



HAL
open science

Modélisation mathématique du poumon humain

Vannier Christine

► **To cite this version:**

Vannier Christine. Modélisation mathématique du poumon humain. Analyse numérique [math.NA].
Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT: . tel-00739462

HAL Id: tel-00739462

<https://theses.hal.science/tel-00739462>

Submitted on 8 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Christine VANNIER

Sujet :

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DU POUMON HUMAIN.

Soutenue le 9 Juillet 2009 devant la Commission d'examen :

Mme.	GRANDMONT CÉLINE	(Examineur)
M.	HARAUX ALAIN	(Rapporteur)
M.	MAURY BERTRAND	(Directeur de thèse)
M.	NICAISE SERGE	(Rapporteur et Président du jury)
Mme.	SALORT DELPHINE	(Examineur)
M.	SAPOVAL BERNARD	(Examineur)

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma reconnaissance à Bertrand Maury, mon directeur de thèse. Il a joué un rôle essentiel dans le bon déroulement de cette thèse. Ses idées, ses questions, son impressionnante intuition du résultat (il me fallait toujours plusieurs jours de travail pour vérifier ce qu'il avait intuité) m'ont permis de rester motivée même dans les moments de doute. Sa présence, sa patience, ses idées nouvelles lorsque j'étais bloquée m'ont aidé à finir cette thèse. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec lui et je garderai un très bon souvenir de ces trois années de recherche.

Je voudrais ensuite adresser mes remerciements à Céline Grandmont qui m'a fait partager son expérience et sans qui une grande partie de cette thèse n'aurait pas vu le jour. J'ai adoré travailler avec elle et je garderai un très bon souvenir de toutes nos journées passées ensemble. Cela m'a fait découvrir que ce que j'appréciais le plus en recherche, c'était justement le travail en groupe. Je regretterai forcément nos fous-rires et nos repas au petit restaurant chinois à côté de Chevaleret (et ses rouleaux de printemps).

Je voudrais ensuite adresser mes remerciements à Alain Haraux et Serge Nicaise pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant de rapporter sur cette thèse. Une pensée particulière pour Alain Haraux pour tous les précieux conseils qu'il m'a prodigué afin d'améliorer le manuscrit. Je remercie également les autres membres du jury, Céline Grandmont, Delphine Salort et Bernard Sapoval pour leur présence à la soutenance. J'en profite pour remercier Delphine Salort avec qui j'ai beaucoup apprécié travailler. Je la remercie aussi du temps qu'elle a pris pour relire certains chapitres de ma thèse et des pertinents conseils qu'elle m'a ensuite donnés.

Faire ma thèse dans l'équipe Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles de l'Université d'Orsay aura été une chance et je tiens à remercier chaleureusement tout les membres de cette équipe. Je tiens en particulier à remercier Sylvain Faure qui a toujours pris le temps de résoudre mes problèmes informatiques même les plus triviaux (moi et l'imprimante, cela fera toujours deux...). Je tiens aussi à remercier Catherine Poupon et Valérie Lavigne respectivement secrétaire de l'équipe ANEDP et secrétaire de l'école doctorale pour leur efficacité, leur disponibilité et leur gentillesse.

Un grand merci enfin aux doctorants et plus particulièrement aux thésards du bureau 256 et ceux du bâtiment d'en face qui nous rejoignaient à midi. Sans eux ces trois années de thèse n'auraient pas été si agréables ! Merci à eux d'avoir supporté tous mes Chuuuut !!! Je ne remercierai jamais assez Juliette toujours présente, toujours si serviable. Son incroyable gentillesse, sa constante bonne humeur (comment fais-tu pour avoir toujours le sourire ???), sa disponibilité sans faille (comment as-tu fait pour répondre à toutes mes questions ???) ont vraiment contribué à me faire passer trois années très agréables. Sans parler de ces derniers mois où sans elle et sans Fred, aucun des papiers administratifs n'auraient été faits à temps....Je me demanderai toujours comment tu fais pour toujours tout gérer aussi bien ? Un grand merci aussi à Fred qui m'a résolu un grand nombre de problèmes mathématiques. Merci pour ta présence, ta gentillesse, ta curiosité pour tous

les sujets mathématiques. J'espère bien refaire du raft avec toi (promis, je ne te pousserai pas à l'eau...). J'aimerais aussi remercier Aline pour tous les moments passés ensemble. Toutes nos conversations m'ont déjà manquées toute cette année. Merci pour tous tes conseils lors des exposés, pour toutes tes réponses à mes diverses questions...J'espère que l'on aura l'occasion de se faire quelques restaurants (j'ai quand même bon espoir d'être moins débordée l'année prochaine...même si je dis cela chaque année).

Je termine par ceux qui ont toujours été là pendant ces longues années d'étude. Bon nombre d'entre eux se demandait en quoi pouvait bien consister une thèse de mathématiques! Mais par leur présence, par leurs encouragements et leur soutien, ils ont aussi participé à l'élaboration de cette thèse. Un énorme merci aussi à toute ma famille.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mon mari qui n'a jamais vraiment compris ce que je faisais (elle étudie le poumon humain grâce aux mathématiques...) mais qui a eu le courage de me supporter pendant toutes ces années. Sa présence constante, sa tendresse, son soutien m'ont permis de trouver mon équilibre. Sans lui, rien de tout cela n'aurait été possible!! Encore merci.

Résumé

Modélisation mathématique du poumon humain

Nous nous intéressons à certains problèmes théoriques posés par la modélisation du poumon humain comme arbre bronchique plongé dans le parenchyme pulmonaire.

L'arbre bronchique est représenté par un arbre dyadique résistif à 23 générations dans lequel un écoulement de Stokes a lieu. La loi de Poiseuille relie ainsi le débit dans chaque bronche au saut de pression à ses extrémités. Cet arbre est ensuite plongé dans un milieu visco-élastique modélisant le parenchyme. Le processus de ventilation est alors assuré par des pressions négatives, dues à une contraction du diaphragme, au niveau des alvéoles permettant l'inspiration.

La première partie est consacrée à l'introduction d'un modèle d'arbre infini obtenu en faisant tendre le nombre de générations vers l'infini. Des théorèmes de trace permettent alors de modéliser le processus de ventilation comme un opérateur Dirichlet-Neumann, qui associe au champ de pression sur l'ensemble des bouts de l'arbre infini le continuum de débit sortant.

La seconde partie est dédiée à l'étude de modèles du parenchyme pulmonaire. La complexité du parenchyme, milieu visco-élastique, provient de la présence de l'arbre qui relie toutes les alvéoles entre elles. Des phénomènes de dissipation non locaux sont ainsi observés dus aux couplages de toutes les sorties. Nous étudions tout d'abord un modèle monodimensionnel du parenchyme mettant en jeu une équation de type onde avec des effets non locaux. En particulier nous détaillons l'étude du comportement en temps long. Enfin, nous proposons l'ébauche d'un modèle du parenchyme en dimension supérieure prenant en compte à la fois le caractère élastique du tissu ainsi que la présence de l'arbre résistif.

Abstract

Mathematical modelling of the human lung

The present work addresses some theoretical issues raised by the modelling of the bronchial tree and its interactions with the parenchyma in which it is embedded.

The bronchial tree is represented by a resistive dyadic tree with 23 generations, through which the air flow is described by the Stokes equations. According to Poiseuille's law, the flow rate through a pipe is proportional to the drop in pressure between its ends. This tree is embedded in a viscoelastic medium which is intending to represent the parenchyma. The ventilation process is caused by negative pressures, due to diaphragm contractions at the alveolar level.

In the first part, we treat the bronchial tree as an infinite resistive tree letting the number of generations go to infinity. With the help of trace theorems, the ventilation process can be described by a Dirichlet-Neumann operator, which relates the pressure field at the boundary of the tree to the outward flux.

The second part explores some models of the parenchyma. The complexity of this viscoelastic medium derives from the fact that the tree connects all the alveolae. This coupled

system causes some non local dissipation effects and calls for non-standard damping models. We first study a one-dimensional model of the parenchyma involving a wave-like partial differential equation with non-local dissipative term. We specially focus on the long time behavior of this system. We finally propose a new model for higher dimensions taking into account both the elasticity of the parenchyma and the resistive tree.

Table des matières

Introduction	1
---------------------	----------

Partie I Le poumon humain : Description	7
--	----------

Chapitre 1

Le poumon humain

Description et fonctionnement

1.1	Architecture de l'appareil respiratoire	10
1.1.1	La paroi thoracique et les muscles respiratoires	11
1.1.2	Structure de l'arbre bronchique	11
1.1.3	Le parenchyme pulmonaire	14
1.2	Mécanisme de la ventilation	16
1.3	Echanges gazeux	17
1.4	Conclusion	18

Partie II Modélisation mathématique des voies aériennes par un arbre résistif	21
--	-----------

Chapitre 2

Modèle des voies aériennes

Description et premières propriétés

2.1	Un arbre dyadique résistif à 23 générations	24
2.1.1	Le modèle	24
2.1.2	Notations	26
2.1.3	Lien entre les pressions et les flux en sortie	26
2.1.4	Calcul de résistance équivalente	31
2.1.5	Cas particuliers d'arbres	32
2.1.6	Crise d'asthme : perturbation des résistances d'un arbre géométrique	35
2.2	Une infinité d'alvéoles plongée dans un espace de dimension une	42
2.2.1	Construction d'un opérateur continu sur l'arbre infini	42
2.2.2	Propriétés de l'opérateur \mathcal{R}	47
2.2.3	Résistance globale d'un arbre infini	50
2.2.4	Cas particulier d'un arbre géométrique	50
2.2.5	Perturbation des résistances d'arbres réguliers infinis	53
2.2.6	Conclusion et extensions	61

Introduction aux chapitres 3 et 4 **63**

Chapitre 3

Trace theorems for trees and application to the human lungs

3.1	Introduction, modelling aspects	66
3.2	Functional spaces in infinite trees	67
3.2.1	General setting	67
3.2.2	Abstract trace space on a dyadic tree	70
3.2.3	Abstract Dirichlet boundary conditions	75
3.3	Trace theorems	76
3.3.1	Identification with the set of harmonic functions	76
3.3.2	Construction of the trace operator	79
3.3.3	Geometric and subgeometric trees	81
3.4	Embedding into a domain of \mathbb{R}^d	83
3.4.1	Trace space as a subset of $L^2(\Omega)$	84

3.4.2	Regularity results	85
3.5	Concluding remarks	93

Bibliographie **95**

Chapitre 4

Caractérisation de l'espace de trace pour des arbres non réguliers

4.1	Un espace de trace comme sous-ensemble de distributions	98
4.1.1	Des conditions suffisantes d'appartenance	98
4.1.2	Zoologie d'arbres non réguliers	105
4.2	Un espace de trace comme sous-ensemble de fonctions	109
4.2.1	Des conditions suffisantes d'appartenance	109
4.2.2	Zoologie d'arbres non réguliers	112

Partie III Modélisation du parenchyme pulmonaire **115**

Chapitre 5

Etude mathématique d'un modèle 1D du parenchyme pulmonaire

5.1	Modèle 1D du parenchyme pulmonaire	118
5.1.1	Le modèle discret	118
5.1.2	Reformulation	121
5.1.3	Le modèle limite	123
5.2	Existence et unicité par le théorème de Hille-Yosida	125
5.2.1	Existence et unicité	126
5.2.2	Caractérisation de $\mathcal{D}(A)$	131
5.3	Vitesse de convergence	134
5.4	Décroissance de l'énergie vers 0	139
5.5	Vitesse de décroissance de l'énergie	142
5.5.1	Méthodes d'étude du taux de décroissance de l'énergie	143
5.5.2	Décroissance exponentielle pour $\alpha \in]1, 2[$	143
5.5.3	Quelques remarques dans le cas $\alpha \in [0, 1]$	148

Chapitre 6

Vers un modèle 2D du parenchyme pulmonaire

6.1	Le modèle	154
6.2	Un problème bien posé	157
6.2.1	La formulation variationnelle	157
6.2.2	Le bilan d'énergie	158
6.2.3	Existence et unicité	159
6.3	Discrétisation et tests numériques	166
6.3.1	Discrétisation en temps	166
6.3.2	Algorithme proposé	168
6.3.3	Tests numériques	172

Annexes

177

Annexe A

Ecoulement de Poiseuille

179

Annexe B

Le modèle de Weibel

183

Annexe C

Lemme technique

185

Bibliographie

187

Introduction

Motivations

La modélisation mathématique et numérique est de plus en plus sollicitée par le monde de la santé pour résoudre des problèmes rencontrés en pratique médicale. De tels modèles peuvent aider à une meilleure compréhension du système pulmonaire ainsi que ses diverses pathologies. En particulier, ils permettent une meilleure interprétation des mesures effectuées en milieu hospitalier lors du test médical de spirométrie mais aussi une meilleure compréhension de l'asthme. De plus, ces modèles peuvent aider à développer de nouvelles méthodes de diagnostic et de nouvelles techniques thérapeutiques. Ainsi, la maîtrise de dépôts d'aérosols administrés par inhalation permettrait d'accroître l'efficacité de ces derniers dans le traitement de l'asthme.

Tous ces problèmes ont donné lieu à un grand nombre de travaux de modélisation allant de modèles simplifiés ayant un nombre fini de paramètres à des modèles tridimensionnels. Une multitude de modèles 0D ont ainsi été proposés, dans lesquels le poumon est modélisé le plus souvent par un simple compartiment contenant de l'air relié à la trachée. La relation pression/volume est alors étudiée, en régime statique (voir [1, 2, 3]) ou dynamique (voir [4]). Afin de rendre le modèle plus réaliste, des approches tridimensionnelles en géométrie réelle dans la partie supérieure de l'arbre bronchique ont été récemment étudiées (par exemple dans [5, 6, 7, 8]). Ces modèles permettent en particulier de prendre en compte les effets inertiels dans cette partie supérieure, de traiter des cas d'assymétrie, d'envisager une étude de dépôts d'aérosols (voir [9]). Ils permettent aussi de proposer un modèle complet du processus de ventilation en couplant trois sous-systèmes (voir [10]). À un modèle tridimensionnel des cinq premières bronches de l'arbre est couplé 2^5 tubes résistifs modélisant la partie aval de l'arbre bronchique eux-même couplés à un modèle du parenchyme.

Le sujet de ce travail s'inscrit dans ce cadre général mais les questions traitées seront essentiellement de nature théorique. Nous nous intéressons en effet dans cette thèse à certains des problèmes théoriques posés par ces diverses tentatives de modélisation du poumon humain.

Modèle de base

Le processus de ventilation peut être étudié par le modèle monodimensionnel suivant (voir [10]) :

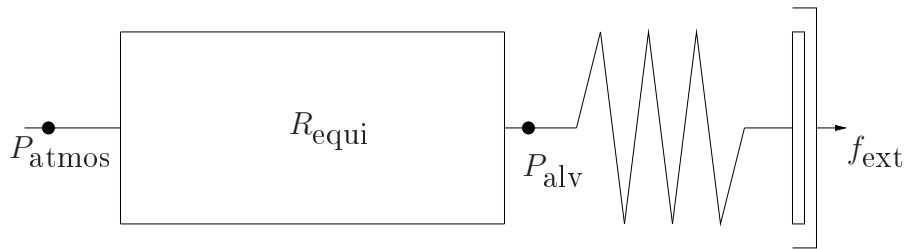


FIG. 1 – Modèle du processus de la ventilation.

L'arbre bronchique peut en effet être représenté par un arbre dyadique à 23 générations formé de tubes dans lesquels un écoulement de Stokes a lieu. Ainsi la loi de Poiseuille relie le débit Q dans chaque tube au saut de pression à ses extrémités selon

$$P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}} = RQ$$

avec R la résistance du tube. Cette résistance varie selon L/D^4 , L représentant la longueur et D le diamètre de chaque bronche. On peut alors montrer qu'il existe une résistance équivalente R_{equi} , qui permet de condenser l'ensemble de l'arbre résistif en un unique tube vérifiant

$$P_{\text{atmos}} - P_{\text{alv}} = R_{\text{equi}}Q$$

avec P_{atmos} la pression atmosphérique, P_{alv} la pression alvéolaire et Q le flux d'air entrant au niveau du nez et, par conservation, sortant au niveau des alvéoles. Enfin, cet arbre bronchique est plongé dans le parenchyme, milieu visco-élastique et le processus de ventilation est dû à la présence lors de l'inspiration d'une pression négative au niveau des alvéoles causée par la contraction du diaphragme. Ainsi, le parenchyme peut être modélisé par un ressort et la contraction du diaphragme lors de l'inspiration par une force extérieure en créneau.

Modèles étudiés

Nous avons cherché dans cette thèse à généraliser dans une certaine mesure ce premier modèle. Dans un premier temps, nous avons voulu affiner la relation $-P_{\text{alv}} = R_{\text{equi}}Q$ (en imposant $P_{\text{atmos}} = 0$) en remplaçant le débit, la pression alvéolaire par un champ de débits, de pressions et la résistance équivalente par un ensemble infini de résistances. L'un des axes majeurs de ce travail est ainsi basé sur l'introduction d'un modèle d'arbre infini obtenu en faisant tendre le nombre de générations vers l'infini. Les propriétés géométriques des bronches, en particulier une certaine régularité de décroissance de la taille des branches, permettent, par extrapolation, de construire un tel modèle limite. Sur cet

arbre infini, des opérateurs de type gradient et divergence peuvent être définis permettant de modéliser l'écoulement de l'air avec un problème de type Darcy. En effet, l'arbre infini peut alors être vu comme un milieu poreux, l'ensemble des alvéoles correspondant alors à la frontière du milieu sur laquelle une pression négative est appliquée. En imposant alors une pression nulle au niveau du nez cela entraîne un écoulement d'air du nez vers les alvéoles. Il est alors possible de définir un opérateur \mathcal{R}^{-1} qui associe au champ de pression sur l'ensemble des bouts de l'arbre infini le continuum de débit sortant. Le processus de ventilation peut ainsi être modélisé comme un opérateur Dirichlet-Neuman défini par un problème de type Darcy sur un arbre infini de façon analogue à un problème de Darcy sur un milieu continu. L'égalité $-P_{\text{alv}} = R_{\text{equi}}Q$ est ainsi remplacée par $p = \mathcal{R}q$ avec p et q les champs de pression et de débit sur l'ensemble des bouts de l'arbre infini. De plus, la construction d'un cadre mathématique rigoureux pour modéliser le processus de ventilation dans un arbre infini permet à la fois une meilleure compréhension de l'arbre fini sous-jacent ainsi que l'élaboration d'analogies avec la théorie des équations aux dérivées partielles.

Remplacer ainsi l'égalité $-P_{\text{alv}} = R_{\text{equi}}Q$ par un continuum en construisant un opérateur de type Neuman-Dirichlet sur l'arbre infini s'inscrit aussi dans l'optique ambitieuse d'élaborer un modèle complet du poumon humain comme milieu élastique. En particulier, cela pourra permettre la modélisation du parenchyme pulmonaire, milieu visco-élastique complexe, par des modèles multidimensionnels plus riches qu'un ressort. La complexité du parenchyme pulmonaire provient en effet de la présence de l'arbre bronchique qui relie toutes les alvéoles entre elles. Ainsi, lors de l'étude du mouvement de ce tissu élastique connectif entourant les alvéoles, des phénomènes de dissipation non-locale sont observés dû au couplage de toutes les sorties. Un modèle monodimensionnel a été proposé dans [11] permettant la prise en compte de ces effets de dissipation en couplant un milieu élastique troué par les alvéoles et l'arbre dyadique résistif qui les relie les unes aux autres. Lorsque le nombre de générations tend vers l'infini, l'équation régissant le mouvement du parenchyme est alors une équation de type onde avec des effets non locaux dus à une circulation de fluide dans une structure arborescente au sein d'un milieu élastique. Certaines propriétés d'un tel modèle, en particulier l'étude du comportement en temps long, seront étudiées dans cette thèse.

L'étude d'un modèle du parenchyme en dimension supérieure, est rendue possible grâce à la description intrinsèque des champs de pression et de flux sur l'espace des bouts de l'arbre résistif infini, permettant ainsi de les plonger dans un domaine continu. Le dernier chapitre est l'ébauche d'un modèle du parenchyme en dimension deux ou trois. La généralisation d'un modèle limite en dimension supérieure n'a pas été faite dans cette thèse. Nous nous contentons dans cette première approche de proposer un schéma numérique de résolution d'équations de l'élastodynamique couplées avec un terme de dissipation lié à la modélisation de fluide visqueux à travers un réseau fini qui relie des trous dans le matériau.

Nature de la démarche et difficultés

La théorie des réseaux résistifs a fait l'objet d'un grand nombre d'ouvrages dont plusieurs traitent en particulier des différentes propriétés des fonctions d'énergie finie sur les bouts d'un arbre ou d'un réseau (voir par exemple la référence [12] sur laquelle nous nous sommes appuyés pour une grande part). Afin de construire un opérateur Dirichlet-Neuman sur l'arbre résistif infini, il a fallu définir des théorèmes de trace sur l'ensemble des bouts de l'arbre infini, représentés par $\Gamma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Mais en vue de plonger les champs de pression dans un domaine physique continu, ces derniers devaient être définis de façon intrinsèque. Par analogie avec les équations aux dérivées partielles, nous avons ainsi défini de manière naturelle l'espace H^1 comme l'ensemble des pressions définies sur les noeuds de l'arbre d'énergie finie. On cherche alors à énoncer des théorèmes de trace et à définir ainsi l'analogue de $H^{1/2}$ et de $H^{-1/2}$ sur les arbres résistifs infinis. La définition de l'opérateur de trace dans le cas continu usuel nécessite l'existence d'opérateurs de restriction et de prolongement à l'espace tout entier. La difficulté, dans le cas de notre arbre infini, réside dans l'impossibilité de construire de tels opérateurs. La trace de fonctions H^1 a dû être construite différemment, de façon intrinsèque, en commençant par la définir sur des fonctions constantes par morceaux à l'infini, pour lesquelles la trace était définie sans ambiguïté.

L'équation des ondes perturbée par un terme de dissipation non locale qui modélise le mouvement du parenchyme pulmonaire fait apparaître deux opérateurs spectralement différents : d'une part, l'opérateur Laplacien usuel et d'autre part, l'opérateur lié à la présence de l'arbre résistif infini qui fait intervenir la base de Haar (voir la définition 2.34). Il y a ainsi coexistence de deux spectres naturels distincts mettant en présence des fonctions propres oscillant à des échelles différentes et ayant des régularités distinctes. La principale difficulté provient alors de la manière dont ces deux bases interagissent. L'étude du comportement en temps long d'une telle équation nécessite le plus souvent l'obtention d'inégalités différentielles pour les méthodes d'énergie (voir [13, 14]) ou d'inégalités d'observabilités fortes ou faibles (voir [15, 16, 17, 18, 19]). De telles inégalités reposent justement sur la manière dont se comporte les régularités naturelles associées aux deux opérateurs.

Présentation du travail effectué

- **Chapitre 1** : Ce chapitre présente une brève description de l'architecture de l'appareil respiratoire ainsi que de la physiologie respiratoire. On se concentre notamment sur la description des voies aériennes, celle du parenchyme et sur le processus de ventilation.
- **Chapitre 2** : Dans ce chapitre, on reprend principalement les notations et premières propriétés énoncées dans [11] qui nous serviront par la suite. Les auteurs plongent l'arbre dyadique fini dans l'intervalle $]0, 1[$ et passent ensuite à la limite sur le nombre de générations. On reprend les propriétés de l'opérateur Neumann-Dirichlet ainsi obtenu qui lie les pressions en sortie au flux sortant. On explicite aussi la différentiation par rapport aux résistances de la résistance globale de l'arbre, travail fait pendant

cette thèse.

- **Chapitre 3** : Ce chapitre fait l’objet d’un article accepté dans *Networks and Heterogeneous Media*. Il s’agit ici de généraliser le chapitre précédent. L’arbre infini est construit intrinsèquement et on énonce un théorème de trace sur les bouts de cet arbre. On cherche alors à identifier cet espace de trace à un sous-ensemble de fonctions ou de distributions. Cette construction intrinsèque de l’arbre infini permet ensuite de plonger l’espace des bouts dans un domaine de \mathbb{R}^d ce qui est le cas de l’arbre bronchique dans le parenchyme.
- **Chapitre 4** : On apporte quelques compléments à l’article dans ce chapitre. En particulier, on reprend et on généralise la caractérisation des champs de pression sur l’ensemble des bouts de l’arbre infini.
- **Chapitre 5** : On s’intéresse ici aux propriétés du modèle monodimensionnel du parenchyme pulmonaire. Après avoir vérifié le caractère bien posé d’une telle équation, on vérifie par le principe de LaSalle que l’énergie, dans le cas où la force extérieure est nulle, tend vers zéro. On cherche alors à connaître la vitesse de décroissance de l’énergie qui s’avère être exponentielle dans certains cas particuliers. On quantifie aussi l’erreur commise lorsque l’opérateur associé à l’arbre infini est remplacé par un opérateur tronqué à N générations.
- **Chapitre 6** : Dans ce dernier chapitre, nous nous sommes intéressés à une modélisation 2D ou 3D du parenchyme pulmonaire prenant en compte à la fois le caractère élastique de ce tissu ainsi que la présence de l’arbre résistif qui, cette fois-ci sera supposé fini. Après avoir vérifié le caractère bien posé du modèle choisi, on présente la méthode numérique choisie ainsi que quelques résultats numériques.

Nous tenons à souligner que les chapitres 5 et 6 sont le fruit d’une étroite collaboration avec Céline Grandmont et que Delphine Salort a participé de façon très active à l’élaboration de l’article du chapitre 3 (en particulier la section 3.4).

Première partie

Le poumon humain : Description

Chapitre 1

Le poumon humain

Description et fonctionnement

Sommaire

1.1	Architecture de l'appareil respiratoire	10
1.1.1	La paroi thoracique et les muscles respiratoires	11
1.1.2	Structure de l'arbre bronchique	11
1.1.3	Le parenchyme pulmonaire	14
1.2	Mécanisme de la ventilation	16
1.3	Echanges gazeux	17
1.4	Conclusion	18

Dans ce premier chapitre, nous présentons une description rapide de l'anatomie du poumon humain et de son fonctionnement mécanique. L'essentiel de cette description est issu d'un livre de E.R.Weibel [20] et du cours [21].

1.1 Architecture de l'appareil respiratoire

L'appareil respiratoire est contenu dans la cage thoracique elle-même limitée par le sternum en avant, la colonne vertébrale en arrière et les 12 paires de côtes latéralement. Elle renferme les deux poumons qui sont disposés symétriquement de part et d'autre du médiastin, partie centrale de la cage thoracique contenant le coeur, la trachée, l'oesophage et d'importants vaisseaux sanguins. Le diaphragme, muscle inspiratoire, sépare la cavité thoracique de la cavité abdominale dont le foie, l'estomac et la rate font partie (voir la figure 1.1). Il est aussi important (pour comprendre le mécanisme de la ventilation) de

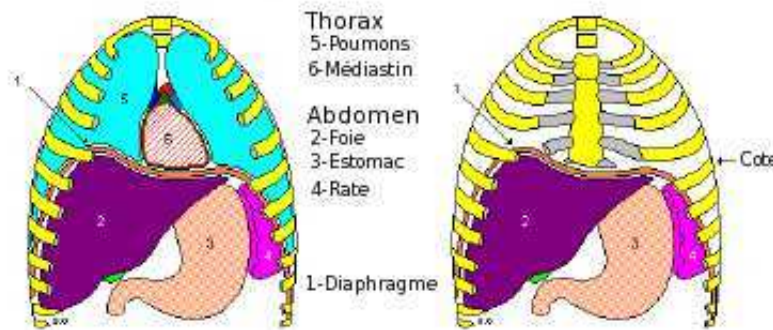


FIG. 1.1 – Anatomie de l'appareil respiratoire (voir [22]).

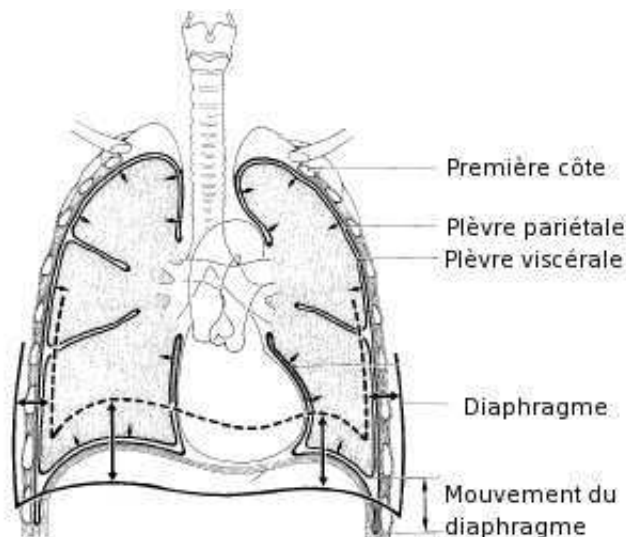


FIG. 1.2 – Anatomie de l'appareil respiratoire (voir [20]).

remarquer la présence de deux feuillets, la plèvre pariétale et la plèvre viscérale séparant

les poumons de la cage thoracique. Un espace hermétique, le vide pleural, est présent entre ces deux plèvres (voir la figure 1.2).

1.1.1 La paroi thoracique et les muscles respiratoires

Sur la charpente formée par la cage thoracique s'insèrent les muscles qui fournissent la force et l'énergie nécessaires aux mouvements respiratoires et à l'écoulement des gaz dans les voies aériennes. Ainsi, les modifications de la taille et du volume de la cage thoracique sont essentiellement provoquées par des contractions du diaphragme, des muscles intercostaux et des muscles de la paroi abdominale. L'inspiration est due essentiellement à l'action du diaphragme et dans une moindre mesure à celle des muscles intercostaux externes. L'expiration au repos chez un sujet sain est passive, les muscles intercostaux internes et les muscles abdominaux n'intervenant que dans le cas d'une expiration forcée. Seul le diaphragme, principal muscle respiratoire, sera abordé ici. Le diaphragme est une

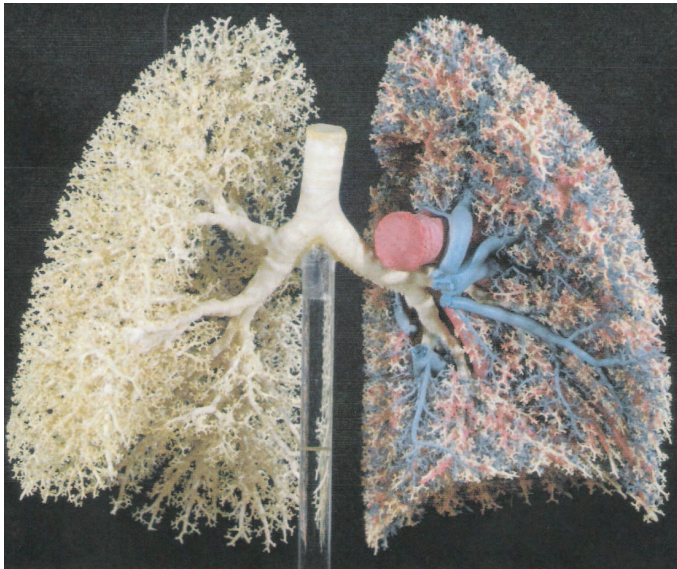


FIG. 1.3 – Diaphragme (voir [22]).

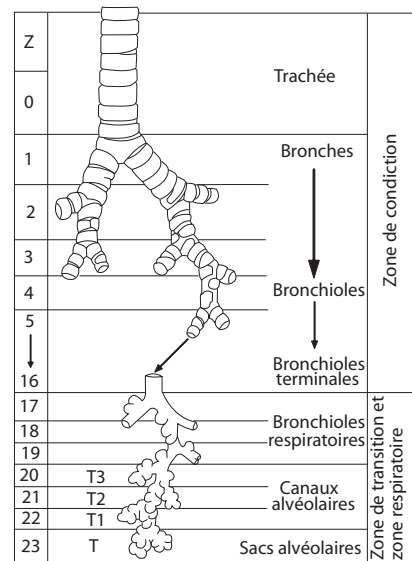
mince et large cloison musculaire séparant la cage thoracique et les poumons de la cavité abdominale et s'insérant de la septième à la douzième côte. La contraction et l'expansion de celui-ci permettent la ventilation. Lors de l'inspiration, il se contracte, s'aplatit et permet ainsi l'augmentation du volume de la cage thoracique. A cette augmentation répond une expansion pulmonaire permettant l'arrivée de l'air. Il se relâche et reprend sa position normale lors de l'expiration, l'élasticité des poumons permettant une sortie d'air.

1.1.2 Structure de l'arbre bronchique

Le rôle de l'arbre bronchique est la conduction de l'air de l'extérieur vers la zone d'échange avec le sang lors de l'inspiration et inversement lors de l'expiration. Comme le montre la figure 1.4, la géométrie du poumon est arborescente et dichotomique. Le poumon humain est ainsi un arbre dyadique à 23 générations, constitué de bronches et bronchioles, allant de la trachée de diamètre de l'ordre de 2 cm jusqu'aux 2^{23} bronchioles terminales de diamètre de l'ordre du demi-millimètre. Ces voies aériennes peuvent être divisées en deux régions de fonctionnement distinctes (voir les figures 1.4(b) et 1.5) : les



(a) Moulage d'un poumon humain effectué par Weibel (voir [20]).



(b) Ramification des voies aériennes (voir [10]).

FIG. 1.4 – Structure arborescente et dichotomique de l'arbre bronchique

dix-sept premières générations ont pour seul rôle la conduction de l'air vers les dernières générations que constituent les acini dans lesquelles deux phénomènes sont couplés : la diffusion de l'air et les échanges gazeux entre l'air et le sang.

Conduits supérieurs : conducteurs de l'air. Ils sont constitués par les cavités nasale et buccale, pharynx, larynx, trachée et bronches primaires de diamètres importants présentant des cartilages et des fibres musculaires (muscles lisses). Ils assurent la conduction des gaz qui se fait par convection comme l'écoulement d'un fluide dans un tuyau. Les toutes premières générations présentent une certaine dissymétrie due à l'anatomie globale : en effet, elles doivent contourner le médiastin. Ainsi, le poumon est divisé de façon asymétrique en trois lobes droits et deux lobes gauches. Pour autant, assez rapidement, ces branchements dichotomiques deviennent quasiment homothétiques d'une génération à l'autre avec un facteur presque constant entre les générations. Comme l'indique la figure 1.6, les bronches de la génération $n + 1$ sont 0.85 fois plus petites que celles de la génération n . Cette régularité ainsi que le fait que 0.85 soit supérieur et proche de $2^{-1/3} \simeq 0.79$ joueront un rôle important dans ce qui suit (voir les pages 25 et 93).

Conduits inférieurs : échanges gazeux. A partir de la dix-septième génération se déroule l'hématose, c'est-à-dire les échanges gazeux entre le milieu alvéolaire et le sang. Ces conduits inférieurs correspondent donc à la zone respiratoire des poumons et ne possèdent plus, eux, ni cartilage ni muscle lisse. Le transfert des gaz s'y fait alors par diffusion de façon comparable à la dilution d'un colorant dans l'eau. Ces conduits terminaux sont

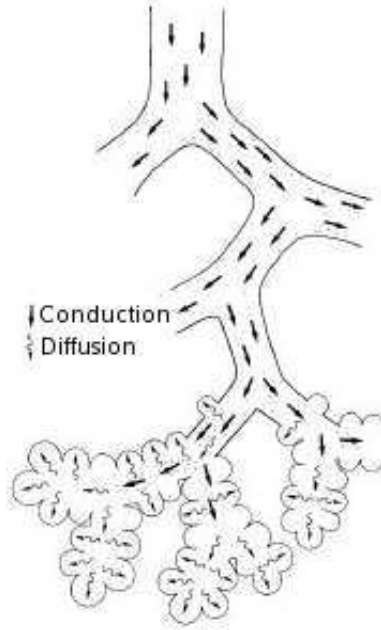


FIG. 1.5 – Conduction et diffusion dans les voies aériennes du poumon (voir [20]).

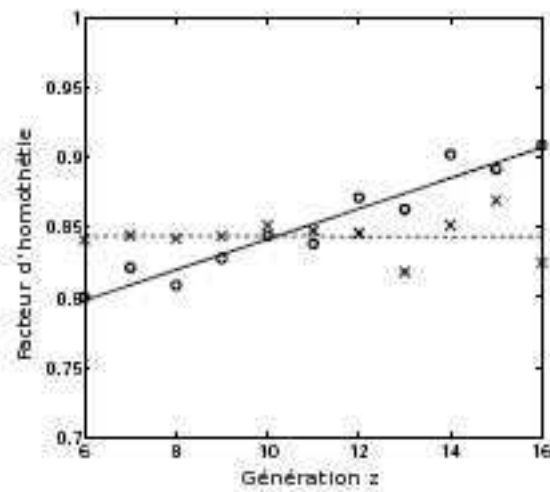
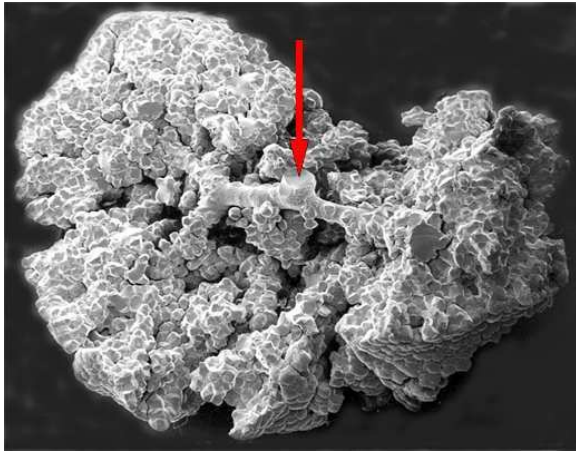
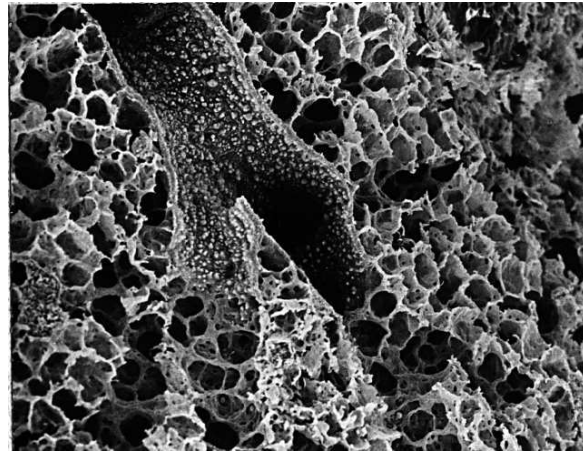


FIG. 1.6 – Facteurs de réduction des longueurs et des diamètres dans les bronches du poumon humain. Ces mesures ont été réalisées par E.R. Weibel, voir [23]. Les cercles et les croix sont respectivement les rapports des diamètres et des longueurs.

regroupés en acini (environ 30 000), sous-arbres dichotomiques à six générations (de la dix-huitième à la dernière génération). Dans chaque acinus, les bronchioles respiratoires donnent naissance aux canaux alvéolaires et se terminent par les sacs alvéolaires (voir la figure 1.7). La surface respiratoire qu'ils représentent est impressionnante : environ 300 millions d'alvéoles sont ainsi étendues sur une surface de plus de 200 m^2 d'épaisseur très fine (250 à $500\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre). Cette structure est d'autant plus adaptée à ces échanges gazeux que toutes ces alvéoles sont séparées des capillaires sanguins par une paroi très mince, facilitant ainsi l'hématose.



(a) Acinus pulmonaire (voir [24]).

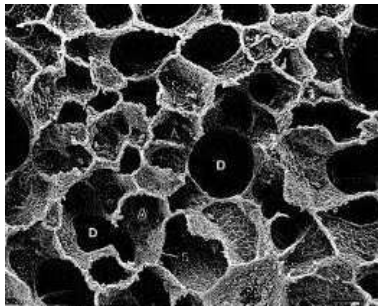


(b) Coupe d'un acinus pulmonaire : les bronchioles terminales aboutissent sur les alvéoles (voir [25]).

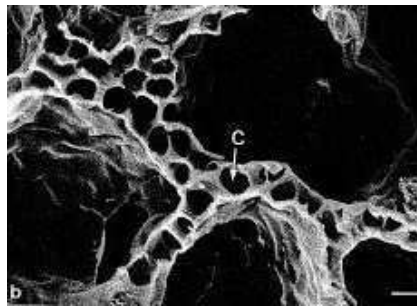
FIG. 1.7 – Acinus pulmonaire.

1.1.3 Le parenchyme pulmonaire

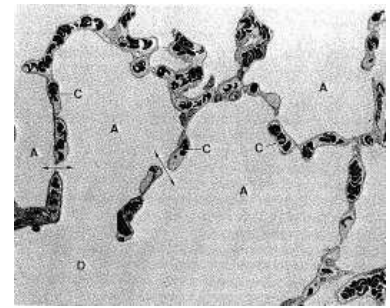
Le parenchyme pulmonaire, lieu des échanges gazeux, est composé de l'ensemble des alvéoles ainsi que d'un réseau dense de capillaires sanguins permettant l'hématose. Afin d'optimiser ces échanges de gaz, la paroi alvéolo-capillaire est très fine de l'ordre de $0.2\text{ }\mu\text{m}$ (voir la figure 1.8). La barrière entre l'air et le sang est ainsi très mince et la surface d'échange est à la fois très étendue et peu épaisse, assurant une efficacité des échanges. La membrane alvéolo-capillaire doit toutefois être mécaniquement stable, en particulier être suffisamment extensible pour résister aux variations de volume lors de l'inspiration et de l'expiration. Elle est composée essentiellement de quatre éléments : l'épithélium alvéolaire, l'endothélium des capillaires, de fibres élastiques et de collagène et enfin d'un film tapissant l'épithélium alvéolaire nommé le surfactant. La présence de ces fibres et du surfactant confère au poumon ses propriétés élastiques (voir la figure 1.9), le surfactant permettant aussi de maintenir la béance des alvéoles en réduisant la tension superficielle.



(a) Parenchyme pulmonaire humain [24]. (D) représente des sacs alvéolaires et (A) des alvéoles.

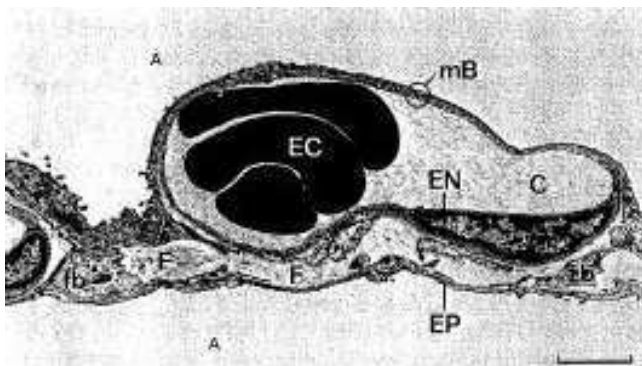


(b) Zoom. (C) représente un capillaire sanguin [24].

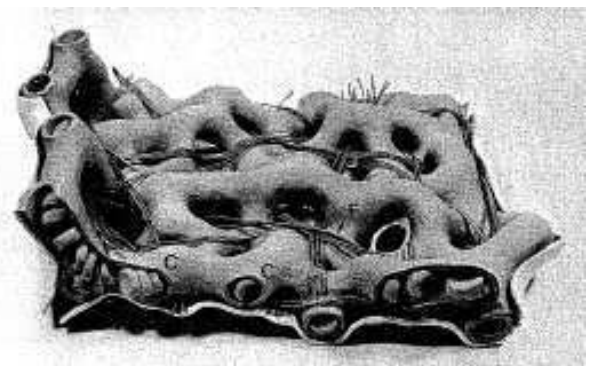


(c) Parenchyme pulmonaire [24].

FIG. 1.8 – Parenchyme pulmonaire.



(a) Membrane alvéolo-capillaire (voir [24]). (A) représente des alvéoles, (C) un capillaire sanguin, (F et fb) des fibres, (EC) plusieurs globules rouges, (EP) l'épithélium et (EN) l'endothélium.



(b) Parenchyme pulmonaire (voir [24]). On remarque la présence de fibres élastiques.

FIG. 1.9 – Parenchyme pulmonaire.

1.2 Mécanisme de la ventilation

La ventilation pulmonaire (inspiration et expiration) est un phénomène de nature purement mécanique qui correspond à une contraction rythmique des poumons dont la fréquence est contrôlée par un centre nerveux spécialisé du cerveau dont l'activité est réglée entre autres par la saturation sanguine en oxygène. Le renouvellement de l'air alvéolaire se fait grâce à l'inspiration et à l'expiration. En effet, en augmentant son volume lors de l'inspiration, une dépression se crée entre les acini et l'air atmosphérique ambiant. Ainsi, un flux d'air est créé depuis l'extérieur vers les alvéoles, alimentant ces dernières en air frais. Ensuite, lors de l'expiration, les poumons se rétractent grâce à leur élasticité naturelle. Il se crée alors une surpression entre les alvéoles et l'extérieur, d'où une évacuation de l'air. Tout au long de ce cycle, le sang et le gaz alvéolaire s'échangent de l'oxygène et du dioxyde de carbone. La respiration permet donc de réguler la concentration de ces deux molécules dans le sang.

Expliquons plus en détail la mécanique ventilatoire. L'inspiration est induite par la contraction du diaphragme provoquant ainsi une augmentation de volume de la cage thoracique. Pour que ces variations s'accompagnent d'une expansion des poumons, il faut que s'établisse une liaison mécanique entre les parois thoraciques et les poumons : c'est le rôle des plèvres et du vide pleural. Lors de l'expansion de la cage thoracique, la plèvre pariétale, adhérente aux parois de la cage thoracique suit celle-ci. L'espace interpleural étant hermétique, la plèvre viscérale tend à suivre la plèvre pariétale qui, collée au parenchyme, répercute le mouvement aux alvéoles. Cette augmentation de volume entraîne une diminution de la pression alvéolaire, un gradient de pression se crée alors avec l'extérieur et il s'ensuit un appel d'air vers les alvéoles (voir la figure 1.10) jusqu'à ce qu'un équilibre entre les deux pressions s'établisse. L'inspiration est donc un mouvement actif faisant intervenir une contraction musculaire. A l'inverse, l'expiration, en régime de ventilation normal, est un mouvement passif consistant en un retour des organes à leur position d'équilibre en raison de leur élasticité naturelle. En relâchant les muscles utilisés à l'inspiration, les poumons, par élasticité, se rétractent, la pression alvéolaire augmente et devient alors supérieure à la pression atmosphérique. Il s'ensuit une sortie de l'air vers l'extérieur.

La ventilation est donc un phénomène rythmique, purement mécanique, avec une phase active à l'inspiration et passive à l'expiration. Elle est aussi asymétrique au cours du temps avec une expiration plus longue que l'inspiration (3 secondes pour l'expiration et 2 secondes pour l'inspiration en moyenne). Elle fait intervenir les propriétés élastiques du poumon.

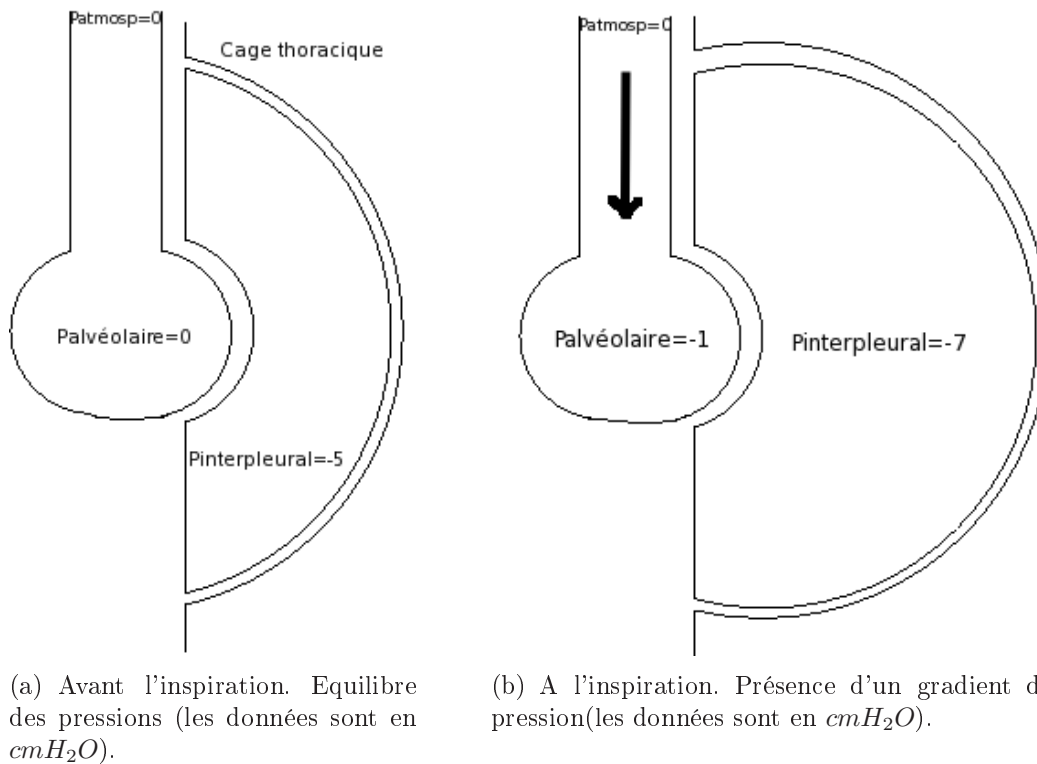


FIG. 1.10 – Mécanisme de la ventilation.

1.3 Echanges gazeux

Cette thèse ne traitant pas des échanges gazeux à proprement parler, nous ne rentrerons pas ici dans les détails et nous n'aborderons que des principes généraux. La ventilation pulmonaire est indispensable à la vie. En effet, les cellules vivantes tirent l'énergie dont elles ont besoin de la dégradation oxydative de substrats organiques : un apport d'oxygène leur est donc nécessaire. Puis, lorsque ces molécules sont totalement oxydées par l'oxygène, elles libèrent des molécules simples : eau et gaz carbonique. Ainsi, la respiration cellulaire, indispensable à la production d'énergie, nécessite un apport d'oxygène et produit du gaz carbonique. Des échanges gazeux diffusifs se produisent alors entre les cellules et les capillaires sanguins via le liquide interstitiel. Le sang assume alors la charge de transporter ces gaz entre les tissus cellulaires et les poumons. Dans les poumons, des échanges gazeux se produisent entre le sang et l'air alvéolaire dont la ventilation pulmonaire permet le renouvellement : le sang cède du CO_2 et s'enrichit en O_2 (voir la figure 1.11).

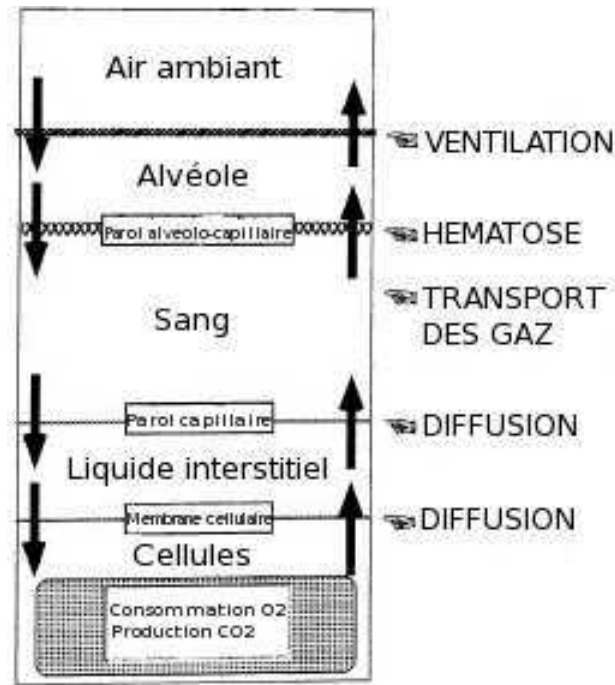


FIG. 1.11 – L'organisme, système d'échanges gazeux [21].

1.4 Conclusion

La fonction vitale de la ventilation ainsi que la place centrale du poumon humain dans le fonctionnement de l'être humain amènent à essayer de mieux appréhender cet organe. Cette compréhension passe par sa modélisation qui nécessite elle-même une bonne connaissance de sa géométrie et de sa mécanique. Il est globalement constitué d'un arbre bronchique dyadique à 23 générations possédant une certaine régularité : très rapidement, les branches deviennent homothétiques d'une génération à une autre avec un facteur d'homothétie constant entre générations. Les extrémités de cet arbre sont plongées dans le parenchyme. Ainsi, le parenchyme se comporte comme un milieu visco-élastique troué par 300 millions d'alvéoles toutes reliées entre elles par l'intermédiaire de l'arbre bronchique. Lors de l'inspiration, il est soumis à une force musculaire générant une augmentation du volume pulmonaire tandis qu'à l'expiration, il retourne à sa position d'équilibre de par sa nature élastique. Cette thèse, afin de modéliser dans le but d'étudier le poumon humain, s'appuiera principalement sur cette description géométrique et mécanique du poumon humain.

Nous tenons ici à préciser que ce que nous appelons alvéoles tout au long de ce travail correspond en réalité plutôt à des acini. La complexité de cet organe impose lors de sa modélisation certaines hypothèses simplificatrices. Ainsi nous avons fait le choix ici de considérer que notre arbre bronchique est bien dyadique jusqu'à la 23-ième génération et se termine par des alvéoles. Ceci ne correspond pas à la réalité physique car cela ne prend pas en compte la partie inférieure de l'arbre, partie commençant à la génération 17 et

dans laquelle des échanges gazeux ont lieu. Il s'agit d'un choix de modélisation que nous avons fait dans cette thèse.

De même, les différents modèles du parenchyme présentés dans cette thèse ne prennent pas en compte la viscosité de ce milieu. On a en effet cherché à étudier les phénomènes de dissipation associés au seul problème de l'élasticité du parenchyme.

Deuxième partie

Modélisation mathématique des voies aériennes par un arbre résistif

Chapitre 2

Modèle des voies aériennes

Description et premières propriétés

Sommaire

2.1	Un arbre dyadique résistif à 23 générations	24
2.1.1	Le modèle	24
2.1.2	Notations	26
2.1.3	Lien entre les pressions et les flux en sortie	26
2.1.4	Calcul de résistance équivalente	31
2.1.5	Cas particuliers d'arbres	32
2.1.6	Crise d'asthme : perturbation des résistances d'un arbre géométrique	35
2.2	Une infinité d'alvéoles plongée dans un espace de dimension une	42
2.2.1	Construction d'un opérateur continu sur l'arbre infini	42
2.2.2	Propriétés de l'opérateur \mathcal{R}	47
2.2.3	Résistance globale d'un arbre infini	50
2.2.4	Cas particulier d'un arbre géométrique	50
2.2.5	Perturbation des résistances d'arbres réguliers infinis	53
2.2.6	Conclusion et extensions	61

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation des voies aériennes du poumon humain dont nous sommes partis et que nous avons, dans une certaine mesure, généralisée dans cette thèse. Nous explicitons ici les notations et premières propriétés de ce modèle. Elles seront par la suite utilisées tout au long de cette thèse. Ces dernières sont majoritairement des reprises de l'article [11]. Pour autant, l'étude de la perturbation des opérateurs dans les sections 2.1 et 2.2 a été développée durant cette thèse.

2.1 Un arbre dyadique résistif à 23 générations

2.1.1 Le modèle

Comme cela a été vu dans le chapitre 1 lors de la description du poumon humain, ce dernier peut être considéré comme un arbre dyadique à 23 générations. Précisons alors dans cette section, les différents critères et hypothèses qui sont à la base de notre modèle.

Un écoulement de Stokes dans les bronches et bronchioles : On cherche à modéliser l'écoulement d'un fluide dans une structure d'arbre dyadique. L'air sera considéré comme un fluide visqueux newtonien incompressible. La présence ou l'absence d'effets inertiels jouent alors un rôle important dans le choix de la modélisation. Dans le cas du poumon humain, les vitesses varient de façon importante au niveau de l'arbre bronchique : d'après E.R.Weibel dans [20], celles-ci sont quasiment nulles au niveau des acini mais peuvent atteindre quelques mètres par seconde au niveau de la trachée. L'amplitude de ces valeurs varie aussi suivant le régime respiratoire, en régime d'exercice ; qui ne sera pas abordé ici, des effets de turbulence entrent même en jeu. Les effets inertiels s'atténuent au fur et à mesure qu'on avance en profondeur dans l'arbre et deviennent négligeables en régime de repos à partir de la cinquième génération (voir [26]). Pour autant, des expériences et simulations numériques ont montré qu'ils ne pouvaient être négligés dans les premières générations (voir par exemple [27, 8]). Cependant nous supposons tout au long de cette thèse que les effets inertiels sont négligeables partout. Pour obtenir un modèle plus réaliste, il suffit de considérer l'arbre dyadique étudié dans cette thèse comme le modèle de base des 2^5 sous-arbres commençant à la génération 5. Ainsi l'écoulement de l'air dans notre arbre dyadique vérifie les équations de Stokes (voir l'annexe A).

Des conduits rigides : Une autre hypothèse importante pour notre modèle est la rigidité des conduits. En effet, comme cela a été dit dans le chapitre 1, contrairement aux premières générations, la présence de cartilage et de muscle lisse tend à disparaître au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le poumon humain, facilitant ainsi la mobilité des bronches. Pour autant, l'hypothèse de conduits rigides sera faite tout au long de cette thèse.

Des conduits cylindriques à section circulaire : Finalement, toujours d'après le livre [20] de E.R. Weibel, les bronchioles ont une forme cylindrique légèrement conique.

Nous les supposons pour autant à section circulaire, car, en première approximation, leur forme légèrement conique peut être négligée.

Conclusion : un arbre dyadique résistif : Ainsi, sous ces hypothèses, l'écoulement de l'air dans les bronches vérifie les équations de Stokes sur un domaine cylindrique à section circulaire constante. L'écoulement est ainsi gouverné par la loi de Poiseuille (voir les détails dans l'annexe A) qui lie de façon proportionnelle le débit Q dans chaque bronche à la différence de pression $P_0 - P_1$ aux extrémités de celle-ci (voir la figure 2.1). Il existe ainsi $R > 0$ vérifiant

$$P_0 - P_1 = RQ.$$

R , par analogie avec les conducteurs électriques est appelée la résistance de la branche.

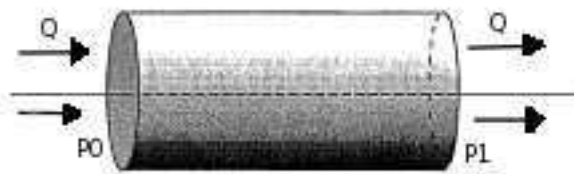


FIG. 2.1 – Loi de Poiseuille.

Celle-ci ne dépend que de la longueur L de la branche et du diamètre a de sa section circulaire. En effet, la résolution 3D des équations de Stokes dans une telle branche donne (voir l'annexe A)

$$R = \frac{8\mu L}{\pi a^4}, \quad (2.1)$$

avec μ la viscosité de l'air. Chaque branche est ainsi caractérisée par une résistance. Les données biologiques de la longueur et du diamètre des bronches étant connues (voir le tableau de l'annexe B), il est possible de calculer toutes les résistances. Les voies aériennes du poumon humain peuvent ainsi être modélisées par un arbre dyadique résistif.

Des branches régulières dans un poumon sain : Comme nous l'avons déjà dit au chapitre 1, dans les premières générations du poumon humain, les branchements dichotomiques sont soumis à une certaine dissymétrie pour s'adapter à l'anatomie globale. En revanche, on s'aperçoit qu'en descendant dans les générations, les branches deviennent plus régulières. Plus précisément, si on considère un sous-arbre commençant à la génération cinq environ, on peut supposer que les branches d'une même génération sont identiques. Ainsi, les résistances d'un tel arbre sont, elles aussi, identiques pour une même génération. On parle alors d'arbre régulier. De plus, les branches de la génération $i + 1$ peuvent être considérées comme des réductions par une homothétie de facteur h des branches de la génération i , h ne dépendant pas de la génération étudiée (voir la figure 1.6 et le tableau de l'annexe B). Pour le poumon humain sain, on peut montrer que (voir [8]) le rapport des tailles des bronches d'une génération à la suivante est proche de $\lambda \simeq 0.85$. Ainsi, en se rappelant l'expression (2.1) de la résistance d'une bronche, les résistances d'un tel arbre

suivent une loi géométrique. L'expression des résistances de la n -ième génération, le coefficient d'homogénéité étant de -3 par rapport à la taille, est ainsi donnée par $r_0\alpha^n$, avec r_0 la résistance de la première bronche et $\alpha = \lambda^{-3} \simeq 1.63$. Un tel arbre est alors appelé arbre géométrique. On rappelle ici que ce modèle d'arbre géométrique n'est en fait valable qu'à partir de la cinquième génération. En effet, en plus d'une certaine dissymétrie, la présence d'effets inertiels non négligeables (voir [27, 8, 26]) dans les premières générations impose une modélisation de l'écoulement du fluide par les équations de Navier-Stokes. La loi de Poiseuille n'est ainsi plus valide. Pour obtenir un modèle plus réaliste, il suffira de considérer notre modèle d'arbre géométrique comme le modèle type des 2^5 sous-arbres du poumon humain.

Perte de régularité pour certaines maladies : Certaines maladies, en particulier l'asthme, génèrent une modification de la taille des bronches, entraînant des perturbations de résistances. Le poumon humain ne peut alors plus être modélisé comme un arbre géométrique. Deux points de vue différents peuvent être adoptés. Le cas général, où aucune hypothèse de régularité sur les résistances n'est supposée, peut être étudié. C'est d'ailleurs ce qui est fait dans cette section et le plus souvent possible dans cette thèse, le poumon humain sain n'étant alors traité que comme un cas particulier. Mais il peut aussi être intéressant de considérer plutôt des arbres réguliers ou géométriques dont on perturbe les résistances. C'est ce qui est fait à la fin des sections 2.1 et 2.2.

2.1.2 Notations

On redonne ici les notations définies dans l'article [11]. On considère un arbre dyadique T_N à $N + 1$ générations allant de la génération 0 (le nez) à la génération N . Cet arbre est défini par deux ensembles : un ensemble de noeuds $V(T_N)$ comprenant la racine o et $(X_{nk})_{0 \leq n \leq N, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$, X_{nk} correspondant au noeud situé à la k -ième place de la n -ième génération. L'arbre étant dyadique, il comprend un ensemble de branches $E(T_N)$ correspondant soit à la génération 0 (o, X_{00}), soit à des branches de type $(X_{nk}, X_{n+1, 2k})$ ou $(X_{nk}, X_{n+1, 2k+1})$ avec $(n, k) \in \{0 \leq n \leq N, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\}$. On note de plus, pour tout $1 \leq n \leq N$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $r_{nk} \geq 0$ la résistance de la k -ième branche de la n -ième génération (voir la figure 2.2) et $r_0 \geq 0$ la résistance de la génération 0.

2.1.3 Lien entre les pressions et les flux en sortie

On cherche ici à établir un lien linéaire (dû au choix de modélisation par la loi de Poiseuille) entre les flux et les pressions en sortie de l'arbre. Par souci de clarté, on suppose ici la pression au niveau de la racine o nulle. Mais, quitte à ajouter une constante (voir la remarque 2.5), cette hypothèse de pression atmosphérique nulle peut être supprimée. Les sorties de notre arbre dyadique à $N + 1$ générations sont indexées par $0, \dots, 2^N - 1$. On note alors

$$\mathbf{p} = (p_i)_{i=0, \dots, 2^N - 1} \text{ et } \mathbf{q} = (q_i)_{i=0, \dots, 2^N - 1}$$

les vecteurs pression et flux respectivement en sortie de l'arbre. Par convention, les flux seront considérés positifs quand du fluide entre dans l'arbre.

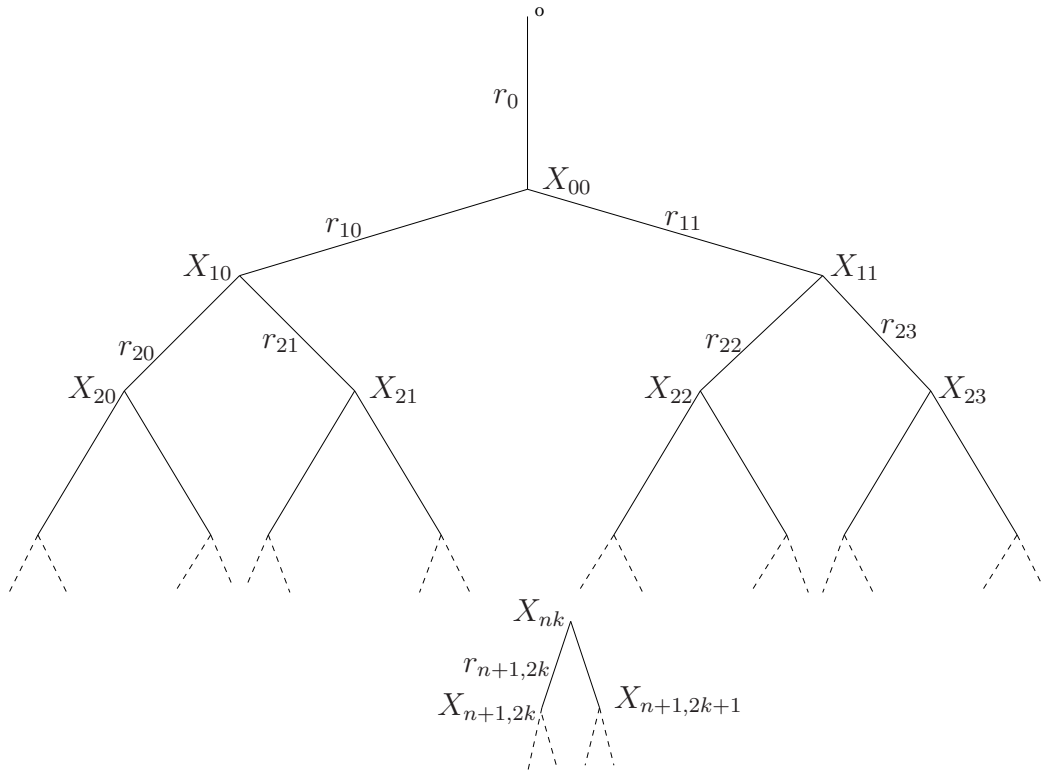


FIG. 2.2 – Arbre résistant dyadique.

Définition 2.1 *Etant donnés deux entiers i et j et leurs expressions binaires*

$$i = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k 2^k, \quad j = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k 2^k \quad \text{avec } \alpha_k, \beta_k \in \{0, 1\} \quad \forall k,$$

on définit σ_{ij} et k_{nj} respectivement comme

$$\sigma_{ij} = \inf\{k \geq 0, \alpha_l = \beta_l, \forall l \geq k\}, \quad k_{nj} = \sum_{s=0}^{n-1} 2^{n-1-s} \beta_{N-1-s}.$$

Remarque 2.2 *On fixe un arbre dyadique à $N + 1$ générations. Pour deux sorties de cet arbre i et j fixées, $(i, j) \in \{0, \dots, 2^N - 1\}^2$, il existe un unique plus court chemin pour relier chacune de ces sorties à la racine o . $N - \sigma_{ij}$ correspond alors aux nombres de branches communes de ces chemins sans compter la première branche. Pour une sortie j fixée et son plus court chemin à la racine o correspondant et pour une génération de l'arbre n fixée, $1 \leq n \leq N$, k_{nj} correspond, dans le chemin, à la branche correspondante de la génération n .*

On peut alors énoncer la proposition suivante qui lie pressions et flux en sortie de notre arbre.

Propriété 2.3 *On considère un arbre dyadique résistif T_N à $N + 1$ générations. On suppose de plus la pression nulle à la racine o . Les flux et pressions en sortie de l'arbre sont alors reliés par*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= A_N \mathbf{q}, \quad \text{avec } A_N = (A_{ij}^N)_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1} \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R}), \\ A_{ij}^N &= r_0 + \sum_{n=1}^{N - \sigma_{ij}} r_n k_{nj}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Démonstration : On reprend ici la même démarche que celle développée dans l'article [11]. La linéarité entre \mathbf{p} et \mathbf{q} est, sous les hypothèses de la loi de Poiseuille, évidente. Ainsi, il suffit de calculer les vecteurs pression en sortie d'arbre associés aux vecteurs flux entrants de la base canonique de \mathbb{R}^{2^N} . On considère donc tout d'abord la distribution suivante de flux en sortie $\mathbf{q} = (1, 0, \dots, 0)$. Cela correspond à la situation où une unité de fluide est injectée dans l'arbre par le noeud X_{N0} et uniquement par ce noeud, tous les autres étant bouchés. Par conservation, une unité de fluide sort de l'arbre au niveau de la racine o . Ainsi, en se souvenant que la pression en entrée est nulle et qu'on a noté r_0 la résistance du nez, on obtient par la loi de Poiseuille une pression égale à r_0 au niveau du noeud X_{00} . Aucun flux ne passant dans le sous-arbre de droite de racine X_{00} , toujours d'après la loi de Poiseuille, les pressions en sortie (correspondant aux noeuds de la dernière génération allant de 2^{N-1} à $2^N - 1$) valent exactement r_0 . Un raisonnement analogue appliqué au noeud X_{10} donne une pression de $r_0 + r_{10}$ et il en est de même pour le sous-arbre de droite de racine X_{10} . En reprenant d'une manière récursive ce raisonnement, on trouve bien que les pressions aux noeuds $X_{20}, X_{30}, \dots, X_{N0}$ et donc sur les sous-arbres de droite de racine ces noeuds, valent respectivement $(r_0 + r_{10} + r_{20}), (r_0 + r_{10} + r_{20} + r_{30}), \dots, (r_0 + r_{10} + r_{20} + \dots + r_{N0})$. Ainsi, la

pression en sortie i est bien A_{i0}^N . Le même raisonnement peut être repris pour le vecteur de base $\mathbf{q} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et donne le résultat voulu (voir la figure 2.3). \square

Remarque 2.4 La matrice A_N peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 r_0 I_0^N + \begin{bmatrix} r_{10} I_1^N & 0 \\ 0 & r_{11} I_1^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{20} I_2^N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{21} I_2^N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} I_2^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{23} I_2^N \end{bmatrix} \\
 + \dots + \\
 \begin{bmatrix} r_{n0} I_n^N & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{n,2^n-1} I_n^N \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} r_{N0} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{N,2^N-1} \end{bmatrix}, \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

avec $I_k^N \in \mathcal{M}_{2^{N-k}}(\mathbb{R})$, $0 \leq k \leq N$; c'est une matrice de rang un dont toutes les composantes sont égales à un (voir l'article [28]). Ainsi A_N a une structure particulière en blocs (voir la figure située en bas de la page 30) qui reflète la structure dyadique de l'arbre et la loi de Poiseuille : chaque élément A_{ij}^N de la matrice correspond à la résistance cumulée des branches communes aux deux chemins allant de la racine o aux sorties i et j . Ainsi, la matrice A_N se présente sous la forme d'une matrice à blocs à diagonale dominante (voir la figure située en bas de la page 30) qui résulte de la superposition des matrices de la formule (2.3) qui sont diagonales par blocs.

Remarque 2.5 Dans le cas d'une pression atmosphérique p_o non nulle au niveau de la racine o , la relation entre les flux et les pressions en sortie de l'arbre s'écrit encore

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} = A_N \mathbf{q}, \text{ avec } A_N = (A_{ij}^N)_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1} \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R}), \\
 A_{ij}^N = r_0 + \sum_{n=1}^{N-\sigma_{ij}} r_{nk_{nj}},
 \end{aligned}$$

mais avec, cette fois-ci, $\mathbf{p} = (p_i - p_o)_{0 \leq i \leq 2^N - 1}$.

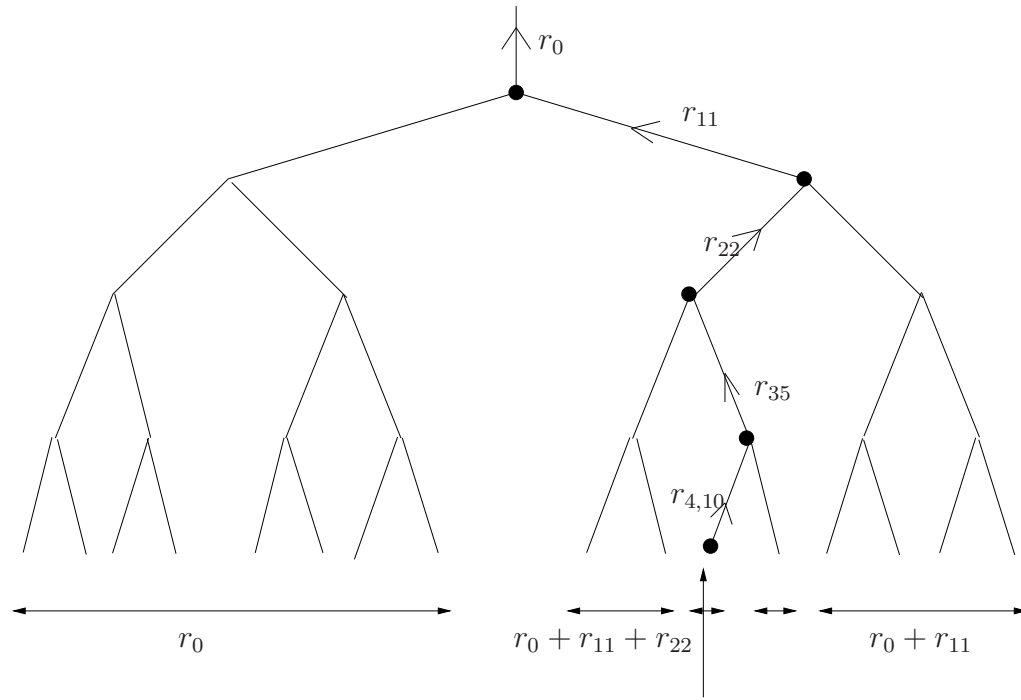
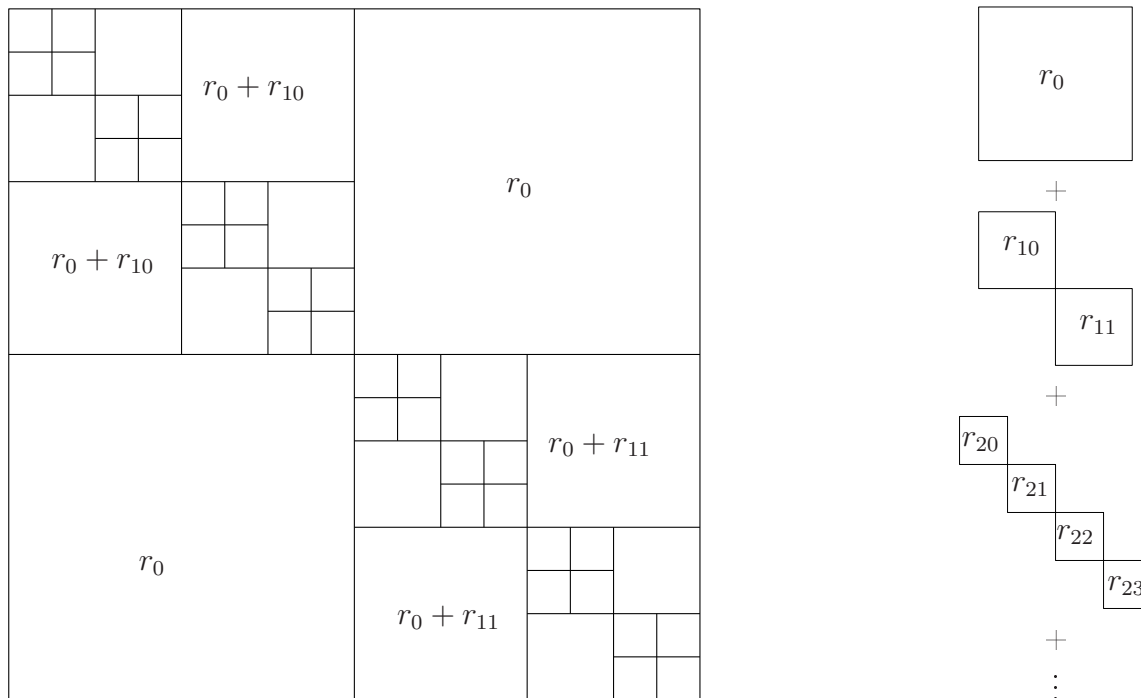


FIG. 2.3 – Lien flux et pressions en sortie. Les pressions aux sorties $X_{4,10}$ et $X_{4,11}$ valent respectivement $r_0 + r_{11} + r_{22} + r_{35} + r_{4,10}$ et $r_0 + r_{11} + r_{22} + r_{35}$.



Matrice en blocs.

Enonçons alors quelques propriétés de la matrice A_N .

Propriété 2.6 *Soit N un entier fixé. La matrice A_N est symétrique. De plus, si pour tout $k \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$, $r_{Nk} > 0$, alors A_N est une matrice définie positive.*

Démonstration : Le caractère symétrique de la matrice A_N est clair en se rappelant l'équation (2.3). En utilisant encore l'équation (2.3), on vérifie son caractère positif en montrant que chaque matrice de la somme est bien une matrice positive. Pour alléger les notations, démontrons-le pour la matrice

$$A_N^1 = \begin{bmatrix} r_{10}I_1^N & 0 \\ 0 & r_{11}I_1^N \end{bmatrix}.$$

Le même raisonnement se généralise à toutes les autres matrices de la somme. Soit alors le vecteur $\mathbf{X} = (x_k)_{0 \leq k \leq 2^N - 1}$ quelconque. Un calcul simple montre que

$${}^t\mathbf{X}A_N^1\mathbf{X} = r_{10} \left(\sum_{k=0}^{2^{N-1}-1} x_k \right)^2 + r_{11} \left(\sum_{k=2^{N-1}}^{2^N-1} x_k \right)^2,$$

ce qui prouve le caractère positif (les résistances étant des réels positifs). Pour conclure, il suffit de remarquer que la dernière matrice de l'équation (2.3) est, elle, définie positive. En effet, on obtient pour \mathbf{X} non nul

$${}^t\mathbf{X}A_N^N\mathbf{X} = \sum_{k=0}^{2^N-1} r_{Nk}x_k^2 > 0,$$

ce qui achève la démonstration \square

Remarque 2.7 *Physiquement, ${}^t\mathbf{X}A_N\mathbf{X}$ correspond au taux d'énergie dissipée.*

2.1.4 Calcul de résistance équivalente

Un arbre dyadique résistif à $N + 1$ générations se comporte en fait comme une branche unique, ayant une résistance appelée résistance équivalente et une pression en sortie appelée pression équivalente, dans laquelle le flux a un débit correspondant au débit global dans l'arbre. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer le débit \mathcal{Q} en entrée qui correspond, par conservation, à la somme des débits à travers les 2^N sections de sorties. On obtient ainsi $\mathcal{Q} = \sum_{i=0}^{2^N-1} q_i$. A_N étant inversible, si on désigne par $B_N = (B_{ij}^N)_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1}$ son inverse, les débits à travers les sections de sortie s'expriment alors pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$ par

$$q_i = \sum_{j=0}^{2^N-1} B_{ij}^N (p_j - p_o).$$

Ainsi, le débit total Q vaut

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i,j=0}^{2^N-1} B_{ij}^N (p_j - p_o) \\ &= \sum_{i,j=0}^{2^N-1} B_{ij}^N p_j - p_o \sum_{i,j=0}^{2^N-1} B_{ij}^N. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser pour la résistance équivalente $R_N = (\sum_{i,j=0}^{2^N-1} B_{ij}^N)^{-1}$ et pour la pression équivalente en sortie $P_N = R_N \sum_{i,j=0}^{2^N-1} B_{ij}^N p_j$. On aboutit alors à la loi de Poiseuille généralisée

$$P_N - p_o = R_N \times (\text{flux global sortant du nez}). \quad (2.4)$$

Ainsi, notre arbre dyadique résistif se comporte bien comme une unique branche résistive et on peut énoncer la propriété suivante.

Propriété 2.8 *Soit un arbre dyadique résistif T_N à $N+1$ générations de matrice associée A_N . Alors la résistance équivalente de cet arbre est donnée par*

$$R_N = \left(\sum_{i,j=0}^{2^N-1} B_{ij}^N \right)^{-1}$$

avec $A_N^{-1} = (B_{ij}^N)_{0 \leq i,j \leq 2^N-1}$.

Remarque 2.9 *En pratique, on évite de calculer l'inverse de la matrice A_N . On traite plutôt ce problème par analogie électrique, l'analogie électrique de la loi de Poiseuille étant la loi d'Ohm. Ainsi, la différence de pression correspond à la différence de tension, le débit à l'intensité et la résistance de l'écoulement à la résistance électrique. Le calcul de la résistance équivalente se fait alors comme en électricité en remarquant que notre arbre dyadique résistif peut être considéré comme un ensemble de résistances en parallèle et en série : les deux branches filles bifurquant de leur branche mère sont branchées en parallèle entre elles puis en série à cette branche mère (voir la figure 2.4). Ainsi, en commençant à la dernière génération de l'arbre fini et en remontant de façon récursive jusqu'au nez, on peut calculer la résistance équivalente.*

Remarque 2.10 *La résistance équivalente d'un arbre résistif T_N à $N+1$ générations peut aussi se définir comme suit. Si on impose une pression nulle à la racine o de l'arbre et une pression uniforme valant un en sortie, la résistance équivalente est alors l'inverse du flux global sortant par la racine o .*

2.1.5 Cas particuliers d'arbres

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, le poumon humain sain peut être modélisé comme un arbre géométrique. Il est ainsi utile d'étudier les deux cas particuliers suivants où les expressions de la matrice A_N et de la résistance équivalente prennent alors des formes plus simples.

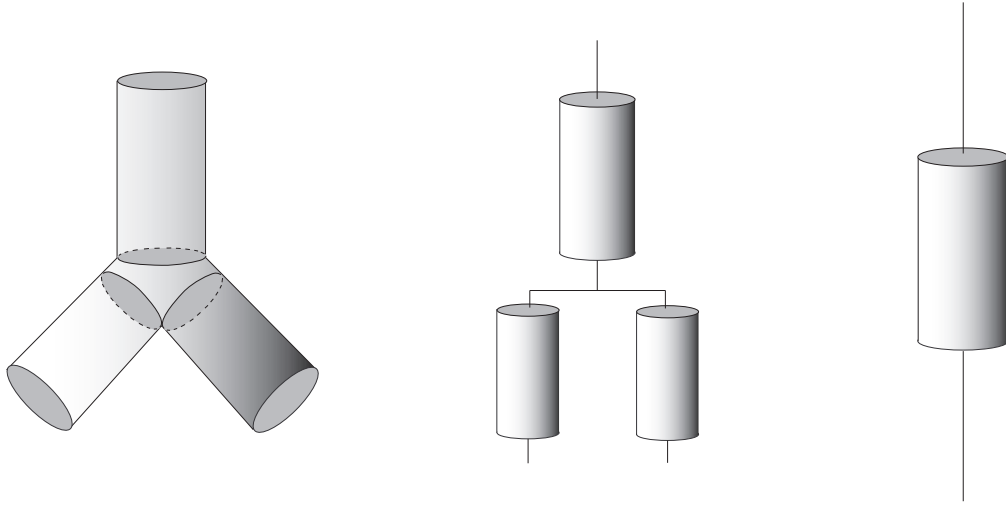


FIG. 2.4 – Résistance équivalente.

Cas particulier de l'arbre régulier

On considère ici un arbre dyadique régulier à $N + 1$ générations ; ses résistances, étant alors constantes par génération, seront notées r_n , $0 \leq n \leq N$. L'expression de la matrice A_N se réduit alors à

$$\mathbf{p} = A_N \mathbf{q}, \quad A_N = (A_{ij}^N)_{0 \leq i, j \leq 2^{N-1}} \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R}), \quad A_{ij}^N = \sum_{n=0}^{N-\sigma_{ij}} r_n. \quad (2.5)$$

La matrice A_N est alors, à une constante multiplicative près, une matrice doublement stochastique : toutes ses lignes et ses colonnes ont la même somme. Une expression simple de la résistance équivalente est possible dans le cas d'un arbre régulier, elle est donnée par la propriété suivante.

Propriété 2.11 *On considère un arbre dyadique régulier T_N à $N + 1$ générations. En notant r_n sa résistance à la génération n , la résistance équivalente de cet arbre régulier vaut alors*

$$R_N = \sum_{n=0}^N \frac{r_n}{2^n}. \quad (2.6)$$

Démonstration : Cette égalité se démontre très facilement par récurrence sur N en utilisant l'analogie avec l'électricité. L'arbre est alors considéré comme un réseau de résistances en série et en parallèle. En considérant la dernière génération, l'arbre régulier possède alors 2^{N-1} sous-arbres identiques représentés par la figure 2.5. Un calcul simple de résistances en série et en parallèle donne l'équivalence entre ce sous-arbre type et une unique branche de résistance

$$r_{N-1} + \frac{r_N}{2}.$$

On obtient ainsi un arbre régulier équivalent à N générations, la résistance de la dernière génération valant alors $r_{N-1} + r_N/2$. En recommençant le même raisonnement, on obtient

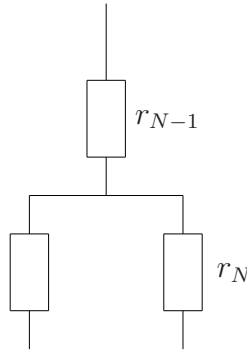


FIG. 2.5 - .

un arbre régulier équivalent à $N - 1$ générations, la résistance de la dernière génération valant alors $r_{N-2} + r_{N-1}/2 + r_N/4$. En itérant jusqu'au nez, on obtient le résultat voulu. \square

Dans le cas d'un arbre régulier, les propriétés spectrales de la matrice A_N sont, elles aussi, remarquables.

Propriété 2.12 On note Ψ_0 le vecteur de taille 2^N formé de 1. Pour un couple (n, k) fixé, $0 \leq n \leq N - 1$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, Ψ_{nk} est défini par

$$\Psi_{nk} = {}^t(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0),$$

le bloc non nul correspondant au $(k+1)$ -ième bloc de taille 2^{N-n} . La famille de vecteurs $(\Psi_0, (\Psi_{nk})_{0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq 2^n-1})$ est une famille de vecteurs propres de A_N . Les valeurs propres associées sont notées $(\lambda_0^N, (\lambda_{nk}^N)_{0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq 2^n-1})$ et sont égales à

$$\lambda_0^N = 2^N \sum_{p=0}^N \frac{r_p}{2^p} \text{ et } \lambda_{nk}^N = 2^N \sum_{p=n+1}^N \frac{r_p}{2^p}, \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}.$$

Démonstration : Cette propriété se vérifie très facilement en faisant les calculs. Elle est une conséquence directe de la structure en blocs de A_N , avec des blocs tous égaux pour un arbre régulier. \square

Remarque 2.13 On peut remarquer que

$$\lambda_{nk}^N = \lambda_{nk'}^N \quad \forall k, k'.$$

Cette égalité confirme l'intuition que, dans le cas d'un arbre régulier, les valeurs propres ne dépendent que de la génération n .

Remarque 2.14 A un coefficient multiplicatif 2^N près, on peut remarquer que la première valeur propre donne la résistance équivalente de l'arbre régulier associé.

Remarque 2.15 Les vecteurs propres de A_N sont l'équivalent discret de la base de Haar usuelle sur $L^2([0, 1])$ (voir la définition 2.34).

Cas particulier de l'arbre géométrique

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, le poumon humain sain peut être considéré comme un arbre géométrique. Ses résistances vérifient alors la loi géométrique suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq N, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_n = r_0 \alpha^n,$$

où r_0 est la résistance de la première génération et α un paramètre positif lié à la géométrie de l'arbre. Pour un poumon humain sain, $\alpha \simeq 1.63$ (voir les pages 12 et 25 ainsi que la figure 1.6), mais on se placera ici en toute généralité. Les deux propriétés 2.11 et 2.12 énoncées ci-dessus deviennent dans ce cas particulier :

Corollaire 2.16 *On considère un arbre dyadique géométrique à $N + 1$ générations avec $r_n = r_0 \alpha^n$. La résistance équivalente d'un tel arbre est alors donnée par la formule*

$$R_N = \frac{2r_0}{2 - \alpha} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{N+1} \right).$$

Les valeurs propres sont alors égales à

$$\lambda_0^N = \frac{2^{N+1} r_0}{2 - \alpha} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{N+1} \right)$$

et, pour tout $0 \leq n \leq N - 1$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,

$$\lambda_{nk}^N = \frac{2^{N+1} r_0}{2 - \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{N-n} \right).$$

Démonstration : C'est une simple application des propriétés 2.11 et 2.12 dans le cas particulier où $r_n = r_0 \alpha^n$. \square

2.1.6 Crise d'asthme : perturbation des résistances d'un arbre géométrique

Comme nous l'avons déjà dit au début de cette section, certaines maladies, comme l'asthme, entraînent une modification de la taille des bronches d'un poumon sain, donc une perturbation des résistances de l'arbre géométrique correspondant. Lors d'une crise d'asthme, les médecins n'ont accès qu'à une seule donnée : la résistance équivalente du poumon malade. En effet, pour cela ils imposent une pression en entrée nulle (la pression en sortie étant supposée uniforme valant 1) et ils mesurent le flux global correspondant sortant du nez. L'inverse de ce flux donne alors la résistance équivalente (voir la remarque 2.10). Nous donnerons ici l'expression au premier ordre de la résistance équivalente d'un arbre géométrique perturbé. Cette unique donnée peut, sous certaines hypothèses de modélisation d'une crise d'asthme, donner une idée de l'intensité de cette crise.

Expression de la résistance équivalente d'un arbre perturbé

Nouvelle expression de la résistance équivalente Commençons par donner une expression de la résistance équivalente faisant intervenir A_N d'un arbre résistif T_N à $N + 1$ générations.

Propriété 2.17 Soient T_N un arbre résistif à $N + 1$ générations et $A_N \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R})$ la matrice correspondante définie par (2.2). Le caractère défini positif de cette matrice (voir la propriété 2.6) assure son inversibilité. La résistance équivalente de cet arbre fini s'exprime alors par

$$R_N = [{}^t\Psi_0 A_N^{-1} \Psi_0]^{-1}, \quad (2.7)$$

où Ψ_0 est le vecteur de taille 2^N formé de 1 défini dans la propriété 2.12.

Démonstration : On impose une pression à l'entrée nulle et une pression en sortie uniforme de valeur un. Le vecteur flux \mathbf{q} en sortie d'arbre vaut, en combinant la propriété 2.3 et la définition du vecteur Ψ_0 ,

$$\mathbf{q} = A_N^{-1} \Psi_0.$$

Le flux global sortant du nez est alors donné par

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=0}^{2^N-1} q_i = {}^t\Psi_0 \mathbf{q}.$$

De plus, d'après la remarque 2.10, on a $R_N = \mathcal{Q}^{-1}$. Ainsi

$$R_N = [{}^t\Psi_0 A_N^{-1} \Psi_0]^{-1},$$

ce qui achève la démonstration. \square

Notations On considère ici un arbre géométrique T_N à $N + 1$ générations dont on va perturber les résistances. On définit une perturbation par la donnée

- . d'un ensemble $\mathcal{S} \subset \{(n, k) \in \mathbb{N}^2, n \in \{1, \dots, N\}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\}$ indiquant les positions des perturbations. A tout couple $(n, k) \in \mathcal{S}$ correspond une perturbation de la résistance de la k -ième branche de la n -ième génération.
- . d'un ensemble $\{dr_{nk} \in \mathbb{R}, (n, k) \in \mathcal{S}\}$ correspondant aux valeurs des perturbations.

On définit alors la matrice associée à la perturbation. Pour cela, on commence par exprimer la matrice $M_{nk} \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R})$ associée à la perturbation unitaire à la k -ième branche de la n -ième génération.

Propriété 2.18 La matrice correspondant à une modification unitaire à la k -ième branche de la n -ième génération est une matrice de rang 1 constituée de zéros et d'un bloc carré

Propriété 2.20 Soit T_N un arbre régulier avec R_N sa résistance équivalente associée. On perturbe la résistance de la k -ième branche de la n -ième génération de cet arbre d'une valeur de dr_{nk} . En notant \tilde{R}_N la résistance équivalente de l'arbre ainsi perturbé, on obtient

$$\tilde{R}_N = R_N + 2^{-2n} dr_{nk} + o(|dr_{nk}|).$$

Démonstration : On commence par calculer le flux global associé à l'arbre perturbé, à savoir \tilde{R}_N^{-1} . En combinant la propriété 2.17 et le théorème 2.19, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{R}_N^{-1} &= {}^t\Psi_0 \tilde{A}_N^{-1} \Psi_0 \\ &= {}^t\Psi_0 [A_N^{-1} - A_N^{-1} (dr_{nk} M_{nk}) A_N^{-1} + o(\|dr_{nk} M_{nk}\|_\infty)] \Psi_0 \\ &= {}^t\Psi_0 A_N^{-1} \Psi_0 - dr_{nk} {}^t\Psi_0 A_N^{-1} M_{nk} A_N^{-1} \Psi_0 + o(|dr_{nk}|). \end{aligned} \quad (2.8)$$

On a utilisé ici la définition de la norme matricielle infinie pour obtenir $\|dr_{nk} M_{nk}\|_\infty = |dr_{nk}|$. En se rappelant les propriétés spectrales de la matrice associée à un arbre géométrique (voir la propriété 2.12 et la remarque 2.14), on obtient

$$A_N^{-1} \Psi_0 = \frac{1}{\lambda_0^N} \Psi_0 = 2^{-N} R_N^{-1} \Psi_0.$$

Ainsi, l'équation (2.8) devient, en remarquant que ${}^t\Psi_0 \Psi_0 = 2^N$,

$$\tilde{R}_N^{-1} = R_N^{-1} - dr_{nk} 2^{-N} R_N^{-1} {}^t\Psi_0 A_N^{-1} M_{nk} \Psi_0 + o(|dr_{nk}|). \quad (2.9)$$

Il reste à calculer le terme issu de la modification. Comme M_{nk} est une matrice de rang 1, elle se met sous la forme $\mathbf{u}^t \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est un vecteur colonne de taille 2^N dont l'expression est

$$\mathbf{u} = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

où le bloc de 1 est de taille 2^{N-n} . Ainsi, le terme issu de la perturbation se met sous la forme

$$\begin{aligned} {}^t\Psi_0 A_N^{-1} M_{nk} \Psi_0 &= {}^t\Psi_0 A_N^{-1} \mathbf{u}^t \mathbf{u} \Psi_0 \\ &= 2^{N-n} {}^t\Psi_0 A_N^{-1} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

En remarquant que ${}^t\Psi_0 A_N^{-1} = 2^{-N} R_N^{-1} {}^t\Psi_0$, l'équation devient

$$\begin{aligned} {}^t\Psi_0 A_N^{-1} M_{nk} \Psi_0 &= 2^{-n} R_N^{-1} {}^t\Psi_0 \mathbf{u} \\ &= 2^{N-2n} R_N^{-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En combinant alors les équations (2.9) et (2.10), on obtient

$$\tilde{R}_N^{-1} = R_N^{-1} - dr_{nk} (2^{-n} R_N^{-1})^2 + o(|dr_{nk}|).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_N &= R_N [1 - dr_{nk} 2^{-2n} R_N^{-1} + o(|dr_{nk}|)]^{-1} \\ &= R_N + dr_{nk} 2^{-2n} + o(|dr_{nk}|), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Cette formule se généralise alors facilement au cas où plusieurs résistances de l'arbre géométrique sont perturbées. On obtient alors la propriété suivante.

Propriété 2.21 Soit T_N un arbre régulier avec R_N sa résistance équivalente associée. On perturbe l'ensemble des résistances r_{nk} avec $(n, k) \in \mathcal{S}$ d'une valeur dr_{nk} . En notant \tilde{R}_N la résistance équivalente de l'arbre ainsi perturbé, on obtient

$$\tilde{R}_N = R_N + \sum_{(n,k) \in \mathcal{S}} 2^{-2n} dr_{nk} + o(|dr|).$$

Démonstration : En reprenant le même raisonnement, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{R}_N^{-1} &= R_N^{-1} - 2^{-N} R_N^{-1t} \Psi_0 A_N^{-1} M \Psi_0 + o(\|M\|_\infty) \\ &= R_N^{-1} - 2^{-N} R_N^{-1} \sum_{(n,k) \in \mathcal{S}} dr_{nk} {}^t \Psi_0 A_N^{-1} M_{nk} \Psi_0 + o(\|M\|_\infty) \\ &= R_N^{-1} - (R_N^{-1})^2 \sum_{(n,k) \in \mathcal{S}} 2^{-2n} dr_{nk} + o(\|M\|_\infty). \end{aligned}$$

En remarquant que $\|M\|_\infty \simeq |dr|$ et en appliquant le même raisonnement, on obtient

$$\tilde{R}_N = R_N + \sum_{(n,k) \in \mathcal{S}} 2^{-2n} dr_{nk} + o(|dr|),$$

ce qui achève la démonstration. \square

Applications à la modélisation On peut donner deux conséquences directes sur l'étude d'une crise d'asthme. La première permet, sous certaines hypothèses, de connaître l'intensité d'une crise bien que les médecins n'aient accès qu'à la seule mesure de la résistance équivalente (R_N et \tilde{R}_N sont ainsi connues). On peut, par exemple, supposer qu'une crise d'asthme correspond à une perturbation identique de valeur dr des résistances des générations n et $n + 1$ du poumon humain gauche. L'intensité dr de cette crise est alors donnée par la formule suivante

$$dr \simeq \frac{4}{3} \left(\tilde{R}_N - R_N \right) 2^n.$$

Il s'agit juste d'appliquer la formule de la propriété 2.21 à ce cas particulier. Bien entendu, d'autres modélisations d'une crise d'asthme sont possibles suivant les patients. Il est aussi intéressant d'étudier la sensibilité de chaque branche de l'arbre résistif. On perturbe d'un certain pourcentage la résistance d'une branche d'un arbre régulier et on regarde quelle conséquence sur la résistance équivalente de ce même arbre cela implique. Il paraît intuitif de penser que cette sensibilité diminue au fur et à mesure qu'on s'enfonce dans les générations de l'arbre. Un calcul rapide permet de le vérifier. Il s'agit de calculer $(dR_N/R_N)/(dr_{nk}/r_{nk})$ avec dR_N défini par $\tilde{R}_N = R_N + dR_N$. En reprenant le résultat de

la proposition 2.20, on obtient, dans le cas d'un arbre géométrique de loi $r_n = r_0\alpha^n$,

$$\begin{aligned} R_N + dR_N &\simeq R_N + 2^{-2n}dr_{nk} \\ \frac{dR_N}{R_N} &\simeq \frac{2^{-2n}dr_{nk}}{R_N} \\ \frac{\frac{dR_N}{R_N}}{\frac{dr_{nk}}{r_{nk}}} &\simeq \frac{r_0}{R_N} \left(\frac{\alpha}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Ce résultat confirme bien l'intuition que les perturbations relatives de diamètre ou de résistance sont d'autant plus graves qu'elles touchent le haut de l'arbre résistif ($\alpha \simeq 1.63 < 4$ pour le poumon humain).

Etude spectrale de la matrice A_N perturbée

L'asthme correspond à une modification des résistances, entraînant une perturbation de la matrice A_N . L'étude, seule, de la perturbation de la résistance équivalente est insuffisante pour mieux comprendre cette maladie. Nous allons ici obtenir le développement limité au premier ordre des valeurs propres de la matrice \tilde{A}_N modifiée par la perturbation d'une unique résistance d'un arbre régulier. On commence par rappeler le résultat général permettant d'obtenir une expression au premier ordre des valeurs propres d'une matrice symétrique perturbée. On peut trouver ce résultat dans [30].

Théorème 2.22 *Soit A une matrice réelle symétrique, soient λ une valeur propre de A , E l'espace propre associé et l la dimension de E . Soit D un disque fermé de centre λ du plan complexe ne contenant pas d'autre valeur propre de A que λ .*

Alors les valeurs propres $\lambda_1(\varepsilon) \leq \dots \leq \lambda_l(\varepsilon)$ de $A + \varepsilon M$ situées dans D vérifient :

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon\mu_i + o(\varepsilon)$$

où $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_l$ sont les valeurs propres de la matrice associée à la forme bilinéaire $L(M) = (M \cdot, \cdot)_{|E}$.

On se place ensuite dans le cadre d'un arbre régulier dont on perturbe une unique résistance. Le spectre de la matrice ainsi perturbée est étudié dans la propriété ci-dessous.

Propriété 2.23 *Soit T_N un arbre régulier. Soit A_N la matrice associée à l'arbre géométrique et dont le spectre est donné par la propriété 2.12. Soit $\tilde{A}_N = A_N + drM_{nk}$ la matrice associée à l'arbre ayant subi une modification dr de la résistance de la k -ième branche de la n -ième génération. Le spectre de \tilde{A}_N est donné par*

- . $\lambda_0^N(dr) = \lambda_0^N + 2^{2(N-n)}dr + o(dr)$ est la première valeur propre,
- . pour $i \geq n$, les valeurs propres de \tilde{A}_N sont les mêmes que celles de A_N ,
- . pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$,
 λ_{ij}^N , $j \in \{0, \dots, 2^i\}$, sont inchangées sauf pour un unique j_0 et
 $\lambda_{ij_0}^N(dr) = \lambda_{ij_0}^N + 2^{2(N-n)}dr + o(dr)$ est une nouvelle valeur propre simple.

Démonstration : On cherche à étudier la perturbation de la valeur propre λ_{ij}^N , ($0 \leq i \leq N-1$ et $0 \leq j \leq 2^i-1$) de A_N . A_N étant une matrice symétrique, on applique le théorème 2.22. On fixe i . Les valeurs propres $\lambda_{i0}^N(dr), \dots, \lambda_{i,2^i-1}^N(dr)$ de \tilde{A}_N sont données, pour tout $j \in \{0, \dots, 2^i-1\}$, par

$$\lambda_{ij}^N(dr) = \lambda_{ij}^N + dr\mu_j + o(dr)$$

où $\mu_0 \leq \dots \leq \mu_{2^i-1}$ sont les valeurs propres de $L(M_{nk}) = (M_{nk} \cdot, \cdot)_{E_i}$ avec $E_i = \text{vect}((\Psi_{\mathbf{ik}})_{k \in \{0, \dots, 2^i-1\}})$. Il s'agit d'étudier les valeurs propres de la matrice $L_{nki} = ((M_{nk} \Psi_{\mathbf{iu}}, \Psi_{\mathbf{iv}})_{\mathbb{R}^{2^N}})_{0 \leq u, v \leq 2^i-1}$. Comme on l'a déjà vu ci-dessus, M_{nk} , étant une matrice de rang 1, s'écrit sous la forme $M_{nk} = \mathbf{u}^t \mathbf{u}$ avec \mathbf{u} vecteur colonne de taille 2^N vérifiant

$$\mathbf{u} = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

où le bloc de 1 est de taille 2^{N-n} . Si on pose $a_{uv} = (M_{nk} \Psi_{\mathbf{iu}}, \Psi_{\mathbf{iv}})_{\mathbb{R}^{2^N}}$, on obtient

$$\begin{aligned} a_{uv} &= (\mathbf{u}^t \mathbf{u} \Psi_{\mathbf{iu}}, \Psi_{\mathbf{iv}})_{\mathbb{R}^{2^N}} \\ &= ({}^t \Psi_{\mathbf{iv}} \mathbf{u}) ({}^t \mathbf{u} \Psi_{\mathbf{iu}}). \end{aligned}$$

Le nombre a_{uv} est ainsi le produit de 2 nombres réels de même type. Exprimons alors en fonction de (n, k, i, u) la valeur de ${}^t \Psi_{\mathbf{iu}} \mathbf{u}$.

★ si $i > n$,

la taille du bloc non nul du vecteur $\Psi_{\mathbf{iu}}$ est strictement plus petite que celle du vecteur \mathbf{u} ($2^{N-i} < 2^{N-n}$). Comme la taille de ces blocs est, dans les deux cas, une puissance de 2, soit la plage d'indices d'éléments non nuls de $\Psi_{\mathbf{iu}}$ est entièrement incluse dans celle des éléments non nuls de \mathbf{u} , soit les deux plages sont d'intersection vide. Si les deux plages sont d'intersection vide, ${}^t \Psi_{\mathbf{iu}} \mathbf{u} = 0$. Sinon ${}^t \Psi_{\mathbf{iu}} \mathbf{u} = 0$ car la somme des éléments de $\Psi_{\mathbf{iu}}$ est nulle. Dans tous les cas, on a $a_{uv} = 0$, la matrice L_{nki} est ainsi la matrice nulle et les valeurs propres de A_N ne sont pas modifiées.

★ Si $i = n$,

la taille des deux blocs étant égale, un seul des vecteurs propres $(\Psi_{\mathbf{iu}})_{u \in \{0, \dots, 2^i-1\}}$ a une plage d'indices d'éléments non nuls d'intersection non vide avec celle de \mathbf{u} , ces deux plages étant alors égales. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on a donc $L_{nki} = 0$ et les valeurs propres de A_N ne sont, là encore, pas modifiées.

★ Si $i < n$,

là encore, un seul des vecteurs propres $(\Psi_{\mathbf{iu}})_{u \in \{0, \dots, 2^i-1\}}$ a une plage d'indices d'éléments non nuls d'intersection non vide avec celle de \mathbf{u} , cette dernière étant alors strictement incluse dans celle du vecteur propre (que l'on note $\Psi_{\mathbf{iu}_0}$). De plus, dans cette plage d'indices, $\Psi_{\mathbf{iu}_0}$ ne prend que 1 ou -1 comme valeur. La somme des éléments de \mathbf{u} étant non nulle, L_{nki} a un unique terme non nul, terme qui est sur la diagonale et qui correspond à $a_{u_0 u_0} = ({}^t \Psi_{\mathbf{iu}_0} \mathbf{u})^2$. Or, la taille du bloc de 1 de \mathbf{u} est 2^{N-n} , donc $a_{u_0 u_0} = 2^{2(N-n)}$. Les valeurs propres de L_{nki} sont donc toutes nulles sauf une qui vaut alors $2^{2(N-n)}$.

Il reste le cas de la première valeur propre $\lambda_0^N(dr)$. En appliquant toujours le théorème 2.22, on sait que

$$\lambda_0^N(dr) = \lambda_0^N + dr\mu_0 + o(dr),$$

avec μ_0 valeur propre de $L(M_{nk}) = (M_{nk}\Psi_0, \Psi_0)_{\mathbb{R}^{2N}}$. Un calcul rapide montre que $(M_{nk}\Psi_0, \Psi_0)_{\mathbb{R}^{2N}} = 2^{2(N-n)}$, ce qui achève la démonstration. \square

2.2 Une infinité d'alvéoles plongée dans un espace de dimension une

L'arbre dyadique conduit aux 300 millions d'alvéoles, elles-mêmes plongées dans le parenchyme, milieu visco-élastique continu. Il est donc intéressant, dans le cadre d'une modélisation du poumon, de plonger l'ensemble des bouts de notre arbre dyadique résistif dans un ensemble continu. Cela a été fait dans l'article [11]. Les auteurs plongent l'ensemble des bouts de l'arbre dans l'espace de dimension une $]0, 1[$. Ils font ensuite tendre le nombre de générations de l'arbre vers l'infini. Nous reprenons ici les résultats de l'article [11] dont nous aurons besoin dans la suite de cette thèse. Nous n'entrerons pas dans le détail des démonstrations. Les deux chapitres suivants permettront de formaliser et généraliser ces résultats en définissant un arbre résistif infini, en démontrant des théorèmes de trace sur les bouts de cet arbre et en plongeant ces bouts dans un milieu continu de dimension quelconque. De plus, l'arbre sera, dans toute cette section, supposé régulier, ce qui ne sera pas le cas dans les chapitres suivants. Enfin, nous terminerons cette section par quelques résultats nouveaux sur la perturbation d'arbre régulier, modélisant ainsi, par exemple, une crise d'asthme.

2.2.1 Construction d'un opérateur continu sur l'arbre infini

Commençons tout d'abord par donner un sens continu à notre problème discret à 2^N sorties. Comme nous l'avons dit précédemment, nous allons plonger ces 2^N sorties dans l'intervalle $I =]0, 1[$. Pour cela, nous identifions le noeud de sortie i de l'arbre à $N + 1$ générations au segment $]ih_N, (i + 1)h_N[$, avec $h_N = 1/2^N$ (voir la figure 2.6). Il est alors possible de définir un opérateur \mathcal{R}_N qui, à un flux en sortie d'arbre vu comme un élément de $L^2(I)$ associe une pression de sortie, elle aussi vue comme un élément de $L^2(I)$.

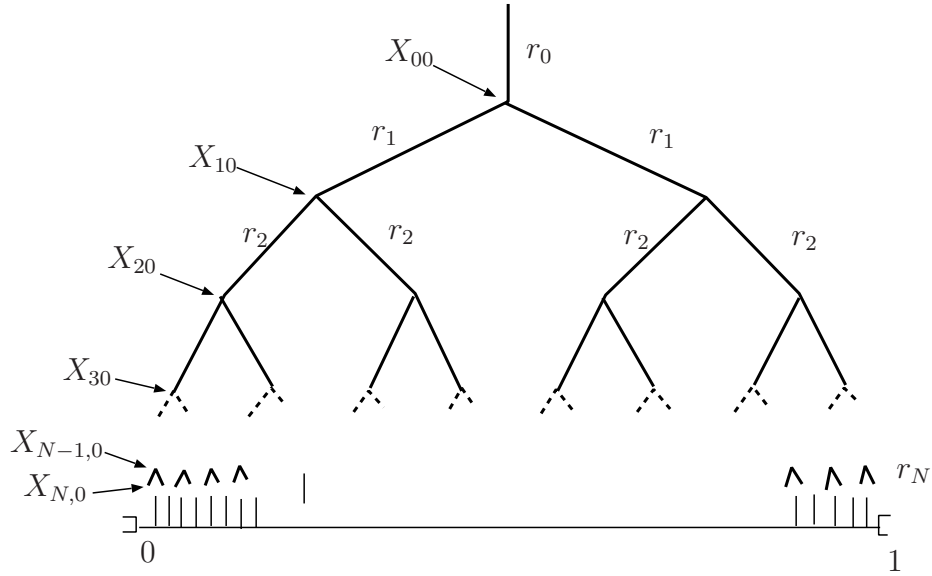
Définition 2.24 Soit une fonction $u \in L^2(I)$. On définit alors le vecteur flux \mathbf{q} associé par

$$\mathbf{q} = (q_i)_{i=0, \dots, 2^N - 1}, \quad q_i = \int_{ih_N}^{(i+1)h_N} u(y) dy.$$

Le vecteur pression discret associé est alors défini par

$$\mathbf{p} = (p_i)_{i=0, \dots, 2^N - 1}, \quad \mathbf{p} = A_N \mathbf{q}$$

avec $A_N \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R})$ matrice définie par la relation (2.5). Finalement, on définit la fonction $p \in L^2(I)$ comme la fonction constante par morceaux qui prend la valeur p_i sur chaque sous-intervalle $]ih_N, (i+1)h_N[$. L'opérateur correspondant, allant de $L^2(I)$ dans lui-même, est alors noté \mathcal{R}_N .


 FIG. 2.6 – Plongement dans $]0, 1[$.

Propriété 2.25 Soit T_N un arbre régulier à $N+1$ générations. L'opérateur \mathcal{R}_N s'exprime comme l'opérateur intégral suivant

$$p = \mathcal{R}_N u \Leftrightarrow p(x) = \int_I K_N(x, y) u(y) dy \text{ p.p.}$$

où $K_N \in L^1(I \times I)$ est la fonction constante par morceaux, définie par

$$\forall x \in]ih_N, (i+1)h_N[, \forall y \in]jh_N, (j+1)h_N[\quad K_N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-\sigma_{ij}} r_n.$$

Démonstration : On fixe $x \in]ih_N, (i+1)h_N[$. En se rappelant alors la définition de p et u , on obtient

$$\begin{aligned} p(x) &= p_i \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N q_j \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \int_{jh_N}^{(j+1)h_N} u(y) dy \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} \int_{jh_N}^{(j+1)h_N} A_{ij}^N u(y) dy. \end{aligned}$$

Cela démontre la propriété en combinant la définition du noyau K_N et la relation (2.5). \square

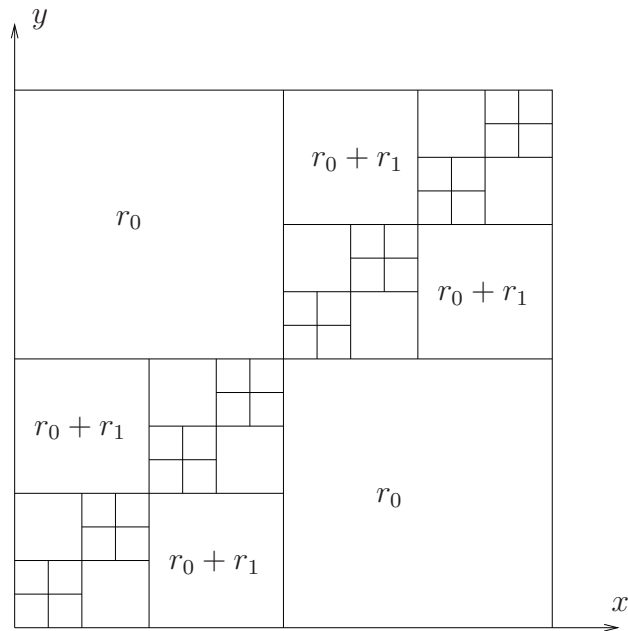


FIG. 2.7 – Le noyau $K(x, y)$.

Remarque 2.26 La construction de l'opérateur \mathcal{R}_N se généralise facilement au cas d'arbres non réguliers, le noyau étant alors une fonction constante par morceaux, définie par (voir la formule (2.2))

$$x \in]ih_N, (i + 1)h_N[, y \in]jh_N, (j + 1)h_N[\mapsto r_0 + \sum_{n=1}^{N-\sigma_{ij}} r_{nk_{nj}}.$$

La construction de cet opérateur continu permet de passer à la limite quand le nombre de générations de l'arbre tend vers l'infini. C'est ce qui est fait dans les deux propriétés suivantes.

Propriété 2.27 Le noyau K_N converge presque partout vers la fonction mesurable K définie par ce qui suit : on se fixe x et y dans I ayant comme expressions dyadiques

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}, y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \text{ avec } \alpha_k, \beta_k \in \{0, 1\} \forall k.$$

On définit alors

$$\mu_{xy} = \sup \{k \geq 1, \alpha_l = \beta_l \forall l \leq k\}.$$

Si une des deux suites $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a un nombre fini de termes non nuls ou si $x = y$, on pose $K(x, y) = 0$. Sinon $K(x, y)$ est égal à $\sum_{n=0}^{\mu_{xy}} r_n$.

Remarque 2.28 $2^{-\mu_{xy}}$ donne la longueur du plus petit intervalle dyadique contenant x et y .

Démonstration : Il s'agit ici de remarquer que, pour x et y fixés, la suite $(K_N(x, y))_{N \in \mathbb{N}}$ est stationnaire pour N assez grand. Plus précisément, en se rappelant la construction faite pour passer du discret au continu, x et y correspondent à un même noeud de l'arbre à $N + 1$ générations tant qu'ils appartiennent tous les deux à un même intervalle dyadique de longueur 2^{-N} . Correspondant à un même noeud, $K_N(x, y)$ vaut alors $\sum_{n=0}^N r_n$. En utilisant la définition de μ_{xy} , x et y sont associés à des noeuds différents dès lors que N devient supérieur strictement à μ_{xy} . Ainsi la suite $(K_N(x, y))_{N \in \mathbb{N}}$ devient stationnaire à partir de $N = \mu_{xy}$ de valeur $\sum_{n=0}^{\mu_{xy}} r_n$. \square

Remarque 2.29 Là encore, cette convergence presque partout se généralise aux cas d'arbres non réguliers en posant

$$K(x, y) = r_0 + \sum_{n=1}^{\mu_{xy}} r_n k_n(xy) \quad \text{avec} \quad k_n(xy) = \sum_{s=0}^{n-1} 2^{n-1-s} \beta_{\mu_{xy}-s}.$$

On peut alors énoncer un résultat de convergence pour la suite $(\mathcal{R}_N)_{N \in \mathbb{N}}$.

Théorème 2.30 La suite $(\mathcal{R}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite \mathcal{R} dans $\mathcal{L}(L^2(I))$ si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} < +\infty. \quad (2.11)$$

Quand la limite existe, \mathcal{R} est un opérateur intégral de noyau associé

$$K = \lim_{N \rightarrow +\infty} K_N \text{ dans } L^1(I \times I).$$

Démonstration : Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la démonstration (voir l'article [11]). Indiquons toutefois les grandes lignes. En prenant la fonction $u \in L^2(I)$ constante égale à un, $\mathcal{R}_N u$ est, elle aussi, constante de valeur

$$p = \int_I K_N(x, y) dy = \sum_{n=0}^N \frac{r_n}{2^n}.$$

Ainsi, (2.11) est une condition nécessaire. Supposons-la vérifiée. Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont alors vérifiées. En effet, d'après la propriété 2.27, la suite $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers K . De plus, cette suite est dominée, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et presque partout en $(x, y) \in I \times I$, par K . L'hypothèse (2.11) assure alors que $K \in L^1(I \times I)$. Ainsi le théorème de convergence dominée s'applique et la suite $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers K dans $L^1(I \times I)$. De plus, en utilisant les mêmes techniques de type convolution que dans [31], Théorème 4.15, on vérifie que

$$\|\mathcal{R}_N u\|_{L^2(I)} \leq \|K_N\|_{L^1(I \times I)} \|u\|_{L^2(I)}.$$

L'application $K_N \mapsto \mathcal{R}_N$ étant ainsi continue de $L^1(I \times I)$ dans $\mathcal{L}(L^2(I))$, la convergence de $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers K dans $L^1(I \times I)$ implique celle de $(\mathcal{R}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers \mathcal{R} défini par

$$\mathcal{R}u(x) = \int_I K(x, y)u(y)dy.$$

Ceci achève la démonstration. \square

Remarque 2.31 *Le résultat de convergence ci-dessus se généralise dans le cas où l'arbre n'est plus supposé régulier. On a toujours, sans condition supplémentaire, la convergence presque partout de la suite $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers K ainsi que la domination de K_N par K . Par contre, cette convergence n'a lieu dans $L^1(I \times I)$ qu'en supposant la condition suivante vérifiée*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{r_{nk}}{2^{2n}} < +\infty. \quad (2.12)$$

En effet, en reprenant la démonstration du théorème 2.30, on doit vérifier que $K \in L^1(I \times I)$. Or, on a

$$\begin{aligned} \int_I \int_I |K(x, y)| dy dx &= \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_{nk(x)}}{2^n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{jh_n}^{(j+1)h_n} r_{nk(x)} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{r_{nj}}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

De plus, si la condition suivante est vérifiée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\max_{k \in \mathbb{N}} r_{nk}}{2^n} < +\infty, \quad (2.13)$$

la suite $(\mathcal{R}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers \mathcal{R} dans $\mathcal{L}(L^2(I))$. En effet, cette condition assure d'une part la convergence de $\mathcal{R}_N u$ avec $u \in L^2(I)$ fonction constante égale à un. Pour le vérifier, fixons $x \in I$ ayant comme expression dyadique

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}, \quad \text{avec } \alpha_k \in \{0, 1\} \forall k.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_N u(x) &= \int_I K_N(x, y) dy \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{r_{nk_n(x)}}{2^n}, \end{aligned}$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n(x) = \sum_{j=1}^n 2^{n-j} \alpha_j$. La condition (2.13) implique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_{nk(x)}}{2^n} < +\infty.$$

D'autre part, cette condition permet aussi d'appliquer les techniques de type convolution utilisées dans le cas régulier. Ainsi, la fin de la démonstration du cas régulier peut se généraliser ce qui assure la convergence de la suite $(\mathcal{R}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers \mathcal{R} dans $\mathcal{L}(L^2(I))$.

2.2.2 Propriétés de l'opérateur \mathcal{R}

Cet opérateur limite a de nombreuses propriétés remarquables dont nous nous servons dans la partie III de cette thèse.

Propriété 2.32 *Si la condition (2.11) est vérifiée, l'opérateur limite \mathcal{R} est alors un opérateur auto-adjoint, compact et monotone.*

Démonstration : \mathcal{R} est clairement auto-adjoint par symétrie de son noyau (voir la figure 2.7). De plus, $\mathcal{R}_N u$ est une fonction de $L^2(I)$ constante par morceaux, associée à la subdivision $0, h_N, \dots, 1$. L'opérateur \mathcal{R}_N est ainsi de rang fini. \mathcal{R} est donc compact comme limite d'opérateurs de rang fini au sens de la norme des opérateurs. En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le noyau K est constant de valeur r_n sur la réunion de carrés $\cup_{j=0}^{2^n-1} [jh_n, (j+1)h_n]^2$, on obtient

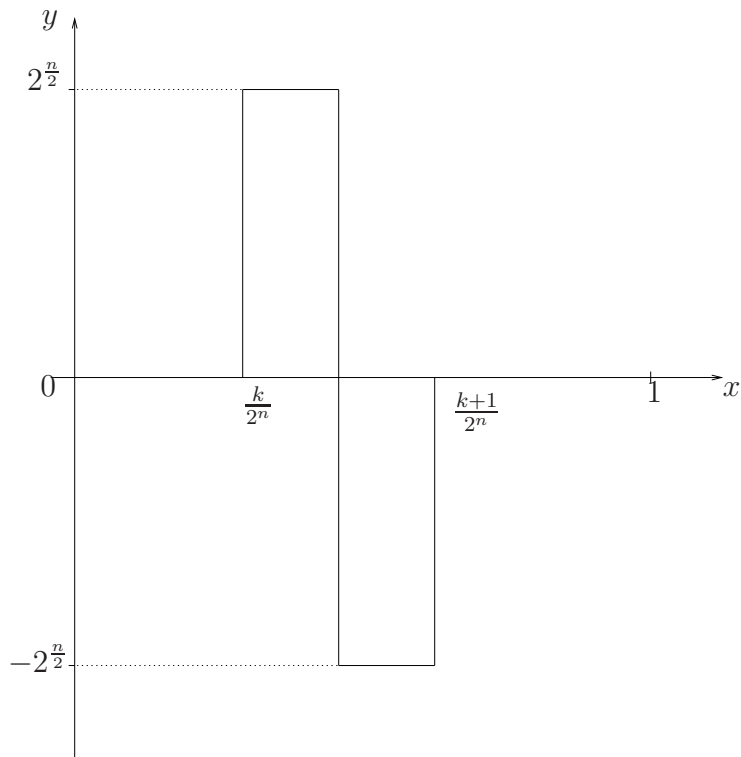
$$\begin{aligned} (\mathcal{R}u, u)_{L^2(I)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} r_n \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{jh_n}^{(j+1)h_n} \int_{jh_n}^{(j+1)h_n} u(x)u(y) dx dy \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} r_n \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\int_{jh_n}^{(j+1)h_n} u(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{R} est monotone, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 2.33 *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\mathcal{R}_N \in \mathcal{L}(L^2(I))$ est lui aussi monotone car le même raisonnement donne*

$$(\mathcal{R}_N u, u)_{L^2(I)} = \sum_{n=0}^N r_n \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\int_{jh_n}^{(j+1)h_n} u(x) dx \right)^2.$$

Les propriétés spectrales de cet opérateur sont, elles aussi, remarquables et nous serons très utiles par la suite. En effet, le spectre de cet opérateur fait intervenir la base de Haar usuelle.

FIG. 2.8 – Graphe de la fonction Ψ_{nk} .

Définition 2.34 On définit $\Psi \in L^2(I)$ par

$$\Psi = \mathbf{1}_{]0, \frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{\frac{1}{2}, 1[}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, on introduit alors

$$x \mapsto \Psi_{nk}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \Psi(2^n x - k).$$

On définit de plus Ψ_0 par la fonction constante valant 1 sur I . La famille $(\Psi_0, (\Psi_{nk})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1})$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$ appelée la base de Haar (voir la figure 2.8).

Propriété 2.35 La base de Haar $(\Psi_0, (\Psi_{nk})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1})$ est une famille de vecteurs propres de \mathcal{R} . La famille de valeurs propres associée, notée $(\lambda_0, (\lambda_{nk})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1})$ vérifie $\lambda_0 = \sum_{l=0}^{+\infty} r_l / 2^l$ et

$$\lambda_{nk} = \sum_{l=n+1}^{+\infty} \frac{r_l}{2^l}, \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1.$$

Pour simplifier les notations, on note $\rho_n = \lambda_{nk}$, $\forall k$.

Démonstration : Le cas du premier vecteur propre Ψ_0 se lit facilement sur la figure 2.7 qui donne pour tout $x \in I$

$$\mathcal{R}\Psi_0(x) = \int_I K(x, y) dy = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{r_l}{2^l},$$

d'où le résultat. Fixons alors $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. En remarquant que le support de Ψ_{nk} est $]kh_n, (k+1)h_n[$, on obtient

$$\mathcal{R}\Psi_{nk}(x) = \int_{kh_n}^{(k+1)h_n} K(x, y)\Psi_{nk}(y)dy.$$

Pour tout x n'appartenant pas au support de Ψ_{nk} (et qui n'est pas de la forme jh_n), $K(x, \cdot)$ est constant sur cet intervalle. La valeur moyenne de Ψ_{nk} étant nulle, $\mathcal{R}\Psi_{nk}(x)$ s'annule. Les cas $x \in]kh_n, (k+1/2)h_n[$ et $x \in [(k+1/2)h_n, (k+1)h_n[$ se calculent facilement et donnent respectivement

$$\begin{aligned} \int_{kh_n}^{(k+1)h_n} K(x, y)\Psi_{nk}(y)dy &= 2^{\frac{n}{2}} \sum_{l=n+1}^{+\infty} \frac{r_l}{2^l}, \\ \int_{(k+1)h_n}^{(k+1)h_n} K(x, y)\Psi_{nk}(y)dy &= -2^{\frac{n}{2}} \sum_{l=n+1}^{+\infty} \frac{r_l}{2^l}, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 2.36 *Un raisonnement analogue permet d'obtenir les éléments propres de \mathcal{R}_N . Ainsi, $(\Psi_0, (\Psi_{nk})_{0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq 2^n-1})$ est une famille de vecteurs propres de \mathcal{R}_N . La famille de valeurs propres associée est $\rho^N = \sum_{l=0}^N r_l/2^l$ et, pour tout $0 \leq n \leq N-1$,*

$$\rho_n^N = 2^{-N} \lambda_{nk}^N = \sum_{l=n+1}^N \frac{r_l}{2^l}, \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1.$$

Remarque 2.37 *L'opérateur \mathcal{R} est ainsi diagonalisable dans $L^2(I)$ avec des valeurs propres strictement positives. Cela assure en particulier que \mathcal{R} est non dégénéré. Ceci n'est pas le cas de \mathcal{R}_N qui, lui, a des valeurs propres nulles et ainsi un noyau non trivial.*

Remarque 2.38 *On remarquera, au coefficient multiplicatif 2^N près, le lien existant entre les valeurs propres de A_N , \mathcal{R}_N et de \mathcal{R} dans le cas d'arbres réguliers. Regardons par exemple ce qui se passe pour leurs premières valeurs propres respectives. Le fait d'avoir plongé l'ensemble des bouts de l'arbre dans I permet de remplacer une sommation de $2^N r_0, 2^{N-1} r_1, 2^{N-2} r_2, \dots$ par une intégration de r_0, r_1, r_2, \dots sur un intervalle de longueur respectivement $1, 1/2, 1/4, \dots$. Cela a d'ailleurs permis le passage à la limite.*

Remarque 2.39 *Dans le cas d'arbres non réguliers, ces propriétés ne sont plus, en général, vérifiées. Seul le caractère compact subsiste. Et les éléments propres de \mathcal{R} , dans le cas d'un arbre non régulier, ne sont plus facilement calculables.*

2.2.3 Résistance globale d'un arbre infini

On définit ici le pendant de la résistance équivalente d'un arbre T_N à $N+1$ générations quand le nombre de générations tend vers l'infini.

Définition 2.40 *La suite $(R_N)_{N \in \mathbb{N}}$ des résistances équivalentes d'arbre à $N+1$ générations est une suite croissante. On définit alors la résistance globale R de l'arbre infini correspondant comme*

$$R = \lim_{N \rightarrow +\infty} R_N \in [0, +\infty].$$

Remarque 2.41 *On peut noter que cette définition a un sens même pour des arbres non réguliers. De plus, la notion d'arbre infini sera étendue de façon plus abstraite dans le chapitre suivant.*

Propriété 2.42 *Dans le cas d'arbres réguliers, la résistance globale est finie si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} < +\infty.$$

Sa valeur est alors $R = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n/2^n$.

Démonstration : Il suffit de se rappeler l'expression (2.6) de la résistance équivalente d'un arbre régulier à $N+1$ générations. \square

Remarque 2.43 *On peut remarquer que la construction de l'opérateur \mathcal{R} , dans le cas d'arbres réguliers, est possible si et seulement si la résistance globale est finie. De plus, elle vaut alors la première valeur propre de cet opérateur.*

2.2.4 Cas particulier d'un arbre géométrique

Comme nous l'avons déjà dit ci-dessus, le poumon humain sain peut être modélisé comme un arbre géométrique. Il est donc intéressant d'étudier ce cas particulier. De plus, on retrouvera des résultats analogues dans le chapitre 3. Commençons par adapter les résultats ci-dessus au cas d'un arbre géométrique.

Corollaire 2.44 *On considère un arbre géométrique de loi*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_{nk} = r_n = r_0 \alpha^n.$$

On suppose $\alpha \in]0, 2[$. Alors, l'opérateur limite \mathcal{R} est bien défini. Il est toujours auto-adjoint, compact et monotone. Ses éléments propres sont alors

$$\Psi_0 \text{ associé à } \lambda_0 = \frac{2r_0}{2-\alpha}, \quad \Psi_{nk} \text{ associé à } \lambda_{nk} = \rho_n = \lambda_0 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+1}.$$

La résistance globale vaut

$$R = \frac{2r_0}{2-\alpha} = \lambda_0.$$

C'est une simple application de ce qui a été fait auparavant.

Remarque 2.45 *Comme cela a été dit lors de la présentation du modèle, le poumon humain peut être considéré comme un arbre géométrique avec $\alpha \simeq 1.63$. Ainsi, le poumon humain sain est convergent dans le sens où la suite $(\mathcal{R}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge bien vers $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(L^2(I))$. Afin de motiver l'étude de l'arbre infini, on peut remarquer que l'erreur faite sur la résistance équivalente d'un poumon humain sain (c'est-à-dire d'un arbre géométrique à 23 générations) en modélisant ce dernier par un arbre infini ne dépasse pas 1%.*

On donne ici deux autres propriétés de l'opérateur \mathcal{R} dans le cadre d'un arbre géométrique. On retrouvera un résultat analogue de la propriété ci-dessous dans le chapitre 3 malgré une approche différente.

Propriété 2.46 *Soit T un arbre géométrique de loi $r_n = r_0 \alpha^n$ avec $\alpha \in]\sqrt{2}, 2[$. Alors \mathcal{R} est une application continue de $L^2(I)$ sur $H^s(I)$ avec*

$$s = 1 - \frac{\ln \alpha}{\ln 2}. \quad (2.14)$$

Démonstration : Cette propriété est en fait une conséquence directe de la caractérisation suivante de $H^s(I)$ pour $s \in [0, 1/2[$ (voir les articles [32, 33]) :

$$H^s(I) = \left\{ p \in L^2(I), |c_0(p)|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{2ns} |c_{nk}(p)|^2 < +\infty \right\}, \quad (2.15)$$

où $c_0(p)$ et $c_{nk}(p)$ sont les produits scalaires de $p \in L^2(I)$ avec la base de Haar. On munit alors $H^s(I)$ de la norme

$$\|p\|_{H^s(I)}^2 = |c_0(p)|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{2ns} |c_{nk}(p)|^2.$$

Ainsi, pour tout $u \in L^2(I)$, $p = \mathcal{R}u \in L^2(I)$ et, en décomposant u sur la base de Haar, on obtient

$$p = \lambda_0 c_0(u) \Psi_0 + \lambda_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+1} c_{nk}(u) \Psi_{nk}.$$

En prenant $2^{2ns} (\alpha/2)^{2n} = 1$, c'est-à-dire $s = 1 - \ln \alpha / \ln 2$, on obtient

$$\begin{aligned} 2^{2ns} |c_{nk}(p)|^2 &= \lambda_0^2 2^{2ns} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+2} |c_{nk}(u)|^2 \\ &= \lambda_0^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 |c_{nk}(u)|^2 \\ &= C |c_{nk}(u)|^2. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration en se rappelant que $u \in L^2(I)$. \square

Remarque 2.47 Là encore, on peut appliquer cette propriété au cas particulier du poumon humain sain avec $\alpha \simeq 1.63$. L'espace des pressions sur le bout de l'arbre est alors, d'après ce qui précède, $H^s(I)$ avec $s \simeq 0.3$.

Les éléments propres de l'opérateur \mathcal{R} étant constitués de la base de Haar de $L^2(I)$, les espaces $A^s(I)$ (voir [34]) vont jouer, tout au long de cette thèse, un rôle important. On rappelle ici leur définition.

Définition 2.48 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $A^s(I)$ est défini par

$$A^s(I) = \{p \in L^2(I), \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{2ns} c_{nk}^2(p) < +\infty\},$$

avec $c_{nk}(p) = (p, \Psi_{nk})_{L^2(I)}$. Cet espace est muni de la norme suivante

$$\|p\|_{A^s(I)}^2 = c_0^2(p) + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{2ns} c_{nk}^2(p),$$

avec $c_0(p) = (p, \Psi_0)_{L^2(I)}$.

Remarque 2.49 L'espace défini par (2.15) correspond en fait à l'espace $A^s(I)$. Il est démontré dans, par exemple, les articles [32, 33] l'équivalence entre ces espaces et les espaces de Sobolev $H^s(I)$ pour $-1/2 < s < 1/2$.

Une dernière propriété remarquable peut alors être énoncée qui permet d'exprimer, dans le cas d'un arbre géométrique, le produit scalaire $(\mathcal{R}u, u)_{L^2(I)}$ pour $u \in L^2(I)$ comme une norme A^s pour un s convenablement choisi.

Propriété 2.50 On suppose que T est un arbre géométrique infini de loi $r_n = r_0 \alpha^n$ avec $0 < \alpha < 2$. Si $s = -1/2 + \ln \alpha / 2 \ln 2$, alors il existe $C > 0$ telle que, pour tout $u \in L^2(I)$, u à moyenne nulle,

$$(\mathcal{R}u, u)_{L^2(I)} = C \|u\|_{A^s(I)}^2.$$

Démonstration : La fonction $u \in L^2(I)$ est à moyenne nulle donc il existe $(u_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{nk} \Psi_{nk}.$$

En utilisant alors les propriétés spectrales de l'opérateur \mathcal{R} dans le cadre d'un arbre géométrique (voir le corollaire 2.44), on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}u, u)_{L^2(I)} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n u_{nk}^2 \\ &= \frac{r_0 \alpha}{2 - \alpha} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n u_{nk}^2. \end{aligned}$$

D'après la définition de la norme A^s , il suffit de choisir s tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{2ns} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n,$$

à savoir

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{\ln \alpha}{2 \ln 2}.$$

Ainsi, $(\mathcal{R}u, u)_{L^2(I)}$ s'identifie, à une constante près au carré de la norme A^s . \square

2.2.5 Perturbation des résistances d'arbres réguliers infinis

Lors d'une crise d'asthme, les résistances de l'arbre géométrique sont modifiées, l'opérateur \mathcal{R} construit sur les arbres réguliers est ainsi perturbé. En particulier, il peut être intéressant, comme dans le cas fini (voir la sous-section 2.1.6), d'obtenir un développement limité au premier ordre de la résistance globale de l'arbre ainsi perturbé.

Expression de la résistance globale

Pour cela, on commence par donner une expression de la résistance globale faisant intervenir l'opérateur \mathcal{R} .

Propriété 2.51 *Soient T un arbre régulier de résistance globale R finie et $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(L^2(I))$ l'opérateur associé défini par le théorème 2.30. On munit l'espace image $\text{Im}(\mathcal{R})$ de la norme suivante*

$$\forall v \in \text{Im}(\mathcal{R}), \quad \|v\|_{\text{Im}(\mathcal{R})} = \inf_{u \in L^2(I), \mathcal{R}u=v} \|u\|_{L^2(I)}. \quad (2.16)$$

$\text{Im}(\mathcal{R})$, muni de cette norme, est un espace de Banach et l'opérateur $\mathcal{R} : L^2(I) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{R})$ est un isomorphisme de norme 1. De plus,

$$\text{Im}(\mathcal{R}) = \left\{ p \in L^2(I), \left(\frac{p_{nk}}{\rho_n} \right)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\} \quad (2.17)$$

et

$$\|p\|_{\text{Im}(\mathcal{R})}^2 = \frac{p_0^2}{\lambda_0^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \left(\frac{p_{nk}}{\rho_n} \right)^2 \quad (2.18)$$

avec $p_{nk} = (p, \Psi_{nk})_{L^2(I)}$, $p_0 = (p, \Psi_0)_{L^2(I)}$ et $(\lambda_0, (\rho_n)_{n \in \mathbb{N}})$ valeurs propres de \mathcal{R} (voir la propriété 2.35). Enfin, la résistance globale de T est caractérisée par

$$R = \left[(\mathbf{1}_I, \mathcal{R}^{-1} \Psi_0)_{L^2(I)} \right]^{-1}. \quad (2.19)$$

Remarque 2.52 *En utilisant la remarque 2.43, \mathcal{R} est bien défini car on a supposé la résistance globale finie.*

Démonstration : L'espace $\text{Im}(\mathcal{R})$, muni de la norme (2.16) est classiquement un espace de Banach. En utilisant la linéarité et la non dégénérescence de \mathcal{R} , on obtient facilement que \mathcal{R} est injectif. En effet si $\mathcal{R}u = 0$, alors

$$(\mathcal{R}u, u)_{L^2(I)} = 0$$

puis $u = 0$ en utilisant la propriété 2.32. Ainsi, $\mathcal{R} : L^2(I) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{R})$ est bijectif et \mathcal{R}^{-1} existe bien. En particulier, on a alors

$$\|\mathcal{R}u\|_{\text{Im}(\mathcal{R})} = \|u\|_{L^2(I)}. \quad (2.20)$$

Ainsi, \mathcal{R} est un isomorphisme de norme 1. L'expression de la résistance globale vient de la remarque 2.10 puis d'un passage à la limite. En effet, une façon de calculer R est de mettre une pression en sortie identiquement égale à un, à savoir $\Psi_0 \in L^2(I)$, et une pression à l'entrée nulle. Ainsi, en notant alors \mathcal{Q} le flux total sortant de la racine o associé à de telles valeurs de la pression et en utilisant la loi de Poiseuille généralisée (2.4) (quitte à passer à la limite), on obtient

$$R = \mathcal{Q}^{-1}.$$

En remarquant que $\mathcal{Q} = \int_I u(x)dx$ avec $\mathcal{R}u = \Psi_0$, on obtient

$$\mathcal{Q} = \int_I \mathcal{R}^{-1}\Psi_0 dx = (\mathbf{1}_I, \mathcal{R}^{-1}\Psi_0)_{L^2(I)}.$$

Il reste alors à vérifier (2.17) et (2.18). Soit $p \in \text{Im}(\mathcal{R}) \subset L^2(I)$, il existe un unique $u \in L^2(I)$ vérifiant $p = \mathcal{R}u$. $(\Psi_0, \Psi_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$ étant une base hilbertienne de $L^2(I)$, il existe $(p_0, (p_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}) \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $(u_0, (u_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}) \in \ell^2(\mathbb{N})$ tels que

$$\begin{aligned} p &= p_0\Psi_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} p_{nk}\Psi_{nk}, \\ u &= u_0\Psi_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{nk}\Psi_{nk}. \end{aligned}$$

En se souvenant alors des propriétés spectrales de l'opérateur \mathcal{R} démontrées dans la propriété 2.35, on obtient

$$\begin{cases} p_0 = \lambda_0 u_0 \\ p_{nk} = \rho_n u_{nk} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}. \end{cases} \quad (2.21)$$

On en déduit en particulier que $(p_{nk}/\rho_n)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et ainsi

$$p \in \left\{ p \in L^2(I), \left(\frac{p_{nk}}{\rho_n} \right)_{n,k} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}.$$

On en déduit aussi (2.18). En effet, en combinant (2.20) et (2.21), on obtient

$$\begin{aligned} \|p\|_{\text{Im}(\mathcal{R})}^2 &= \|u\|_{L^2(I)}^2 \quad \text{avec } u \text{ unique antécédent de } p \\ &= \frac{p_0^2}{\lambda_0^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{p_{nk}}{\rho_n} \right)^2. \end{aligned}$$

Pour finir, soit $p \in \{p \in L^2(I), (p_{nk}/\rho_n)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})\}$. En posant

$$u = \frac{p_0}{\lambda_0} \Psi_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{p_{nk}}{\rho_n} \Psi_{nk},$$

$u \in L^2(I)$ vérifie bien $p = \mathcal{R}u$, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 2.53 *On remarquera que l'expression (2.19) de la résistance globale est exactement le pendant continu de celle de la résistance équivalente d'un arbre fini (voir la propriété 2.17).*

Remarque 2.54 *L'expression de la résistance globale (2.19) est encore valide pour tout arbre résistif T dès lors que l'opérateur \mathcal{R} associé est bien défini (voir la remarque 2.31) et que ce dernier est bien inversible.*

Condition d'inversibilité sur l'opérateur perturbé

La résistance globale s'exprime en fonction de l'inverse de l'opérateur \mathcal{R} . Ainsi, il est utile de donner des conditions suffisantes sur la perturbation permettant à l'opérateur modifié d'être bien défini et inversible. On utilise pour cela le résultat suivant démontré dans [35].

Théorème 2.55 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur fermé tel que T^{-1} existe et est borné. Si $A : X \rightarrow Y$ vérifie*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A) \subset X, \\ \|Au\|_Y \leq a\|u\|_X + b\|Tu\|_Y, \quad \forall u \in \mathcal{D}(T), \end{cases}$$

avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tels que

$$a\|T^{-1}\| + b < 1,$$

alors $T + A$ est inversible.

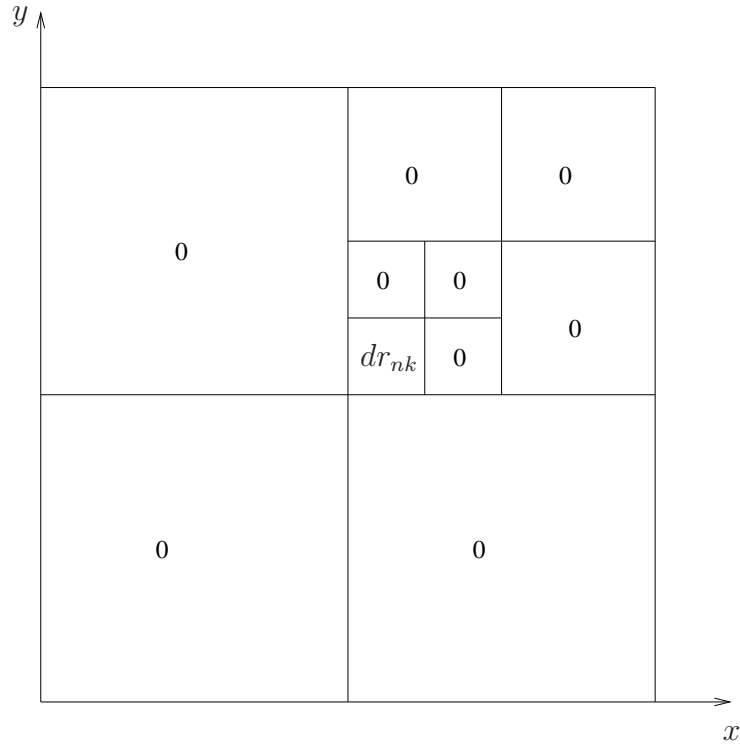
Avant d'appliquer ce résultat à notre opérateur, commençons par exprimer l'opérateur de perturbation. L'équivalent continu de la matrice $dr_{nk}M_{nk}$ définie par la propriété 2.18 est un opérateur à noyau appartenant, comme \mathcal{R} , à $\mathcal{L}(L^2(I))$.

Définition 2.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ fixés. On définit \mathcal{M}_{nk} par l'opérateur à noyau*

$$\forall u \in L^2(I), \quad \forall x \in I, \quad \mathcal{M}_{nk}u(x) = \int_I K_{nk}(x, y)u(y)dy, \quad (2.22)$$

où le noyau K_{nk} est donné par

$$K_{nk}(x, y) = \begin{cases} dr_{nk} & \text{si } (x, y) \in]kh_n, (k+1)h_n]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.23)$$


 FIG. 2.9 – La perturbation du noyau K_{nk} .

Remarque 2.56 L'opérateur \mathcal{M}_{nk} consiste ainsi à modifier la k -ième branche de la n -ième génération de la valeur dr_{nk} .

Démonstration : L'arbre résistif associé à cette perturbation n'a que des résistances nulles à l'exception de celle de la k -ième branche de la n -ième génération qui vaut alors dr_{nk} . Il s'agit alors de calquer la démonstration de la construction de \mathcal{R} de la sous-section 2.2.1 à un arbre non régulier en s'aidant de la remarque 2.31. Les nouvelles conditions (2.12) et (2.13) données dans cette remarque assurant que \mathcal{M}_{nk} est bien défini sont ici trivialement vérifiées, une seule résistance n'étant pas nulle (voir la figure 2.9). \square

On peut alors donner des conditions suffisantes sur la perturbation permettant d'assurer l'inversibilité de l'opérateur modifié associé.

Propriété 2.57 Soit \mathcal{R} l'opérateur associé à un arbre régulier de résistance globale finie. Si la suite $(dr_{nk})_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$ des valeurs des différentes perturbations vérifie l'hypothèse suivante

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \left(\frac{dr_{nk}}{2^{\frac{3n}{2}}} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2^r}{\rho_r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) < 1, \quad (2.24)$$

alors $\mathcal{M} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \mathcal{M}_{nk}$ est bien défini, $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$ et $\mathcal{R} + \mathcal{M} \in \text{Isom}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$.

Démonstration : Etape une : \mathcal{M} est bien défini et $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$.

Commençons par démontrer que $\mathcal{M}_{nk} \in \mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$ sans aucune hypothèse sur la perturbation et calculons sa norme. Soit $p \in \text{Im}(\mathcal{M}_{nk}) \subset L^2(I)$ fixé. Il existe $u \in L^2(I)$ tel que $p = \mathcal{M}_{nk}u$. Calculons $p_{rs} = (p, \Psi_{rs})_{L^2(I)}$ pour tout $r \in \mathbb{N}, s \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$. On commence par exprimer $\mathcal{M}_{nk}u(x)$ pour $x \in I$. D'après les définitions (2.22) et (2.23) de \mathcal{M}_{nk} et du noyau K_{nk} , on obtient

$$\mathcal{M}_{nk}u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]kh_n, (k+1)h_n[\\ dr_{nk}d_{nk}(u) & \text{si } x \in]kh_n, (k+1)h_n[\end{cases} \quad (2.25)$$

avec $d_{nk}(u) = \int_{kh_n}^{(k+1)h_n} u(x)dx$. Calculons alors $p_{rs} = (\mathcal{M}_{nk}u, \Psi_{rs})_{L^2(I)}$. Pour cela, il suffit de remarquer que si $r \geq n$, alors $2^{-n} \geq 2^{-r}$ et $\mathcal{M}_{nk}u$ est, suivant les valeurs de s , soit nul, soit constant sur le support de Ψ_{rs} . En se rappelant alors que la moyenne de Ψ_{rs} est nulle, on obtient dans tous les cas $(\mathcal{M}_{nk}u, \Psi_{rs})_{L^2(I)} = 0$. Soit alors $r < n$. On commence par remarquer que, pour tout $r < n$ fixé, il existe un unique $s \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$ tel que les supports de $\mathcal{M}_{nk}u$ et Ψ_{rs} ne soient pas disjoints. Ainsi, pour tous les autres s , $(\mathcal{M}_{nk}u, \Psi_{rs})_{L^2(I)} = 0$. Sur le support de $\mathcal{M}_{nk}u$ et pour le s convenable, Ψ_{rs} est alors constant valant $2^{r/2}$ ou $-2^{r/2}$. On obtient ainsi

$$(\mathcal{M}_{nk}u, \Psi_{rs})_{L^2(I)} = \pm 2^{\frac{r}{2}-n} dr_{nk}d_{nk}(u).$$

Ainsi, p_{rs}/ρ_r est non nul pour un nombre fini de couple (r, s) , à savoir n couples, et appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$. Donc $\text{Im}(\mathcal{M}_{nk}) \subset \text{Im}(\mathcal{R})$. Vérifions alors que \mathcal{M}_{nk} est continue de $L^2(I)$ dans $\text{Im}(\mathcal{R})$. Soit $u \in L^2(I)$. En notant alors $p = \mathcal{M}_{nk}u$, en appliquant la caractérisation (2.18) de la norme sur $\text{Im}(\mathcal{R})$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $d_{nk}(u)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_{nk}u\|_{\text{Im}(\mathcal{R})}^2 &= \frac{p_0^2}{\lambda_0^2} + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{p_{rs}}{\rho_r} \right)^2 \\ &= \frac{p_0^2}{\lambda_0^2} + dr_{nk}^2 d_{nk}^2(u) 2^{-2n} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2^r}{\rho_r^2} \\ &\leq \frac{p_0^2}{\lambda_0^2} + \|u\|_{L^2(I)}^2 dr_{nk}^2 2^{-3n} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2^r}{\rho_r^2}. \end{aligned}$$

Le calcul de p_0 donne

$$\begin{aligned} p_0 &= (\mathcal{M}_{nk}u, \Psi_0)_{L^2(I)} \\ &= dr_{nk} 2^{-n} d_{nk}(u). \end{aligned}$$

De manière similaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous montre que

$$p_0^2 \leq \|u\|_{L^2(I)}^2 dr_{nk}^2 2^{-3n}.$$

Ainsi, on obtient bien que $\mathcal{M}_{nk} \in \mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$ et

$$\|\mathcal{M}_{nk}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))} \leq \frac{dr_{nk}}{2^{\frac{3n}{2}}} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2^r}{\rho_r^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.26)$$

L'hypothèse (2.24) assure alors que la série de terme général \mathcal{M}_{nk} est normalement convergente pour la norme $||| \cdot |||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}$. Ainsi, \mathcal{M} est bien défini et $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$.

Etape deux : $\mathcal{R} + \mathcal{M} \in \text{Isom}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$

Pour cela, il reste à démontrer que les hypothèses du théorème 2.55 sont bien vérifiées. L'opérateur \mathcal{R} étant défini comme dans la propriété 2.51, $L^2(I)$ et $\text{Im}(\mathcal{R})$ munis respectivement de la norme usuelle et de la norme définie par (2.16) sont des espaces de Banach. De plus, en se rappelant que \mathcal{R} est un isomorphisme de norme 1, \mathcal{R} est fermé, \mathcal{R}^{-1} existe et est borné. Il est clair que $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}) = L^2(I)$. En remarquant que $|||\mathcal{R}|||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))} = |||\mathcal{R}^{-1}|||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))} = 1$ il reste à vérifier,

$$|||\mathcal{M}|||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))} < 1.$$

En remarquant que

$$|||\mathcal{M}|||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))} \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n-1} |||\mathcal{M}_{nk}|||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))},$$

et en se rappelant l'expression (2.26) de $|||\mathcal{M}_{nk}|||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}$, l'hypothèse (2.24) assure bien $|||\mathcal{M}|||_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))} < 1$. Ce qui achève la démonstration de la proposition. En effet, $\mathcal{R} + \mathcal{M} \in \mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$ et $\mathcal{R} + \mathcal{M}$ est inversible d'après le théorème 2.55, puis d'après le théorème de Banach Steinhaus, $\mathcal{R} + \mathcal{M}$ un isomorphisme (voir [29] p.18). \square

L'hypothèse (2.24) n'étant pas très maniable, donnons une autre condition suffisante dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.58 *Soit \mathcal{R} l'opérateur associé à un arbre régulier de résistance globale finie. Si la suite $(dr_{nk})_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}}$ des valeurs des différentes perturbations vérifie l'hypothèse suivante*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{dr_{nk}}{\rho_n 2^n} < 1 \quad (2.27)$$

alors $\mathcal{M} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathcal{M}_{nk}$ est bien défini, $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$ et $\mathcal{R} + \mathcal{M} \in \text{Isom}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$.

Démonstration : Il s'agit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,

$$\frac{dr_{nk}}{2^{\frac{3n}{2}}} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2^r}{\rho_r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{dr_{nk}}{\rho_n 2^n}.$$

En se rappelant l'expression des valeurs propres dans la propriété 2.35, on a, pour tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\frac{1}{\lambda_0^2} \leq \frac{1}{\rho_r^2} \leq \frac{1}{\rho_n^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0^2} + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2^r}{\rho_r^2} &\leq \frac{1}{\rho_n^2} \left(1 + \sum_{r=0}^{n-1} 2^r \right) \\ &\leq \frac{2^n}{\rho_n^2}, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \square

Développement limité au premier ordre de la résistance globale perturbée

On peut alors donner le développement limité à l'ordre un de la résistance globale associée à l'arbre perturbé. Pour cela, commençons par rappeler le résultat sur la différentiabilité de l'application inverse démontré dans [29].

Théorème 2.59 *Soit E et F deux espaces de Banach. On définit l'application φ par*

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Isom}(E, F) &\rightarrow \text{Isom}(F, E) \\ u &\mapsto u^{-1}. \end{aligned}$$

Alors, φ est de classe C^1 dans l'ouvert $\text{Isom}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ et sa dérivée est donnée par

$$d\varphi(u)(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \text{ pour } h \in \mathcal{L}(E, F).$$

La propriété suivante donne alors le développement limité à l'ordre un de la résistance globale d'un arbre perturbé.

Propriété 2.60 *Soient T un arbre régulier de résistance globale R finie et \mathcal{R} l'opérateur associé. Soit \tilde{T} l'arbre perturbé dont les valeurs des perturbations sont données par la suite $(dr_{nk})_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$. On suppose qu'elle vérifie l'hypothèse (2.27) du corollaire 2.58. Alors, en notant \mathcal{M} l'opérateur de perturbation et \tilde{R} la résistance globale de l'arbre \tilde{T} , on a*

$$\tilde{R} = R + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} 2^{-2n} dr_{nk} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}).$$

Remarque 2.61 *On retrouve, quitte à passer à la somme infinie, le même résultat que dans le cas fini (voir la propriété 2.20).*

Démonstration : On suppose que la suite $(dr_{nk})_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$ vérifie l'hypothèse (2.27) du corollaire 2.58. Ainsi, $\mathcal{R} + \mathcal{M} \in \text{Isom}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))$ avec $L^2(I)$ et $\text{Im}(\mathcal{R})$ espaces de Banach. On peut donc appliquer le théorème 2.59. On obtient ainsi

$$(\mathcal{R} + \mathcal{M})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{R}^{-1} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}).$$

En appliquant alors l'expression (2.19) donnant la résistance globale, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \left[(\mathbf{1}_I, (\mathcal{R} + \mathcal{M})^{-1} \Psi_0)_{L^2(I)} \right]^{-1} \\ &= \left[R^{-1} - (\mathbf{1}_I, \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{R}^{-1} \Psi_0)_{L^2(I)} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

En combinant alors les propriétés spectrales de \mathcal{R} de la propriété 2.35 et la remarque 2.43, on obtient

$$\mathcal{R}^{-1} \Psi_0 = R^{-1} \Psi_0.$$

Ainsi, l'égalité devient

$$\tilde{R} = \left[R^{-1} - R^{-1} (\mathbf{1}_I, \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{M}\Psi_0)_{L^2(I)} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}) \right]^{-1}. \quad (2.28)$$

$\mathcal{R} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ est un opérateur auto-adjoint (voir la propriété 2.32). Ainsi, en notant $\mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}) = \text{Im}(\mathcal{R})$,

$$\mathcal{R}^{-1} : \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}) \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$$

est lui aussi auto-adjoint. En effet, on a, pour tout $v \in \mathcal{D}((\mathcal{R}^{-1})^*)$ et tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1})$,

$$(v, \mathcal{R}^{-1}u)_{L^2(I)} = (v, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}p)_{L^2(I)},$$

avec $p \in L^2(I)$ vérifiant $u = \mathcal{R}p$. Ainsi, on obtient $(v, \mathcal{R}^{-1}u)_{L^2(I)} = (v, p)_{L^2(I)}$. En utilisant alors le fait que \mathcal{R} est auto-adjoint, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}^{-1}v, u)_{L^2(I)} &= (\mathcal{R}^{-1}v, \mathcal{R}p)_{L^2(I)} \\ &= (\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}v, p)_{L^2(I)} \\ &= (v, p)_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{R}^{-1} est auto-adjoint. En utilisant cela dans (2.28) et en se rappelant les propriétés spectrales de \mathcal{R} , $\mathbf{1}_I$ étant égal à Ψ_0 , le calcul de la résistance perturbée devient

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \left[R^{-1} - R^{-1} (\mathcal{R}^{-1}\mathbf{1}_I, \mathcal{M}\Psi_0)_{L^2(I)} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}) \right]^{-1} \\ &= \left[R^{-1} - R^{-2} (\mathbf{1}_I, \mathcal{M}\Psi_0)_{L^2(I)} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

En se rappelant alors l'expression (2.25) de la fonction $\mathcal{M}_{nk}u$ et en appliquant cela à $\mathcal{M} = \sum_{n,k} \mathcal{M}_{nk}$, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_I, \mathcal{M}\Psi_0)_{L^2(I)} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n-1} (\mathbf{1}_I, \mathcal{M}_{nk}\Psi_0)_{L^2(I)} \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{dr_{nk}}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

On peut juste remarquer que l'hypothèse (2.27) implique que $(dr_{nk}/2^{2n})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ car, à partir d'un certain rang, ρ_n étant le reste d'une série convergente, on a bien $2^{-n} \leq 1/\rho_n$. On obtient alors pour la résistance perturbée

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= R \left[1 - R^{-1} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{dr_{nk}}{2^{2n}} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}) \right]^{-1} \\ &= R \left(1 + R^{-1} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{dr_{nk}}{2^{2n}} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}) \right) \\ &= R + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{dr_{nk}}{2^{2n}} + o(\|\mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(L^2(I), \text{Im}(\mathcal{R}))}). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Pour finir, le corollaire suivant donne le développement limité à l'ordre un de la résistance globale d'un arbre géométrique perturbé.

Corollaire 2.62 *Soient T un arbre géométrique de loi $r_n = \alpha^n$ avec $\alpha \in]0, 2[$, de résistance globale R finie et \mathcal{R} l'opérateur associé. Soit \tilde{T} l'arbre perturbé dont les valeurs des perturbations sont données par la suite $(dr_{nk})_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$. On suppose qu'elle vérifie*

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{dr_{nk}}{\alpha^n} < 1.$$

Alors, l'hypothèse (2.27) du corollaire 2.58 est vérifiée et en notant \tilde{R} la résistance globale de l'arbre \tilde{T} , on a

$$\tilde{R} = R + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n m_n + o\left(\sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{dr_{nk}}{\alpha^n}\right)$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{dr_{nk}}{\alpha^n}$, moyenne des perturbations relatives de la génération n .

Démonstration : C'est une simple application de la propriété 2.60. \square

Remarque 2.63 *On retrouve ainsi le fait qu'une perturbation, même totale, sur un ensemble de générations est d'autant moins importante qu'elle touche des générations profondes de l'arbre. De plus, si la loi géométrique de l'arbre vérifie $\alpha \simeq 2$, alors ce dernier est globalement perturbé et des perturbations, même profondes, deviennent importantes.*

2.2.6 Conclusion et extensions

Dans cette section, nous avons plongé l'ensemble des sorties d'un arbre régulier dans un espace de dimension une, ce qui nous a permis de passer rigoureusement à la limite quand le nombre de générations tend vers l'infini. Pour cela, nous avons tout d'abord, pour un arbre fini, plongé ses 2^N sorties dans cet espace de dimension une pour ensuite passer à la limite. Nous nous sommes alors concentrés sur cette convergence et sur les propriétés de l'opérateur limite ainsi construit. Un autre point de vue consiste à étudier intrinséquement un arbre infini. Une fois un tel objet étudié, il sera alors possible de plonger l'ensemble infini des bouts de cet arbre dans des espaces continus à plusieurs dimensions. Il n'est alors pas nécessaire de se restreindre à la dimension une et aux arbres réguliers. Les deux chapitres suivants étudient justement ce type d'arbre infini.

Introduction aux chapitres 3 et 4

Le prochain chapitre fait l'objet d'un article accepté dans *Networks and Heterogeneous Media*, le chapitre suivant apportant quelques compléments à cet article. Je tiens à préciser que, dans un souci de cohérence, la partie 3.4 de cet article n'a pas été supprimée bien que je n'aie que très peu participé aux résultats.

Nous nous intéressons à certains problèmes théoriques posés par la modélisation de l'arbre bronchique par un arbre résistif infini. Le modèle est ainsi basé sur la loi de Poiseuille qui relie de façon proportionnelle, le coefficient étant la résistance de la branche, le débit de chaque tube au saut de pression à ses extrémités. En faisant tendre le nombre de générations vers l'infini, on obtient alors notre arbre résistif infini dont on va étudier les propriétés.

En particulier, l'un des objectifs est de décrire le processus de ventilation comme un opérateur Dirichlet-Neumann qui associe à chaque pression donnée au niveau du parenchyme le flux d'air en sortie correspondant. Lors de l'inspiration, par exemple, la contraction du diaphragme engendre une pression négative au niveau du parenchyme dont résulte une entrée d'air frais.

La loi de Poiseuille permettant, une fois les pressions connues en chaque noeud de l'arbre, de reconstituer les flux d'air correspondant, la difficulté principale est d'énoncer des théorèmes de trace donnant un sens à la pression sur l'espace des bouts de notre arbre infini et de vérifier le caractère bien posé du problème de Dirichlet permettant de reconstruire la pression sur l'arbre tout entier.

En milieu continu, la construction de l'opérateur de trace sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nécessite la notion de prolongement sur \mathbb{R}^d et celle de restriction. Notre arbre infini ne pouvant être plongé dans un ensemble plus gros, la trace sur l'ensemble des bouts a dû être construite de façon intrinsèque.

Dans la première partie de l'article, nous introduisons des espaces fonctionnels sur les réseaux résistifs puis nous donnons une définition de l'espace de trace, espace des pressions d'énergie finie sur l'ensemble des bouts de l'arbre infini. Nous cherchons ensuite à caractériser cet espace de trace, caractérisation qui sera généralisée dans le chapitre 4. Enfin, l'arbre infini est plongé dans un domaine de \mathbb{R}^d et nous étudions la régularité des champs de pression correspondant.

Chapitre 3

Trace theorems for trees and application to the human lungs

B. Maury D. Salort C. Vannier

Abstract

This paper is motivated by the modelling of the respiratory system. The real bronchial tree is embedded within the parenchyma, and the ventilation is caused by negative pressures at the alveolar level. We aim at describing the collection of pressures at alveolae as a function, and to establish a sound mathematical framework for the instantaneous ventilation process. To that purpose, we identify the bronchial tree with an infinite resistive tree, we endow the space of pressures at bifurcating nodes with the natural energy norm (rate of dissipated energy), and we give a sense to pressure field on its boundary (i.e. set of simple paths to infinity). In a second step, we imbed in a certain sense the infinite collection of leafs onto a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, and we establish some regularity properties for the corresponding pressure field. In particular, for the infinite counterpart of a regular, healthy lung, we show that the pressure field lies in the Sobolev space $H^s(\Omega)$, with $s \approx 0.45$. This makes it possible to propose a model for the ventilation process which takes the form of a boundary problem, where the role of the boundary is played by a full domain in the physical space, and the elliptic operator is defined over an infinite dyadic tree.

3.1 Introduction, modelling aspects

The present work addresses some theoretical issues raised by the modelling of the bronchial tree as an infinite resistive tree. The actual bronchial tree can be seen as an assembly of connected pipes, structured in a dyadic way, through which air flows. According to Poiseuille's law (which we shall assume valid in all branches, see [11, 12] for more details on this assumption), the flow rate Q through a pipe unit is proportional to the pressure drop between its ends, which expresses in a Ohm's law manner :

$$P_{in} - P_{out} = RQ,$$

where R is the resistance of the pipe, which scales like L/D^4 (where L is the length, and D the diameter). The height of the real bronchial tree is 23, which identifies the pressure field at the leafs to a collection of over 8 million values. We aim here at replacing this discrete data by a continuum.

The present work can be put in regard with the approach proposed in [1, 2], in which the authors propose a theoretical framework and associated numerical tools to handle elliptic problems set on some bi-dimensional tree-like fractal domains. Their approach uses intensively the auto-similar structure of the domain. The framework here is different : we start with a simpler model (Poiseuille's law in a network of pipes), with much lighter assumptions. As a consequence, non-homogeneous situations can be handled, and all considerations related to the flowing of air through branches are completely decorrelated from any geometric consideration (only dimensions of the pipes are involved, through the value of local resistance) : geometrical aspects are involved only in the embedding process of the boundary leafs onto a physical domain. See although [36, 37] where the authors built dyadic trees as solutions to some optimal transportation problems.

In order to point out the difficulties pertaining to these objectives in the context of trees, let us add here some remarks related to (apparently) similar questions in the context of Sobolev spaces. As will be made clear, the natural norm (i.e. based on energy considerations) for the tree is some kind of H^1 semi-norm (whose square is the rate of dissipated energy), to which one adds a term involving the value at a vertex, to handle constant fields. A natural counterpart in \mathbb{R}^d of this norm is defined as follows

$$\|u\|^2 = \int_B |u|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2,$$

where B is the d -dimensional unit ball. Let us denote by H^1 the corresponding Hilbert space (set of all those functions in L^2_{loc} for which the previous quantity is bounded). The question of how such functions may behave at infinity can be formulated by introducing H^1_0 as the closure of $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ in H^1 , and the quotient space $\tilde{H}^{1/2} = H^1/H^1_0$. The first question we will address for the resistive tree takes here the following form : is $\tilde{H}^{1/2}$ trivial or not? The situation in \mathbb{R}^d is quite poor, as, when the space is not trivial, it is in fact almost trivial. More precisely, the situation is the following :

for $d = 1, 2$: no trace can be defined at infinity, $\tilde{H}^{1/2} = \{0\}$;

for $d \geq 3$: the trace space $\tilde{H}^{1/2}$ is not trivial, but it is one-dimensional. The only non-trivial instance corresponds to constant functions.

The poorness of $\tilde{H}^{1/2}$ for $d \geq 3$ is due to the fact that the finite character of the H^1 semi-norm imposes some rigidity in the transverse direction, so that only asymptotically constant functions qualify (see [5] for a detailed proof, in the case $d = 3$). A richer situation can be obtained by integrating some non-isotropic weight in the norm, in order to lower the correlation in the transverse direction. This transverse decorrelation corresponds to the native situation for trees : the very tree-structure allows fields to exhibit highly different values at vertices belonging to the same generation (as soon as those vertices are far away from each other with respect to the natural distance associated to the tree). As a consequence, the quasi-trivial situation (one dimensional trace space) will not be met for the trees we plan to study : the trace space will be either trivial (case $H^1 = H^1_0$), or infinite dimensional.

The paper is built as follows. In Section 2 we introduce functional spaces on general infinite networks, we give an abstract definition of the trace space we aim at identifying. We then give a characterization of the dyadic trees for which the abstract trace space is not trivial. In Section 3, the abstract trace space introduced in the previous section is identified to a functional space on the boundary $\Gamma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. In section 4, the tree is embedded in a domain of \mathbb{R}^N (as the bronchial tree in the paremchyma), and we investigate the regularity of the corresponding pressure fields.

3.2 Functional spaces in infinite trees

3.2.1 General setting

In what follows we shall use notation T to define a general network, as those considerations are to be applied to special networks, namely dyadic trees. Yet, we do not suppose in this first section that T is actually a tree.

Let $T = (V, E, r)$ denote a resistive network : V is the set of vertices (possibly infinite), E , subset of $V \times V$, is the set of edges, and $r \in (0, +\infty)^E$ a resistance field. We will follow the convention that edges are counted only once in E , that is to say $(x, y) \in E \implies (y, x) \notin E$. As for resistances, we will of course consider that $r(y, x)$ is defined and equal to $r(x, y)$ as soon as $(x, y) \in E$. We will make use of the field of conductances, defined by $c(e) = 1/r(e)$ for any $e \in E$.

We shall simply assume in this introductory section that the number of vertices is countable, and the number of neighbours is uniformly bounded :

$$\sup_{x \in V} \#\{y, (x, y) \in E\} < +\infty.$$

As the only functions defined over edges are fluxes, we shall design by \mathbb{R}^E the set of skew symmetric functions over edges :

$$u(y, x) = -u(x, y) \text{ as soon as } (x, y) \in E.$$

Definition 3.1 For any $u \in \mathbb{R}^E$ (skew symmetric flux distribution as defined above), we define

$$\partial u \in \mathbb{R}^V, \quad \partial u(x) = \sum_{y \sim x} u(x, y),$$

where $y \sim x$ stands for $(x, y) \in E$ or $(y, x) \in E$. Symmetrically, for any field $p \in \mathbb{R}^V$ (collection of pressures at nodes), we define

$$\partial^* p \in \mathbb{R}^E, \quad \partial^* p(x, y) = -\partial^* p(y, x) = p(y) - p(x).$$

Remark 3.2 The operator ∂ can be seen as the divergence operator on the tree. Notice that $\partial u(x) > 0$ means that some fluid enters the domain at x .

Consider now that some viscous fluid flows through the edges of the network according to Poiseuille's law, and that some fluid is injected at constant rate 1 through some vertex o . This model takes the form of a discrete Darcy problem :

$$\begin{cases} u + c\partial^* p = 0, \\ \partial u = \delta_o, \end{cases}$$

where c is the conductance field $c(e) = 1/r(e)$, and δ_o is 1 at o , and vanishes everywhere else.

Remark 3.3 Note that ∂^* is formally the opposite of the adjoint of ∂ , the same way the divergence operator is the opposite of the gradient operator.

We shall be interested to solution with finite energy, or more precisely finite instantaneous loss of energy over the network by viscous dissipation. It leads to energy spaces :

$$L^2(T) = \{u \in \mathbb{R}^E, \|u\|_2^2 = \sum_{(x,y) \in E} r(x,y)u(x,y)^2 < +\infty\},$$

and its pressure counterpart

$$H^1(T) = \{p \in \mathbb{R}^V, |p|_1^2 = \sum_{(x,y) \in E} c(x,y)[p(y) - p(x)]^2 < +\infty\}.$$

The flux space is a standard weighted ℓ^2 space, and $c\partial^*$ is an isometry from $H^1(T)/\mathbb{R}$ onto $L^2(T)$. We shall endow $H^1(T)$ with the norm

$$\|p\|_1^2 = c(o)p(o)^2 + |p|_1^2.$$

Remark 3.4 *The way to handle constant functions may affect significantly the result. In the spirit of [14], an alternative choice would consist in replacing $p(o)^2$ by an L^2 -like quantity*

$$\sum_{x \in V} \rho(x)p(x)^2,$$

where ρ is for example the average resistance (i.e. average length, see Remark 3.11 below) of edges which contain x . This choice would lead to different results, much more similar to the \mathbb{R}^d context : in particular, $H_0^1(T)$ identifies to $H^1(T)$ as soon as the diameter of the tree (i.e. the maximal resistance of a single path to infinity) is infinite. The choice we made is therefore essential, and justified by modelling considerations : the L^2 norm of the pressure does not make sense in terms of energy, whereas the H^1 semi-norm is the rate of dissipated energy.

Definition 3.5 *We denote by $D(T)$ the set of finitely supported functions in \mathbb{R}^V , and we define $H_0^1(T)$ as the closure in $H^1(T)$ of $D(T)$.*

Let us now formulate a discrete counterpart of the Green formula.

Proposition 3.6 *(Green formula on the whole network)*

Let $p \in H^1(T)$ and $q \in H_0^1(T)$ be given. For any sequence (q_n) in $D(T)$ which converges to q , the quantity

$$-\sum_{x \in V} \partial c \partial^* p(x) q_n(x)$$

converges to a value which does not depend on the chosen sequence. This defines $-\partial c \partial^ p$ as an element of $H^{-1}(T) = (H_0^1(T))'$, and it holds*

$$\langle -\partial c \partial^* p, q \rangle_{(H^{-1}(T), H_0^1(T))} = \sum_{e \in E} c(e) \partial^* p(e) \partial^* q(e). \quad (3.1)$$

Proof. For $q_n \in D(T)$, a summation by parts gives

$$-\sum_x \partial c \partial^* p(x) q_n(x) = \sum_e c(e) \partial^* p(e) \partial^* q_n(e),$$

and the right-hand side converges to $\sum_e c(e) \partial^* p(e) \partial^* q(e)$. □

Remark 3.7 Note the absence of boundary terms in the Green formula. It is due to the fact that all vertices of T are considered as inner vertices, including those which are involved in a single connection (like the root of the dyadic tree which we introduce in the next section). A Green formula with boundary terms can be recovered by introducing a partition $V = \mathring{V} \cup \partial V$, where ∂V stands for any subset of V (arbitrarily considered as the boundary of V). For any $x \in \partial V$, the quantity $-\partial c \partial^* p(x)$ is the flux entering the network. Denoting by $g(x) = \partial c \partial^* p(x)$ the flux getting out of the network (g plays the role of $c \partial p / \partial n$ in the context of PDE's), we may write (3.1) the following way

$$-\sum_{x \in \mathring{V}} \partial c \partial^* p(x) q(x) = \sum_{e \in E} c(e) \partial^* p(e) \partial^* q(e) + \sum_{x \in \partial V} g(x) q(x).$$

This formula is particularly adapted to the case of a network with some fluid entering (or flowing out) at some vertices $x \in \partial V$, and conservative (i.e. with no leak) at vertices in \mathring{V} . Assuming $p \in H_0^1$ (the case of fluid entering the network at infinity is postponed to the next sections), and taking $q = p$, we get the instantaneous energy balance

$$\sum_{e \in E} c(e) |\partial^* p(e)|^2 = \sum_{e \in E} r(e) |u(e)|^2 = - \sum_{x \in \partial V} g(x) p(x),$$

where the left-hand side is the rate of dissipated energy within the network, and the right-hand side is the power of external forces.

The abstract trace space of $H^1(T)$ can be defined in this general framework the following way

Definition 3.8 (Abstract trace space)

Let T be a resistive network. The trace space is defined as

$$\tilde{H}^{1/2} = H^1(T) / H_0^1(T).$$

We denote by $\tilde{\gamma}_0$ the abstract trace operator (canonical surjection).

Notice that $\tilde{H}^{1/2}$ is trivial for any finite network.

Remark 3.9 The upperscript 1/2 in $\tilde{H}^{1/2}$ is purely formal. We shall see that the trace space, in the case of dyadic trees, can be identified in some sense with Sobolev spaces H^s , where s depends on the resistances.

3.2.2 Abstract trace space on a dyadic tree

We investigate here whether the abstract trace space is trivial or not, in the case of a dyadic tree. Most properties presented in this section are also established in [13], in a slightly different formalism.

So, from now on, T designs an infinite dyadic tree with root o (see Fig. 3.1),

$$V = \{o\} \cup \{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1\},$$

$$E = \{(o, X_{00})\} \cup \{(X_{nk}, X_{n+1,2k}), (X_{nk}, X_{n+1,2k+1}), n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1\}.$$

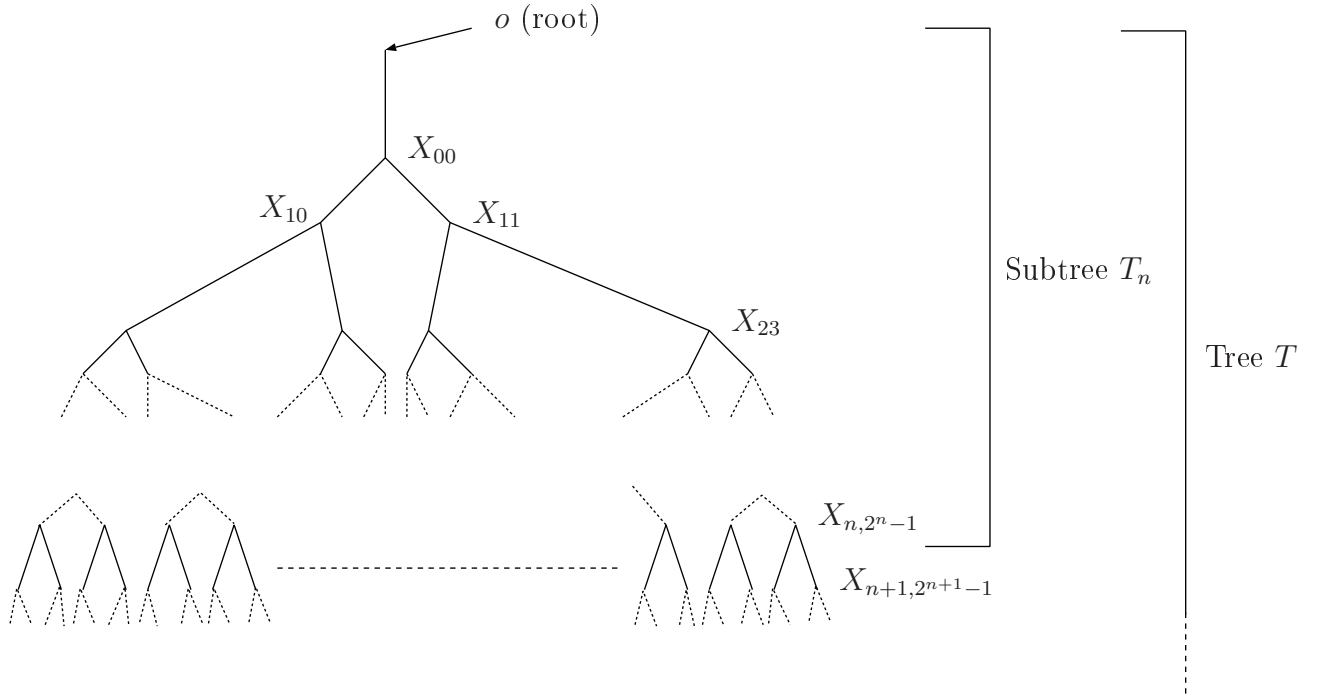


FIG. 3.1 – Tree T

Definition 3.10 A tree such that the resistance of edges is constant for each generation is called regular. We denote by r_n the common value on generation n :

$$r_n = r(X_{n-1,k}, X_{n,2k}) = r(X_{n-1,k}, X_{n,2k+1}), \quad n \geq 1, \quad 0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1,$$

and $r_0 = r(o, X_{00})$.

Remark 3.11 We presented in the introduction some considerations in the context of \mathbb{R}^d . In the comparison with this standard context, it is clear that n plays the role of the radial component (distance to the origin), and k the role of what we called the transverse direction. To detail a bit this comparison, let us mention here that the set of vertices of the tree can be seen as a metric space for the distance canonically induced by $\text{dist}(x, y) = r(x, y)$ for any two connected vertices. Now considering T as a one-dimensional manifold \mathcal{T} , and identifying a pressure field $p \in \mathbb{R}^V$ with a piecewise affine function over \mathcal{T} , we get (s is the curvilinear abscissa)

$$\int_{\mathcal{T}} \left| \frac{\partial p}{\partial s} \right|^2 ds = \sum_{(x,y) \in E} r(x, y) \frac{|p(y) - p(x)|^2}{r(x, y)^2},$$

which is exactly the quantity we defined as $|p|_1^2$. The transverse decorrelation we mentioned in the introduction is due to the fact that two vertices of the same generation may have very little common ancestors, so that their distance may be large.

Definition 3.12 Let $n \geq 1$. We define T_n as the subtree of T with same root o and height n (see Fig. 3.1), we denote by $V(T_n)$ (resp. $E(T_n)$) its set of vertices (resp. edges), and by R_n the equivalent resistance of T_n , defined the following way. Consider that a uniform zero pressure is applied at the leafs of the tree, whereas its root is maintained at pressure 1. The resistance R_n is defined as the reciprocal of the flux flowing out of o , so that Poiseuille's law

$$p_{\text{root}} - p_{\text{leafs}} = R_n \times (\text{global flux})$$

is verified.

Note that (R_n) is an increasing sequence, which leads us to the following definition :

Definition 3.13 The global resistance (or simply resistance when no confusion is possible) of the infinite tree T is defined by

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n \in (0, +\infty].$$

Remark 3.14 The resistance of a regular tree is simply $R = \sum r_n/2^n$.

Before stating the main result of this section, which shows that trees with $R < +\infty$, and only those, exhibit a non-trivial trace space, we present some definitions and lemmas which will be used also in the following sections.

Definition 3.15 The capacity of o with respect to T_n is defined by

$$C(o, T_n) = \inf\{|q|_1^2, q(o) = 1 \text{ and } q(X_{nk}) = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\}.$$

Lemma 3.16 Let T_n be a finite resistive tree of height n . It holds

$$C(o, T_n) = |p_n|_1^2$$

with p_n satisfying

$$\begin{cases} p_n(o) & = 1 \\ p_n(X_{nk}) & = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \\ -\partial c \partial^* p_n(X_{jk}) & = 0 \quad \forall j \leq n - 1, \forall k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Moreover $|p_n|_1^2 = 1/R_n$.

Proof. Let p_n be defined as above. For any q satisfying

$$q(o) = 1, \quad q(X_{nk}) = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\},$$

$d = q - p_n$, we have

$$|q|_1^2 = |p_n + d|_1^2 = |p_n|_1^2 + |d|_1^2 + 2(p_n, d)_1. \quad (3.3)$$

As d is 0 but at internal nodes, Green formula (see Prop. 3.6) gives

$$(p_n, d)_1 = -\langle \partial c \partial^* p, d \rangle = 0,$$

which yields $|q|_1^2 \geq |p_n|_1^2$, so that $C(o, T_n) \geq |p_n|_1^2$, thus equality holds.

Now $|p_n|_1^2 = 1/R_n$ simply expresses the fact that the rate of dissipated energy is the square of the pressure jump divided by the resistance. More precisely, using again Prop. 3.6 and the fact that p_n vanishes at the leafs,

$$|p_n|_1^2 = (p_n, p_n)_1 = -\langle \partial c \partial^* p_n, p_n \rangle = -p_n(o) \partial c \partial^* p_n(o). \quad (3.4)$$

Noting that $-\partial c \partial^* p_n(o)$ is just the global flux, and that $p_n(o) = 1$, we obtain

$$|p_n|_1^2 = \frac{1}{R_n},$$

by definition of R_n (see Definition 3.12). □

The previous consideration extend straightforwardly to infinite trees :

Definition 3.17 *Let T be an infinite resistive tree. The capacity of o w.r.t. T is defined by*

$$C(o, T) = \inf \{ |p|_1^2, p \text{ finitely supported and } p(o) = 1 \}.$$

Lemma 3.18 *Let T be an infinite resistive tree. Then $C(o, T) = R^{-1} \in [0, +\infty)$.*

Proof. It is a consequence of the fact that

$$C(o, T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C(o, T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1/R_n = 1/R.$$

□

Lemma 3.19 *Let $\mathbf{1}_T$ be the function defined on V identically equal to 1. It holds*

$$R = +\infty \Leftrightarrow \mathbf{1}_T \in H_0^1(T).$$

Proof. If $\mathbf{1}_T \in H_0^1(T)$, then $C(o, T) = 0$, and the resistance is infinite. If the resistance is $+\infty$, then the field $p_n \in D(T)$ (defined on T_n by (3.2) and extended by 0 outside T_n) takes value 1 at o , and its H^1 semi-norm goes to 0 as n goes to infinity, so that its distance to $\mathbf{1}_T$ goes to 0. □

We may now state and prove the main theorem of this section.

Theorem 3.20 *Let R be the global resistance of the resistive tree (V, E, r) . We have*

$$R = +\infty \Leftrightarrow H_0^1(T) = H^1(T).$$

Proof. The sufficient condition is straightforward : identity $H^1(T) = H_0^1(T)$ implies $\mathbf{1}_T \in H_0^1(T)$ so that, by Lemma 3.19, the resistance is infinite.

Suppose now $R = +\infty$. The purpose is to establish that any $f \in H^1(T)$ can be approximated by a sequence (f_ℓ) of finitely supported functions. Applying Lemma 3.19 gives $\mathbf{1}_T \in H_0^1(T)$. Then there exists a sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of finitely supported functions converging to $\mathbf{1}_T$, so that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_1 = 0. \quad (3.5)$$

Let f be in $H^1(T)$ and let ε be nonnegative. There exists $n \in \mathbb{N}^*$ such that

$$\sum_{E \setminus E(T_n)} c(x, y)(f(y) - f(x))^2 < \varepsilon, \quad (3.6)$$

where $E(T_n)$ is the set of edges of T_n . The construction of the sequence $(f_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ is then possible. If $x \in V(T_{n-1})$ (set of vertices of T_n except generation n), we set $f_\ell(x)$ equal to $f(x)$. Otherwise there exists k in $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ such that $x \in T_{nk}$, which is the infinite subtree rooted in X_{nk} (see Def. 3.28 and Fig. 3.3.1). We then set

$$f_\ell(x) = f(X_{nk})u_\ell(x) / \max(1/2, u_\ell(X_{nk})).$$

As u_ℓ converges pointwisely to 1, one has $\max(1/2, u_\ell(X_{nk})) = u_\ell(X_{nk})$ for ℓ sufficiently large, so that f_ℓ identifies with f on T_n (including the n^{th} generation). The function f_ℓ is finitely supported by construction. Let us now establish that $|f - f_\ell|_1$ converges to zero. The quantity $|f - f_\ell|_1^2$ reduces to a sum over $E \setminus E(T_n)$:

$$|f - f_\ell|_1 = |f - f_\ell|_{1, T \setminus T_n} \leq |f|_{1, T \setminus T_n} + |f_\ell|_{1, T \setminus T_n}.$$

The first contribution is less than $\sqrt{\varepsilon}$ by definition of n . The second one can be estimated

$$\begin{aligned} \sum_{E \setminus E(T_n)} c(x, y)(f_\ell(x) - f_\ell(y))^2 &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{f(X_{nk})^2}{u_\ell(X_{nk})^2} \sum_{E(T_{nk})} c(x, y)(u_\ell(x) - u_\ell(y))^2 \\ &\leq \max_{k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \frac{f(X_{nk})^2}{u_\ell(X_{nk})^2} |u_\ell|_1^2. \end{aligned}$$

Now as u_ℓ converges uniformly (for n fixed) to 1 on the set of leafs of T_n , the maximum in the previous expression is bounded. As $|u_\ell|_1^2$ goes to 0 as ℓ goes to infinity, the quantity can be controlled by ε for ℓ sufficiently large, which ends the proof. \square

We finish this section by establishing a Poincaré-like inequality for functions in $H_0^1(T)$, and some general properties which will be useful in the following.

Proposition 3.21 (*Poincaré inequality*)

Let T be a tree with finite resistance. Then there exists $C > 0$ satisfying for each $f \in H_0^1(T)$

$$\|f\|_1 \leq C|f|_1. \quad (3.7)$$

Consequently, $|\cdot|_1$ is a norm on $H_0^1(T)$.

Proof. For any $f \in D(T)$, there exists n such that f is supported within T_n so that, by Lemma 3.16,

$$f(0)^2 \leq R_n |f|_1^2 \leq R |f|_1^2.$$

The density of $D(T)$ in $H_0^1(T)$ concludes the proof (with a constant $C = \sqrt{1+R}$). \square

Definition 3.22 *The set of finite energy harmonic functions is defined by*

$$H_\Delta^1(T) = \{p \in H^1(T) / \partial c \partial^* p = 0\}.$$

Lemma 3.23 *We assume R finite. Then $H_0^1(T) \cap H_\Delta^1(T) = \{0\}$.*

Proof. Let f be in $H_0^1(T) \cap H_\Delta^1(T)$. Green formula (Prop. 3.6) gives $|f|_1 = 0$. As $|\cdot|_1$ is a norm on $H_0^1(T)$, it yields $f \equiv 0$ as required. \square

3.2.3 Abstract Dirichlet boundary conditions

It is now possible to define properly an abstract non-homogeneous Dirichlet problem. Let T be an infinite dyadic tree, and let $\tilde{g} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ be given. We consider the following problem :

$$\begin{cases} p \in H^1(T), \\ -\partial c \partial^* p = \delta_o, \\ \tilde{\gamma}_0(p) = \tilde{g}. \end{cases} \quad (3.8)$$

As a first step, we establish well-posedness (in the finite resistance case) of the homogeneous Dirichlet problem

$$\begin{cases} p \in H_0^1(T), \\ -\partial c \partial^* p = \delta_o. \end{cases} \quad (3.9)$$

Theorem 3.24 *Homogeneous Dirichlet problem (3.9) is well-posed if and only if the global resistance is finite.*

Proof. Let us assume $R < +\infty$. We consider the sequence of fields $q_n = R_n p_n$ (extended by 0 outside T_n), where p_n is defined by (3.2). The H^1 semi-norm of q_n is $\sqrt{R_n}$, so that it is bounded in $H^1(T)$ (the value at o is R_n), therefore one can extract a subsequence (still denoted by (q_n)) which converges weakly towards $q \in H_0^1(T)$. As weak convergence implies pointwise convergence, one has

$$-\partial c \partial^* q = \delta_o.$$

Uniqueness is a direct consequence of Lemma 3.23 (the only harmonic function in $H_0^1(T)$ is 0).

Let us now assume that the resistance is $+\infty$, and that a solution p to Problem (3.9) exists. We denote by q_n the projection of p onto the affine subspace of all those fields q which take value $p(o)$ at o , and which vanishes outside T_n :

$$q(X_{mk}) = 0 \quad \forall m \geq n, \quad 0 \leq k \leq 2^m - 1.$$

This projection is performed with respect to the H^1 norm, which amounts to minimize the H^1 semi-norm, as the value at o is prescribed. As p is harmonic (if one excludes the root o), it turns out that q_n identifies (up to a multiplicative constant) to the field p_n which was built in Lemma 3.16 (see Eqs. (3.2)). More precisely, $q_n = p(o)p_n$. As $|q_n|_1 = p(o)/\sqrt{R_n}$, it goes to 0 as n goes to infinity. On the other hand, as p is in $H_0^1(T)$, q_n converges strongly to p , so that $|p|_1 = 0$, and p is constant, which is in contradiction with any non-zero flux flowing through o . \square

We shall need the next lemma to establish well-posedness of the non-homogeneous Dirichlet problem.

Lemma 3.25 *We assume $R < +\infty$. For each $f \in H^1(T)$ there exists a unique $q \in H_0^1(T)$ and a unique $p \in H_\Delta^1(T)$ such that*

$$\begin{cases} f = p + q, \\ |f|_1^2 = |p|_1^2 + |q|_1^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Proof. As $(\cdot, \cdot)_1$ is a scalar product on $H_0^1(T)$ (see Prop. 3.21), there exists a unique $q \in H_0^1(T)$ which minimizes the distance (for the H^1 semi-norm) over $H_0^1(T)$. Optimality conditions ensure harmonicity of $p = f - q$. \square

Theorem 3.26 *We suppose $R < +\infty$. Let $\tilde{g} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ be given. Then there exists a unique solution to the non-homogeneous Dirichlet problem : Find $p \in H^1(T)$ such that*

$$\begin{cases} -\partial c \partial^* p = \delta_o \\ \tilde{\gamma}_0(p) = \tilde{g}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Proof. We denote by g the harmonic instance of \tilde{g} (given by Lemma 3.25), and by p_∞ the solution to the homogeneous Dirichlet Problem (3.9). Then $p_\infty + g$ is a solution to (3.11). Uniqueness is a consequence of the uniqueness for the homogeneous problem.

This result leads to the problem of the identification of this abstract space $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. So the next issue consists in characterizing the best we can this space.

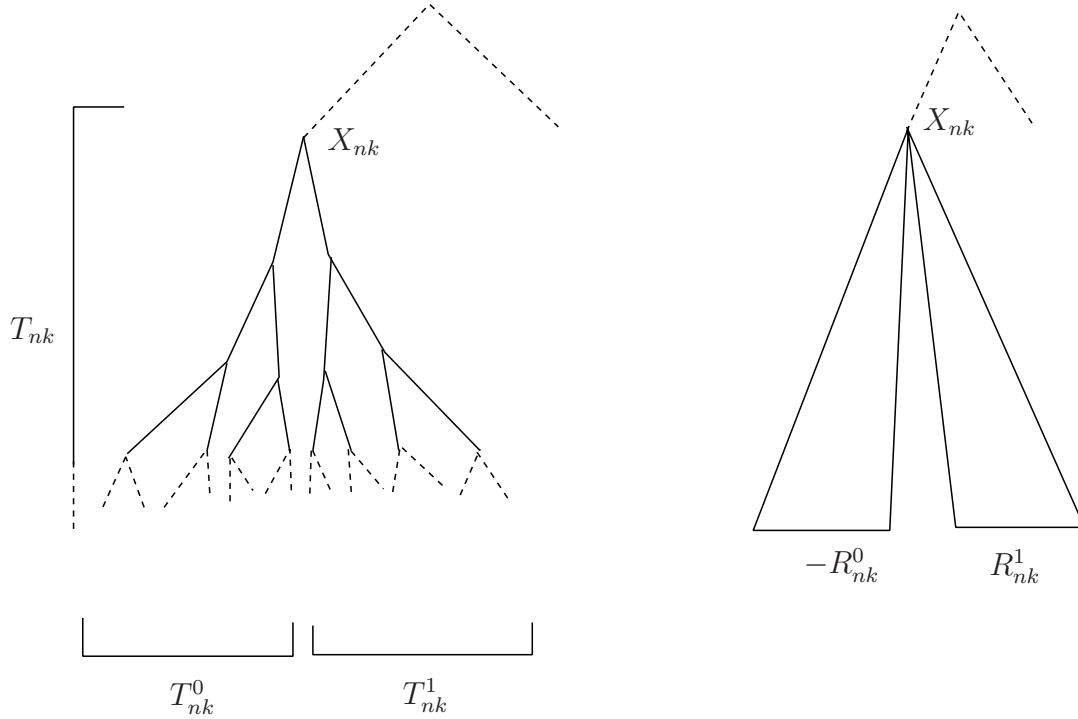
3.3 Trace theorems

3.3.1 Identification with the set of harmonic functions

Proposition 3.27 *We assume $R < +\infty$. We define $I : \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H_\Delta^1(T)$ as the operator which maps any $\tilde{q} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ onto its unique harmonic instance (see Lemma 3.25). Then I is a bicontinuous isomorphism.*

Proof. The mapping I is a one-to-one and onto linear mapping by Lemma 3.25. As it is continuous between Hilbert spaces, it is bicontinuous by Banach-Steinhaus Theorem. \square

Let us now construct a Hilbert basis of $H_\Delta^1(T)$.


 FIG. 3.2 – Subtrees T_{nk}^0 , T_{nk}^1 , and function ψ_{nk} .

Definition 3.28 Let T be an infinite resistive tree, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ and T_{nk} the associated infinite subtree with root X_{nk} . Subtree T_{nk} can be divided into two infinite subtrees denoted by T_{nk}^0 and T_{nk}^1 with $V(T_{nk}^0)$ and $V(T_{nk}^1)$ the corresponding set of vertices. Let R_{nk}^0 and R_{nk}^1 be defined as the corresponding global resistances.

Let $n \in \mathbb{N}$ and $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ be fixed. We assume that R_{nk}^0 and R_{nk}^1 are finite. Theorem 3.24 ensures existence of a unique solution to the following problem

$$\begin{cases} \psi \in H_0^1(T_{nk}^0) \\ -\partial c \partial^* \psi = \delta_{X_{nk}}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Let $\tilde{\psi}_{nk}^0$ be this solution. Similarly, we define $\tilde{\psi}_{nk}^1$ as the unique solution to

$$\begin{cases} \psi \in H_0^1(T_{nk}^1) \\ -\partial c \partial^* \psi = -\delta_{X_{nk}}. \end{cases} \quad (3.13)$$

The idea is to build out of those functions a non trivial function (i.e. non constant at infinity) on T . To that purpose, we add a constant to each of those functions in order to set a common pressure value at X_{nk} (the vertex at which both pressure fields are to be connected). Therefore we define ψ_{nk}^0 and ψ_{nk}^1 as

$$\begin{aligned} \psi_{nk}^0 &= \tilde{\psi}_{nk}^0 - \psi_{nk}^0(X_{nk}), \\ \psi_{nk}^1 &= \tilde{\psi}_{nk}^1 - \psi_{nk}^1(X_{nk}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

We define now ψ_{nk} on the overall tree T :

$$\psi_{nk}(x) = \begin{cases} \psi_{nk}^0(x) & \text{if } x \in V(T_{nk}^0), \\ \psi_{nk}^1(x) & \text{if } x \in V(T_{nk}^1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Remark 3.29 *Let us describe the behaviour of ψ_{nk} “at infinity”. As ψ_{nk}^0 minimizes the H^1 semi-norm among all those fields on $H_0^1(T_{nk}^0)$ which vanish at infinity, and which share the same value at X_{nk} , one has*

$$\tilde{\psi}_{nk}^0(X_{nk}) = 1/C(X_{nk}, T_{nk}^0) = R_{nk}^0,$$

and a similar result for the second subtree. As a consequence, one can say (this assertion will be made more precise in the following), that ψ_{nk} behaves asymptotically like $-R_{nk}^0$ on T_{nk}^0 , like R_{nk}^1 on T_{nk}^1 , and like 0 everywhere else (see Fig. 3.3.1).

Definition 3.30 *Let T be an infinite resistive tree. We will say that T is a uniformly bounded resistive tree if*

$$R_{nk}^0 < +\infty, \quad R_{nk}^1 < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}.$$

Notice that a uniformly bounded resistive tree is automatically finitely resistant, as R_{00}^0 and R_{00}^1 are finite.

Theorem 3.31 *Let T be a uniformly bounded resistive tree. Then $(\varphi_0, \varphi_{nk})_{n,k}$ defined as*

$$\begin{cases} \varphi_0 = \sqrt{r_0} \mathbf{1}_T, \\ \varphi_{nk} = \frac{\psi_{nk}}{\sqrt{R_{nk}^0 + R_{nk}^1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1, \end{cases} \quad (3.16)$$

is a Hilbert basis of $H_\Delta^1(T)$ (r_0 is the resistance of the first edge, and $\mathbf{1}_T$ is the function which is identically equal to 1 on T).

Proof. The functions φ_{nk} are harmonic and normalized by construction.

Let us now show that $(\varphi_0, \varphi_{nk})$ is an orthogonal family. Firstly, as the H^1 semi-norm of φ_0 is 0, and $\varphi_{nk}(o) = 0$, $(\varphi_0, \varphi_{nk})_1$ vanishes for $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. As for $(\varphi_{nk}, \varphi_{n'k'})_1$ products, it is sufficient to establish

$$(\varphi_{00}, \varphi_{nk})_1 = 0 \quad \forall n, \quad k, \quad (3.17)$$

the other situations can be handled in the same manner. The scalar product can be written as a sum of contributions of the two subtrees of T_{00} . As φ_{nk} is 0 on one of those subtrees, only one contribution remains, say on T_{00}^0 . As the function φ_{00} is in $H_0^1(T_{00}^0)$ up to an additive constant (by construction), and as the constant does not affect the $(\cdot, \cdot)_1$ product, Green formula (see Prop 3.6) can be applied on T_{00}^0 :

$$(\varphi_{nk}, \varphi_{00})_{1,T} = (\varphi_{nk}, \varphi_{00})_{1,T_{00}^0} = \langle -\partial c \partial^* \varphi_{nk}, \varphi_{00} \rangle_{(H^{-1}(T_{00}^0), H_0^1(T_{00}^0))} = 0,$$

by harmonicity of φ_{nk} .

It remains to prove that the family is total. In order to do that let f be in $H^1_\Delta(T)$ satisfying

$$(f, \varphi_0) = 0 \quad \text{and} \quad (f, \varphi_{nk})_1 = 0 \quad \forall n, k.$$

Firstly, as f is harmonic at the root o , $\partial^* f(o, X_{00}) = 0$. The purpose of this second part of the proof is to obtain that the jump of f on each edge is related up to a constant to $\partial^* f(o, X_{00})$. Consider any vertex $X_{nk} \neq o$. Orthogonality conditions

$$(f, \varphi_{nk})_1 = 0 \quad \text{and} \quad \partial c \partial^* f(X_{nk}) = 0,$$

together with Green formula (using again the fact that the restriction of φ_{nk} to T_{nk}^i is in $H^1_0(T_{nk}^i)$ up to a constant) lead to a Cramer system. A direct resolution of this Cramer system proves that each flux through downstream edges of X_{nk} is proportional to the upstream flux arriving at X_{nk} . As the flux through the root edge (o, X_{00}) is zero, direct induction over n proves that $\partial^* f$ is identically 0 over T , so that f is constant. As its scalar product with $\mathbf{1}_T$ is 0, f vanishes over T . \square

3.3.2 Construction of the trace operator

In this section we establish that, under some regularity assumptions on the tree T , the trace space can be identified to a subset of $L^2(\Gamma)$, where $\Gamma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ is the set of path to infinity.

Definition 3.32 *The cylinder $C_{nk} \subset \Gamma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ is defined as*

$$C_{nk} = \{(\nu_n)_{n \geq 1} \in \Gamma, \quad \nu_i = \beta_i \quad \text{for } i = 1, \dots, n \text{ with } k = \sum_{i=1}^n \beta_i 2^{n-i}\}.$$

We denote by C_{nk}^0 (resp. C_{nk}^1) the left-hand (resp. right-hand) half of C_{nk} :

$$C_{nk}^i = \{\nu = (\nu_n)_{n \geq 1} \in \Gamma, \quad \nu \in C_{nk}, \quad \nu_{n+1} = i\} \quad i = 0, 1.$$

Note that C_{nk} can be seen as the set of paths through the tree whose tail is contained in T_{nk} .

Definition 3.33 *Let $\Gamma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ be the limit set of the infinite tree T . Let $\sigma(\mathcal{C})$ be the σ -algebra generated by \mathcal{C} , the set of cylinders C_{nk} defined above. We denote by $(\Gamma, \sigma(\mathcal{C}), \mu)$ the standard Bernoulli space, with $\mu(C_{nk}) = 2^{-n}$, and by $L^2(\Gamma)$ the space of square integrable functions over Γ .*

Let us now define the set F which is to play the role of regular functions for PDE problems, for which a proper restriction to the boundary of a domain can be defined. In the present context, F is spanned by functions which vanish on the boundary of T (in the sense of Definition 3.5), except on one subtree T_{nk} , where they vanish up to an additive constant.

Definition 3.34 Let F be the linear space spanned by all those pressure fields p such that there exists $n \in \mathbb{N}$, $k \leq 2^n - 1$, and $\pi \in \mathbb{R}$ such that

$$p|_{T_{nk}} - \pi \in H_0^1(T_{nk}) \text{ and } p|_{T \setminus T_{nk}} \in H_0^1(T \setminus T_{nk}).$$

We define $\gamma_0 : F \rightarrow L^2(\Gamma)$ as follows : for all $p \in F$ satisfying $p|_{T_{nk}} - \pi \in H_0^1(T_{nk})$, and $p|_{T \setminus T_{nk}} \in H_0^1(T \setminus T_{nk})$, we set

$$\gamma_0(p) = \pi \mathbf{1}_{C_{nk}}.$$

γ_0 is defined over F by linearity.

In particular, it is now possible to define the trace of the Hilbert basis of $H_\Delta^1(T)$.

Proposition 3.35 Let T be a uniformly bounded resistive tree. φ_0 and φ_{nk} belong to F , and it holds

$$\gamma_0(\varphi_0) = \sqrt{r_0} \mathbf{1}_\Gamma$$

and

$$\gamma_0(\varphi_{nk})(x) = \begin{cases} \frac{-R_{nk}^0}{\sqrt{R_{nk}^0 + R_{nk}^1}} & \text{if } x \in C_{nk}^0, \\ \frac{R_{nk}^1}{\sqrt{R_{nk}^0 + R_{nk}^1}} & \text{if } x \in C_{nk}^1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Moreover

$$\begin{cases} \|\gamma_0(\varphi_0)\|_{L^2(\Gamma)}^2 & = r_0, \\ \|\gamma_0(\varphi_{nk})\|_{L^2(\Gamma)}^2 & = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(R_{nk}^0)^2 + (R_{nk}^1)^2}{R_{nk}^0 + R_{nk}^1}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Proof. Recalling the construction of φ_0 and φ_{nk} , (3.18) is immediate. Then a simple computation shows (3.19), as $\mu(C_{nk}^0) = \mu(C_{nk}^1) = 1/2^{n+1}$. \square

Proposition 3.36 Let T be a regular resistive tree with $R < +\infty$. Then γ_0 is continuous from $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ to $(L^2(\Gamma), \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)})$. As a consequence it can be extended by density to an operator in $\mathcal{L}(H^1(T), L^2(\Gamma))$.

Proof. Combining $p \in F$ and Lemma 3.25 (R being finite), there exists $p_0 \in H_0^1(T)$ and $p_h \in H_\Delta^1(T)$, such that $(p_0, p_h)_1 = 0$, and

$$p = p(o) \mathbf{1}_T + p_0 + p_h.$$

Note that necessarily $p_0(o) = -p_h(o)$. As $p \in F$, the harmonic component p_h writes

$$p_h = d_0 \varphi_0 + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} d_{nk} \varphi_{nk},$$

for some $N < +\infty$, with $\sum d_{nk}^2 = |p_h|_1^2$. Now noticing that the constant mode φ_0 is excited by $p(o) \mathbf{1}_T$ and $d_0 \varphi_0 = d_0 \sqrt{r_0} \mathbf{1}_T$, and using orthogonality of the family $(\gamma_0(\varphi_{nk}))$ in $L^2(\Gamma)$, one gets

$$\|\gamma_0(p)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = (p(o) + d_0 \sqrt{r_0})^2 + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} d_{nk}^2 \|\gamma_0(\varphi_{nk})\|^2.$$

In the case of a regular tree, Eq. (3.19) identifies $2^{n+1} \|\gamma_0(\varphi_{nk})\|^2$ as the global resistance of the subtree T_{nk}^0 , which is less than $2^{n+1}R$ (the 2^{n+1} resistive subtrees $T_{nk'}^i$, $k' = 0, \dots, 2^n - 1$, $i = 0, 1$ are in parallel).

As for the first term, one has $d_0^2 r_0 = p_h(o)^2 = p_0(o)^2$, and Poincaré inequality (see Lemma 3.21) implies

$$p_0(o) \leq C|p_0|_1.$$

Finally, one gets

$$\|\gamma_0(p)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2p(o)^2 + 2C^2|p_0|_1^2 + R|p_h|_1^2$$

which is controled by $\|p\|_{H^1(T)}^2$. \square

We shall not use a special notation to design the trace space, but simply denote it $\gamma_0(H^1(T))$.

Corollary 3.37 *Suppose that T is a regular resistive tree with $R < +\infty$, then the trace space $\gamma_0(H^1(T))$ is exactly*

$$\left\{ f \in L^2(\Gamma), \exists f_0 \in \mathbb{R}, (f_{nk}) \in \ell^2, f = f_0 \gamma_0(\varphi_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} \gamma_0(\varphi_{nk}) \right\}.$$

Proof. This is a direct consequence of the above results. \square

3.3.3 Geometric and subgeometric trees

We end this section by some considerations about particular trees. The first subsection corresponds to the healthy human lung (see Section 3.5 for more details) for which resistances follow a geometric law. In that case the trace space can be described accurately. In a second step, we investigate the possibility to define the trace operator in a certain sense for trees which are not regular (i.e. resistances may be different within the same generation). We shall need some control on the blow-up of resistances : we restrict our scope to the case of subgeometric trees (trees for which the resistances are bounded by a geometric sequence).

Geometric trees

We consider here trees whose resistances follow the geometric law

$$r_n = r_0 \alpha^n,$$

where α is a positive parameter, which we suppose smaller than 2, so that the resistance is finite (see Remark 3.14).

Definition 3.38 *The Haar basis (Φ_0, Φ_{nk}) of $L^2(\Gamma)$ is defined as $\Phi_0 = \mathbf{1}_\Gamma$ and*

$$\Phi_{nk}(x) = \begin{cases} -2^{-n/2} & \text{if } x \in C_{nk}^0, \\ 2^{-n/2} & \text{if } x \in C_{nk}^1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.20)$$

It is a Hilbert basis of $L^2(\Gamma)$.

Definition 3.39 Let $A^s(\Gamma)$ be defined by

$$A^s(\Gamma) = \left\{ f \in L^2(\Gamma), \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{2ns} c_{nk}(f)^2 < +\infty \right\},$$

with $c_{nk}(f) = (f, \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)}$.

Proposition 3.40 Let T be a homogeneous geometric tree with $\alpha \in (0, 2)$. Then

$$\gamma_0(H^1(T)) = A^s(\Gamma) \quad \text{with } s = \frac{1}{2} - \frac{\ln \alpha}{2 \ln 2}.$$

Proof. Let $f \in \gamma_0(H^1(T))$ be given. By Corollary 3.37, it expresses

$$f = f_0 \gamma_0(\varphi_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} \gamma_0(\varphi_{nk}).$$

A simple computation shows that

$$\Phi_{nk} = \frac{\gamma_0(\varphi_{nk})}{\|\gamma_0(\varphi_{nk})\|_{L^2(\Gamma)}}, \quad \text{with } \|\gamma_0(\varphi_{nk})\|_{L^2(\Gamma)} = C \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n/2}.$$

This, combined with the fact that $s = \frac{1}{2} - \frac{\ln \alpha}{2 \ln 2}$, leads to $2^{ns} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n/2} = 1$, which yields

$$2^{ns} c_{nk}(f) = C f_{nk} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\},$$

which ends the proof. □

General resistive tree

We end this section by some considerations on the possibility to define the trace of a pressure field on Γ in the general case (i.e. non regular tree). It turns out that such traces can no longer be defined as L^2 functions on Γ . It calls for the use of some generalized functions on Γ , which we define as follows :

Definition 3.41 Let T be a uniformly bounded resistive tree. We define

$$A^\infty(\Gamma) = \left\{ \varphi \in L^2(\Gamma), \quad \forall s \geq 0, \|\varphi\|_{A^s(\Gamma)} < +\infty \right\}$$

where $A^s(\Gamma)$ is defined in Def. 3.39. A distribution f on Γ is a linear functional over $A^\infty(\Gamma)$ which is continuous in the following sense :

$$\exists C > 0, \exists s > 0, \forall \varphi \in A^\infty(\Gamma) \quad |\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{A^s(\Gamma)}.$$

The set of all those functionals is denoted by $A^{-\infty}(\Gamma)$.

Under some conditions on the resistances, we may now define the trace operator for non-regular trees. The price to pay for this generalization is that the range of this trace operator is no longer in $L^2(\Gamma)$, but in $A^{-\infty}(\Gamma)$. Note that the trace operator γ_0 defined on F (see def. 3.34) can be seen as a linear mapping from $F \subset H^1(T)$ onto $A^{-\infty}(\Gamma)$, by setting

$$\langle \gamma_0(f), \varphi \rangle = (\gamma_0(f), \varphi)_{L^2(\Gamma)}.$$

Proposition 3.42 *Let T be a uniformly bounded resistive tree. We suppose that there exists $C > 0$ such that*

$$r_{nk} \leq C\beta^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k = 0, \dots, 2^n - 1, \quad (3.21)$$

with $0 < \beta < 2$, where r_{nk} is the resistance of the k -th branch of the n -th generation. Then γ_0 is continuous from $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ onto $A^{-\infty}(\Gamma)$ in the following sense : if $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ converges to $p \in F$, then $(\gamma_0(p_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ converges in the sense of distributions toward $\gamma_0(p)$. As a consequence, γ_0 can be extended as an operator from $H^1(T)$ onto $A^{-\infty}(\Gamma)$.

The range $\gamma_0(H^1(T))$ contains only distributions of order $\frac{\ln \beta}{2 \ln 2} + \varepsilon$, for any $\varepsilon > 0$ (which are L^2 functions for $\beta < 1$).

Proof. As this new definition of γ_0 cannot lead to any tractable property in the following section, we shall not go into the details of the computations. Those computations are somewhat tedious because, as the tree is no longer supposed regular, L^2 -orthogonality of the family $(\gamma_0(\varphi_{nk}))$ is lost, so that extra-diagonal terms have to be explicitly taken into account and controlled. Yet, the assumption on the resistances makes it possible to establish convergence of $\gamma_0(p_\ell)$ toward a distribution of order $\frac{\ln \beta}{2 \ln 2} + \varepsilon$, for any $\varepsilon > 0$, which identifies to $\gamma_0(p)$.

As for the extension of the trace operator onto $A^{-\infty}(\Gamma)$, it is less straightforward than in the case of Hilbert spaces, because the order of the obtained limit distributions has to be controlled, but standard arguments of the theory of distributions can be used to overcome this difficulty. \square

Remark 3.43 *As pointed out, $\gamma_0(H^1(T))$ is a set of functions as soon as $\beta \in (0, 1)$. In general ($\beta \in (1, 2)$), it may contain elements which are not functions. Yet, if the dissymmetry is controlled, which amounts to saying that the tree is not too far from being regular, at least asymptotically, more precisely if*

$$\left| \frac{R_{nk}^1 - R_{nk}^0}{R_{nk}^1 + R_{nk}^0} \right| \leq C2^{-n/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\},$$

it can be checked that $\gamma_0(H^1(T))$ is a subset of $L^2(\Gamma)$.

3.4 Embedding into a domain of \mathbb{R}^d

The approach presented in this section is based on the following strategy : at first, we introduced a dyadic decomposition of a connected bounded Lipschitz domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

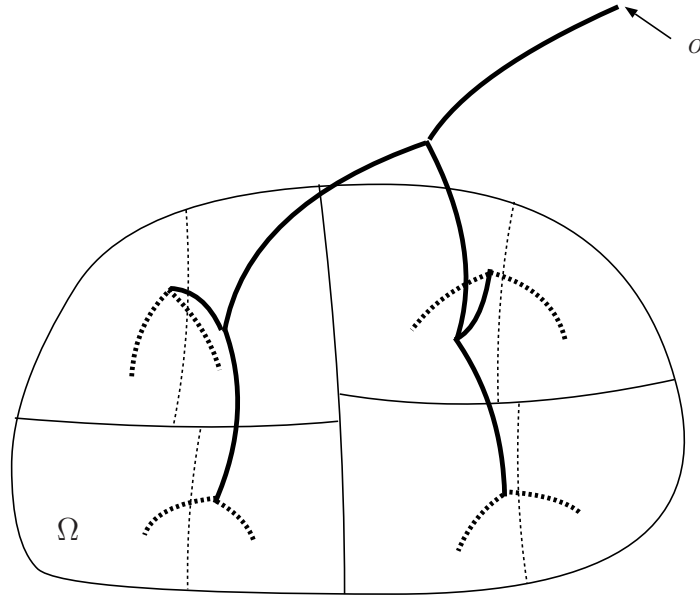


FIG. 3.3 – Embedding into a domain.

(which models the parenchyma of the lung in the case $d = 3$). With respect to this decomposition, we define a trace operator from $H^1(T)$ onto $L^2(\Omega)$. We then investigate the properties of the obtained pressure fields in terms of standard fractional Sobolev regularity.

The main result of this section states that if the tree irrigates the domain in a regular way, and if the tree is geometric ($r_n = \alpha^n$), the embedded trace space $\gamma_\Omega(H^1(T))$ can be identified to the standard Sobolev space H^{sd} , for $sd < 1/2$.

3.4.1 Trace space as a subset of $L^2(\Omega)$

The parenchyma is identified to an open connex bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Each vertex X_{nk} of the tree irrigates, through the subtree of its descendents, a portion of the parenchyma (see Fig. 3.3) which we denote by $\Omega_{nk} \subset \Omega$. This irrigation process exhibits a hierarchical structure. Thus, it is natural to introduce for Ω the following multi-scale decomposition :

Definition 3.44 (Multiscale decomposition)

Let $(\Omega_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k=0, \dots, 2^n-1}$ be a sequence of open nonempty connected subsets of Ω . We say that $\mathcal{O} = (\Omega_{nk})$ is a multi-scale decomposition of Ω if

- (i) $\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \overline{\Omega}_{nk} = \overline{\Omega} \quad \forall n,$
- (ii) $\Omega_{nj} \cap \Omega_{nk} = \emptyset$ as soon as $j \neq k,$
- (iii) $\overline{\Omega}_{n+1,2k} \cup \overline{\Omega}_{n+1,2k+1} = \overline{\Omega}_{nk} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, \dots, 2^n - 1.$

Definition 3.45 (Balanced multiscale decomposition)

The multiscale decomposition $\mathcal{O} = (\Omega_{nk})$ is said to be balanced if

$$|\Omega_{nk}| = 2^{-n}|\Omega| \quad \forall n, \forall k = 0, \dots, 2^n - 1,$$

where $|A|$ denotes the Lebesgue measure of the measurable set A .

We aim here at defining the trace of a function in $H^1(T)$ as a function defined over Ω , according to a multiscale decomposition (Ω_{nk}) . To that purpose, we consider again the subspace $F \subset H^1(T)$ spanned by cylindrical functions, i.e. functions which are constant on the boundary of a subtree, and vanish on the rest of the boundary (see Def. 3.34 for a proper definition of this space). Note that, thanks to the construction of the trace operator in Section 3.3, spanning functions of F can now be defined as functions whose trace is the characteristic function of a cylinder. This section is not concerned with regularity issues (which are gathered in the next section), we simply define traces as functions of $L^2(\Omega)$.

Definition 3.46 Let $\mathcal{O} = (\Omega_{nk})$ be a multiscale decomposition of Ω . We define the mapping $\gamma_\Omega : F \rightarrow L^2(\Omega)$ as follows : for all spanning function $p \in F$, $\gamma_0(p) = \pi \mathbf{1}_{C_{nk}}$, $\pi \in \mathbb{R}$, we set

$$\gamma_\Omega(p) = \pi \mathbf{1}_{\Omega_{nk}}.$$

γ_Ω is defined over F by linearity.

Note that γ_Ω is highly dependent on the decomposition $\mathcal{O} = (\Omega_{nk})$. We drop this explicit dependence to alleviate notations.

Proposition 3.47 Let T be a regular resistive tree with $R < +\infty$, and (Ω_{nk}) a balanced multiscale decomposition (see Definition 3.45). Then γ_Ω is continuous from $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ to $L^2(\Omega)$. As a consequence it can be extended by density to a mapping in $\mathcal{L}(H^1(T), L^2(\Omega))$. Its range will be simply denoted by $\gamma_\Omega(H^1)$.

Proof. As no regularity is required, the proof of proposition 3.36 can be reproduced. Indeed, considering $(\varphi_0, \varphi_{nk})$ the Hilbert basis of $H^1(T)$ (which is included in F), the balanced character of the decomposition ensures orthogonality in $L^2(\Omega)$ of the family $(\gamma_\Omega(\varphi_0), \gamma_\Omega(\varphi_{nk}))$. Furthermore, as $|\Omega_{nk}| = 2^{-n}|\Omega|$, the proof of Proposition 3.36 can be reproduced here, up to a multiplicative factor $|\Omega|$ as soon as integrals over the domain Ω are involved. \square

3.4.2 Regularity results

This section is devoted to a finer description of $\gamma_\Omega(H^1) \subset L^2(\Omega)$. We establish here that the trace space $\gamma_\Omega(H^1)$ lies in fractional Sobolev spaces, as soon as certain conditions are met by the multiscale decomposition. Some properties presented here are proved in a different context in [4].

Geometric issues

Definition 3.48 (Regular / quasi-regular multiscale decomposition)

We say that a multi-scale decomposition \mathcal{O} of a bounded connected Lipschitz domain Ω is regular if the following properties hold

- (i) \mathcal{O} is balanced,
- (ii) there exists a constant C such that for all $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

$$\text{diam}(\Omega_{nk}) \leq C2^{-\frac{n}{d}}.$$

- (iii) There exists $C > 0$ such that

$$\|\tau_h \mathbf{1}_{\Omega_{nk}} - \mathbf{1}_{\Omega_{nk}}\|_{L^1(\Omega)} \leq C|h|2^{-\frac{n(d-1)}{d}}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{0, \dots, 2^n - 1\},$$

where τ_h is the translation operator : $\tau_h \varphi(\cdot) = \varphi(\cdot + h)$.

We say that a multi-scale decomposition (Ω_{nk}) is quasi-regular if there exists a regular multi-scale decomposition $(\tilde{\Omega}_{nk})$ and a bi-Lipschitz map $\phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ such that for all $n \in \mathbb{N}$ and $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

$$\phi(\Omega_{nk}) = \tilde{\Omega}_{nk}.$$

Remark 3.49 The previous definition of a regular decomposition can be put in regard with the notion of regular family of triangulation. Indeed, if we assume that all cells Ω_{nk} are piecewise smooth, a regular decomposition is a decomposition for which cells behave asymptotically like balls in the relations between volume, measure of the boundary, and diameter. For $d = 3$, it writes

$$\text{diam}(\Omega_{nk}) \leq C|\Omega_{nk}|^{1/3}, \quad \text{area}(\partial\Omega_{nk}) \leq C|\Omega_{nk}|^{2/3}$$

The following lemma, which states essentially that the number of neighbors is controlled for regular and quasi-regular decompositions, will be essential in the proof of regularity results.

Lemma 3.50 *Let \mathcal{O} be a quasi regular decomposition. There exists a constant C such that*

$$M_{nk} = \#\{j, \text{dist}(\Omega_{nj}, \Omega_{nk}) \leq 2^{-n/d}\} \leq C \quad \forall n, \quad k.$$

Proof. As $\text{diam}(\Omega_{nj}) \leq C_1 2^{-n/d}$, all cells which contribute to M_{nk} are entirely contained in

$$\{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Omega_{nk}) \leq (1 + C_1)2^{-n/d}\},$$

which is itself contained in some ball B of radius $C_2 2^{-n/d}$, whose measure $|B|$ behaves like $C_3 2^{-n}$. As $|\Omega_{nj}| \geq C_4 2^{-n}$, it yields $|B| \sim C_3 2^{-n} \geq M_{nk} C_4 2^{-n}$, which gives the expected estimate. \square

Sobolev spaces and A^s spaces

This section contains some definitions, technical lemmas, mainly related to the spaces A^r which are somewhat similar to standard Sobolev spaces, but differ in the way oscillations are estimated : a Haar-like basis (which depends on the decomposition) is used instead of sine functions. Yet, as detailed in [4] for the case where Ω is a square, A^r can be identified to a space H^s for certain values of r , under suitable assumptions on the decomposition, This section is essential, as we aim at expressing the regularity of pressure fields in terms of standard criteria (Sobolev framework), whereas the requirement to have finite H^1 energy on the tree, the natural regularity exhibited by our problem, is expressed in terms of decreasing properties of spectral decompositions with respect to a Haar-like basis. Explicit references to the trace space we aim at describing are put off until the next section.

Definition 3.51 *Let \mathcal{O} be a multiscale decomposition of Ω . We define*

$$V_n = \text{vect}(\mathbf{1}_{\Omega_{nk}})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}.$$

We denote by $P_n f$ the projection of f in $L^2(\Omega)$ onto V_n .

We denote by $m_{nk}(f)$ the average of f on the domain Ω_{nk} . The projection of f can be written explicitly :

$$P_n f = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{nk}(f) \mathbf{1}_{\Omega_{nk}}.$$

Proposition 3.52 *Let \mathcal{O} be a decomposition of Ω such that (ii) of Definition 3.48 holds true. Then $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ is dense in $L^2(\Omega)$. As a consequence, density holds for quasi-regular decompositions.*

Proof. Because the diameter of the cells is assumed to go to 0 as n goes to infinity, any open subset of Ω contains a Ω_{nk} . As consequence, any continuous function orthogonal to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ is identically 0. \square

The properties of spaces V_n as approximation spaces can be quantified in terms of Sobolev regularity :

Lemma 3.53 (*Jackson*)

Let $r < 1$ be given. There exists a constant C such that for all $n \in \mathbb{N}$ the following estimate holds

$$\|f - P_n f\|_{L^2(\Omega)} \leq C 2^{-nr/d} \|f\|_{H^r(\Omega)} \quad \forall f \in H^r(\Omega).$$

Proof. We have

$$\|f - P_n f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^{2^n-1} \|f - P_n f\|_{L^2(\Omega_{nj})}^2 = \sum_{j=0}^{2^n-1} \|f - m_{nj}(f)\|_{L^2(\Omega_{nj})}^2.$$

Let $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ and $u \in H^r(\Omega_{nj})$. Then, we have

$$\int_{\Omega_{nj}} |u - m_{nj}(u)|^2 dx = \int_{\Omega_{nj}} |u|^2 - |\Omega_{nj}| m_{nj}(u)^2.$$

We deduce that

$$\frac{1}{2|\Omega_{n_j}|} \int_{\Omega_{n_j}} \int_{\Omega_{n_j}} |u(x) - u(y)|^2 dx dy = \|u - m_{n_j}(u)\|_{L^2(\Omega_{n_j})}^2.$$

But

$$\int_{\Omega_{n_j}} \int_{\Omega_{n_j}} |u(x) - u(y)|^2 dx dy \leq \int_{\Omega_{n_j}} \int_{\Omega_{n_j}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{d+2r}} dx dy \text{diam}(\Omega_{n_j})^{d+2r}.$$

Now (i) and (ii) of Definition 3.48 ensure existence of a constant C such that for all $n \in \mathbb{N}$, and $j \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$

$$\frac{1}{|\Omega_{n_j}|} \text{diam}(\Omega_{n_j})^{d+2r} \leq C 2^{-2rn/d}.$$

Putting everything together, we deduce that

$$\begin{aligned} \|f - P_n f\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C 2^{-2rn/d} \sum_{j=1}^{2^n-1} \int_{\Omega_{n_j}} \int_{\Omega_{n_j}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{d+2r}} dx dy \\ &\leq C 2^{-2rn/d} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{d+2r}} dx dy \\ &\leq C 2^{-2rn/d} \|f\|_{H^r(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

which ends the proof. \square

Remark 3.54 Notice that Condition (iii) is not necessary to establish the result.

We may now define spaces A^r , following [4] :

Definition 3.55 Let \mathcal{O} be a balanced multiscale distribution (Def. 3.45). Let $r \geq 0$. We define the space $A^r(\Omega)$ as follows

$$A^r(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), (\text{dist}_{L^2}(f, V_n) 2^{nr})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2\}$$

endowed with the norm

$$\|u\|_{A^r}^2 = \|P_0 u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{dist}_{L^2}(f, V_n) 2^{nr}\|_{\ell^2}^2.$$

Proposition 3.56 We define $Q_n \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), V_{n+1})$ as

$$Q_n f = P_{n+1} f - P_n f.$$

For any $r > 0$, it holds

$$\|u\|_{A^r}^2 \sim \|P_0 u\|_{L^2}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \|Q_n f\|_{L^2}^2 2^{2ns}.$$

Proof. See [4]. \square

Remark 3.57 Although we do not make explicit reference to the decomposition \mathcal{O} to alleviate notations, the space A^s defined above depends a priori on it. We will see that, under particular conditions on the geometry (quasi-regularity of the decomposition), and for $sd < 1/2$, it can be identified to the standard Sobolev space $H^{sd}(\Omega)$, which of course does not see the decomposition. Yet, in general, it is highly dependent on the way Ω is decomposed. It is particularly true for high values of s , for which belonging to A^s requires high regularity in a certain sense (high correlation of mean values on the two legs of the high frequency Haar functions), which for example does not imply continuity across interfaces between cells.

Definition 3.58 (Besov spaces)

Let $f \in L^2(\Omega)$. We set

$$w(1, t, f) = \sup_{|h| \leq t} \|\tau_h f - f\|_{L^2(\Omega_h)}$$

where $\Omega_h = \{x \in \Omega, x + h \in \Omega\}$, and τ_h is the translation operator. Let $0 < \gamma < 1$. We define the space $B_{2,2}^\gamma$ by

$$B_{2,2}^\gamma(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{2j\gamma} w(1, 2^{-j}, f)^2 < +\infty\}.$$

In particular, $B_{2,2}^\gamma(\Omega) = H^\gamma(\Omega)$ for all $0 < \gamma < 1$, for any Lipschitz domain Ω .

In the next lemma, we prove that, because of the absence of high frequencies, the quantity $w(1, t, f)$ which conditions Besov regularity can be controlled with respect to t for functions of V_n .

Lemma 3.59 Let \mathcal{O} be a regular decomposition (see Def. 3.48), and (V_n) the associated family of functional spaces (see Def. 3.51). There exists a constant C such that for all $t \in \mathbb{R}^+$ the following estimate holds

$$w(1, t, f) \leq C \min(1, 2^{n/d} t)^{1/2} \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in V_n. \quad (3.22)$$

Proof. If $t \geq 2^{-n/d}$, then estimate holds trivially. Let us prove that (3.22) holds for $t = 2^{-\ell}$ where $\ell \geq n/d$. Any $f \in V_n$ writes

$$f = \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} \mathbf{1}_{\Omega_{nk}}.$$

Consider $|h| \leq 2^{-\ell}$, with $\ell \geq n/d$, and $x \in \Omega_{nk}$. As f is constant over Ω_{nk} ,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)|^2 &= |\tau_h \mathbf{1}_{\Omega_{nk}} - \mathbf{1}_{\Omega_{nk}}|^2 |f(x+h) - f(x)|^2 \\ &\leq |\tau_h \mathbf{1}_{\Omega_{nk}} - \mathbf{1}_{\Omega_{nk}}|^2 \sup_{j \sim k} |f_{nj} - f_{nk}|^2, \end{aligned}$$

where $j \sim k$ stands here for $\text{dist}(\Omega_{nj}, \Omega_{nk}) \leq 2^{-n/d}$, so that

$$\sup_{j \sim k} |f_{nj} - f_{nk}|^2 \leq C \sum_{j \sim k} |f_{nj}|^2.$$

By Condition (iii) of Definition 3.48,

$$\int_{\Omega_{nk}} |\tau_h \mathbf{1}_{\Omega_{nk}} - \mathbf{1}_{\Omega_{nk}}|^2 \leq |h|2^{-n(d-1)/d}.$$

Now summing up over k and using Lemma 3.50 (which allows to control the number of j such that $j \sim k$), we get

$$\int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^2 \leq C|h|2^{-n(d-1)/d} \sum_j |f_{nj}|^2$$

The sum behaves like $2^n \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$, so that

$$\|\tau_h f - f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C|h|2^{n/d} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

which yields the estimate. \square

The following proposition identifies the spaces A^r with a standard Sobolev space H^s , with $s = rd$, for some values of s . Note that such an identification cannot be expected to hold for large values of s , as straight discontinuities across hypersurface are ruled out as soon as s is greater than $1/2$, whereas highly “regular” functions in the A^r sense exhibits such discontinuities.

Remark 3.60 *Such an identification between A^r spaces is proposed in [10], and it takes the form $A^r = H^r$, which is in apparent contradiction with the next result. This is due to the fact that definitions of A^r differ. More precisely, both are based on the same general definition (see [4]), but the approximation spaces are different. In [10], the regularity is expressed in terms of the behaviour of expansions with respect to a Haar-like basis, which is built in a tensor way from the one-dimensional Haar basis. Because of this construction, it is natural to make index n depend on the size of one-dimensional basis functions, and finite dimensional spaces are built in this spirit, so that functions at generation n explore oscillations at frequency 2^n . In our situation, as we aim at investigating unstructured decompositions put in regard with dyadic trees, n corresponds to the generation index. As a consequence, it takes us d (= the dimension) steps in the decomposition process to divide by 2 the cell diameter, which amounts to double the explored frequency. This explains that A^r functions, according to our definition, are more regular.*

Proposition 3.61 *Let \mathcal{O} be a regular multiscale decomposition, and A^r the associated space (see Def. 3.55). Then, for all $r \geq 0$*

$$\begin{aligned} A^r(\Omega) &= H^{rd}(\Omega) \quad \text{if } rd < \frac{1}{2}, \\ A^r(\Omega) &\hookrightarrow H^{\tilde{r}}(\Omega) \quad \text{if } rd \geq \frac{1}{2} \quad \forall \tilde{r} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Proof. Let us first prove $A^r(\Omega) \hookrightarrow H^{rd}(\Omega)$, under the condition $rd < \frac{1}{2}$. We have

$$f = P_0 f + \sum_{\ell=0}^{j-1} (P_{\ell+1} - P_{\ell})f + f - P_j f = P_0 f + \sum_{\ell=0}^{j-1} Q_{\ell} f + f - P_j f.$$

Using the fact that $w(1, t, f + g) \leq w(1, t, f) + w(1, t, g)$, we obtain

$$w(1, 2^{-j}, f) \leq w(1, 2^{-j}, P_0 f) + \sum_{\ell=0}^{j-1} w(1, 2^{-j}, Q_\ell f) + w(1, 2^{-j}, f - P_j f).$$

By Lemma 3.59, we deduce that

$$w(1, 2^{-j}, f) \lesssim 2^{-j/2} \sum_{\ell=0}^{j-1} 2^{\ell/2d} \|Q_\ell f\|_{L^2} + \|f - P_j f\|_{L^2}$$

hence

$$w(1, 2^{-j}, f) \lesssim 2^{-j/2} \sum_{\ell=0}^j 2^{\ell/2d} \|f - P_\ell f\|_{L^2}. \quad (3.23)$$

Multiplying by 2^{jrd} , we find that

$$w(1, 2^{-j}, f) 2^{jrd} \lesssim 2^{(rd-1/2)j} \sum_{\ell=0}^j 2^{\ell/2d-r\ell} 2^{r\ell} \|f - P_\ell f\|_{L^2}.$$

Hence we obtain

$$w(1, 2^{-j}, f) 2^{jrd} \lesssim (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} * (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

where

$$a_n = 2^{n(rd-1/2)} \mathbb{1}_{n \geq 0} \quad \text{and} \quad b_n = 2^{rn} \|f - P_n f\|_{L^2} \mathbb{1}_{n \geq 0}.$$

We have $b_n \in \ell^2$ because $f \in A^r(\Omega)$ and $a_n \in \ell^1$ because $rd < 1/2$. We deduce $A^r \hookrightarrow H^{rd}$ by using Young inequalities in the case $rd < 1/2$. In the case $rd \geq 1/2$, we follow the same reasoning except that we multiply equation (3.23) by $2^{j\gamma}$ where $0 \leq \gamma < 1/2$ to obtain

$$A^r(\Omega) \hookrightarrow H^\gamma(\Omega).$$

Let us prove that, for $rd < 1/2$,

$$\|f\|_{A^r} \leq C \|f\|_{B_{2,2}^{rd}} \sim \|f\|_{H^{rd}}. \quad (3.24)$$

Let $\beta = rd < 1/2$. We shall make use of the following characterization of H^β obtained by real interpolation between L^2 and H^β . Let

$$K(f, t) = \inf_{g \in H^\beta} \|f - g\|_{L^2} + t \|g\|_{H^\beta}.$$

Then (see for example [3]),

$$\|f\|_{H^\beta} = \|\rho^j K(f, \rho^{-j})\|_{\ell^2}$$

with $\rho > 1$. To prove estimate (3.24), we are reduced to showing that there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|f - P_j f\|_{L^2} \leq CK(f, 2^{-j\beta/d}). \quad (3.25)$$

Let $f \in L^2$, $g \in H^\beta$. By Lemma 3.53, we obtain

$$\|f - P_j f\|_{L^2} \leq \|f - P_j g\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - P_j g\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + C 2^{-j\beta/d} \|g\|_{H^\beta},$$

which ends the proof. \square

Sobolev regularity of traces

In this section we establish that the embedded trace of $H^1(T)$ pressure fields (introduced by Proposition 3.47) possess some Sobolev regularity. We consider a geometric tree, as in the beginning of section 3.3.3, with

$$r_n = r_0 \alpha^n, \quad \alpha \in (0, 2).$$

We choose $r_0 = 2(2 - \alpha)$, so that the values involved in (3.18) simplify down to $\alpha^{n/2}$. As a consequence, the trace of the Hilbert basis of $H^1(T)$ can be expressed

$$\gamma_\Omega(\varphi_{nk}) = \alpha^{n/2} (\mathbf{1}_{\Omega_{n+1,2k}} - \mathbf{1}_{\Omega_{n+1,2k+1}}).$$

Theorem 3.62 *Let Ω be a bounded connected Lipschitz domain, $\mathcal{O} = (\Omega_{nk})$ a quasi-regular decomposition (see Def. 3.48), and γ_Ω the associated embedded trace operator (see Prop. 3.46). Then*

$$\begin{aligned} \gamma_\Omega(H^1(T)) &= H^{sd}(\Omega) \quad \text{if} \quad sd < \frac{1}{2}, \\ \gamma_\Omega(H^1(T)) &\hookrightarrow H^r(\Omega) \quad \text{if} \quad sd \geq \frac{1}{2}, \quad \text{for all } r < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{where } s = \frac{1}{2} - \frac{\ln(\alpha)}{2 \ln(2)}.$$

Proof. Assume that we are in the regular case. As T is regular and \mathcal{O} is balanced, the family $(\gamma_\Omega(\varphi_0), \gamma_\Omega(\varphi_{nk}))$ is orthogonal in $L^2(\Omega)$. Let us now consider $p \in F$, with (the sum over n is actually finite)

$$p = p_0 \varphi_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} p_{nk} \varphi_{nk}.$$

It holds

$$\begin{aligned} \|\gamma_\Omega(p)\|_{A^s(\Omega)}^2 &= |p^0|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2sn} \sum_{K=0}^{2^n-1} |p_{nk}|^2 \|\gamma_\Omega(\varphi_{nk})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\sim |p^0|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} |p_{nk}|^2 = \|p\|_{H^1(T)}^2 \end{aligned}$$

which proves Theorem 3.62 for a regular multi-scale decomposition.

As for the quasi-regular case, we recall that $H^r(\Omega)$, for $0 < r < 1$ is the set of all those $L^2(\Omega)$ functions such that the quantity

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{d+2r}} dx dy$$

is finite. The stability of this criterium with respect to bi-lipschitz transformations of the domain ensures the conclusion in the quasi-regular case. \square

3.5 Concluding remarks

The approach we presented here makes it possible to model the ventilation process as a special kind of boundary problem set on the paremchyma Ω , where the “boundary” is in fact the domain Ω itself, and the elliptic operator is defined on the tree T . More precisely, let us consider the infinite extrapolation of the actual human respiratory tree. For a healthy lung, this tree can be defined as regular, with

$$r_n = r_0 \alpha^n.$$

The actual 23 generation bronchial tree was shown to be geometric : all pipes have the same shape, and a pipe at generation $n + 1$ is 0.85 smaller than the pipes at generation n (see [16]). As Poiseuille’s law gives a resistance of a pipe proportional to L/D^4 (L is the length, and D is the diameter), the homogeneity coefficient -3 with respect to the size (for a given shape) yields

$$\alpha = 0.85^{-3} \approx 1.63.$$

As it is smaller than 2 the tree has a finite resistance. Notice that this simple fact is quite sensitive to the 0.85 factor. Indeed, it converges because $0.85 > 2^{-1/3} \approx 0.79$. It is also noteworthy that $2^{-1/3}$ is a critical value for the volume also. As pointed out in [15], the volume of the extrapolated version of the actual tree is infinite, for the very same reason $0.85 > 2^{-1/3}$. We must admit that our tree model does not make sense from the geometrical point of view, as far as the bronchial tree itself is concerned, because of this reason. It addresses only the functional nature of this system as a resistive network.

Assuming regularity of the tree, it allows to define the trace operator γ_0 . Now assuming that the way the tree irrigates the paremchyma is quasi-regular (which is suggested by physiological observations), one can then define the operator γ_Ω onto $L^2(\Omega)$, whose range is H^{sd} , with $s = 1/2 + \ln \alpha / (2 \ln 2) \approx 0.15$. For the physical dimension $d = 3$, one gets $sd \approx 0.45$, which is (again, the inequality is tight) less than $1/2$, so that the embedded trace space is the standard Sobolev space $H^{0.45}$.

Before stating the problem, let us mention here that it is much more natural to prescribe a free inlet condition, which takes the form of a Dirichlet condition on the pressure at the root (set to the atmospheric pressure, which can be chosen equal to 0). This changes slightly the form, but the framework we developed applies straightforwardly. Now given a pressure field $g \in H^{0.45}$ (say $g(x) \leq 0$ almost everywhere for inspiration), the problem is set the following way :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } p \in H^1(T) \text{ s.t. } p(o) = 0, \\ -\partial c \partial^* p = 0 \quad \text{in } \hat{\mathbb{A}} \quad T \setminus \{o\}, \\ \gamma_\Omega(p) = g. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

The expected consequence of the inspiration is an irrigation of the paremchyma by fresh air. This irrigation can be described in a hierarchical way straightforwardly from the knowledge of the pressure field over T , as the quantity of fluid which irrigates Ω_{nk} is simply the flux which enters the corresponding subtree T_{nk} .

An interesting consequence of inequality $0.45 \leq 1/2$ is that the set of feasible pressure fields over the parenchyma does not depend on the multiscale decomposition (as soon as it is quasi-regular).

Bibliographie

- [1] Y. ACHDOU, C. SABOT, CHRISTOPHE, N. TCHOU, *A multiscale numerical method for Poisson problems in some ramified domains with a fractal boundary*, Multiscale Model. Simul. 5 (2006), no. 3, 828–860.
- [2] Y. ACHDOU, C. SABOT, CHRISTOPHE, N. TCHOU, *Diffusion and propagation problems in some ramified domains with a fractal boundary*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 40 (2006), no. 4, 623–652.
- [3] J. BERG, J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, (1976).
- [4] A. COHEN, *Numerical analysis of wavelet methods*, Studies in Mathematics and its Applications, 32 (2003).
- [5] P. GÉRARD, *The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 23 (2006), no. 5, 765–779.
- [6] C. GRANDMONT, B. MAURY, N. MEUNIER, *A viscoelastic model with non-local damping Application to the human lungs*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol 40, pp 201-224, 2006.
- [7] B. MAURY, N. MEUNIER, A. SOUALAH, L. VIAL, *Outlet dissipative conditions for air flow in the bronchial tree*, ESAIM : Proceedings, vol 7, 2005, 1-10.
- [8] P.G. LEMARIÉ, Y. MEYER, *Ondelettes et bases hilbertiennes*, Revista Matematica Iberoamericana, Vol 2, N 1 Y 2, 1986.
- [9] P. OSWALD, *Multilevel Norms for $H^{-1/2}$* , Computing 61 (1998), pp. 235-255.
- [10] P. OSWALD, *On N -term approximation by Haar functions in H^s -norms*, Metric Function Theory and Related Topics in Analysis, AFC, Moscow, 1999, pp 137-163.
- [11] C. GRANDMONT, Y. MADAY, B. MAURY, *A multiscale/multimodel approach of the respiration tree*, Proc. of the International Conference, "New Trends in Continuum Mechanics", 8-12 September 2003, Constantza, Romania Theta Foundation Publications, Bucharest (2005).
- [12] B. MAUROY, M. FILOCHE, J.S. ANDRADE JR, B. SAPOVAL, *Interplay between flow distribution and geometry in an airway tree*, Phys. Rev. Lett., 14 (2003) 90.
- [13] P. M. SOARDI, *Potential Theory on Infinite Networks*, Springer-Verlag, 1994.
- [14] SOLOMYAK, MICHAEL, *On the spectrum of the Laplacian on regular metric trees*, Special section on quantum graphs. Waves Random Media 14 (2004), no. 1, S155–S171

- [15] B. MAUROY, M. FILOCHE, E.R. WEIBEL, B. SAPOVAL, *The optimal bronchial tree is dangerous*, Nature 427 (2004) 633-636.
- [16] E.R. WEIBEL, *Morphometry of the human lung*, Springer Verlag and Academic Press, Berlin, New York, 151 pp., 1963.

Chapitre 4

Caractérisation de l'espace de trace pour des arbres non réguliers

Sommaire

4.1	Un espace de trace comme sous-ensemble de distributions	98
4.1.1	Des conditions suffisantes d'appartenance	98
4.1.2	Zoologie d'arbres non réguliers	105
4.2	Un espace de trace comme sous-ensemble de fonctions . .	109
4.2.1	Des conditions suffisantes d'appartenance	109
4.2.2	Zoologie d'arbres non réguliers	112

Dans l'article du chapitre 3, on a montré, dans le cas d'arbres réguliers, que l'espace de trace $\gamma_0(H^1(T))$ est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ (voir la propriété 3.36). Dans le cas particulier d'arbres géométriques, il est même identifiable à un espace $A^s(\Gamma)$, pour un s convenablement choisi (voir la section 3.3.3). On s'intéressera ici plus particulièrement aux arbres non réguliers. Les résistances n'étant plus constantes par génération, la famille $(\gamma_0(\varphi_0), (\gamma_0(\varphi_{nk}))_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ n'est plus L^2 -orthogonale. Il faut ainsi prendre en compte les termes extra-diagonaux, ce qui complique les calculs. Sous certaines conditions sur les résistances de l'arbre non régulier, il est quand même possible de définir l'espace de trace $\gamma_0(H^1(T))$. Suivant les conditions imposées, il sera vu, soit comme un sous-espace de distributions (dans la section 4.1), soit comme un sous-ensemble de fonctions de $L^2(\Gamma)$ (dans la section 4.2). Dans l'article du chapitre 3, un résultat est donné sans démonstration pour les arbres sous-géométriques. Nous reprenons et généralisons ici ce résultat.

4.1 Un espace de trace comme sous-ensemble de distributions

Contrairement aux arbres réguliers (voir la propriété 3.36), l'espace de trace $\gamma_0(H^1(T))$ n'est plus, en général, un sous-espace de $L^2(\Gamma)$. Il peut même n'avoir aucun sens. Pourtant, sous certaines conditions sur les résistances de l'arbre, on peut réussir à le définir. Cet espace n'est plus, alors, un espace de fonctions, mais il est vu comme un sous-ensemble de $A^{-\infty}(\Gamma)$, espace de distributions. La définition 3.41 de l'article permet de définir ce que l'on entend par distributions sur l'espace des bouts d'un arbre infini. L'opérateur de trace γ_0 est alors vu comme un opérateur linéaire de $F \subset H^1(T)$ dans $A^{-\infty}(\Gamma)$ en posant, pour tout $\varphi \in A^{+\infty}(\Gamma)$,

$$\langle \gamma_0(f), \varphi \rangle = (\gamma_0(f), \varphi)_{L^2(\Gamma)}$$

avec $f \in F$. Dans cette section, nous commencerons par donner des conditions suffisantes sur les résistances de l'arbre permettant de prolonger γ_0 à $H^1(T)$ et ainsi de définir l'espace de trace $\gamma_0(H^1(T))$ comme un sous-espace de distributions. Puis nous donnerons des exemples d'arbres non réguliers satisfaisant à ces conditions.

4.1.1 Des conditions suffisantes d'appartenance

On commence par définir les deux quantités suivantes.

Définition 4.1 *Soit T un arbre résistif uniformément borné (voir la définition 3.30). On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$*

$$A_{nk} = \sqrt{R_{nk}^0 + R_{nk}^1} \quad \text{et} \quad D_{nk} = \frac{R_{nk}^1 - R_{nk}^0}{R_{nk}^0 + R_{nk}^1},$$

D_{nk} correspondant à la dissymétrie relative.

Des conditions suffisantes faisant intervenir les dissymétries relatives

On énonce ici le théorème principal qui donne des conditions permettant de donner un sens à l'espace de trace d'arbres non réguliers.

Théorème 4.2 *Si les résistances de l'arbre infini uniformément borné vérifient les trois hypothèses suivantes*

$$(2^{-n} A_{nk} D_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad (4.1)$$

$$\exists s_1 \geq 0, \left(2^{-n(s_1 + \frac{1}{2})} A_{nk} \right)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad (4.2)$$

alors γ_0 est continue de $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ dans l'espace des distributions dans le sens suivant : pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in F$, la suite des distributions correspondante $(\gamma_0(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens des distributions vers $\gamma_0(f)$. Comme conséquence, on peut alors étendre γ_0 à un opérateur dans $\mathcal{L}(H^1(T), A^{-\infty}(\Gamma))$.

Remarque 4.3 *La propriété 3.42 de l'article du chapitre 3 donne ce résultat sans démonstration dans le cas particulier où l'arbre non régulier est sous-géométrique. On vérifiera, dans la sous-section suivante que, dans ce cas particulier, les hypothèses (4.1) et (4.2) sont bien vérifiées.*

La démonstration du théorème 4.2 utilise l'expression explicite de $\langle \gamma_0(f), \varphi \rangle = (\gamma_0(f), \varphi)_{L^2(\Gamma)}$ pour tout $f \in F$ et tout $\varphi \in A^{+\infty}(\Gamma)$. On a ainsi besoin de connaître les produits scalaires de $\gamma_0(\varphi_0)$ et $\gamma_0(\varphi_{nk})$ contre la base de Haar $(\Phi_0, (\Phi_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ de $L^2(\Gamma)$. Le lemme calculatoire suivant explicite leurs valeurs.

Lemme 4.4 *Soit T un arbre résistif uniformément borné. Les produits scalaires de $\gamma_0(\varphi_0) \in L^2(\Gamma)$ avec les différentes fonctions de Haar valent*

$$\begin{cases} (\gamma_0(\varphi_0), \Phi_0)_{L^2(\Gamma)} = \sqrt{r_0} \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \quad (\gamma_0(\varphi_0), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Soit un couple $(p, l) \in \mathbb{N}^2$ fixé, $p \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, \dots, 2^p - 1\}$. Le produit scalaire de $\gamma_0(\varphi_{pl}) \in L^2(\Gamma)$ avec Φ_0 vaut

$$(\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_0)_{L^2(\Gamma)} = 2^{-p-1} A_{pl} D_{pl}. \quad (4.4)$$

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,

$$\begin{aligned} & \text{si } p < n & \text{alors } (\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} &= 0, \\ & \text{si } p = n & \text{alors } \begin{cases} (\gamma_0(\varphi_{nk}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = 2^{-\frac{n}{2}-1} A_{nk} & \text{si } l = k \\ (\gamma_0(\varphi_{nl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ & \text{si } \begin{cases} p > n, \\ p = n + r \end{cases} & \text{alors } \begin{cases} (\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = (-1)^{E(\frac{s}{2^r-1})+1} 2^{-\frac{n}{2}-r-1} A_{pl} D_{pl} \\ \quad \text{si } \exists s \in \{0, \dots, 2^r - 1\} \quad l = 2^r k + s \\ (\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration : La première égalité de (4.3) est claire d'après la propriété 3.35 et la définition 3.38 de Φ_0 . La nullité de la deuxième égalité de (4.3) est tout aussi facile en remarquant que la moyenne des fonctions de Haar Φ_{nk} est nulle sur Γ . L'égalité (4.4) s'obtient en combinant la propriété 3.35, la définition de Φ_0 et en remarquant que $\mu(C_{pl}^0) = \mu(C_{pl}^1) = 2^{-p-1}$. Ainsi, on obtient

$$(\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_0)_{L^2(\Gamma)} = 2^{-p-1} \frac{-R_{pl}^0}{\sqrt{R_{pl}^0 + R_{pl}^1}} + 2^{-p-1} \frac{R_{pl}^1}{\sqrt{R_{pl}^0 + R_{pl}^1}},$$

ce qui est le résultat cherché d'après la définition 4.1 de A_{pl} et D_{pl} . Il reste à calculer $(\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)}$ pour deux couples (n, k) et (p, l) fixés. Le cas $p < n$ est facile. En effet, dans ce cas, le support C_{nk} de Φ_{nk} est, soit inclus dans un des deux cylindres C_{pl}^0 ou C_{pl}^1 (la réunion des deux correspondant au support de $\gamma_0(\varphi_{pl})$), soit d'intersection vide avec le support de $\gamma_0(\varphi_{pl})$. Le deuxième cas est trivial. Pour le premier cas, le produit scalaire se ramène alors à une intégrale sur C_{nk} avec $\gamma_0(\varphi_{pl})$ constant sur ce cylindre. Pour conclure, il suffit de remarquer que la moyenne de Φ_{nk} est nulle sur C_{nk} . Etudions alors le cas $p = n$. Si $l \neq k$, les supports sont disjoints d'où la nullité. Supposons alors $l = k$. Les fonctions $\gamma_0(\varphi_{nk})$ et Φ_{nk} ont alors même support C_{nk} , la propriété 3.35 et la définition 3.38 de la base de Haar donnent alors

$$(\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = \int_{C_{nk}^0} \frac{-R_{nk}^0}{\sqrt{R_{nk}^0 + R_{nk}^1}} (-2^{\frac{n}{2}}) d\mu + \int_{C_{nk}^1} \frac{R_{nk}^1}{\sqrt{R_{nk}^0 + R_{nk}^1}} (2^{\frac{n}{2}}) d\mu.$$

On conclut en combinant $\mu(C_{nk}^0) = \mu(C_{nk}^1) = 2^{-n-1}$ avec la définition 4.1 de A_{nk} . Il reste le cas $p > n$. On définit alors l'entier naturel r par $r = p - n$. Pour assurer que les deux supports C_{pl} et C_{nk} respectivement de $\gamma_0(\varphi_{pl})$ et Φ_{nk} ne soient pas disjoints, l doit vérifier

$$\exists s \in \{0, \dots, 2^r - 1\}, \quad l = 2^r k + s.$$

Sinon, les supports étant alors disjoints, il est clair que $(\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = 0$. Supposons alors $l = 2^r k + s$ avec $s \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$. Le support C_{pl} de $\gamma_0(\varphi_{pl})$ est alors inclus dans C_{nk}^0 , et Φ_{nk} garde ainsi une valeur constante égale à $-2^{\frac{n}{2}}$ sur C_{pl} . Le cas où $s \in \{2^{r-1}, \dots, 2^r - 1\}$ se calcule exactement de la même manière en remplaçant simplement $-2^{\frac{n}{2}}$ par $2^{\frac{n}{2}}$, C_{pl} étant alors inclus dans C_{nk}^1 . En combinant l'égalité $\mu(C_{pl}^0) = \mu(C_{pl}^1) = 2^{-p-1}$ avec la définition 4.1 de A_{pl} et D_{pl} , on obtient, le produit scalaire se ramenant alors à une intégrale sur C_{pl} ,

$$\begin{aligned} (\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} &= \int_{C_{pl}^0} \frac{-R_{pl}^0}{\sqrt{R_{pl}^0 + R_{pl}^1}} (-2^{\frac{n}{2}}) d\mu + \int_{C_{pl}^1} \frac{R_{pl}^1}{\sqrt{R_{pl}^0 + R_{pl}^1}} (-2^{\frac{n}{2}}) d\mu \\ &= -2^{\frac{n}{2}-p-1} \frac{R_{pl}^1 - R_{pl}^0}{\sqrt{R_{pl}^0 + R_{pl}^1}} \\ &= -2^{-\frac{n}{2}-r-1} \frac{R_{pl}^1 - R_{pl}^0}{\sqrt{R_{pl}^0 + R_{pl}^1}} \\ &= (-1)^{E(\frac{s}{2^r-1})+1} 2^{-\frac{n}{2}-r-1} A_{pl} D_{pl}. \end{aligned}$$

Pour finir, si $s \in \{2^{r-1}, \dots, 2^r - 1\}$, un même calcul donne

$$\begin{aligned} (\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} &= 2^{-\frac{n}{2}-r-1} \frac{R_{pl}^1 - R_{pl}^0}{\sqrt{R_{pl}^0 + R_{pl}^1}} \\ &= (-1)^{E(\frac{s}{2^r-1})+1} 2^{-\frac{n}{2}-r-1} A_{pl} D_{pl}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Avant de démontrer le théorème 4.2, donnons, dans un dernier lemme, l'expression de $(\gamma_0(f), \varphi)_{L^2(\Gamma)}$ pour $f \in F$ et $\varphi \in A^{+\infty}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$.

Lemme 4.5 *Soit T un arbre résistif uniformément borné. Pour tout $f \in F$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et des réels $(f_0, (f_{nk})_{n \leq N, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}})$ tels que son unique composante harmonique f^h (voir le lemme 3.25) s'écrive sous la forme*

$$f^h = f_0 \varphi_0 + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} \varphi_{nk}.$$

De plus, pour tout $\varphi \in A^{+\infty}(\Gamma)$, on obtient alors

$$(\gamma_0(f), \varphi)_{L^2(\Gamma)} = c_0(\gamma_0(f)) c_0(\varphi) + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} c_{nk}(\gamma_0(f)) c_{nk}(\varphi), \quad (4.5)$$

avec

$$\begin{aligned} c_0(\gamma_0(f)) &= f_0 \sqrt{r_0} + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} 2^{-n-1} A_{nk} D_{nk} \\ c_{nk}(\gamma_0(f)) &= f_{nk} 2^{-\frac{n}{2}-1} A_{nk} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} (-1)^{E(\frac{s}{2^r-1})+1} 2^{-\frac{n}{2}-r-1} f_{n+r, 2^r k+s} A_{n+r, 2^r k+s} D_{n+r, 2^r k+s} \end{aligned} \quad (4.6)$$

et $(c_0(\varphi), (c_{nk}(\varphi))_{n \leq N, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}})$ produits scalaires de φ avec la base de Haar de $L^2(\Gamma)$.

Démonstration : Soit $f \in F \subset H^1(T)$. D'après le lemme 3.25, il existe $f^0 \in H_0^1(T)$ et $f^h \in H_\Delta^1(T)$ vérifiant

$$\begin{cases} f = f^0 + f^h, \\ \|f\|_1^2 = \|f^0\|_1^2 + \|f^h\|_1^2. \end{cases}$$

La fonction f^h appartient à $H_\Delta^1(T) \cap F$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et des réels $(f_0, (f_{nk})_{n \leq N, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}})$ vérifiant

$$f^h = f_0 \varphi_0 + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} \varphi_{nk}.$$

Ainsi, $\gamma_0(f) \in L^2(\Gamma)$ s'écrit sous la forme

$$\gamma_0(f) = f_0 \gamma_0(\varphi_0) + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} \gamma_0(\varphi_{nk}).$$

En utilisant alors le lemme 4.4, calculons les produits scalaires de $\gamma_0(f)$ avec la base de Haar de $L^2(\Gamma)$. Un premier calcul donne

$$(\gamma_0(f), \Phi_0)_{L^2(\Gamma)} = f_0 \sqrt{r_0} + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} 2^{-n-1} A_{nk} D_{nk}.$$

On obtient pour le deuxième calcul, $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ étant fixés,

$$(\gamma_0(f), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = \sum_{p=0}^N \sum_{l=0}^{2^p-1} f_{pl} (\gamma_0(\varphi_{pl}), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)}.$$

En utilisant alors le lemme 4.4, si $n > N$, tous les termes de la somme sont nuls et $(\gamma_0(f), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = 0$. Sinon, seuls les termes $p \geq n$ de la somme ont une contribution non nulle et on obtient alors

$$(\gamma_0(f), \Phi_{nk})_{L^2(\Gamma)} = 2^{-\frac{n}{2}-1} \left(f_{nk} A_{nk} + \sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-r} f_{n+r, 2^r k+s} (-1)^{E(\frac{s}{2^r-1})+1} A_{n+r, 2^r k+s} D_{n+r, 2^r k+s} \right).$$

Ce qui achève la démonstration. \square

On peut alors démontrer le théorème 4.2.

Démonstration : On suppose que T est un arbre résistif uniformément borné convenable, à savoir, ses résistances vérifient les deux hypothèses (4.1) et (4.2).

Etape 1 : Continuité de γ_0 de $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ dans $A^{-\infty}(\Gamma)$

Vérifions que les conditions sur les résistances de l'arbre permettent d'obtenir la continuité souhaitée. Pour cela, on considère une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in F$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(T)}$. On cherche alors à vérifier la convergence au sens des distributions de la suite $(\gamma_0(f_p))_{p \in \mathbb{N}}$ vers $\gamma_0(f)$. Une première simplification est possible en remarquant qu'il suffit de faire l'étude sur des fonctions harmoniques. En effet, la convergence de la suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ vers $f \in F$ entraîne celle de ses composantes harmoniques. Plus précisément, en utilisant le lemme 3.25, on obtient l'existence de $((f_p^0)_{p \in \mathbb{N}}, f^0) \in H_0^1(T)^{\mathbb{N}}$ et de $((f_p^h)_{p \in \mathbb{N}}, f^h) \in H_{\Delta}^1(T)^{\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$f_p = f_p^0 + f_p^h \text{ et } f = f^0 + f^h.$$

En utilisant la décomposition suivante (voir le lemme 3.25)

$$\|f_p - f\|_1^2 = \|f_p^0 - f^0\|_1^2 + \|f_p^h - f^h\|_1^2$$

et l'inégalité de Poincaré (voir la propriété 3.21), on obtient la convergence de $(f_p^0)_{p \in \mathbb{N}} \in H_0^1(T)^{\mathbb{N}}$ vers $f^0 \in H_0^1(T)$ dans $H^1(T)$. Ainsi, on a la convergence de $(f_p^h)_{p \in \mathbb{N}} \in H_{\Delta}^1(T)^{\mathbb{N}}$ vers $f^h \in H_{\Delta}^1(T)$ dans $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$. En combinant la linéarité de l'opérateur trace γ_0 et le fait que son noyau soit égal à $H_0^1(T)$, il suffit alors de vérifier l'existence de $C > 0$ et $s \geq 0$ vérifiant, pour tout $\varphi \in A^{+\infty}(\Gamma)$ et tout $f \in F \cap H_{\Delta}^1(T)$,

$$|\langle \gamma_0(f), \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{A^s(\Gamma)} \|f\|_{H^1(T)}.$$

La continuité sera alors démontrée. On choisit $s > \max(s_1, 1)$. Soit $\varphi \in A^{+\infty}(\Gamma)$ et $f \in F \cap H_{\Delta}^1(T)$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ et des réels $(f_0, (f_{nk})_{n \leq N, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}})$ tels que

$$f = f_0 \varphi_0 + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk} \varphi_{nk}.$$

L'expression explicite (4.5) donne, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la norme $A^s(\Gamma)$ (voir la définition 3.39),

$$\begin{aligned} |\langle \gamma_0(f), \varphi \rangle| &\leq |c_0(\gamma_0(f))| \|\varphi\|_{A^s(\Gamma)} \\ &\quad + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} c_{nk}^2(\gamma_0(f)) 2^{-2ns} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} c_{nk}^2(\varphi) 2^{2ns} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\varphi\|_{A^s(\Gamma)} \left[|c_0(\gamma_0(f))| + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} c_{nk}^2(\gamma_0(f)) 2^{-2ns} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

En utilisant alors la première expression obtenue en (4.6), on obtient pour $|c_0(\gamma_0(f))|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à la définition de la norme de $\|\cdot\|_{H^1(T)}$:

$$\begin{aligned} |c_0(\gamma_0(f))| &\leq |f_0| \sqrt{r_0} + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-2n} A_{nk}^2 D_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{H^1(T)} \left[\sqrt{r_0} + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-2n} A_{nk}^2 D_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (4.1), on obtient l'existence de $C_1 > 0$ telle que

$$|c_0(\gamma_0(f))| \leq C_1 \|f\|_{H^1(T)}. \quad (4.8)$$

Il reste alors à prouver que $(c_{nk}(\gamma_0(f)) 2^{-ns})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ avec une norme ℓ^2 qui se majore en fonction de $\|f\|_{H^1(T)}$. On obtient en combinant l'égalité (4.6) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |c_{nk}(\gamma_0(f)) 2^{-ns}| &\leq \frac{1}{2} \left(|f_{nk}| 2^{n(-s-\frac{1}{2})} A_{nk} \right. \\ &\quad \left. + 2^{n(-s-\frac{1}{2})} \sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-r} |f_{n+r, 2^r k+s}| A_{n+r, 2^r k+s} |D_{n+r, 2^r k+s}| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[|f_{nk}| 2^{n(-s-\frac{1}{2})} A_{nk} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} |f_{n+r, 2^r k+s}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{-n(2s+1)} \sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r, 2^r k+s}^2 D_{n+r, 2^r k+s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant alors les hypothèses (4.2) et (4.1) respectivement pour le premier et deuxième terme de l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$|c_{nk}(\gamma_0(f)) 2^{-ns}| \leq \frac{1}{2} \left[\|f_{nk}\| \|2^{-n(s+\frac{1}{2})} A_{nk}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} + \|f\|_{H^1(T)} \left(2^{-n(2s+1)+2n} \|2^{-n} A_{nk} D_{nk}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Le choix de $s > 1$ assure $(2^{n(1-2s)})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, le deuxième terme de l'inégalité est donc bien dans $\ell^2(\mathbb{N})$. En combinant cela avec $(f_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ de norme inférieure à $\|f\|_{H^1(T)}$, on obtient bien l'existence de $C_2 > 0$ satisfaisant

$$\|c_{nk}(\gamma_0(f))2^{-ns}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq C_2 \|f\|_{H^1(T)}. \quad (4.9)$$

En réinjectant les deux majorations (4.8) et (4.9) dans (4.7), on obtient la continuité souhaitée.

Etape 2 : Extension à $H^1(T)$.

La dernière partie de la démonstration consiste à vérifier que l'on peut étendre la continuité à $H^1(T)$. On utilise pour cela la convergence des suites de Cauchy dans \mathbb{R} et un théorème de la borne uniforme sur l'espace des distributions ainsi construit. Soit $f \in H^1(T)$. Par densité de F , il existe une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers f pour la norme sur $H^1(T)$. Un raisonnement analogue à celui fait au début de l'étape 1 montre que l'on peut se restreindre à des fonctions harmoniques. Ainsi, $(f_p^h)_{p \in \mathbb{N}} \in (F \cap H_{\Delta}^1(T))^{\mathbb{N}}$ converge vers $f^h \in H_{\Delta}^1(T)$ en norme H^1 et leurs traces par γ_0 sont les mêmes que f_p et f respectivement. Soit $s > \max(s_1, 1)$ fixé et $\varphi \in A^{+\infty}(\Gamma)$ fixée. On obtient, d'après l'étape une, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

$$|\langle \gamma_0(f_p) - \gamma_0(f_q), \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{A^s(\Gamma)} \|f_p^h - f_q^h\|_{H^1(T)}.$$

Ainsi, $(\langle \gamma_0(f_p), \varphi \rangle)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R} , elle converge donc vers un nombre $\langle \gamma_0(f), \varphi \rangle$. On définit ainsi un opérateur clairement linéaire $\gamma_0(f)$ sur les fonctions tests. Il reste à prouver que cet opérateur définit bien une distribution. Vérifions qu'il est bien continu sur $A^{+\infty}(\Gamma)$. Pour cela, on applique le lemme de Banach-Steinhaus sur les espaces de Frechet après avoir construit une métrique sur les fonctions tests rendant complet cet espace $A^{+\infty}(\Gamma)$. On commence par définir sur $A^{+\infty}(\Gamma)$ l'application d par

$$\forall (\varphi, \psi) \in A^{+\infty}(\Gamma)^2, d(\varphi, \psi) = \sum_{s \geq 0} 2^{-s} \min(1, \|\varphi - \psi\|_{A^s(\Gamma)}).$$

On peut alors vérifier facilement que d définit bien une métrique sur $A^{+\infty}(\Gamma)$ et que $A^{+\infty}(\Gamma)$ muni de cette métrique est bien complet. L'application du lemme de Banach-Steinhaus permet alors de conclure que $\langle \gamma_0(f), \cdot \rangle$ est bien une distribution sur $A^{+\infty}(\Gamma)$ (voir [38]). Ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Des conditions suffisantes sans restriction sur les dissymétries relatives

Il peut être utile d'avoir des conditions suffisantes sur les résistances de l'arbre non régulier permettant de donner un sens en tant que distribution à l'espace de trace sans restriction sur les dissymétries relatives. Cela permet ainsi de donner un sens à la pression sur l'espace des bouts pour certains arbres très dissymétriques. La proposition ci-dessous donne en effet une condition suffisante sur la suite $(A_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$ qui implique que les hypothèses (4.1) et (4.2) sont vérifiées.

Propriété 4.6 Soit T un arbre résistif uniformément borné. Si les résistances de l'arbre infini vérifient

$$(2^{-n} A_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad (4.10)$$

alors les hypothèses (4.1) et (4.2) sont vérifiées et

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset A^{-\infty}(\Gamma).$$

Démonstration : Soit T un arbre résistif uniformément borné vérifiant (4.10). L'hypothèse (4.1) est vérifiée car les dissymétries relatives sont toutes bornées par 1. En prenant par exemple $s_1 = 1/2$, l'hypothèse (4.2) est elle aussi trivialement vérifiée car $(2^{-n} A_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. \square

Ces deux résultats permettent de donner une série d'exemples d'arbres non réguliers dont l'espace de trace est bien défini. On rappelle que le cas des arbres réguliers a été étudié dans l'article du chapitre 3 où l'on a démontré que cet espace de trace est un sous-ensemble de fonctions de $L^2(\Gamma)$. Nous ne reviendrons pas là-dessus.

4.1.2 Zoologie d'arbres non réguliers

Dans le cadre d'arbres résistifs non réguliers ayant une résistance globale finie, il n'y a pas de théorème général permettant, dans tous les cas, de donner un sens à l'espace de trace. L'espace de trace de certains arbres très dissymétriques peut ne même pas avoir de sens en tant que distribution. En revanche, pour des arbres raisonnables, qui correspondent d'ailleurs à ceux que l'on rencontre en pratique, on vérifie que l'espace de trace $\gamma_0(H^1(T))$ est bien un sous-ensemble de distributions. On va ainsi donner des exemples d'arbres résistifs non réguliers pour lesquels $\gamma_0(H^1(T)) \subset A^{-\infty}(\Gamma)$. Mais, avant cela, commençons par énoncer deux lemmes sur certaines propriétés des résistances.

Lemme 4.7 Soient T^0 et T^1 deux arbres résistifs quelconques dont les résistances sont notées respectivement $(r_0^0, (r_{nk}^0)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ et $(r_0^1, (r_{nk}^1)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$. On suppose qu'on a la majoration suivante

$$r_0^0 \leq r_0^1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_{nk}^0 \leq r_{nk}^1.$$

Leurs résistances globales vérifient alors

$$R^0 \leq R^1.$$

Démonstration : Commençons par démontrer, par récurrence sur l'entier N , l'inégalité pour les sous-arbres finis à $N + 1$ générations T_N^0 et T_N^1 . On pose à cet effet

$$H_N : (r_0^0 \leq r_0^1 \text{ et } \forall n \leq N, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_{nk}^0 \leq r_{nk}^1) \Rightarrow R_N^0 \leq R_N^1,$$

avec R_N^0 et R_N^1 résistances équivalentes de T_N^0 et T_N^1 respectivement. L'initialisation est triviale. On suppose alors l'hypothèse de récurrence vraie à l'ordre N . Vérifions que H_{N+1} est vraie. On suppose que les résistances des deux arbres à $N + 2$ générations vérifient

$$r_0^0 \leq r_0^1 \text{ et } \forall n \leq N + 1, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_{nk}^0 \leq r_{nk}^1.$$

On en revient alors à deux nouveaux arbres équivalents à $N + 1$ générations dont les résistances de la dernière génération vérifient l'inégalité voulue grâce à un calcul de résistances en série et en parallèle. En effet, en considérant les deux dernières générations de chaque arbre T_{N+1}^0 et T_{N+1}^1 , les 2^N sous-arbres à deux générations de chaque arbre sont chacun remplacés par une unique branche de résistance

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{Nk}^0 + \frac{1}{\frac{1}{r_{N+1,2k}^0} + \frac{1}{r_{N+1,2k+1}^0}} \\ r_{Nk}^1 + \frac{1}{\frac{1}{r_{N+1,2k}^1} + \frac{1}{r_{N+1,2k+1}^1}}, \end{array} \right.$$

$k \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$. Sous cette forme, il est clair que l'inégalité sur les résistances de la dernière génération des deux nouveaux arbres équivalents ainsi construits, est vérifiée. Les résistances des autres générations restant identiques, l'hypothèse de récurrence s'applique pour ces deux nouveaux arbres équivalents à $N + 1$ générations. En remarquant alors que leurs résistances équivalentes sont exactement R_{N+1}^0 et R_{N+1}^1 , H_{N+1} est vérifiée. Un passage à la limite permet de conclure. \square

Nous donnons enfin un lemme sur l'expression des résistances globales des sous-arbres infinis T_{nk} dans le cadre d'arbre régulier. C'est une simple généralisation de la remarque 3.14 du chapitre 3.

Lemme 4.8 *Soit T un arbre résistif régulier et T_{nk} le sous-arbre infini de racine X_{nk} . Alors*

$$R_{nk}^0 = R_{nk}^1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{r_{n+1+p}}{2^p} = 2^{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{r_p}{2^p}.$$

Démonstration : Il s'agit seulement d'appliquer la formule de la remarque 3.14 au cas des arbres réguliers T_{nk}^0 et T_{nk}^1 . \square

Arbres non réguliers sous-géométriques

On peut alors donner un premier exemple d'arbre convenable. En pratique, la plupart des arbres étudiés rentreront dans le cadre de cet exemple. Il s'agit ici de reprendre la propriété 3.42 de l'article du chapitre 3 en la démontrant.

Propriété 4.9 *Soit T un arbre résistif non régulier. S'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_{nk} \leq C\beta^n,$$

avec $0 < \beta < 2$, alors

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset A^{-\infty}(\Gamma).$$

Démonstration : On note $T^{\text{géom}}$ l'arbre géométrique de loi $r_0\beta^n$ et $R^{\text{géom}}$ sa résistance globale associée. D'après la propriété 4.6, il suffit de montrer que T est un arbre résistif uniformément borné et que l'hypothèse (4.10) est vérifiée. Ces deux propriétés sont évidentes en appliquant le lemme 4.7. La résistance globale est finie car

$$R \leq CR^{\text{géom}},$$

et $\beta < 2$ (voir la remarque 3.14 pour le calcul de la résistance globale d'un arbre géométrique). En notant alors $T_{nk}^{\text{géom}}$ le sous-arbre de $T^{\text{géom}}$ de racine X_{nk} et $(R_{nk}^0)^{\text{géom}} = (R_{nk}^1)^{\text{géom}} = R_{nk}^{\text{géom}}$ les deux résistances globales associées, on obtient, en utilisant les lemmes 4.7 et 4.8,

$$\begin{aligned} R_{nk}^0 + R_{nk}^1 &\leq 2CR_{nk}^{\text{géom}} \\ &\leq C'\beta^n, \end{aligned} \tag{4.11}$$

avec $C' = \frac{4Cr_0\beta}{2-\beta}$. Ainsi, T est un arbre résistif uniformément borné. De plus, en utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient aussi

$$2^{-n}A_{nk} \leq 2^{-n}\sqrt{C'}\beta^{\frac{n}{2}}\sqrt{C'}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2}\right)^n.$$

L'hypothèse $\beta < 2$ permet de conclure. En effet

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}) &\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \left(\frac{\beta}{4}\right)^n < +\infty \\ &\Leftrightarrow \beta < 2, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Arbres non réguliers sous-fractionnaires

Un autre exemple type d'arbres résistifs non réguliers peut être étudié de la même façon.

Propriété 4.10 *Soit T un arbre résistif non régulier. S'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_{nk} \leq C \frac{2^n}{n^\beta},$$

avec $\beta > 2$, alors

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset A^{-\infty}(\Gamma).$$

Remarque 4.11 *La propriété 4.9 entre dans le cadre de celle-ci. Nous l'avons tout de même énoncée car elle modélise mieux le cas du poumon humain.*

Démonstration : Là encore, d'après la propriété 4.6, il suffit de montrer que T est un arbre résistif uniformément borné et que l'hypothèse (4.10) est vérifiée. Le lemme 4.7 combiné avec $\beta > 1$ assure le caractère uniformément borné. En effet, en utilisant toujours la remarque 3.14 et en notant $T^{\text{rég}}$ l'arbre régulier de loi fractionnaire $\frac{2^n}{n^\beta}$ et de résistance globale associée $R^{\text{rég}}$, R vérifie alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} R &\leq CR^{\text{rég}} \\ &\leq C \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\beta}. \end{aligned}$$

R est donc bien finie si $\beta > 1$. Un calcul similaire utilisant le lemme 4.8 permet de conclure que T est un arbre régulier uniformément borné. En effet, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,

$$\begin{aligned} R_{nk}^0 &\leq CR_{nk}^{\text{rég}} \\ &\leq C2^{n+1} \sum_{p \geq n+1} \frac{1}{p^\beta}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ainsi T est bien un arbre régulier uniformément borné. Il reste alors à vérifier l'hypothèse (4.10) qui, elle, ne sera vérifiée que si $\beta > 2$. En effet, en reprenant le calcul (4.12) et en se souvenant que $\beta > 1$, on obtient

$$\begin{aligned} R_{nk}^0 &\leq C2^{n+1} \sum_{p \geq n+1} \int_{p-1}^p \frac{dt}{t^\beta} \\ &\leq \frac{C}{\beta-1} 2^{n+1} \sum_{p \geq n+1} \left(\frac{1}{(p-1)^{\beta-1}} - \frac{1}{p^{\beta-1}} \right) \\ &\leq C' \frac{2^n}{n^{\beta-1}} \end{aligned}$$

avec $C' = \frac{2C}{\beta-1}$. L'inégalité ci-dessus étant aussi vérifiée par R_{nk}^1 , on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-2n} A_{nk}^2 \leq 2C' \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^{\beta-1}}.$$

Ainsi, l'hypothèse (4.10) est bien vérifiée dès lors que $\beta > 2$, ce qui achève la démonstration. \square

Dans cette partie, on a donné un certains nombres d'exemples d'arbres non réguliers pour lesquels l'espace de trace a un sens en tant que sous-ensemble de distributions. Quelles hypothèses sur les résistances de l'arbre doit-on imposer en plus pour que cet espace de trace soit un sous-ensemble de fonctions ?

4.2 Un espace de trace comme sous-ensemble de fonctions

4.2.1 Des conditions suffisantes d'appartenance

Dans l'article du chapitre 3, dans le cas particulier d'arbre régulier, la propriété 3.36 assure que l'espace de trace est bien défini et qu'il correspond même à un sous-ensemble de fonctions de $L^2(\Gamma)$. On généralise ici cela à des arbres non réguliers. Contrairement au cas régulier, l'hypothèse seule de résistance globale finie ne suffit plus à assurer une appartenance à $L^2(\Gamma)$.

Théorème 4.12 *Soit T un arbre non régulier uniformément borné. Si les résistances de cet arbre vérifient les trois hypothèses suivantes*

$$(2^{-n} A_{nk} D_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad (4.13)$$

$$(2^{-\frac{n}{2}} A_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad (4.14)$$

$$(2^{-n} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r, 2^r k+s}^2 D_{n+r, 2^r k+s}^2)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad (4.15)$$

alors γ_0 est continu de $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ dans $(L^2(\Gamma), \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)})$. Comme conséquence, il peut être étendu par densité à un opérateur dans $\mathcal{L}(H^1(T), L^2(\Gamma))$.

Remarque 4.13 *L'hypothèse (4.13) assure que la somme infinie de l'hypothèse (4.15) a bien un sens car il s'agit alors de sommer sur un sous-ensemble d'entiers. En effet, dans un cas, on somme sur les noeuds de l'arbre infini tout entier tandis que dans l'autre cas, on ne somme que sur les noeuds du sous-arbre infini T_{nk} pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ fixés.*

Démonstration : Il s'agit ici de reprendre les idées de la démonstration de la propriété 3.36 en les adaptant au cas non régulier. En effet, la famille $(\gamma_0(\varphi_0), (\gamma_0(\varphi_{nk}))_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ n'étant alors plus L^2 -orthogonale, les produits scalaires font apparaître des termes extra-diagonaux comme nous l'avons vu dans les lemmes 4.4 et 4.5. Soit $p \in F$. En remarquant que $p - p(o)\mathbf{1}_T \in F \cap H^1(T)$ et en appliquant le lemme 3.25 (R est finie d'après les hypothèses), il existe $p_0 \in H_0^1(T)$ et $p_h \in H_\Delta^1(T)$, vérifiant $(p_0, p_h)_1 = 0$ et

$$p = p(o)\mathbf{1}_T + p_0 + p_h.$$

Remarquons tout de suite qu'un tel choix impose $p_0(o) = -p_h(o)$. Comme $p \in F$, la composante harmonique $p_h \in F \cap H_\Delta^1(T)$ et ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ et des réels $(d_0, (d_{nk})_{n \leq N, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ tels que

$$p_h = d_0 \varphi_0 + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} d_{nk} \varphi_{nk}.$$

Pour démontrer la continuité de γ_0 de $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ dans $(L^2(\Gamma), \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)})$, vérifions qu'il existe $C > 0$ indépendant de p tel que

$$\|\gamma_0(p)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|p\|_{H^1(T)}.$$

Par définition de la norme H^1 et en combinant l'égalité $|p|_1 = |p - p(o)\mathbf{1}_T|_1$ et le lemme 3.25, on obtient

$$\|p\|_{H^1(T)}^2 = c(o)p(o)^2 + |p_0|_1^2 + |p_h|_1^2.$$

$(\Phi_0, (\Phi_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ étant une base de $L^2(\Gamma)$, on a

$$\|\gamma_0(p)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = c_0(\gamma_0(p))^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} c_{nk}(\gamma_0(p))^2,$$

avec $c_0(\gamma_0(p))$ et $c_{nk}(\gamma_0(p))$ produits scalaires de $\gamma_0(p)$ avec cette base. En remarquant que $c_0(\gamma_0(p(o)\mathbf{1}_T)) = p(o)$, on obtient, en utilisant le lemme 4.5,

$$c_0(\gamma_0(p)) = p(o) + d_0\sqrt{r_0} + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n - 1} d_{nk}2^{-n-1}A_{nk}D_{nk}.$$

Le même raisonnement donne pour $c_{nk}(\gamma_0(p))$, en utilisant toujours le lemme 4.5,

$$\begin{aligned} c_{nk}(\gamma_0(p)) &= c_{nk}(\gamma_0(p_h)) \\ &= d_{nk}2^{-\frac{n}{2}-1}A_{nk} + \sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r - 1} (-1)^{E(\frac{s}{2^r-1})+1} 2^{-\frac{n}{2}-r-1} d_{n+r, 2^r k+s} A_{n+r, 2^r k+s} D_{n+r, 2^r k+s}, \end{aligned}$$

si $n \leq N$, 0 sinon. Comme pour la démonstration du théorème 4.2, on procède en deux étapes en majorant d'abord $c_0(\gamma_0(p))^2$ puis $c_{nk}(\gamma_0(p))^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée avec $|p_h|_1^2 = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n - 1} d_{nk}^2$ donne

$$\begin{aligned} c_0(\gamma_0(p))^2 &\leq 2(d_0\sqrt{r_0} + p(o))^2 + 2\left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n - 1} d_{nk}2^{-n-1}A_{nk}D_{nk}\right)^2 \\ &\leq 4p(o)^2 + 4r_0d_0^2 + \frac{1}{2}|p_h|_1^2 \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n - 1} 2^{-2n}A_{nk}^2D_{nk}^2\right). \end{aligned}$$

L'hypothèse (4.13) permet alors d'obtenir la majoration du premier terme

$$c_0(\gamma_0(p))^2 \leq 4p(o)^2 + 4r_0d_0^2 + \frac{1}{2}|p_h|_1^2 \|2^{-n}A_{nk}D_{nk}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2. \quad (4.16)$$

Majorons alors le deuxième terme. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |c_{nk}(\gamma_0(p))| &\leq \frac{1}{2} \left[|d_{nk}|2^{-\frac{n}{2}}A_{nk} + 2^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r - 1} |d_{n+r, 2^r k+s}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r - 1} 2^{-2r} A_{n+r, 2^r k+s}^2 D_{n+r, 2^r k+s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

En passant au carré, en remarquant que $(\sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} |d_{n+r,2^rk+s}|^2)^{1/2} \leq |p_h|_1$ et en appliquant l'hypothèse (4.14), on obtient

$$|c_{nk}(\gamma_0(p))|^2 \leq |d_{nk}|^2 \|2^{-\frac{n}{2}} A_{nk}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}^2 + |p_h|_1^2 \left(2^{-n} \sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r,2^rk+s}^2 D_{n+r,2^rk+s}^2 \right). \quad (4.17)$$

En combinant la remarque 4.13 et l'hypothèse (4.15), $(c_{nk}(\gamma_0(p)))_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et

$$\|c_{nk}(\gamma_0(p))\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 \leq \left(\|2^{-\frac{n}{2}} A_{nk}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}^2 + \|2^{-n} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r,2^rk+s}^2 D_{n+r,2^rk+s}^2\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \right) |p_h|_1^2.$$

Ainsi, en notant C_1 la somme des deux normes ℓ^∞ et ℓ^1 ci-dessus et en se rappelant (4.16), on a majoré $\|\gamma_0(p)\|_{L^2(\Gamma)}$ par

$$\|\gamma_0(p)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 4p(o)^2 + 4r_0 d_0^2 + (C_1 + C_2) |p_h|_1^2, \quad (4.18)$$

avec $C_2 = 1/2 \|2^{-n} A_{nk} D_{nk}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2$. Comme dans la démonstration de la propriété 3.36, il s'agit alors de remarquer que $d_0^2 r_0 = p_h(o)^2 = p_0(o)^2$ et d'appliquer l'inégalité de Poincaré à p_0 (voir la propriété 3.21), pour obtenir

$$d_0^2 r_0 \leq C |p_0|_1^2.$$

Ainsi, l'inégalité (4.18) devient

$$\begin{aligned} \|\gamma_0(p)\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq 4p(o)^2 + 4C |p_0|_1^2 + (C_1 + C_2) |p_h|_1^2 \\ &\leq C' \|p\|_{H^1(T)}^2, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Sous des hypothèses encore plus fortes sur les résistances de l'arbre non régulier, on peut même définir l'espace de trace comme un sous-ensemble de $A^s(\Gamma)$ (voir la définition 3.39).

Corollaire 4.14 *Soit T un arbre non régulier. Si les résistances de cet arbre vérifient l'hypothèse (4.13) et s'il existe $s > 0$ tel que*

$$(2^{n(s-\frac{1}{2})} A_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad (4.19)$$

et

$$(2^{n(2s-1)} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r,2^rk+s}^2 D_{n+r,2^rk+s}^2)_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad (4.20)$$

alors γ_0 est continu de $(F, \|\cdot\|_{H^1(T)})$ dans $(A^s(\Gamma), \|\cdot\|_{A^s(\Gamma)})$. Comme conséquence, il peut être étendu par densité à un opérateur dans $\mathcal{L}(H^1(T), A^s(\Gamma))$.

Remarque 4.15 *On retombe exactement sur le théorème 4.12 en prenant $s = 0$.*

Démonstration : C'est une simple adaptation de la démonstration ci-dessus. On reprendra donc les mêmes notations. Il faut cette fois-ci vérifier l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de p telle que

$$\|\gamma_0(p)\|_{A^s(\Gamma)} \leq C \|p\|_{H^1(T)}$$

avec

$$\|\gamma_0(p)\|_{A^s(\Gamma)}^2 = c_0(\gamma_0(p))^2 + \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{2ns} c_{nk}(\gamma_0(p))^2.$$

La majoration (4.16) de $c_0(\gamma_0(p))^2$ convient. Le même raisonnement, en utilisant cette fois-ci l'hypothèse (4.19), conduit à remplacer dans (4.17) $-1/2$ par $s - 1/2$ et -1 par $2s - 1$. On obtient alors

$$2^{2ns} |c_{nk}(\gamma_0(p))|^2 \leq |d_{nk}|^2 \|2^{n(s-\frac{1}{2})} A_{nk}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}^2 + |p_h|_1^2 \left(2^{n(2s-1)} \sum_{r=1}^{N-n} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r,2^r k+s}^2 D_{n+r,2^r k+s}^2 \right).$$

En utilisant alors l'hypothèse (4.20), on obtient

$$\|(2^{2ns} c_{nk}(\gamma_0(p)))_{n,k}\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 \leq |p_h|_1^2 \left(\|2^{n(s-\frac{1}{2})} A_{nk}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}^2 + \|2^{n(2s-1)} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r,2^r k+s}^2 D_{n+r,2^r k+s}^2\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \right).$$

En combinant cette inégalité avec (4.16), on obtient

$$\|\gamma_0(p)\|_{A^s(\Gamma)}^2 \leq 4p(o)^2 + 4r_0 f_0^2 + C |p_h|_1^2.$$

Le même raisonnement permet alors de conclure. \square

4.2.2 Zoologie d'arbres non réguliers

Nous allons reprendre ici l'exemple d'arbres non réguliers sous-géométriques. Quelles hypothèses doivent vérifier les résistances de tels arbres pour avoir un espace de trace plus régulier? Le cas des arbres réguliers a déjà été traité dans le chapitre précédent et la seule hypothèse d'une résistance globale finie assure un espace de trace comme sous-ensemble de fonctions.

Remarque 4.16 *D'après le lemme 4.7 et la propriété 3.40 sur les arbres géométriques, il est facile de connaître la régularité A^s d'un arbre régulier dont les résistances vérifient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_n \leq C \alpha^n,$$

avec $0 < \alpha < 2$. La famille $(\gamma_0(\varphi_0), (\gamma_0(\varphi_{nk}))_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ étant L^2 -orthogonale et chaque norme pouvant être majorée par la norme associée de l'arbre géométrique sous-jacent, on obtient la même régularité A^s que pour cet arbre géométrique, à savoir

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset A^s(\Gamma),$$

avec $s = 1/2 - \ln \alpha / 2 \ln 2$. Il est évident qu'il ne s'agit ici que d'une inclusion et pas d'une caractérisation comme pour l'arbre géométrique sous-jacent (voir la propriété 3.40).

Etudions alors les arbres non réguliers sous-géométriques.

Propriété 4.17 *Soit T un arbre résistif non régulier. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, r_{nk} \leq C\beta^n,$$

avec $0 < \beta < 2$.

– Si $0 < \beta < 1$, alors

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset L^2(\Gamma) \text{ et } \gamma_0(H^1(T)) \subset A^s(\Gamma),$$

avec $s < -\ln \beta / 2 \ln 2$.

– Si $0 < \beta < 2$ et si les dissymétries relatives vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, |D_{nk}| \leq C'2^{-\frac{n}{2}}, \quad (4.21)$$

avec $C' > 0$, alors

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset L^2(\Gamma) \text{ et } \gamma_0(H^1(T)) \subset A^s(\Gamma),$$

avec $s < 1/2 - \ln \beta / 2 \ln 2$.

Remarque 4.18 *Si $1 \leq \beta < 2$, on sait d'après la propriété 4.9 que*

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset A^{-\infty}(\Gamma),$$

sans condition sur les dissymétries relatives. Par contre, si les dissymétries relatives ne vérifient aucune condition, $\gamma_0(H^1(T))$ peut ne pas être un ensemble de fonctions. A l'inverse, si $0 < \beta < 1$, il n'est pas nécessaire d'imposer des conditions sur les dissymétries relatives pour avoir un espace de fonctions.

Démonstration : Soit $0 < \beta < 2$. L'hypothèse (4.13) est vérifiée sans hypothèse sur les dissymétries relatives. En effet, pour le démontrer, il suffit de combiner la démonstration de la propriété 4.9 où l'on montre que $(2^{-n}A_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ avec une majoration des dissymétries par un. Démontrons alors que l'hypothèse (4.19) est vérifiée avec $s < 1/2 - \ln \beta / 2 \ln 2$. Cela impliquera automatiquement que l'hypothèse (4.14) est, elle aussi, vérifiée ainsi que l'hypothèse (4.19) avec $s < -\ln \beta / 2 \ln 2$. En reprenant l'inégalité (4.11) sur A_{nk} , on obtient

$$|2^{n(s-\frac{1}{2})}A_{nk}| \leq C \left(2^{s-\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\right)^n$$

qui est bornée car le choix de s implique $2^{n(s-\frac{1}{2})} < \beta^{-\frac{n}{2}}$. Pour la démonstration de la dernière hypothèse, séparons les cas $0 < \beta < 1$ et $0 < \beta < 2$ avec condition sur les dissymétries relatives. Si $0 < \beta < 1$, on obtient en majorant ces dernières par un et en reprenant l'inégalité (4.11),

$$\begin{aligned} |2^{n(2s-1)} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r, 2^r k+s}^2 D_{n+r, 2^r k+s}^2| &\leq C \left(\frac{\beta}{2^{1-2s}}\right)^n \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} \left(\frac{\beta}{4}\right)^r \\ &\leq C \left(\frac{\beta}{2^{1-2s}}\right)^n. \end{aligned}$$

Or

$$\| (\beta^n 2^{n(2s-1)})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \|_{\ell^1(\mathbb{N})} = \sum_{n \geq 0} (\beta 2^{2s})^n,$$

donc, il faut imposer $s < -\ln(\beta)/2 \ln(2)$ pour avoir la convergence. On vient ainsi de vérifier, pour $0 < \beta < 1$, que

$$\gamma_0(H^1(T)) \subset A^s(\Gamma) \subset L^2(\Gamma),$$

avec $s < -\ln(\beta)/2 \ln(2)$. On suppose alors pour finir $0 < \beta < 2$ et la condition (4.21) sur les dissymétries relatives vérifiée. En reprenant les calculs ci-dessus mais en remplaçant la majoration par un des dissymétries relatives par $C'2^{-\frac{n}{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned} |2^{-n+2sn} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} 2^{-2r} A_{n+r, 2^r k+s}^2 D_{n+r, 2^r k+s}^2| &\leq C \left(\frac{\beta}{2^{2-2s}} \right)^n \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=0}^{2^r-1} \left(\frac{\beta}{8} \right)^r \\ &\leq C \left(\frac{\beta}{2^{2-2s}} \right)^n. \end{aligned}$$

Or

$$\| (\beta^n 2^{n(2s-2)})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \|_{\ell^1(\mathbb{N})} = \sum_{n \geq 0} (\beta 2^{2s})^n,$$

qui converge bien si $s < 1/2 - \ln \beta / 2 \ln 2$, ce qui achève la démonstration. \square

Troisième partie

Modélisation du parenchyme
pulmonaire

Chapitre 5

Etude mathématique d'un modèle 1D du parenchyme pulmonaire

Sommaire

5.1	Modèle 1D du parenchyme pulmonaire	118
5.1.1	Le modèle discret	118
5.1.2	Reformulation	121
5.1.3	Le modèle limite	123
5.2	Existence et unicité par le théorème de Hille-Yosida . . .	125
5.2.1	Existence et unicité	126
5.2.2	Caractérisation de $\mathcal{D}(A)$	131
5.3	Vitesse de convergence	134
5.4	Décroissance de l'énergie vers 0	139
5.5	Vitesse de décroissance de l'énergie	142
5.5.1	Méthodes d'étude du taux de décroissance de l'énergie . . .	143
5.5.2	Décroissance exponentielle pour $\alpha \in]1, 2[$	143
5.5.3	Quelques remarques dans le cas $\alpha \in [0, 1]$	148

Dans ce qui précède, nous avons étudié la modélisation des voies aériennes du poumon humain depuis les conduits supérieurs jusqu'aux alvéoles. Ces alvéoles, comme cela a été décrit dans le chapitre 1, sont plongées dans un milieu visco-élastique appelé le parenchyme. Ce dernier permet la séparation des alvéoles et des capillaires sanguins. De plus, de par la présence au sein de celui-ci de nombreuses fibres élastiques, le parenchyme permet aussi l'expansion du poumon humain lors de l'inspiration et assure la rétraction de ce dernier lors de l'expiration. L'étude du rôle des capillaires sanguins dans la respiration ne sera pas abordée dans cette thèse (on pourra par exemple se reporter aux articles suivants [39, 40, 41, 42] et à la thèse [43]). Le but de ce chapitre est d'étudier certaines propriétés du modèle monodimensionnel obtenu dans [11]. Ce modèle couple un milieu élastique troué par les alvéoles et l'arbre dyadique résistif qui les relie les unes aux autres. Lorsque le nombre de générations de l'arbre tend vers l'infini, on obtient un modèle monodimensionnel avec un terme dissipatif non local dont on se propose d'étudier ici certains effets. L'étude des propriétés élastiques et visco-élastiques du poumon humain a donné lieu à de nombreux articles ces dernières années. Certains auteurs basent leur approche sur des systèmes masse-ressort discrets (comme par exemple [44, 45, 46, 47]), d'autres proposent des modélisations au niveau continu (voir, par exemple, [48, 49]). Le modèle introduit dans [11] permet, lui, l'étude des effets non-locaux dus à une circulation de fluide dans une structure arborescente au sein d'un milieu élastique. Dans les deux premières sections, nous explicitons ce modèle et vérifions qu'il est bien posé. Nous donnons ensuite une estimation de la vitesse de convergence lorsque le nombre de générations tend vers l'infini. Enfin, nous faisons une étude du comportement en temps long. Tout au long de ce chapitre, l'arbre est supposé être au moins régulier, c'est-à-dire avec des résistances constantes par générations. Dans la première section, nous rappelons les résultats de [11], que nous ne détaillerons pas. Ce chapitre a fait l'objet d'une collaboration avec Céline Grandmont.

5.1 Modèle 1D du parenchyme pulmonaire

On explicite dans cette section le modèle du parenchyme 1D. Le modèle cherché permet de prendre en compte à la fois le caractère élastique du milieu et la présence de l'arbre dyadique qui induit un effet non-local en couplant toutes les poches d'air.

5.1.1 Le modèle discret

Présentons succinctement ce modèle : chaque sortie de l'arbre est reliée à une alvéole, elle même délimitée par deux masses successives connectées entre elles par un ressort (voir la figure 5.1). On obtient ainsi une succession de masses S_i^N et d'alvéoles T_i^N , les alvéoles étant liées par l'arbre dyadique à $N + 1$ générations et les masses par des ressorts ayant même raideur k_N .

Notations

Afin d'étudier le comportement d'un tel système, précisons un peu les notations. On peut supposer sans perte de généralité et pour simplifier les notations que $L = 1$ et ainsi

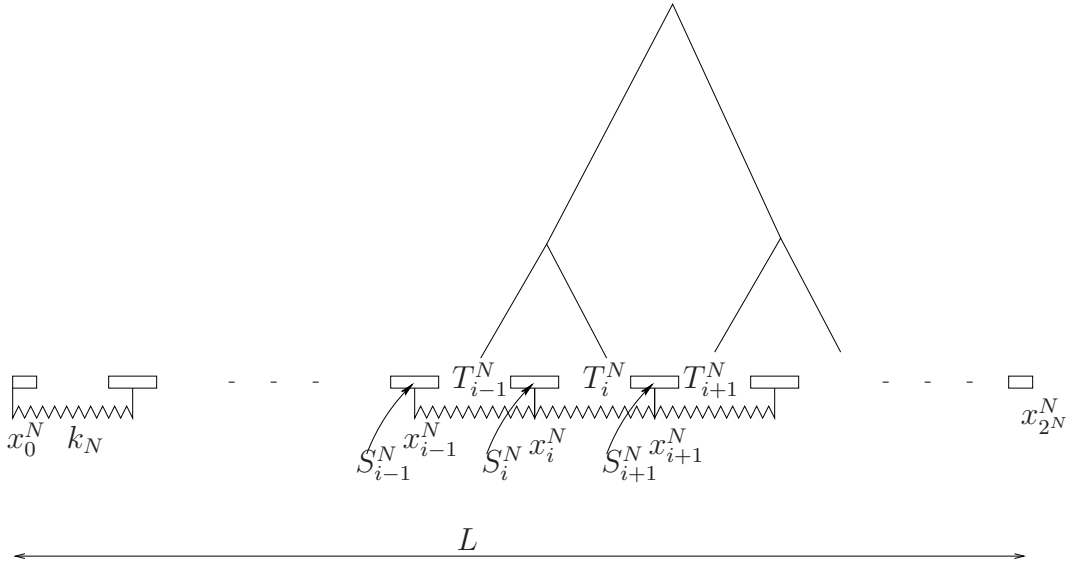


FIG. 5.1 – Le système masse-ressort-arbre.

$I =]0, 1[$. On note encore $N + 1$ le nombre de générations de l'arbre dyadique. En posant alors $h_N = 2^{-N}$, on définit $x_i^N = ih_N$, pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N\}$. Les masses seront alors notées

$$S_i^N =]x_i^N - \frac{1}{2}h_N\alpha_S, x_i^N + \frac{1}{2}h_N\alpha_S[, \quad i \in \{1, \dots, 2^N - 1\},$$

$$S_0^N =]x_0^N, x_0^N + \frac{1}{2}h_N\alpha_S[, \quad S_{2^N}^N =]x_{2^N}^N - \frac{1}{2}h_N\alpha_S, x_{2^N}^N[,$$

avec α_S la proportion de solide. Les alvéoles correspondent alors aux trous entre les masses, à savoir

$$T_i^N =]x_i^N + \frac{1}{2}h_N\alpha_S, x_{i+1}^N - \frac{1}{2}h_N\alpha_S[, \quad i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}.$$

Enfin, chaque masse est connectée à ces deux masses voisines par un ressort de même raideur k_N . On note alors $u_i^N(t)$, $i \in \{0, \dots, 2^N\}$ le déplacement de x_i^N au temps t et $p_i^N(t)$, $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$ la pression au temps t à la sortie i de l'arbre dyadique à $N + 1$ générations. L'alvéole T_i^N étant en connection directe avec la sortie i de l'arbre, $p_i^N(t)$ est aussi la pression dans cette alvéole.

Forces exercées sur la masse S_i^N

Afin d'appliquer la relation fondamentale de la dynamique à chaque masse S_i^N pour $i \in \{1, \dots, 2^N - 1\}$, explicitons les forces exercées sur S_i^N pour un i fixé :

★ Les forces élastiques dues à la présence des masses voisines.

La force de rappel élastique exercée par la masse S_{i-1}^N sur S_i^N est $-k_N (u_i^N(t) - u_{i-1}^N(t))$. De même, celle exercée par la masse S_{i+1}^N sur S_i^N est $-k_N (u_i^N(t) - u_{i+1}^N(t))$. Ainsi, l'ensemble des forces élastiques agissant sur S_i^N est

$$k_N (u_{i+1}^N(t) - 2u_i^N(t) + u_{i-1}^N(t)).$$

★ Les forces de pression dues à la présence des alvéoles.

De chaque côté de la masse S_i^N , la présence de fluide dans les deux alvéoles T_{i-1}^N et T_i^N impose des forces de pression de chaque côté valant

$$-p_i^N(t) + p_{i-1}^N(t).$$

★ Une force extérieure massique. On note de plus f_i^N une force extérieure donnée appliquée sur S_i^N .

On peut alors appliquer la relation fondamentale de la dynamique à chaque masse S_i^N pour un i fixé dans $\{1, \dots, 2^N - 1\}$. On obtient ainsi

$$m_N \ddot{u}_i^N(t) - k_N (u_{i+1}^N(t) - 2u_i^N(t) + u_{i-1}^N(t)) + (p_i^N(t) - p_{i-1}^N(t)) = m_N f_i^N(t). \quad (5.1)$$

Présence de l'arbre dyadique

L'arbre dyadique permet de lier les pressions $p_i^N(t)$ aux dérivées des déplacements par l'intermédiaire de la matrice A_N définie par 2.5. En effet, en se rappelant la propriété 2.3, la pression $p_i^N(t)$, $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$, est reliée linéairement au flux rentrant à la sortie i par

$$p_i^N(t) = \sum_{j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N q_j^N(t),$$

où $q_j^N(t)$ est le flux rentrant à la sortie j au temps t . Il s'agit alors de remarquer que le flux rentrant dans l'arbre dyadique à la sortie j au temps t est en fait exactement, le fluide étant supposé incompressible, l'opposé de la dérivée du volume, à savoir

$$q_j^N(t) = -(\dot{u}_{j+1}^N(t) - \dot{u}_j^N(t)). \quad (5.2)$$

Finalement, les forces de pression exercées sur la masse S_i^N sont de la forme

$$-(p_i^N(t) - p_{i-1}^N(t)) = - \left(\sum_{j=1}^{2^N} A_{i-1,j-1}^N (\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) - \sum_{j=1}^{2^N} A_{i,j-1}^N (\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) \right).$$

Système d'équations différentielles ordinaires

En prenant en compte la présence de l'arbre dyadique qui couple tous les déplacements, l'équation (5.1) devient, pour $i \in \{1, \dots, 2^N - 1\}$ fixé,

$$m_N \ddot{u}_i^N(t) - k_N (u_{i+1}^N(t) - 2u_i^N(t) + u_{i-1}^N(t)) + \left(\sum_{j=1}^{2^N} A_{i-1,j-1}^N (\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) - \sum_{j=1}^{2^N} A_{i,j-1}^N (\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) \right) = m_N f_i^N(t). \quad (5.3)$$

Supposant que les deux extrémités du segment $]0, 1[$ sont fixes, on a

$$u_0^N(t) = u_{2^N}^N(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

En considérant les conditions initiales suivantes

$$u_i^N(0) = u_{i,0}^N \quad \text{et} \quad \dot{u}_i^N(0) = u_{i,1}^N \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq 2^N, \quad (5.5)$$

avec $(u_{i,\alpha}^N)_{0 \leq i \leq 2^N}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ fixé satisfaisant les conditions de compatibilité $u_{0,\alpha}^N = u_{2^N,\alpha}^N = 0$, les équations (5.3) (5.4) et (5.5) définissent un système d'équations différentielles ordinaires.

Remarque 5.1 *La présence de l'arbre, en couplant tous les déplacements, induit un effet de dissipation non-locale.*

Propriété 5.2 *Soit $T > 0$. En supposant que $(f_i^N)_{1 \leq i \leq 2^N-1} \in (L^2(0, T))^{2^N-1}$, il existe une unique solution $(u_i^N)_{0 \leq i \leq 2^N} \in (H^2(0, T))^{2^N+1}$ du problème défini par l'équation (5.3), les conditions aux bords (5.4) et les conditions initiales (5.5).*

Démonstration : La démonstration de l'existence et l'unicité pour un système d'équations différentielles ordinaires est standard. \square

Remarque 5.3 *L'hypothèse d'arbre régulier n'intervient pas ici ; tout ce qui vient d'être fait se généralise donc aux arbres non réguliers.*

5.1.2 Reformulation

Comme cela a été fait dans la section 2.2, le nombre important d'alvéoles justifie un passage à la limite en faisant tendre le nombre de générations de l'arbre vers l'infini. Une première étape est alors de reformuler l'équation différentielle ordinaire en une équation aux dérivées partielles. Les différents vecteurs \mathbf{u}^N , \mathbf{p}^N et \mathbf{q}^N vont ainsi être identifiés à des fonctions définies sur $[0, 1]$.

On commence par introduire les deux espaces fonctionnels suivants : un espace de fonctions affines par morceaux sur $[0, 1]$ respectant la subdivision $(C_i^N)_{0 \leq i \leq 2^N-1}$, $C_i^N =]ih_N, (i+1)h_N[$ et un espace de fonctions constantes par morceaux sur la même subdivision. On note V_N et M_N ces deux espaces définis comme suit :

$$V_N = \left\{ \begin{array}{l} v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, v \text{ est une fonction continue sur } [0, 1], \\ v \text{ est une fonction affine sur } C_i^N \text{ pour } i \in \{0, \dots, 2^N - 1\} \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right\}$$

et

$$M_N = \left\{ \begin{array}{l} \mu :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \mu \text{ est une fonction constante par morceaux sur }]0, 1[\\ \text{qui respecte la subdivision } (C_i^N)_{0 \leq i \leq 2^N-1} \end{array} \right\}.$$

On considère alors les fonctions u^N et p^N définies par, pour tout $t \in]0, T[$,

$$u^N(t, \cdot) \in V_N \quad \text{avec} \quad u^N(t, x_i^N) = u_i^N(t), \quad i \in \{0, \dots, 2^N\}$$

et

$$p^N(t, \cdot) \in M_N \text{ avec } p^N(t, x_i^N) = p_i^N(t), \quad i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}.$$

En remarquant alors que

$$\begin{aligned} \partial_x u^N(t, x) &= \frac{u^N(t, x_{i+1}^N) - u^N(t, x_i^N)}{h_N}, \quad x \in C_i^N, \\ \partial_x p^N(t, x) &= \sum_{i=0}^{2^N-1} (p^N(t, x_{i+1}^N) - p^N(t, x_i^N)) \delta_{x_i^N}(x) \text{ sur } \mathcal{D}'(0, 1), \end{aligned} \quad (5.6)$$

la première impliquant

$$\partial_{xx} u^N(t, x) = \sum_{i=1}^{2^N-1} \frac{u^N(t, x_{i+1}^N) - 2u^N(t, x_i^N) + u^N(t, x_{i-1}^N)}{h_N} \delta_{x_i^N}(x) \text{ sur } \mathcal{D}'(0, 1),$$

l'équation différentielle ordinaire (5.3) devient, en sommant sur l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, 2^N - 1\}$,

$$\begin{aligned} m_N \sum_{i=1}^{2^N-1} \partial_{tt} u^N(t, x_i^N) \delta_{x_i^N}(x) - k_N h_N \partial_{xx} u^N(t, x) + \partial_x p^N(t, x) \\ = m_N \sum_{i=1}^{2^N-1} f_i^N(t) \delta_{x_i^N}(x). \end{aligned}$$

Là encore, il faut prendre en compte la présence de l'arbre dyadique. En combinant l'équation (5.2) et l'expression (5.6) de la dérivée de $\partial_x u^N$, on obtient pour le flux

$$q_i^N = - (\partial_t u^N(t, x_{i+1}^N) - \partial_t u^N(t, x_i^N)) = - \int_{C_i^N} \partial_x \partial_t u^N(t, y) dy, \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq 2^N - 1.$$

En utilisant alors la propriété 2.25, l'expression de la pression devient

$$p^N(t, x) = - \int_0^1 K_N(x, y) \partial_y \partial_t u^N(t, y) dy.$$

Ainsi, u^N satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} m_N \sum_{i=1}^{2^N-1} \partial_{tt} u^N(t, x_i^N) \delta_{x_i^N}(x) - k_N h_N \partial_{xx} u^N(t, x) - \partial_x \partial_t \int_0^1 K_N(x, y) \partial_y u^N(t, y) dy \\ = m_N \sum_{i=1}^{2^N-1} f_i^N(t) \delta_{x_i^N}(x). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Remarque 5.4 Là encore, tout ce qui vient d'être fait se généralise au cas d'arbres non réguliers, le noyau K_N pouvant toujours être défini (voir la remarque 2.31).

Il est alors possible, avec cette équation aux dérivées partielles, d'étudier le comportement de u^N quand N tend vers l'infini, c'est-à-dire quand le nombre de générations de l'arbre dyadique sous-jacent et le nombre d'alvéoles tendent vers l'infini.

5.1.3 Le modèle limite

On étudie ici le comportement de u^N quand N tend vers l'infini. Il est montré dans l'article [11] que, en faisant des hypothèses standards de régularité sur la force extérieure et sur les conditions initiales, une hypothèse de convergence de l'arbre dyadique sous-jacent et une dernière hypothèse sur la raideur k_N des ressorts, la suite $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge en un certain sens vers la solution faible u de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\rho \alpha_S \partial_{tt} u(t, x) - k \partial_{xx} u(t, x) - \partial_x \partial_t \int_0^1 K(x, y) \partial_y u(t, y) dy = \rho \alpha_S f(t, x), \quad (5.8)$$

où ρ est la densité de masse du solide (qui est supposée être constante) et

$$k = k_N h_N. \quad (5.9)$$

On peut remarquer que l'hypothèse (5.9) impose que la raideur des ressorts se comporte en 2^N , soit l'inverse de la longueur de chaque portion. Cette hypothèse impose en particulier à l'énergie mécanique de la chaîne de ressorts d'être bornée. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 5.5 *On suppose qu'il existe $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $u_0 \in H_0^1(0, 1)$ et $u_1 \in L^2(0, 1)$ vérifiant*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^N-1} f_i^N(t) \mathbf{1}_{S_i^N}(x) &\rightharpoonup \alpha_S f \text{ dans } L^2(0, T; L^2(0, 1)), \\ \sum_{i=1}^{2^N-1} u_{i,1}^N \mathbf{1}_{S_i^N}(x) &\rightharpoonup \alpha_S u_1 \text{ dans } L^2(0, 1), \\ u_0^N &\rightharpoonup u_0 \text{ dans } H^1(0, 1). \end{aligned} \quad (5.10)$$

On suppose de plus que l'équation (5.9) est vérifiée et que l'arbre supposé régulier converge, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^N \frac{r_n}{2^n}$ converge. Alors la suite $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ solution de l'équation aux dérivées partielles (5.7) qui satisfait de plus $u^N(0, x_i^N) = u_{i,0}^N$ et $\partial_t u^N(0, x_i^N) = u_{i,1}^N$ converge quand N tend vers l'infini au sens suivant :

$$u^N \xrightarrow{*} u \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)),$$

et

$$\partial_t u^N \xrightarrow{*} \partial_t u \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

avec u unique solution de (5.8) vérifiant $u(0) = u_0$ et $\partial_t u(0) = u_1$ au sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)), \\ \rho\alpha_S \int_0^T \int_0^1 u(t, x) \partial_{tt} \varphi(t, x) dx dt + k \int_0^T \int_0^1 \partial_x u(t, x) \partial_x \varphi(t, x) dx dt \\ \quad - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \partial_y u(t, y) \partial_{xt} \varphi(t, x) dx dy dt \\ = \rho\alpha_S \int_0^T \int_0^1 f(t, x) \varphi(t, x) dx dt + \rho\alpha_S \int_0^1 u_1(x) \varphi(0, x) dx \\ \quad - \rho\alpha_S \int_0^1 u_0(x) \partial_t \varphi(0, x) dx + \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \partial_x u_0(y) \partial_x \varphi(0, x) dx dy, \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T[\times]0, 1]). \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Remarque 5.6 On peut remarquer que les deux premiers termes de l'équation (5.8) correspondent en fait à l'équation des ondes provenant d'un système masse-ressort classique. Le troisième terme est un terme de viscosité non-locale. Sa présence s'explique par celle de l'arbre dyadique qui couple toutes les sorties.

Démonstration : Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la démonstration pour lesquels on renvoie à l'article [11]. Nous n'indiquerons que les grandes étapes. La première étape est d'obtenir des estimations d'énergie sur $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(\partial_t u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ afin de pouvoir en extraire des sous-suites qui convergent faiblement. Plus précisément, sous les hypothèses (5.9) et (5.10), on vérifie que les suites $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(\partial_t u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ et $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$. Pour cela, on multiplie l'équation (5.7) par $\partial_t u^N(t, x)$ et en intégrant par parties sur $]0, 1[$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{m_N}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{2^N-1} |\partial_t u^N(t, x_i^N)|^2 + \frac{1}{2} k_N h_N \frac{d}{dt} \|\partial_x u^N(t, \cdot)\|_{L^2(I)}^2 \\ & + \int_0^1 \int_0^1 K_N(x, y) \partial_x \partial_t u^N(t, x) \partial_y \partial_t u^N(t, y) dx dy = m_N \sum_{i=1}^{2^N-1} f_i^N(t) \partial_t u^N(t, x_i^N). \end{aligned}$$

En utilisant alors $\int_0^1 \int_0^1 K_N(x, y) \partial_x \partial_t u^N(t, x) \partial_x \partial_t u^N(t, y) dx dy \geq 0$, l'inégalité de Young dans le second membre et le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{m_N}{2} \sum_{i=1}^{2^N-1} |\partial_t u^N(x_i^N, t)|^2 + \frac{1}{2} k_N h_N \|\partial_x u^N(t, \cdot)\|_{L^2(I)}^2 \\ & \leq e^t \left(\frac{m_N}{2} \sum_{i=1}^{2^N-1} |u_{i,1}^N|^2 + \frac{1}{2} k_N h_N \|\partial_x u_0^N\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \frac{m_N}{2} \sum_{i=1}^{2^N-1} |f_i^N(s)|^2 ds \right), \end{aligned}$$

avec $u_0^N \in V_N$ vérifiant $u_0^N(x_i^N) = u_{i,0}^N$. En utilisant alors les hypothèses (5.9) et (5.10), on obtient les estimations d'énergie voulues (voir l'article [11] pour plus de détails). De ces estimations, on déduit, quitte à passer à une sous-suite encore notée u^N , l'existence de $u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ vérifiant

$$u^N \xrightarrow{*} u \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)),$$

et

$$\partial_t u^N \xrightarrow{*} \partial_t u \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)).$$

La deuxième étape de cette démonstration consiste à passer à la limite quand N tend vers $+\infty$ pour prouver que u vérifie la formulation faible (5.11). Soit alors $\varphi \in H_0^1(0, 1)$ et $\psi \in \mathcal{D}([0, T])$. On multiplie alors (5.7) par $\varphi(x)\Psi(t)$, on intègre en temps et en espace et en intégrant par parties, on obtient, en remarquant que $m_N = \rho\alpha_S h_N$,

$$\begin{aligned} & \rho\alpha_S h_N \int_0^T \sum_{i=1}^{2^N-1} u^N(t, x_i^N) \varphi(x_i^N) \ddot{\psi}(t) dt + k \int_0^T \int_0^1 \partial_x u^N(t, x) \partial_x \varphi(x) \psi(t) dx dt \\ & \quad - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 K_N(x, y) \partial_x u^N(t, y) \partial_x \varphi(x) \dot{\psi}(t) dx dy dt \\ & = \rho\alpha_S h_N \int_0^T \sum_{i=1}^{2^N-1} f_i^N(t) \varphi(x_i^N) \psi(t) dt + \rho\alpha_S h_N \sum_{i=1}^{2^N-1} u_{i,1}^N \varphi(x_i^N) \psi(0) \\ & \quad - \rho\alpha_S h_N \sum_{i=1}^{2^N-1} u_{i,0}^N \varphi(x_i^N) \dot{\psi}(0) + \int_0^1 \int_0^1 K_N(x, y) \partial_y u_0^N(y) \partial_x \varphi(x) \psi(0) dx dy. \end{aligned}$$

Il s'agit alors d'étudier la convergence de chaque terme séparément. Les hypothèses (5.9) et (5.10) permettent d'assurer la convergence de chaque terme vers son homologue dans (5.11). La dernière étape de cette démonstration est de vérifier l'unicité. La démonstration utilise les mêmes arguments que pour l'équation des ondes (voir [16]). \square

Remarque 5.7 Dans le cas d'un arbre non régulier, si les hypothèses (2.12) et (2.13) de la remarque 2.31 sont vérifiées, le résultat ci-dessus se généralise.

5.2 Existence et unicité par le théorème de Hille-Yosida

Dans la section précédente, nous avons construit un modèle limite à une dimension caractérisant le mouvement du parenchyme pulmonaire lorsqu'on prend en compte à la fois l'élasticité de ce dernier et la présence d'un arbre résistif modélisant les voies aériennes.

Nous avons démontré que, sous des hypothèses de régularité faibles sur les conditions initiales et la force extérieure, il existe une unique solution faible u au problème

$$\rho\alpha_S\partial_{tt}u - k\partial_{xx}u - \partial_x\mathcal{R}\partial_x\partial_tu = \rho\alpha_S f.$$

Quitte à prendre des conditions initiales plus régulières, nous cherchons ici à obtenir des solutions classiques au même problème et, par là-même, des estimations d'énergie fortes utiles par la suite. Ainsi nous utiliserons tout au long de cette section la théorie de Hille-Yosida (voir [31]).

5.2.1 Existence et unicité

Equation homogène

On commence par s'intéresser au cas où le parenchyme n'est soumis à aucune force extérieure. L'équation étudiée devient, en posant $c = \sqrt{k/\rho\alpha_S}$ et $b = \rho\alpha_S$,

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u - \frac{1}{b}\partial_x\mathcal{R}\partial_x\partial_tu = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times I, \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I, \\ \partial_tu(0) = u_1 & \text{sur } I. \end{cases}$$

Quitte à faire le changement de fonction $\tilde{u}(x, t) = u(x, ct)$, on peut se ramener au cas d'une vitesse de propagation unitaire, à savoir à l'équation

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u - \beta\partial_x\mathcal{R}\partial_x\partial_tu = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times I, \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I, \\ \partial_tu(0) = u_1 & \text{sur } I, \end{cases} \quad (5.12)$$

avec $\beta = c/b > 0$. Le caractère bien posé de (5.12) découle directement de la théorie de Hille-Yosida dont nous rappelons le théorème principal (voir [31]). Ce théorème fait intervenir dans ses hypothèses la notion d'opérateur maximal monotone dont la définition est

Définition 5.8 Soit H un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non-borné. On dit que A est monotone si

$$(Av, v)_H \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(A).$$

A est maximal monotone si de plus

$$\forall f \in H, \exists u \in \mathcal{D}(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

Enonçons alors le théorème de Hille-Yosida.

Théorème 5.9 Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus, on a

$$|u(t)|_H \leq |u_0|_H \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right|_H = |Au(t)|_H \leq |Au_0|_H \quad \forall t \geq 0.$$

On peut alors appliquer ce théorème à notre cas particulier.

Théorème 5.10 Soit $\mathcal{D}(A) = \{(u, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \partial_{xx}u + \beta\partial_x\mathcal{R}\partial_xv \in L^2(I)\}$ avec $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(L^2(I))$ opérateur monotone (voir le théorème 2.30 et la propriété 2.32). Si $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$, alors il existe une fonction u unique solution de (5.12) vérifiant

$$(u, \partial_t u) \in C^1([0, +\infty[, H_0^1(I) \times L^2(I)) \cap C([0, +\infty[, \mathcal{D}(A)).$$

De plus, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |u(t)|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq |u_0|_{H_0^1(I)}^2 + \|u_1\|_{L^2(I)}^2, \\ |\partial_t u(t)|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_{tt} u(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq |u_1|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_{xx}u_0 + \beta\partial_x\mathcal{R}\partial_xu_1\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Démonstration : Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, écrivons la première équation de (5.12) sous la forme d'un système du premier ordre : en posant $U = {}^t(u, v)$, on obtient le système suivant

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ -\partial_{xx} & -\beta\partial_x\mathcal{R}\partial_x \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Nous allons appliquer le théorème de Hille-Yosida à l'équation (5.14). Pour cela il suffit de démontrer que A est maximal monotone. On se place pour cela dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$ muni du produit scalaire usuel

$$(U_1, U_2)_H = \int_I \partial_x u_1 \partial_x u_2 dx + \int_I v_1 v_2 dx,$$

avec $U_1 = {}^t(u_1, v_1)$ et $U_2 = {}^t(u_2, v_2)$. On considère alors l'opérateur non borné $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ défini par (5.14) avec

$$\mathcal{D}(A) = \{(u, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \partial_{xx}u + \beta\partial_x\mathcal{R}\partial_xv \in L^2(I)\}.$$

Commençons par vérifier que A est monotone. Soit $U = {}^t(u, v) \in \mathcal{D}(A)$. En remarquant que $w = \partial_x u + \beta \mathcal{R} \partial_x v \in H^1(I)$ en combinant la définition de $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(L^2(I))$, la formule de Green permet d'obtenir

$$\begin{aligned} (AU, U)_H &= - \int_I \partial_x u \partial_x v dx - (\partial_{xx} u + \beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v, v)_{L^2(I)} \\ &= - \int_I \partial_x u \partial_x v dx + \int_I \partial_x u \partial_x v dx + \beta (\mathcal{R} \partial_x v, \partial_x v)_{L^2(I)} \quad \text{car } v \in H_0^1(I) \\ &= \beta (\mathcal{R} \partial_x v, \partial_x v)_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

\mathcal{R} étant monotone (voir la propriété 2.32), A l'est aussi. Il reste alors à vérifier que A est maximal. Pour cela, on fixe $F = {}^t(f, g) \in H$ et on cherche $U = {}^t(u, v) \in \mathcal{D}(A)$ vérifiant $U + AU = F$, à savoir,

$$\begin{cases} u - v = f \\ v - \partial_{xx} u - \beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v = g. \end{cases}$$

On commence par construire v en remarquant que v vérifie, au sens des distributions,

$$v - \partial_{xx} v - \beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v = g + \partial_{xx} f.$$

On cherche à appliquer le théorème de Lax-Milgram (voir par exemple [31]). Pour cela, on se place dans l'espace de Hilbert $H_0^1(I)$ et on considère les formes linéaire et bilinéaire suivantes :

$$\begin{aligned} L : H_0^1(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto L(w) = \int_I g w dx - \int_I \partial_x f \partial_x w dx, \end{aligned}$$

et $B : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$B(v, w) = \int_I v w dx + \int_I \partial_x v \partial_x w dx + \beta \int_I \mathcal{R} \partial_x v \partial_x w dx.$$

B est coercive car, en utilisant la monotonie de \mathcal{R} , on obtient,

$$\begin{aligned} B(w, w) &= \|w\|_{H^1(I)}^2 + \beta (\mathcal{R} \partial_x w, \partial_x w)_{L^2(I)} \\ &\geq \|w\|_{H^1(I)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, celle de Poincaré dont on note la constante C et la continuité de l'opérateur \mathcal{R} (voir le théorème 2.30), on obtient la continuité de B :

$$\begin{aligned} |B(v, w)| &\leq |(v, w)_{L^2(I)}| + |(v, w)_{H_0^1(I)}| + \beta |(\mathcal{R} \partial_x v, \partial_x w)_{L^2(I)}| \\ &\leq (C^2 + 1) |v|_{H_0^1(I)} |w|_{H_0^1(I)} + \beta \| \mathcal{R} \|_{\mathcal{L}(L^2(I))} |v|_{H_0^1(I)} |w|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

La continuité de L étant évidente en appliquant l'inégalité de Poincaré, le théorème de Lax-Milgram s'applique et on obtient l'existence d'un unique v élément de $H_0^1(I)$ unique tel que

$$\forall w \in H_0^1(I), \quad B(v, w) = L(w).$$

Ainsi v vérifie au sens des distributions

$$v - \partial_{xx}v - \beta\partial_x\mathcal{R}\partial_xv = g + \partial_{xx}f. \quad (5.15)$$

On pose alors $u = f + v$. La fonction u ainsi définie appartient à $H_0^1(I)$ car $(v, f) \in (H_0^1(I))^2$. En combinant la définition de u et l'équation (5.15), u vérifie au sens des distributions

$$\partial_{xx}u + \beta\partial_x\mathcal{R}\partial_xv = v - g.$$

Mais $v - g \in L^2(I)$ donc l'égalité est une égalité presque partout. Finalement $U = {}^t(u, v) \in \mathcal{D}(A)$ et vérifie bien $U + AU = F$, d'où la surjectivité de $Id + A$. Donc A est maximal monotone et on peut appliquer le théorème de Hille-Yosida à cet opérateur. En posant $U_0 = {}^t(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$, il existe donc une unique solution au problème

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

avec

$$U \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A)).$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 5.11 *Le théorème de Hille-Yosida permet de montrer que $(u(t), \partial_t u(t))_{t \geq 0}$ est borné dans $\mathcal{D}(A)$ par $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{D}(A)}$ pour la norme de graphe suivante $\|(u, v)\|_{\mathcal{D}(A)}^2 = |u|_{H_0^1(I)}^2 + \|v\|_{H^1(I)}^2 + \|\partial_{xx}u + \beta\partial_x\mathcal{R}\partial_xv\|_{L^2(I)}^2$.*

Remarque 5.12 *Comme nous allons nous intéresser par la suite à l'approximation de \mathcal{R} par \mathcal{R}_N , pour un $N \in \mathbb{N}$ fixé, on peut remarquer que ce qui vient d'être fait ici s'applique à \mathcal{R}_N . En effet, en remarquant que l'opérateur $\mathcal{R}_N \in \mathcal{L}(L^2(I))$ défini par la propriété 2.25 est lui aussi un opérateur monotone (voir la remarque 2.33), la démonstration du théorème de Hille-Yosida s'applique au cas où \mathcal{R}_N remplace \mathcal{R} . En particulier, en notant $\mathcal{D}_N(A) = \{(u, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \partial_{xx}u + \beta\partial_x\mathcal{R}_N\partial_xv \in L^2(I)\}$ le domaine de l'opérateur*

$$\begin{pmatrix} 0 & -Id \\ -\partial_{xx} & -\beta\partial_x\mathcal{R}_N\partial_x \end{pmatrix},$$

on a le résultat suivant : si $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}_N(A)$, alors il existe une fonction u_N unique solution de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u - \beta\partial_x\mathcal{R}_N\partial_x\partial_tu = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times I \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I \\ \partial_tu(0) = u_1 & \text{sur } I, \end{cases} \quad (5.16)$$

vérifiant

$$(u_N, \partial_tu_N) \in C^1([0, +\infty[, H_0^1(I) \times L^2(I)) \cap C([0, +\infty[, \mathcal{D}_N(A)).$$

De plus, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |u_N(t)|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_t u_N(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq |u_0|_{H_0^1(I)}^2 + \|u_1\|_{L^2(I)}^2 \\ |\partial_t u_N(t)|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_{tt} u_N(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq |u_1|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_{xx} u_0 + \beta \partial_x \mathcal{R}_N \partial_x u_1\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Remarque 5.13 *Le théorème de Hille-Yosida permet d'obtenir le résultat suivant dans le cas où les conditions initiales n'appartiennent pas au domaine de l'opérateur.*

Si $(u_0, u_1) \in H$, $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$, alors il existe un unique $U = {}^t(u, \partial_t u) \in C([0, +\infty[, H)$ tel que, pour tout $\varphi \in C_0^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \star \int_0^{+\infty} \varphi(t) U(t) dt &\in \mathcal{D}(A), \\ \star \int_0^{+\infty} \varphi'(t) U(t) dt + A \left(\int_0^{+\infty} \varphi(t) U(t) dt \right) &= 0. \end{aligned}$$

On retrouve le même résultat qu'au théorème 5.5 dans le cas où la force extérieure est nulle.

D'après la théorie des semi-groupes, il existe une correspondance bijective entre les opérateurs maximaux monotones et les semi-groupes continus de contractions. Le théorème 5.10 permet ainsi de définir pour tout $t \geq 0$, le semi-groupe continu de contraction associé à A comme suit.

Definition 5.1 *Soit $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$. On définit le semi-groupe continu de contraction associé à A par*

$$\forall t \geq 0, \quad S(t) : (u_0, u_1) \in H \mapsto (u(t), \partial_t u(t)) \in H.$$

Equation non homogène

On considère maintenant le cas où une force extérieure est appliquée au parenchyme. Là encore, A étant maximal monotone, la théorie de Hille-Yosida permet d'obtenir directement le résultat suivant.

Théorème 5.14 *Si $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ et $f \in C^1(0, T; L^2(I))$, alors il existe une fonction u unique solution de*

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u - \beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_t u = f & \text{sur }]0, T] \times I \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I \\ \partial_t u(0) = u_1 & \text{sur } I, \end{cases}$$

avec

$$(u, \partial_t u) \in C^1(0, T; H) \cap C(0, T; \mathcal{D}(A)).$$

De plus, $(u, \partial_t u)$ est donné par la formule, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(u(t), \partial_t u(t)) = S(t)(u_0, u_1) + \int_0^t S(t-s) F(s) ds,$$

avec $(S(t))_{t \geq 0}$ semi-groupe défini par la définition 5.1 et $F = (0, f)$.

Démonstration : Le système de premier ordre associé à cette équation non homogène se met cette fois-ci sous la forme

$$\frac{dU}{dt} + AU = F, \text{ avec } F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

A étant un opérateur maximal monotone, il suffit d'appliquer le théorème de Hille-Yosida pour les équations non homogènes. \square

Remarque 5.15 *Là encore, le théorème de Hille-Yosida permet de gérer le cas de conditions initiales moins régulières. Plus précisément, si $(u_0, u_1) \in H$ n'appartiennent pas au domaine $\mathcal{D}(A)$ de l'opérateur, on retrouve le résultat du théorème 5.5.*

5.2.2 Caractérisation de $\mathcal{D}(A)$

On a dû, pour obtenir des solutions classiques, faire intervenir l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ et donner ses propriétés remarquables. On cherche ici à identifier au mieux cet ensemble. On commence par définir les fonctions P_1 par morceaux aux échelles dyadiques qui vont constituer une base de $H_0^1(I)$ et qui sont les primitives de la base de Haar de $L^2(I)$.

Définition 5.16 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, T_{nk} est l'unique primitive de Ψ_{nk} qui s'annule en 0 (voir la figure 5.3), ainsi*

$$\forall x \in [0, 1], T_{nk}(x) = \int_0^x \Psi_{nk}(y) dy, T_{nk} \in H_0^1(I).$$

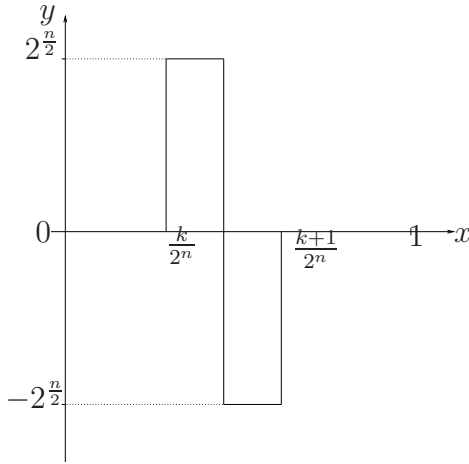
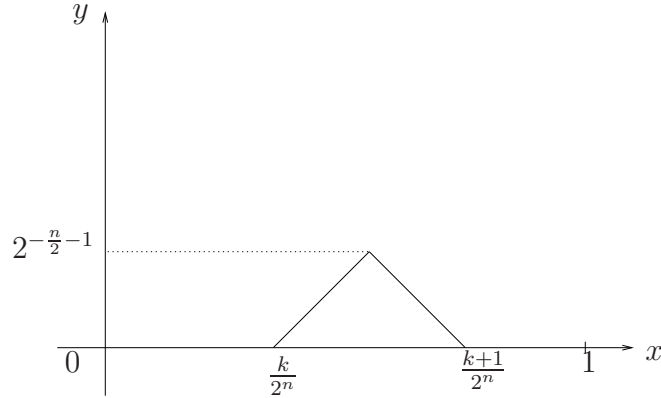
De même, T_0 est l'unique primitive de Ψ_0 qui s'annule en 0, à savoir $T_0(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Théorème 5.17 *L'ensemble $\mathcal{D}(A)$ s'identifie à*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) = \{ & (u, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \\ & \exists u_1 \in H^2(I) \cap H_0^1(I), \exists (v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}), \\ & \left. u = u_1 - \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \rho_n v_{nk} T_{nk} \text{ et } v = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} v_{nk} T_{nk} \right\} \end{aligned}$$

avec $\rho_n = \sum_{l=n+1}^{+\infty} \frac{r_l}{2^l}$ valeurs propres de l'opérateur \mathcal{R} (voir la propriété 2.35).

Remarque 5.18 *La famille $(T_0, (T_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ n'est pas L^2 -orthogonale. Pour autant, comme on le démontre ci-dessous grâce à l'inégalité de Poincaré et à la décroissance des valeurs propres de \mathcal{R} , $(v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ suffit à assurer la convergence des séries $\sum_{n,k} v_{nk} T_{nk}$ et $\sum_{n,k} \rho_n v_{nk} T_{nk}$ dans $L^2(I)$.*


 FIG. 5.2 – Graphe de la fonction Ψ_{nk} .

 FIG. 5.3 – Graphe de la fonction T_{nk} .

Démonstration : Soit d'abord $(u, v) \in \mathcal{D}(A)$. En se rappelant la définition de $\mathcal{D}(A)$ donnée dans le théorème 5.10, $v \in H_0^1(I)$. Ainsi $\partial_x v \in L^2(I)$ est à moyenne nulle et il existe $(v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tel que

$$\partial_x v = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} v_{nk} \Psi_{nk}.$$

En posant $g_N = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} v_{nk} \Psi_{nk}$, la convergence de la suite $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers $\partial_x v$ dans $L^2(I)$ assure, grâce à l'inégalité de Poincaré, celle de $(p_N)_{N \in \mathbb{N}}$ défini par $p_N = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} v_{nk} T_{nk}$ vers v dans $H_0^1(I)$ et donc

$$v = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} v_{nk} T_{nk}.$$

Il reste alors à exprimer u . D'après la définition de $\mathcal{D}(A)$ donnée au théorème 5.10, il existe $g \in L^2(I)$ tel que

$$\partial_{xx} u + \beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v = g. \quad (5.18)$$

On cherche alors à écrire tous les termes de (5.18) sous forme d'un Laplacien. On note $u_1 \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ la solution de $\partial_{xx} u_1 = g$. On cherche alors une fonction $u_2 \in H_0^1(I)$ vérifiant au sens des distributions $\partial_{xx} u_2 = -\beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v$, à savoir $\partial_x u_2 = -\beta \mathcal{R} \partial_x v$ dans $L^2(I)$. En se rappelant les propriétés spectrales de \mathcal{R} (voir la propriété 2.35), $\mathcal{R} \partial_x v$ se met sous la forme

$$\mathcal{R} \partial_x v = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} \Psi_{nk}.$$

Cette série est bien définie car $(v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par λ_0 . On pose alors $u_2 = -\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} T_{nk}$. Vérifions qu'une telle série converge bien dans $H_0^1(I)$ ce qui va être assuré car $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par λ_0 . Comme la famille

$(T_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}}$ n'est pas orthonormée, on utilise l'inégalité de Poincaré qui donne, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ (on suppose par exemple $p < q$),

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} T_{nk} - \sum_{n=0}^q \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} T_{nk} \right\|_{L^2(I)} &\leq C_P \left\| \sum_{n=p+1}^q \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} \Psi_{nk} \right\|_{L^2(I)} \\ &\leq C_P \left(\sum_{n=p+1}^q \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n^2 v_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En se souvenant que $(\rho_n v_{nk}) \in \ell^2(\mathbb{N})$, la suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par $u_N = -\beta \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} T_{nk}$ est une suite de Cauchy de $H_0^1(I)$. Elle est donc convergente et on peut poser

$$u_2 = -\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} T_{nk} \in H_0^1(I).$$

La suite $(\partial_x u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge alors dans $L^2(I)$ à la fois vers $\partial_x u_2$ et vers $-\beta \mathcal{R} \partial_x v$. Ainsi, $\partial_x u_2 = -\beta \mathcal{R} \partial_x v$ et elle vérifie bien au sens des distributions

$$\partial_{xx} u_2 = -\beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v. \quad (5.19)$$

En combinant alors (5.18) (5.19) et la construction de u_1 , on montre que la fonction $w = u - u_1 - u_2 \in H_0^1(I)$ est harmonique donc nulle. Ainsi, l'espace \mathcal{D} défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{ &(u, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \\ &\exists u_1 \in H^2(I) \cap H_0^1(I), \exists (v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ &u = u_1 - \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} T_{nk} \text{ et } v = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} v_{nk} T_{nk} \} \end{aligned}$$

a bien un sens et $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}$. L'inclusion inverse se montre en vérifiant que l'on peut effectuer le raisonnement "à l'envers". Soit $(u, v) \in \mathcal{D}$. En particulier, il existe $(v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tel que $v = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} v_{nk} T_{nk}$ et on note $u_2 = -\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} T_{nk}$ (ils ont bien un sens d'après ce qui précède). Il est facile de vérifier que $u_2 \in H_0^1(I)$ vérifie au sens des distributions

$$\partial_{xx} u_2 = -\beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v.$$

Comme $u = u_1 + u_2$, le couple (u, v) vérifie

$$\partial_{xx} u + \beta \partial_x \mathcal{R} \partial_x v = \partial_{xx} u_1 \in L^2(I),$$

ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 5.19 Là encore, un raisonnement analogue en utilisant les propriétés spectrales de \mathcal{R}_N (voir la remarque 2.36), raisonnement qui est même simplifié car une des sommes est finie, permet de montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_N(A) = \{ & (u, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \\ & \exists u_1 \in H^2(I) \cap H_0^1(I), \exists (v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ & u = u_1 - \beta \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n - 1} \rho_n^N v_{nk} T_{nk} \text{ et } v = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} v_{nk} T_{nk} \}. \end{aligned}$$

On donne maintenant quelques propriétés de cet ensemble $\mathcal{D}(A)$.

Propriété 5.20 $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$. $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme de graphe s'injecte de façon compacte dans H .

Démonstration : La densité de $\mathcal{D}(A)$ dans H est une conséquence du caractère maximal monotone de A (voir [31]). Pour démontrer la compacité de $\mathcal{D}(A)$ dans H , on considère une suite $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans $\mathcal{D}(A)$ pour la norme de graphe sur $\mathcal{D}(A)$

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{D}(A)}^2 = |u|_{H_0^1(I)}^2 + \|v\|_{H^1(I)}^2 + \|\partial_{xx}u + \partial_x \mathcal{R} \partial_x v\|_{L^2(I)}^2.$$

Démontrons alors que cela assure l'existence d'une sous-suite convergente pour la norme usuelle de H . D'après la définition de la norme de graphe, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(I)$, d'où sa convergence dans $L^2(I)$ quitte à passer à une sous-suite encore notée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il reste alors à vérifier qu'on peut extraire une sous-suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente fortement dans $H_0^1(I)$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $H^1(I)$ par définition de la norme de graphe, la suite $(\partial_x v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(I)$. Comme l'opérateur $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(L^2(I))$ est compact au sens de la norme des opérateurs, l'ensemble $\{\mathcal{R} \partial_x v_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $L^2(I)$. Donc $\{\partial_x \mathcal{R} \partial_x v_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $H^{-1}(I)$. De plus, toujours d'après la définition de la norme de graphe, la suite $(\partial_{xx}u_n + \partial_x \mathcal{R} \partial_x v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(I)$ et ainsi l'ensemble $\{\partial_{xx}u_n + \partial_x \mathcal{R} \partial_x v_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $H^{-1}(I)$. Ceci assure ainsi que $\{\partial_{xx}u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $H^{-1}(I)$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in H_0^1(I)$, $\partial_x u_n \in L^2(I)$ est à moyenne nulle et ainsi il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\partial_x u_n\|_{L^2(I)} \leq C \|\partial_{xx}u_n\|_{H^{-1}(I)}.$$

Ainsi l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $H_0^1(I)$. D'où l'existence d'une sous-suite qui converge fortement dans $H_0^1(I)$. Ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

5.3 Vitesse de convergence

L'étude numérique du modèle 1D du parenchyme passe par l'approximation de l'opérateur à noyau \mathcal{R} qui couple tous les degrés de liberté. On l'approche par l'opérateur \mathcal{R}_N

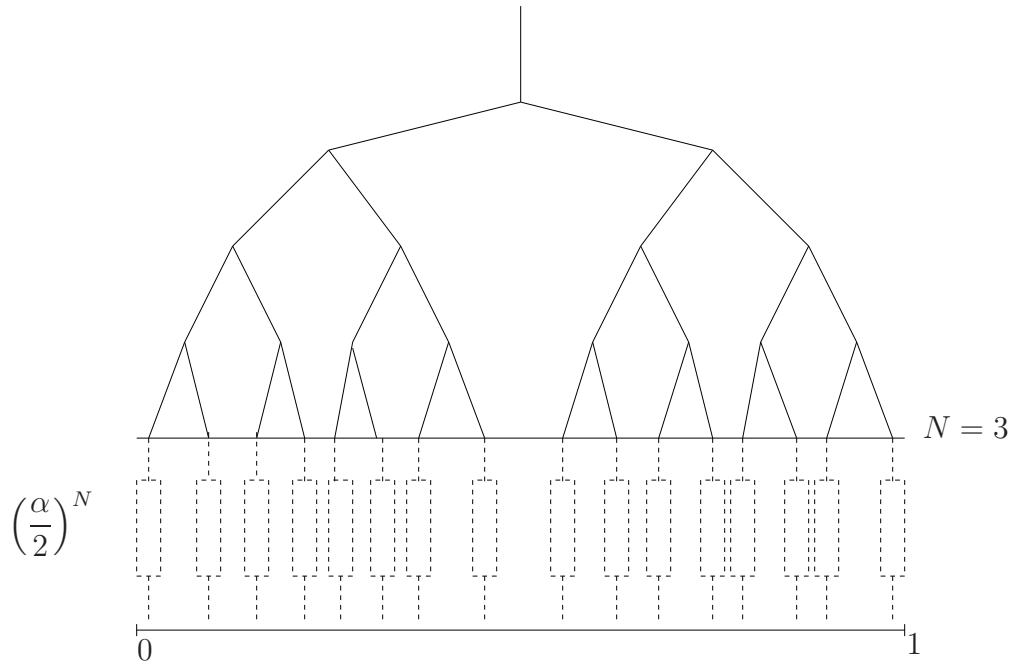


FIG. 5.4 – Erreur commise entre un arbre fini et infini.

qui correspond à l'opérateur associé à l'arbre fini sous-jacent à $N + 1$ générations (voir la propriété 2.25). On cherche donc ici à estimer l'erreur commise lorsque l'on remplace un arbre infini par l'arbre fini sous-jacent à $N + 1$ générations. On se placera pour cela dans le cadre d'arbres géométriques de loi $r_n = r_0 \alpha^n$. D'après la section précédente, il s'agit d'estimer l'erreur $u - u_N$ dans les normes adaptées. La figure 5.4 donne l'intuition que l'on peut avoir du résultat. En effet, on ne peut pas espérer obtenir une erreur plus petite que $(\alpha/2)^N$ qui correspond à la résistance équivalente des 2^N sous-arbres infinis non pris en compte dans le cadre de l'arbre géométrique fini à $N + 1$ générations. Le théorème suivant valide cette intuition. Afin de simplifier les notations et sans perte de généralité, nous supposons dans tout ce qui suit $\beta = 1$.

Théorème 5.21 *On suppose que T et T_N sont des arbres géométriques respectivement infinis et à $N + 1$ générations de loi $r_n = r_0 \alpha^n$ avec $0 < \alpha < 2$. Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ et u la solution de*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u - \partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_t u = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times I \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I \\ \partial_t u(0) = u_1 & \text{sur } I, \end{cases} \quad (5.20)$$

donnée par le théorème 5.10. On définit les conditions initiales (u_0^N, u_1^N) par

$$\begin{cases} u_0^N &= u_2 - \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n^N v_{nk} T_{nk} \\ u_1^N &= u_1, \end{cases}$$

avec $u_2 \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ et $(v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ définis pour $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ par le théorème 5.17. Soit alors u_N solution de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u_N - \partial_{xx}u_N - \partial_x \mathcal{R}_N \partial_x \partial_t u_N = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times I \\ u_N(0) = u_0^N & \text{sur } I \\ \partial_t u_N(0) = u_1^N & \text{sur } I, \end{cases} \quad (5.21)$$

donnée par la remarque 5.12. Il existe alors une constante $M > 0$, indépendante de N , telle que, pour tout $T > 0$, on ait

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\partial_x(u - u_N)(t)\|_{L^2(I)}^2 + \|\partial_t(u - u_N)(t)\|_{L^2(I)}^2 \leq M \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2N} (T + 1). \quad (5.22)$$

Remarque 5.22 Pour $T > 0$ fixé, $(u_N, \partial_t u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ tend vers $(u, \partial_t u)$ dans $L^\infty(0, T; H_0^1(I) \times L^2(I))$ (on rappelle que $0 < \alpha < 2$). Par contre quand T tend vers l'infini, le contrôle (5.22) de la vitesse de convergence explose.

Remarque 5.23 Le résultat se généralise avec un terme de forçage $f \in C^1(0, T; L^2(I))$, la démonstration du théorème 5.21 ne faisant intervenir que la différence $u - u_N$.

Démonstration : En utilisant la remarque 5.19, $(u_0^N, u_1^N) \in \mathcal{D}_N(A)$ et ainsi les deux solutions u et u_N sont bien définies. Posons alors

$$\forall t \geq 0, \quad e_N(t) = u(t) - u_N(t).$$

On fixe $t \geq 0$. Dans le but de simplifier les notations, on omettra le plus souvent cette dépendance en t . En combinant alors (5.20) et (5.21), e_N vérifie au sens des distributions l'équation

$$\partial_{tt}e_N - \partial_{xx}e_N - \partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_t e_N = \partial_x (\mathcal{R} - \mathcal{R}_N) \partial_x \partial_t u_N.$$

La formulation variationnelle associée, en combinant la régularité des solutions obtenue par le théorème 5.10 et la remarque 5.12 et $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_N) \in \mathcal{L}(L^2(I))^2$, donnent, pour tout $\varphi \in H_0^1(I)$,

$$(\partial_{tt}e_N, \varphi)_{L^2(I)} + (\partial_x e_N, \partial_x \varphi)_{L^2(I)} + (\mathcal{R} \partial_x \partial_t e_N, \partial_x \varphi)_{L^2(I)} = -((\mathcal{R} - \mathcal{R}_N) \partial_x \partial_t u_N, \partial_x \varphi)_{L^2(I)}.$$

En prenant alors $\varphi = \partial_t e_N \in H_0^1(I)$ (voir le théorème 5.10 et la remarque 5.12) et en notant classiquement $E(e_N) = \frac{1}{2} \left(\|\partial_x e_N\|_{L^2(I)}^2 + \|\partial_t e_N\|_{L^2(I)}^2 \right)$, on trouve

$$\frac{d}{dt}(E(e_N)) + (\mathcal{R} \partial_x \partial_t e_N, \partial_x \partial_t e_N)_{L^2(I)} = -((\mathcal{R} - \mathcal{R}_N) \partial_x \partial_t u_N, \partial_x \partial_t e_N)_{L^2(I)}. \quad (5.23)$$

En appliquant alors la propriété 2.50 pour le produit scalaire $(\mathcal{R} \partial_x \partial_t e_N, \partial_x \partial_t e_N)_{L^2(I)}$ ($\partial_x \partial_t e_N$ est à moyenne nulle car $\partial_t e_N \in H_0^1(I)$), on obtient, pour $s = -\frac{1}{2} + \frac{\ln \alpha}{2 \ln 2}$,

$$\frac{d}{dt}(E(e_N)) + \|\partial_x \partial_t e_N\|_{A^s(I)}^2 = -(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N) \partial_x \partial_t u_N, \partial_x \partial_t e_N)_{L^2(I)}. \quad (5.24)$$

Majorons alors le terme de droite. En utilisant la dualité dans $A^s(I)$ et l'inégalité de Young, on obtient, pour tout $\gamma > 0$,

$$\begin{aligned} |((\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N, \partial_x\partial_t e_N)_{L^2(I)}| &\leq \|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{A^{-s}(I)} \|\partial_x\partial_t e_N\|_{A^s(I)} \\ &\leq \frac{\gamma}{2} \|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{A^{-s}(I)}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|\partial_x\partial_t e_N\|_{A^s(I)}^2. \end{aligned}$$

Remarque 5.24 *Classiquement, on aurait pu penser à utiliser la majoration L^2 suivante*

$$|((\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N, \partial_x\partial_t e_N)_{L^2(I)}| \leq \frac{\gamma}{2} \|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{L^2(I)}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|\partial_x\partial_t e_N\|_{L^2(I)}^2.$$

Afin de contrôler le terme $\|\partial_x\partial_t e_N\|_{L^2(I)}^2$ par un terme à gauche de l'inégalité (5.23), l'opérateur \mathcal{R} doit vérifier la propriété de coercivité suivante

$$(\mathcal{R}\partial_x v, \partial_x v)_{L^2(I)} \geq c\|v\|_{L^2(I)}^2,$$

pour tout $v \in H_0^1(I)$. Or, comme nous le verrons dans le théorème 5.32, une telle propriété n'est vraie que pour $1 < \alpha < 2$. La démonstration utilisée ici permet d'estimer l'erreur commise pour tout α dans $]0, 2[$.

En utilisant l'inégalité ci-dessus dans (5.24) pour un γ vérifiant $1 - \frac{1}{2\gamma} > 0$ et en notant δ cette constante strictement positive, on trouve

$$\frac{d}{dt}(E(e_N)) + \delta\|\partial_x\partial_t e_N\|_{A^s(I)}^2 \leq \frac{\gamma}{2} \|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{A^{-s}(I)}^2. \quad (5.25)$$

Calculons précisément le terme de droite. $\partial_x\partial_t u_N$ appartient à $L^2(I)$ et cette fonction est à moyenne nulle car $\partial_t u_N \in H_0^1(I)$, donc il existe $(u_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ vérifiant

$$\partial_x\partial_t u_N = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{nk} \Psi_{nk}.$$

En se rappelant les propriétés spectrales de \mathcal{R} et de \mathcal{R}_N (voir la propriété 2.35 et la remarque 2.36), on obtient l'expression suivante

$$(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} (\rho_n - \rho_n^N) u_{nk} \Psi_{nk} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n u_{nk} \Psi_{nk}.$$

En remarquant alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_n - \rho_n^N = \rho_{N+1}$, on obtient, en utilisant l'injection continue de $L^2(I)$ dans $A^{-s}(I)$, $s > 0$,

$$\|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{A^{-s}(I)} \leq \rho_{N+1} \left\| \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{nk} \Psi_{nk} \right\|_{L^2(I)} + \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n u_{nk} \Psi_{nk} \right\|_{L^2(I)}$$

L'orthonormalité de la base de Haar et la décroissance des valeurs propres de \mathcal{R} donnent

$$\|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{A^{-s}(I)} \leq \rho_{N+1} \left[\left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.26)$$

Ainsi, on obtient

$$\|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{A^{-s}(I)} \leq 2\rho_{N+1}\|\partial_x\partial_t u_N\|_{L^2(I)}.$$

En utilisant la remarque 5.12, on trouve, pour tout $t \geq 0$,

$$\|\partial_x\partial_t u_N(t)\|_{L^2(I)} \leq \left(|u_1^N|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_{xx}u_0^N + \partial_x\mathcal{R}_N\partial_x u_1^N\|_{L^2(I)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En se rappelant alors que $u_1^N = u_1$ et que $\partial_{xx}u_0^N + \partial_x\mathcal{R}_N\partial_x u_1^N = \partial_{xx}u_2$, on obtient

$$\|(\mathcal{R} - \mathcal{R}_N)\partial_x\partial_t u_N\|_{A^{-s}(I)} \leq 2M\rho_{N+1},$$

avec $M = \left(|u_1|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_{xx}u_2\|_{L^2(I)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. En combinant alors (5.25), l'inégalité ci-dessus et l'expression de ρ_{N+1} dans le cas d'un arbre géométrique (voir le corollaire 2.44), on obtient

$$\frac{d}{dt}(E(e_N)) \leq C\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2N},$$

avec $C = \gamma M^2 \lambda_0^2 \alpha^4 / 8$. D'où,

$$E(e_N)(t) - E(e_N)(0) \leq C\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2N}t, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.27)$$

Il s'agit alors d'étudier $E(e_N)(0)$. En remarquant que $u_1^N = u_1$ assure $\partial_t e_N(0) = 0$,

$$E(e_N)(0) = \frac{1}{2}|e_N(0)|_{H_0^1(I)}^2.$$

Or

$$\partial_x e_N(0) = - \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} (\rho_n - \rho_n^N) v_{nk} \Psi_{nk} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk} \Psi_{nk} \right).$$

En refaisant alors le même type de calculs qu'au (5.26), on obtient

$$|e_N(0)|_{H_0^1(I)} \leq C' \left(\frac{\alpha}{2}\right)^N |u_1|_{H_0^1(I)},$$

avec $C' = \lambda_0 \alpha^2 / 2$. Ainsi, en combinant cette inégalité avec (5.27), il existe une constante notée $C > 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$E(e_N)(t) \leq C \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2N} (t + 1).$$

Ce qui donne le résultat voulu en prenant $t \leq T$. \square

Remarque 5.25 *Pour obtenir une estimation d'erreur, on a besoin des estimations d'énergie (5.13). Ainsi, ce résultat ne se généralise pas au cas de solutions faibles avec $(u_0, u_1) = (u_0^N, u_1^N) \in H$.*

L'étude numérique de l'équation (5.20) passe par sa discrétisation. Celle-ci peut se faire selon deux échelles de discrétisation différentes : une première échelle pour l'approximation de l'opérateur à noyau \mathcal{R} par \mathcal{R}_N opérateur défini sur l'arbre fini à $N + 1$ générations. Le deuxième niveau de discrétisation correspond au choix d'un pas de discrétisation en espace si l'on pense, par exemple, à une discrétisation type éléments finis ou différences finies. Si l'on choisit un pas de discrétisation en espace h de type dyadique, plus précisément, $h = 2^{-n}$, l'estimation d'erreur (5.22) indique le n limite à partir duquel il n'est plus utile de raffiner la discrétisation en espace. La limite au-delà de laquelle il n'est plus besoin de raffiner est atteinte en

$$n = E\left[N\left(1 - \frac{\ln \alpha}{\ln 2}\right)\right].$$

Ainsi, plus $\alpha < 1$ est petit, plus il est intéressant de raffiner en espace. A l'inverse, pour $\alpha > 1$, plus il se rapproche de 2, plus un raffinement fin est inutile.

5.4 Décroissance de l'énergie vers 0

La présence de l'arbre résistif qui couple toutes les sorties fait apparaître un terme de dissipation non locale $-\partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_t u$. Afin de mieux comprendre le rôle qu'il joue dans la dissipation d'énergie, on étudie, dans les deux prochaines sections, le comportement en temps long de la solution u du problème (5.20) modélisant le mouvement du parenchyme lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée. On se place pour cela dans le cadre d'un arbre régulier infini. On vérifie ici que l'énergie d'un tel système décroît vers 0 quand t tend vers l'infini. La prochaine section permettra, dans certains cas particuliers, de montrer que cette décroissance est exponentielle.

Là encore, on supposera dans un souci de simplification des notations, que $\beta = 1$.

Théorème 5.26 *Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$. Soit u l'unique solution définie par le théorème 5.10 de*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u - \partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_t u = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times I \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I \\ \partial_t u(0) = u_1 & \text{sur } I. \end{cases} \quad (5.28)$$

Alors l'énergie $E(u)$, définie par

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}(\|u(t)\|_{H_0^1(I)}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{L^2(I)}^2), \quad \forall t \geq 0, \quad (5.29)$$

est décroissante et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Nous allons utiliser, pour montrer ce théorème, le principe d'invariance de LaSalle (voir [50]). Ce principe démontre que, sous certaines hypothèses, l'ensemble des points d'équilibre d'un système dynamique attire toutes les trajectoires. Le semi-groupe continu de contraction $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associé à A (voir la définition 5.1) est un système dynamique sur $Z = \mathcal{D}(A) \subset H$, $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$, muni de la norme usuelle sur H . On définit les points d'équilibre d'un système dynamique par

Définition 5.27 Soit (Z, d) un espace métrique complet et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un système dynamique. Un élément $z \in Z$ est dit point d'équilibre de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si

$$\forall t \geq 0, S(t)z = z.$$

On notera \mathcal{E} l'ensemble des points d'équilibre.

La notion de fonction de Liapunov stricte doit aussi être définie.

Définition 5.28 Une fonction $E \in C(Z, \mathbb{R})$ est dite fonction de Liapunov pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si on a

$$E(S(t)z) \leq E(z), \quad \forall z \in Z, \quad \forall t \geq 0.$$

Une fonction de Liapunov E pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est dite fonction de Liapunov stricte si la condition suivante est vérifiée : si $z \in Z$ est tel que $E(S(t)z) = E(z)$ pour tout $t \geq 0$, alors z est un point d'équilibre de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

On cherche alors à appliquer le théorème suivant (voir [50]).

Théorème 5.29 Soit E une fonction de Liapunov stricte pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et soit \mathcal{E} l'ensemble des points d'équilibre de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Si \mathcal{E} est réduit au singleton 0 et que toute condition initiale $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ vérifie $\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)(u_0, u_1)\}$ est relativement compact dans $\mathcal{D}(A)$, alors l'énergie du système associé tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$.

On peut alors démontrer le théorème 5.26.

Démonstration : Etape une : Point d'équilibre du système dynamique.

Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{E}$. D'après la définition des points d'équilibre d'un système dynamique, (u_0, u_1) vérifie

$$\forall t \geq 0, S(t)(u_0, u_1) = (u_0, u_1).$$

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ étant le semi-groupe continu de contraction associé à A , on a

$$\forall t \geq 0, (u, \partial_t u)(t) = (u_0, u_1), \tag{5.30}$$

avec $(u, \partial_t u)$ défini par le théorème 5.10. En posant alors $U = {}^t(u, \partial_t u)$, U vérifie

$$\forall t \geq 0, AU(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ -\partial_{xx} & -\partial_x \mathcal{R} \partial_x \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$(u_0, u_1) \in \mathcal{E} \Rightarrow \begin{cases} \partial_t u = 0 \\ \partial_{xx} u = 0. \end{cases}$$

Or $u \in H_0^1(I)$ donc $u \equiv 0$. En réinjectant dans (5.30), le seul point d'équilibre est bien $\{(0, 0)\}$.

Etape deux : Définition d'une fonction de Liapunov stricte.

On pose

$$\forall (u, v) \in \mathcal{D}(A), \quad E(u, v) = \frac{1}{2} \left(|u|_{H_0^1(I)}^2 + \|v\|_{L^2(I)}^2 \right).$$

Vérifions que E est une fonction de Liapunov stricte pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Il est clair que $E \in C(\mathcal{D}(A), \mathbb{R})$. Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$ fixés. La formulation variationnelle associée à l'équation

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u - \partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_t u = 0,$$

en prenant la fonction test admissible $\partial_t u(t) \in H_0^1(I)$ (voir le théorème 5.10) donne, classiquement,

$$\frac{dE}{dt}(S(t)(u_0, u_1)) = -(\mathcal{R} \partial_x \partial_t u, \partial_x \partial_t u)_{L^2(I)}. \quad (5.31)$$

En se rappelant que \mathcal{R} est un opérateur monotone (voir la propriété 2.32), E est une fonction de Liapunov. Démontrons maintenant que E est une fonction de Liapunov stricte. Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ satisfaisant

$$\forall t \geq 0, E(S(t)(u_0, u_1)) = E((u_0, u_1)). \quad (5.32)$$

Vérifions alors que (u_0, u_1) est un point fixe, à savoir (u_0, u_1) nul. En combinant (5.31) et (5.32), on obtient

$$(\mathcal{R} \partial_x \partial_t u, \partial_x \partial_t u)_{L^2(I)} = 0.$$

Or l'opérateur \mathcal{R} est non dégénéré (voir la remarque 2.37), d'où

$$\forall t \geq 0, \partial_x \partial_t u(t) = 0 \text{ p.p. sur } I.$$

Or $\partial_t u \in H_0^1(I)$ donc $\partial_t u = 0$. Ainsi, u est indépendant du temps et $U = {}^t(u, \partial_t u)$ est solution, pour tout $t > 0$, de

$$AU(t) = 0.$$

Ainsi, $(u, \partial_t u)$ est nul pour tout temps donc (u_0, u_1) aussi en utilisant (5.32). (u_0, u_1) est point fixe et E est donc une fonction de Liapunov stricte.

Etape trois : Trajectoires relativement compactes.

Afin d'appliquer le principe de LaSalle, il reste à vérifier que chaque trajectoire $\cup_{t \geq 0} \{S(t)(u_0, u_1)\}$ avec $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ est bien relativement compacte dans $(\mathcal{D}(A), d)$ avec d distance associée à la norme usuelle sur H , $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$. Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$. On considère donc une suite $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n) = S(t_n)(u_0, u_1),$$

telle qu'elle soit bornée pour la norme usuelle sur H . En particulier, d'après la remarque 5.11, cette suite $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{D}(A)$ pour la norme de graphe sur $\mathcal{D}(A)$

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{D}(A)}^2 = \|u\|_{H_0^1(I)}^2 + \|v\|_{H^1(I)}^2 + \|\partial_{xx}u + \partial_x \mathcal{R} \partial_x v\|_{L^2(I)}^2. \quad (5.33)$$

D'après la propriété 5.20, $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme de graphe est compact dans H muni de la norme usuelle. Ainsi, il existe bien une sous-suite convergente pour la norme usuelle de H , ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Ce résultat se généralise très facilement par densité au cas où les conditions initiales ne sont plus dans le domaine de l'opérateur :

Corollaire 5.30 Soit $(u_0, u_1) \in H$. Soit $(u, \partial_t u) \in C([0, +\infty[, H)$ unique solution faible de (5.20) (voir la remarque 5.13) définie par, pour tout $t \geq 0$,

$$(u, \partial_t u)(t) = S(t)(u_0, u_1),$$

avec $(S(t))_{t \geq 0}$ semi-groupe continu de contraction associé à A (voir la définition 5.1). Alors l'énergie est bien définie pour tout $t \geq 0$ et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Démonstration : $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H , donc il existe une suite de conditions initiales $(u_0^m, u_1^m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)^\mathbb{N}$ qui converge fortement vers (u_0, u_1) dans H . Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $(u_m, \partial_t u_m)$ l'unique solution donnée par le théorème 5.10 et qui vérifie, pour tout $t \geq 0$, $(u_m, \partial_t u_m)(t) = S(t)(u_0^m, u_1^m)$. Soit $t \geq 0$ fixé. Un calcul rapide utilisant l'inégalité triangulaire permet de majorer l'énergie par

$$E(u)(t) \leq |u(t) - u_m(t)|_{H_0^1}^2 + \|\partial_t u(t) - \partial_t u_m(t)\|_{L^2(I)}^2 + 2E(u_m)(t).$$

En remarquant que

$$|u(t) - u_m(t)|_{H_0^1}^2 + \|\partial_t u(t) - \partial_t u_m(t)\|_{L^2(I)}^2 = \|S(t)(u_0 - u_0^m, u_1 - u_1^m)\|_H^2$$

et en se rappelant que $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe continu de contraction, on obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned} \|S(t)(u_0 - u_0^m, u_1 - u_1^m)\|_H &\leq \| \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \| (u_0 - u_0^m, u_1 - u_1^m) \|_H \\ &\leq \| (u_0 - u_0^m, u_1 - u_1^m) \|_H. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(u)(t) \leq \| (u_0 - u_0^m, u_1 - u_1^m) \|_H^2 + 2E(u_m)(t).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout m suffisamment grand,

$$\| (u_0 - u_0^m, u_1 - u_1^m) \|_H \leq \varepsilon.$$

Un passage à la limite quand t tend vers $+\infty$ permet alors de conclure en se rappelant que $E(u_m)(t)$ tend vers 0 d'après le théorème 5.26. \square

On a ainsi vérifié la décroissance de l'énergie vers 0 pour ce modèle monodimensionnel. La question d'une généralisation en dimension supérieure peut alors être posée. Vraisemblablement, l'opérateur de dissipation non locale dû à la présence de l'arbre résistif infini qui interviendra alors sera $\int \int \operatorname{div}(\partial_t u) \operatorname{div}(\partial_t v)$. Il n'est alors pas clair, le ∂_x étant alors remplacé par div , que les points d'équilibre du système dynamique associé soient réduits au singleton 0. Le raisonnement ci-dessus ne se généralise donc pas tel quel en dimension supérieure.

5.5 Vitesse de décroissance de l'énergie

Dans cette dernière section, on cherche à estimer la vitesse de décroissance de l'énergie vers 0. On se place pour cela dans le cadre d'un arbre géométrique de loi $r_n = r_0 \alpha^n$.

On prouve alors la décroissance exponentielle pour certaines valeurs du paramètre α . Le problème essentiel qui se pose tout au long de cette section est la comparaison de deux échelles de régularité différentes. Plus précisément, l'opérateur différentiel $-\partial_{xx}$ sur I possède comme fonctions propres la base hilbertienne $(\sqrt{2}\sin n\pi x)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(I)$ alors que l'opérateur différentiel lié à la présence de l'arbre résistif fait intervenir la base de Haar de $L^2(I)$. Il s'agit alors de comparer, d'un côté des normes de Sobolev usuelles et, de l'autre côté, des normes de type A^s . D'après les articles [32] et [33], ces deux normes $\|\cdot\|_{H^s(I)}$ et $\|\cdot\|_{A^s(I)}$ sont équivalentes pour $-1/2 < s < 1/2$ et comparables pour $-1 < s < 1$. Lorsque ces deux normes sont comparables, c'est-à-dire pour certaines valeurs du paramètre α , on démontre la décroissance exponentielle. A l'extérieur de ces plages, ces deux normes estiment des régularités très différentes et il devient impossible de les comparer. On peut remarquer, pour s'en convaincre, que $\Psi_{nk} \notin H^{\frac{1}{2}}(I)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Nous reviendrons sur ces difficultés lors de la dernière partie de cette section. Commençons tout d'abord par faire un bref rappel des différentes méthodes existantes pour étudier le taux de décroissance de l'énergie d'un système.

5.5.1 Méthodes d'étude du taux de décroissance de l'énergie

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'étudier le comportement en temps long d'équations aux dérivées partielles. Une des méthodes les plus classiques pour démontrer une décroissance exponentielle est la méthode d'énergie où l'on recherche des inégalités différentielles sur E (voir par exemple [13, 14]). C'est d'ailleurs cette méthode qui est utilisée dans la prochaine sous-section lorsque $1 < \alpha < 2$. Pour autant, de nombreux résultats proviennent du lien étroit existant entre les inégalités d'observabilité fortes et ces problèmes de stabilisation exponentielle. Il est par exemple démontré dans [51, 52, 53] qu'il y a en fait équivalence entre ces deux problèmes. Différentes techniques ont alors été développées afin d'obtenir de telles inégalités : la méthode des multiplicateurs ([16, 17]), les inégalités de Carleman ([54]) ou encore l'analyse micro-locale ([55]). Une étude spectrale est aussi utilisée en dimension 1 permettant, si la partie réelle de toutes les valeurs propres est négative, de démontrer là encore une décroissance exponentielle (voir par exemple [56, 57]). Cette même méthode est d'ailleurs aussi utilisée, toujours en 1-d, pour vérifier la non décroissance exponentielle ([58, 59]). En dimension supérieure, l'utilisation de la méthode WKB combinée avec de l'optique géométrique permet la construction de rayons gaussiens à partir desquels on montre un manque de décroissance uniforme et donc exponentielle (voir [60, 15, 61, 62, 18, 19]). Lorsqu'il n'y a pas décroissance exponentielle, on cherche à montrer la décroissance polynomiale en utilisant des inégalités d'observabilité plus faibles ([15, 18, 19]). Des inégalités intégrales à poids associées à des multiplicateurs par morceaux convenablement choisis et à des arguments de convexité permettent aussi de démontrer des décroissances polynomiales ou logarithmiques (voir [63, 17]). Pour finir, une étude numérique peut donner des indications sur la nature de la décroissance.

5.5.2 Décroissance exponentielle pour $\alpha \in]1, 2[$

Nous avons utilisé ici, pour démontrer la décroissance exponentielle, la méthode énergétique. Suivant les suggestions de A.Haraux, on applique le théorème suivant (voir [13])

p.26) à notre équation des ondes perturbée par une dissipation non-locale.

Théorème 5.31 *Soit H un espace de Hilbert de norme $\| \cdot \|_H$ et soit $V \subset H$ tel que l'injection soit dense et compacte. Soit a une forme bilinéaire continue sur V symétrique et coercive et A l'opérateur associé. Soit de plus $B \in \mathcal{L}(V, V')$ un opérateur qui satisfait aux conditions suivantes :*

$$\exists c > 0 \quad \forall v \in V \quad \langle B(v), v \rangle_{V', V} \geq c \|v\|_H^2, \quad (5.34)$$

$$\exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad \|B(v)\|_{V'}^2 \leq C \langle B(v), v \rangle_{V', V}. \quad (5.35)$$

Soit $u \in C^1([0, +\infty[, V) \cap C^2([0, +\infty[, V')$ une solution de $\partial_{tt}u + Au + B\partial_tu = 0$. Alors il existe deux constantes $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_^+$ indépendantes de u telles que*

$$\forall t \geq 0, \quad |u(t)|_V^2 + \|\partial_tu(t)\|_H^2 \leq \beta e^{-\gamma t} (|u(0)|_V^2 + \|\partial_tu(0)\|_H^2).$$

Ce théorème va nous permettre de montrer la décroissance exponentielle vers 0 de l'énergie sous certaines conditions sur l'arbre résistif.

Théorème 5.32 *Soit T un arbre résistif géométrique avec*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \quad r_{nk} = r_0 \alpha^n.$$

Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ et soit u l'unique solution (donnée par le théorème 5.10) de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u - \partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_tu = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times I \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I \\ \partial_tu(0) = u_1 & \text{sur } I. \end{cases} \quad (5.36)$$

Si $\alpha \in]1, 2[$, alors l'énergie décroît exponentiellement vers 0. Plus précisément, il existe deux constantes $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_^+$ indépendantes de u telles que*

$$\forall t \geq 0, \quad E(u)(t) \leq \beta e^{-\gamma t} E(u)(0).$$

Démonstration : Etape une : Cadre d'application du théorème 5.31.

Afin de se placer dans le cadre du théorème 5.31, on pose $H = L^2(I)$ et $V = H_0^1(I) \subset L^2(I)$. $A = -\partial_{xx}$ est l'opérateur associé à la forme bilinéaire continue symétrique et coercive sur $H_0^1(I)$

$$a(u, v) = \int_I \partial_x u \partial_x v.$$

Enfin, l'opérateur B est défini par $B = -\partial_x \mathcal{R} \partial_x$. Comme $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(L^2(I))$ d'après le théorème 2.30, on a bien $B \in \mathcal{L}(V, V')$. On fixe alors $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$ et on note u l'unique solution de (5.36) qui existe bien d'après le théorème 5.10. Une fois que les deux hypothèses (5.34) et (5.35) sur B auront été vérifiées, le théorème 5.31 nous donnera exactement le résultat voulu.

Etape deux : Vérification de l'hypothèse (5.35).

On commence par vérifier cette hypothèse car elle ne fait intervenir aucune condition sur la loi géométrique de l'arbre. On fixe $v \in H_0^1(I)$. La vérification de l'hypothèse (5.35) se fait en deux temps :

★ Vérification de $\|B(v)\|_{H^{-1}(I)}^2 \leq \|\mathcal{R}\partial_x v\|_{L^2(I)}^2$,

puis

★ vérification de $\|\mathcal{R}\partial_x v\|_{L^2(I)}^2 \leq \lambda_0 \langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)}$.

La première inégalité est une simple conséquence de la définition de l'opérateur B . Pour tout $\varphi \in H_0^1(I)$,

$$\begin{aligned} |\langle B(v), \varphi \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)}| &= | \langle -\partial_x \mathcal{R}\partial_x v, \varphi \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} | \\ &= | (\mathcal{R}\partial_x v, \partial_x \varphi)_{L^2(I)} | \\ &\leq \|\mathcal{R}\partial_x v\|_{L^2(I)} \|\varphi\|_{H_0^1(I)}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le premier résultat. Vérifions alors l'inégalité $\|\mathcal{R}\partial_x v\|_{L^2(I)}^2 \leq \lambda_0 \langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)}$. $v \in H_0^1(I)$ donc $\partial_x v \in L^2(I)$ est à moyenne nulle. Or $(\Psi_0, (\Psi_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}})$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$, donc il existe $(v_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ vérifiant

$$\partial_x v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} v_{nk} \Psi_{nk}.$$

Les propriétés spectrales de \mathcal{R} (voir la propriété 2.35), en particulier la décroissance et la positivité des valeurs propres, donnent

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}\partial_x v\|_{L^2(I)}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n^2 v_{nk}^2 \\ &\leq \lambda_0 \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk}^2. \end{aligned} \tag{5.37}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} &= (\mathcal{R}\partial_x v, \partial_x v)_{L^2(I)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \rho_n v_{nk}^2. \end{aligned} \tag{5.38}$$

En combinant l'inégalité (5.37) et l'égalité (5.38), on obtient

$$\|\mathcal{R}\partial_x v\|_{L^2(I)}^2 \leq \lambda_0 \langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)}.$$

Ainsi l'hypothèse (5.35) est vérifiée avec $C = \lambda_0$.

Étape trois : Vérification de l'hypothèse (5.34).

On fixe $v \in H_0^1(I)$. En utilisant la propriété 2.50, on obtient, $\partial_x v$ étant de moyenne nulle (car $v \in H_0^1(I)$),

$$\langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} = (\mathcal{R}\partial_x v, \partial_x v)_{L^2(I)} = \frac{r_0 \alpha}{2 - \alpha} \|\partial_x v\|_{A^s(I)}^2, \tag{5.39}$$

pour $s = -1/2 + \ln \alpha / 2 \ln 2$, $s < 0$ car $0 < \alpha < 2$. Jusqu'à présent, tout a été démontré sans aucune restriction sur les valeurs du paramètre α . Nous allons maintenant énoncer trois lemmes qui vont nous permettre de finir la démonstration du théorème et qui ne seront vrais que pour certaines valeurs du paramètre α .

★ Le premier lemme permet de comparer les normes H^s et A^s . Pour certaines plages de valeurs de s , la norme A^s peut être minorée par la norme H^s , ce qui nous permet d'obtenir

$$\langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} \geq C \|\partial_x v\|_{H^s(I)}^2 \quad \forall s \in]-1, 0[.$$

★ En utilisant le deuxième lemme et toujours pour $s \in]-1, 0[$, on minore $\|\partial_x v\|_{H^s(I)}$ par $|v|_{H^{s+1}(I)}$ et on obtient ainsi

$$\langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} \geq C |v|_{H^{s+1}(I)}^2, \quad \forall s \in]-1, 0[.$$

★ Le dernier lemme permet de minorer la semi-norme H^{s+1} par la norme L^2 . L'hypothèse (5.34) est ainsi vérifiée.

Enonçons alors le premier lemme qui permet de passer des espaces A^s aux espaces usuels de Sobolev. On trouvera sa démonstration dans [33].

Lemme 5.33

$$\forall s \in]-1, 0[\quad \exists C > 0 \quad \forall f \in A^s(I) \quad C \|f\|_{H^s(I)} \leq \|f\|_{A^s(I)}.$$

Comme $s = -1/2 + \ln \alpha / 2 \ln 2$, ce lemme s'applique si $\alpha \in]1/2, 2[$. En reprenant l'égalité (5.39), il existe ainsi une constante $C > 0$ telle que

$$\langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} \geq C \|\partial_x v\|_{H^s(I)}^2, \quad -1 < s < 0. \quad (5.40)$$

Le lemme suivant permet alors de comparer la norme $\|\partial_x v\|_{H^s(I)}$ avec la semi-norme $|v|_{H^{s+1}(I)}$ lorsque $v \in H_0^1(I)$. Sa démonstration étant un peu technique, on la trouvera dans l'annexe C.

Lemme 5.34

$$\forall s \in]-1, 0[, \quad \exists C > 0, \quad \forall v \in H_0^1(I), \quad \|\partial_x v\|_{H^s(I)} \geq C |v|_{H^{s+1}(I)},$$

avec $|\cdot|_{H^{s+1}(I)}$ semi-norme sur $H^{s+1}(I)$.

En combinant alors l'inégalité (5.40) et ce lemme, on obtient, pour $\alpha \in]1/2, 2[$, c'est-à-dire pour $-1 < s < 0$,

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H_0^1(I) \quad \langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} \geq C |v|_{H^{s+1}(I)}^2. \quad (5.41)$$

Pour finir la démonstration du théorème, nous avons besoin d'un dernier lemme de type inégalité de Poincaré Wintinger généralisée pour les espaces de Sobolev à indice fractionnaire.

Lemme 5.35 Soit $\theta > 0$ et soit $\varphi \in (H^\theta(I))'$ vérifiant $\langle \varphi, 1 \rangle \neq 0$. On a alors

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^\theta(I), \quad \|v\|_{H^\theta(I)}^2 \leq C \left(\langle \varphi, v \rangle^2 + |v|_{H^\theta(I)}^2 \right). \quad (5.42)$$

Démonstration : Pour démontrer ce lemme, raisonnons par l'absurde. On suppose donc que (5.42) n'est pas vérifiée. On a alors l'existence d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^\theta(I)$ vérifiant

$$\|v_n\|_{H^\theta(I)} = 1 \tag{5.43}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(|\langle \varphi, v_n \rangle|^2 + |v_n|_{H^\theta(I)}^2 \right) = 0. \tag{5.44}$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $H^\theta(I)$, il existe $v \in H^\theta(I)$ et une sous-suite (que l'on continuera de noter $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$) faiblement convergente tels que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ dans } H^\theta(I).$$

L'injection de $H^\theta(I)$ dans $L^2(I)$ étant compacte, on en déduit la convergence forte de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers v dans $L^2(I)$. Ainsi, en combinant

$$|v|_{H^\theta(I)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |v_n|_{H^\theta(I)}$$

et (5.44), on obtient $|v|_{H^\theta(I)} = 0$. v est donc constante. Puis, en utilisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi, v_n \rangle = \langle \varphi, v \rangle$, (5.44) et l'unicité de la limite, on a

$$\langle \varphi, v \rangle = 0.$$

Ainsi, $v = 0$ car, par hypothèse, $\langle \varphi, 1 \rangle \neq 0$. Ce qui est absurde car (5.43) impose $\|v\|_{H^\theta(I)} = 1$. \square

On peut alors finir de démontrer le théorème. Afin de minorer la semi-norme H^{s+1} par la norme L^2 , les constantes restent la seule difficulté à traiter. Pour cela, nos fonctions étant dans $H_0^1(I)$, on doit se placer dans un espace de Sobolev qui "voit le bord", à savoir, $s+1 > 1/2$. On suppose donc à partir de maintenant $\alpha \in]1, 2[$ afin d'assurer $1+s \in]1/2, 1[$. En utilisant les résultats sur les injections de Sobolev (voir [64] ou [16]), on obtient en particulier

$$H^{s+1}(I) \subset C^0(\bar{I}),$$

l'injection étant continue. L'application

$$\begin{array}{ccc} \Psi & : & H^{s+1}(I) \rightarrow \mathbb{R} \\ & & v \rightarrow v(0) \end{array}$$

est alors une forme linéaire continue sur $H^{s+1}(I)$. En appliquant le lemme précédent à Ψ et en se rappelant que $v \in H_0^1(I)$, on obtient donc l'existence de $C > 0$ vérifiant

$$|v|_{H^{s+1}(I)} \geq C \|v\|_{H^{s+1}(I)}.$$

L'injection continue de $H^{s+1}(I)$ dans $L^2(I)$ combinée avec l'inégalité (5.41) permet de conclure. \square

5.5.3 Quelques remarques dans le cas $\alpha \in [0, 1]$

Le cas $\alpha \in [0, 1]$ n'est pour l'instant pas résolu et reste un problème ouvert. Faisons toutefois quelques remarques permettant de conjecturer qu'il n'y a pas décroissance exponentielle pour cette plage de valeurs.

Perte de l'ellipticité pour $\alpha < 1/2$

On vérifie ici que le caractère elliptique de l'opérateur $B = -\partial_x \mathcal{R} \partial_x$ n'est plus vérifié si $0 < \alpha < 1/2$.

Propriété 5.36 *Si $0 < \alpha < 1/2$, alors l'hypothèse (5.34) du théorème 5.31*

$$\exists c > 0, \forall v \in H_0^1(I), \langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} \geq c \|v\|_{L^2(I)}^2 \quad (5.45)$$

avec $B = -\partial_x \mathcal{R} \partial_x$ n'est plus vérifiée.

Démonstration : Supposons que l'hypothèse (5.45) soit vérifiée. En particulier cette inégalité est vraie pour les fonctions chapeaux $(T_0, (T_{nk})_{n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}})$ définies par 5.16. Calculons dans un premier temps $\langle BT_{nk}, T_{nk} \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)}$. Les propriétés spectrales de l'opérateur \mathcal{R} (voir la propriété 2.35), donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$,

$$\begin{aligned} \langle BT_{nk}, T_{nk} \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} &= \langle -\partial_x \mathcal{R} \partial_x T_{nk}, T_{nk} \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} \\ &= (\mathcal{R} \Psi_{nk}, \Psi_{nk})_{L^2(I)} \\ &= \rho_n. \end{aligned}$$

Calculons alors $\|T_{nk}\|_{L^2(I)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. En se rappelant les définitions des fonctions chapeaux (voir 5.16) et de la base de Haar (voir 2.34), T_{nk} vaut

$$T_{nk}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}(x - \frac{k}{2^n}) & \text{si } x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}] \\ -2^{\frac{n}{2}}(x - \frac{k+1}{2^n}) & \text{si } x \in [\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ fixés,

$$\begin{aligned} \|T_{nk}\|_{L^2(I)}^2 &= \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} (2^{\frac{n}{2}}(x - \frac{k}{2^n}))^2 dx + \int_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^n}} (-2^{\frac{n}{2}}(x - \frac{k+1}{2^n}))^2 dx \\ &= \frac{1}{12} \frac{1}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

En se rappelant que $\rho_n = \lambda_0 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+1}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \geq C \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

avec $C = c/6\lambda_0\alpha$. Ce résultat est absurde car $\alpha < 1/2$, ce qui achève la démonstration. \square

Cette hypothèse d'ellipticité, qui apparaît dans le théorème 5.31 comme une condition suffisante semble être quasiment optimale. Cela amène à conjecturer la non décroissance exponentielle au moins pour $\alpha < 1/2$.

Une décroissance exponentielle non uniforme pour $1/2 < \alpha \leq 1$

On suppose ici que $\alpha \in]1/2, 1]$. La démonstration du théorème 5.32 s'applique alors jusqu'au lemme 5.34 inclus et on obtient donc

$$\exists C > 0, \forall v \in H^1(I) \quad \langle B(v), v \rangle_{H^{-1}(I), H_0^1(I)} \geq C|v|_{H^{s+1}(I)}^2. \quad (5.46)$$

Par contre, la fin de la démonstration ne s'applique plus pour cette plage de valeur de α . On peut cependant obtenir un résultat partiel en considérant des trajectoires bornées. En effet, le résultat suivant permet de comparer la norme H^θ et sa semi-norme pour tout $\theta > 0$:

Lemme 5.37 *Soit R réel strictement positif, on note $B_R(H_0^1(I))$ la boule de centre 0 et de rayon R de $H_0^1(I)$. Alors*

$$\exists C_R > 0, \forall v \in H^\theta(I) \cap B_R(H_0^1(I)), \quad \|v\|_{H^\theta(I)} \leq C_R|v|_{H^\theta(I)}.$$

Démonstration : Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^\theta(I) \cap B_R(H_0^1(I))$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^\theta(I)} = 1$ et $(|v_n|_{H^\theta(I)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(I)$, quitte à extraire une sous-suite toujours notée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe $v \in H_0^1(I)$ telle que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers v . Mais le caractère borné de cette suite dans $H_0^1(I)$ assure aussi, quitte à extraire de nouveau une sous-suite, la convergence forte de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers v dans $L^2(I)$. La convergence de la semi-norme ainsi que la convergence en moyenne assure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $H^\theta(I)$. Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers v dans $H^\theta(I)$. De plus, par passage à la limite, on sait que $|v|_{H^\theta(I)} = 0$ et ainsi v est constante. Comme $v \in H_0^1(I)$, ceci assure que v est nulle. Contradiction avec $\|v_n\|_{H^\theta(I)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. \square

Ainsi, si les trajectoires sont bornées dans $\mathcal{D}(A)$, ce lemme s'applique et permet ainsi de finir la démonstration du théorème 5.32 pour $\alpha \in]1/2, 1]$. Or, en prenant les conditions initiales telles que $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{D}(A)} \leq R$, les trajectoires sont bornées dans $\mathcal{D}(A)$ et en particulier $\partial_t u$ appartient à $B_R(H_0^1(I))$. On peut ainsi appliquer le lemme précédent.

Inégalités d'observabilité forte ou faible

Comme nous l'avons dit au début de cette section, il existe d'autres méthodes pour prouver une décroissance exponentielle ou polynomiale. En particulier les méthodes liées aux inégalités d'observabilité en utilisant l'inégalité d'observabilité forte de l'équation des

ondes classique. On considère pour cela les deux problèmes suivants, le système homogène des ondes classiques

$$\begin{cases} \partial_{tt}v - \partial_{xx}v = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times I \\ u = 0 & \text{sur } \partial I \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I \\ \partial_t u(0) = u_1 & \text{sur } I, \end{cases} \quad (5.47)$$

et notre problème

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u - \partial_x \mathcal{R} \partial_x \partial_t u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times I \\ u = 0 & \text{sur } \partial I \\ u(0) = u_0 & \text{sur } I \\ \partial_t u(0) = u_1 & \text{sur } I. \end{cases}$$

En utilisant par exemple un résultat d'Haraux (voir [51]), la décroissance exponentielle est équivalente à l'inégalité d'observabilité forte suivante

$$\exists T_0 > 0, \exists C \geq 0, \|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(I) \times L^2(I)} \leq C \int_0^{T_0} (\mathcal{R} \partial_x \partial_t v, \partial_x \partial_t v)_{L^2(I)} dt, \quad (5.48)$$

pour tout v solution de (5.47). Pour $\alpha \in]1, 2[$, cette inégalité est évidente en utilisant l'ellipticité de $B = -\partial_x \mathcal{R} \partial_x$ (voir l'hypothèse 5.34) et l'inégalité forte d'observabilité classique de l'équation des ondes. En effet, on a (voir par exemple [65]) l'existence de $T_0 > 0$ et de $C > 0$ vérifiant

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(I) \times L^2(I)} \leq C \int_0^{T_0} \|\partial_t v\|_{L^2(I)}^2 dt,$$

pour v solution de (5.47). La propriété d'ellipticité permet alors de conclure dans le cas $\alpha > 1$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on peut alors essayer d'obtenir une inégalité d'observabilité plus faible nous permettant de démontrer une décroissance polynomiale. Quitte à faire une interpolation, il s'agit alors de démontrer l'inégalité (5.48), non plus pour la norme usuelle sur $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$, mais pour une norme d'énergie plus faible. Plus précisément, on cherche s'il existe $T_0 > 0$ et $C > 0$ satisfaisant

$$\|(u_0, u_1)\|_{H^{1-\theta}(I) \times H^{-\theta}(I)} \leq C \int_0^{T_0} (\mathcal{R} \partial_x \partial_t v, \partial_x \partial_t v)_{L^2(I)} dt,$$

avec $\theta \geq 0$ et v toujours solution de (5.47). En utilisant le lemme 2.50, cela revient, dans le cas d'un arbre géométrique, à vérifier l'inégalité

$$\|(u_0, u_1)\|_{H^{1-\theta}(I) \times H^{-\theta}(I)} \leq C \int_0^{T_0} \|\partial_x \partial_t v\|_{A^s(I)}^2 dt,$$

avec $s = -1/2 + \ln \alpha / 2 \ln 2 < -1/2$. En utilisant l'inégalité d'observabilité forte de l'équation des ondes, cela revient à vérifier s'il existe, pour v solution de (5.47) et $s < -1/2$ fixé, $\theta > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\|\partial_t v\|_{H^{-\theta}(I)} \leq C \|\partial_x \partial_t v\|_{A^s(I)}.$$

Il s'agit ainsi d'évaluer deux échelles différentes qui ne sont comparables que pour $-1/2 < s < 1/2$. Ce problème est, pour nous, un problème ouvert.

Chapitre 6

Vers un modèle 2D du parenchyme pulmonaire

Sommaire

6.1	Le modèle	154
6.2	Un problème bien posé	157
6.2.1	La formulation variationnelle	157
6.2.2	Le bilan d'énergie	158
6.2.3	Existence et unicité	159
6.3	Discrétisation et tests numériques	166
6.3.1	Discrétisation en temps	166
6.3.2	Algorithme proposé	168
6.3.3	Tests numériques	172

L'élaboration d'un modèle limite monodimensionnel du parenchyme dans le chapitre précédent n'a pas encore été généralisé en dimension supérieure. Ce dernier chapitre décrit l'ébauche d'un modèle du parenchyme en dimension deux ou trois. Nous nous contentons dans cette première approche de faire des simulations numériques sur une structure perforée par un nombre fini de trous tous reliés entre eux par un arbre résistif. Dans ce chapitre, on montre le caractère bien posé du modèle associé à un arbre fini sous-jacent puis on fait ensuite son étude numérique. En particulier, on étudie le comportement en temps long des solutions en faisant varier le paramètre α afin de valider numériquement la conjecture du chapitre précédent.

6.1 Le modèle

Le parenchyme pulmonaire correspond, comme cela a été dit dans le chapitre 1, à la membrane séparant les alvéoles des capillaires sanguins. Ici, comme tout au long de cette thèse, seul le mécanisme de la ventilation est étudié, les échanges gazeux ne seront donc pas abordés. En particulier, notre modélisation du parenchyme pulmonaire ne fera pas apparaître le réseau des capillaires sanguins. Ce parenchyme est constitué de fibres élastiques conférant au poumon ses propriétés élastiques. Bien que dans la réalité, sa structure ne se limite pas à des fibres élastiques, étant, entre autres, par nature gorgé de fluide sanguin, on se contente dans cette première approche de le modéliser par un milieu continu homogène isotrope et élastique, troué par un réseau d'alvéoles. Enfin, ces alvéoles sont toutes reliées entre elles par l'intermédiaire des voies respiratoires. Un arbre résistif fini à $N + 1$ générations est ainsi présent de façon fictive et couple toutes les pressions alvéolaires. Nous envisagerons, de plus, l'hypothèse de petites déformations.

Le domaine Ω , un domaine troué. On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega$ C^1 par morceaux. Ce domaine est un domaine troué par 2^N boules correspondant aux 2^N alvéoles de l'arbre résistif à $N + 1$ générations. Pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$, on note B_i l'alvéole correspondant à la sortie i de l'arbre dyadique sous-jacent et ∂B_i sa frontière. On définit de plus $B = \cup_{i=0}^{2^N-1} B_i$ l'ensemble des alvéoles et $\partial B = \cup_{i=0}^{2^N-1} \partial B_i$ l'ensemble des parois alvéolaires. On suppose que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \partial B$ où Γ_1 est de mesure superficielle strictement positive et correspond à la partie fixe de la paroi extérieure, Γ_2 correspondant à l'autre partie de la paroi extérieure. On notera par \mathbf{n} la normale sortante de $\partial\Omega$ (voir la figure 6.1).

Les équations de l'élasticité linéarisée. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps des petits déplacements à partir de l'état naturel d'un solide élastique homogène et isotrope soumis dans Ω à la densité volumique de force \mathbf{f} et fixé de manière rigide sur Γ_1 . On note λ et μ les coefficients de Lamé associés aux fibres élastiques du parenchyme pulmonaire et \mathbf{u} les petits déplacements de ce dernier. L'évolution du parenchyme au cours du temps est alors décrit par l'équation de l'élasticité linéarisée suivante

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

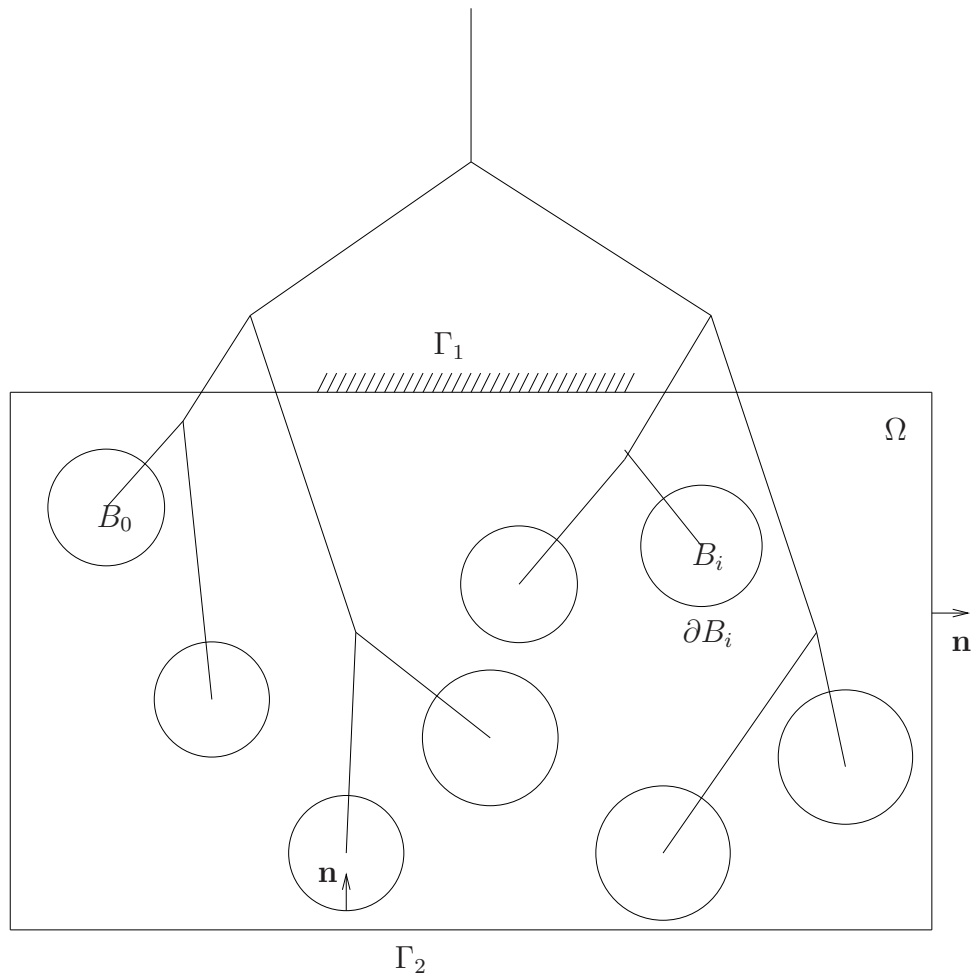


FIG. 6.1 – Modélisation du parenchyme pulmonaire.

où

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \text{Id}$$

est le tenseur des contraintes (voir [66]). On impose de plus un déplacement nul sur la paroi fixe

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1.$$

Ce système, pour être bien posé, doit être complété par des conditions aux limites sur $\Gamma_2 \cup \partial B$.

Des conditions aux limites de type Neumann dues au mécanisme de la ventilation. Lors de l'inspiration, la contraction du diaphragme induit une force surfacique sur la frontière extérieure du parenchyme Ω , au niveau des plèvres. Ainsi,

$$\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -p_{pl\grave{e}v} \mathbf{n} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_2,$$

avec $p_{pl\grave{e}v}$ strictement négative correspondant à la pression au niveau pleural. Cela se répercute au niveau des pressions alvéolaires. Ainsi, en notant p_i la pression dans l'alvéole i , $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$, on obtient les conditions aux limites suivantes pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$,

$$\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -p_i \mathbf{n} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial B_i.$$

Ces pressions sont toutes couplées entre elles par l'intermédiaire de l'arbre résistif à $N + 1$ générations. En se rappelant la propriété 2.3 qui lie les pressions alvéolaires et les flux en sortie de l'arbre, on obtient

$$\mathbf{p} = A_N \mathbf{q},$$

avec $\mathbf{p} = (p_i)_{0 \leq i \leq 2^N - 1}$ et $\mathbf{q} = (q_i)_{0 \leq i \leq 2^N - 1}$. La convention avait alors été prise de compter positivement les flux lorsque du fluide entre dans l'arbre. Il s'agit alors de remarquer que, pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$,

$$q_i = \int_{\partial B_i} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}.$$

Ainsi, les conditions aux limites sur ∂B peuvent s'écrire, pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$,

$$\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = - \left(\sum_{j=0}^{2^N - 1} A_{ij}^N \int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial B_i. \quad (6.1)$$

On note $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ les conditions initiales de déplacement et de vitesse du parenchyme. Ainsi, les petits déplacements du parenchyme peuvent être modélisés par les équations

suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -p_{pl\grave{e}v} \mathbf{n} & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_2 \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = - \left(\sum_{j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \mathbf{n} & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial B_i, \forall i \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_t \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_1 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Remarque 6.1 *On peut noter que l'arbre dyadique résistif n'a pas de réalité géométrique ici. Pour autant, il a une présence physique qui se traduit par les conditions aux bords (6.1) et qui induit une dissipation d'énergie.*

6.2 Un problème bien posé

6.2.1 La formulation variationnelle

Soit Ω le domaine borné de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3) introduit dans la section précédente. On munit les espaces $H = L^2(\Omega)^d$ et $H^1(\Omega)^d$ des normes hilbertiennes usuelles suivantes

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} = \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} = \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit de plus l'espace

$$V = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \},$$

avec Γ_1 de mesure superficielle strictement positive. Ainsi, V est un espace de Hilbert dense dans H avec injection compacte. Soit $\mathbf{v} \in V$ une fonction test. En multipliant la première équation de (6.2) par \mathbf{v} , en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, on obtient formellement

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega} {}^t \mathbf{v} \cdot \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

en notant e le tenseur des déformations infinitésimales,

$$e(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}) = (e_{ij}(\mathbf{v}))_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Il suffit alors d'utiliser les conditions aux limites données dans le système (6.2) pour obtenir

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v}) + \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) = -p_{pl\grave{e}v} \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Rappelons tout de suite l'inégalité de Korn, résultat préliminaire fondamental puisque cette inégalité assure à la forme bilinéaire continue symétrique

$$\begin{aligned} a : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

d'être coercive. On en trouvera la démonstration dans, par exemple, [67].

Théorème 6.2 *Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière $\partial\Omega$, C^1 par morceaux, et Γ_1 une partie de $\partial\Omega$ de mesure superficielle strictement positive, alors il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$, telle que*

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \quad \sum_{i,j=1}^d \|e_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \geq C \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}^2.$$

Corollaire 6.3 *On suppose que Ω est un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^d de frontière $\partial\Omega$ C^1 par morceaux et Γ_1 une partie de $\partial\Omega$ de mesure superficielle strictement positive. Alors*

$$\mathbf{v} \rightarrow \left(\sum_{i,j=1}^d \|e_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \rightarrow a(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$$

sont des normes sur $V = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ équivalentes à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d}$.

6.2.2 Le bilan d'énergie

Supposons que la solution du problème (6.2) existe et est assez régulière. Dans ce cas, il est intéressant d'avoir une notion de bilan d'énergie.

Définition 6.4 *On définit l'énergie cinétique du milieu élastique par, pour tout $t \geq 0$,*

$$E_c(\mathbf{u})(t) = \frac{1}{2} \|\partial_t \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \quad (6.3)$$

et l'énergie de déformation élastique par

$$E_e(\mathbf{u})(t) = \mu \sum_{i,j=1}^d \|e_{ij}(\mathbf{u})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (6.4)$$

L'énergie totale $E_T(\mathbf{u})(t)$ est la somme de ces deux énergies.

Raisonnons formellement. On obtient le bilan énergétique en multipliant la première équation de (6.2) par $\partial_t \mathbf{u}$, en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_{\Omega} 2\mu \left(\sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) \partial_t e_{ij}(\mathbf{u}) \right) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\partial_t \nabla \cdot \mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} {}^t \partial_t \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u}.$$

En utilisant les définitions (6.3) et (6.4) respectivement de l'énergie cinétique et élastique, on obtient, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt} E_T(\mathbf{u})(t) = \int_{\partial\Omega} {}^t \partial_t \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u}.$$

Il suffit alors d'utiliser les conditions aux limites du système (6.2) en raisonnant comme lors de la formulation variationnelle pour conclure. Ainsi, le bilan énergétique s'écrit formellement, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_T(\mathbf{u})(t) = & -p_{pl\grave{e}v} \left(\int_{\Gamma_2} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Remarque 6.5 *Si l'on suppose que la force extérieure \mathbf{f} et la pression au niveau des plèvres $p_{pl\grave{e}v}$ sont nulles, ce qui est par exemple le cas lors de l'expiration, alors l'énergie du système est strictement décroissante. En effet, il suffit de se rappeler que la matrice A_N est définie positive (voir la propriété 2.6). On remarque de plus que cette énergie est alors dissipée par l'arbre comme pour le modèle mono-dimensionnel du chapitre 5.*

6.2.3 Existence et unicité

On s'intéresse ici au caractère bien posé du problème suivant : étant donnés

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &\in V, \\ \mathbf{u}_1 &\in H, \\ p_{pl\grave{e}v} &\in H^1(0, T), \\ \mathbf{f} &\in L^2(0, T; H), \end{aligned} \tag{6.5}$$

trouver $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -p_{pl\grave{e}v} \mathbf{n} & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_2 \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = - \left(\sum_{j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \mathbf{n} & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial B_i, \forall i \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_t \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_1 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Remarque 6.6 Lors des applications numériques, la fonction $p_{pl\grave{e}v}$ est une fonction créneaux négative lors de l'inspiration et nulle lors de l'expiration. Pour autant, en réalité, lors du processus de ventilation, cette fonction $p_{pl\grave{e}v}$ est régulière, en particulier elle est bien dans $H^1(0, T)$.

Sous les hypothèses (6.5), nous appelons solution faible du problème (6.6), toute fonction $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^T (\partial_t \mathbf{u}(t), \partial_t \varphi(t))_{L^2(\Omega)^d} dt + \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \varphi(t)) dt \\ - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \int_0^T \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \varphi(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) dt \\ = \int_{\Omega} \mathbf{u}_1(x) \cdot \varphi(0, x) dx + \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_0(x) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_j} \varphi(0, x) \cdot \mathbf{n} \right) \\ - \int_0^T p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \varphi(t, x) \cdot \mathbf{n} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, x) \cdot \varphi(t, x) dx dt, \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega). \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Théorème 6.7 Sous les hypothèses (6.5), il existe une unique solution faible $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ de (6.6).

On utilise pour démontrer l'existence la méthode de Galerkin (voir [68]).

Démonstration : Etape une : Construction d'une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$.

Commençons tout d'abord par construire une solution approchée $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ du problème (6.6). L'injection canonique de V dans $L^2(\Omega)^d$ est compacte et la forme bilinéaire $a(.,.)$ est

continue symétrique et coercive. Ainsi (voir par exemple [69]), il existe une suite croissante de valeurs propres de a tendant vers $+\infty$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots,$$

et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)^d$ formée de vecteurs propres \mathbf{w}_m tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{v} \in V, a(\mathbf{w}_m, \mathbf{v}) = \lambda_m (\mathbf{w}_m, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d}.$$

De plus, la suite $(\lambda_m^{-1/2} \mathbf{w}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. On introduit alors le sous-espace V_m de V engendré par les m premiers vecteurs propres $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$. On cherche une fonction $\mathbf{u}_m : t \mapsto \mathbf{u}_m(t) \in V_m$ solution, pour tout $\mathbf{v} \in V_m$ et tout $t \geq 0$, de la formulation variationnelle

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}) + \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \\ = -p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0,m} = \sum_{i=1}^m a(\mathbf{u}_0, \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w}_i) (\lambda_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w}_i) = \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i)_{L^2(\Omega)^d} \mathbf{w}_i \\ \frac{d\mathbf{u}_m}{dt}(0) = \mathbf{u}_{1,m} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_i)_{L^2(\Omega)^d} \mathbf{w}_i. \end{aligned}$$

On peut tout de suite remarquer qu'un tel choix implique la convergence de $(\mathbf{u}_{0,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ et de $(\mathbf{u}_{1,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ respectivement vers \mathbf{u}_0 dans V muni de la norme associée à $a(\cdot, \cdot)$ et vers \mathbf{u}_1 dans $L^2(\Omega)^d$. En posant alors

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \mathbf{w}_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i(t) = (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_i)_{L^2(\Omega)^d},$$

et en prenant, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}_i$ dans la formulation variationnelle (6.8), on obtient

$$\ddot{\alpha}_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) + \sum_{l,j=0}^{2^N-1} A_{lj}^N \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_l} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} \right) = -p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{w}_i.$$

En décomposant $\partial_t \mathbf{u}_m$, cette équation devient

$$\ddot{\alpha}_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) + \sum_{p=1}^m \dot{\alpha}_p(t) \left[\sum_{l,j=0}^{2^N-1} A_{lj}^N \left(\int_{\partial B_j} \mathbf{w}_p \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_l} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} \right) \right] = -p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{w}_i.$$

En notant alors, pour tout $(i, p) \in \{1, \dots, m\}^2$,

$$b_{ip} = \sum_{l,j=0}^{2^N-1} A_{lj}^N \left(\int_{\partial B_j} \mathbf{w}_p \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_l} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} \right) \text{ et } c_i(t) = -p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{w}_i,$$

$\alpha_i(t)$ est alors solution, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, du système d'équations linéaires du second ordre à coefficients constants

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) + \sum_{p=1}^m b_{ip} \dot{\alpha}_p(t) = c_i(t) \\ \alpha_i(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i)_{L^2(\Omega)^d} \\ \dot{\alpha}_i(0) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_i)_{L^2(\Omega)^d}. \end{cases}$$

Ainsi, à $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, il existe un unique $\mathbf{u}_m \in C^1(0, T; V_m)$. On notera que T est indépendant de m , le système étant linéaire.

Etape deux : Estimation d'énergie.

Vérifions que $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; V)$ et $(\partial_t \mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; H)$.

En reprenant la formulation variationnelle (6.8) pour $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}_m \in V_m$ et en combinant cela avec la définition 6.4 de l'énergie, on obtient

$$\frac{dE(\mathbf{u}_m)}{dt}(t) = -p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_i} \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} \right) + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \partial_t \mathbf{u}_m(t).$$

En se rappelant que la matrice A_N est définie positive (voir la propriété 2.6) et en combinant cela avec les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned} \frac{dE(\mathbf{u}_m)}{dt}(t) &\leq -p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \partial_t \mathbf{u}_m(t) \\ &\leq -p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t \mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned}$$

Comme on ne sait contrôler que la norme $L^2(\Omega)^d$ de $\partial_t \mathbf{u}_m$ et non sa norme $H^1(\Omega)^d$, le terme contenant la pression extérieure nous empêche d'appliquer directement le lemme de Grönwall. Par contre, on sait contrôler la norme $H^1(\Omega)^d$ de \mathbf{u}_m , on intègre donc par parties en temps pour s'y ramener et on obtient, pour $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}_m)(t) &\leq E(\mathbf{u}_m)(0) + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_t \mathbf{u}_m(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \partial_t p_{pl\grave{e}v}(s) \left(\int_{\Gamma_2} \mathbf{u}_m(s) \cdot \mathbf{n} \right) ds - p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} + p_{pl\grave{e}v}(0) \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}_{0,m} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Comme les deux suites $(\mathbf{u}_{0,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ et $(\mathbf{u}_{1,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers \mathbf{u}_0 dans V et vers \mathbf{u}_1 dans $L^2(\Omega)^d$, $(E(\mathbf{u}_m)(0))_{m \in \mathbb{N}^*}$ et $(\int_{\Gamma_2} \mathbf{u}_{0,m} \cdot \mathbf{n})_{m \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées. Il existe ainsi une constante $C > 0$ telle que

$$E(\mathbf{u}_m)(t) \leq C + \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_t \mathbf{u}_m(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds + \int_0^t \partial_t p_{pl\grave{e}v}(s) \left(\int_{\Gamma_2} \mathbf{u}_m(s) \cdot \mathbf{n} \right) ds - p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n}.$$

En utilisant là encore les inégalités de Young et de Schwarz, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}_m)(t) \leq C + \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_t \mathbf{u}_m(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_t p_{pl\grave{e}v}^2(s) ds + \frac{|\Gamma_2|}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 ds \\ + \frac{\beta}{2} p_{pl\grave{e}v}^2(t) + \frac{|\Gamma_2|}{2\beta} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant alors la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, l'inégalité de Korn et en choisissant β tel que $1 - |\Gamma_2|/2\beta > 0$, on obtient l'existence de $C_1 > 0$ telle que

$$E(\mathbf{u}_m)(t) \leq C + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_t p_{pl\grave{e}v}^2(s) ds + \frac{\beta}{2} p_{pl\grave{e}v}^2(t) + C_1 \int_0^t E(\mathbf{u}_m)(s) ds.$$

Par hypothèse $p_{pl\grave{e}v} \in H^1(0, T) \subset C(0, T)$, ainsi,

$$\frac{1}{2} \int_0^t \partial_t p_{pl\grave{e}v}^2(s) ds + \frac{\beta}{2} p_{pl\grave{e}v}^2(t) \leq \frac{1}{2} |p_{pl\grave{e}v}|_{H^1(0, T)}^2 + \frac{\beta}{2} \|p_{pl\grave{e}v}\|_{L^\infty(0, T)}^2.$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on obtient l'existence d'une constante $C' > 0$ ne dépendant que des données du problème telle que

$$E(\mathbf{u}_m)(t) \leq C' + C_1 \int_0^t E(\mathbf{u}_m)(s) ds.$$

En appliquant alors le lemme de Grönwall sous forme intégrée, on obtient bien $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ bornée dans $L^\infty(0, T; V)$ et $(\partial_t \mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ bornée dans $L^\infty(0, T; H)$.

Etape trois : Passage à la limite.

Quitte à extraire une sous-suite encore notée $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$, il existe $\mathbf{u} \in W^{1, \infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ telle que

$$\mathbf{u}_m \xrightarrow{*} \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty(0, T; V),$$

et

$$\partial_t \mathbf{u}_m \xrightarrow{*} \partial_t \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty(0, T; H).$$

Il reste alors à prouver que \mathbf{u} vérifie la formulation faible (6.7). Soit alors $\boldsymbol{\varphi} \in V_m$ et $\Psi \in \mathcal{D}([0, T])$. En multipliant la première équation de (6.6) par $\boldsymbol{\varphi}\Psi$ et en intégrant en espace et en temps, on obtient, en raisonnant comme pour la formulation variationnelle,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{u}_m \boldsymbol{\varphi} \Psi(t) dx dt + \int_0^T \Psi(t) a(\mathbf{u}_m(t), \boldsymbol{\varphi}) dt + \int_0^T \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_i} \Psi(t) \partial_t \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_j} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \right) dt \\ = - \int_0^T p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \Psi(t) \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dt + \int_0^T \Psi(t) \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

En intégrant par partie en temps le premier et le troisième termes et en utilisant $\Psi(T) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} -\Psi(0) \int_{\Omega} \mathbf{u}_{1,m} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx - \int_0^T \Psi'(t) (\partial_t \mathbf{u}_m(t), \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} dt + \int_0^T \Psi(t) a(\mathbf{u}_m(t), \boldsymbol{\varphi}) dt \\ - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \Psi(0) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_{0,m} \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_j} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \right) - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \right) \int_0^T \Psi'(t) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} \right) dt \\ = - \int_0^T p_{pl\grave{e}v}(t) \int_{\Gamma_2} \Psi(t) \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} dt + \int_0^T \Psi(t) \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

Les résultats de convergence sur les conditions initiales et sur la suite $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ permettent alors de conclure. Plus précisément, la convergence, quand m tend vers $+\infty$, des trois premiers termes respectivement vers $-\Psi(0) \int_{\Omega} \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi} dx$, $-\int_0^T \Psi'(t) (\partial_t \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} dt$ et $\int_0^T \Psi(t) a(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi}) dt$ est claire d'après les convergences vues précédemment. Par continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $(\mathbf{u}_{0,m} \cdot \mathbf{n})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge fortement vers $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, ce qui assure la convergence suivante

$$\sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \Psi(0) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_{0,m} \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_j} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \Psi(0) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_j} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \right).$$

La même raison donne $(\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n})_{m \in \mathbb{N}^*}$ bornée dans $L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ et sa convergence faible \star dans ce même espace vers $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Ainsi,

$$\sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \right) \int_0^T \Psi'(t) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_m(t) \cdot \mathbf{n} \right) dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \right) \int_0^T \Psi'(t) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{n} \right) dt,$$

et \mathbf{u} vérifie bien la formulation faible (6.7).

Etape quatre : Unicité.

Il reste à prouver l'unicité de la solution du problème (6.7). Comme conséquence directe, la suite $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ tout entière convergera alors vers \mathbf{u} . La preuve de l'unicité s'inspire du livre [16] et de l'article [11]. Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ solutions faibles du problème (6.7) ayant mêmes conditions initiales. Ainsi, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^T (\partial_t \mathbf{u}(t), \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t))_{L^2(\Omega)^d} dt + \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) dt \\ - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \int_0^T \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) dt = 0, \\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega). \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Par un argument de densité, cette formulation faible est aussi valide pour $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(0, T; V)$ avec $\boldsymbol{\varphi}(T) = 0$. Il n'est pas possible de prendre $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}$ comme fonction test, la trace de $\partial_t \mathbf{u}$ sur le bord n'étant pas définie car $\partial_t \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H)$. Ainsi, pour tout $s \in]0, T[$ fixé, on construit, comme dans [16], \mathbf{w} par

$$\mathbf{w}(t, x) = \begin{cases} - \int_t^s \mathbf{u}(\tau, x) d\tau & \text{si } t < s \\ 0 & \text{si } t \geq s. \end{cases} \quad (6.10)$$

On peut alors prendre $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{w}$ comme fonction test dans la formulation faible (6.9) et on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\partial_t \mathbf{u}(t), \partial_t \mathbf{w}(t))_{L^2(\Omega)^d} dt + \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)) dt \\ & - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \int_0^T \left(\int_{\partial B_j} \partial_t \mathbf{w}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

En se rappelant la définition (6.10) de \mathbf{w} , l'égalité devient

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} a(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) dt \\ & - \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \int_0^s \left(\int_{\partial B_j} \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$, la trace de \mathbf{u} au temps $t = 0$ a un sens au moins dans $L^2(\Omega)$ et il est facile de vérifier que $\mathbf{u}(0) = 0$. En combinant cela avec $\partial_t \mathbf{w}(s) = 0$,

on en déduit que

$$-\frac{1}{2}\|u(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{1}{2}a(\mathbf{w}(0), \mathbf{w}(0)) = \sum_{i,j=0}^{2^N-1} A_{ij}^N \int_0^s \left(\int_{\partial B_j} \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \right) dt \geq 0,$$

car la matrice A_N est définie positive. Ainsi,

$$\|u(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + a(\mathbf{w}(0), \mathbf{w}(0)) \leq 0,$$

ce qui assure $\mathbf{u}(s) = 0$ p.p. sur Ω . Comme s est arbitraire dans $]0, T[$, on obtient bien $\mathbf{u} = 0$ p.p. sur $]0, T[\times \Omega$. Ce qui achève la démonstration du théorème. \square

6.3 Discrétisation et tests numériques

Le problème (6.2) fait apparaître des conditions de Neumann non classiques qui sont toutes couplées entre elles. L'algorithme proposé permet, en utilisant la linéarité du problème, de décomposer la solution en somme de fonctions solutions de problèmes de Neumann classiques. Les conditions aux limites ne sont alors imposées que sur la décomposition finale, ramenant notre problème de Neumann non classique à la résolution d'un système linéaire.

6.3.1 Discrétisation en temps

Le schéma de discrétisation de Newmark

On présente dans cette section un schéma de discrétisation en temps du système d'équations (6.2). On note $\Delta t > 0$ le pas de temps, $t_n = n\Delta t$ et, pour tout vecteur \mathbf{v} , $\mathbf{v}^n(x) = \mathbf{v}(t_n, x)$ (sauf pour le déplacement approché \mathbf{u}^{n+1} voir ci-dessous). On utilise alors le schéma de Newmark (voir par exemple [70, 69]) pour discrétiser l'équation de l'élasticité linéarisée. Les deux constantes entrant en jeu dans un tel schéma sont notées δ et β avec $0 \leq \delta \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1/2$. Les propriétés de cette classe de schémas dépendent des valeurs de ces deux paramètres : on montre qu'il est d'ordre un pour $\delta \neq 1/2$ et d'ordre deux pour $\delta = 1/2$. L'étude de la stabilité dépend elle aussi des valeurs des paramètres : ce schéma est toujours instable pour $\delta < 1/2$ et il est inconditionnellement stable pour

$$\delta \geq \frac{1}{2} \text{ et } \delta \leq 2\beta \leq 1.$$

On choisira toujours nos deux constantes dans cette plage de valeurs. Enfin, plus δ est grand, plus ce schéma est dissipatif et robuste mais moins précis. Toutes ces propriétés du schéma de Newmark sont démontrées dans [70, 69]. On note \mathbf{u}^{n+1} le déplacement approché au temps t_{n+1} et on définit les deux données initiales par

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \text{ et } \mathbf{u}^1 = (\Delta t)\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0.$$

Ainsi, \mathbf{u}^{n+1} est construit par récurrence à partir des données initiales $(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1)$ d'après le schéma suivant

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \nabla \cdot \sigma(\theta \mathbf{u}^{n+1} + (\frac{1}{2} + \delta - 2\theta)\mathbf{u}^n + (\frac{1}{2} - \delta + \theta)\mathbf{u}^{n-1}) &= 0 && \text{sur } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} &= -p_{pl\grave{e}v}^{n+1} \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} &= -p_i^{n+1} \mathbf{n} && \text{sur } \partial B_i, \forall i \\ \mathbf{u}^{n+1} &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

avec le vecteur pression $\mathbf{p}^{n+1} = (p_i^{n+1})_{0 \leq i \leq 2^N - 1}$ donné par la contrainte suivante

$$p_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^{2^N - 1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{n} \right).$$

Cette expression de la contrainte provient du choix du schéma d'Euler rétrograde où l'on approche $\partial_t \mathbf{u}(t_{n+1})$ par

$$\partial_t \mathbf{u}(t_{n+1}) \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}.$$

Remarque 6.8 *Il est probable que les propriétés du schéma de Newmark, en particulier ses propriétés d'ordre, soient perdues. Pour autant, les tests numériques ont montré qu'il était meilleur que d'autres types de schémas ce qui explique notre choix.*

Remarque 6.9 *Cette discrétisation se généralise sans problème au cas où la force de densité volumique \mathbf{f} n'est plus nulle. Le second membre devient alors*

$$\theta \mathbf{f}^{n+1} + (\frac{1}{2} + \delta - 2\theta)\mathbf{f}^n + (\frac{1}{2} - \delta + \theta)\mathbf{f}^{n-1}.$$

De même, dans le cas où la condition de Dirichlet n'est plus homogène sur Γ_1 valant \mathbf{g} , il suffit de remplacer 0 par \mathbf{g}^{n+1} .

En notant \mathbf{F}^n l'ensemble des termes connus de la première équation, à savoir, les termes correspondant à des temps précédents, le schéma de discrétisation devient

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} - (\Delta t)^2 \theta \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) &= \mathbf{F}^n && \text{sur } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} &= -p_{pl\grave{e}v}^{n+1} \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} &= -\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^{2^N - 1} A_{ij}^N \left(\int_{\partial B_j} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} && \text{sur } \partial B_i \quad (6.11) \\ \mathbf{u}^{n+1} &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{F}^n = 2\mathbf{u}^n + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^n) - \mathbf{u}^{n-1} + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^{n-1}). \quad (6.12)$$

Remarque 6.10 *Dans le cas où la force de densité volumique est non nulle, il suffit d'ajouter à \mathbf{F}^n le terme connu $(\Delta t)^2 (\theta \mathbf{f}^{n+1} + (1/2 + \delta - 2\theta)\mathbf{f}^n + (1/2 - \delta + \theta)\mathbf{f}^{n-1})$.*

Formulation variationnelle semi-discrétisée

La formulation variationnelle semi-discrétisée associée à (6.11) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in V \text{ tel que pour tout } \mathbf{v} \in V, \\ (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\Delta t)^2 \theta \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) : e(\mathbf{v}) + (\Delta t) \theta {}^t \mathbf{U}^{n+1} A_N \mathbf{V} \\ = (\mathbf{F}^n, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} - p_{pl\grave{e}v}^{n+1} (\Delta t)^2 \theta \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + (\Delta t) \theta {}^t \mathbf{U}^n A_N \mathbf{V}, \end{array} \right. \quad (6.13)$$

où l'on note, pour tout $\mathbf{v} \in V$, \mathbf{V} le vecteur colonne défini par

$$\mathbf{V} = (v_i)_{0 \leq i \leq 2N-1} \text{ avec } v_i = \int_{\partial B_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

Pour obtenir cette formulation variationnelle, on multiplie par \mathbf{v} la première équation de (6.11) et on intègre classiquement par parties sur Ω . On obtient alors, pour tout $\mathbf{v} \in V$,

$$(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\Delta t)^2 \theta \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) : e(\mathbf{v}) - (\Delta t)^2 \theta \int_{\partial \Omega} {}^t \mathbf{v} \cdot \sigma(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{F}^n, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d}.$$

Les conditions aux limites sur $\partial \Omega$ permettent alors de conclure.

Propriété 6.11 *Le problème (6.13) est bien posé.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que, pour $\Delta t > 0$ fixé, on ajoute un terme positif à une forme bilinéaire continue coercive, la matrice A_N étant définie positive (voir la propriété 2.6). \square

6.3.2 Algorithme proposé

L'algorithme suivant consiste à découpler les problèmes en construisant d'une part une base réduite indépendante du temps et solution de problèmes de Neumann classiques et d'autre part, à chaque pas de temps, une fonction solution d'un problème de Neumann usuel. La prise en compte des conditions de Neumann non classiques se fait alors, à chaque pas de temps, sur une telle décomposition en résolvant un système linéaire. L'idée de l'algorithme proposé ci-dessous repose donc sur la linéarité du problème qui permet, à chaque pas de temps, de décomposer la solution \mathbf{u}^{n+1} sous la forme

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \sum_{i=0}^{2N-1} p_i^{n+1} \mathbf{u}_i, \quad (6.14)$$

où $(\mathbf{u}_i)_{0 \leq i \leq 2^N - 1}$ forme une base réduite indépendante du temps, à la différence de $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ qui, lui, est calculé à chaque pas de temps. Plus précisément, pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$, \mathbf{u}_i est solution du problème stationnaire classique suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\text{Id} - (\Delta t)^2 \theta \nabla \cdot \sigma)(\mathbf{u}_i) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial B_j, \forall j \neq i \\ \sigma(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} & \text{sur } \partial B_i \\ \mathbf{u}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Ce problème est bien posé en passant par la formulation variationnelle et en appliquant l'inégalité de Korn (voir le théorème 6.2). Ensuite, à chaque pas de temps, \mathbf{F}^n est connu et $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ est alors solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\text{Id} - (\Delta t)^2 \theta \nabla \cdot \sigma)(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) = \mathbf{F}^n & \text{sur } \Omega \\ \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} = -p_{pl\grave{e}v}^{n+1} \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial B_i, \forall i \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (6.16)$$

avec \mathbf{F}^n défini par (6.12). Là encore, ce problème est bien posé toujours pour les mêmes raisons.

Remarque 6.12 *Les deux remarques 6.9 et 6.10 permettent de généraliser le problème au cas où la force de densité volumique est non nulle et au cas d'un problème de Dirichlet non homogène.*

Il reste alors à exprimer les coefficients $(p_i^{n+1})_{0 \leq i \leq 2^N - 1}$. L'approximation de l'ensemble des pressions alvéolaires au temps t_{n+1} est donnée par

$$\mathbf{p}^{n+1} = A_N \mathbf{q}^{n+1}, \quad (6.17)$$

avec, pour tout $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$,

$$\begin{aligned} q_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial B_i} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial B_i} (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^{2^N - 1} p_j^{n+1} \int_{\partial B_i} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

On définit alors la matrice A_F et le vecteur colonne \mathbf{b}^{n+1} par

$$A_F = \left(\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} \right)_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}^{n+1} = \left(\int_{\partial B_i} (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{n} \right)_{0 \leq i \leq 2^N - 1}. \quad (6.19)$$

En combinant alors cette définition avec (6.17) et (6.18), on obtient

$$\mathbf{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} A_N (\mathbf{b}^{n+1} + A_F \mathbf{p}^{n+1}),$$

à savoir

$$\left(\text{Id} - \frac{1}{\Delta t} A_N A_F \right) \mathbf{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} A_N \mathbf{b}^{n+1}. \quad (6.20)$$

Les pressions alvéolaires sont bien définies d'après la propriété suivante.

Propriété 6.13 *La matrice $\text{Id} - \frac{1}{\Delta t} A_N A_F$ est inversible.*

Démonstration : La matrice A_N est symétrique définie positive (voir la propriété 2.6). Par propriété sur les matrices symétriques définies positives, il suffit de vérifier que $-A_F$ est, elle aussi, symétrique définie positive pour pouvoir conclure à l'inversibilité de $\text{Id} - (1/\Delta t)A_N A_F$. Soit $i \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$ fixé et $\mathbf{u}_i \in V$ la solution de (6.15). La formulation variationnelle associée est alors, pour tout $\mathbf{v} \in V$,

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v} + (\Delta t)^2 \theta a(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = -(\Delta t)^2 \theta \int_{\partial B_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

En se rappelant alors que $-A_F = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1}$ avec $a_{ij} = -\int_{\partial B_i} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}$, on obtient, pour tout couple $(i, j) \in \{0, \dots, 2^N - 1\}^2$,

$$a_{ij} = a(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) + \frac{1}{(\Delta t)^2 \theta} \int_{\Omega} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j.$$

En notant alors b la forme bilinéaire définie sur $V \times V$ par

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{(\Delta t)^2 \theta} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)},$$

b est symétrique définie positive (voir l'inégalité de Korn). Ainsi, $-A_F$ est bien une matrice symétrique définie positive ce qui achève la démonstration. \square

On obtient alors l'algorithme suivant qui comporte deux étapes, l'une indépendante du temps, l'autre correspondant à la boucle en temps.

Étape une : base réduite

1. Calculer la base réduite $(\mathbf{u}_i)_{0 \leq i \leq 2^N - 1}$ en résolvant, pour chaque i , le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\text{Id} - (\Delta t)^2 \theta \nabla \cdot \sigma) \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial B_j, \forall j \neq i \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} & \text{sur } \partial B_i \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

2. Assemblage de la matrice des flux A_F puis calcul de l'inverse de $\left(\text{Id} - \frac{1}{\Delta t} A_N A_F\right)$ par la méthode LU.

Étape deux : boucle en temps

Pour tout $n \geq 0$, on dispose de \mathbf{u}^n et de \mathbf{u}^{n-1} .

1. Calculer

$$\mathbf{F}^n = 2\mathbf{u}^n + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta\right) \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^n) - \mathbf{u}^{n-1} + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta\right) \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^{n-1}).$$

2. Calculer $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\text{Id} - (\Delta t)^2 \theta \nabla \cdot \sigma) \mathbf{u} = \mathbf{F}^n & \text{sur } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -p_{pl\grave{e}v} \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial B_i, \forall i \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

3. Assembler le second membre $\frac{1}{\Delta t} A_N \mathbf{b}^{n+1}$ puis

$$\mathbf{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\text{Id} - \frac{1}{\Delta t} A_N A_F \right)^{-1} A_N \mathbf{b}^{n+1}.$$

4. Calculer $\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \sum_{i=0}^{2^N - 1} p_i^{n+1} \mathbf{u}_i$.

Algorithme 6.1: Schéma numérique obtenu après discrétisation en temps par la méthode de Newmark et découplage des problèmes afin de se ramener à des problèmes de Neumann classiques, les contraintes n'étant alors prises en compte que lors de la résolution d'un système linéaire.

Propriété 6.14 *La solution \mathbf{u}^{n+1} construite par l'algorithme 6.3.2 est bien la solution du problème (6.13).*

Démonstration : Il s'agit d'exprimer les formulations variationnelles associées aux problèmes (6.15) et (6.16) et de vérifier que l'on retombe bien sur la formulation variationnelle (6.13) en utilisant les équations (6.17) et (6.18) donnant l'expression de \mathbf{p}^{n+1} et la décomposition (6.14) de \mathbf{u}^{n+1} . \square

6.3.3 Tests numériques

Implémentation sous FreeFem++

On choisit d'implémenter l'algorithme 6.3.2 avec le solveur éléments finis **FreeFem++** (voir [71]). La formulation variationnelle permettant le calcul, à chaque pas de temps, de $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ dans l'algorithme 6.3.2 en utilisant le schéma de Newmark pour la discrétisation en temps, est codée dans **FreeFem++** par :

```

problem elastdyn([unew1,unew2],[w1,w2])=
  //Formulation de l'élasticité linéarisée
  int2d(Th)(unew1*w1+unew2*w2)
  +int2d(Th)(dt*dt*lambda*theta*(dx(unew1)*dx(w1)
    +dx(unew1)*dy(w2)
    +dy(unew2)*dx(w1)
    +dy(unew2)*dy(w2)))
  +int2d(Th)(dt*dt*mu*theta*(2*dx(unew1)*dx(w1)
    +2*dy(unew2)*dy(w2)
    +dy(unew1)*dy(w1)
    +dy(unew1)*dx(w2)
    +dx(unew2)*dy(w1)
    +dx(unew2)*dx(w2)))
  +int2d(Th)(dt*dt*lambda*theta1*(dx(uold1)*dx(w1)
    +dx(uold1)*dy(w2)
    +dy(uold2)*dx(w1)
    +dy(uold2)*dy(w2)))
  +int2d(Th)(dt*dt*mu*theta1*(2*dx(uold1)*dx(w1)
    +2*dy(uold2)*dy(w2)
    +dy(uold1)*dy(w1)
    +dy(uold1)*dx(w2)
    +dx(uold2)*dy(w1)
    +dx(uold2)*dx(w2)))
  +int2d(Th)(dt*dt*lambda*theta2*(dx(uoldold1h)*dx(w1h)
    +dx(uoldold1h)*dy(w2h)
    +dy(uoldold2h)*dx(w1h)

```

```

+dy(uoldold2h)*dy(w2h)))
+int2d(Th)(dt*dt*mu*theta2*(2*dx(uoldold1)*dx(w1)
+2*dy(uoldold2)*dy(w2)
+dy(uoldold1)*dy(w1)
+dy(uoldold1)*dx(w2)
+dx(uoldold2)*dy(w1)
+dx(uoldold2)*dx(w2)))
-int2d(Th)(dt*dt*(f1*w1+f2*w2))
-int2d(Th)(2*(uold1*w1+uold2*w2))
+int2d(Th)(uoldold1*w1+uoldold2*w2)
//Conditions de Neumann aux bords
+int1d(Th,C1)(pext*dt*dt*(w1*N.x+w2*N.y))
+int1d(Th,C2)(pext*dt*dt*(w1*N.x+w2*N.y))
+int1d(Th,C4)(pext*dt*dt*(w1*N.x+w2*N.y))
//Conditions de Dirichlet au bord
+on(C3,unew1h=0,unew2h=0) ;

```

Th est le maillage de Ω , domaine rectangulaire troué par 2^N boules, C1 , C2 , C3 et C4 sont les quatres bords de Ω , $(\text{unew1}, \text{unew2})$ sont les inconnues, $(\text{w1}, \text{w2})$ sont les fonctions tests associées, $(\text{uold1}, \text{uold2})$ et $(\text{uoldold1}, \text{uoldold2})$ sont respectivement les positions \mathbf{u}^n et \mathbf{u}^{n-1} calculées aux pas précédents, theta1 et theta2 valent respectivement $1/2 + \delta - 2\theta$ et $1/2 - \delta + \theta$ si (δ, θ) correspond au couple choisi pour le schéma de Newmark, pext est la pression pleurale appliquée sur le bord Γ_2 et $(\text{f1}, \text{f2})$ est la force extérieure.

Ce qui précède nous permet d'implémenter la première partie de l'étape deux. Lors de l'étape un, le calcul de la base réduite se fait par un code similaire à celui ci-dessus (et même simplifié). Le calcul de l'inverse se fait en codant sous **FreeFem++** la méthode de décomposition LU. La connaissance des matrices L et U permet alors, lors de l'étape deux, le calcul de la pression \mathbf{p}^{n+1} puis de la solution finale \mathbf{u}^{n+1} .

Une conjecture sur la vitesse de décroissance de l'énergie

Dans le chapitre 5, on a démontré une décroissance exponentielle de l'énergie dans le cas d'un arbre géométrique lorsque le paramètre α de la loi géométrique vérifie $1 < \alpha < 2$ (voir le théorème 5.32). Le cas $0 < \alpha \leq 1$ reste un problème ouvert bien que les remarques 5.5.3 amènent à penser qu'il n'y a peut-être pas décroissance exponentielle pour cette plage de valeurs de α . On a cherché ici à considérer numériquement, sur notre problème bidimensionnel, la décroissance de l'énergie. Etant en dimension finie, celle-ci est forcément exponentielle. Mais le comportement du système discrétisé peut suggérer l'évolution du système continu. Le domaine de calcul est un rectangle de longueur 20cm et de largeur 12cm troué par quatre boules de rayon 1cm situées de manière symétrique par rapport aux axes (voir la figure 6.2). Un arbre géométrique fictif à 2 générations relie ces quatre boules entre-elles (voir la figure 6.1 adaptée au cas $N = 2$). Les coefficients de Lamé sont fixés égaux à $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. On impose alors des conditions initiales sur la position

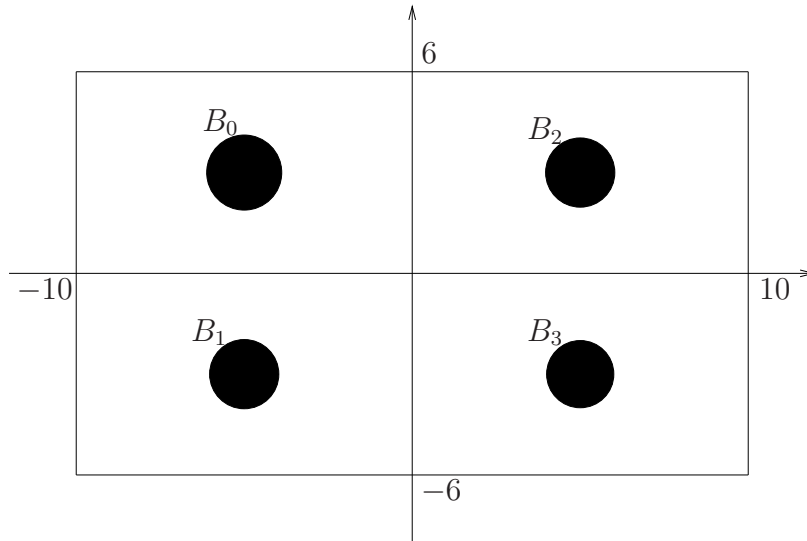


FIG. 6.2 – Description du problème.

et la vitesse. \mathbf{u}_0 , qui correspond à la position du parenchyme à l'instant initial, vérifie le problème d'élasticité linéarisée stationnaire suivant

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial B_j, \forall j \neq 1 \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -p_{init} \mathbf{n} & \text{sur } \partial B_1 \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \end{cases}$$

avec $p_{init} = 1$. Cela revient à grossir la boule 1 (voir la figure 6.3).

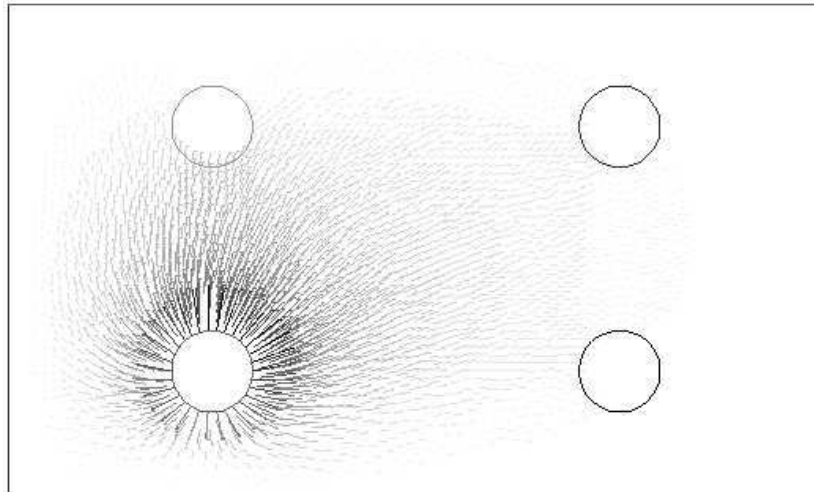


FIG. 6.3 – Position initiale du parenchyme.

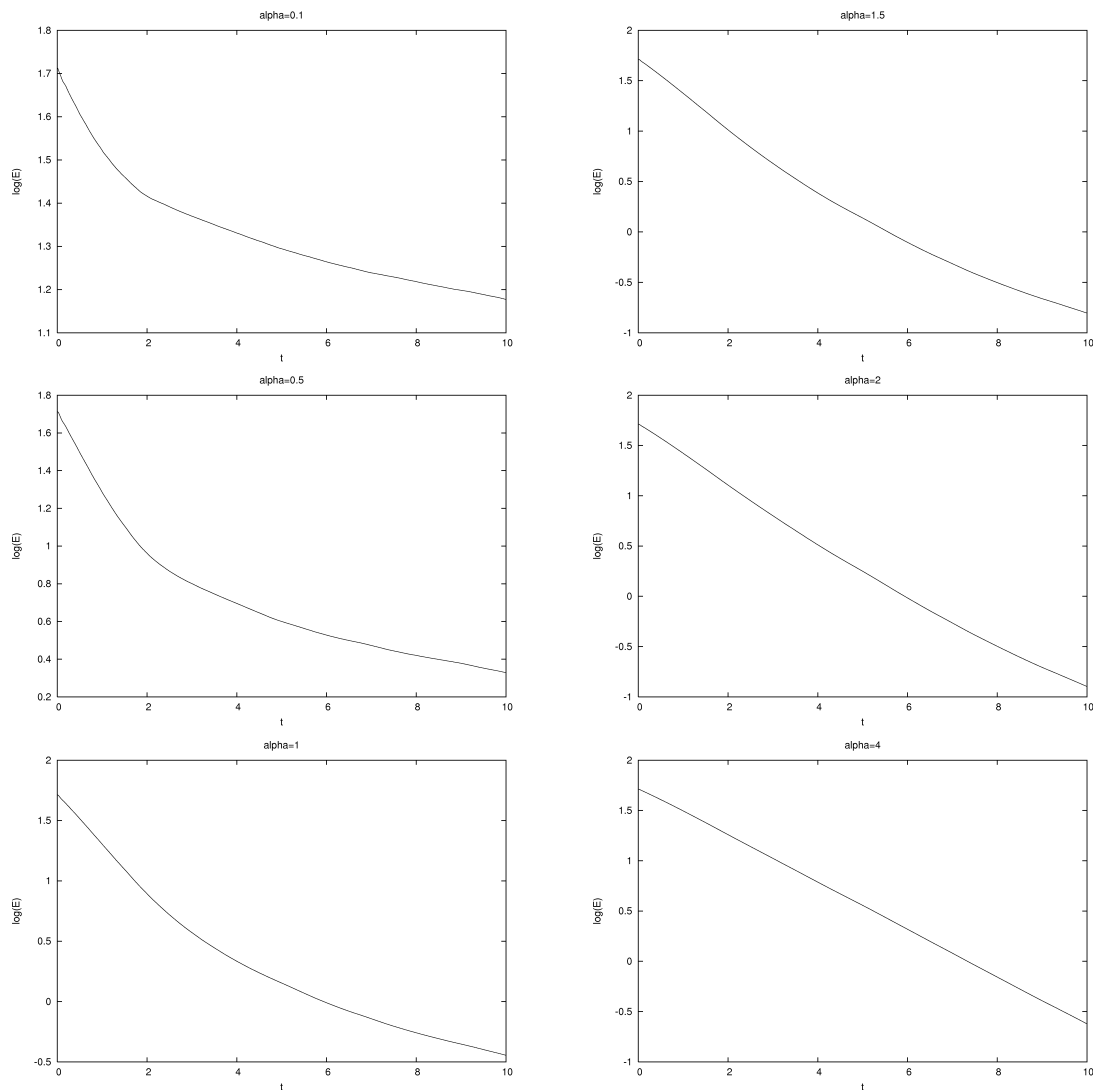


FIG. 6.4 – Tracé pour différentes valeurs de α de $\ln E_T$ en fonction du temps t .

La vitesse initiale, elle, est prise nulle. On fait, de plus, le choix, pour les paramètres du schéma de Newmark, de prendre $\delta = 0.28$ et $\theta = 0.53$ ce qui assure un schéma inconditionnellement stable et pas trop dissipatif. On fixe, de plus, la valeur de la résistance équivalente de l'arbre fini sous-jacent à 1 et on fait varier le paramètre α . On calcule alors, à chaque pas de temps, l'énergie totale E_T . L'énergie cinétique est calculée, à chaque pas de temps, en utilisant pour la dérivée en temps la différence finie décentrée aval. Afin de visualiser une décroissance plutôt exponentielle ou plutôt sous-exponentielle, on trace $\ln E_T$ en fonction du temps t (voir la figure 6.4). Ces courbes illustrent un comportement essentiellement exponentiel lorsque le paramètre α est grand et suggèrent une décroissance strictement sous-exponentielle pour α petit. Pour autant ces premiers tests ne permettent pas d'en dire plus et d'étayer dans un sens ou dans un autre la conjecture du chapitre précédent.

Annexes

Annexe A

Écoulement de Poiseuille

Tout au long de cette thèse, nous avons modélisé le poumon humain comme un arbre dyadique résistif, chaque bronche de l'arbre vérifiant la loi de Poiseuille liant de façon proportionnelle le débit Q dans une bronche au gradient de pression $P_{entrée} - P_{sortie}$ aux extrémités de celle-ci. Il s'agit alors, dans cette annexe, de retrouver cette loi en résolvant les équations de Stokes dans un tube cylindrique de section circulaire. En effet, dans la partie distale de l'arbre bronchique, plus précisément à partir de la sixième génération, le flux circulant peut être modélisé par un fluide newtonien incompressible dont l'inertie est négligeable. Il vérifie donc les équations de Stokes. Rappelons que, dans le cadre de cette thèse, nous avons supposé que le flux circulant dans l'ensemble de l'arbre bronchique est non-inertiel et cela même dans les premières générations. Un modèle plus réaliste serait de prendre en compte les effets inertiels dans les cinq premières générations en résolvant les équations de Navier-Stokes, les 2^5 sous-arbres correspondant aux générations suivantes étant alors modélisés par 2^5 arbres résistifs tels qu'on les a étudiés dans cette thèse. Sous ces hypothèses de régime lent, dans des conduits cylindriques de petits diamètres représentant les bronchioles, il est possible de trouver une solution analytique aux équations de Stokes et d'obtenir ainsi la loi de Poiseuille.

On s'intéresse donc à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible non-inertiel à travers un cylindre $\Omega =]0, L[\times S$ où S est une section circulaire de rayon r (voir figure A.1).

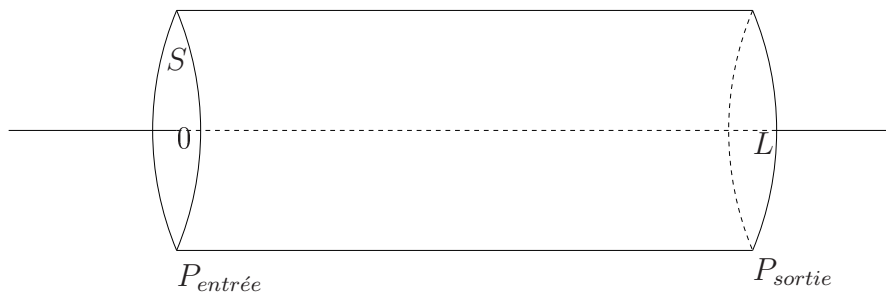


FIG. A.1 – Ω : Conduit cylindrique de section circulaire

En notant \mathbf{u} le champ de vitesse du fluide et p la pression, ils vérifient le système de Stokes

$$\begin{cases} -\mu\partial_{xx}\mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans }]0, L[\times S, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans }]0, L[\times S, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur }]0, L[\times \partial S, \end{cases}$$

où μ est la viscosité du fluide.

L'existence de $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)$ et l'unicité à une constante près pour la pression fait appel à la théorie de la minimisation sous contrainte et de la recherche de point-selle (voir par exemple [70] chapitre 10, [72] Problème 8).

Il est alors facile de vérifier que les champs

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{(P_{entrée} - P_{sortie})r^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{r^2} \right) \mathbf{e}_x \text{ et } p(x, y, z) = \frac{P_{entrée} - P_{sortie}}{L}x + P_{entrée}$$

sont bien solutions du problème de Stokes. Ainsi, l'écoulement est invariant par translation le long de l'axe du cylindre et s'organise selon un champ de vitesse parabolique qui atteint sa vitesse maximale au centre du tube. La pression, elle, est constante dans chaque section du tube.

Pour obtenir la loi de Poiseuille cherchée, il ne reste plus qu'à calculer le débit Q , à savoir le volume de fluide traversant une section transverse par unité de volume. D'où

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{(P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}})r^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) s ds d\theta, \\ &= \frac{\pi r^4}{8\mu L} (P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}}). \end{aligned}$$

Ce résultat, appelé Loi de Poiseuille, montre que le débit est proportionnel au gradient de pression et inversement proportionnel à la viscosité dynamique du fluide. On désigne alors par résistance

$$R = \frac{8\mu L}{\pi r^4}.$$

On peut également noter la forte dépendance par rapport au diamètre du tube. Cette dépendance en puissance quatrième du diamètre est une conséquence du profil parabolique de vitesse qui est lui-même une conséquence de la condition de non-glissement sur la paroi du tube.

Annexe B

Le modèle de Weibel

Génération	Nombre de branches	Diamètre (mm)	Longueur (mm)	Surface de la section totale des voies aériennes (cm ²)
0	1	18	12.0	2.54
1	2	12.2	4.76	2.33
2	4	8.3	1.90	2.13
3	8	5.6	0.76	2.00
4	16	4.5	1.27	2.48
5	32	3.5	1.07	3.11
6	64	2.8	0.90	3.96
7	128	2.3	0.76	5.10
8	256	1.86	0.64	6.95
9	512	1.54	0.54	9.56
10	1024	1.30	0.46	13.4
11	2048	1.09	0.39	19.6
12	4096	0.95	0.33	28.8
13	8192	0.82	0.27	44.5
14	16384	0.74	0.16	69.4
15	32768	0.50	0.133	117.0
16	65536	0.49	0.112	225.0
17	131072	0.40	0.093	300.0
18	262144	0.38	0.083	543.0
19	524288	0.36	0.070	978.0
20	1048576	0.34	0.070	1743.0
21	2097152	0.31	0.070	2733.0
22	4194304	0.29	0.067	5070.0
23	8388608	0.25	0.075	7530.0

TAB. B.1 – Données de Weibel [24]

Nous donnons ici une description géométrique moyenne des bronches du poumon humain de la première génération à la génération 23. Ces données ont été trouvées par ER. Weibel en combinant les dimensions moyennes des dix premières générations provenant d'un prototype en résine avec une estimation des dimensions des acinis.

Annexe C

Lemme technique

On démontre dans cette annexe le lemme énoncé dans la sous-section 5.5.2, lors de la démonstration d'une vitesse de décroissance exponentielle de l'énergie.

Lemme C.1

$$\forall s \in]-1, 0[, \exists C > 0, \forall v \in H_0^1(I), \|\partial_x v\|_{H^s(I)} \geq C|v|_{H^{s+1}(I)},$$

avec $|\cdot|_{H^{s+1}(I)}$ semi-norme sur $H^{s+1}(I)$.

Démonstration : On montre tout d'abord le lemme suivant

Lemme C.2 *Pour tout $\theta \in [0, 1]$, il existe $C(\theta) > 0$ telle que pour tout $w \in H^1(I)$ vérifiant $w(1) = w(0) = 0$ et $\int_I w(x)dx = 0$, on a*

$$\|\partial_x w\|_{H^{-\theta}(I)} \geq C(\theta)\|w\|_{H^{1-\theta}(I)}.$$

Démonstration : On utilise pour démontrer ce lemme le fait que $(e_0, (e_n)_{n \in \mathbb{Z}^*})$ avec $e_0 \equiv 1$, $e_n : x \rightarrow e^{2i\pi nx}$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$. Ainsi, on a : $w = \sum_{m \neq 0} w_m e_m$ car w est à moyenne nulle. On en déduit que $\partial_x w = \sum_{m \neq 0} (2mi\pi)w_m e_m$. On utilise alors l'équivalence des normes suivantes :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|w\|_{H^\alpha} \sim \sum_{m \neq 0} |m|^{2\alpha} w_m^2.$$

Ainsi, on obtient que

$$\|\partial_x w\|_{H^{-\theta}(I)}^2 \sim \sum_{m \neq 0} |m|^{2-2\theta} w_m^2 \sim \|w\|_{H^{1-\theta}(I)}^2.$$

Ceci démontre ainsi le lemme. \square

Soit s fixé, $-1 < s < 0$ et soit $v \in H_0^1(I)$ fixé. On pose $\theta = -s$, $0 < \theta < 1$.

On pose aussi $w = v - \bar{v}$ en notant \bar{v} la moyenne de v sur I . La fonction w vérifie alors les hypothèses du lemme ci-dessus puisque $v \in H_0^1(I)$ et on obtient donc

$$\|\partial_x v\|_{H^{-\theta}(I)} \geq C(\theta)\|v - \bar{v}\|_{H^{1-\theta}(I)}.$$

On obtient donc bien le résultat voulu avec la semi-norme. \square

Bibliographie

- [1] W. Benish, P. Harper, J. Ward, and Jr J. Popovich. A mathematical model of lung static pressure-volume relationships ; comparison of clinically derived parameters of elasticity. *Henry Ford Hosp. Med. J.*, 36 :44–47, 1988.
- [2] J.M. Bogaard, S.E. Overbeek, A.F.M. Verbraak, C. Vons, H.T.M. Folgering, Th.W. van der Mark, C.M. Ross, P.J. Sterk, and the Dutch CNSLD study group. Pressure-volume analysis of the lung with an exponential and linear exponential model in asthma and copd. *Eur. Respir. J.*, 8 :1525–1531, 1995.
- [3] J.G. Venegas, R.S. Harris, and B.A. Simon. A comprehensive equation for the pulmonary pressure-volume curve. *J. Appl. Physiol*, 81 :389–395, 1998.
- [4] S. Abboud, O.Barnea, A. Guber, N. Narkiss, and I. Bruderemann. Maximum expiratory flow-volume curve : mathematical model and experimental results. *Med. Eng. Phys.*, 17 :332–336, 1995.
- [5] J.R. Cezbral and R.M. Summers. Tracheal and central bronchial aerodynamics using virtual bronchoscopy and computational fluid dynamics. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 23 :1021–1033, 2004.
- [6] C. Fetita, S. Mancini, D. Perchet, F. Prêteux, M. Thiriet, and L. Vial. An image-based computational model of oscillatory flow in the proximal part of tracheobronchial trees. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 8(4) :279–293, 2005.
- [7] S. Ley, D. Mayer, B.S. Brook, E.J. van Beek, C.P. Heussel, D. Rink, R. Hose, K. Markstaller, and H.U. Kauczor. Radiological imaginig as the basis for a simulation software of ventilation in the tracheo-bronchial tree. *Eur. Radio.*, 12,9 :2218–2228, 2002.
- [8] B. Mauroy, M. Filoche, J.S. Andrade, and B. Sapoval. Interplay between flow distribution and geometry in an airway tree. *PRL*, 14, 2003.
- [9] C. Baranger, L. Boudin, P.E. Jabin, and S. Mancini. A model of biospray for the upper airways. *ESAIM Proceedings, CEMRACS 2004*, 14 :41–47, 2005.
- [10] Assia Soualah-Alila. *Modélisation mathématique et numérique du poumno humain*. PhD thesis, Université Paris-Sud, Faculté des sciences d’Orsay, 06 Décembre 2007.
- [11] C. Grandmont, B. Maury, and N. Meunier. A viscoelastic model with a non-local dissipation term. *ESAIM*, 40 :201–224, 2006.
- [12] P.M. Soardi. *Potential Theory on Infinite Networks*. Springer-Verlag, 1994.

- [13] A.Haraux and M.A. Jendoubi. Convergence of bounded weak solutions of the wave equation with dissipation and analytic nonlinearity. *Calc. Var.*, 9 :95–124, 1999.
- [14] A. Haraux. Sharp estimates of bounded solutions to some second order forced dissipative equations.
- [15] J.Rauch, X. Zhang, and E. Zuazua. Polynomial decay for a hyperbolic-parabolic coupled system. *J. Math. Pures Appl.*, 84 :407–470, 2005.
- [16] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol 1*. Dunod, 1968.
- [17] P. Martinez. A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 4 :419–444, 1999.
- [18] J. Rauch, X. Zhang, and E. Zuazua. Polynomial decay for a hyperbolic-parabolic coupled system. *J. Math. Pures Appl.*, 84(9) :407–470, 2005.
- [19] X. Zhang and E. Zuazua. Long time behavior of a coupled heat-wave system arising in fluid-structure interaction. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 184(1) :49–120, 2007.
- [20] E.R. Weibel. *The pathway for oxygen. Structure and function in the mammalian respiratory system*. Harvard University Press, 1984.
- [21] H. Combrisson and L. Tiret. Physiologie de la respiration, fonction respiratoire du sang, hémotose et ventilation pulmonaire. Technical report, Ecole Nationale Vétérinaire d’Alfort, 2003.
- [22] Lynda Gaillard. Modèle fonctionnel du diaphragme pour l’acquisition et le diagnostic en imagerie médicale. Technical report, Laboratoire TIMC-IMAG, équipe GMCAO, DEA MIMB, 2003.
- [23] E.R. Weibel. *Morphometry of the Human Lung*. Springer-Verlag, 1963.
- [24] R.G. Crystal, J.B. West, E.R. Weibel, and P.J. Barnes. *The lung : scientific foundations*. Lippincott-Raven Press, 1997.
- [25] [http ://imglib/lbl.gov/imglib/collections/lungtour.html/](http://imglib/lbl.gov/imglib/collections/lungtour.html/). Page Web.
- [26] Benjamin Mauroy. *Hydrodynamique dans le poumon, relations entre flux et géométries*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de cachan, 05 Juillet 2004.
- [27] C. Grandmont, Y. Maday, and B. Maury. A multiscale/multimodel approach of the respiration tree. In *PROC. "New Trends in Continuum Mechanics"* 8-12 September, Romania Theta Foundation publications, 2005.
- [28] B. Maury, N. Meunier, A. Soualah, and L. Vial. Outlet dissipative conditions for air flow in the bronchial tree. *ESAIM Proceedings*, 14 :115–123, 2005.
- [29] Henri Cartan. *Calcul Différentiel*. HERMANN, 1967.
- [30] Colin de Verdière. *Spectre de graphe*. Soc. Math. de France, 1998. Cours Spécialisés no4.
- [31] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. DUNOD, 1999.
- [32] P. Oswald. Multilevel norms for $h^{-\frac{1}{2}}$. *Computing*, 61 :235–255, 1998.

-
- [33] P. Oswald. On n -term approximation by haar functions in h^s -norms. *AFC*, pages 137–163, 1999.
- [34] A. Cohen. Numerical analysis of wavelet methods. *Studies in Mathematics and its Applications*, 281 :629–636, 2001.
- [35] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. SPRINGER, 1976.
- [36] M. Bernot, V. Caselles, and J.M. Morel. *Optimal Transportation Networks, Models and Theory*. Springer, 2009.
- [37] Q. Xia. Optimal paths related to transport problems. *Commun. Contemp. Math.*, 5 :251–279, 2003.
- [38] L. Schwarz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1997.
- [39] K.L. Nabors et al. Red blood cell orientation in pulmonary capillaries and its effect on gas diffusion. *J. Appl. Physiol.*, 94 :1634–1640, 2003.
- [40] C.C.W. Hsia and R.L.Jr Johnson. Red cell distorsion and conceptual basis of diffusing capacity estimates : finite element analysis. *J. Appl. Physiol.*, 83 :1397–1404, 1997.
- [41] B. Mauroy. Following red blood in an pulmonary capillary.
- [42] T.W. Secomb, R. Hsu, and A.R. Pries. Motion of red blood cells in a capillary with an endothelial surface layer : effect of flox velocity. *J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, 32, 2003.
- [43] M. Felici. *Physique du transport diffusif de l'oxygène dans le poumon humain*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2003.
- [44] Q. Grimal, A. Watzky, and S. Naili. A one-dimensional model for the propagation of pressure waves through the lung. *J. Biomechanics*, 35 :1081–1089, 2002.
- [45] J. Kaye, F.P. Primiano Jr, and D.N. Metaxas. A 3d virtual environment for modeling mechanical cardiopulmonary interactions. *Med. Imag. An.*, 2 :169–195, 1998.
- [46] G.N. Maksym and J.H.T. Bates. A distributed nonlinear model of lung tissue elasticity. *J. Appl. Phys.*, 82 :32–41, 1997.
- [47] S.B. Ricci, P. Cluzel, A. Constantinescu, and T. Similowski. Mechanical model of the inspiratory pump. *J. Biomechanics*, 35 :139–145, 2002.
- [48] Y. Lanir. Constitutive equations for the lung tissue. *J. Biomech Eng.*, 105 :374–380, 1983.
- [49] J.R. Rodarte. Stress-strain analysis for the lung. *Fed. Proc.*, 41 :130–135, 1982.
- [50] A. Haraux. *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*. Masson, 1990. collection dirigée par Ph. Ciarlet et J.L.L. Lions.
- [51] A. Haraux. Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps. *Portugaliae Mathematica*, 46 :246–257, 1989.
- [52] S.Micu and E. Zuazua. An introduction to the controllability of partial differential equations. In Sari. T. ed., editor, *Quelques questions de théorie du contrôle*, pages 69–157. Collection Travaux en Cours Hermann, 2004.

- [53] E. Zuazua. Controllability and observability of partial differential equations : somme results and open problems. In C. Dafermos and E. Feireisi eds., editors, *Handbook of differential equations : Evolutionary equations*, volume 3, pages 527–621. Elsevier Science, 2006.
- [54] X. Zhang. Explicit observability estimate for the wave equation with potential and its application. *Royal Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 456 :1101–1115, 2000.
- [55] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control. Optim.*, 30 :1024–1065, 1992.
- [56] S. Cox and E. Zuazua. The rate at wich energy decays in a damped string. *Comm. Partial Differential Equations*, 19 :213–243, 1994.
- [57] P. Freitas and E. Zuazua. Stability results for the wave equation with indefinite damping. *J. Differ. Eq.*, 132(2) :338–352, 1996.
- [58] P. Freitas. On some eigenvalue problems related to the wave equation with indefinite damping. *Journal of Differential Equations*, 127 :320–335, 1996.
- [59] X. Zhang and E. Zuazua. Control, observation and polynomial decay for a coupled heat-wave system. *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 336 :823–828, 2003.
- [60] V.M. Babich. The higher-dimensional wkb method or ray method. In Springer-Verlag, editor, *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, volume 34, pages 91–131. 1997.
- [61] F. Macià and E. Zuazua. On the lack of observability for wave equations : a gaussian beam approach. *Asymptot. Anal.*, 32 :1–26, 2002.
- [62] J. Ralston. Gaussian beams and the propagation of singularities. *Studies in Partial Differential Equations*, 23 :206–248, 1982.
- [63] F. Ala bau Boussouira. Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems. *Appl. Math. Optim.*, 51 :61–105, 2005.
- [64] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, INC, 1975.
- [65] J.L.Lions. *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués. Tome 1 : Contrôlabilité exacte*. Masson, 1988.
- [66] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity, Volume 1, Three-dimensional elasticity*. Studies in Mathematics and its applications, 1988.
- [67] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev, and G.A. Yosifian. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. North-Holland, 1992.
- [68] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer, 1986.
- [69] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1983.
- [70] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005.

-
- [71] <http://www.freefem.org>. Page Web FreeFem++.
- [72] B. Maury. *Analyse fonctionnelle*. Ellipse, 2004.
- [73] S. Martin, T. Similowski, C. Strauss, and B. Maury. Impact of respiratory mechanics model parameters on gas exchange efficiency. *ESAIM Proceedings*, 23 :30–47, 2008.

N° d'impression 2894
3ème trimestre 2009

Résumé

Modélisation mathématique du poumon humain

Nous nous intéressons à certains problèmes théoriques posés par la modélisation du poumon humain comme arbre bronchique plongé dans le parenchyme pulmonaire.

L'arbre bronchique est représenté par un arbre dyadique résistif à 23 générations dans lequel un écoulement de Stokes a lieu. La loi de Poiseuille relie ainsi le débit dans chaque bronche au saut de pression à ses extrémités. Cet arbre est ensuite plongé dans un milieu visco-élastique modélisant le parenchyme. Le processus de ventilation est alors assuré par des pressions négatives, dues à une contraction du diaphragme, au niveau des alvéoles permettant l'inspiration.

La première partie est consacrée à l'introduction d'un modèle d'arbre infini obtenu en faisant tendre le nombre de générations vers l'infini. Les propriétés géométriques des bronches, en particulier une certaine régularité de décroissance de la taille des branches permettent, par extrapolation, de construire un tel modèle limite. Sur cet arbre infini, des opérateurs de type gradient et divergence peuvent être définis permettant de modéliser l'écoulement de l'air avec un problème de type Darcy. En effet, l'arbre infini peut alors être vu comme un milieu poreux, l'ensemble des alvéoles correspondant alors à la frontière du milieu sur laquelle une pression négative est appliquée. Des théorèmes de trace permettent alors de définir un opérateur qui associe au champ de pression sur l'ensemble des bouts de l'arbre infini le continuum de débit sortant. Le processus de ventilation peut ainsi être modélisé comme un opérateur Dirichlet-Neumann défini par un problème de type Darcy sur un arbre infini de façon analogue à un problème de Darcy sur un milieu continu.

La seconde partie est dédiée à l'étude de modèles du parenchyme pulmonaire. La complexité du parenchyme, milieu visco-élastique, provient de la présence de l'arbre qui relie toutes les alvéoles entre elles. Des phénomènes de dissipation non locaux sont ainsi observés dus aux couplages de toutes les sorties.

Nous étudions tout d'abord un modèle monodimensionnel du parenchyme mettant en jeu une équation de type onde avec des effets non locaux. En particulier nous détaillons l'étude du comportement long et démontrons la décroissance exponentielle vers zéro de l'énergie sous certaines hypothèses de régularité de l'arbre résistif.

Enfin, nous proposons l'ébauche d'un modèle du parenchyme en dimension supérieure prenant en compte à la fois le caractère élastique du tissu ainsi que la présence de l'arbre résistif. Après avoir vérifié le caractère bien posé du modèle, nous présentons la méthode numérique choisie ainsi que des résultats numériques associés.

Mots clés : Poumon humain, arbre dyadique, arbre résistif infini, théorèmes de trace, équation des ondes, espaces de Sobolev.