $l = 14m$ . L'angle d'inclinaison des étriers et des bielles de compression sont eux fixés respectivement à  $\theta = \pi/2$  et  $\alpha = \pi/4$ .

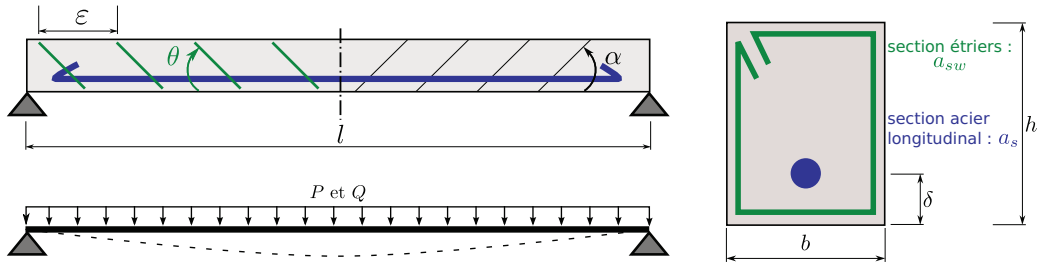


FIG. 4.13 – Exemple 4 : géométrie et variables d'optimisation d'une poutre en béton armé.

La poutre est soumise à une charge permanente  $P$  liée à sa masse volumique  $\rho_{ba}$ . Une charge d'exploitation  $Q$  est également appliquée. La résistance  $F_c$  du béton en compression, la résistance  $F_y$  des aciers en traction ainsi que les chargements sont considérés comme incertains. Ils sont modélisés par des variables aléatoires dont les caractéristiques sont rappelées dans le tableaux 4.10. Ces différentes variables sont assemblées dans le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$ .

Variable aléatoire	Espérance	Coeff. var.	Distribution
Masse volumique $\rho_{ba}$	$25kN/m^3$	0.1	Lognormale
Charge d'exploitation $Q$	$24kN/m$	0.2	Lognormale
Résistance en traction de l'acier $F_s$	$400MPa$	0.08	Lognormale
Résistance en compression du béton $F_c$	$30MPa$	0.1	Lognormale

TAB. 4.10 – Exemple 4 : caractéristiques statistiques des variables aléatoires

Le coût initial de la poutre est exprimé en terme de coût  $c_c$  du béton, de coût  $c_s$  des aciers longitudinaux, de coût  $c_{sw}$  des aciers transverses et du coût de main d'oeuvre  $c_{wf}$  :

$$c(\mathbf{x}) = \underbrace{c_{uc} b h l}_{c_c} + \underbrace{c_{us} l \rho_s a_s}_{c_s} + \underbrace{n_s c_{us} a_{sw} (2 h b / \sin \alpha) \rho_s}_{c_{sw}} + \underbrace{c_{w f} l (2 (h + b))}_{c_{w f}} \quad (4.55)$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique de l'acier (fixée à  $8000kg/mm^3$ ) et  $n_s = l/\varepsilon + 1$  est le nombre d'étriers. Les coûts unitaires  $c_{uc}$ ,  $c_{us}$ ,  $c_{w f}$  sont fixés dans le tableau 4.11.

Coûts	Unité	Prix en €
Coût unitaire du béton $c_{uc}$	€/m <sup>3</sup>	150.61
Coût unitaire de l'acier $c_{us}$	€/kg	2
Coût unitaire de la main d'oeuvre $c_{uwf}$	€/m <sup>2</sup>	47

TAB. 4.11 – Exemple 4 : caractéristiques statistiques des variables aléatoires

Les fonctions de performances sont définies par les modes de défaillance sur les moments ultimes  $M_{ult}$  et les efforts tranchants ultimes  $V_{ult}$ . Ces quantités représentent la charge la plus importante à laquelle la structure peut être soumise avant de s'effondrer. Ainsi, il est nécessaire que les moments et les efforts tranchants appliqués, respectivement notés  $M_{app}$  et  $V_{app}$ , soient inférieurs à ces valeurs ultimes. Les fonctions de performances peuvent alors s'écrire :

$$G_M(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = M_{ult}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})/M_{app}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) - 1 \quad (4.56)$$

$$G_V(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = V_{ult}(\mathbf{x}, \mathbf{Y})/V_{app}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) - 1 \quad (4.57)$$

Les moments ultimes et efforts tranchants peuvent être calculés avec les outils usuels de la résistance des matériaux et certaines règles de dimensionnement définies dans l'Eurocode 2 [AFNOR 1992]. Ces quantités sont déduites des équations :

$$M_{app}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = (P + Q)L^2/8 \quad (4.58)$$

$$M_{ult}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = a_s F_s (h - \delta) \left( 1 - \frac{0.59 a_s F_s}{b(h - \delta) F_c} \right) \quad (4.59)$$

$$V_{app}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = (P + Q)L/2 \quad (4.60)$$

$$V_{ult}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \min(V_{ult,s}, V_{ult,c}) \quad (4.61)$$

où  $V_{ult,c}$  et  $V_{ult,s}$  sont respectivement les efforts tranchants ultimes supportés par les bielles de béton et les étriers. L'Eurocode 2 prescrit comme valeurs :

$$V_{ult,c} = bz\nu F_c (\cot(\theta) + \cot(\alpha)) \sin^2(\theta) \quad (4.62)$$

$$V_{ult,s} = \frac{a_{sw}}{\varepsilon} z F_s (\cot(\theta) + \cot(\alpha)) \sin \alpha \quad (4.63)$$

où  $z$  est le bras de levier des forces internes et  $\nu$  est un coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant. L'Eurocode recommande les approximations  $z = 0.9(h - \delta)$  et  $\nu = 0.6(1 - F_c/250)$ .

Deux contraintes déterministes doivent également être prises en compte. Ces contraintes correspondent à des règles permettant d'assurer de bonnes pratiques de fabrications. Une première restriction concerne la forme de la section :

$$1 \leq h/b \leq 2 \quad (4.64)$$

La seconde restriction concerne le taux d'armature transverse. Ce taux doit être supérieur à une valeur fixé par l'Eurocode :

$$\frac{a_{sw}}{bs \sin(\alpha)} \geq 0.08 \frac{\sqrt{f_{c,5\%}}}{f_{s,5\%}} \quad (4.65)$$

où  $f_{c,5\%}$  et  $f_{s,5\%}$  sont les fractiles à 5% des résistances  $F_c$  et  $F_s$ .

Nous résolvons ce problème avec  $\beta^* = 3.8$ , ce qui correspond à une probabilité de défaillance maximale  $\Pi^* = 7.2 \cdot 10^{-5}$ . Dans les Eurocodes, cette valeur correspond à l'indice de fiabilité à obtenir pour une structure de classe RC2 (un bâtiment résidentiel ou un immeuble de bureau par exemple) pour une durée de référence de 50 ans. L'application des algorithmes SORA, PIEC, PIECG et PIECH conduit aux résultats présentés dans le tableau 4.12. L'évaluation de chaque indice de fiabilité généralisé est réalisée *a posteriori* par une méthode de tirage d'importance de 6000 échantillons autour du point de défaillance le plus probable correspondant.

Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus après une optimisation déterministe faisant intervenir les coefficients partiels de sécurité  $\{\gamma_j^{det}\}_{j=1..J}$  indiqués par l'Eurocode 2. Les coefficients  $\gamma_{F_c}^{det}$ ,  $\gamma_{F_s}^{det}$ ,  $\gamma_P^{det}$  et  $\gamma_Q^{det}$  sont respectivement pris égaux à 1.5, 1.15, 1.35 et 1.5. Ces facteurs sont alors appliqués aux valeurs fractiles à 5% des résistances et 95% des sollicitations aléatoires. Les résultats correspondants sont présentés dans la ligne "DDO" du tableau 4.12.

Méthode	$\check{h}$ (m)	$\check{b}$ (m)	$\check{a}_s$ (cm <sup>2</sup> )	$\check{a}_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$\check{s}$ (m)	$c(\check{\mathbf{x}})$ (€)
DDO	0.74	0.37	79.46	0.08	1.6	4769
SORA	0.68	0.34	60.0	1.2	0.18	3892
PIEC	0.79	0.39	57.0	1.6	0.10	4342
PIECG	0.79	0.39	57.6	1.6	0.10	4355
PIECH	0.79	0.40	57.3	1.6	0.10	4361

TAB. 4.12 – Exemple 4 : résultats de l'optimisation fiabiliste de la poutre en béton armé

Les fortes non-linéarités de ce problème conduisent à écarter la solution fournie par SORA de celles identifiées par les méthodes basées sur PIEC. Contrairement à ce que nous pouvions observer dans les exemples précédents, les coûts de production des différentes configurations sont relativement différents (11.5%). Toutefois, une meilleure prise en compte des spécificités du problème a conduit les méthodes d'optimisation fiabiliste à des solutions moins onéreuses que l'optimisation directe. Les solutions fournies par l'approche PIEC représentent ainsi une économie d'environ 10% par rapport au coût issu de la configuration fournie par l'optimisation déterministe sous les coefficients  $\{\gamma_j^{det}\}$  (DDO).

Le tableau 4.13 présente quant à lui les performances des différents algorithmes en terme de précision et d'efficacité. Comme nous pouvions nous y attendre, l'algorithme purement déterministe mène à une structure surdimensionnée dont le niveau de fiabilité est nettement supérieur à celui exigé. Les méthodes PIEC et SORA ont

Méthode	$\beta_1(\check{\mathbf{x}})$	$\beta_2(\check{\mathbf{x}})$	$\beta_1^g(\check{\mathbf{x}}^g)$	$\beta_2^g(\check{\mathbf{x}}^g)$	Nb-ité	G-eval
DDO	4.66	4.60	4.60	4.59	1	106
SORA	3.80	3.80	3.74	3.78	3	4516
PIEC	3.80	3.80	3.77	3.78	4	671
PIECG	3.84	3.83	3.80	3.80	3	48460
PIECH	3.84	3.82	3.80	3.80	3+1	24641

TAB. 4.13 – Exemple 4 : performances de l’optimisation fiabiliste de la poutre en béton armé

de leur côté déterminé une solution satisfaisant les exigences en terme d’indices de fiabilité. Toutefois, l’approximation FORM se révèle à nouveau insatisfaisante et la probabilité de défaillance réelle excède celle attendue. A contrario, les méthodes PIECG et PIECH ont permis l’identification d’une structure possédant la probabilité de ruine ciblée. En terme de temps de calcul, l’algorithme PIEC se démarque nettement de SORA qui présente ici des difficultés de convergence. L’utilisation des méthodes basées sur une évaluation de la probabilité de défaillance par simulation demeure coûteuse, même si l’approche hybride réduit considérablement le nombre d’évaluations des fonctions de performance.

Enfin la table 4.14 contient les facteurs de sécurité qui ont été appliqués par chacune des méthodes pour satisfaire aux exigences de fiabilité. En plus de fournir un outil d’interprétation commode, ces coefficients permettent d’évaluer l’influence de chaque paramètre aléatoire sur la solution. En effet, nous constatons que les méthodes d’optimisation fiabiliste attribuent au chargement permanent un facteur proche de 1. Contrairement à ce qui a lieu avec l’optimisation directe, la variabilité de ce paramètre n’intervient donc quasiment pas dans le dimensionnement fiabiliste.

Méthode	Mode $G_M$				Mode $G_V$			
	$\gamma_{F_c}$	$\gamma_{F_s}$	$\gamma_P$	$\gamma_Q$	$\gamma_{F_c}$	$\gamma_{F_s}$	$\gamma_P$	$\gamma_Q$
DDO	0.59	0.85	1.49	1.74	0.59	0.85	1.49	1.74
SORA	0.84	0.89	1.03	1.62	0.99	0.85	1.03	1.60
PIEC	0.92	0.85	1.03	1.96	0.99	0.88	1.02	1.94
PIEG	0.91	0.89	1.03	1.97	0.99	0.87	1.03	1.93
PIEH	0.91	0.89	1.03	1.97	0.99	0.87	1.03	1.93

TAB. 4.14 – Exemple 4 : facteurs de sécurité

Cet exemple a permis de montrer la robustesse de l’algorithme PIEC et de ses variantes. L’efficacité de ces méthodes est également soulignée. Néanmoins, la forte non-linéarité de la fonction de performance a entraîné une différence conséquente entre les coûts prédits par les méthodes de projections et SORA. Enfin, une comparaison avec l’approche déterministe respectant les prescriptions de l’Eurocode a permis de constater l’intérêt d’utiliser des algorithmes d’optimisation fiabiliste.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le problème de l'optimisation sous des contraintes probabilistes à l'aide des méthodologies fiabilistes. Une présentation de la littérature a permis d'identifier les principales problématiques rencontrées lors de l'évaluation de ces contraintes et de leur intégration au sein d'une procédure d'optimisation.

Cet état de l'art a notamment permis de mettre en évidence la difficulté de fournir des algorithmes efficaces et précis pour résoudre des problèmes d'optimisation fiabiliste. La plupart des méthodes reposent en effet sur l'approximation FORM des états limites simplifiant le calcul des probabilités de défaillances. Cette méthodologie conduit souvent à la résolution d'un problème d'optimisation à deux niveaux dont la résolution est coûteuse en temps de calcul. Une alternative a alors été proposée pour résoudre efficacement ce nouveau problème. Cette nouvelle méthode est basée sur le calcul de valeurs critiques des variables aléatoires. Ces réalisations permettent de définir de nouveaux ensembles contenant les solutions fiables. La projection du vecteur des variables de conception sur cet espace permet d'identifier une configuration aux propriétés acceptables. L'itération de ce procédé mène alors rapidement à une solution satisfaisant les exigences sur les indices de fiabilité. À l'inverse de plusieurs propositions basés sur des principes similaires que l'on peut trouver dans la littérature, l'approche développée dans ce chapitre est capable de prendre en compte plusieurs états limites.

Toutefois, nous avons mis en évidence sur de nombreux exemples les caractères imprécis de l'approximation FORM qui peut mener à une sous-évaluation de la défaillance. Nous avons alors pu proposer un schéma permettant d'intégrer un calcul exact de la probabilité de défaillance par des méthodes de simulation. En effet, contrairement à la majorité des méthodes efficaces d'optimisation fiabiliste, la dépendance de l'algorithme de projections itératives à l'approximation FORM n'est qu'apparente. Deux variantes du nouvel algorithme ont ainsi été introduites pour répondre précisément aux besoins en terme de fiabilité.

Les différentes méthodes proposées ont été validées sur plusieurs exemples et leurs résultats ainsi que leur efficacité ont pu être comparés à des solutions de référence. La méthode de projection basée sur FORM a alors fait preuve de son efficacité en terme de temps de calcul. Dans les cas où la fonction objectif n'est pas fortement non-linéaire, la solution fiable conserve aussi un caractère économiquement intéressant. Lors de la prise en compte d'objectifs plus complexes, la solution a tendance à se dégrader un peu, tout en demeurant avantageuse par rapport à l'application de coefficients de sécurité déterministes.

Par ailleurs, les algorithmes utilisant un calcul de la probabilité de défaillance exacte ont montré leur capacité à satisfaire précisément les contraintes de fiabilité. Toutefois, les méthodes de tirages d'importance utilisées ici pour évaluer les indices de fiabilité généralisés demeurent très coûteuses en temps de calcul. La résolution de problème mécano-fiabiliste est alors partiellement compromise.

Un des principaux développements à envisager pour obtenir une méthode à la

fois robuste, efficace et précise serait alors le couplage de l'approche généralisée avec des méthodes récentes d'analyse de fiabilité. Ces méthodes ne requièrent que peu d'évaluations des fonctions de performance. Elles permettraient donc de résoudre le problème des temps de calculs trop importants.



### Synthèse

On recherche  $\check{\mathbf{x}}$ , solution du problème d'optimisation fiabiliste :

$$\check{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I} f(\mathbf{x})$$

$$\text{tel que} = \begin{cases} \Pi_k^f(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{Y}} [G_k(\mathbf{x}, \mathbf{Y} \leq 0)] \leq \Pi_k^* & , 1 \leq k \leq K \\ g_{k_{det}}(\mathbf{x}) \geq 0 & , 1 \leq k_{det} \leq K_{det} \end{cases}$$

#### Projection itérative sur des espaces critiques : approche FORM

Probabilité de défaillance approchée par FORM :  $\Pi_k^f(\mathbf{x}) \approx \Phi(-\beta_k(\mathbf{x}))$  avec :

$$\beta_k(\mathbf{x}) = \|\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})\| = \min \{\|\mathbf{u}\| : H_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\}$$

où  $\mathbf{u} = T^{-1}(\mathbf{y})$  est le vecteur des variables aléatoires normalisées et  $H_k$  est la représentation de  $G_k$  dans cet espace.

Procédure basée sur trois étapes :

- optimisation déterministe  $\implies$  configuration optimale  $\mathbf{x}^*$
- nouvel espace admissible défini par une *réalisation critique*  $\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}$  de  $\mathbf{y}$  :

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}} = T(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}) \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} - (\beta^* - \beta_k(\mathbf{x}^*)) \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}})}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}})\|}$$

- recherche d'une solution fiable  $\check{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* + \mathbf{d}_x : G_k(\check{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}) \geq 0$

1. Approximation de  $G_k$  :  $G_k^{app}(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}_x, \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}) \approx G_k(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}) + \nabla_x^t G_k(\mathbf{x}^*, \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}) \mathbf{d}_x$

2. Calcul de  $\mathbf{d}_x$ , solution du problème annexe :

$$\arg \min_{\delta_x} \delta_x^t \delta_x \text{ tel que } g_{k_{det}}(\mathbf{x}^* + \delta_x) \geq 0 \text{ et } G_k^{app}(\mathbf{x}^* + \delta_x, \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}) \geq 0$$

Différentes linéarisations  $\implies$  nécessité d'itérer les deux dernières étapes.

#### Projection itérative sur des espaces critiques : approche probabiliste

Approximation FORM imprécise  $\implies$  définition d'un indice de fiabilité généralisé :

$$\beta_k^g(\mathbf{x}) = -\Phi^{-1} \left( \Pi_k^f(\mathbf{x}) \right) \quad \text{avec} \quad \Pi_k^f \text{ évalué par simulation}$$

Par analogie, définition d'une réalisation critique généralisée :

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}} = T(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^g) \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^g = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} - (\beta^* - \beta_k^g(\mathbf{x}^*)) \frac{\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}})}{\|\nabla_{\mathbf{u}} H_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}})\|}$$

Cette réalisation définit un nouvel espace admissible  $\implies$  la nouvelle configuration fiable est obtenue par la même méthode de projection que dans le cadre de FORM

# Conclusions

---

## Synthèse des principales contributions

Tout au long de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la prise en compte des incertitudes lors de la conception d'une structure. Il est en effet rare que tous les paramètres intervenant dans la fabrication ou dans la vie d'un produit soient parfaitement connus des concepteurs. Pour éviter des dysfonctionnements futurs, la prise en compte précoce des aléas est nécessaire.

La première étape de ce travail a alors consisté à étudier les différentes représentations possibles de ces incertitudes. Parce qu'elle bénéficie de nombreux outils d'analyse et de calcul, la théorie des probabilités a été retenue. Dans ce cadre, les paramètres méconnus sont modélisés par des variables aléatoires. Aussi, le choix des distributions de ces grandeurs est loin d'être trivial. Le rappel d'éléments de probabilité de base a permis de dégager une méthodologie pour répondre à cette question.

Ce premier chapitre a également été l'occasion de faire le point sur les principales problématiques liées à l'optimisation. Cette théorie et les outils qui en découlent ont en effet un rôle prépondérant dans le développement de nouveau produit. Néanmoins, ces opérations de réduction du coût sont souvent faites au détriment des marges de sécurité. La prise en compte des aléas au sein même des méthodes d'optimisation est alors un sujet fondamental afin de gérer ces effets antagonistes. Un inventaire des principaux travaux développés dans cette optique a permis d'identifier différentes stratégies comme l'optimisation robuste, l'optimisation stochastique, l'optimisation fiabiliste ou encore la quantification des incertitudes. Ces différentes approches correspondent à autant de manières d'envisager l'impact des incertitudes. Les deux premières démarches ont par exemple pour objectif de maintenir l'état d'un système autour d'un comportement moyen. A contrario, l'optimisation fiabiliste visera à fournir des structures demeurant fonctionnelles dans des situations extrêmes. Dans le dernier volet, une caractérisation de la dispersion de la solution d'un problème faisant intervenir des paramètres aléatoires est recherchée.

Cette démarche de quantification des incertitudes a fait l'objet d'un premier axe de développement. Les premières méthodes permettant la résolution de ce problème ont vu le jour dans le domaine de la mécanique probabiliste. L'étude de ces outils a fourni un cadre prospère pour des applications à l'optimisation. La plupart des méthodes de quantification des incertitudes repose sur la représentation formelle des quantités inconnues sous formes de séries de fonctions connues. Ainsi, seuls les coefficients à attribuer à chaque élément de base doivent être déterminés. L'objet

au centre de l'étude est donc transformé d'un élément de dimension infinie à une infinité de coefficients réels. La discrétisation du problème nécessaire à tout traitement numérique est alors aisée. Restes pourtant à déterminer les coefficients du développement. Les méthodes usuelles proposées dans le cadre des éléments finis stochastiques ont pu être transposées avec succès dans le contexte de l'optimisation. Ainsi, les méthodes de projection de Galerkin des équations d'optimalité ou les techniques d'ajustement à un échantillon de réalisations ont permis d'obtenir des résultats satisfaisants. Alors que les premières souffrent de temps de calculs importants, les secondes peuvent se révéler imprécises lorsque les expériences ne sont pas déterminées avec soin.

Une nouvelle famille de méthodes a également été introduite pour déterminer les coefficients inconnus. Ces procédés sont obtenus par une adaptation directe des techniques déterministes. Par exemple, la méthode de Newton est réputée pour résoudre de façon efficace des problèmes d'optimisation non-linéaires. Nous avons proposé d'écrire ce schéma formellement en remplaçant les variables déterministes par des variables aléatoires. La projection de ces nouvelles équations permet d'obtenir suffisamment de relations sur les coefficients inconnus pour résoudre le problème. Ces méthodes se sont révélées précises et bénéficient d'une plus grande efficacité que les schémas intrusifs usuels.

Afin d'évaluer leur pertinence dans un contexte légèrement différent, ces approches ont été appliquées à l'étude des valeurs propres généralisées d'un couple de matrices aux coefficients aléatoires. Cette thématique est primordiale lors de la conception de structure. En effet, l'étude des instabilités liées au flambement et aux propriétés dynamiques de systèmes mécaniques passe par l'estimation de ces éléments. La projection des équations et l'adaptation de la méthode de la puissance itérée ont alors permis de définir deux approches intrusives. Ces stratégies ont été comparées aux résultats obtenus par collocation d'un échantillon. Ce schéma non-intrusif s'est révélé nettement plus avantageux en temps de calcul. Inversement, les méthodes intrusives se sont révélées plus précises. Afin de tirer partie des deux approches, une méthode mixte basée sur la collocation de certaines équations du schéma intrusif a été introduit. Cette approche s'est révélée fructueuse pour diminuer les temps de calcul tout en conservant une bonne précision.

Cette meilleure compréhension des phénomènes de propagation des incertitudes rend possible l'intégration de ces mesures dans la phase de conception. Les méthodes de l'optimisation fiabiliste visent alors à atteindre un compromis entre deux objectifs *a priori* antagonistes : une diminution des coûts et une augmentation de la fiabilité. La question de l'analyse de fiabilité, c'est à dire du calcul de la probabilité de défaillance, a d'abord été évoquée. Une étude de la littérature a permis de mettre en exergue les limitations de chacune des principales approches. Ces remarques faites, nous avons pu concentrer notre analyse sur l'optimisation fiabiliste. Cet examen a permis de montrer les difficultés posées par la résolution d'un tel problème. D'une part, nous avons pu constater que les méthodes basées sur une estimation statistique de la probabilité de défaillance sont souvent coûteuses en temps de calcul. D'autre part, les méthodes utilisant des règles d'approximation peuvent

---

se révéler imprécises, en dépit de leur efficacité. Nous avons donc mis en place une méthodologie permettant de résoudre le problème de façon approchée mais efficace : la solution n'est pas optimale mais bénéficie du niveau de fiabilité requis. D'abord développée dans le formalisme de l'approximation FORM, nous avons montré sur plusieurs exemples que cette méthode est suffisamment générale pour utiliser une évaluation probabiliste de la fiabilité.

## Perspectives

Les différentes approches menées dans cette thèse ont permis une approche globale du traitement des incertitudes. Ainsi, un certain nombre de questions récurrentes ont été soulevées et nécessiteraient à elles seules des développements plus importants. La question de la modélisation des aléas doit en effet être posée dans un premier temps. Cette question est en effet fondamentale car les résultats des approches de quantification ou d'optimisation fiabiliste dépendent fortement des données en entrée du problème. Dans le cadre de la fiabilité, notamment, nous pouvons nous interroger sur la pertinence du calcul de probabilité de l'ordre du centième ou du millième alors que les distributions imposées comme données sont souvent arbitraires. Si le principe du maximum d'entropie fournit une réponse partielle, nous pouvons également nous interroger sur la pertinence d'une modélisation à l'échelle de chacun des paramètres. Des travaux plus récents proposent par exemple d'intégrer les aléas directement au niveau des opérateurs portant les incertitudes. Aussi, une étude plus poussée sur la sensibilité des résultats à la modélisation des aléas devrait être menée pour mieux saisir l'impact de ces choix.

Les différentes approches ont également témoigné de la complexité du traitement des incertitudes d'un point de vue opérationnel. Face à des temps de calcul souvent prohibitifs et à d'importantes masses de données, les arbitrages du concepteur ou l'emploi de techniques relevant tant des mathématiques appliquées que de l'informatique révèlent le caractère fortement pluridisciplinaire de ces thématiques. A titre d'exemple, l'évaluation d'intégrales en grande dimension a pu être abordée tant dans la phase de quantification des incertitudes que dans l'évaluation des probabilités de défaillance. Cette question fait d'une part intervenir des outils mathématiques nécessaires à l'obtention de schémas efficaces : utilisation de grilles creuses et approximation des formules de quadrature entre autres. D'autre part, seule la mise en place d'implémentations massivement parallèles peut permettre d'envisager la résolution de problèmes faisant intervenir des milliers de variables. L'application de ces différents filtres aux méthodes exposées dans ce manuscrit est donc un prérequis à la résolution de grands problèmes.

Certaines perspectives sont plus spécifiques à chaque approche. Nous avons proposé, dans le cadre de la quantification des incertitudes, une nouvelle méthodologie permettant d'adapter au cadre stochastique des méthodes efficaces dans le contexte déterministe. Cette démarche n'a pas trouvé de justification théorique dans ce document. Une analyse plus fine permettrait de mieux comprendre les bons résultats

observés. L'adaptation de ces stratégies à la résolution d'équations algébriques et différentielles faisant intervenir des paramètres aléatoires pourrait alors se révéler intéressante.

Enfin, les contributions à l'optimisation fiabiliste présentées dans ce manuscrit ouvrent plusieurs axes d'amélioration. Une méthodologie a été présentée pour déterminer une solution fiable, si possible proche de l'optimum. Cette méthode est basée sur l'estimation de la probabilité de défaillance, soit par des méthodes d'approximation, soit par des méthodes de simulation. Dans le premier cas, des alternatives à l'approximation FORM existent et devraient être évaluées afin d'améliorer les temps de calcul. Par ailleurs, nous avons pu constater que l'utilisation de méthodes de simulation est parfois nécessaire. Alors que nous utilisons une approche basique du tirage d'importance, plusieurs méthodes d'échantillonnage très performantes sont introduites dans la littérature récente. Leur utilisation permettrait d'accroître considérablement les performances de l'algorithme d'optimisation fiabiliste.

# Table des figures

2.1	Méthodes d'étude de la propagation des incertitudes [Sudret 2007]	12
2.2	Optima locaux et globaux	16
3.1	Utilisation d'un échantillon pour le calcul des coefficients de l'approximation	33
3.2	Calcul des coefficients à l'aide d'un échantillon	33
3.3	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : approximation $X^*(Y)$ par résolution des équations d'optimalité	41
3.4	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : approximation $X^*(Y)$ par les méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées et répartition des erreurs relatives	47
3.5	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : approximation $X^*(Y)$ par ajustement des moments	50
3.6	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : approximation $X^*(Y)$ par régression	52
3.7	Exemple 1 : résolution des équations de KKT projetées	54
3.8	Exemple 1 : méthode de Newton projetée	54
3.9	Exemple 1 : ajustement des moments	55
3.10	Exemple 1 : méthode de régression	55
3.11	Exemple 1 : comparaison des erreurs quadratiques moyennes	56
3.12	Exemple 1 : comparaison et évolution des temps de calcul	56
3.13	Exemple 2 : identification du module d'Young d'une poutre en flexion	57
3.14	Exemple 2 : évolution et comparaison des erreurs quadratiques moyennes	58
3.15	Exemple 3 : approximation de la relation $\Lambda^{(1)*}(Y)$ et fonction de répartition calculée par la méthode de Newton projetée pour une base de splines	61
3.16	Exemple 3 : erreur quadratique moyenne sur la relation $\Lambda_1^*(Y)$	61
3.17	Exemple 3 : erreur quadratique moyenne sur la fonction de répartition $F_\Lambda$	62
3.18	Exemple 3 : temps CPU pour le calcul de l'approximation $\Lambda_1^*(Y)$	62
3.19	Exemple 1 : système masses-ressorts à deux degrés de liberté avec une raideur aléatoire	71
3.20	Exemple 1 : densité de probabilité des valeurs propres calculées par la méthode de Galerkin (base polynômiale, P=2)	72
3.21	Exemple 1 : densité de probabilité des valeurs propres calculées par les méthode de la puissance itérée et de la puissance inverse avec collocation des équations de normalisation (base polynômiale, degré total $\leq 1$ )	76

3.22	Exemple 1 : densité de probabilité de $\Omega_{max}$ par la méthode de Galerkin (base polynômiale, degré total $\leq 1$ ) . . . . .	77
3.23	Exemple 3 : densité de probabilité de la plus petite fréquence propre d'une barre bloquée à ses extrémités (base polynômiale, degré total $\leq 1$ ) . . . . .	78
4.1	Domaine de défaillance : variation des paramètres de conception et des variables aléatoires dans l'espace physique . . . . .	88
4.2	Domaine de défaillance : variation des paramètres de conception et des variables aléatoires dans l'espace normalisé . . . . .	91
4.3	Approximation FORM, point de défaillance le plus probable et indice de fiabilité . . . . .	92
4.4	Analyse de fiabilité : méthodes de simulation . . . . .	96
4.5	Projection sur les ensembles critiques . . . . .	110
4.6	Limites de l'approximation FORM : géométrie du problème, dispersion de l'optimum et approximation FORM pour la configuration fiable . . . . .	113
4.7	Limites de l'approximation FORM : solution fiable fournie par l'algorithme PIECG . . . . .	116
4.8	Exemple 1 : construction itérative d'une configuration fiable . . . . .	118
4.9	Exemple 1 : évaluation des probabilités de défaillances par des méthodes de simulation au point $\check{\mathbf{x}}^g$ . . . . .	120
4.10	Exemple 2 : convergence des indices de fiabilité $\beta$ et $\beta^g$ au cours des itérations . . . . .	122
4.11	Exemple 3 : géométrie et notations . . . . .	123
4.12	Exemple 3 : déplacement (coefficient $\times 30$ ) et champ de contrainte équivalente de Von Mises (en MPa) pour les résultats de l'optimisation et l'optimisation fiabiliste de la structure. . . . .	125
4.13	Exemple 4 : géométrie et variables d'optimisation d'une poutre en béton armé. . . . .	126

# Liste des tableaux

3.1	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : moments de la solution des équations de KKT projetés . . .	40
3.2	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : performances . . . . .	41
3.3	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : moments de la solution calculée par les méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées . . . . .	46
3.4	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : performances des méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées . . . . .	47
3.5	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : moments de la solution calculée par une méthode d'ajustement des moments . . . . .	49
3.6	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : performances des méthodes d'ajustement des moments . . .	50
3.7	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : moments de la solution calculée par régression . . . . .	52
3.8	Quantification des incertitudes sur un problème d'optimisation simple : performances des méthodes de Newton et Quasi-Newton projetées . . . . .	53
3.9	Exemple 2 : intervalles de confiance à 95% du module d'Young (GPa)	58
3.10	Exemple 1 : erreurs quadratiques moyennes sur les densités de probabilité . . . . .	72
3.11	Exemple 1 : comparaison des statistiques de $\Omega_{min}$ (base polynômiale, P=2) . . . . .	73
3.12	Exemple 1 : comparaison des statistiques de $\Omega_{max}$ (base polynômiale, P=2) . . . . .	73
3.13	Exemple 1 : temps de calcul requis par les différentes méthodes de calcul des valeurs propres . . . . .	74
3.14	Exemple 1 : influence du plan d'expérience lors de l'initialisation des matrices par des méthodes de simulation . . . . .	74
3.15	Exemple 2 : modélisation des masses et raideurs aléatoires . . . . .	75
3.16	Exemple 2 : erreurs quadratiques moyennes sur les densités de probabilité . . . . .	76
3.17	Exemple 2 : comparaison des statistiques de $\Omega_{min}$ (base polynômiale, degré total $\leq 1$ ) . . . . .	77
3.18	Exemple 2 : comparaison des statistiques de $\Omega_{max}$ (base polynômiale, degré total $\leq 1$ ) . . . . .	77
3.19	Exemple 3 : modélisation de la masse volumique et du module d'Young aléatoires . . . . .	78



3.20	Exemple 3 : comparaison des statistiques de la plus petite fréquence propre d'une barre bloquée à ses extrémités (base polynômiale, degré total $\leq 1$ ) . . . . .	79
4.1	Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires normales, $\beta^* = 2$ . . . . .	118
4.2	Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires normales, $\beta^* = 3$ . . . . .	118
4.3	Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires lognormales, $\beta^* = 2$ . . . . .	119
4.4	Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC et SORA, variables aléatoires lognormales, $\beta^* = 3$ . . . . .	119
4.5	Exemple 1 : comparaison des résultats des algorithmes PIEC, PIECG et PIECH, variables aléatoires normales, $\beta^* = 2$ . . . . .	120
4.6	Exemple 2 : configuration fiable de la section (comparaison des résultats de SORA et de PIEC) . . . . .	122
4.7	Exemple 2 : configuration fiable de la section (comparaison des résultats de PIEC, PIECG et PIEH) . . . . .	123
4.8	Exemple 2 : facteurs de sécurité . . . . .	123
4.9	Exemple 3 : configurations fiables . . . . .	124
4.10	Exemple 4 : caractéristiques statistiques des variables aléatoires . . . . .	126
4.11	Exemple 4 : caractéristiques statistiques des variables aléatoires . . . . .	127
4.12	Exemple 4 : résultats de l'optimisation fiabiliste de la poutre en béton armé . . . . .	128
4.13	Exemple 4 : performances de l'optimisation fiabiliste de la poutre en béton armé . . . . .	129
4.14	Exemple 4 : facteurs de sécurité . . . . .	129

# Liste des algorithmes

1	PIEC	112
2	PIECG	115
3	PIECH	116
4	HMV	164
5	SORA	164
6	SQP	167



# Bibliographie

- [Abraham 1992] Bovas Abraham, Jock MacKay, George Box, Raghu N. Kacker, Thomas J. Lorenzen, James M. Lucas, Raymond H. Myers, G. Geoffrey Vining, John A. Nelder, Madhav S. Phadke, Jerome Sacks, William J. Welch, Anne C. Shoemaker, Kwok L. Tsui, Shin Taguchi et C. F. Jeff Wu. *Taguchi's parameter design : a panel discussion*. Technometrics, vol. 34, pages 127–161, May 1992. (Cité en page 21.)
- [Acharjee 2007] Swagato Acharjee et Nicholas Zabararas. *A non-intrusive stochastic Galerkin approach for modeling uncertainty propagation in deformation processes*. Computers and Structures, vol. 85, no. 5-6, pages 244 – 254, 2007. [ce :title;Computational Stochastic Mechanics;ce :title;.](#) (Cité en page 33.)
- [AFNOR 1992] AFNOR. *Eurocode 2 : "Calcul des structures en béton"*, 1992. (Cité en pages 87 et 127.)
- [Agarwal 2007] Harish Agarwal, Chandan Mozumder, John Renaud et Layne Watson. *An inverse-measure-based unilevel architecture for reliability-based design optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 33, pages 217–227, 2007. [10.1007/s00158-006-0057-3](#). (Cité en page 106.)
- [Anderson 2009] G. Anderson, A. Guionnet et O. Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Cambridge University Press, 2009. (Cité en page 65.)
- [Andrieu-Renaud 2004] C. Andrieu-Renaud, B. Sudret et M. Lemaire. *The PHI2 method : a way to compute time-variant reliability*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 84, no. 1, pages 75 – 86, 2004. Selected papers from ESREL 2002. (Cité en page 100.)
- [Ang 1992] George L. Ang, Alfredo H.-S. Ang et Wilson H. Tang. *Optimal Importance-Sampling Density Estimator*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 118, no. 6, pages 1146–1163, 1992. (Cité en pages 22 et 96.)
- [Aoues 2008] Y. Aoues. *Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2008. (Cité en page 100.)
- [Aoues 2010] Younes Aoues et Alaa Chateauf. *Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 41, pages 277–294, 2010. [10.1007/s00158-009-0412-2](#). (Cité en pages 105, 108 et 118.)
- [Arenbeck 2010] Henry Arenbeck, Samy Missoum, Anirban Basudhar et Parviz Nikravesh. *Reliability-Based Optimal Design and Tolerancing for Multibody Systems Using Explicit Design Space Decomposition*. Journal of Mechanical Design, vol. 132, no. 2, page 021010, 2010. (Cité en page 103.)
- [Arnst 2010] M. Arnst, R. Ghanem et C. Soize. *Identification of Bayesian posteriors for coefficients of chaos expansions*. Journal of Computational Physics, vol. 229, no. 9, pages 3134 – 3154, 2010. (Cité en page 24.)

- [Arnst 2011] M. Arnst et R. Ghanem. *A variational-inequality approach to stochastic boundary value problems with inequality constraints and its application to contact and elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, pages n/a–n/a, 2011. (Cité en pages 29 et 70.)
- [Arora 2007] J. S. Arora. Optimization of structural and mechanical systems. World Scientific Publishing Company, 2007. (Cité en page 86.)
- [Au 1999] S.K. Au et J.L. Beck. *A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations*. Structural Safety, vol. 21, no. 2, pages 135 – 158, 1999. (Cité en page 96.)
- [Au 2001a] S. K. Au et J. L. Beck. *First excursion probabilities for linear systems by very efficient importance sampling*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 16, no. 3, pages 193 – 207, 2001. (Cité en page 22.)
- [Au 2001b] Siu-Kui Au et James L. Beck. *Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 16, no. 4, pages 263 – 277, 2001. (Cité en page 97.)
- [Au 2005] S.K. Au. *Reliability-based design sensitivity by efficient simulation*. Computers & Structures, vol. 83, no. 14, pages 1048 – 1061, 2005. Uncertainties in Structural Mechanics and Analysis–Computational Methods. (Cité en pages 104 et 105.)
- [Babuska 2004] Ivo Babuska, Raul Tempone et Georgios E. Zouraris. *Galerkin Finite Element Approximations of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 42, no. 2, pages 800–825, 2004. (Cité en page 34.)
- [Babuska 2007] Ivo Babuska, Fabio Nobile et Raul Tempone. *A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 45, no. 3, pages 1005–1034, 2007. (Cité en page 34.)
- [Barty 2007] Kengy Barty, Jean-Sébastien Roy et Cyrille Strugarek. *Hilbert-Valued Perturbed Subgradient Algorithms*. Math. Oper. Res., vol. 32, pages 551–562, 2007. (Cité en page 22.)
- [Bastin 2004] Fabian Bastin. *Trust-Region Algorithms for Nonlinear Stochastic Programming and Mixed Logit Models*. PhD thesis, 2004. (Cité en page 22.)
- [Batou 2011] A. Batou et C. Soize. *Rigid multibody system dynamics with uncertain rigid bodies*. Multibody System Dynamics, pages 1–35, 2011. 10.1007/s11044-011-9279-2. (Cité en page 30.)
- [Bellizzi 2006] Sergio Bellizzi et Rubens Sampaio. *POMs analysis of randomly vibrating systems obtained from Karhunen-Loève expansion*. Journal of Sound and Vibration, vol. 297, no. 3-5, pages 774 – 793, 2006. (Cité en page 29.)
- [Bellman 1954] R.E. Bellman. *The Theory of Dynamic Programming*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 60, pages 503–515, 1954. (Cité en page 19.)

- [Ben-Tal 2002] Aharon Ben-Tal et Arkadi Nemirovski. *Robust optimization – methodology and applications*. Mathematical Programming, vol. 92, pages 453–480, 2002. 10.1007/s101070100286. (Cité en page 22.)
- [Beran 2006] Philip S. Beran, Chris L. Pettit et Daniel R. Millman. *Uncertainty quantification of limit-cycle oscillations*. Journal of Computational Physics, vol. 217, no. 1, pages 217 – 247, 2006. `je :title;Uncertainty Quantification in Simulation Science;ce :title;.` (Cité en page 30.)
- [Bertsekas 1976] D. P. Bertsekas. Dynamic programming and stochastic control. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Inc., 111 Fifth Avenue, New York, NY 10003, first édition, 1976. (Cité en page 22.)
- [Berveiller 2005] Marc Berveiller. *Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2005. (Cité en pages 29, 32, 33 et 51.)
- [Berveiller 2006] M. Berveiller, B. Sudret et M. Lemaire. *Stochastic finite elements : a non intrusive approach by regression*. Eur. J. Comput. Mech., vol. 15, page 81–92, 2006. (Cité en pages 51 et 98.)
- [Beyer 2007] H. G. Beyer et B. Sendhoff. *Robust optimization - A comprehensive survey*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, no. 33-34, pages 3190–3218, July 2007. (Cité en pages 21 et 22.)
- [Blatman 2009] G. Blatman. *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*, 2009. Ph.D Thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand. (Cité en page 33.)
- [Boggs 1995] Paul T. Boggs et Jon W. Tolle. *Sequential Quadratic Programming*. Acta Numerica, vol. 4, pages 1–51, 1995. (Cité en page 19.)
- [Bourinet 2011] J.-M. Bourinet, F. Deheeger et M. Lemaire. *Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and Support Vector Machines*. Structural Safety, no. 0, pages –, 2011. (Cité en page 98.)
- [Breitung 1984] Karl Breitung. *Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 110, no. 3, pages 357–366, 1984. (Cité en page 94.)
- [Broyden 1965] C. G. Broyden. *A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations*. Mathematics of Computation, vol. 19, no. 92, pages 577–593, 1965. (Cité en page 43.)
- [Broyden 1970] C. G. Broyden. *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms*. Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, no. 6, pages 76–90, 1970. (Cité en page 18.)
- [Bungartz 2003] H.-J. Bungartz et S. Dirnstorfer. *Multivariate Quadrature on Adaptive Sparse Grids*. Computing, vol. 71, pages 89–114, 2003. 10.1007/s00607-003-0016-4. (Cité en page 83.)
- [Capiez-Lernout 2008] E. Capiez-Lernout et C. Soize. *Robust Design Optimization in Computational Mechanics*. Journal of Applied Mechanics, vol. 75, no. 2, page 021001, 2008. (Cité en page 22.)

- [Chen 1997] X. Chen, T.K. Hasselman et D.J. Neill. *Reliability based structural design optimization for practical applications*. Collection of Technical Papers AIAAASMEASCEAHSASC Structures Structural Dynamics Materials Conference, vol. 4, pages 2724–2732, 1997. (Cité en page 106.)
- [Chen 1999] Wei Chen, Margaret M. Wiecek, Jinhuan Zhang et Dr. Wei Chen. *Quality Utility - A Compromise Programming Approach To Robust Design*. Journal of Mechanical Design, vol. 121, pages 179–187, 1999. (Cité en page 22.)
- [Cheng 2006] Gengdong Cheng, Lin Xu et Lei Jiang. *A sequential approximate programming strategy for reliability-based structural optimization*. Computers & Structures, vol. 84, no. 21, pages 1353 – 1367, 2006. (Cité en page 107.)
- [Chevreuil 2012] Mathilde Chevreuil et Anthony Nouy. *Model order reduction based on proper generalized decomposition for the propagation of uncertainties in structural dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 89, no. 2, pages 241–268, 2012. (Cité en page 29.)
- [Ching 2010] Jianye Ching et Wei-Chih Hsu. *Converting reliability constraints by adaptive quantile estimation*. Structural Safety, vol. 32, no. 5, pages 316 – 325, 2010. Probabilistic Methods for Modeling, Simulation and Optimization of Engineering Structures under Uncertainty in honor of Jim Beck’s 60th Birthday. (Cité en page 104.)
- [Choi 2004] Seung-Kyum Choi, Ramana V. Grandhi et Robert A. Canfield. *Structural reliability under non-Gaussian stochastic behavior*. Computers and Structures, vol. 82, no. 13-14, pages 1113 – 1121, 2004. (Cité en page 51.)
- [Code\_Aster 2011] Code\_Aster. *General public licensed structural mechanics finite element software*, <http://www.code-aster.org>, 2011. (Cité en page 124.)
- [Croquet 2010] R. Croquet et E. Souza de Cursi. *Statistics of uncertain dynamical systems*. In 10th International Conference on Computational Structures Technology, 2010. (Cité en page 30.)
- [Das 1997] I. Das et J. E. Dennis. *A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 14, pages 63–69, 1997. 10.1007/BF01197559. (Cité en page 22.)
- [Deb 2001] Manas K. Deb, Ivo M. Babuška et J.Tinsley Oden. *Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, no. 48, pages 6359 – 6372, 2001. (Cité en page 32.)
- [Dempster 1968] A.P. Dempster. *A Generalization of Bayesian Inference*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), vol. 30, pages 205–247, 1968. (Cité en page 8.)
- [Desceliers 2004] Christophe Desceliers, Christian Soize et Simon Cambier. *Non-parametric-parametric model for random uncertainties in non-linear structural dynamics : application to earthquake engineering*. Earthquake Engi-

- neering & Structural Dynamics, vol. 33, no. 3, pages 315–327, 2004. (Cité en page 30.)
- [Desceliers 2006] Christophe Desceliers, Roger Ghanem et Christian Soize. *Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 66, no. 6, pages 978–1001, 2006. (Cité en page 24.)
- [Desceliers 2007] C. Desceliers, C. Soize et R. Ghanem. *Identification of Chaos Representations of Elastic Properties of Random Media Using Experimental Vibration Tests*. Computational Mechanics, vol. 39, pages 831–838, 2007. 10.1007/s00466-006-0072-7. (Cité en page 24.)
- [Ditlevsen 2005] O. Ditlevsen et H. O. Madsen. Structural Reliability Methods. John Wiley & Sons, 2005. (Cité en pages 14 et 89.)
- [Doltsinis 2004] Ioannis Doltsinis et Zhan Kang. *Robust design of structures using optimization methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, no. 23-26, pages 2221 – 2237, 2004. (Cité en page 21.)
- [Doostan 2007] Alireza Doostan, Roger G. Ghanem et John Red-Horse. *Stochastic model reduction for chaos representations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, no. 37-40, pages 3951 – 3966, 2007. Special Issue Honoring the 80th Birthday of Professor Ivo Babuska. (Cité en page 29.)
- [Doostan 2009] Alireza Doostan et Gianluca Iaccarino. *A least-squares approximation of partial differential equations with high-dimensional random inputs*. Journal of Computational Physics, vol. 228, no. 12, pages 4332 – 4345, 2009. (Cité en page 34.)
- [Dorigo 2005] Marco Dorigo et Christian Blum. *Ant colony optimization theory : a survey*. Theor. Comput. Sci., vol. 344, pages 243–278, November 2005. (Cité en page 20.)
- [Du 2004] Xiaoping Du et Wei Chen. *Sequential Optimization and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design*. Journal of Mechanical Design, vol. 126, no. 2, pages 225–233, 2004. (Cité en page 107.)
- [Du 2006] C. Du, D. Kurowicka et R.M. Cooke. *Techniques for generic probabilistic inversion*. Computational Statistics & Data Analysis, vol. 50, no. 5, pages 1164 – 1187, 2006. (Cité en page 24.)
- [Eldred 2011] Michael S. Eldred. *Design Under Uncertainty Employing Stochastic Expansion Methods*. International Journal for Uncertainty Quantification, vol. 1, no. 2, pages 119–146, 2011. (Cité en page 34.)
- [Elman 2005] Howard C. Elman, Oliver G. Ernst, Dianne P. O’Leary et Michael Stewart. *Efficient iterative algorithms for the stochastic finite element method with application to acoustic scattering*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, no. 9-11, pages 1037 – 1055, 2005. (Cité en page 29.)



- [Enevoldsen 1993] I. Enevoldsen et J.D. Sorensen. *Reliability-Based Optimization of Series Systems of Parallel Systems*. vol. 119, no. 4, pages 1069–1084, 1993. (Cité en page 99.)
- [Faravelli 1989] Lucia Faravelli. *Response-Surface Approach for Reliability Analysis*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 115, no. 12, pages 2763–2781, 1989. (Cité en pages 51 et 97.)
- [Field 2000] R. V. Field, J. Red-Horse et T. Paez. *A nondeterministic shock and vibration application using polynomial chaos expansions*. In Proc. 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, 2000. (Cité en page 32.)
- [Field 2002] R.V. Field. *Numerical methods to estimate the coefficients of the polynomial chaos expansion*. In Proceedings of the 15<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference. Columbia University, New York, June 2-5 2002. (Cité en page 32.)
- [Field 2004] R. V. Field et M. Grigoriu. *On the accuracy of the polynomial chaos approximation*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 19, no. 1-2, pages 65 – 80, 2004. Fourth International Conference on Computational Stochastic Mechanics. (Cité en page 32.)
- [Fiessler 1979] B. Fiessler, R. Rackwitz et H. Neumann. *Quadratic Limit States in Structural Reliability*. J. Eng. Mech. Div., vol. 105, pages 661–676, 1979. (Cité en page 94.)
- [Fletcher 1964] R. Fletcher et C. M. Reeves. *Function minimization by conjugate gradients*. The Computer Journal, vol. 7, no. 2, pages 149–154, 1964. (Cité en page 18.)
- [Forster 2010] R. Forster et R. Kornhuber. *A polynomial chaos approach to stochastic variational inequalities*. Journal of Numerical Mathematics., vol. 18, pages 235–255, 2010. (Cité en page 29.)
- [Foschi 2002] R.O. Foschi, H. Li et J. Zhang. *Reliability and performance-based design : a computational approach and applications*. Structural Safety, vol. 24, no. 2-4, pages 205 – 218, 2002. (Cité en page 103.)
- [Gasser 1997] Markus Gasser et Gerhart Iwo Schuëller. *Reliability-Based Optimization of structural systems*. Mathematical Methods of Operations Research, vol. 46, pages 287–307, 1997. (Cité en pages 102 et 103.)
- [Gayton 2004] N. Gayton, A. Mohamed, J. D. Sorensen, M. Pendola et M. Lemaire. *Calibration methods for reliability-based design codes*. Structural Safety, vol. 26, no. 1, pages 91 – 121, 2004. (Cité en page 51.)
- [Geuzaine 2009] Christophe Geuzaine et Jean-François Remacle. *Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 79, no. 11, pages 1309–1331, 2009. (Cité en page 124.)

- [Ghanem 1991] R. G. Ghanem et P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991. (Cité en pages 24, 28, 31, 37 et 98.)
- [Ghanem 1996] Roger G. Ghanem et Robert M. Kruger. *Numerical solution of spectral stochastic finite element systems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 129, no. 3, pages 289 – 303, 1996. (Cité en page 29.)
- [Ghanem 2006] Roger G. Ghanem et Alireza Doostan. *On the construction and analysis of stochastic models : Characterization and propagation of the errors associated with limited data*. *Journal of Computational Physics*, vol. 217, no. 1, pages 63 – 81, 2006. *Uncertainty Quantification in Simulation Science*. (Cité en page 24.)
- [Ghanem 2007] Roger Ghanem et Debraj Ghosh. *Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 72, pages 486 – 504, 2007. (Cité en pages 65 et 66.)
- [Ghiocel 2002] Dan M. Ghiocel et Roger G. Ghanem. *Stochastic Finite-Element Analysis of Seismic Soil-Structure Interaction*. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, no. 1, pages 66–77, 2002. (Cité en page 32.)
- [Goethals 2009] Pault Goethals, Lucy Aragon et Byung Rae Cho. *Experimental investigations of estimated response surface functions with different variability measures*. *International Journal of Experimental Design and Process Optimisation*, vol. 1, no. 2-3, pages 123 – 163, 2009. (Cité en page 22.)
- [Goldberg 1989] D E Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Addison-Wesley, 1989. (Cité en page 20.)
- [Grandhi 1998] Ramana V. Grandhi et Liping Wang. *Reliability-based structural optimization using improved two-point adaptive nonlinear approximations*. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 29, no. 1, pages 35 – 48, 1998. (Cité en page 93.)
- [Guest 2008] James K. Guest et Takeru Igusa. *Structural optimization under uncertain loads and nodal locations*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, no. 1, pages 116 – 124, 2008. *Computational Methods in Optimization Considering Uncertainties*. (Cité en pages 13 et 22.)
- [Guilleminot 2011] J. Guilleminot et C. Soize. *Generalized stochastic approach for constitutive equation in linear elasticity : a random matrix model*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages n/a–n/a, 2011. (Cité en page 30.)
- [Hasofer 1974] A.M. Hasofer et N.C Lind. *An exact and invariant first order reliability format*. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 100, pages 111 – 121, 1974. (Cité en pages 91 et 92.)
- [Haukaas 2006] Terje Haukaas et Armen Der Kiureghian. *Strategies for finding the design point in non-linear finite element reliability analysis*. *Probabilistic*

- Engineering Mechanics, vol. 21, no. 2, pages 133 – 147, 2006. (Cité en page 93.)
- [Hernandez 2010] S. Hernandez. *Structural Optimization : 1960-2010 and Beyond*. Computational Technology Reviews, vol. 2, pages 177–222, 2010. (Cité en page 86.)
- [Hien 1997] Tran Duong Hien et Michal Kleiber. *Stochastic finite element modelling in linear transient heat transfer*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 144, no. 1-2, pages 111 – 124, 1997. (Cité en page 29.)
- [Hoai 2002] An Le Thi Hoai, Pham Dinh Tao et Nguyen V. Thoai. *Combination between global and local methods for solving an optimization problem over the efficient set*. European Journal of Operational Research, vol. 142, no. 2, pages 258 – 270, 2002. (Cité en page 19.)
- [Holdorf Lopez 2010] R. Holdorf Lopez. *Optimisation en présence d'incertitudes*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2010. (Cité en pages 2, 7, 23, 30 et 34.)
- [Holdorf Lopez 2011] Rafael Holdorf Lopez, Eduardo Souza de Cursi et Didier Lemosse. *Approximating the probability density function of the optimal point of an optimization problem*. Engineering Optimization, vol. 43, no. 3, pages 281–303, 2011. (Cité en pages 30, 36, 107, 108, 109 et 121.)
- [Homma 1996] Toshimitsu Homma et Andrea Saltelli. *Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 52, no. 1, pages 1 – 17, 1996. (Cité en pages 13 et 14.)
- [Huang 2006] Beiqing Huang et Xiaoping Du. *A robust design method using variable transformation and Gauss–Hermite integration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 66, no. 12, pages 1841–1858, 2006. (Cité en page 22.)
- [Hurtado 2001] Jorge E. Hurtado et Diego A. Alvarez. *Neural-network-based reliability analysis : a comparative study*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, no. 1-2, pages 113 – 132, 2001. (Cité en page 98.)
- [Hurtado 2007] Jorge E. Hurtado. *Filtered importance sampling with support vector margin : A powerful method for structural reliability analysis*. Structural Safety, vol. 29, no. 1, pages 2 – 15, 2007. (Cité en page 98.)
- [Isukapalli 1999] S. S. Isukapalli. *Uncertainty analysis of transport-transformation models*. PhD thesis, New Brunswick Rutgers, The State University of New Jersey, 1999. (Cité en pages 33, 51, 52 et 54.)
- [Jaynes 1957] E. T. Jaynes. *Information Theory and Statistical Mechanics*. Physical Review Online Archive (Prola), vol. 106, no. 4, pages 620–630, Mai 1957. (Cité en page 10.)
- [Jensen 2007] Hector A. Jensen et Michel A. Catalan. *On the effects of non-linear elements in the reliability-based optimal design of stochastic dynamical systems*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 42, no. 5, pages 802 – 816, 2007. (Cité en page 103.)

- [Jensen 2009] H.A. Jensen, M.A. Valdebenito, G.I. Schuëller et D.S. Kusanovic. *Reliability-based optimization of stochastic systems using line search*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. In Press, Corrected Proof, pages –, 2009. (Cité en page 105.)
- [Kaymaz 2005] Irfan Kaymaz et Chris A. McMahon. *A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 20, no. 1, pages 11 – 17, 2005. (Cité en pages 97 et 98.)
- [Kearfott 1992] R. Baker Kearfott. *An interval branch and bound algorithm for bound constrained optimization problems*. Journal of Global Optimization, vol. 2, pages 259–280, 1992. 10.1007/BF00171829. (Cité en page 19.)
- [Keese 2005] Andreas Keese et Hermann G. Matthies. *Hierarchical parallelisation for the solution of stochastic finite element equations*. Computers & Structures, vol. 83, no. 14, pages 1033 – 1047, 2005. [jce :title;Uncertainties in Structural Mechanics and Analysis–Computational Methods;jce :title;.](#) (Cité en page 29.)
- [Kennedy 1995] J. Kennedy et R. Eberhart. *Particle swarm optimization*. Proceedings IEEE International Conference on Neural Networks, vol. 4, pages 1942–1948, August 1995. (Cité en page 20.)
- [Kharmanda 2008] G. Kharmanda, A. Mohsine, A. Makloufi et A. El-Hami. *Recent methodologies for reliability-based design optimization*. Int. J. Simul. Multi-disci. Des. Optim., vol. 2, pages 11–23, 2008. (Cité en pages 106 et 107.)
- [Kiefer 1952] J. Kiefer et J. Wolfowitz. *Stochastic Estimation of the Maximum of a Regression Function*. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 23, no. 3, pages 462 – 466, 1952. (Cité en page 23.)
- [Kim 2006] N. Kim, N. Queipo et H. Wang. *Efficient Shape Optimization Under Uncertainty Using Polynomial Chaos Expansions and Local Sensitivities*. AIAA Journal, vol. 44, pages 1112–1116, Mai 2006. (Cité en page 98.)
- [Kirkpatrick 1983] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt et M. P. Vecchi. *Optimization by Simulated Annealing*. Science, vol. 220, no. 4598, pages 671–680, 1983. (Cité en page 19.)
- [Kiureghian 1998] Armen Der Kiureghian et Taleen Dakessian. *Multiple design points in first and second-order reliability*. Structural Safety, vol. 20, no. 1, pages 37 – 49, 1998. (Cité en page 94.)
- [Kleiber 2004] Michał Kleiber, Jarosław Knabel et Jerzy Rojek. *Response surface method for probabilistic assessment of metal forming failures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, no. 1, pages 51–67, 2004. (Cité en page 97.)
- [Kleywegt 2001] A.J. Kleywegt et A. Shapiro. 3rd edition of the handbook of industrial engineering, chapitre Stochastic Optimization, pages pp. 2625 – 2650. John Wiley, 2001. (Cité en pages 22 et 23.)

- [Koehler 1996] James Koehler et Art Owen. *Computer Experiments*. In S. Ghosh et C. R. Rao, éditeurs, *Handbook of Statistics, 13 : Design and Analysis of Experiments*, pages 261–308. North-Holland, 1996. (Cité en page 21.)
- [Kuschel 2000] N. Kuschel et R. Rackwitz. *A new approach for structural optimization of series systems*. In *Applications of Statistics and Probability*. Mechers and Stewart, 2000. (Cité en pages 23 et 106.)
- [Laporte 1993] Gilbert Laporte et François V. Louveaux. *The integer L-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse*. *Operations Research Letters*, vol. 13, no. 3, pages 133 – 142, 1993. (Cité en page 22.)
- [Le Maître 2001] O.P. Le Maître, Omar M. Knio, Habib N. Najm et Roger G. Ghanem. *A Stochastic Projection Method for Fluid Flow : I. Basic Formulation*. *Journal of Computational Physics*, vol. 173, no. 2, pages 481 – 511, 2001. (Cité en page 29.)
- [Le Maître 2002] O.P. Le Maître, Matthew T. Reagan, Habib N. Najm, Roger G. Ghanem et Omar M. Knio. *A Stochastic Projection Method for Fluid Flow : II. Random Process*. *Journal of Computational Physics*, vol. 181, no. 1, pages 9 – 44, 2002. (Cité en page 32.)
- [Le Maître 2004] O.P. Le Maître, O.M. Knio, H.N. Najm et R.G. Ghanem. *Uncertainty propagation using Wiener–Haar expansions*. *Journal of Computational Physics*, vol. 197, no. 1, pages 28 – 57, 2004. (Cité en page 32.)
- [Le Maître 2006] O. L. Le Maître. *Développement en polynômes de chaos d'un modèle lagrangien d'écoulement autour d'un profil*. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 334, no. 11, pages 693 – 699, 2006. (Cité en page 29.)
- [Le Maître 2010a] O. L. Le Maître, L. Mathelin, O. M. Knio et Hussaini Y. *Asynchronous time integration for polynomial chaos expansion of uncertain periodic dynamics*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A)*, vol. 28, no. 1, pages 199 – 226, 2010. (Cité en page 30.)
- [Le Maître 2010b] O. P. Le Maître et L. Mathelin. *Equation-free model reduction for complex dynamical systems*. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 63, no. 2, pages 163–184, 2010. (Cité en page 29.)
- [Lee 2002] Jae-Ohk Lee, Young-Soon Yang et Won-Sun Ruy. *A comparative study on reliability-index and target-performance-based probabilistic structural design optimization*. *Computers & Structures*, vol. 80, no. 3-4, pages 257 – 269, 2002. (Cité en page 106.)
- [Lemaire 2005] M. Lemaire. *Fiabilité des structures - couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermès, 2005. (Cité en pages 87 et 90.)
- [Liang 2007] Jinghong Liang, Zissimos P. Mourelatos et Efstratios Nikolaidis. *A Single-Loop Approach for System Reliability-Based Design Optimization*. *Journal of Mechanical Design*, vol. 129, no. 12, pages 1215–1224, 2007. (Cité en page 107.)

- [Liu 1986a] P.-L. Liu et A. Der Kiureghian. *Optimization Algorithms for Structural Reliability Analysis, Report No. UCB/SESM-86/09*. Rapport technique, Department of Civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, CA, Sept. 1986. (Cité en page 93.)
- [Liu 1986b] Pei-Ling Liu et Armen Der Kiureghian. *Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 1, no. 2, pages 105 – 112, 1986. (Cité en page 90.)
- [Liu 1988] Wing Kam Liu, Glen Besterfield et Ted Belytschko. *Transient probabilistic systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 67, no. 1, pages 27 – 54, 1988. (Cité en page 13.)
- [Liu 1991] Pei-Ling Liu et Armen Der Kiureghian. *Optimization algorithms for structural reliability*. Structural Safety, vol. 9, pages 167–177, 1991. (Cité en page 92.)
- [Liu 2004] Baoding Liu et K. K. Lai. *Focus on computational neurobiology*. pages 13–27, 2004. (Cité en page 23.)
- [Luke 2009] Sean Luke. Essentials of metaheuristics. Lulu, 2009. available at <http://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/>. (Cité en page 20.)
- [Luo 2009] Yangjun Luo, Zhan Kang et Alex Li. *Structural reliability assessment based on probability and convex set mixed model*. Computers & Structures, vol. 87, no. 21-22, pages 1408 – 1415, 2009. (Cité en page 92.)
- [Madsen 1988] H.O. Madsen. *Omission sensitivity factors*. Structural Safety, vol. 5, no. 1, pages 35 – 45, 1988. (Cité en page 14.)
- [Madsen 1992] H.O. Madsen et F. Hensen. *A comparison of some algorithms for reliability-based structural optimization and sensitivity analysis*. In R. Rackwitz et P. Thoft-Christensen, editeurs, Proceedings of the 4th IFIP WG 7.5 Conference, pages 443–451, Munich, 1992. (Cité en pages 23 et 106.)
- [Marti 1997] Kurt Marti. *Solving stochastic structural optimization problems by RSM-based stochastic approximation methods — gradient estimation in case of intermediate variables*. Mathematical Methods of Operations Research, vol. 46, pages 409–434, 1997. 10.1007/BF01194863. (Cité en page 104.)
- [Mathelin 2003] Lionel Mathelin et M. Yousuff Hussaini. *A Stochastic Collocation Algorithm for Uncertainty Analysis*. NASA, pages 2003–212153, 2003. (Cité en page 34.)
- [Mathelin 2010] Lionel Mathelin et Olivier Le Maître. *Uncertainty quantification in a chemical system using error estimate-based mesh adaption*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, pages 1–20, 2010. 10.1007/s00162-010-0210-x. (Cité en page 12.)
- [Mehta 2004] Madan L. Mehta. Random matrices, volume 142, third edition (pure and applied mathematics). Academic Press, 3  dition, Novembre 2004. (Cité en page 10.)

- [Messac 2002] A. Messac et A. Ismail-Yahaya. *Multiobjective robust design using physical programming*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 23, pages 357–371, 2002. 10.1007/s00158-002-0196-0. (Cité en page 22.)
- [Metropolis 1953] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller et E. Teller. *Equation of state calculations by fast computing machines*. Journal of Medical Physics, vol. 21, no. 6, pages 1087–1092, 1953. (Cité en page 96.)
- [Moore 1967] Ramon E. Moore. Interval analysis (automatic computation s.). Prentice Hall, 1967. (Cité en page 7.)
- [Moses 1967] F. Moses et D.E. Kinser. *Optimum structural design with failure probability constraints*. AIAA Journal, vol. 5, pages 1152–1158, 1967. (Cité en page 86.)
- [Moses 1997] F. Moses. *Problems and prospects of reliability-based optimization*. Engineering Structures, vol. 19, no. 4, pages 293 – 301, 1997. Structural Optimization. (Cité en pages 99 et 101.)
- [Narayanan 2004] Velamur Asokan Badri Narayanan et Nicholas Zabararas. *Stochastic inverse heat conduction using a spectral approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, no. 9, pages 1569–1593, 2004. (Cité en page 29.)
- [Nechak 2011] Lyes Nechak, Sébastien Berger et Evelyne Aubry. *A polynomial chaos approach to the robust analysis of the dynamic behaviour of friction systems*. European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 30, no. 4, pages 594 – 607, 2011. (Cité en page 30.)
- [Nelder 1965] J. A. Nelder et R. Mead. *A Simplex Method for Function Minimization*. The Computer Journal, vol. 7, no. 4, pages 308–313, 1965. (Cité en page 18.)
- [Nghah 2007] M.F. Nghah et A. Young. *Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures*. Composite Structures, vol. 78, no. 3, pages 447 – 456, 2007. (Cité en page 29.)
- [Nguyen 2007] X.S. Nguyen. *Algorithmes probabilistes appliqués à la durabilité et à la mécanique des ouvrages de génie civil*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2007. (Cité en page 93.)
- [Nobile 2008a] F. Nobile, R. Tempone et C. G. Webster. *An Anisotropic Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with Random Input Data*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 46, pages 2411–2442, June 2008. (Cité en page 34.)
- [Nobile 2008b] F. Nobile, R. Tempone et C. G. Webster. *A Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with Random Input Data*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 46, pages 2309–2345, May 2008. (Cité en page 34.)
- [Nocedal 2000] J. Nocedal et S.J. Wright. Numerical optimization. Springer, August 2000. (Cité en pages 15, 17, 18, 19, 37, 43, 117, 166 et 167.)

- [Nouy 2007] Anthony Nouy. *A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 196, no. 45-48, pages 4521 – 4537, 2007. (Cité en page 29.)
- [Nouy 2008] A. Nouy. *Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : Invariant subspace problem and dedicated algorithms*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 197, pages 4718 – 4736, 2008. (Cité en page 29.)
- [Otto 1993] Kevin N. Otto et Erik K. Antonsson. *Design Parameter Selection in the Presence of Noise*. In *Research in Engineering Design*, pages 234–246, 1993. (Cité en page 22.)
- [Papadrakakis 2002] Manolis Papadrakakis et Nikos D Lagaros. *Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, no. 32, pages 3491 – 3507, 2002. (Cité en pages 98 et 103.)
- [Papageorgiou 1997] A. Papageorgiou et J. F. Traub. *Faster evaluation of multidimensional integrals*. *Comput. Phys.*, vol. 11, pages 574–578, January 1997. (Cité en page 83.)
- [Park 2009] Sung Y. Park et Anil K. Bera. *Maximum entropy autoregressive conditional heteroskedasticity model*. *Journal of Econometrics*, vol. 150, no. 2, pages 219 – 230, 2009. *Recent Development in Financial Econometrics*. (Cité en page 10.)
- [Parzen 1962] Emanuel Parzen. *On Estimation of a Probability Density Function and Mode*. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 33, no. 3, pages 1065–1076, 1962. (Cité en page 11.)
- [Pellissetti 2000] M.F Pellissetti et R.G Ghanem. *Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements*. *Advances in Engineering Software*, vol. 31, no. 8-9, pages 607 – 616, 2000. (Cité en page 29.)
- [Pereira 1991] M. V. F. Pereira et L. M. V. G. Pinto. *Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning*. *Mathematical Programming*, vol. 52, pages 359–375, 1991. 10.1007/BF01582895. (Cité en page 23.)
- [Perrin 2008] Frédéric Perrin. *Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2008. (Cité en pages 11, 24 et 57.)
- [Powell 1970] M. J. D. Powell. *A hybrid method for nonlinear equations*. In Philip Rabinowitz, editeur, *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*, pages 87–114. Gordon & Breach, London, 1970. (Cité en page 18.)
- [Pradlwarter 2002] H. J. Pradlwarter, G. I. Schueller et G. S. Szekely. *Random eigenvalue problems for large systems*. *Computers & Structures*, vol. 80, no. 27-30, pages 2415 – 2424, 2002. (Cité en page 65.)



- [Pradlwarter 2007] H.J. Pradlwarter, G.I. Schuëller, P.S. Koutsourelakis et D.C. Charmpis. *Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems*. Structural Safety, vol. 29, no. 3, pages 208 – 221, 2007. A Benchmark Study on Reliability in High Dimensions. (Cité en page 97.)
- [Press 2007] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling et Brian P. Flannery. Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 3 édition, August 2007. (Cité en pages 38 et 51.)
- [Prékopa 1970] András Prékopa. *On Probabilistic Constrained Programming*. In Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming, pages 113–138. Princeton University Press, 1970. (Cité en page 22.)
- [Rackwitz 1978] Rüdiger Rackwitz et Bernd Flessler. *Structural reliability under combined random load sequences*. Computers & Structures, vol. 9, no. 5, pages 489 – 494, 1978. (Cité en page 92.)
- [Rackwitz 2001] Rüdiger Rackwitz. *Reliability analysis - a review and some perspectives*. Structural Safety, vol. 23, pages 365–395, 2001. (Cité en pages 93, 94 et 99.)
- [Rahman 2006a] S. Rahman et D. Wei. *A univariate approximation at most probable point for higher-order reliability analysis*. International Journal of Solids and Structures, vol. 43, no. 9, pages 2820 – 2839, 2006. (Cité en page 95.)
- [Rahman 2006b] Sharif Rahman. *A solution of the random eigenvalue problem by a dimensional decomposition method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 67, no. 9, pages 1318–1340, 2006. (Cité en page 65.)
- [Revuz 1997] Daniel Revuz. Probabilités. Hermann, 1997. (Cité en page 49.)
- [Ritto 2010] T.G. Ritto, C. Soize et R. Sampaio. *Probabilistic model identification of the bit-rock-interaction-model uncertainties in nonlinear dynamics of a drill-string*. Mechanics Research Communications, vol. 37, no. 6, pages 584 – 589, 2010. (Cité en pages 24 et 30.)
- [Robbins 1951] Herbert Robbins et Sutton Monro. *A Stochastic Approximation Method*. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 22, no. 3, pages 400 – 407, 1951. (Cité en page 23.)
- [Rojas 2006] J. Rojas, F.A. Chegury et D. Rade. *Structural reliability analysis combining ant colony optimization and finite element modeling*. In 16th posmec. FEMEC/UFU, Uberlandia-MG, 2006. (Cité en page 93.)
- [Rosenblatt 1952] M. Rosenblatt. *Remarks on a Multivariate Transformation*. Ann. Math. Statist., vol. 23, pages 470–472, 1952. (Cité en page 90.)
- [Royset 2001] J. O. Royset, A. Der Kiureghian et E. Polak. *Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 73, no. 3, pages 213 – 221, 2001. (Cité en pages 104 et 121.)

- [Royset 2004] J. O. Royset et E. Polak. *Reliability-based optimal design using sample average approximations*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 19, no. 4, pages 331 – 343, 2004. (Cité en page 104.)
- [Rubinstein 1981] R. Rubinstein. Simulation and the Monte Carlo method. Wiley, 1981. (Cité en page 95.)
- [Sahinidis 2004] Nikolaos V. Sahinidis. *Optimization under uncertainty : state-of-the-art and opportunities*. Computers & Chemical Engineering, vol. 28, no. 6-7, pages 971 – 983, 2004. FOCAPO 2003 Special issue. (Cité en page 22.)
- [Saltelli 2004] Andrea Saltelli, Stefano Tarantola, Francesca Campolongo et Marco Ratto. Sensitivity analysis in practice : A guide to assessing scientific models. Halsted Press, New York, NY, USA, 2004. (Cité en page 14.)
- [Sampaio 2010] R Sampaio et Cataldo. *Comparing two strategies to model uncertainties in structural dynamics*. Shock and Vibration, vol. 17, pages 171–186, 2010. (Cité en pages 30 et 71.)
- [Saporta 2006] Gilbert Saporta. Probabilités, analyses des données et statistique. Éditions Technip, 2e édition révisée et augmentée édition, 2006. (Cité en pages 8, 11 et 13.)
- [Sarsri 2011] D. Sarsri, L. Azrar, A. Jebbouri et A. El Hami. *Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear FE models*. Computers & Structures, vol. 89, no. 3-4, pages 346 – 356, 2011. (Cité en page 29.)
- [Schuëller 1987] G.I. Schuëller et R. Stix. *A critical appraisal of methods to determine failure probabilities*. Structural Safety, vol. 4, no. 4, pages 293 – 309, 1987. (Cité en pages 95 et 96.)
- [Schueremans 2005] Luc Schueremans et Dionys Van Gemert. *Benefit of splines and neural networks in simulation based structural reliability analysis*. Structural Safety, vol. 27, no. 3, pages 246 – 261, 2005. (Cité en page 98.)
- [Schürer 2001] Rudolf Schürer. *Parallel High-Dimensional Integration : Quasi-Monte Carlo versus Adaptive Cubature Rules*. In Vassil Alexandrov, Jack Dongarra, Benjoe Juliano, René Renner et C. Tan, éditeurs, Computational Science — ICCS 2001, volume 2073 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1262–1271. Springer Berlin / Heidelberg, 2001. 10.1007/3-540-45545-0\_137. (Cité en page 83.)
- [Schuëller 2004] G.I. Schuëller, H.J. Pradlwarter et P.S. Koutsourelakis. *A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 19, no. 4, pages 463 – 474, 2004. (Cité en pages 95, 96 et 97.)
- [Schuëller 2007] G.I. Schuëller et H.J. Pradlwarter. *Benchmark study on reliability estimation in higher dimensions of structural systems – An overview*. Structural Safety, vol. 29, no. 3, pages 167 – 182, 2007. A Benchmark Study on Reliability in High Dimensions. (Cité en page 97.)

- [Schuëller 2008] G.I. Schuëller et H.A. Jensen. *Computational methods in optimization considering uncertainties - An overview*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, no. 1, pages 2 – 13, 2008. Computational Methods in Optimization Considering Uncertainties. (Cité en page 22.)
- [Shannon 1948] C. E. Shannon. *A mathematical theory of communication*. Bell system technical journal, vol. 27, 1948. (Cité en page 10.)
- [Shapiro 2008] Alexander Shapiro. *Stochastic programming approach to optimization under uncertainty*. Mathematical Programming, vol. 112, no. 1, pages 183–220, March 2008. (Cité en page 23.)
- [Shen 2010] J. Shen et J. Chen. *An efficient polynomial chaos method for uncertainty quantification in electromagnetic simulations*. In Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 2010 IEEE, pages 1 –4, july 2010. (Cité en page 12.)
- [Sloan 1998] I.H. Sloan et Henryk Wozniakowski. *When Are Quasi-Monte Carlo Algorithms Efficient for High Dimensional Integrals ?* Journal of Complexity, vol. 14, no. 1, pages 1 – 33, 1998. (Cité en page 83.)
- [Sobol 2001] I.M Sobol. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 55, no. 1-3, pages 271 – 280, 2001. The Second IMACS Seminar on Monte Carlo Methods. (Cité en page 14.)
- [Soize 2003] C. Soize. *Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis*. Journal of Sound and Vibration, vol. 263, no. 4, pages 893 – 916, 2003. (Cité en pages 29 et 65.)
- [Soize 2005a] C. Soize. *A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics*. Journal of Sound and Vibration, vol. 288, no. 3, pages 623 – 652, 2005. Uncertainty in structural dynamics. (Cité en pages 10 et 29.)
- [Soize 2005b] C. Soize. *Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, no. 12-16, pages 1333 – 1366, 2005. Special Issue on Computational Methods in Stochastic Mechanics and Reliability Analysis. (Cité en page 10.)
- [Soize 2008] C. Soize, E. Capiez-Lernout, J.-F. Durand, C. Fernandez et L. Gagliardini. *Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, no. 1, pages 150 – 163, 2008. Computational Methods in Optimization Considering Uncertainties. (Cité en page 24.)
- [Soize 2009] Christian Soize et Roger G. Ghanem. *Reduced Chaos decomposition with random coefficients of vector-valued random variables and random fields*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198,

- no. 21-26, pages 1926 – 1934, 2009. *Advances in Simulation-Based Engineering Sciences - Honoring J. Tinsley Oden*. (Cité en page 31.)
- [Soize 2010] C. Soize. *Identification of high-dimension polynomial chaos expansions with random coefficients for non-Gaussian tensor-valued random fields using partial and limited experimental data*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 33-36, pages 2150 – 2164, 2010. (Cité en page 24.)
- [Soize 2011] C. Soize et A. Batou. *Stochastic Reduced-Order Model in Low-Frequency Dynamics in Presence of Numerous Local Elastic Modes*. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 78, no. 6, page 061003, 2011. (Cité en page 29.)
- [Song 1995] Datong Song, Suhuan Chen et Zhipin Qiu. *Stochastic sensitivity analysis of eigenvalues and eigenvectors*. *Computers & Structures*, vol. 54, no. 5, pages 891 – 896, 1995. (Cité en page 65.)
- [Souza de Cursi 1995] E. Souza de Cursi et M.B.S. Cortes. *Developments in neural networks and evolutionary computing for civil and structural engineering*, chapitre General Genetic Algorithms and Simulated Annealing Perturbation of the Gradient Method with a Fixed Parameter, pages 189–198. Civil-Comp Press, 1995. (Cité en page 19.)
- [Souza De Cursi 1999] J. E. Souza De Cursi. *A general framework for the stochastic/deterministic hybridisation with convergence results*. Rapport technique, INSA de Rouen, 1999. (Cité en page 20.)
- [Souza de Cursi 2011] E. Souza de Cursi. *On the numerical determination of the probability distribution of uncertain natural frequencies and modes*. In 18th International Congress on Sound and Vibration, Rio de Janeiro, Brazil, 2011. (Cité en pages 65 et 68.)
- [Stefanou 2009] G. Stefanou, A. Nouy et A. Clement. *Identification of random shapes from images through polynomial chaos expansion of random level set functions*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, no. 2, pages 127–155, 2009. (Cité en page 24.)
- [Stinstra 2008] Erwin Stinstra et Dick den Hertog. *Robust optimization using computer experiments*. *European Journal of Operational Research*, vol. 191, no. 3, pages 816 – 837, 2008. (Cité en page 22.)
- [Sudret 2002] Bruno Sudret et Armen Der Kiureghian. *Comparison of finite element reliability methods*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 17, no. 4, pages 337 – 348, 2002. (Cité en page 98.)
- [Sudret 2004] Bruno Sudret, Marc Berveiller et Maurice Lemaire. *Éléments finis stochastiques en élasticité linéaire*. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 332, no. 7, pages 531 – 537, 2004. (Cité en page 48.)
- [Sudret 2007] Bruno Sudret. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models : Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. Rapport technique, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2007. (Cité en pages 7, 12, 13, 33, 48, 51 et 137.)

- [Sudret 2008] Bruno Sudret. *Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions*. Reliability Engineering and System Safety, vol. 93, no. 7, pages 964 – 979, 2008. Bayesian Networks in Dependability. (Cité en page 51.)
- [Taflanidis 2008] A.A. Taflanidis et J.L. Beck. *Stochastic Subset Optimization for optimal reliability problems*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 23, no. 2-3, pages 324 – 338, 2008. 5th International Conference on Computational Stochastic Mechanics. (Cité en page 104.)
- [Taguchi 1986] Genichi Taguchi et Asian P. Organization. Introduction to quality engineering : designing quality into products and processes. The Organization, Tokyo, 1986. (Cité en page 21.)
- [Taguchi 1987] Genichi Taguchi. System of experimental design : engineering methods to optimize quality and minimize costs, volume 2. UNIPUB/Kraus International Publications ; American Supplier Institute, White Plains, N.Y. ; Dearborn, Mich., 1987. (Cité en page 21.)
- [Thoft-Christensen 1986] P. Thoft-Christensen et Y. Murotsu. Application of structural systems reliability theory. Springer-Verlag, 1986. (Cité en page 99.)
- [Trosset 1997] Michael W. Trosset. *Taguchi and Robust Optimization*, March 1997. (Cité en page 21.)
- [Tu 1999] J. Tu, K. K. Choi et Y. H. Park. *A New Study on Reliability-Based Design Optimization*. Journal of Mechanical Design, vol. 121, no. 4, pages 557–564, 1999. (Cité en pages 106, 108 et 163.)
- [Tvedt 1990] Lars Tvedt. *Distribution of Quadratic Forms in Normal Space : Application to Structural Reliability*. J. Eng. Mech., vol. 116, no. 6, pages 1183–1197, 1990. (Cité en page 94.)
- [Valdebenito 2010] Marcos Valdebenito et Gerhart Schuëller. *A survey on approaches for reliability-based optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 42, pages 645–663, 2010. 10.1007/s00158-010-0518-6. (Cité en pages 94 et 102.)
- [Valdebenito 2011] M.A. Valdebenito et G.I. Schuëller. *Efficient strategies for reliability-based optimization involving non-linear, dynamical structures*. Computers & Structures, vol. 89, no. 19-20, pages 1797 – 1811, 2011. Civil-Comp. (Cité en page 103.)
- [Webster 1996] M. D. Webster, M. A. Tatang et G. J. McRae. *Application of the probabilistic collocation method for an uncertainty analysis of a simple ocean model*. Rapport technique, MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change, 1996. (Cité en pages 33 et 50.)
- [Wets 1989] R. Wets. *Stochastic programming, in*. In Handbooks in Operations Research and Management Science, pages 573–629, 1989. (Cité en pages 6 et 22.)
- [Wiener 1938] Norbert Wiener. *The Homogeneous Chaos*. American Journal of Mathematics, vol. 60, no. 4, pages 897–936, 1938. (Cité en page 31.)

- [Witteveen 2008] Jeroen A. Witteveen, Alex Loeven, Sunetra Sarkar et Hester Bijl. *Probabilistic collocation for period-1 limit cycle oscillations*. Journal of Sound and Vibration, vol. 311, no. 1-2, pages 421–439, Mars 2008. (Cité en page 30.)
- [Wolfe 1969] Philip Wolfe. *Convergence Conditions for Ascent Methods*. SIAM Review, vol. 11, no. 2, pages 226–235, 1969. (Cité en page 18.)
- [Wolpert 1997] D.H. Wolpert et W.G. Macready. *No free lunch theorems for optimization*. Evolutionary Computation, IEEE Transactions on, vol. 1, no. 1, pages 67–82, apr 1997. (Cité en page 16.)
- [Wu 1998] Y.T. Wu et W. Wang. *Efficient probabilistic design by converting reliability constraints to approximately equivalent deterministic constraints*. Journal of Integrated Design and Process Sciences, vol. 2, pages 13–21, 1998. (Cité en page 107.)
- [Xiu 2002] Dongbin Xiu et George E. Karniadakis. *The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations*. SIAM J. Sci. Comput., vol. 24, no. 2, pages 619–644, 2002. (Cité en page 32.)
- [Xiu 2005] Dongbin Xiu et Jan S. Hesthaven. *High-Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 27, no. 3, pages 1118–1139, 2005. (Cité en pages 32 et 34.)
- [Xu 2005] H. Xu et S. Rahman. *Decomposition methods for structural reliability analysis*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 20, no. 3, pages 239–250, 2005. (Cité en page 94.)
- [Yang 2004] R.J. Yang et L. Gu. *Experience with approximate reliability-based optimization methods*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 26, pages 152–159, 2004. 10.1007/s00158-003-0319-2. (Cité en pages 108 et 117.)
- [Yi 2008] Ping Yi et Gengdong Cheng. *Further study on efficiency of sequential approximate programming for probabilistic structural design optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 35, pages 509–522, 2008. 10.1007/s00158-007-0120-8. (Cité en page 107.)
- [Youn 2003] B D Youn, K K Choi et Y H Park. *Hybrid analysis method for reliability-based design optimization*. Journal of Mechanical Design (Transactions of the ASME), vol. 125, pages pp. 221–232, 2003. (Cité en page 106.)
- [Youn 2004] B D Youn et K K Choi. *An Investigation of Nonlinearity of Reliability-Based Design Optimization Approaches*. Journal of Mechanical Design (Transactions of the ASME), vol. 126, pages pp. 403–411, 2004. (Cité en page 106.)
- [Yu 2003] Li-Yong Yu, Xiao-Dong Ji et Shou-Yang Wang. *Stochastic Programming Models in Financial Optimization : A Survey*. 2003. (Cité en page 23.)
- [Zadeh 1965] L.A. Zadeh. *Fuzzy sets*. Information and Control, vol. 8, no. 3, pages 338–353, 1965. (Cité en page 7.)



# La méthode SORA

---

La méthode d'optimisation SORA, pour Sequential Optimization and Reliability Assessment, est basée sur une reformulation du problème utilisant l'approximation FORM. La notion de mesure de performance est alors préférée à celle d'indice de fiabilité. Nous décrivons dans cette annexe les algorithmes permettant le calcul de cet indicateur de la fiabilité. Puis nous présenterons l'algorithme SORA qui sert souvent de référence dans ce manuscrit.

## A.1 L'approche par mesure de performance

L'approche par mesure de performance (PMA) a été introduite pour pallier aux problèmes de robustesse de l'approche par indice de fiabilité [Tu 1999]. Elle vise à convertir les limitations fiabilistes en des contraintes de performance minimale satisfaisant la fiabilité requise  $\beta^*$ . A cet effet, le point de performance minimal  $\hat{\mathbf{u}}$  est introduit. Il est défini dans l'espace normalisé comme étant à une distance  $\beta^*$  de l'origine et minimisant la performance :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{tel que : } \|\mathbf{u}\| = \beta^* \quad (\text{A.2})$$

Plusieurs algorithmes ont été développés pour résoudre ce problème de fiabilité inverse. L'algorithme AMV (Advanced Mean Value) a été introduit d'abord et vise à explorer la sphère centrée sur l'origine du repère normalisé et de rayon  $\beta^*$ . La méthode CMV (Cumulate Mean Value) a été introduite par renforcer la robustesse de AMV quand les états limites sont fortement non-convexes. Cette approche nécessitant toutefois plus de calcul, la méthode HMV (Hybrid Mean Value) a finalement été proposée pour trouver l'équilibre entre l'efficacité d'AMV et la robustesse de CMV en fonction de la non convexité des fonctions de performance. Cette méthode prend comme point de départ l'origine de l'espace normalisé des variables aléatoires et est décrit par l'algorithme 4. Pour simplifier les notations, la dépendance des fonctions de performances et des points de moindre performance aux variables de conception ne sont pas rappelés dans l'écriture de cette algorithme.

## A.2 L'algorithme SORA

La méthode SORA vise à remplacer le problème à deux niveaux de l'optimisation fiabiliste formulé dans le cadre de l'approximation FORM par un ensemble de cycles



**Algorithme 4** HMV**Précondition :**  $\dot{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{0}$  et  $it = 1$ 

- 1: **Tant que** Conditions de convergences non satisfaites **faire**
- 2:   **Si**  $it > 3$  et  $((\eta^{(it)} - \eta^{(it-1)}), (\eta^{(it-1)} - \eta^{(it-2)})) \leq 0$  **alors**
- 3:      $\eta^{(it+1)} = -\nabla_u H(\dot{\mathbf{u}}^{(it)}) / \|\nabla_u H(\dot{\mathbf{u}}^{(it)})\|$
- 4:      $\dot{\mathbf{u}}^{(it+1)} = \beta^* (\eta^{(it+1)} + \eta^{(it)} + \eta^{(it-1)}) / \|\eta^{(it+1)} + \eta^{(it)} + \eta^{(it-1)}\|$
- 5:   **Sinon**
- 6:      $\eta^{(it+1)} = -\nabla_u H(\dot{\mathbf{u}}^{(it)}) / \|\nabla_u H(\dot{\mathbf{u}}^{(it)})\|$
- 7:      $\dot{\mathbf{u}}^{(it+1)} = \beta^* \eta^{(it+1)}$
- 8:   **Fin Si**
- 9:    $it = it + 1$
- 10: **Fin Tant que**
- 11: **Retour**  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^{(it)}$

de sous-problèmes déterministes. Les exigences de fiabilité sont prises en compte dans les cycles successifs d'optimisation déterministe par le biais des points de moindre performance  $\tilde{\mathbf{y}}_k^{mpp}$  de chacun des modes de défaillance  $k$ . Comme pour la méthode PIEC, ces points permettent de définir un ensemble de configurations dont les performances sont satisfaisantes. La recherche de l'optimum sur ce nouveau domaine mène alors à la solution du problème de fiabilité. L'algorithme 5 décrit finalement la mise en oeuvre de cette méthode.

**Algorithme 5** SORA**Précondition :**  $\check{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{x}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_k^{mpp,(0)}$  et  $it = 0$ 

- 1: **Tant que** Conditions de fiabilité non satisfaites **faire**
- 2:   Optimisation déterministe : calculer la nouvelle configuration
 
$$\check{\mathbf{x}}^{(it+1)} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I} f(\mathbf{x}) \text{ tel que } G_k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_k^{mpp,(it)}) \geq 0, \quad k = 1..K$$
- 3:   **Pour** Chaque mode de défaillance  $k$  **faire**
- 4:     Recherche du point de performance minimale par HMV :
 
$$\tilde{\mathbf{u}}^{mpp,(it+1)} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^J} G_k(\check{\mathbf{x}}^{(it+1)}, \mathbf{u}) \text{ tel que } \|\mathbf{u}\| = \beta_k^*$$
- 5:     Nouvelle valeur de décalage  $\tilde{\mathbf{y}}_k^{mpp,(it+1)} = T(\tilde{\mathbf{u}}^{mpp,(it+1)})$
- 6:   **Fin Pour**
- 7:    $it = it + 1$
- 8: **Fin Tant que**
- 9:  $\check{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{x}}^{(it)}$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_k^{mpp} = \tilde{\mathbf{y}}_k^{mpp,(it)}$
- 10: **Retour**  $\check{\mathbf{x}}$

# Un algorithme d'optimisation déterministe : SQP

---

Tout au long de ce mémoire, nous avons été confronté à plusieurs reprises à des problèmes d'optimisation non-linéaire intégrant des contraintes. Un tel problème peut être écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I} f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

$$\text{tel que } h_{k_{eq}}(\mathbf{x}) = 0, \quad 1 \leq k_{eq} \leq K_{eq} \quad (\text{B.2})$$

$$g_{k_{in}}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad 1 \leq k_{in} \leq K_{in} \quad (\text{B.3})$$

où  $f$  est la fonction objectif,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_{K_{eq}}(\mathbf{x}))^t$  est le vecteur des contraintes d'égalités et  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_{K_{in}}(\mathbf{x}))^t$  celui des contraintes d'inégalité.

La méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP) est l'une des méthodes les plus utilisées de l'optimisation non-linéaire pour résoudre un tel problème. Historiquement, cet algorithme peut être vu comme une extension de la méthode de Newton permettant d'intégrer des contraintes. Le choix de la direction de descente est en effet basé sur la résolution séquentielle de problèmes quadratiques approximant le problème initial.

Il est courant d'introduire SQP comme une telle extension avant d'explicitier les principales différences avec la formulation actuelle. Considérons en premier que le problème à résoudre ne comporte que des contraintes d'égalité ( $K = K_{eq}$ ) :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I} f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.4})$$

$$\text{tel que } h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad 1 \leq k \leq K \quad (\text{B.5})$$

La méthode SQP est basée sur la création d'une suite de vecteur convergeant vers la solution :

$$\mathbf{x}^{(it+1)} = \mathbf{x}^{(it)} + \alpha \mathbf{d}^{(it)} \quad (\text{B.6})$$

A chaque étape  $it$ , le problème initial est alors approché par un problème quadratique. Cette approximation doit être construite de façon à produire une suite qui converge rapidement vers la solution du problème. Dans le cadre sans contrainte, la méthode de Newton satisfait ces critères. C'est donc tout naturellement que cette méthode est adaptée. Considérons pour cela le lagrangien  $L$  du problème (B.4) :

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^t \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.7})$$

où  $\lambda$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange et  $\mathbf{h}$  est le  $K$ -vecteur dont la composante  $k$  contient la fonction  $h_k(\mathbf{x})$ . Notons également  $A(\mathbf{x})$  la matrice jacobienne de ce vecteur des contraintes  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ . L'application des conditions KKT du problème (B.4) à ce lagrangien donne un système  $F$  de  $I + K$  équations à  $I + K$  inconnues :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x})^t \lambda \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Sous certaines hypothèses liées à l'indépendance des contraintes, le couple  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$  solution du problème initial vérifie également l'équation (B.8). Le principe fondamental de la méthode SQP est alors de résoudre ce système par la méthode de Newton. Le jacobien du système est donné par :

$$\begin{bmatrix} W & A(\mathbf{x})^t \\ A(\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

où  $W = \nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}, \lambda)$  est le hessien du lagrangien. La direction de descente  $\mathbf{d}^{(it)}$  introduite dans l'équation (B.6) est donnée par :

$$\mathbf{d}^{(it)} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^{(it)} \\ \mathbf{d}_\lambda^{(it)} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} W^{(it)} & A(\mathbf{x}^{(it)})^t \\ A(\mathbf{x}^{(it)}) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(it)}, \lambda^{(it)}) \quad (\text{B.10})$$

Sous certaines conditions, l'itération de ce procédé fournit un algorithme convergent et performant. Cette première approche est souvent appelée méthode de Newton-Lagrange. La méthode SQP est une variante de ce schéma. Elle est basée sur une interprétation alternative du système (B.10). A l'itération  $(\mathbf{x}^{(it)}, \lambda^{(it)})^t$ , on introduit le sous-problème quadratique :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^I} \mathbf{p}^t W^{(it)} \mathbf{p} + \nabla f(\mathbf{x}^{(it)})^t \mathbf{p} \quad (\text{B.11})$$

$$\text{tel que} \quad A(\mathbf{x}^{(it)}) \mathbf{p} + \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(it)}) = 0, \quad 1 \leq k \leq K \quad (\text{B.12})$$

Les conditions d'optimalité permettent de mettre en correspondance les solutions  $(\mathbf{p}^*, \mu^*)$  de ce problème quadratique avec les solutions du système linéaire (B.10). Ces conditions impliquent en effet les équations  $\mathbf{d}_x^{(it)} = \mathbf{p}^*$  et  $\lambda^{(it+1)} = \mu^*$ . Autrement dit, à chaque itération, la direction de descente et les nouvelles valeurs des multiplicateurs de Lagrange peuvent être obtenues en résolvant le système quadratique (B.11). Nocedal et Wright soulignent l'intérêt de pouvoir calculer ces grandeurs de deux façons différentes : d'une part, le point de vue de la méthode de Newton est pratique à des fins d'analyse ; d'autre part, la résolution du programme quadratique permet de définir un nouvel algorithme et d'étendre la méthode au cadre des contraintes d'inégalité [Nocedal 2000]. De nombreuses méthodes numériques permettent en effet de résoudre efficacement de tels problèmes quadratiques. Lorsque des contraintes d'inégalités doivent également être prises en

compte, le sous-problème à résoudre devient alors :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^I} \mathbf{p}^t W^{(it)} \mathbf{p} + \nabla f(\mathbf{x}^{(it)})^t \mathbf{p} \quad (\text{B.13})$$

$$\text{tel que} \quad A_{eq}(\mathbf{x}^{(it)}) \mathbf{p} + \mathbf{h}_{eq}(\mathbf{x}^{(it)}) \geq 0 \quad (\text{B.14})$$

$$A_{in}(\mathbf{x}^{(it)}) \mathbf{p} + \mathbf{g}_{in}(\mathbf{x}^{(it)}) = 0 \quad (\text{B.15})$$

où  $A_{eq}$  et  $A_{in}$  sont les matrices jacobiniennes des vecteurs  $\mathbf{h}_{eq}$  et  $\mathbf{g}_{in}$ . Finalement, une approche simpliste de la méthode SQP peut être décrite par l'algorithme (6) :

---

#### Algorithme 6 SQP

---

**Précondition :**  $(\mathbf{x}^{(0)}, \lambda^{(0)})$  et  $it = 1$

- 1: **Tant que** Conditions de convergences non satisfaites **faire**
  - 2:   Calculer  $\nabla f(\mathbf{x}^{(it)})$ ,  $\mathbf{h}_{eq}(\mathbf{x}^{(it)})$ ,  $\mathbf{g}_{in}(\mathbf{x}^{(it)})$ ,  $A_{eq}(\mathbf{x}^{(it)})$ ,  $A_{in}(\mathbf{x}^{(it)})$  et  $W^{(it)}$
  - 3:   Calculer  $\mathbf{p}^{(it)}$  et  $\mu^{(it)}$ , solutions du sous-problème quadratique (B.13)
  - 4:    $\mathbf{x}^{(it+1)} = \mathbf{x}^{(it)} + \mathbf{p}^{(it)}$  et  $\lambda^{(it+1)} = \mu^{(it)}$
  - 5:    $it = it + 1$
  - 6: **Fin Tant que**
  - 7: **Retour**  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^{(it)}$
- 

Comme pour la méthode de Newton, l'algorithme précédent peut diverger si le point de départ n'est suffisamment proche de l'optimum. Ce schéma est donc souvent qualifié de "local". Comme pour les algorithmes n'intégrant pas les contraintes, il est possible de renforcer les propriétés de convergence de la méthode en le couplant à une étape de calcul du pas ou de région de confiance. De plus, à l'instar des méthodes de quasi-Newton, il est possible de remplacer l'évaluation coûteuse du hessien par le calcul d'une matrice approchée [Nocedal 2000].



---

## Etude des dispersions et incertitudes en optimisation et dans l'analyse de stabilité

**Résumé :** Après une première présentation des outils de modélisation des incertitudes, la question de leur quantification est abordée. Deux problèmes particuliers seront l'occasion de développer une nouvelle méthodologie : la caractérisation de la dispersion affectant la solution d'un problème d'optimisation comportant des paramètres aléatoires et le calcul des valeurs propres généralisées de matrices à coefficients aléatoires. De nouvelles méthodes basées sur l'adaptation au cadre stochastique d'approches déterministes sont proposées.

Par ailleurs, les outils de l'optimisation fiabiliste permettent de trouver un compromis entre un coût minimum et une fiabilité accrue. Pour pallier les temps de calcul prohibitif, nous proposons une stratégie permettant de déterminer une solution approchée du problème. En fonction des contraintes en temps de calcul ou de précision, l'utilisation de différentes mesures de fiabilité est possible.

**Mots clés :** Quantification des incertitudes, optimisation, éléments propres aléatoires, optimisation fiabiliste

---

## Dispersions and uncertainties in optimization and stability analysis

**Abstract :** After an introduction concerning the techniques used to model uncertainties, the question of quantifying the latter is addressed. Focusing on two particular issues will make it possible to develop a new methodology on that purpose. First, we will tackle the issue of characterizing the dispersion affecting the solution of an optimization problem whose objective or constraints are random. Afterwards, we will deal with computation of random matrices eigenelements. Original strategies based on transposing standard deterministic numerical schemes into stochastic framework are introduced.

Besides, tools provided by reliability-based optimization turn out to be useful to reach a balance between a lowest cost and a satisfying reliability. However, use of such approaches can lead to prohibitive computational effort. To overcome this difficulty, a new strategy is proposed to derive an approximated solution of initial problem. Depending on requirements on computational time or accuracy, it is shown that several measurements of reliability can be used.

**Keywords :** Quantification of uncertainties, optimization, random eigenelements, reliability-based optimization

---