



**HAL**  
open science

# Quelques contributions à l'analyse mathématique et numérique d'équations cinétiques collisionnelles

Thomas Rey

► **To cite this version:**

Thomas Rey. Quelques contributions à l'analyse mathématique et numérique d'équations cinétiques collisionnelles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2012. Français. NNT: . tel-00738709v1

**HAL Id: tel-00738709**

**<https://theses.hal.science/tel-00738709v1>**

Submitted on 4 Oct 2012 (v1), last revised 15 Jun 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES

de l'Université Claude Bernard Lyon 1

préparée à l'Institut Camille Jordan

Laboratoire de Mathématiques

N° d'ordre : 138-2012

École doctorale InfoMaths ED512

UMR 5208 CNRS-UCBL

**Thèse de doctorat**  
Spécialité Mathématiques

présentée par

Thomas REY

---

**Quelques contributions à l'analyse  
mathématique et numérique d'équations  
cinétiques collisionnelles**

---

Soutenue publiquement le 21 Septembre 2012

Après avis de :

José A. CARRILLO    Universitat Autònoma de Barcelona  
Stéphane MISCHLER    Université Paris-Dauphine & IUF

Devant le jury composé de :

Sylvie	BENZONI-GAVAGE	Université Claude Bernard Lyon I	Examinatrice
José A.	CARRILLO	Universitat Autònoma de Barcelona	Rapporteur
Laurent	DESVILLETES	ENS de Cachan & IUF	Examinateur
Francis	FILBET	Université Claude Bernard Lyon I	Directeur de thèse
Stéphane	MISCHLER	Université Paris-Dauphine & IUF	Rapporteur
Clément	MOUHOT	University of Cambridge	Directeur de thèse
Giovanni	RUSSO	Università di Catania	Examinateur



À Fred, avec tout mon amour ♡



# Remerciements

L'exercice des remerciements étant peut-être le plus périlleux lors de l'écriture d'une thèse, je m'excuse par avance (et remercie tout de même) tous ceux que j'aurais pu oublier... Un travail scientifique étant avant tout un travail d'équipe, la liste qui va suivre sera peut-être un peu longue, mais je l'espère exhaustive.

Mes premiers remerciements vont bien sûr à mes directeurs, Francis Filbet et Clément Mouhot, sans qui rien n'aurait été possible. Leur gentillesse, leur patience et leur présence constante aura été l'un des principaux moteurs de cette thèse. J'ai aussi su apprécier (j'espère à leurs justes valeurs) leurs nombreuses idées, qui m'auront à chaque fois aiguillées dans une nouvelle direction, souvent fructueuse et toujours passionnante. Merci beaucoup d'avoir mis tous ces problèmes sous mes mains (et mon clavier). Merci aussi de m'avoir fait rencontrer un si grand nombre de personnes intéressantes, en m'envoyant travailler dans tous ces lieux, qu'ils soient insolites ou familiers, proches ou éloignés.

Agradezco verdaderamente al señor José Antonio Carillo por haber utilizado su tiempo para repasar mi tesis, así como el hecho de presenciar mi mantenimiento. Je remercie chaleureusement Stéphane Mischler pour avoir accepté de prendre le temps de relire ma thèse et d'être présent lors de ma soutenance.

Je tiens aussi à remercier chaudement les personnes faisant partie de mon jury pour leur présence à la soutenance, Sylvie Benzoni-Gavage, Laurent Desvillettes et Giovanni Russo.

Je dois aussi adresser un grand merci aux différents collaborateurs que j'ai eu durant cette thèse (et que j'espère continuer à avoir par la suite). Cette liste peut paraître redondante car certaines de ces personnes sont aussi mes directeurs, mais ceux-ci méritent bien d'être remercié deux fois. Ainsi, encore une fois merci à Francis Filbet et Clément Mouhot, la ringrazie molto in Lorenzo Pareschi e Giuseppe Toscani.

Tout ce travail n'aurait pas été possible sans les différentes personnes qui ont contribué à m'initier au métier de chercheur. Merci beaucoup à tous les enseignants qui ont su me donner la passion des maths et de l'univers de la recherche, et particulièrement Lorenzo Brandolese, Philippe Caldero, Isabelle Chalendar, Christophe Delaunay, Emmanuel Fricain, Petru Mironescu et Pierre Crépel. Merci à l'Institut Camille Jordan, où j'ai eu le plaisir de passer ces trois années de thèse, ainsi qu'aux différentes personnes faisant que ce laboratoire fonctionne si bien, en particulier Monique Gaffier, Maria Konieczny et Elizabeth Mironescu.

Je tiens aussi à remercier les différents instituts et laboratoires (et leurs personnels) où j'ai eu l'occasion de faire un séjour durant cette thèse, à savoir l'Institut Isaac Newton de l'université de Cambridge, les laboratoires de mathématiques des universités de Pavie et Ferrare, ainsi que l'ICERM, de l'université de Brown.

Enfin, une fin de thèse n'étant qu'un certain commencement, je souhaite remercier Eitan Tadmor et Pierre-Emmanuel Jabin, ainsi que le laboratoire CSCAMM de l'université du Maryland de m'accueillir pour mon futur post-doc'.

Passons maintenant aux remerciements les plus « critiques » (car les plus susceptibles de contenir des oublis), à savoir ceux qui vont aux amis que j'ai eu le plaisir de rencontrer et de côtoyer durant les trois années de ce travail.

Dans ce registre, je me dois de commencer par mes trois *demi-sœurs* de thèse, mais mettre un ordre sur cet ensemble va se révéler compliqué... L'âge est peut-être le plus logique ! Valérie, on ne

s'est pas croisé très longtemps, mais merci pour tout quand même. Amélie, que ce soit quand on se partageait la « lourde » charge du tutorat, l'organisation du séminaire des doctorants ou quand on discutait de problèmes mathématiques au détour d'un coin de tableau (ou d'une bière), j'ai toujours apprécié ta bonne humeur et ton enthousiasme communicatifs. Marianne, on a commencé notre thèse en même temps, et on la terminera en même temps, mais tes crises dans le bureau 111B me manqueront. Steph', entre deux parties de PES, prend bien soin de ta femme mais aussi et surtout de Léo le petit nouveau.

J'adresse aussi une pensée spéciale aux collègues avec qui j'ai partagé à un moment ou à un autre le bureau 109E. Certains m'y ont précédé, en particulier Alina, mulțumesc, je crois qu'on dit comme ça ? Fred, devient un pro du surf pour pouvoir m'apprendre la prochaine fois qu'on se voit... Gaele, la gym suédoise vaincra ! Mickael, alors tu nous le fais quand ce tatouage ? Saïd, bientôt ton tour ! De plus, je sais que la relève dans le bureau est assurée, avec les petits (et moins petits) nouveaux : Bérénice, Claire-Soizic, Ioana, Rudy et Vincent. Lâchez rien les gars !

Merci aussi à tous les autres copains que j'ai eu l'occasion de passer du temps, que ce soit au labo', au détour d'une conférence ou aussi devant une bière, et particulièrement Erwann, J-B, Julien, Romain et Cécile, mais aussi Adrienne, Giacomo, José et Tetsuro.

Arrive maintenant le moment des copains tout court. Avant de citer des noms, j'ai juste envie de dire, 3<sup>ème</sup>4 forever, c'était de très belles années, pourvu qu'on continue comme ça au moins aussi longtemps (et même plus) !

Nico, je sais que tu aurais adoré être présent pour la soutenance, donc à défaut je t'envoie toutes mes good vibes funky groovy, et je sais que *Jah* sera mon messenger pour te les délivrer là où tu « lémures » maintenant. Alice, on sait tous que tu vas révolutionner la comédie musicale dans la belle province, donc garde nous des places de ton futur hit ! Bastien, mec, ça y est, on va bientôt être voisins de continent ! À quand la Sam' Adams au sommet (ou plus vraisemblablement aux pieds, session lose oblige) d'*El Capitan* ? Jim et Sandra, avec vos petits Naïs et Élouane, continuez de repeupler la France, et à bientôt dans le Saskatchewan (à moins que ce soit l'Alberta ?) pour discuter de mat... Non Sandra d'accord, pour ne pas discuter de math. Marie-Charlotte et Grégoire, les plus sudistes des parisiens (ou les plus parisiens de sudistes ?), bientôt la vie marseillaise ! Marie et Fran', on se voit où la prochaine fois ? Avignon, Lyon, Istanbul, Washington ? Nico, tu crois qu'on arrivera à être voisin de palier une troisième fois ? Diana, promis, je n'utiliserai plus ton petit surnom devant des inconnus ! Lisa, dit, tu me feras un chant lyrique un de ces jours ? Ça fait longtemps... Ju et Leila, vivement la prochaine soirée nanar. Micka et Elo, attention, la banque c'est le mal ! Thomas et Marie, bon ben, la prochaine session grimpe/photo, c'est dans les rocheuses je crois qu'il faudra plus qu'une 2'5 pour y aller... Enfin, et je crois qu'il faut quand même savoir s'arrêter à un moment, merci à Raph' et Eri, Marie-Line et PC, Estelle et Yohann, Caro, Audrey !

La famille mérite aussi de figurer en bonne place dans ces quelques mots et je tiens d'abord à avoir une pensée pour ceux qui ne sont plus là. Les suivants à remercier sont bien sûr mes parents, Martine et Martial, qui m'ont appris d'abord la curiosité, puis (avec plus de difficulté diront certains) la rigueur scientifique, me poussant à toujours essayer de me dépasser, sans jamais me brusquer et toujours avec humour (et amour). Mes grands parents, aussi, ont toujours été là quand j'en avais besoin. Mes beaux-parents, Marie-Christine et Jean-Paul, merci pour votre générosité, et désolé de vous voler votre fille. Anne-Line et Masataka, bon ben on s'éloigne encore (géographiquement), mais ça ne nous empêchera pas de s'appeler et de se faire une bouffe... à Hawaï par exemple ! Arnaud, Blandine et Soline, les trois petits oiseaux bleus ont pris leur envol, une belle aventure commence. Quentin et Circée, mes deux hippies préférés, vous savez ce qu'on dit, avant d'être fort comme un

chêne...

Fred, enfin, sans toi, je n'aurais jamais réussi à aller jusqu'au bout de cette thèse, merci de ta patience, de ta gentillesse, de tes encouragements... bref merci pour tout, cette thèse est aussi un peu (beaucoup) la tienne.





<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Avant-propos . . . . .	1
1 La théorie cinétique des gaz . . . . .	3
2 Des équations cinétiques collisionnelles . . . . .	13
3 Des méthodes numériques pour la simulation d'équations cinétiques collisionnelles . . . . .	39
4 Perspectives ouvertes par cette thèse . . . . .	61
5 Notations et espaces fonctionnels . . . . .	62
<b>I Analyse théorique du comportement asymptotique d'équations cinétiques</b>	<b>65</b>
<b>1 Dynamique explosive dans l'équation des gaz granulaires anormaux</b>	<b>69</b>
1.1 Introduction . . . . .	70
1.2 Proof of Theorem 1.1.1 . . . . .	77
1.3 Proof of Theorem 1.1.2 . . . . .	84
Appendix 1.A Some Known Results about the Granular Gases Equation . . . . .	85
Appendix 1.B Existence of the Self-similar Profiles . . . . .	87
Appendix 1.C Numerical Simulations of the Anomalous Cooling Process . . . . .	90
<b>2 Comportement asymptotique de l'équation de Rosenau</b>	<b>93</b>
2.1 Introduction . . . . .	94
2.2 A Kinetic Description of the Rosenau Approximation . . . . .	95
2.3 Representations of the Solutions to the Rosenau Equation . . . . .	99
2.4 Asymptotic Behavior of Solutions to the Rosenau Equation . . . . .	102
2.5 Conclusions . . . . .	112
Appendix 2.A A Characterization of Fourier Transforms of Positive Measures . . . . .	112
<b>II Analyse numérique de problèmes multi-échelles</b>	<b>115</b>
<b>3 Méthode de changement d'échelle pour des équations collisionnelles</b>	<b>119</b>

3.1	Introduction . . . . .	120
3.2	The Rescaling Velocity Method . . . . .	122
3.3	Applications of the Rescaling Velocity Method . . . . .	124
3.4	Boundary Conditions . . . . .	128
3.5	Discretization of the Problem . . . . .	131
3.6	Numerical Simulations . . . . .	135
	Appendix 3.A Quasi-Elastic Limit of the Granular Gases Operator . . . . .	145
	Appendix 3.B A Formal Compressible Euler Limit . . . . .	149
<b>4</b>	<b>Méthodes rapides de type « vitesses discrètes »</b>	<b>153</b>
4.1	Introduction . . . . .	154
4.2	Preliminaries . . . . .	155
4.3	Fast DVM's Algorithms . . . . .	161
4.4	Numerical Results . . . . .	169
4.5	Conclusions . . . . .	172
<b>III</b>	<b>Étude spectrale de l'opérateur granulaire linéarisé</b>	<b>173</b>
<b>5</b>	<b>Approximation fluide de l'équation des gaz granulaires linéarisée</b>	<b>177</b>
5.1	Introduction . . . . .	178
5.2	Localization of the Spectrum . . . . .	184
5.3	Taylor Expansion of the Eigenvalues . . . . .	189
5.4	Functional toolbox on the collision operator . . . . .	202

---

## Table des figures

---

1	Différentes échelles de modélisation . . . . .	5
2	Passage des réflexions spéculaires sur un domaine $\Omega$ à des réflexions périodiques sur un domaine $\Omega^*$ . . . . .	8
3	Représentation schématisée des différentes conditions aux bords . . . . .	10
4	Géométrie des collisions élastiques . . . . .	15
5	Géométrie des collisions inélastiques . . . . .	23
6	Exemple de support pour le problème du tube de choc . . . . .	59
7	Apparition d'amas de matière dans un gaz granulaire . . . . .	61
1.1	Geometry of elastic and inelastic collisions . . . . .	71
1.2	Numerical evidences of the anomalous cooling process . . . . .	92
1.3	Convergence toward the Dirac mass for anomalous granular gases . . . . .	92
2.1	Convolution step of the central difference kernel in a Rosenau approximation . . . . .	101
3.1	Numerical first marginal distribution in scaled, coupled and uncoupled variables . . . . .	137
3.2	Numerical first marginal distribution in classical and scaled variables . . . . .	138
3.3	Comparison of the global cooling process in original and scaled variables . . . . .	139
3.4	Trend to equilibrium of the local density . . . . .	141
3.5	Normalized density and temperature for the shear flow problem . . . . .	144
3.6	Contour plot of the density for the clustering problem . . . . .	146
4.1	Geometry of the collision $(v, v_*) \leftrightarrow (v', v'_*)$ . . . . .	158
4.2	Anti-aliasing in the phase space . . . . .	159
4.3	Representation of the Farey serie $\mathcal{F}_N^1$ and of $\mathcal{A}_N^1$ . . . . .	164
4.4	Numerical $L^1$ error of the fast DVM method . . . . .	171
4.5	Computational cost of the classical and fast DVM methods . . . . .	172
5.1	Localisation of the eigenvalues of $\mathcal{L}_{\alpha, \gamma}$ for small frequencies $\gamma$ . . . . .	187



---

## Liste des tableaux

---

3.1	Influence of the restitution coefficient on the trend to equilibrium . . . . .	142
4.1	Convergence in $L^1$ norm of the fast DVM method . . . . .	170
4.2	Computational cost of the fast DVM method . . . . .	170



---

# Introduction générale

---

Twas brillig, and the slithy toves  
Did gyre and gimble in the wabe;  
All mimsy were the borogoves,  
And the mome raths outgrabe.

---

*Through the Looking-Glass, and What  
Alice Found There*  
Lewis CAROLL

## Avant-propos

Nous présentons dans ce manuscrit les résultats obtenus au cours de cette thèse, effectuée sous la direction de Francis FILBET et Clément MOUHOT. Ce travail se décompose en trois parties indépendantes, mais néanmoins structurées autour de la théorie des équations cinétiques collisionnelles. Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'équation des milieux granulaires, initialement introduite pour décrire le comportement hors équilibre de matériaux composés d'un grand nombre de grains, ou particules, non nécessairement microscopiques, et interagissant par des collisions dissipant l'énergie cinétique. Ces modèles se sont révélés avoir une structure mathématique très riche.

- La première partie de la thèse est consacrée à l'étude mathématique du comportement asymptotique d'équations cinétiques collisionnelles dans un cadre homogène en espace. Nous y montrons des résultats d'explosion et de convergence vers la solution autosimilaire avec calcul explicite des taux, pour des opérateurs de type Boltzmann, grâce à l'utilisation (entre autre) d'une nouvelle méthode de changement de variables dépendant directement de la solution de l'équation considérée.
- La deuxième partie, numérique, est dédiée au développement et à l'étude de nouveaux algorithmes numériques déterministes pour la résolution de problèmes multi-échelles, issus de la théorie des équations cinétiques collisionnelles. Ces méthodes nous permettent d'observer numériquement des phénomènes non triviaux qui apparaissent lors de l'étude de gaz granulaires, comme la création d'amas de matière ou la caractérisation précise du retour vers l'équilibre.



- La troisième et dernière partie est dédiée à l'étude spectrale de l'opérateur des milieux granulaires avec bain thermique, linéarisé au voisinage d'un équilibre homogène en espace. Ce travail est une généralisation de résultats classiques concernant l'équation de Boltzmann, et a pour but final d'établir des résultats de stabilité nonlinéaire des solutions, puis de convergence vers une limite hydrodynamique.

**Liste des travaux rassemblés dans la thèse** Les différents travaux rassemblés dans cette thèse ont fait l'objet (dans des versions raccourcies) des publications suivantes

- Chapitre 1 : *Blow Up Analysis for Anomalous Granular Gases* [161], paru dans *SIAM Journal of Mathematical Analysis* (Volume 44, issue 3, **2012**).
- Chapitre 2 : *Large-time Behavior of the Solutions to Rosenau Type Approximations to the Heat Equation* [163], en collaboration avec Giuseppe Toscani, soumis.
- Chapitre 3 : *A Rescaling Velocity Method for Dissipative Kinetic Equations - Applications to Granular Media* [85], en collaboration avec Francis Filbet, soumis.
- Chapitre 4 : *Convolutional Decomposition and Fast Summation Methods for Discrete-Velocity Approximations of the Boltzmann Equation* [143], en collaboration avec Clément Mouhot et Lorenzo Pareschi, soumis.
- Chapitre 5 : *First and Second Order Fluid Approximations of the Linearized Granular Gases Operator* [162], travail en cours.

---

**Sommaire**

	<b>Avant-propos</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>La théorie cinétique des gaz</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1	Quelques équations cinétiques importantes . . . . .	5
1.2	Conditions aux bords . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Des équations cinétiques collisionnelles</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	L'équation de Boltzmann . . . . .	13
2.2	L'équation des milieux granulaires . . . . .	20
2.3	L'équation de Boltzmann linéarisée . . . . .	34
2.4	L'équation de Rosenau . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Des méthodes numériques pour la simulation d'équations cinétiques collisionnelles</b> . . . . .	<b>39</b>
3.1	Méthodes volumes finis pour le problème du transport libre . . . . .	42
3.2	Méthodes spectrales pour le calcul d'opérateurs de type Boltzmann . . . . .	44
3.3	Modèles de type « vitesses discrètes » . . . . .	51
3.4	Méthodes rapides . . . . .	53
3.5	Méthodes de changement d'échelle . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Perspectives ouvertes par cette thèse</b> . . . . .	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>Notations et espaces fonctionnels</b> . . . . .	<b>62</b>
5.1	Notations . . . . .	62
5.2	Espaces fonctionnels couramment considérés . . . . .	63

---

## 1 La théorie cinétique des gaz

L'étude des gaz d'un point de vue microscopique remonte à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle avec les travaux de Bernoulli<sup>1</sup> et Avogadro (et bien d'autres) concernant une nouvelle discipline, la *thermodynamique*. Cette science avait initialement pour but de comprendre le fonctionnement des machines à vapeur, mais a rapidement mis en évidence une question très profonde, celle du caractère *irréversible* de certains phénomènes physiques. Ces savants se sont particulièrement penchés sur le lien entre température absolue et énergie cinétique ainsi que sur le second principe de la thermodynamique, ou *principe d'entropie*, établissant l'irréversibilité de certains systèmes physiques formés d'un grand nombre de particules. Ce principe violait donc les lois de Newton, qui elles montraient la réversibilité microscopique des systèmes fermés. Ces notions furent ensuite plus rigoureusement développées par Carnot [47] et Clausius [61] au début du XIX<sup>e</sup> siècle, mais le véritable point de départ de ce qui allait devenir la *théorie cinétique* des gaz raréfiés, théorie cherchant à expliquer le comportement macroscopique d'un gaz à partir de ses composants microscopiques, fut donné par les articles successifs de Maxwell [128] et Boltzmann [35] introduisant coup sur coup les notions d'*équilibre thermodynamique*, d'*équation de Boltzmann* et de *théorème H*, sur lesquelles nous allons revenir plus longuement par la suite.

Plusieurs échelles de description sont possibles pour étudier un gaz raréfié. La plus fine est l'échelle *microscopique* : étant données  $N$  particules, l'application des lois de la mécanique classique

---

<sup>1</sup>Daniel, fils de Jean et neveu de Jacques.

de Newton permet d'établir un système hamiltonien dans l'espace des positions et vitesses de chacune des particules, soit  $2N$  équations à valeurs dans  $\Omega \times \mathbb{R}^d$  (où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert régulier possiblement non borné). La taille d'un tel système pose des problèmes pour sa résolution. En effet, typiquement, un gaz raréfié classique est composé de  $N \sim 10^{24}$  particules. L'espace des phases du système hamiltonien associé est alors de si grande dimension que sa résolution complète est hors de portée de nos connaissances actuelles, qu'elles soient théoriques<sup>2</sup> ou numériques<sup>3</sup>.

Une autre échelle de description possible, plus grossière, est l'échelle fluide ou *macroscopique*. Les modèles la régissant, les équations d'Euler pour les fluides non visqueux et les équations de Navier-Stokes pour les fluides visqueux, sont obtenus en appliquant les équations de Newton à des éléments infinitésimaux de volume. Cette description est grossière dans le sens où elle permet dans le meilleur des cas (celui d'un fluide compressible) d'obtenir des informations sur seulement  $d + 2$  quantités physiques observables : la *densité*  $\rho$  (scalaire), la *quantité de mouvement*  $\rho \mathbf{u}$  (vectorielle) et la *température*  $T$  (scalaire). Par ailleurs, une des hypothèses nécessaires pour aboutir à ce niveau de description (et en fait définir correctement les grandeurs observables) est celle de l'*équilibre thermodynamique local*, c'est-à-dire que la distribution des vitesses des particules composant le fluide est supposée suivre une loi gaussienne. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas. Citons par exemple les gaz granulaires (en raison de la décroissance globale de la température), objets des chapitres 1, 3 et 5 de cette thèse, ou les écoulements rapides de fluides raréfiés (que l'on peut rencontrer par exemple dans des systèmes micro-électro-mécaniques – *MEMS* – voir à ce sujet le livre de Cercignani [58] ou le travail de Aoki, Degond et Mieussens [7]). Il faut noter que la description fluide peut aussi être mise en échec par des problèmes de couches limites, comme la couche de Knudsen (problème décrit par exemple par Sone, Bardos, Golse et Sugimoto dans [173]) ou de Prandtl (voir l'article de Gérard-Varet et Nguyen [94]).

Entre ces deux « extrêmes » se trouve l'échelle *mésoscopique* ou cinétique. L'idée sous-jacente est de considérer le système comme un continuum, tout en conservant les informations sur les vitesses des particules et en supposant ces particules peu corrélées. Ce niveau de description s'affranchit ainsi de certains des problèmes cités plus haut. L'objet mathématique étudié est alors une distribution de probabilité, la *fonction de distribution de particules*

$$f(t, x, v)$$

dépendant du temps  $t \geq 0$ , de la position spatiale  $x \in \Omega$  et de la vitesse  $v \in \mathbb{R}^d$ , et décrivant la quantité de particules présentes dans un volume infinitésimal  $dx dv$  de l'espace des phases. Cette approche permet en particulier d'étudier des systèmes hors de l'équilibre thermodynamique tout en réduisant grandement le nombre de degrés de liberté par rapport aux équations microscopiques. Les quantités macroscopiques décrivant le système observable sont alors obtenues grâce aux  $d + 2$  premiers *moments* en vitesse de la distribution de probabilité  $f$ , à savoir

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv, & \rho \mathbf{u} &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) v dv, \\ T(t, x) &= \frac{1}{d\rho} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) |v - \mathbf{u}|^2 dv. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>La longue histoire de la résolution du problème de la stabilité du système solaire ou même du problème des trois corps, et des nombreuses controverses qui en ont résulté en est un exemple flagrant (voir par exemple le livre de Arnold et Embarek [10] ou l'article de revue de Laskar [120]).

<sup>3</sup>Au moment de l'écriture de cette thèse, le plus puissant ordinateur du monde, le « K computer » de l'institut japonais *RIKEN* est capable d'effectuer  $10^{16}$  opérations par seconde, soit 8 ordres de grandeur de moins que la taille du système...

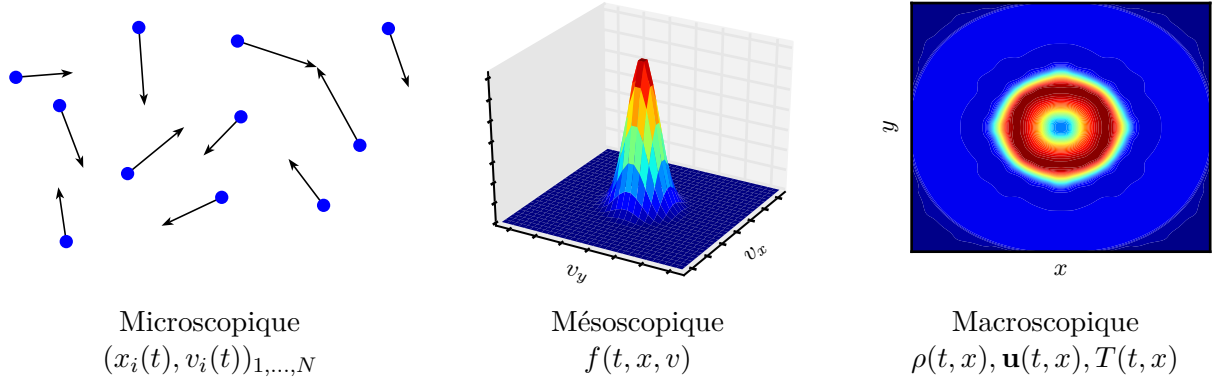


FIGURE 1 – Différentes échelles de modélisation.

On introduit aussi  $E$ , l'énergie cinétique locale de  $f$ , par la relation

$$E(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) \frac{|v|^2}{2} dv = \frac{\rho}{2} (dT + |\mathbf{u}|^2).$$

La figure 1 donne une représentation schématique des trois grandes échelles de modélisation possibles. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser principalement à l'échelle mésoscopique ainsi qu'à son lien avec l'échelle macroscopique, en étudiant des équations cinétiques collisionnelles.

### 1.1 Quelques équations cinétiques importantes

Au niveau cinétique, des phénomènes d'origines très différentes peuvent agir sur l'évolution de la distribution  $f$ . Nous allons résumer les plus importants dans cette section, en présentant les équations qui les modélisent.

**L'équation de transport libre.** Commençons par négliger toutes les interactions entre particules (et aussi avec le milieu extérieur). D'après les lois de Newton, chaque particule en un point  $x \in \Omega$  va être transportée dans l'espace physique à sa propre vitesse  $v$ . Ainsi, si  $f_{in}(x, v)$  est la distribution de particules à un temps  $t_0$ , on aura au temps  $t > t_0$

$$f(t, x, v) = f_{in}(x - v(t - t_0), v).$$

L'équation régissant ce phénomène est une équation de transport linéaire à coefficients constants, l'équation de *transport libre*, et une telle distribution de particules  $f$  en est une solution faible dans  $\mathcal{C}(t_0, +\infty; L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ . Elle est donnée par

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

Cette équation décrit le comportement d'un gaz suffisamment raréfié pour que l'on puisse négliger toutes les interactions entre particules, que ce soit par contact (collisions physiques) ou par interaction de moyenne/longue portée (rayonnement électromagnétique, gravitation, ...). Ce type de problème, qui peut paraître simple, exhibe néanmoins des comportements non triviaux, comme ceux présentés dans l'article de Tsuji, Aoki et Golse [183] en présence de conditions aux bords,

c'est-à-dire en milieu confiné. Le cas de l'espace tout entier est aussi très riche mathématiquement. On citera à ce sujet les *lemmes de moyenne* établissant la compacité dans  $L^p$  (pour  $p \in [1; +\infty[)$ ) par moyennisation en vitesse des solutions de (2) (voir par exemple l'article de revue de Golse [96]), ou les estimations de dispersion dues à Bardos et Degond dans [14] (qui ont par exemple comme conséquences les estimations de type Strichartz de Castella et Perthame [55]), fondamentales pour l'étude des solutions des équations cinétiques nonlinéaires présentées par la suite.

**L'équation de Vlasov.** Lorsque les particules interagissent à longue portée mais sans collisions (par exemple un plasma chargé dans un tokamak ou un amas galactique), une approche de type champ moyen peut être envisagée afin d'établir l'équation de Vlasov<sup>4</sup> décrivant l'évolution de la distribution de particules  $f$ . Celle-ci peut s'écrire dans le cas d'une force d'interaction  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  symétrique comme

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \mathbf{F} *_x \rho \cdot \nabla_v f = 0,$$

où  $\rho = \rho(t, x)$  est la densité locale de particules (dépendant de  $f$ ) et  $*_x$  désigne la convolution dans l'espace des positions. Cette équation est donc non linéaire<sup>5</sup>. Généralement, la force  $\mathbf{F}$  dérive d'un potentiel d'interaction  $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , *i.e.*

$$\mathbf{F} = \nabla_x W.$$

Les principales caractéristiques de cette équation sont plutôt bien comprises. L'étude du problème de Cauchy a été très largement menée et les preuves d'existence de solutions les plus générales sont dues à Horst [110] et à Pallard [148]. Ces travaux traitent les cas de domaines d'espace non bornés et de données initiales à support non compact dans l'espace des vitesses. Le deuxième montre particulièrement l'existence de solutions faibles sous la condition d'une donnée initiale dans  $L^1_{2+\varepsilon} \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , pour  $\varepsilon > 0$  fixé. Par contre, le problème de la limite de *champ moyen*, c'est-à-dire de la dérivation rigoureuse de l'équation (3) en partant du système à  $N$  particules vérifiant les équations de Newton, est encore assez loin d'être résolu. Parmi les travaux les plus récents sur ce sujet, notons en particulier ceux de Hauray et Jabin qui ont montré dans [107, 108] la validité de cette limite, pour des potentiels d'interaction allant de lisses à singuliers<sup>6</sup>, et ce de manière quantitative, malgré une hypothèse très forte sur la répartition initiale des particules.

La question du comportement en temps long des solutions de cette équation, qui a longuement agité la communauté physicienne en raison de problèmes célèbres comme celui de l'*amortissement Landau*<sup>7</sup> [119], est par contre encore partiellement ouverte, malgré l'avancée et toutes les perspectives ouvertes par le travail de Mouhot et Villani [144]. Ils ont en effet donné une preuve rigoureuse de cet amortissement pour l'équation de Vlasov non linéaire avec une donnée initiale proche d'un équilibre homogène en espace et des potentiels généraux, en régularité haute (analytique et Gevrey), mais en géométrie simple (tore  $\mathbb{T}^3$ ) et sans terme de confinement généré par un champ extérieur ou une paroi. Par la suite, Lin et Zeng ont précisé ce résultat dans [123, 124] en montrant que l'amortissement Landau n'avait *pas lieu* pour des solutions proches de l'équilibre et en régularité Sobolev  $W^{s,p}$  pour

<sup>4</sup>parfois appelée équation de Boltzmann sans collisions.

<sup>5</sup>et hamiltonienne, comme attendu d'après la dynamique microscopique.

<sup>6</sup>Ils l'ont en fait montré pour des potentiels disons « presque gravitationnels », c'est-à-dire  $W(x) = \pm|x|^{-1-\alpha}$  pour  $\alpha > 1$ . Leur résultat couvre donc presque le cas critique des potentiels électrostatiques/gravitationnels de Coulomb/Newton  $W(x) := \pm|x|^{-1}$ .

<sup>7</sup>À savoir, un plasma (comme un amas de galaxie d'ailleurs) est-il stable et peut-il exhiber des comportements qui semblent irréversibles comme une relaxation vers l'équilibre, malgré le caractère réversible et hamiltonien de l'équation qui le décrit ?

$s < 1/p$ . Enfin, citons aussi le récent séminaire Bourbaki de Mouhot [140] qui fait une revue de l'état de l'art mathématique sur la stabilité des solutions de l'équation de Vlasov dans le cas d'un potentiel d'interaction gravitationnel.

**Des équations cinétiques collisionnelles.** Supposons maintenant que l'on considère uniquement des interactions de courte portée entre particules, comme des collisions. C'est par exemple le cas pour un gaz parfait moléculaire où les interactions gravitationnelles et électromagnétiques sont négligées. Chaque particule va alors être transportée à sa propre vitesse, puis subira éventuellement une collision avec une autre particule, modifiant alors la vitesse des deux particules selon les lois de la mécanique classique.

Dans ce cas, la distribution de particules  $f$  est solution de l'équation *collisionnelle* suivante :

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}(f).$$

Dans cette équation,  $\mathcal{Q}$  désigne l'*opérateur de collision*, décrivant de manière statistique la mécanique microscopique de collision. Cet opérateur pourra prendre de nombreuses formes<sup>8</sup>, selon le potentiel d'interaction, la portée de ces interactions voire même le réalisme physique considéré. Étant donné que nous considérons des systèmes fermés, nous allons supposer que  $\mathcal{Q}$  préserve au moins la masse, c'est-à-dire que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}(f) dv = 0.$$

Tous les travaux effectués dans cette thèse concernent l'étude d'équations cinétiques de ce type, pour différents opérateurs de collision, dans un cadre d'abord *homogène en espace* permettant d'oublier l'effet du transport libre, puis général. Avant de présenter en détail les opérateurs de collision qui nous ont intéressés dans cette thèse, nous allons présenter les conditions aux bords généralement imposées pour l'étude de ce type d'équations collisionnelles. Ces conditions sont cruciales pour étudier des problèmes physiquement réalistes, comme nous l'avons fait dans le chapitre 3 de ce manuscrit. Notons aussi que l'analyse spectrale conduite dans le chapitre 5, qui repose sur une transformée de Fourier en espace de l'équation de transport, s'adapte naturellement à un tore, et donc à des conditions aux bords de type spéculaires sur une boîte carrée, comme nous allons le voir par la suite.

## 1.2 Conditions aux bords

La description complète des problèmes cinétiques qui nous intéressent dans cette thèse nécessite de se fixer des conditions aux bords  $\partial\Omega$  du domaine en espace quand celui-ci est différent de  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{T}^d$  (ce dernier cas étant qualifié de *périodique*). Nous supposons dans la suite que  $\Omega$  est un ouvert borné de classe Lipschitz. Les conditions en un point du bord  $x \in \partial\Omega$  ne doivent être imposées que pour les particules rentrant dans le domaine, c'est-à-dire dont la vitesse  $v \in \mathbb{R}^d$  vérifie

$$v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0,$$

où  $\mathbf{n}_x$  est la normale extérieure unitaire au domaine, supposée définie en tout point  $x \in \partial\Omega$ .

On s'intéresse à une description cinétique et donc à une fonction de distribution de particules  $f(t, x, v)$  pour  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d$ . Nous distinguerons essentiellement trois types de conditions

---

<sup>8</sup>Selon les cas,  $\mathcal{Q}$  pourra être linéaire (c'est par exemple le cas de l'opérateur de transport neutronique), bilinéaire (opérateurs de type Boltzmann) voire fortement non-linéaire (opérateur de BGK).

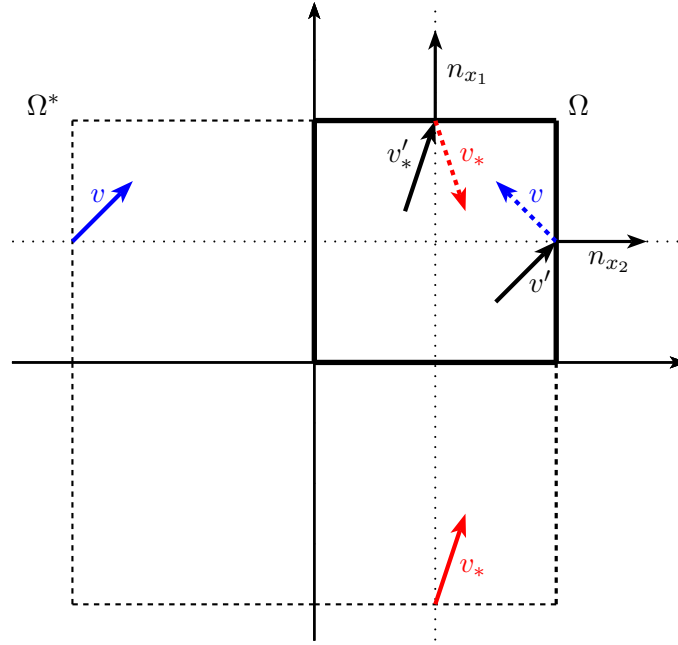


FIGURE 2 – Passage des réflexions spéculaires sur un domaine  $\Omega$  à des réflexions périodiques sur un domaine  $\Omega^*$ , symétrisé de  $\Omega$  par rapport à chacun des axes de coordonnées (les flèches en pointillés représentent les réflexions spéculaires)

aux bords (résumées schématiquement sur la figure 3), de la forme

$$f(t, x, v) = f_b(t, x, v), \quad \forall x \in \partial\Omega, v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0.$$

La fonction  $f_b$  peut être définie par :

- B<sub>1</sub>.** les conditions de type *rebond en arrière*. Dans ce cas, nous supposons que la vitesse d'une particule est juste renversée lors de sa collision avec le bord du domaine. Cela peut s'exprimer en termes de la distribution de particules en imposant pour une vitesse *rentrante*  $v \in \mathbb{R}^d$

$$f_b(t, x, v) = f(t, x, -v), \quad \forall x \in \partial\Omega, v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0.$$

Ces conditions, bien que physiquement peu réalistes ont néanmoins beaucoup été utilisées dans la littérature mathématique, voir par exemple [70].

- B<sub>2</sub>.** les conditions de réflexions *spéculaires*. Nous supposons ici que les particules qui vont frapper les bords du domaine sont réfléchies de manière élastique. On impose dans ce cas

$$f_b(t, x, v) = \mathcal{R}f(t, x, v), \quad \forall x \in \partial\Omega, v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0,$$

où l'on a défini l'opérateur de réflexion spéculaire  $\mathcal{R}$  par

$$\mathcal{R}f(t, x, v) = f(t, x, v - 2(\mathbf{n}_x \cdot v) \mathbf{n}_x).$$

Ce cas est plus réaliste que le simple rebond en arrière, mais n'incorpore pas encore complètement les effets du mur sur les particules<sup>9</sup>.

**B<sub>3</sub>**. les conditions de réflexions *diffusives*, où l'on suppose que les irrégularités du mur comme sa température ou sa rugosité ont un effet de chauffage sur la distribution de particules. On pose dans ce cas

$$f_b(t, x, v) = \mathcal{M}f(t, x, v), \quad \forall x \in \partial\Omega, v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0,$$

où l'on a défini l'opérateur de réflexion diffuse  $\mathcal{M}$  par

$$\mathcal{M}f(t, x, v) = \mu(t, x) \mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}(v).$$

Dans cette expression,  $\mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}$  désigne la distribution maxwellienne induite par le mur, de température  $T_w > 0$  et de vitesse  $\mathbf{u}_w \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}(v) := \frac{1}{(2\pi T_w)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v - \mathbf{u}_w|^2}{2T_w}\right)$$

et la fonction  $\mu$  est introduite afin d'assurer la conservation globale de la masse (le système étant toujours fermé) :

$$\int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} f(t, x, v) v \cdot \mathbf{n}_x dv = -\mu(t, x) \int_{v \cdot \mathbf{n}_x < 0} \mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}(v) v \cdot \mathbf{n}_x dv.$$

Jusqu'au début des années 60, les seules conditions aux bords considérées dans la littérature sont les conditions dites de Maxwell. Celles-ci ont été introduites par Maxwell lui-même dans [128] et peuvent paraître relativement simples, bien que physiquement justifiées (plus de détails sur le sujet pouvant être trouvés dans le livre de Cercignani [57]). Elles consistent à supposer qu'une fraction  $1 - \alpha \in [0, 1]$  des particules qui vont frapper le bord du domaine est réfléchiée de manière spéculaire, tandis que la fraction restante  $\alpha$  s'accommode à l'état du mur et est donc sujette à une réflexion diffuse sur le mur, laissant ce dernier avec une température  $T_w > 0$ . En conséquence, on appelle parfois le paramètre  $\alpha$  coefficient d'*accommodation*. La traduction mathématique des conditions de Maxwell est la suivante : étant donnée une vitesse entrante  $v \in \mathbb{R}^d$ , on pose

$$f(t, x, v) = (1 - \alpha) \mathcal{R}f(t, x, v) + \alpha \mathcal{M}f(t, x, v), \quad \forall x \in \partial\Omega, v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0.$$

Des conditions aux bords plus réalistes physiquement sont obtenues à partir de *noyaux de dispersion*. On suppose dans ce cas que la distribution de particules  $f$  vérifie aux bords du domaine

$$(5) \quad f_b(t, x, v) = |v \cdot \mathbf{n}_x|^{-1} \int_{v_* \cdot \mathbf{n}_x > 0} k(v, v_*; x) f(t, x, v_*) dv_*, \quad \forall x \in \partial\Omega, v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0.$$

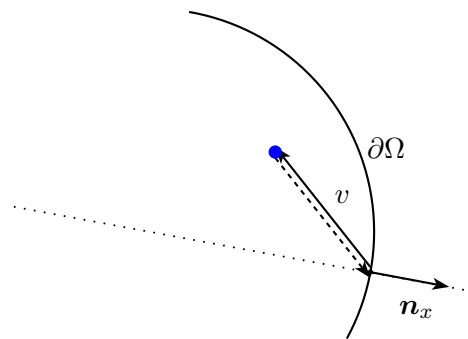
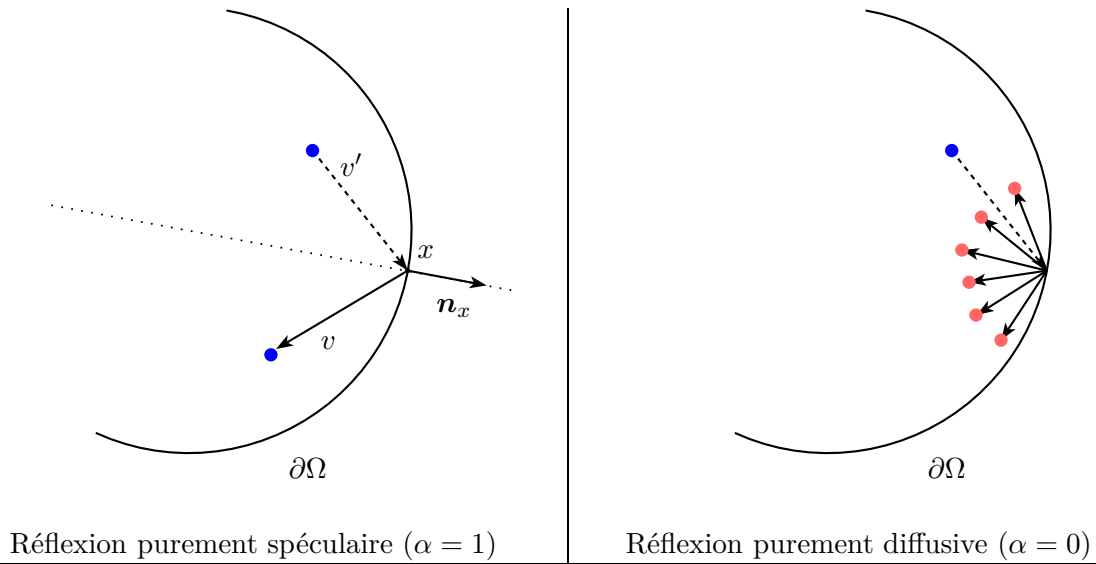
La fonction  $k$  est le noyau de dispersion, vérifiant les hypothèses de

– *positivité* :

$$k(v, v_*; x) \geq 0, \quad \forall x, v, v_* ;$$

<sup>9</sup>En outre, les conditions spéculaires peuvent se traduire par le fait que la distribution  $f$  est paire en la composante normale de la vitesse sur le bord. On remarque alors (voir Grad [101] ou la représentation schématisée de la figure 2) que les conditions spéculaires dans un domaine  $\Omega$  (hyper-)cubique sont équivalentes à des conditions périodiques sur un domaine  $\Omega^*$ , constitué de  $2^d$  copies identiques de  $\Omega$  effectuées par symétries par rapport aux  $d$  hyperplans de coordonnées. Il est clair qu'une telle construction préserve aussi les symétries de  $f$ .





Réflexion de type rebond

FIGURE 3 – Représentation schématisée des différentes conditions aux bords.

– préservation de la masse :

$$\int_{v \cdot \mathbf{n}_x < 0} k(v, v_*; x) dv_* = 1 ;$$

– *réciprocité*<sup>10</sup> :

$$|v \cdot \mathbf{n}_x| \mathcal{M}_{1,0,T_w}(v_*) k(v, v_*; x) = |v \cdot \mathbf{n}_x| \mathcal{M}_{1,0,T_w}(v) k(-v, -v_*; x).$$

Par exemple, les conditions de type Maxwell peuvent s'écrire avec le noyau

$$k(v, v_*; x) = (1 - \alpha) \delta_{v-v'+2(\mathbf{n}_x \cdot v) \mathbf{n}_x} + \alpha \mathcal{M}_{1,0,T_w}(v) |v \cdot \mathbf{n}_x|.$$

D'autres conditions plus générales (et plus proches de la physique), comme celles dites de Cercignani-Lampis, sont présentées en détail dans [57].

Nous allons voir que ces conditions aux bords préservent les propriétés macroscopiques des équations cinétiques collisionnelles présentées dans la section 1.1. Pour cela, commençons par montrer la proposition suivante :

**Proposition 1.1.** *Soient  $f = f(x, v)$  une fonction positive,  $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . Si la fonction  $\varphi$  est symétrique par rapport à la composante normale de la variable de vitesse<sup>11</sup>, alors on a pour tout  $x \in \partial\Omega$*

$$(6) \quad \begin{cases} \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(\mathcal{R}f(x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv = - \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} \Psi(f(x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv, \\ \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(\mathcal{R}f(x, v)) v \cdot \boldsymbol{\tau}_x \varphi(v) dv = \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} \Psi(f(x, v)) v \cdot \boldsymbol{\tau}_x \varphi(v) dv, \end{cases}$$

où  $\boldsymbol{\tau}_x$  appartient à l'hyperplan  $\mathbf{n}_x^\perp$ . De plus, on a aussi

$$(7) \quad \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \mathcal{M}f(x, v) v \cdot \mathbf{n}_x dv = - \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} f(x, v) v \cdot \mathbf{n}_x dv.$$

*Démonstration.* Soit  $x \in \partial\Omega$  fixé. Pour montrer la relation (6), commençons par intégrer sur l'ensemble  $\{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0\}$  la fonction  $v \mapsto \Psi(\mathcal{R}f(t, x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v)$ . De par son caractère élastique, la transformation  $v' = v - 2(\mathbf{n}_x \cdot v) \mathbf{n}_x$  est une isométrie : son jacobien est donc égal à 1 et le changement de variables  $v \mapsto v'$  préserve la mesure de Lebesgue  $dv$ . De plus, un simple calcul montre que  $v' \cdot \mathbf{n}_x = -v \cdot \mathbf{n}_x$  et  $v' \cdot \boldsymbol{\tau}_x = v \cdot \boldsymbol{\tau}_x$ . Ainsi, en décomposant

$$v = (v \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{n}_x + (v \cdot \boldsymbol{\tau}_x) \boldsymbol{\tau}_x,$$

on obtient grâce à l'hypothèse de symétrie de  $\varphi$  par rapport à la composante normale de  $v$  que

$$\begin{aligned} \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(\mathcal{R}f(t, x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv &= \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(f(t, x, v')) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv \\ &= - \int_{v' \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} \Psi(f(t, x, v')) v' \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v') dv', \end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité de (6). On obtient la seconde exactement de la même manière. Enfin, la relation (7) est immédiate, grâce à la définition de la fonction  $\mu$ .  $\square$

<sup>10</sup>Cette dernière propriété correspond à une hypothèse de bord à l'équilibre thermique.

<sup>11</sup>C'est-à-dire si  $\varphi$  vérifie la relation  $\varphi((v \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{n}_x + (v \cdot \boldsymbol{\tau}_x) \boldsymbol{\tau}_x) = \varphi(-(v \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{n}_x + (v \cdot \boldsymbol{\tau}_x) \boldsymbol{\tau}_x)$ .

Nous allons maintenant énoncer une inégalité célèbre, d'abord établie par Darrozès et Guiraud dans [67] pour des conditions aux bords diffusives puis étendue plus tard au cas de noyaux de dispersions généraux (voir [57] pour plus de références sur ce sujet). Cette inégalité exprime la dissipation d'entropie pour des conditions aux bords générales, de type noyaux de dispersion (5).

**Proposition 1.2.** *Si la distribution aux bords du domaine  $f_b$  est donnée grâce au noyau de dispersion (5), alors on a pour tout  $x \in \partial\Omega$*

$$(8) \quad \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \mathbf{n}_x f \log f \, dv \leq -\frac{1}{2T_w} \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \mathbf{n}_x |v|^2 f \, dv.$$

*Démonstration.* C'est une simple conséquence de l'inégalité de Jensen, tenant compte essentiellement du fait que le noyau de dispersion est une distribution de probabilités.  $\square$

Ces propositions nous permet d'énoncer certaines des propriétés macroscopiques des solutions de l'équation cinétique collisionnelle (4), munies des conditions aux bords de type  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  ou  $\mathbf{B}_3$ . Définissons d'abord l'entropie<sup>12</sup>  $\mathcal{H}(f)$  d'une distribution  $f$  par

$$(9) \quad \mathcal{H}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \log f(v) \, dv.$$

**Corollaire 1.1.** *Soit  $f$  une solution régulière de l'équation (4), munies des conditions aux bords de type  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  ou  $\mathbf{B}_3$ . Alors*

1. *la masse de  $f$  est globalement conservée ;*
2. *si l'opérateur de collision  $\mathcal{Q}$  conserve l'énergie cinétique, alors l'énergie cinétique de  $f$  est globalement préservée dans les cas  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  ;*
3. *si  $\mathcal{Q}$  produit de l'entropie, c'est-à-dire si*

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}(f, f) \log(f) \, dv \geq 0,$$

*alors la fonctionnelle d'entropie (9) est globalement dissipée.*

*Démonstration.* Le cas des rebonds  $\mathbf{B}_1$  est clair pour les trois points. Nous allons détailler les cas des conditions spéculaires et diffusives dans la suite. Commençons par multiplier l'équation (4) par  $\varphi(v)$  et intégrons en vitesse et en espace. D'après la formule de Stokes, on obtient

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d \times \Omega} f(t, x, v) \varphi(v) \, dv \, dx = \int_{\mathbb{R}^d \times \Omega} \mathcal{Q}(f, f)(v) \varphi(v) \, dv \, dx \\ - \int_{\partial\Omega} \left[ \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} f_b(t, x, v) \varphi(v) v \cdot \mathbf{n}_x \, dv + \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} f(t, x, v) \varphi(v) v \cdot \mathbf{n}_x \, dv \right] dx.$$

Cette identité permet alors de montrer les trois propriétés. En effet,

1. Prenons  $\varphi(v) = 1$  dans (10). D'après l'hypothèse de conservation de la masse pour l'opérateur de collision, le premier terme du second membre de (10) va être égal à 0. La conservation globale de la masse pour les conditions spéculaires  $\mathbf{B}_2$  est alors garantie en prenant  $\Psi(f) = f$  et  $\varphi(v) = 1$  (qui est bien symétrique par rapport à la composante normale de  $v$ ) dans la relation (6). La relation (7) permet de conclure dans le cas diffusif  $\mathbf{B}_3$ .

<sup>12</sup>Le terme « entropie » utilisé dans cette thèse désignera toujours l'entropie *mathématique*, i.e. une fonctionnelle de Lyapunov décroissante pour les solutions d'une équation, par opposition à l'entropie *physique*, mesure du « désordre » du système, qui en général augmente.

2. Prenons maintenant  $\varphi(v) = |v|^2$  dans (10) et considérons le cas spéculaire  $\mathbf{B}_2$ . L'hypothèse de collisions élastiques sur le bord du domaine implique la conservation microscopique de l'énergie cinétique :  $|v'|^2 = |v|^2$ . On obtient alors le résultat recherché en prenant  $\Psi(f) = f$  et  $\varphi(v) = |v|^2$  (qui est symétrique par rapport à la composante normale de  $v$ ) dans la relation (6) et en utilisant le fait que l'opérateur de collision conserve l'énergie cinétique dans (10).
3. Si l'on prend  $\varphi(v) = \log f(v)$  dans (10), alors l'application de la relation (6) avec  $\Psi(f) = f \log f$  et  $\varphi(v) = 1$  et la production d'entropie de l'opérateur de collision nous donne la dissipation globale de l'entropie dans le cas spéculaire  $\mathbf{B}_2$ . Pour obtenir la dissipation d'entropie dans le cas diffusif  $\mathbf{B}_3$ , il faut utiliser par exemple l'inégalité de Darrozès-Guiraud (8).

□

On remarque qu'à la différence du cas non borné, la quantité de mouvement n'est globalement conservée dans aucun des trois types de conditions aux bords considérées.

Nous allons maintenant présenter dans la section qui suit les différentes équations cinétiques collisionnelles considérées dans cette thèse.

## 2 Des équations cinétiques collisionnelles

### 2.1 L'équation de Boltzmann

Dans cette section, inspirée en partie des livres de Villani [187] et de Cercignani, Illner et Pulvirenti [59], nous allons présenter les principales caractéristiques de l'équation de Boltzmann. Pour plus de réalisme physique, commençons par supposer que la dimension  $d$  de l'espace est égale à 2 ou 3.

**Dynamique microscopique.** Nous allons effectuer certaines hypothèses concernant la dynamique microscopique des particules afin de pouvoir écrire correctement l'équation de Boltzmann. Nous supposons donc que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- H<sub>1</sub>.** Les particules interagissent par le biais de collisions *binaires*. Plus précisément, le gaz est suffisamment raréfié pour que les collisions impliquant au moins trois particules puissent être négligées. Typiquement, c'est le cas en dimension 3 lorsque le nombre de particules  $N$  tend vers l'infini sous la condition dite de Boltzmann-Grad

$$N r(N)^2 = \mathcal{O}(1),$$

où  $r(N)$  désigne le rayon des particules (ces particules sont assimilées à des sphères non déformables, pour ne pas avoir à considérer les degrés rotationnels de liberté).

- H<sub>2</sub>.** Les collisions sont *localisées* en espace et en temps, c'est-à-dire que les collisions ont lieu en un point donné  $x$ , à un temps  $t$  donné. Cela peut s'interpréter par le fait que les interactions moléculaires sont à courte portée, ce sont des collisions instantanées (au moins comparé à l'échelle de temps typique du problème) et les particules sont microscopiques.

- H<sub>3</sub>.** Les collisions sont *élastiques* : la quantité de mouvement et l'énergie de deux particules sont conservées lors des collisions. Plus précisément, étant données deux particules de vitesses *pré-*

collisionnelles  $v, v_* \in \mathbb{R}^d$  et de vitesses *post-collisionnelles*  $v'$  et  $v'_*$ , on a

$$(11) \quad \begin{cases} v + v_* = v' + v'_*, \\ |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2. \end{cases}$$

Cette condition nous permet d'exprimer les vitesses post-collisionnelles en fonction des vitesses pré-collisionnelles. En effet, (11) est un système de  $d + 1$  équations à  $2d$  inconnues ( $v', v'_*$ ), et admet donc des solutions paramétrées par  $d - 1$  paramètres. Plusieurs types de représentations en sont possibles, les deux principales<sup>13</sup> (résumées sur la figure 4) étant :

– la représentation  $\sigma$ , donnée pour  $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$  par

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma.$$

Dans cette paramétrisation, le vecteur unitaire  $\sigma$  est donné par

$$\sigma := \frac{v' - v'_*}{|v' - v'_*|}.$$

On définira aussi le cosinus de l'angle de déviation  $\theta$  par la formule  $\cos \theta := (v - v_*) \cdot \sigma$ ;

– la représentation  $\omega$ , donnée pour  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  par

$$v' = v - ((v - v_*) \cdot \omega) \omega, \quad v'_* = v_* + ((v - v_*) \cdot \omega) \omega.$$

Dans cette paramétrisation, le vecteur unitaire

$$\omega := \frac{v - v'}{|v - v'|}$$

désigne la *direction d'impact*, joignant les centres des particules.

**H<sub>4</sub>.** Les collisions sont *microréversibles*, par analogie avec la dynamique microscopique réversible. Mathématiquement, cela signifie que la probabilité que deux particules de vitesses  $(v, v_*)$  donne  $(v', v'_*)$  lors d'une collision est la même que celle que  $(v', v'_*)$  donne  $(v, v_*)$ .

**H<sub>5</sub>.** Le gaz satisfait l'hypothèse de *chaos moléculaire* de Boltzmann<sup>14</sup>, à savoir que les vitesses de deux particules avant collision sont non corrélées *a priori*. Cette hypothèse, cruciale pour établir l'équation de Boltzmann, est fortement liée à l'hypothèse de dilution du gaz de particules considéré. Il faut noter que ce chaos moléculaire est aussi à l'origine de l'introduction d'une flèche du temps (asymétrie passé/futur) car bien sûr, les collisions successives augmentent les corrélations dans le gaz.

Grâce à ces hypothèses, Boltzmann a été capable d'établir dans [35] sa<sup>15</sup> fameuse équation cinétique, modélisant avec précision l'effet des collisions sur la distribution de particules :

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}_B(f, f),$$

<sup>13</sup>Une autre représentation établie par Carleman dans [44] pour étudier les propriétés de régularité de l'opérateur de gain nous servira au chapitre 4 pour le développement de méthodes numériques rapides.

<sup>14</sup>*Stosszahlansatz*, voir [35].

<sup>15</sup>Elle avait en fait été écrite cinq ans plus tôt par Maxwell dans [128]...

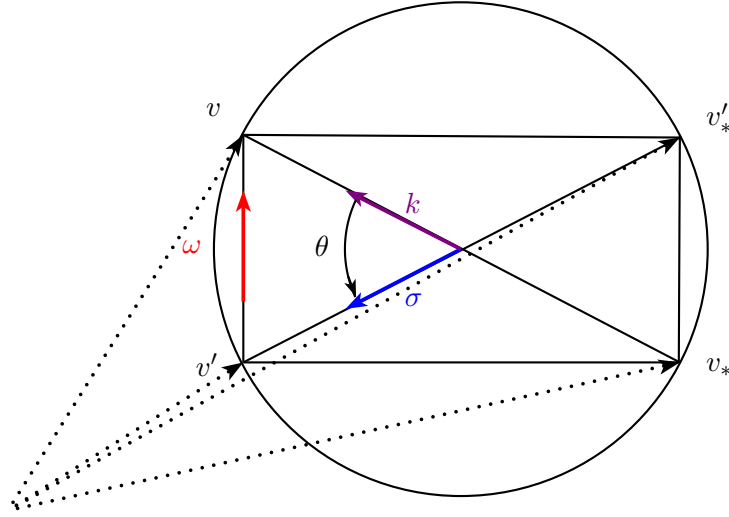


FIGURE 4 – Géométrie des collisions élastiques.

où  $Q_{\mathcal{B}}$  est l'opérateur de collision de Boltzmann. C'est un opérateur bilinéaire symétrique ne dépendant que de la variable de vitesse  $v$  (le temps et l'espace physique n'y apparaissent que comme paramètres), défini en utilisant par exemple la représentation  $\sigma$  par

$$(13) \quad \begin{aligned} Q_{\mathcal{B}}(f, f)(v) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} B(|v - v_*|, \cos \theta) [f'_* f' - f_* f] d\sigma dv_* \\ &= Q_{\mathcal{B}}^+(f, f)(v) - f(v) L(f)(v). \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous avons utilisé les notations raccourcies  $f := f(v)$ ,  $f_* := f(v_*)$ ,  $f' := f(v')$  et  $f'_* := f(v'_*)$ . La fonction  $B = B(s, x)$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in [-1, 1]$ , est appelée *noyau de collision*. Elle décrit le type et la fréquence des collisions, et sera supposée strictement positive presque partout. On voit que l'opérateur de collision se découple (au moins formellement) en une différence de deux opérateurs, le terme de *gain*  $Q_{\mathcal{B}}^+$ , qui peut s'interpréter comme le gain de particules de vitesse  $v$  après collision et le terme de *perte*  $fL(f)$ , qui exprime la perte de particules de vitesses  $v$ . Heuristiquement, cette décomposition assure la conservation de la quantité de matière.

Les hypothèses faites sur les collisions se repèrent aisément dans l'expression de l'opérateur de collision. En effet, la bilinéarité de l'opérateur est due au fait que l'on considère uniquement des collisions binaires entre particules (**H<sub>1</sub>**); la dépendance de l'opérateur en la variable de vitesse seulement est due à la localisation en temps et en espace (**H<sub>2</sub>**) des collisions; l'élasticité des collisions (**H<sub>3</sub>**) apparaît à travers la paramétrisation des vitesses pré-collisionnelles  $(v', v'_*)$ ; la micro-réversibilité (**H<sub>4</sub>**) s'interprète grâce à l'invariance du noyau de collision sous les transformations  $(v, v_*, \omega) \rightarrow (v_*, v, -\omega)$  et  $(v, v_*, \sigma) \rightarrow (v', v'_*, k)$  (où  $k$  est le vecteur unitaire  $k = (v - v_*)/|v - v_*|$ ); enfin, le chaos moléculaire (**H<sub>5</sub>**) se traduit de manière probabiliste par une tensorisation de la distribution de 2-particules<sup>16</sup>, et apparaît donc dans l'opérateur de collision à travers les produits tensoriels de distributions de particules  $f'_* f'$  et  $f_* f$ .

<sup>16</sup>Plus précisément, si  $f^{(2)}(x, v_1, v_2)$  décrit la probabilité de trouver deux particules au point  $dx dv_1 dv_2$ , on aura  $f^{(2)}(x, v_1, v_2) = f \otimes f(x, v_1, v_2) := f(x, v_1)f(x, v_2)$ .

**Propriétés macroscopiques de l'opérateur de Boltzmann.** La symétrie du noyau de collision nous permet d'écrire la formulation faible de l'opérateur de Boltzmann (13). En effet, une symétrisation des variables<sup>17</sup> intervenant dans l'opérateur de collision permet d'écrire, étant donnée une fonction test  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$(14) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f_* f (\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*) B(|v - v_*|, \cos \theta) d\sigma dv dv_*.$$

Cette formulation va nous permettre d'établir les principales caractéristiques macroscopiques de l'opérateur de collision.

Les conservations microscopiques (de l'impulsion et de l'énergie cinétique) ainsi que la fermeture du système (conservation de la masse) sont effectivement présentes dans cet opérateur. D'après (1), les quantités associées sont les trois premiers moments en vitesse de l'opérateur qui doivent donc être nuls. Or, d'après l'expression (14), on a pour toute  $f$  solution de l'équation (12)

$$\int_{v \in \mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f) \psi(v) dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(v') + \psi(v'_*) - \psi(v) - \psi(v_*) = 0.$$

D'après la définition des conservations microscopiques, les fonctions  $\psi(v) = (1, v, |v|^2)$  sont solutions de cette équation, et on peut en fait montrer que ce sont les seules (voir *p. ex.* le livre de Cercignani [57]). Ces fonctions sont appelées *invariants de collision*. On obtient donc les conservations recherchées : pour toute  $f$  solution de (12),

$$(15) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f)(v) \psi(v) dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(v) = (1, v, |v|^2).$$

La formulation faible nous permet d'établir aussi très simplement la négativité de l'entropie de l'opérateur de collision  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f)$ . Pour cela, commençons par effectuer de nouveau la symétrisation  $(v, v_*, \omega) \rightarrow (v_*, v, -\omega)$  dans (14). En sommant l'expression obtenue avec la précédente, on obtient alors

$$(16) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (f'_* f' - f_* f) (\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*) B(|v - v_*|, \cos \theta) d\sigma dv dv_*.$$

Prenons maintenant  $\psi = \log f$  dans (16). Alors si  $\lambda = f' f'_* / f f_*$

$$(17) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f)(v) \log f(v) dv &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (f'_* f' - f_* f) \log \left( \frac{f' f'_*}{f f_*} \right) B(|v - v_*|, \cos \theta) d\sigma dv dv_* \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f' f'_* (1 - \lambda) \log \lambda B(|v - v_*|, \cos \theta) d\sigma dv dv_* \leq 0 \end{aligned}$$

car la fonction  $\lambda \mapsto (1 - \lambda) \log \lambda$  est négative. De plus, la positivité du noyau de collision implique l'égalité dans (17) si et seulement si  $\lambda = 1$ . Ainsi, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f)(v) \log f(v) dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f' f'_* = f f_*, \quad \forall (x, v, v_*, \sigma).$$

---

<sup>17</sup>Plus exactement le changement de variables unitaire  $(v, v_*, \omega) \rightarrow (v_*, v, -\omega)$ .

Or, Boltzmann a montré dans son article fondateur [35] que cette dernière égalité est vraie<sup>18</sup> si et seulement si  $f$  est la distribution *maxwellienne* locale

$$(18) \quad \mathcal{M}_{\rho, \mathbf{u}, T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{u} - v|^2}{2T}\right),$$

où  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  et  $T$  sont les densité, vitesse et température *locales* de  $f$ . Une autre preuve très simple de cette équivalence sous l'hypothèse plus faible  $f(t, x, \cdot) \in L^1_2(\mathbb{R}^d)$  et  $B \in L^1_{loc}$  peut être trouvée dans l'article de Perthame [156] et utilise la transformée de Fourier en vitesse de  $f$ .

**Remarque 1.** Il est important de noter que la distribution maxwellienne est un équilibre microscopique, dans le sens où elle est déterminée à partir d'une relation ne mettant en jeu que les vitesses pré- et post-collisionnelles. Nous verrons un peu plus loin que ce n'est par contre pas le cas pour les équilibres de l'opérateur granulaire avec bain thermique ou terme de dérive, qui sont eux des équilibres « mésoscopiques », obtenus en résolvant une équation opératorielle.

**Comportement macroscopique des solutions.** Soit  $f = f(t, x, v)$  une solution de l'équation de Boltzmann (12). Grâce aux propriétés (15) de conservation des moments de l'opérateur de collision, si l'on multiplie l'équation (12) par  $\psi(v) = (1, v, |v|^2/2)$  et que l'on intègre en vitesse, on obtient

$$(19) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) v \otimes v \, dv = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) v \frac{|v|^2}{2} \, dv = 0. \end{cases}$$

L'intégration en espace de ces équations nous donne la conservation globale de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique dans le cas de l'espace  $\mathbb{R}^d$  tout entier ou du tore  $\mathbb{T}^d$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv \, dx = 0.$$

Dans le cas d'un domaine régulier borné  $\Omega$  avec des conditions aux bords de type rebonds ou Maxwell, seules la masse et l'énergie cinétique sont conservées globalement, d'après les points 1 et 2 du corollaire 1.1 :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv \, dx = 0.$$

Enfin, le point 3 de ce corollaire et l'inégalité de production d'entropie (17) pour l'opérateur de Boltzmann nous donnent une preuve formelle du célèbre théorème  $H$  de Boltzmann, à savoir la décroissance globale de l'entropie dans les cas bornés et non bornés :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{H}(f)(t, x) \, dx \leq 0.$$

<sup>18</sup>En faisant quand même l'hypothèse  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ .



Il est remarquable que ce résultat n'est autre qu'une manifestation du *second principe de la thermodynamique*, à savoir que l'entropie (physique) d'un système fermé ne peut qu'augmenter. Il implique l'*irréversibilité* de l'équation de Boltzmann.

Enfin, on peut aussi montrer que le minimum de la fonctionnelle d'entropie, pour des distribution de masse  $\rho$ , vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  et température  $T$  données, est exactement atteint par la distribution maxwellienne  $\mathcal{M}_{\rho,\mathbf{u},T}$ <sup>19</sup>. L'effet du théorème  $H$  est donc formellement de faire converger la distribution  $f$  vers la maxwellienne correspondante. Une des preuves les plus générales de ce phénomène est due à Desvillettes et Villani dans [70]. Ils ont montré dans ce travail que pour un domaine  $\Omega$  soit périodique, soit ouvert, borné,  $\mathcal{C}^1$ , connexe non axisymétrique et muni des conditions aux bords  $\mathbf{B}_1$  ou  $\mathbf{B}_2$ , et sous une hypothèse de régularité *a priori* sur  $f$  que, pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\|f(t) - \mathcal{M}_{\rho,\mathbf{u},T}\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(t^{-\varepsilon}).$$

**Limite hydrodynamique compressible de l'équation de Boltzmann.** On vient donc de voir que l'équation de Boltzmann possède une fonctionnelle de Lyapunov globalement dissipée, impliquant la convergence des solutions en temps long vers un équilibre global. Ce processus de relaxation vers l'équilibre thermodynamique amène à se poser la question de savoir si la description hydrodynamique, macroscopique, est suffisante pour décrire le comportement des moments des solutions de l'équation de Boltzmann.

Le problème qui se pose concerne donc le passage d'une description microscopique d'un gaz raréfié, donnée par une équation de type Boltzmann, à une description fluide (et donc en régime dense), donnée par des équations de la dynamique des fluides de type Euler ou Navier-Stokes. Les échelles en jeu n'étant pas les mêmes, un adimensionnement de la description microscopique va être nécessaire. Afin d'obtenir une limite de type compressible, introduisons le changement de variables

$$f_\varepsilon(\tilde{t}, \tilde{x}, v) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}, v\right)$$

où  $\varepsilon > 0$  désigne le nombre de *Knudsen*, rapport du temps moyen entre deux collisions par le temps d'observation (ou de manière équivalente, rapport de la distance moyenne parcourue par deux particules avant collision par l'échelle du problème).

L'opérateur de Boltzmann n'agissant que sur la variable de vitesse, si  $f$  est solution de l'équation de Boltzmann (12), la nouvelle distribution  $f_\varepsilon$  est solution de l'équation adimensionnée

$$(20) \quad \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \tilde{t}} + v \cdot \nabla_{\tilde{x}} f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}_B(f_\varepsilon, f_\varepsilon).$$

En particulier, si le nombre de Knudsen  $\varepsilon$  est petit, ce qui est caractéristique d'un gaz dense (le temps moyen entre deux collisions est très petit), le nombre de collisions va être très grand et la distribution  $f_\varepsilon$  solution de (20) va être « très proche » de la distribution maxwellienne locale (18), en vertu du théorème  $H$ . On peut donc écrire (formellement)

$$f_\varepsilon(\tilde{t}, \tilde{x}, v) = \mathcal{M}_{\rho,\mathbf{u},T}(v) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Cela nous permet alors de fermer le système d'équations (19) vérifiées par les moments de  $f_\varepsilon$  (tous les calculs étant explicites dans le cas d'une maxwellienne), et donc en passant formellement à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , d'obtenir le système d'Euler compressible pour des gaz parfaits, c'est-à-dire<sup>20</sup>

<sup>19</sup>Ce résultat est parfois appelé lemme de Gibbs.

<sup>20</sup>Nous avons omis les tildes pour plus de clarté.

$$(21) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho T \mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}(E + \rho T)) = 0. \end{cases}$$

**Quelques résultats récents concernant l'équation de Boltzmann.** Nous allons présenter brièvement quelques résultats récents concernant l'équation de Boltzmann. Commençons juste par préciser le type de noyaux de collisions que nous avons considéré dans cette thèse. Nous avons déjà dit que nous nous étions intéressés à des modèles d'interactions à faible portée. Cela se traduit mathématiquement par le fait que le noyau de collision  $B$  soit localement intégrable<sup>21</sup> et se découple comme

$$(22) \quad B(|u|, \cos \theta) = \Phi(|u|) b(\cos \theta).$$

Dans cette expression, la fonction  $\Phi$ , parfois appelée *section efficace cinétique*, est donnée par

$$(23) \quad \Phi(x) = x^\gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

où  $\gamma \in [0, 1]$  définit le type d'interaction :  $\gamma = 0$  en dimension  $d = 2$  correspond au cas des *molécules maxwelliennes* tandis que le cas  $\gamma = 1$  en dimension  $d = 3$  correspond à celui physiquement réaliste des *sphères dures*. Le cas  $\gamma = 0$  en dimension quelconque sera plus généralement désigné comme cas des *pseudo-molécules maxwelliennes*. Enfin, la fonction  $b$ , appelée *section efficace angulaire*, vérifie l'hypothèse dite de *coupure angulaire de Grad*, à savoir que l'on néglige toutes les collisions rasantes entre particules<sup>22</sup>. Cela peut s'énoncer mathématiquement très simplement en supposant l'intégrabilité de  $b$  sur la sphère unité :

$$(24) \quad \int_0^\pi b(\cos \theta) \sin^{d-2} \theta \, d\theta < \infty.$$

Pour une introduction exhaustive à la théorie mathématique des équations cinétiques, et particulièrement à l'étude de l'équation de Boltzmann, nous redirigeons le lecteur intéressé vers le livre de Villani [187]. Néanmoins, certains résultats récents n'y figurent pas et il nous semble intéressant d'en mentionner quelques uns. Tous les espaces fonctionnels cités dans la suite sont présentés dans la Section 5 de cette introduction générale.

Commençons par la question de la validité mathématique de l'équation de Boltzmann : en partant d'un système de  $N$ -particules vérifiant les équations de Newton, est-il possible d'établir mathématiquement de manière rigoureuse l'équation de Boltzmann ? On parle alors de *propagation du chaos* vers la limite de champ moyen associée à ce système de particules. Mischler, Mouhot et Wennberg ont répondu à cette question par l'affirmative dans [138], montant de manière quantitative la propagation du chaos pour différents modèles homogènes en espace. Ils ont en effet développé dans cet article une méthode abstraite permettant d'établir la propagation du chaos, uniforme en temps et de manière quantitative pour une large classe de modèles microscopiques. Cette méthode repose

<sup>21</sup>Cette fonction peut être interprétée comme la probabilité de collision entre deux particules, bien qu'elle ne soit pas de masse 1.

<sup>22</sup>Et il y en a beaucoup !

sur l'étude précise des semi-groupes associés aux différentes échelles de description<sup>23</sup>. Elle est alors appliquée à un système de particules générant à la limite l'équation de Boltzmann avec pseudo-molécules maxwelliennes élastiques et coupure angulaire de Grad puis inélastique avec coupure angulaire et bain thermique, et à un processus à sauts de McKean-Vlasov, générant une équation de dérive-diffusion. Mischler et Mouhot [136] ont ensuite étendu cette méthode aux cas de noyaux de collisions non bornés, permettant d'obtenir des résultats de propagation du chaos pour des modèles de pseudo-molécules maxwelliennes sans coupure angulaire et surtout pour le modèle physiquement réaliste des sphères dures avec coupure angulaire. Ce travail établit aussi la propagation de la propriété de décroissance de l'entropie du système de particules vers le modèle limite.

Le cas de modèles non homogènes en espace a généré un grand nombre de résultats récents. Mischler s'est intéressé dans [132] au problème de la stabilité des solutions de l'équation de Boltzmann avec coupure angulaire (et aussi aux équations de Fokker-Planck et Vlasov-Poisson) dans des domaines bornés munis de conditions aux bords de type Maxwell. Il a montré la stabilité des solutions renormalisées de cette équation, permettant ainsi d'écrire le premier théorème rigoureux d'existence de solutions renormalisées dans des domaines possédant des conditions aux bords non-triviales. La preuve de ce résultat repose en grande partie sur l'obtention d'estimations *a priori* pour la trace au bord du domaine.

Mentionnons aussi l'important résultat de Golse et Saint-Raymond [98] concernant la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann avec noyau de type sphères dures avec coupure angulaire de Grad vers l'équation de Navier-Stokes incompressible. Ces auteurs ont montré que les solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann convergent (à l'extraction près) dans la limite du faible nombre de Mach et de Knudsen vers les solutions de Leray de l'équation de Navier-Stokes. Leur preuve est basée sur un contrôle des fluctuations de la distribution d'équilibre de l'équation de Boltzmann, sur des estimations de coercitivité de l'opérateur de Boltzmann linéarisé, sur des lemmes de moyenne et de dispersion de l'opérateur de transport et sur des inégalités de production d'entropie.

Enfin, en ce qui concerne la question de la stabilité des solutions de l'équation de Boltzmann (et donc du retour vers l'équilibre global), en plus de l'article de Desvillettes et Villani [70], il nous semble important de mentionner les méthodes dites « d'énergie nonlinéaire » développées par Guo et Strain par exemple dans [175, 176], et plus généralement la théorie de l'hypocoercivité qui cherche à traiter cette question de manière systématique. Le mémoire de Villani [189] est une somme sur le sujet.

## 2.2 L'équation des milieux granulaires

Les milieux granulaires, ou plus précisément les *gaz granulaires* ont été initialement introduits pour décrire le comportement hors équilibre de matériaux composés d'un grand nombre de grains (ou particules), non nécessairement microscopiques. Ces particules forment un « gaz », interagissant par le biais de collisions inélastiques, dissipant l'énergie cinétique. De nombreux systèmes peuvent être décrits comme des gaz granulaires, citons par exemple les anneaux planétaires [115, 8] pour le plus marquant d'entre eux. La thèse de Daerr [66] contient un grand nombre d'exemples de systèmes pouvant être représentés comme des gaz granulaires. Le livre de Brilliantov et Pöschel [38] nous a aussi particulièrement inspiré pour notre travail, pour son approche à la fois physique et mathématique.

---

<sup>23</sup>Elle peut s'interpréter d'une manière « numérique » comme d'une part une estimation de consistance pour le générateur de l'équation microscopique et d'autre part une estimation de stabilité pour l'équation obtenue à la limite  $N \rightarrow \infty$ .

Typiquement, un gaz granulaire est composé de  $10^6$  à  $10^{16}$  particules. L'étude d'un tel type de système va donc une nouvelle fois être inaccessible à une description microscopique et nous allons adopter un point de vue cinétique. La dimension de l'espace sera maintenant  $d \geq 1$  quelconque.

**Dynamique microscopique.** Nous allons reprendre les hypothèses **H<sub>1</sub>**–**H<sub>2</sub>**–**H<sub>4</sub>**–**H<sub>5</sub>** faites pour le cas d'un gaz parfait, mais nous allons considérer des modèles où les collisions entre les particules sont *inélastiques* c'est-à-dire que nous supposons que

**H<sub>3</sub>**?. Les collisions conservent la masse et l'impulsion mais dissipent une fraction  $1 - e$  de l'énergie cinétique dans la direction de l'impact. Le paramètre d'inélasticité  $e \in [0, 1]$  est donc appelé *coefficient de restitution* et on a

$$(25) \quad \begin{cases} v' + v'_* = v + v_*, \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 - |v|^2 - |v_*|^2 = -\frac{1-e^2}{2} |(v - v_*) \cdot \omega|^2 \leq 0, \end{cases}$$

où  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  désigne à nouveau la direction d'impact. Encore une fois, il existe principalement deux types de représentations des vitesses post-collisionnelles en fonction des vitesses pré-collisionnelles :

– La représentation  $\omega$ , donnée pour  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  par

$$v' = v - \frac{1+e}{2} ((v - v_*) \cdot \omega) \omega, \quad v'_* = v_* + \frac{1+e}{2} ((v - v_*) \cdot \omega) \omega.$$

– La représentation  $\sigma$ , donnée pour  $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$  par

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{1-e}{4} (v - v_*) + \frac{1+e}{4} |v - v_*| \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{1-e}{4} (v - v_*) - \frac{1+e}{4} |v - v_*| \sigma.$$

Nous remarquons que prendre  $e = 1$  dans ces deux définitions nous permet de récupérer le cas élastique **H<sub>3</sub>**.

La question de l'expression du coefficient de restitution  $e$  a été longuement débattue dans la littérature physique. Une longue discussion sur ce sujet est faite dans le livre de Brilliantov et Pöschel [38]. Il en ressort que le cas d'un coefficient constant (que nous allons adopter dans cette thèse) n'est physiquement réaliste qu'en dimension 1, car on peut trouver en dimension supérieure des contre-exemples (voir le chapitre 4 de ce livre, avec l'exemple du « canon collisionnel »). Pour plus de réalisme, il faut en fait supposer que  $e$  dépend de la norme de la vitesse relative des particules  $|v - v_*|$ . Plus précisément, ce coefficient doit être proche de 1, c'est-à-dire du cas élastique pour de faibles vitesses relatives (où peu d'énergie est dissipée à l'impact) et tend vers une constante éventuellement nulle sinon. C'est le cas dans les travaux de Toscani [180], où il est donné par

$$(26) \quad e(|v - v_*|) = \frac{1}{1 + c|v - v_*|^\gamma}$$

où  $c$  est une constante positive caractérisant le degré d'inélasticité ( $c = 0$  étant le cas élastique) et  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Un autre cas physiquement important est celui des sphères dures *viscoélastiques*, étudié

mathématiquement par exemple par Alonso et Lods [4, 5], où le coefficient de restitution est défini implicitement par la relation

$$(27) \quad e(|v - v_*|) + a|v - v_*|^{1/5}e(|v - v_*|)^{3/5} = 1,$$

où  $a > 0$ . Plus de détails sur la manière dont cette expression a été établie peuvent être trouvés au chapitre 3 de [38]. Afin de conduire une analyse plus rigoureuse, Pöschel, Brilliantov et Schwager ont considéré dans [159] le cas simplifié du coefficient de restitution à seuil :

$$e(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < r_*, \\ \bar{e} & \text{si } r \geq r_*, \end{cases}$$

pour  $\bar{e} < 1$  et  $r_* > 0$  fixés. Notons que le cas  $e = 0$  décrit des collisions *collantes* : toute la composante normale de l'énergie étant dissipée lors de la collision, les particules restent en contact après l'impact.

**Remarque 2.** Contrairement au cas élastique, ce modèle garde un sens en dimension 1. En effet, lors d'une collision élastique mono-dimensionnelle, on a  $\{v', v'_*\} = \{v, v_*\}$ , c'est-à-dire que les vitesses sont soit conservées, soit échangées, et la collision devient indiscernable au niveau macroscopique, puisque l'on a fait l'hypothèse que les particules étaient toutes identiques<sup>24</sup>. Au contraire, dans le cas inélastique, on a la règle suivante :

$$\{v', v'_*\} = \{v, v_*\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \frac{v + v_*}{2} \pm \frac{e}{2}(v - v_*) \right\}$$

selon la valeur de  $\sigma \in \{\pm 1\}$ , et il devient donc intéressant d'étudier ce modèle en dimension 1.

La géométrie des collisions est plus complexe que dans le cas élastique présenté précédemment. En effet, pour  $v, v_* \in \mathbb{R}^d$  fixés, notons

$$\Omega_{\pm} := \frac{v + v_*}{2} \pm \frac{1 - e}{2}(v_* - v), \quad O := \frac{v + v_*}{2} = \frac{v' + v'_*}{2}.$$

Alors, si  $u := v - v_*$  désigne la *vitesse relative*, on a

$$|\Omega_- - v'| = |\Omega_+ - v'_*| = \frac{1 + e}{2}|u|$$

c'est-à-dire  $v' \in \mathcal{S}(\Omega_-, |u|(1 + e)/2)$  et  $v'_* \in \mathcal{S}(\Omega_+, |u|(1 + e)/2)$ , où  $\mathcal{S}(x, r)$  désigne la sphère de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Ces informations se trouvent représentées de manière schématique sur la figure 5 (les tirets désignant les collisions élastiques).

Grâce aux hypothèses microscopiques **H<sub>1</sub>–H<sub>2</sub>–H<sub>3</sub>'–H<sub>4</sub>–H<sub>5</sub>**, il est possible d'écrire l'opérateur de collision  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  associé aux gaz granulaires. C'est un opérateur de type Boltzmann, où les collisions ne sont plus élastiques. Il admet une formulation faible très simple, à savoir

$$(28) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f_* f (\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*) B(|v - v_*|, \cos \theta, E(f)) d\sigma dv dv_*.$$

<sup>24</sup>Cela peut rappeler le problème des fourmis sur une barre : 100 fourmis identiques (particules) se déplacent en ligne droite ( $d = 1$ ) à la vitesse de 1cm/sec sur une barre de 1m de longueur. Elles changent de direction lorsqu'elles rencontrent une autre fourmi (collisions élastiques) et tombent de la barre lorsqu'elles arrivent à son extrémité. Toutes les fourmis seront alors tombées de la barre au bout de au plus 100 secondes, quelles que soient leurs positions et directions initiales, en raison des collisions élastiques qui sont équivalentes à un « échange » de fourmi.



ne dépend pas du type de collisions considéré (mais seulement du noyau de collision). Ce dernier opérateur est donc le même que dans le cas élastique. L'équation vérifiée par la distribution de particules  $f$  est alors l'équation collisionnelle suivante

$$(30) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f).$$

**Remarque 3.** Il existe une autre approche populaire<sup>25</sup> pour l'étude mathématique des gaz granulaires, qui utilise un opérateur de collision de type *Enskog*. Dans ce cas, le rayon des particules  $\delta$  est supposé strictement positif, et donc les collisions délocalisées en espace : l'hypothèse  $\mathbf{H}_2$  n'est plus valable. L'opérateur de collision étudié peut être représenté dans le cas des sphères dures sous la forme forte suivante

$$\mathcal{Q}_E(f, f)(x, v) = \delta^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |v - v_*| \left( \frac{G(\rho_+)}{e^2} f_+' f_*' - G(\rho_-) f_- f_* \right) d\omega dv_*,$$

où  $\rho$  est la densité locale de  $f$ , les indices  $\pm$  désignent pour une fonction  $g = g(x)$  la notation raccourcie

$$g_{\pm}(x) := g(x \pm \delta \omega)$$

et  $G$  est le taux de collision *local*, ou taux de *corrélations* (voir la discussion dans [188]). L'existence globale de solutions renormalisées pour le cas des collisions élastiques et inélastiques pour cette équation a été établie par Esteban et Perthame dans [78]. L'existence de solutions « mild », ainsi que leur stabilité au sens  $L^1(dx dv)$  a été montrée par Wu dans [192] pour des données proches du vide.

**Propriétés macroscopiques de l'opérateur des milieux granulaires.** Contrairement au cas des gaz parfaits, les gaz granulaires sont caractérisés au niveau microscopique par une conservation de l'impulsion et une dissipation de l'énergie cinétique. Ces propriétés se reflètent directement dans l'expression faible de l'opérateur de collision. En effet, si on utilise les relations microscopiques (25) dans l'expression (28), on obtient

$$(31) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D(f) \end{pmatrix},$$

où  $D(f) \geq 0$  est la *fonctionnelle de dissipation d'énergie*, dépendant du type de noyau de collision considéré :

$$D(f) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* \Delta(|v - v_*|, E(f)) dv dv_*$$

et  $\Delta(|u|, E)$  est le *taux de dissipation*, donné d'après (25) par

$$(32) \quad \Delta(|u|, E) := \frac{1 - e^2}{4} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot \omega|^2 B(|u|, \cos \theta, E) d\omega \geq 0.$$

La détermination de ce taux est d'une grande importance dans l'étude des gaz granulaires. En effet, son signe implique la décroissance globale de l'énergie cinétique des solutions de l'équation. Ce

<sup>25</sup>Pour deux raisons : elle est plus cohérente physiquement en raison de l'échelle macroscopique des particules, et mathématiquement, personne ne sait justifier l'expression de  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  à partir d'une approche de type Boltzmann-Grad, à cause de la taille des particules.

phénomène, une fois combiné à la préservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la positivité implique que les solutions  $f$  de l'équation des gaz granulaires convergent (pour la topologie faible-\*) vers une masse de Dirac centrée en la vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  :

$$f(t, \cdot) \rightharpoonup \delta_{v=\mathbf{u}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

C'est pour ça que l'on parlera parfois d'*explosion* lors de l'étude du comportement asymptotique de l'équation (30) dans le cadre homogène en espace.

De plus, il n'est pas possible d'établir d'estimations de type production d'entropie (17) comme pour l'opérateur de Boltzmann dans le but de préciser ce comportement asymptotique. En effet, si l'on tente de calculer l'entropie de  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  grâce à sa forme faible (28), comme remarqué dans [91], l'absence de microréversibilité des collisions inélastiques fait apparaître un terme de plus que dans le cas élastique, à savoir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f)(v) \log f(v) dv &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f_* f \log \left( \frac{f' f'_*}{f f_*} \right) B d\sigma dv dv_* \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f_* f \left[ \log \left( \frac{f' f'_*}{f f_*} \right) - \frac{f' f'_*}{f f_*} + 1 \right] B d\sigma dv dv_* \\ (33) \quad &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (f'_* f' - f_* f) B d\sigma dv dv_*. \end{aligned}$$

où  $B = B(|v - v_*|, \cos \theta, E(f))$ . Le premier terme de cette équation est négatif, car  $\log \lambda - \lambda + 1 \leq 0$ , et le second n'a pas de signe *a priori*. Il n'est donc pas possible de calculer l'évolution *a priori* de l'entropie de l'opérateur des gaz granulaires comme dans le cas élastique. Néanmoins, l'étude de l'énergie cinétique en elle-même peut nous donner des renseignements sur le comportement asymptotique de cette équation.

Nous allons présenter ce comportement pour deux cas importants de noyaux de collision. Le premier concerne le cas des pseudo-molécules maxwelliennes

$$B(|u|, \cos \theta, E) = b(\cos \theta)$$

où la section efficace angulaire  $b$  vérifie

$$0 < \beta_1 \leq b(x) \leq \beta_2 < \infty, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

On trouve dans ce cas-là en utilisant le changement de variable polaire  $\cos(\theta) = \hat{u} \cdot \omega$

$$(34) \quad \Delta(|u|) = b_1 \frac{1 - e^2}{4} |u|^2,$$

où l'on a posé

$$b_1 = \left| \mathbb{S}^{d-2} \right| \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin^{d-3}(\theta) b(\cos(\theta)) d\theta < \infty.$$

Dans le cas d'un noyau de collision de type sphères dures et dépendant polynomialement de l'énergie cinétique

$$(35) \quad B(|u|, \cos \theta, E) = |u| b(\cos \theta) E^\gamma$$

pour  $\gamma \in \mathbb{R}$ , on trouve

$$(36) \quad \Delta(|u|, E) = b_1 \frac{1 - e^2}{4} |u|^3 E^\gamma.$$

Nous allons voir que ces deux types de noyau sont à l'origine de comportements macroscopiques assez différents pour les solutions de l'équation des gaz granulaires.



**Comportement macroscopique des solutions.** Commençons par considérer une solution  $f = f(t, v)$  homogène en la variable d'espace de l'équation des gaz granulaires. Grâce aux propriétés (31) de conservation des moments de l'opérateur de collision, si l'on multiplie l'équation (12) par  $\psi(v) = (1, v, |v|^2/2)$  et que l'on intègre en vitesse, on obtient la conservation de la masse et de la quantité de mouvement ainsi que la dissipation d'énergie cinétique

$$\frac{d}{dt}(\rho, \rho \mathbf{u}, E(f)) = (0, 0, -D(f)).$$

Grâce à un argument de translation, nous pourrions donc toujours supposer que la quantité de mouvement de  $f$  est nulle. Soit  $\rho > 0$  sa masse. Nous allons étudier le comportement de l'énergie cinétique. On a, d'après l'expression de la fonctionnelle de dissipation d'énergie,

$$(37) \quad \frac{d}{dt}E(f)(t) = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* \Delta(|v - v_*|, E(f)) dv dv_*.$$

La dissipation d'énergie cinétique va donc dépendre du taux de dissipation  $\Delta$  et donc du noyau de collision. Dans le cas des pseudo-molécules maxwelliennes, on a d'après (34), en utilisant successivement l'inégalité de Jensen, la conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(f)(t) &= -b_1 \frac{1 - e^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* |v - v_*|^2 dv dv_* \\ &= -b_1 \frac{1 - e^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v - v_*|^2 f(v_*) dv_* \right) dv \\ &\leq -b_1 \rho \frac{1 - e^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} f(v) |v|^2 dv = -b_1 \rho \frac{1 - e^2}{4} E(f)(t) \end{aligned}$$

et donc l'énergie décroît exponentiellement vite vers 0. On remarque que dans le cas élastique  $e = 1$ , l'énergie cinétique est conservée, ce qui est bien cohérent avec la théorie élastique.

Ce cas n'est cependant pas le plus réaliste physiquement. On sait en effet depuis Haff [103] que la température d'un gaz granulaire classique doit se comporter comme  $(1 + t)^{-2}$  en temps grand. Montrons que c'est vrai dans le cas d'un noyau de type sphères dures. En effet, le taux de dissipation est dans ce cas donné par (36) et on a donc comme précédemment avec (37) (en utilisant en plus l'inégalité de Hölder)

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}E(f)(t) &= -b_1 \frac{1 - e^2}{4} E(f)^\gamma(t) \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* |v - v_*|^3 dv dv_* \\ &\leq -b_1 \rho \frac{1 - e^2}{4} E(f)^\gamma(t) \int_{\mathbb{R}^d} f(v) |v|^3 dv \\ &\leq -b_1 \rho \frac{1 - e^2}{4} E(f)^{\gamma+3/2}(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la vitesse de refroidissement va donc dépendre (au moins formellement) du paramètre  $\gamma$ . Plus précisément, si l'on note  $C_e = b_1 \rho (1 - e^2)/4$  et  $\alpha := \gamma + 1/2$ , on aura

$$E(f)(t) \leq \begin{cases} \frac{1}{(E(f_{in})^\alpha + C_e \alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}} & \text{si } \gamma > -1/2, \text{ et donc } \alpha > 0; \\ E(f_{in}) e^{-C_e t} & \text{si } \gamma = -1/2; \\ (E(f_{in})^\alpha - C_e \alpha t)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{si } \gamma < -1/2, \text{ et donc } \alpha < 0, \end{cases}$$

la loi de Haff correspondant donc au cas  $\gamma = 0$ . Ainsi, il ressort de cette analyse formelle qu'un tel noyau de collision permet d'exhiber trois comportements bien distincts, en fonction d'un paramètre critique : si  $\gamma > -1/2$ , le refroidissement a lieu en temps *a priori* fini et de manière au plus inversement polynomiale, si  $\gamma = -1/2$ , le refroidissement est au plus exponentiel, et enfin si  $\gamma < -1/2$  le refroidissement a lieu en temps **fini** et de manière polynomiale. Notons que le type de noyau de collision choisi est qualifié d'*anormal* quand  $\gamma < 0$ , car on peut interpréter ce choix comme un gaz dont la quantité de collisions interparticulaires augmente lorsque la température diminue, ce qui paraît au premier abord contre-intuitif. Nous avons démontré rigoureusement ces résultats formels dans cette thèse.

**Limite hydrodynamique compressible de l'équation des milieux granulaires.** La question de la détermination de la limite hydrodynamique de l'équation des gaz granulaires s'est très vite posée dans la littérature, malgré des difficultés évidentes au premier abord. En effet, nous avons dit précédemment qu'une description fluide n'est valable que sous l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, c'est-à-dire lorsque la distribution de particules est une maxwellienne locale. Or, nous venons de voir que les solutions de l'équation (30) convergent vers une masse de Dirac en temps long, en raison de la dissipation d'énergie cinétique. L'équilibre thermodynamique ne sera donc jamais atteint par les solutions de l'équation adimensionnée

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f_\varepsilon, f_\varepsilon).$$

Néanmoins, la communauté physique a très vite pris le parti d'utiliser une description fluide des milieux granulaires, de type Euler compressible, afin de pouvoir mener une analyse (théorique ou numérique) de tels modèles. La première description de ce type est due à Jenkins et Richman dans [113], grâce à l'utilisation d'un développement de type « 13 moments de Grad ». Le système macroscopique dans le cas d'un coefficient de restitution constant est donné après fermeture par une maxwellienne locale et à la limite élastique  $\varepsilon \rightarrow 0$  par

$$(39) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \rho T \mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}(E + \rho T)) = -K \rho^2 T^{3/2}. \end{cases}$$

où  $K = K(d, B)$  est une constante positive explicite. C'est un système d'équations de type Euler compressible, avec dissipation d'énergie cinétique. Son intégration dans l'espace physique permet d'ailleurs de récupérer la borne supérieure pour loi de Haff ( $\gamma = 0$  dans (38)) donnant l'évolution globale de l'énergie cinétique.

Le passage de l'équation cinétique vers ce système de loi de conservation peut être justifié plus rigoureusement (mais pas complètement) sous une hypothèse d'inélasticité faible  $1 - e^2 \sim \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  désigne le nombre de Knudsen. Cette mise à l'échelle particulière assure qu'à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'opérateur de collision granulaire « convergera »<sup>26</sup> vers l'opérateur de Boltzmann *et* que la solution sera projetée sur une distribution maxwellienne locale. La plupart des détails techniques formels de cette approche sont présentés par exemple dans l'article de Toscani [181], dans le cas plus général d'un coefficient de restitution dépendant polynomialement de la vitesse relative des particules.

<sup>26</sup>Dans une topologie bien sûr à préciser, voir l'article de Mischler et Mouhot [134] pour une approche rigoureuse de cette question.

**Un état de l'art sur l'équation des milieux granulaires.** Nous allons présenter brièvement les principaux résultats mathématiques concernant l'équation des milieux granulaires. Commençons par fixer une partie de la terminologie utilisée. Nous parlerons de modèle de gaz granulaire *avec bain thermique* lorsque l'opérateur de collision est considéré avec un laplacien dans l'espace des vitesses

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{I}} + \tau \Delta_v,$$

pour  $\tau > 0$ .

L'étude du problème de Cauchy pour l'équation (30), quoique récente, a été la source de nombreux résultats durant ces dix dernières années. La plupart de ces résultats ont été établis dans le cadre homogène en espace  $f = f(t, v)$  :

$$\begin{cases} \partial_t f = \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f), \\ f(0, v) = f_{in}(v). \end{cases}$$

Le premier résultat rigoureux d'existence de solutions est dû à Bobylev, Carrillo et Gamba [22, 23]. Il concerne des noyaux de collision de type pseudo-molécules maxwelliennes en dimension 3, dépendant de l'énergie cinétique comme

$$B(|v - v_*|, \cos \theta, E) = \sqrt{E}$$

et un coefficient de restitution  $e = e(|v - v_*|)$  (dépendant de la vitesse d'impact). Un tel noyau de collision permet d'obtenir le bon comportement asymptotique global, c'est-à-dire la loi de Haff (sous-critique)  $E(t) \sim (1+t)^{-2}$ . Plus précisément, on trouve dans cet article la proposition suivante

**Proposition 2.1** (Proposition 3.3 de [22]). *Soit  $0 \leq f_{in} \in L^1_2(\mathbb{R}^3)$ . Alors, il existe une unique solution globale  $f \in L^\infty(0, \infty, L^1_2(\mathbb{R}^3))$  au problème de Cauchy pour  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ .*

Elle a été établie grâce à une mise à l'échelle du temps permettant d'éviter la dépendance en l'énergie cinétique des solutions puis en considérant la transformée de Fourier en vitesse de l'opérateur de collision. L'existence de solutions autosimilaires à ce problème est aussi étudiée, ainsi que la limite hydrodynamique formelle du système, retrouvant le système d'Euler dissipatif (39).

En utilisant des techniques de changement de variables et de estimations sur les moments, Bobylev, Cercignani et Toscani ont ensuite montré dans [26] l'unicité des solutions autosimilaires pour ce modèle, sous l'hypothèse supplémentaire  $f_{in} \in L^1_{2+\delta}(\mathbb{R}^3)$  pour  $\delta > 0$ . Ils ont aussi caractérisé le comportement des queues du profil d'équilibre associé. Ces propriétés ont enfin été établies comme cas particulier d'un modèle plus général incluant le cas des collisions élastiques et inélastiques (mais pas le cas des sphères dures, en raison de l'utilisation de la transformée de Fourier) par Bobylev, Cercignani et Gamba dans [25]. Il faut aussi noter dans ce domaine le résultat de Bobylev et Cercignani [24] qui caractérise le comportement des moments en vitesse des solutions dans le cas d'un gaz granulaire avec bain thermique.

Le cas plus général (et surtout physiquement cohérent) des noyaux de type sphères dures

$$B(|v - v_*|, \cos \theta, E(f)) = |v - v_*| b(\cos(\theta))$$

où  $b$  est une section efficace intégrable (et donc vérifiant l'hypothèse de coupure angulaire de Grad) sur la sphère unité, a d'abord été étudié par Toscani dans [180] dans le cas d'un modèle unidimensionnel. Ce travail établit l'existence de solutions de type mesures (avec énergie cinétique finie) pour ce problème :

**Théorème 2.1** (Théorème 3.3 et 5.1 de [180]). *Considérons un coefficient de restitution donné par (26) pour  $-3 \leq \gamma \leq 1$  et  $0 \leq f_{in} \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R})$ , où  $p > 3 + \gamma$  pour  $\gamma > 0$  et  $p > 3$  sinon. Alors il existe une solution globale  $f \in \mathcal{C}^1(0, \infty; \mathcal{M}^2(\mathbb{R}))$  au problème de Cauchy pour  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ . De plus, son énergie cinétique est monotone décroissante et vérifie  $E(f)(t) \leq (1+t)^{-1}$  si  $-1 \leq \gamma \leq 1$  et  $E(f)(t) \leq (1+t)^{-2}$  si  $-3 \leq \gamma \leq -1$ .*

La preuve de ce théorème repose sur des estimations *a priori* des solutions de l'équation dans la métrique de Monge-Kantorovich-Wasserstein  $W_2$ . Cet article caractérise aussi la limite quasi-élastique  $1 - e^2 \sim \varepsilon \rightarrow 1$  du modèle étudié, une équation de friction non-linéaire de type McNamara-Young.

Ce modèle précis a ensuite été étudié par Toscani et Li dans [122]. Ils y établissent l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions de cette équation de friction non linéaire dans  $\mathcal{C}^1(0, \infty; \mathcal{M}^2(\mathbb{R}))$  pour des données initiales  $0 \leq f_{in} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ , grâce à des estimations *a priori* dans la métrique  $W_2$ . En fonction du paramètre  $\gamma$  provenant de la loi de collision inélastique, cet article montre aussi l'extinction de l'énergie cinétique des solutions en temps fini, pour des données initiales à support compact. La preuve de cette propriété repose sur une estimation de la taille du support des solutions en fonction du temps.

Puis Bobylev, Gamba et Panferov ont étudié le comportement des queues des distributions d'équilibres de l'opérateur inélastique avec un bain thermique ou un terme de dérive  $\text{div}_v(v \cdot)$  pour le cas d'un coefficient de restitution constant dans [27], en toutes dimensions de l'espace des vitesses :

**Théorème 2.2** (Théorème 1 de [27]). *Soit  $F(v) \geq 0$  pour  $v \in \mathbb{R}^d$  une solution de l'équation stationnaire*

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(F, F) + \Delta_v F = 0$$

*possédant des moments de tout ordres. Alors,  $F(v) \sim_{|v| \rightarrow \infty} \exp(-|v|^{3/2})$ .*

En effet, le bain thermique entraîne un apport d'énergie cinétique, empêchant l'existence d'équilibres triviaux, et entraînant l'apparition de queues non gaussiennes. Leur preuve repose alors sur l'établissement d'inégalités de Povzner pour l'opérateur de collision inélastique, permettant d'estimer les moments en vitesse de l'opérateur de collision puis les queues de distribution stationnaires.

La propagation des normes  $H^s$  et l'existence et l'unicité de solutions régulières pour ce modèle ont ensuite été établies par Gamba, Panferov, et Villani dans [91]. Leur preuve se base sur une estimation fine de la production d'entropie inélastique (33) puis sur l'étude du comportement des différents moments en vitesse des solutions de l'équation. L'existence et l'unicité peut alors être montrée en utilisant un argument de point fixe.

Enfin, Mischler, Mouhot et Ricard ont prouvé l'existence et l'unicité de solutions faibles pour le cas sans bain thermique [137] et avec des noyaux de collision généraux incluant les sphères dures et les pseudo-molécules maxwelliennes (mais avec coupure angulaire), pouvant dépendre de l'énergie cinétique et de coefficients de restitution non constants. Pour de tels noyaux, ils ont montré le théorème suivant.

**Théorème 2.3** (Théorème 1.4 de [137]). *Soit  $0 \leq f_{in} \in L^1_3 \cap BV_4$ . Alors, pour tout  $T \in ]0, T_c[$ , où  $T_c := \sup\{T > 0 : \mathcal{E}(f)(t) > 0, \forall t < T\}$  désigne le temps d'explosion, il existe une unique solution positive  $f \in \mathcal{C}(0, T; L^1_2) \cap L^\infty(0, T; L^1_3)$  du problème de Cauchy pour  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ . Cette solution est de masse et de vitesse moyenne constante, et vérifie*

$$E(f)(t) \rightarrow 0 \text{ and } f(t, \cdot) \rightarrow \delta_{v=0} \text{ when } t \rightarrow T_c,$$

*où la convergence  $f$  a lieu pour la topologie faible-\* de  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ .*

Leur preuve repose sur des estimations de l'opérateur de collision dans des espaces d'Orlicz, et plus particulièrement dans l'espace  $L \log L$ , ainsi que sur des inégalités de Povzner permettant d'établir le comportement des moments des solutions.

Un autre sujet ayant soulevé un grand intérêt dans l'étude de l'équation des gaz granulaires est celui du comportement en temps long des solutions. En raison de la dissipation de l'énergie cinétique ainsi que de l'absence de théorème  $H$ , ce sujet est apparu plus délicat que dans le cas de l'équation de Boltzmann classique. La première contribution dans ce domaine est due comme on l'a dit précédemment à un physicien, Haff. Il a dérivé formellement dans [103], à partir de considérations phénoménologiques, des lois d'évolution pour les quantités macroscopiques décrivant l'évolution d'un système composé d'un grand nombre de particules macroscopiques interagissant par des collisions dissipant l'énergie cinétique (c'est-à-dire, un gaz granulaire). Grâce à ces équations, il a alors montré que l'énergie cinétique du système se comporte comme une puissance inverse :

$$E(f)(t) \sim \frac{1}{(1 + c_0 t)^2},$$

où  $c_0$  est une constante positive dépendant de la taille des grains. Cette loi a depuis été établie rigoureusement dans le cas homogène en espace, avec un noyau de collision de type sphères dures et un coefficient de restitution constant par Mischler et Mouhot dans [133] : il existe  $c_1, c_2 \geq 0$  tels que  $c_1 (1+t)^{-2} \leq E(f)(t) \leq c_2 (1+t)^{-2}$  pour tout  $t \geq 0$ , sous l'hypothèse supplémentaire  $f_{in} \in L^p$  pour  $p > 1$ . Cet article montre aussi l'existence de solutions autosimilaires pour le cas des sphères dures avec coefficient de restitution constant, ainsi que la caractérisation du comportement des queues des profils autosimilaires associés. Il faut noter que ces profils sont solutions de l'équation opératorielle

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(G, G) = \operatorname{div}_v(vF)$$

et ne sont donc pas obtenus à partir de la dynamique microscopique, comme c'est le cas pour les distributions maxwelliennes.

Leur preuve repose sur l'introduction du changement de variables

$$f(t, v) = (1+t)^d g(\log(1+t), (1+t)v),$$

amenant à l'étude de l'équation de collision avec terme de dérive

$$(40) \quad \partial_t g + \operatorname{div}_v(vg) = \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(g, g).$$

Ils procèdent alors à des estimations de régularité du terme de gain inélastique et plus précisément montrent des extensions des théorèmes de Lions et de Bouchut-Desvillettes-Lu au cas inélastique, permettant d'établir la propagation uniforme des normes  $L^p$  par le modèle remis à l'échelle. Cette propriété implique en particulier une borne inférieure de l'énergie de  $g$ , permettant d'établir la loi de Haff par inversion du changement de variables. L'existence de solutions autosimilaires s'en déduit aussi par un théorème de point fixe de Tykhonov.

Ce résultat a été ensuite étendu par Alonso et Lods dans [4] au cas de coefficients de restitution dépendant de la vitesse relative des particules. En particulier, leur résultat couvre le cas physiquement réaliste des sphères dures viscoélastiques (27). Ils ont montré qu'alors, l'énergie se comporte comme  $c_3 (1+t)^{-5/3} \leq E(f)(t) \leq c_4 (1+t)^{-5/3}$  pour tout  $t \geq 0$  pour des constantes positives  $c_3, c_4$ . La structure de leur preuve est proche de celle de [133], avec une extension des inégalités de Povzner aux cas de coefficients de restitution non constants<sup>27</sup> ainsi qu'une estimation de la propagation uniforme des normes  $L^p$  et enfin une étude de l'équation autosimilaire (40). Il faut noter que

<sup>27</sup>Alonso, Cañizo, Gamba et Mouhot ont d'ailleurs établi dans [3] d'une manière simplifiée en reprenant une partie de ces idées l'apparition et la propagation de moments exponentiels pour l'équation de Boltzmann élastique avec un noyau de collision de type (23)-(24), pour des données initiales seulement dans  $L^1_2$ .

cette équation n'est maintenant plus autonome à cause de la dépendance temporelle du coefficient de restitution induite par le changement de variable utilisé. Cependant, leur preuve ne permet pas de s'affranchir de l'hypothèse plutôt non physique sur la donnée initiale  $f_{in} \in L^p$  pour  $p > 1$ . Les mêmes auteurs ont donc étendu leurs résultats dans [5] aux cas plus physiques d'entropie finie

$$\mathcal{H}(f_{in}) < \infty$$

et de coefficient de restitution non constant d'une part, et d'autre part au cas d'un coefficient de restitution constant avec  $f_{in} \in L^1_3$  uniquement, mais sous une hypothèse restrictive de quasi-élasticité.

Dans le chapitre 1, nous utilisons ces résultats pour considérer le cas des noyaux *anormaux* (35), montrant que l'analyse formelle effectuée en (38), donne le comportement asymptotique correct pour l'énergie. Plus précisément, nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 2.4** (TR). *Soit  $0 \leq f_{in} \in L^1_3 \cap L^p$  pour  $p > 1$ . Alors, la solution  $f$  du problème de Cauchy pour les gaz anormaux avec  $\gamma = -a \leq 0$ , donnée par (2.3), vérifie*

1. cas sous-critique : si  $0 \leq a < 1/2$ , et alors  $\alpha = 1/(2a - 1) < 0$ ,

$$\frac{1}{(C_1 t + 1)^{-2\alpha}} \leq E(f)(t) \leq \frac{1}{(C_2 t + 1)^{-2\alpha}}, \forall t > 0;$$

2. cas critique : si  $a = 1/2$ ,

$$e^{-C_3 t} \leq E(f)(t) \leq e^{-C_4 t}, \forall t > 0;$$

3. cas sur-critique : si  $a > 1/2$ , et alors  $\alpha = 1/(2a - 1) > 0$ ,

$$(-C_5 t + 1)^{2\alpha} \leq E(f)(t) \leq (-C_6 t + 1)^{2\alpha}, \forall t < T_c,$$

pour des constantes constructives  $C_i > 0$  et  $T_c > 0$ .

Notre preuve repose sur un changement de variable complètement non linéaire, car dépendant de l'énergie cinétique de la solution  $f$ , permettant de se ramener à l'étude de l'équation non anormale avec terme de dérive (40). Nous établissons alors de nouvelles propriétés des solutions de cette équation permettant de montrer ce théorème. La structure de la preuve nous permet aussi de montrer l'existence de solutions autosimilaires pour cette équation, à savoir que pour tous  $\gamma = -a \leq 0$ , il existe une fonction  $V \in \mathcal{C}^1(0, T_c)$  et un profil  $G \in L^1_3$  tels que la fonction

$$F(t, v) := V(t)^d G(V(t)v), \quad \forall (t, v) \in (0, T_c) \times \mathbb{R}^d,$$

est solution de l'équation des gaz granulaires anormaux.

Le cas du problème de Cauchy pour des solutions  $f = f(t, x, v)$  inhomogènes en espace<sup>28</sup> a, lui, été beaucoup moins étudié. Le premier résultat dans ce domaine a été établi par Benedetto et Pulvirenti dans [17] pour le modèle introduit dans [180] avec un coefficient de restitution donné par (26), en une dimension d'espace et de vitesse. Ils ont montré l'existence et l'unicité globale de solutions « mild », d'abord pour des données initiales petites en norme  $L^1(dx dv)$  grâce à une estimation globale très précise de l'entropie, puis pour des données à support compact en vitesse, mais de norme  $L^1$  arbitraire. Leur preuve est basée sur une estimation de la dissipation d'entropie

<sup>28</sup>Physiquement plus réaliste, à cause des pertes spontanées d'homogénéité observées numériquement par Goldhirsch et Zanetti dans [95].

inélastique très précise, mais uniquement valable en dimension 1, adaptée d'un argument dû à Bony dans [36] pour traiter la question de l'existence des solutions d'un modèle de type « vitesses discrètes ».

Le problème de Cauchy pour des données initiales proches du vide a été ensuite étudié par Alonso dans [2]. Le noyau de collisions considéré dans ce travail est de type sphères dures et le coefficient de restitution dépend de la vitesse relative de collisions entre les particules. Sous certaines hypothèses techniques concernant cette dépendance<sup>29</sup>, cet article établit le résultat suivant

**Théorème 2.5** (Théorème 5.1 de [2]). *Soit  $0 \leq f_{in} \in M_{\alpha,\beta}$ , où*

$$M_{\alpha,\beta} := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^d) : |f(x, v)| \leq c \exp(-\alpha |x|^2 - \beta |v|^2), \forall (x, v) \in \mathbb{R}^{2d} \right\},$$

*$f_{in}$  de norme petite dans cet espace pour  $\alpha, \beta > 0$  donnés. Alors pour tous  $T > 0$ , le problème de Cauchy pour l'équation des gaz granulaires (30) admet une unique solution « mild »  $f^\# \in L^\infty(0, T; M_{\alpha,\beta}) \cap \mathcal{C}(0, T; M_{\alpha,\beta})$ .*

L'argument utilisé repose sur une itération de Kaniel et Shinbrot et sur des estimations de l'opérateur de collision dans l'espace  $M_{\alpha,\beta}$ , faisant apparaître l'hypothèse sur la petitesse de la norme de la donnée initiale dans cet espace. Enfin, Wu a étendu dans [191] les résultats de cet article, montrant sous les mêmes hypothèses la stabilité uniforme dans  $L^1(dx dv)$  des solutions ainsi que la propagation des normes BV.

La question difficile de savoir si la solution autosimilaire est la « bonne » solution de l'équation des gaz granulaires dans un cadre homogène, c'est-à-dire si les solutions de l'équation convergent vers cette solution particulière a été résolue par Mischler et Mouhot dans [134] pour un coefficient de restitution constant, proche du cas élastique  $e = 1$ . Ce travail établit l'unicité des profils autosimilaires présentés dans le précédent travail [133] ainsi que la convergence des solutions de l'équation autosimilaire (avec un taux explicite) vers ce profil. Une inversion du changement de variables leur permet ensuite de montrer la convergence vers la solution autosimilaire, encore une fois avec un taux explicite. La preuve de l'unicité est faite grâce à un argument perturbatif lié à l'unicité des profils d'équilibre pour le cas élastique. La preuve de convergence repose sur une étude de la dépendance de l'opérateur de collision en le coefficient de restitution, ainsi que d'une étude spectrale de l'opérateur granulaire avec terme de dérive, linéarisé au voisinage d'un équilibre de l'équation autosimilaire (40) pour des inélasticités faibles  $e \rightarrow 1$ . Les auteurs établissent la structure du spectre de cet opérateur linéaire, à savoir une partie essentielle bornée par au-dessus par une constante négative, et une partie discrète composée d'une valeur propre négative (correspondant à la dissipation d'énergie cinétique), une valeur propre nulle de multiplicité  $d + 1$  (correspondant aux lois de conservation) et d'autres valeurs propres discrètes, contrôlées par les valeurs propres élastiques. Combiné à une étude de la résolvante et des projecteurs spectraux, à un théorème d'inversion locale en dimension infinie ainsi qu'à une utilisation de l'inégalité de Csiszár-Kullback, la convergence des solutions de l'équation autosimilaire est alors établie.

Nous avons aussi utilisé ces résultats dans le chapitre 1 afin d'établir la convergence des solutions de l'équation des gaz granulaires anormaux vers la solution autosimilaire donnée par les profils d'équilibre de l'équation (40). Plus précisément, nous avons montré le théorème suivant :

**Théorème 2.6** (TR). *Il existe un paramètre constructif  $e_* \in ]0, 1[$  tel que pour tout  $e \in [e_*, 1[$ , il existe une solution autosimilaire  $F_e$  unique (à la translation temporelle près) de l'équation des gaz granulaires anormaux.*

<sup>29</sup>Hypothèses néanmoins vérifiées pour les cas constants, ainsi que pour les cas physiques (26) ou (27).

De plus, pour tout  $M_0 > 0$ , il existe  $\eta \in ]0, 1[$  tel que si  $f_{in}$  vérifie les hypothèses du théorème (2.4) et  $\|f_{in}\|_{L^1_3} \leq M_0$ , alors la solution associée  $f$  de l'équation des gaz granulaires anormaux vérifie pour  $C > 0$

$$\|f(t, \cdot) - F_e(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \begin{cases} \frac{C}{(1 + C_2 t)^{-\alpha \mu_e}} & \text{si } a < 1/2, \\ C e^{-C_4 \mu_e t/2} & \text{si } a = 1/2, \\ C(1 - C_6 t)^{\alpha \mu_e} & \text{si } a > 1/2, \end{cases}$$

où  $\alpha = 1/(2a - 1)$  et  $\mu_e = (1 - \eta) + \mathcal{O}(1 - e)$ .

Mischler et Mouhot ont aussi montré dans [135] avec la même structure de preuve que dans [134] l'unicité des profils d'équilibre pour le cas d'un gaz granulaire avec bain thermique et coefficient de restitution constant, ainsi que la vitesse de convergence vers ces profils. L'extension du résultat d'unicité des profils aux cas de coefficients de restitution dépendant de la vitesse relative des particules (mais toujours quasi-élastiques) a été récemment menée par Alonso et Lods dans [5]. Leur méthode de preuve, dépendant de l'hypothèse de quasi-élasticité, est par contre un peu différente car elle se base sur des estimations concernant seulement les solutions du modèle stationnaire et non pas sur le comportement dynamique de l'équation. Ce travail n'établit par en particulier la convergence vers la solution autosimilaire. Néanmoins, cette approche à l'intérêt de ne pas reposer sur des estimations de l'entropie des solutions d'équilibre et ne nécessite donc pas d'obtenir des estimations de régularité forte sur ces dernières.

La question de la convergence vers les solutions d'équilibre a aussi été abordée pour un autre modèle homogène en espace de gaz granulaire, introduit initialement par Benedetto, Caglioti, Carrillo et Pulvirenti dans [16]. L'équation considérée dans ce travail est de type Fokker-Planck non linéaire. Les auteurs ont montré pour le cas unidimensionnel la convergence dans  $L^1_1$  des solutions de cette équation vers l'équilibre, mais de manière non quantitative. Ce résultat a ensuite été amélioré par Carrillo, McCann et Villani dans [49]. Ils ont en effet montré en dimension quelconque la convergence vers l'équilibre en métrique de Wasserstein, de manière quantitative et pour une large classe de non linéarités grâce à l'utilisation de méthodes de production d'entropie. Ce résultat a été récemment amélioré par Bolley, Gentil et Guillin dans [34]. Ils ont en particulier montré que le taux de convergence vers l'équilibre est uniforme en la condition initiale.

Le problème de la propagation du chaos (de manière quantitative) pour l'équation des gaz granulaire a aussi été abordé par Mischler, Mouhot et Wennberg. Ils ont en effet pu appliquer le cadre abstrait développé dans l'article [138] au cas d'un gaz de pseudo-molécules maxwelliennes inélastiques (avec coefficient de restitution constant) agrémenté d'un bain thermique.

L'étude des limites fluides de l'équation des gaz granulaires a généré beaucoup d'intérêt chez les physiciens, en raison du grand nombre d'applications possibles de ces modèles, comme la formation d'anneaux planétaires, les avalanches ou le comportement de grains dans des silos de céréales. La littérature à ce sujet est très dense, aussi nous limiterons nous à citer le livre de Brilliantov et Pöschel [38] qui présente dans sa dernière partie une étude linéarisée du système d'Euler dissipatif (39) afin d'en étudier les modes stables et instables, ainsi que l'article de revue [72] de Dufty, établissant de manière formelle plusieurs sortes de limites fluides de l'équation des gaz granulaires, de type Euler et Navier-Stokes compressibles.

La justification rigoureuse de ces limites hydrodynamiques n'a pas encore été effectuée, même pour le cas de solutions régulières en temps court pour le système d'Euler dissipatif. Néanmoins, Carlen, Chow et Grigo ont utilisé dans [45] une approche de type système dynamiques, inspirée de l'article de Fenichel [80] traitant de perturbations singulières. Ils construisent grâce à cette théorie une variété invariante pour les solutions de l'équation des gaz granulaires avec coefficient



de restitution constant et proche de 1. En perturbant cette variété (et non pas les solutions de l'équation comme il est habituel de faire dans une approche de type Chapman-Enskog), ils peuvent alors établir le système de Navier-Stokes dissipatif associé à cette équation, dans un régime où le nombre de Knudsen est du même ordre que l'inélasticité.

### 2.3 L'équation de Boltzmann linéarisée

L'étude de l'équation de Boltzmann linéarisée au voisinage d'un équilibre peut être d'un grand intérêt pour beaucoup d'applications. Considérons par exemple le problème de l'existence globale de solutions pour l'équation de Boltzmann, proche d'une maxwellienne  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{1,0,1}$  homogène en espace. Les solutions cherchées sont donc de la forme

$$f = \mathcal{M} + \mathcal{M}^{1/2} h.$$

Si  $f \in L^2(\mathcal{M}^{-1})$  est solution de (12), alors  $h \in L^2(\mathcal{M})$  sera solution de l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \cdot \nabla_x h = L_1 h + \Gamma_1(h, h),$$

où  $L_1$  est l'opérateur de Boltzmann *linéarisé*, donné par

$$L_1 h := 2\mathcal{M}^{-1/2} \mathcal{Q}_B(\mathcal{M}^{1/2} h, \mathcal{M})$$

et  $\Gamma_1$  est le reste quadratique défini par

$$\Gamma_1(g, h) := \mathcal{M}^{-1/2} \mathcal{Q}_B(\mathcal{M}^{1/2} g, \mathcal{M}^{1/2} h).$$

Or, en utilisant la forme faible de l'opérateur de Boltzmann et ses propriétés macroscopiques, il est facile de montrer (voir par exemple [59]) que l'opérateur  $L_1$  est autoadjoint négatif sur  $L^2(\mathcal{M})$ , et génère donc un semi-groupe fortement continu sur cet espace. Ainsi, si l'on arrive à prouver que le reste  $\Gamma_1$  est continu pour une norme à définir (ce qui n'est pas non plus très difficile, voir encore [59]), l'écriture d'une formule de Duhamel devrait permettre de conclure à la stabilité des solutions de l'équation de Boltzmann, sous l'hypothèse cruciale que la partie linéaire

$$(41) \quad L_1 - v \cdot \nabla_x$$

génère un semi-groupe exponentiellement stable. Cette dernière question est très délicate. En effet, bien que  $L_1$  soit dissipatif, son noyau est généré par  $d + 2$  fonctions indépendantes (les invariants collisionnels) correspondant à la valeur propre 0. Ainsi, la propriété de stabilité asymptotique dans  $L^2$  n'est pas vraie pour le semi-groupe généré par  $L_1$ . Par contre, les propriétés de dispersion de l'opérateur de transport libre vont nous aider pour répondre à cette question.

La première preuve rigoureuse de stabilité suivant cette stratégie est due à Ukai dans [184]. Elle a permis de montrer l'existence et l'unicité de solutions fortes, proches de l'équilibre global, pour l'équation de Boltzmann. Une des idées clés de ce théorème repose sur le travail très important de Ellis et Pinsky [74] établissant le comportement du spectre de l'opérateur linéaire (41) en variables de Fourier en espace, pour des petites fréquences. En effet, grâce aux propriétés de la transformée de Fourier, cet opérateur s'écrit alors

$$(42) \quad L_1 - \gamma \cdot v, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^d,$$

car l'opérateur de Boltzmann n'agit pas sur la variable d'espace. De plus, on sait (au moins depuis l'article de Grad [100]) que l'opérateur  $L_1$  se découple dans le cas de noyau de collisions de type sphères dures avec coupure angulaire en

$$(43) \quad L_1 = L_1^c - \nu_1(v) \text{Id},$$

où  $L_1^c$  est un opérateur compact sur  $L^2(\mathcal{M})$  et  $\nu_1$  est la *fréquence de collision*, donnée par

$$\nu_1(v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |v - v_*| \mathcal{M}(v_*) b(\cos \theta) d\sigma dv_*, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Cette quantité vérifie pour deux constantes positives  $\nu_{0,1}$  et  $\nu_{1,1}$

$$0 < \nu_{0,1} (1 + |v|) \leq \nu_1(v) \leq \nu_{1,1} (1 + |v|), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Le travail de Ellis et Pinsky établit alors (entre autre) le résultat suivant concernant le spectre de l'opérateur linéaire (42).

**Théorème 2.7** (Théorème 3.1 et Proposition 4.1 de [74]). *Le spectre  $\Sigma$  de l'opérateur linéaire (42) se décompose pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  en deux parties disjointes : la première est le spectre essentiel  $\Sigma_e$ , qui est situé dans le demi-plan complexe*

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : \Re \zeta \leq -\nu_{0,1} < 0\};$$

*la deuxième est le spectre discret  $\Sigma_d$  (c'est-à-dire les valeurs propres), qui est situé dans le demi-plan complexe*

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : \Re \zeta > -\nu_{0,1}\}.$$

*De plus, il existe deux constantes  $\gamma_0 > 0$  et  $\sigma_0 < \nu_{0,1}$  telles que pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  tel que  $|\gamma| \leq \gamma_0$ , l'ensemble  $\Sigma_d$  est composé d'exactly  $d + 2$  éléments  $\lambda^{(j)}(\gamma) = \mu^{(j)}(|\gamma|)$  pour  $j \in \{-1, \dots, d\}$ , vérifiant  $-\sigma_0 \leq \Re \lambda^{(j)}(\gamma) < 0$ ,  $\mu^{(j)} \in C^\infty([-\gamma_0, \gamma_0])$ , et enfin*

$$(44) \quad \mu^{(j)}(|\gamma|) := i \mu_1^{(j)} |\gamma| - \mu_2^{(j)} |\gamma|^2 + \mathcal{O}(|\gamma|^3), \quad \forall |\gamma| \leq \gamma_0,$$

*pour  $\mu_1^{(j)} \in \mathbb{R}$  et  $\mu_2^{(j)} > 0$  explicites.*

Dans le chapitre 5, nous nous proposons d'étendre ce résultat à l'opérateur des gaz granulaires avec bain thermique linéarisé, et particulièrement d'exhiber un développement des valeurs propres analogue à (44), mais avec une dépendance supplémentaire en le coefficient de restitution  $e$ . Pour cela, nous utilisons des résultats récents établis dans différents articles. D'une part, nous avons besoin de l'étude due à Mouhot [139] concernant le spectre de l'opérateur de Boltzmann linéarisé  $\mathcal{L}_1$  au voisinage d'une maxwellienne, mais dans l'espace  $L^1$  et plus  $L^2$ . Ce travail établit que les propriétés de l'opérateur linéarisé valables dans  $L^2$ , comme la décomposition (43) ou la géométrie du spectre essentiel, sont les mêmes dans  $L^1$ . Dans ce travail, le poids d'intégration utilisé n'est plus une maxwellienne, mais plutôt une fonction à décroissance rapide du type

$$m(v) := \exp(-a |v|^s), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d,$$

pour  $a > 0$  et  $0 < s < 2$ . D'autre part, nous utilisons les résultats concernant le spectre de l'opérateur granulaire linéarisé, dus à Mischler et Mouhot [134, 135]. Cette série d'articles, en plus de présenter une étude très fine de la dépendance de l'opérateur de collisions en l'inélasticité, établit la structure

du spectre de l'opérateur granulaire avec bain thermique dans l'espace  $L^1(m^{-1})$  où  $s < 1$ , pour une faible inélasticité.

Le travail effectué à ce sujet est encore en cours. Néanmoins, nous avons déjà prouvé un résultat de localisation du spectre en fonction du coefficient de restitution  $e$  et de la fréquence spatiale  $\gamma$ , généralisant à l'espace  $L^1(m^{-1})$  le résultat classique dans un cadre  $L^2$  du à Nicolaenko [146] (voir aussi à ce sujet le chapitre 7 du livre de Cercignani, Illner et Pulvirenti [59]). Plus précisément, définissons pour  $e \in ]e_*, 1]$  (ou  $e_*$  est défini dans [135, Théorème 1.2]) l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L}_{e,\gamma} h := \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(h, G_e) + (1 - e)\Delta_v h - i(\gamma \cdot v) h,$$

où  $G_e$  est l'unique profil d'équilibre de l'opérateur  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}} + (1 - e)\Delta_v$ , pour  $h \in W_1^{2,1}(m^{-1})$ . On montre alors le résultat suivant.

**Théorème 2.8 (TR).** *Soit  $e \in ]e_*, 1]$ . Il existe une constante constructive  $\bar{\mu}_e > 0$  telle que le spectre essentiel de l'opérateur  $\mathcal{L}_{(e,\gamma)}$ , de domaine  $W_1^{2,1}(m^{-1})$ , est contenu dans le demi-plan complexe*

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : \Re \zeta \leq -\bar{\mu}_e\}.$$

*La partie restante du spectre est composée uniquement de valeurs propres, vérifiant pour tout  $\delta > 0$  les propriétés suivantes : il existe des constantes  $0 < \bar{\lambda} < \mu_* < \infty$  et  $e_1 \in ]e_*, 1]$  telles que si  $e \in ]e_1, 1]$ , alors il existe une constante positive  $\gamma_0$  telle que pour tout  $|\gamma| \leq \gamma_0$ , si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathcal{L}_{(e,\gamma)}$ , alors*

$$\begin{aligned} \lambda \in \Delta_{-\mu_*} &\Rightarrow |\Im \lambda| \leq \delta; \\ \lambda \in \Delta_{-\frac{\bar{\lambda}}{2}} &\Rightarrow |\lambda| \leq \delta. \end{aligned}$$

Nous précisons ensuite ce résultat en donnant les premiers coefficients du développement de Taylor (en  $\gamma$  et  $e$ ) des valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}_{e,\gamma}$ , généralisant ainsi les résultats de Ellis et Pinsky [74], ainsi que ceux de Mischler et Mouhot [135]. Définissons d'abord le type de problème aux valeurs propres qui nous a intéressé : nous cherchons un triplet  $(\lambda, \gamma, h)$  vérifiant

$$(45) \quad (-i(\gamma \cdot v) + \mathcal{L}_e) h = \lambda h,$$

pour  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $h \in L^1(m^{-1})$ . On peut alors montrer le Théorème suivant.

**Theorem 2.1 (TR).** *Il existe  $e_2 \in ]e_1, 1]$ , des ensembles ouverts  $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ , voisinage de  $(0, 0)$  et des fonctions*

$$\begin{cases} \lambda^{(j)} : U_1 \times ]e_2, 1] \rightarrow U_2 & \forall j \in \{-1, \dots, d\}, \\ e^{(j)} : U_1 \times \mathbb{S}^{d-1} \times ]e_2, 1] \rightarrow L^1(m^{-1}) & \forall j \in \{-1, \dots, d\}, \end{cases}$$

*telles que :*

1. le triplet  $(\rho\omega, \lambda^{(j)}(\rho, e), e^{(j)}(\rho, \omega, e))$  est solution du problème aux valeurs propres (5.15), pour tout  $e \in ]e_2, 1]$ ,  $\rho \in U_1$ ,  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,  $j \in \{-1, \dots, d\}$ ;

2. la valeur propre  $\lambda^{(j)} \in \mathcal{C}^\infty(U_1 \times ]e_2, 1])$  vérifie

$$\begin{cases} \lambda^{(j)}(0, 1) = 0, & \forall j \in \{-1, \dots, d\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(j)}}{\partial \rho}(0, 1) = j i \sqrt{1 + \frac{2}{d}}, & \forall j \in \{-1, 0, 1\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(j)}}{\partial \rho}(0, 1) = 0, & \forall j \in \{2, \dots, d\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(0)}}{\partial e}(0, 1) = -\frac{3}{T_1}, \end{cases}$$

pour une constante positive explicite  $T_1$  dépendant de la section efficace angulaire ;

3. pour  $e \in ]e_2, 1]$  fixé, si un triplet  $(\lambda, \rho\omega, h)$  est solution du problème aux valeurs propres (5.15) avec  $(\rho, \lambda) \in U_1 \times U_2$ , alors nécessairement  $\lambda = \lambda^{(j)}$  pour  $j \in \{-1, \dots, d\}$ .

## 2.4 L'équation de Rosenau

L'approche adoptée ici est un peu différente que celle qui précède. Le point de départ vient d'un travail effectué par Rosenau [166] introduisant une version régularisée du terme de viscosité dans les équations de Navier-Stokes, afin de pouvoir effectuer rigoureusement un développement de type Chapman-Enskog des équations de la dynamique des fluides. Cette régularisation a l'avantage de reproduire le comportement de régularisation des termes de viscosité de Navier-Stokes pour les petites fréquences, alors que pour les grandes fréquences, l'opérateur considéré devient une approximation bornée d'un opérateur de collision linéaire.

Ce modèle unidimensionnel est donné par la loi de conservation scalaire avec terme de viscosité modifié

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(f_\varepsilon)}{\partial v} = \left[ \frac{-\varepsilon \xi^2}{1 + \varepsilon^2 \xi^2} \widehat{f}_\varepsilon(\xi) \right]^\vee,$$

où la notation  $g(\xi)^\vee$  désigne la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $g$  donnée. L'opérateur du second membre de cette équation est l'*opérateur de Rosenau*. On voit donc que pour les petites fréquences  $\xi \ll 1$ , il se comporte comme un terme de viscosité classique  $\varepsilon \partial_{vv}^2 f$  alors qu'il est borné pour les grandes fréquences, entraînant une propagation de l'information à vitesse finie, et ainsi évitant certaines des instabilités induites par la troncation du développement de Chapman-Enskog après un nombre fini de termes.

Cette équation a été étudiée par Schochet et Tadmor dans [169] dans le cadre de l'étude des solutions de type viscosité évanescence des lois de conservation scalaires. Elle a aussi été utilisée par Rohde dans [165] pour modéliser les effets de capillarité d'un gaz lors d'un changement de phase fluide-vapeur. Cette approche non locale semble d'ailleurs plus proche du vrai phénomène physique sous-jacent que l'approche initialement utilisée par Korteweg, utilisant l'opérateur de la chaleur, local. Plus récemment, l'existence, l'unicité et la stabilité dans  $L^1$  des solutions de cette équation, globalement en temps, a été établie par Colombo et Guerra dans [62, 63], comme cas particulier d'un modèle général de systèmes de lois de conservation avec des termes sources non locaux.

Notre contribution à ce domaine a été différente. En effet, dans toutes ces références, l'équation (46) était considérée directement dans l'espace de Fourier. Seulement, il est relativement facile de

voir que le second membre de cette équation peut se réécrire comme :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{-\varepsilon\xi^2}{1+\varepsilon^2\xi^2} \widehat{f}_\varepsilon(\xi) \right]^\vee (v) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(v_* - v) M_\varepsilon(v_*) dv_* - \frac{f_\varepsilon(v)}{\varepsilon^2}, \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} [M_\varepsilon *_v f_\varepsilon(v) - f_\varepsilon(v)], \end{aligned}$$

où  $M_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon^{-1}|v|)$ . Ce terme est donc l'opérateur de collision « le plus simple », c'est-à-dire un opérateur de collision de type Boltzmann linéaire muni d'un noyau de collision de type pseudo-molécules maxwelliennes avec coupure angulaire de Grad et où la loi de collision microscopique est donnée par  $v' = v + v_*$ . La distribution  $M_\varepsilon$  désigne la répartition des particules du milieu environnant.

Nous nous sommes alors intéressés dans le chapitre 2 au comportement des solutions de l'équation d'évolution

$$(46) \quad \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2} [M_\varepsilon *_v g_\varepsilon - g_\varepsilon v],$$

pour des fonctions  $M_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-1} M_1(\varepsilon^{-1} v)$  avec  $M_1 \in \mathcal{M}^2$  (mesures avec moment d'ordre 2 fini) simplement de moyenne nulle. En utilisant la forme faible de l'équation (46), il est facile de montrer que cette hypothèse sur la distribution  $M_\varepsilon$  est suffisante pour obtenir une approximation de l'équation de la chaleur. En effet, pour une fonction test  $\psi$  régulière, on a, après un simple développement de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(t, v) \psi(v) dv &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \psi(v) (M_\varepsilon *_v g_\varepsilon(v) - g_\varepsilon(v)) dv \\ &= \frac{\gamma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(t, v) \psi''(v) dv + R(\varepsilon), \end{aligned}$$

où  $\gamma^2$  désigne le moment d'ordre 2 de  $M_1$  et le reste  $R_\varepsilon$  vérifie

$$|R(\varepsilon)| \leq \frac{\lambda}{3!} \|\varphi^{(3)}\|_{L^\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} w^3 M_\varepsilon(w) dw = \varepsilon \frac{\lambda}{3!} \|\varphi^{(3)}\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} w^3 M_1(w) dw.$$

Ainsi, pourvu que  $M_1 \in \mathcal{M}^3$ , les solutions de l'équation (46) vont converger faiblement vers une solution faible de l'équation de la chaleur (en fait, une analyse plus poussée montre que  $M_1 \in \mathcal{M}^2$  suffit).

Un des intérêts de cette équation est évident lorsque l'on suppose que  $M_\varepsilon$  est donnée par la distribution de Bernoulli

$$(47) \quad M_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} [\delta_0(v + \varepsilon\gamma) + \delta_0(v - \varepsilon\gamma)].$$

Alors, l'équation (46) devient

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}(t, v) = \frac{1}{2\varepsilon^2} [g_\varepsilon(t, v - \varepsilon\gamma) - 2g_\varepsilon(t, v) + g_\varepsilon(t, v + \varepsilon\gamma)].$$

Maintenant, fixons  $\Delta v > 0$  et une grille uniforme  $v_i = i\Delta v$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors, si l'on pose  $g_i(t) := g_\varepsilon(v_i, t)$  et  $\varepsilon = \Delta v/\gamma$ , l'équation précédente s'écrit

$$g'_i(t) = \frac{g_{i+1}(t) - 2g_i(t) + g_{i-1}(t)}{\Delta v^2},$$

c'est-à-dire que l'on a obtenu une discrétisation aux différences centrées de l'équation de la chaleur.

Ainsi, l'étude des propriétés qualitatives de l'équation (46) va donner comme cas particulier des informations sur l'approximation numérique la plus classique de l'équation de la chaleur. Nous nous sommes particulièrement intéressés au comportement en temps long de cette équation, en utilisant des techniques de changement de variables. Par exemple, dans le cas des différences centrées, nous avons montré la proposition suivante :

**Proposition 2.2** (TR et Toscani). *Soit  $0 \leq g_{in} \in \mathcal{M}^2$  de moyenne nulle et d'énergie égale à 1. Si  $g_\varepsilon$  est la solution du problème de Cauchy pour l'équation (46) associé à  $g_{in}$  pour le cas des différences centrées (47), alors la distribution remise à l'échelle  $h_\varepsilon(t, v) := V(t)^{-1} g_\varepsilon(t, V(t)^{-1}v)$  pour  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$  vérifie*

$$d_2(h_\varepsilon(t), \mathcal{M}_{1,0,1}) \leq \frac{1}{1+t} d_2(g_0, \mathcal{M}_{1,0,1}) + \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon \frac{\sqrt{t}}{1+t}, \quad \forall t \geq 0.$$

En particulier, cette proposition établit que l'approximation des différences centrées approche la solution d'équilibre de l'équation de la chaleur remise à l'échelle (c'est-à-dire l'équation de Fokker-Planck) à un taux sous-optimal (le taux optimal étant pour la norme considérée  $(1+t)^{-1}$ ).

Nous avons ensuite étendu ce résultat au cas de noyau ayant un moment d'ordre 4 fini :

**Théorème 2.9** (TR et Toscani). *Soit  $0 \leq g_{in} \in \mathcal{M}^4$  de moyenne nulle et d'énergie égale à 1. Si  $g_\varepsilon$  est la solution du problème de Cauchy pour l'équation (46) associé à  $g_{in}$  avec un noyau  $M_\varepsilon \in \mathcal{M}^4$  de moments impairs nuls, alors la distribution remise à l'échelle  $h_\varepsilon(t, v) := V(t)^{-1} g_\varepsilon(t, V(t)^{-1}v)$  pour  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$  vérifie*

$$d_3(h_\varepsilon(t), \mathcal{M}_{1,0,1}) \leq \frac{1}{(1+t)^{3/2}} d_3(g_0, \mathcal{M}_{1,0,1}) + \frac{13\sqrt{2}}{24} (B_\varepsilon)^{3/4} \left( \frac{\sqrt{t}}{1+t} \right)^{3/2}, \quad \forall t \geq 0,$$

où  $B_\varepsilon$  est donné par

$$B_\varepsilon := 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} M_1(v) v^4 dv < \infty.$$

Encore une fois, le taux obtenu n'est pas optimal. De plus la convergence vers la solution autosimilaire est obtenue pour une métrique  $d_s$ , qui correspond à la convergence faible des mesures. Malheureusement, il n'est pas possible d'étendre ce résultat à des topologies fortes. En effet, en utilisant la théorie des sommes de Wild linéaires, on peut voir que l'approximation de Rosenau introduit des « singularités » empêchant la convergence forte, indépendamment du noyau  $M_\varepsilon$  utilisé.

Néanmoins, en utilisant une régularisation un peu particulière permettant « d'enlever » ces singularités, nous avons montré le théorème suivant.

**Théorème 2.10** (TR et Toscani). *Sous les hypothèses du théorème précédent, si  $g$  est une solution de l'équation de la chaleur et  $g_{\varepsilon,reg}$  est une solution « régularisée » de l'équation de Rosenau (46), alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t) - g_{\varepsilon,reg}(t)\|_{L^1} = 0.$$

### 3 Des méthodes numériques pour la simulation d'équations cinétiques collisionnelles

Un grand nombre d'approches différentes existent dans la littérature pour effectuer des simulations numériques de gaz collisionnels. Parmi celles-ci, les plus utilisées (et aussi les plus anciennes) sont

des méthodes particulières, sans grille, basées sur une description du gaz par un grand nombre  $N$  de particules.

Une des approches les plus populaires est celle de la *dynamique moléculaire* (couramment abrégée en *MD*). Elle consiste en la résolution des équations de la dynamique classique de Newton<sup>30</sup> pour un ensemble de particules initialisées aléatoirement en fonction d'une distribution de probabilité donnée (la donnée initiale  $f_{in}$ ). Le problème de cette méthode est qu'elle n'est valide que pour des régimes denses et donc proches d'une description hydrodynamique. Une introduction très complète à ce sujet peut être trouvée dans le livre de Haile [104]. Des comparaisons avec des données expérimentales et d'autres méthodes numériques pour le cas de collisions élastiques (apparition de chocs dans un écoulement de gaz d'argon) ont été faites par Kowalczyk, Palczewski, Russo et Walenta dans [117]. Le cas des collisions inélastiques (apparition de chocs dans un écoulement supersonique de sable) a été traité par Rericha, Bizon, Shattuck, et Swinney dans [160], et montre une adéquation avec les résultats expérimentaux qu'il n'est pas possible d'obtenir avec des simulations du modèle hydrodynamique.

L'autre technique particulière la plus utilisée est celle des *simulations Monte-Carlo directes* (abrégée en *DSMC*). Cet algorithme stochastique est valable dans des régimes denses comme raréfiés. Il consiste à effectuer les collisions seulement sur certaines particules tirées au hasard, et non plus à faire évoluer le système microscopique obtenu par la résolution des équations de la mécanique classique. Il est remarquable que l'introduction de cette méthode remonte au début de l'histoire des méthodes numériques pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, quand Metropolis et Ulam ont introduit la méthode d'intégration Monte-Carlo dans leur article fondateur [130], daté de 1949<sup>31</sup>, leur but était déjà de simuler le comportement des solutions de l'équation de Boltzmann en régime fluide. On peut ainsi lire à la page 4 de cet article :

Finally let us consider more generally the group of problems which gave rise to the development of the method to which this article is devoted. Imagine that we have a medium in which a nuclear particle is introduced, capable of producing other nuclear particles with a distribution of energy and direction of motion. Assume for simplicity that all particles are of the same nature. Their procreative powers depend, however, on their position in the medium and on their energy. The problem of the behavior of such a system is formulated by a set of integro-differential equations. Such equations are known in the kinetic theory of gases as the Boltzmann equations.

Ils effectuèrent d'ailleurs leurs premières simulations sur un modèle simplifié<sup>32</sup> seulement 4 ans plus tard [129], montrant la faisabilité de leur méthode et marquant le début des méthodes numériques pour la simulation de l'équation de Boltzmann. La méthode introduite pour ces simulations préfigurait déjà l'algorithme dit de Nanbu-Babovsky [13], le plus utilisé pour les simulations DSMC. L'autre algorithme le plus célèbre est celui de Bird, présenté avec beaucoup d'autres par exemple dans le livre de Bird [19] ou dans l'article de Pareschi et Russo [153].

Ces méthodes particulières sont très efficaces en terme de coût de calcul, car leur complexité augmente de manière linéaire avec le nombre de particules  $N$ . Néanmoins, leur précision est en

---

<sup>30</sup>Il faut noter que la méthode de la dynamique moléculaire n'est pas une méthode numérique pour simuler des équations cinétiques à proprement parler, mais plutôt une validation de celles-ci par le biais d'une description newtonienne.

<sup>31</sup>Soit 4 ans seulement après la création du calculateur *EDVAC* par Von Neumann, premier calculateur programmable binaire jamais construit et successeur de l'*ENIAC*, dédié initialement à la simulation de problèmes balistiques.

<sup>32</sup>Mais particulièrement impressionnant pour l'époque : dimension 2 en espace et vitesse et collisions de type sphères dures, pour  $N = 224$  particules !

vertu du théorème central limite seulement de l'ordre de  $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ . L'approche que nous avons suivi dans cette thèse est différente. Plutôt que d'utiliser l'aspect probabiliste (voire une formalisation microscopique) à la base des équations cinétiques, elle consiste à résoudre de manière déterministe l'équation collisionnelle sur une grille de l'espace des phases, et donc de calculer une approximation numérique des opérateurs de transport libre et de collision.

Nous voulons ainsi résoudre numériquement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}(f, f), \\ f(0, x, v) = f_{in}(x, v) \geq 0, \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Une première réduction classique pour résoudre numériquement ce type de problème est d'introduire un *découpage temporel*. Commençons par discrétiser le temps en valeurs  $t^n = n\Delta t$ , où  $\Delta t > 0$ , et notons  $f^n(x, v)$  une approximation de la fonction  $f(t^n, x, v)$ . Sur chaque intervalle de temps  $I^n := [t^n, t^{n+1}]$ , nous allons alors résoudre l'étape de *transport libre*

$$(48) \quad \begin{cases} \partial_t f^a + v \cdot \nabla_x f^a = 0, \\ f^a(0, x, v) = f^n(x, v), \end{cases}$$

puis l'étape de *collision homogène*, avec comme donnée initiale la solution de l'étape de transport (48) à l'instant  $\Delta t$

$$(49) \quad \begin{cases} \partial_t f^c = \mathcal{Q}(f^c, f^c), \\ f^c(0, x, v) = f^a(\Delta t, x, v). \end{cases}$$

En notant respectivement  $\mathcal{S}_t^a$  et  $\mathcal{S}_t^c$  les semi-groupes de solutions des problèmes de transport (48) et de collision (49), on peut écrire la solution approchée au temps  $t^{n+1}$  par

$$(50) \quad f^{n+1}(x, v) := f^c(\Delta t, x, v) = \mathcal{S}_{\Delta t}^c \mathcal{S}_{\Delta t}^a f^n(x, v).$$

Cette méthode, dite de découpage de *Lie-Trotter*, est seulement d'ordre 1 en temps, indépendamment des méthodes numériques utilisées pour le calcul des semi-groupes. Une montée en ordre est possible en combinant plusieurs pas de découpage, comme montré par Dia et Schatzmann dans [71]. On obtient par exemple un ordre 2 en temps grâce au découpage dit de *Strang* [177], donné par

$$f^{n+1}(x, v) = \mathcal{S}_{\Delta t/2}^c \mathcal{S}_{\Delta t}^a \mathcal{S}_{\Delta t/2}^c f^n(x, v).$$

La convergence de la méthode de Lie-Trotter (50) vers une solution (positive) de l'équation (4), dans le contexte des solutions renormalisées et pour un domaine d'espace  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , a été montrée par Desvillettes et Mischler dans [69] pour les opérateurs de Boltzmann et BGK.

Nous allons maintenant présenter les approches que nous avons utilisées pour le calcul numérique des semi-groupes de transport et de collision. Commençons par le cas du transport (48).



### 3.1 Méthodes volumes finis pour le problème du transport libre

Dans la suite et pour plus de généralité, nous nous intéressons à la discrétisation numérique en espace de la loi de conservation scalaire sous forme conservative

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_x (a(t, x) f) = 0, & \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ f(0, x) = f_0(x), \end{cases}$$

pour une fonction régulière  $a : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Nous appellerons *fonction de flux* la fonction  $x \mapsto a(t, x) f(t, x)$ . Plusieurs approches sont possibles pour la résolution numérique de ce type d'équations. Nous en distinguerons essentiellement trois.

- La plus classique est l'approche de type *différences finies*. Dans ce cas, les dérivées spatiales sont remplacées par des différences divisées, et les flux de l'équation sont reconstruits à l'interface des cellules. Un grand choix de méthodes de reconstruction existe (voir par exemple le livre de Tadmor [178]), mais pour les cas qui nous intéresseront par la suite, cette reconstruction est en général effectuée grâce à des méthodes dites *essentiellement non oscillantes* d'ordre élevé, comme la méthode *ENO* de Harten, Osher, Engquist et Chakravarthy [106], ou son extension *WENO* due à Liu, Osher et Chan [125]. Ces méthodes d'ordre élevé sont particulièrement adaptées à la résolution des chocs pour le cas de systèmes de lois de conservation. Une présentation synthétique de ces méthodes est faite dans le livre de Shu [171].
- Une autre méthode couramment utilisée est l'approche de type *semi-lagrangienne*. Celle-ci consiste à calculer numériquement les courbes caractéristiques associées à l'équation de transport conservative (51), afin d'éviter l'apparition de conditions de stabilité de type CFL pour la résolution numérique de cette équation. Une exemple célèbre est l'approche *positive conservant les flux* (*PFC*), développée par Filbet, Sonnendrücker et Bertrand dans [88] pour la résolution de l'équation de Vlasov non linéaire, puis appliquée par Filbet et Russo à la résolution de l'équation de Boltzmann dans [86]. Celle-ci est d'ordre 3 en espace, conserve la positivité et est moins diffusive que les schémas ENO et WENO. Par contre, le traitement des conditions aux bords du domaine peut en rendre l'implémentation délicate.
- Enfin, l'approche de type *volumes finis* consiste à intégrer l'équation sur des volumes de contrôle, et a ainsi l'avantage de pouvoir traiter des grilles non *cartésiennes*, c'est-à-dire dont les mailles ne sont pas nécessairement des rectangles, avec une grande souplesse. C'est ce cadre-là que nous allons présenter dans cette section et utiliser dans ce manuscrit.

Nous allons nous placer en dimension  $d = 1$  pour simplifier les notations. L'extension à des grilles cartésiennes (seul cas considéré dans cette thèse) sera alors immédiate, celle pour des grilles plus générale étant par exemple faite dans l'ouvrage de Eymard, Gallouet et Herbin [79]. Dans ce cas, le domaine  $\Omega = (a, b)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On définit alors une grille de  $\Omega$  (pas nécessairement uniforme) en introduisant une suite de  $N_x \in \mathbb{N}$  volumes de contrôle  $K_i := \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ , pour  $i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$ ,  $x_i := \left(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}\right) / 2$  et

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < \cdots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < \cdots < x_{N_x} < x_{N_x+\frac{1}{2}} = b.$$

La mesure de Lebesgue du volume de contrôle est alors simplement donnée par  $m(K_i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ .

Notons  $f_i = f_i(t)$  une approximation de la valeur moyenne de  $f$  sur le volume de contrôle  $K_i$ . En intégrant l'équation de transport (51) sur ce volume de contrôle (approche volumes finis classique), nous obtenons sa version discrétisée en espace, à savoir

$$\begin{cases} m(K_i) \frac{\partial f_i}{\partial t}(t) + \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+, i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket, \\ f_i(0) = \frac{1}{m(K_i)} \int_{K_i} f_0(x) dx. \end{cases}$$

Dans ce problème de Cauchy, la quantité  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$  est une approximation de la fonction de flux  $x \mapsto a(t, x) f(t, x)$  à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  entre deux cellules, appelée *flux numérique*. De nombreux choix de flux numériques sont possibles, voir par exemple la discussion effectuée dans [178]. Nous choisissons dans cette thèse d'utiliser un flux décentré amont, muni de limiteurs de pente d'ordre 2. En voilà une brève présentation : si l'on note  $A_{i+\frac{1}{2}}(t) := a(t, x_{i+\frac{1}{2}})$  la vitesse à l'interface, alors le flux décentré amont limité est donné par la formule

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = A_{i+\frac{1}{2}}^+ f_{i+\frac{1}{2},-} - A_{i+\frac{1}{2}}^- f_{i+\frac{1}{2},+}$$

où  $x^+ := \max(x, 0)$  et  $x^- := \max(-x, 0)$  représentent respectivement la partie positive et négative d'un nombre réel donné  $x$  et  $f_{i+\frac{1}{2},\pm}$  est la reconstruction (dont les pentes ont été limitées) de la fonction  $f$  à l'interface, c'est-à-dire

$$\begin{cases} f_{i+\frac{1}{2},-} = f_i + \frac{1}{2} \phi(\theta_i) (f_{i+1} - f_i), \\ f_{i+\frac{1}{2},+} = f_i - \frac{1}{2} \phi(\theta_i) (f_{i+2} - f_{i+1}). \end{cases}$$

Dans cette expression, on voit l'apparition du limiteur de pente  $\phi$ ,  $\theta_i$  étant justement la pente de la fonction  $f$  dans la cellule  $K_i$ , donnée par

$$\theta_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{f_{i+1} - f_i}.$$

Dans la suite, nous choisissons d'utiliser le limiteur de pente dit de Van Leer [186], donné par

$$\phi(\theta) := \frac{\theta + |\theta|}{1 + \theta}.$$

D'autres choix possibles, comme les limiteurs *Superbee* ou *MinMod*, sont présentés dans le livre de Leveque [121].

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étape de collision (49). Plusieurs types de méthodes numériques sont possibles pour son traitement, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Commençons par présenter les méthodes dites spectrales.

### 3.2 Méthodes spectrales pour le calcul d'opérateurs de type Boltzmann

Nous nous intéressons maintenant à la résolution de l'équation cinétique collisionnelle homogène en espace

$$(52) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{Q}(f, f), & \forall v \in \mathbb{R}^d, \\ f(0, v) = f_0(v), & \forall v \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où l'opérateur de collision quadratique  $\mathcal{Q}$  est donné sous la forme générale

$$(53) \quad \mathcal{Q}(f, f)(v) = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{B}(y, z) [f'_* f' - f_* f] dy dz, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Dans cette définition, l'ensemble d'intégration  $\mathcal{C}$ , possiblement non borné, dépend du modèle considéré, et les *collisions* s'écrivent

$$(54) \quad v' = v + \theta'(y, z), \quad v_* = v + \theta_*(y, z) \quad v'_* = v + \theta'_*(y, z)$$

pour des fonctions  $\theta'$ ,  $\theta'_*$  et  $\theta_*$  données. La fonction  $\mathcal{B}$  représente un noyau de collision général. Cet opérateur pourra par exemple être donné par l'opérateur de Boltzmann  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  ou par l'opérateur des gaz granulaires  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ . Notre objectif est de calculer numériquement  $\mathcal{Q}$ , en utilisant une méthode spectrale.

Ces méthodes ont d'abord été introduites indépendamment par Pareschi et Perthame dans [150] et par Bobylev et Rjasanow dans [29]. L'idée sous-jacente consiste à utiliser la forme faible de ces opérateurs afin de calculer leurs coefficients de Fourier dans le but de développer des méthodes numériques d'ordre élevé. Nous allons nous intéresser à la première approche. En dépit d'une très grande précision due à l'utilisation de la transformée de Fourier (comme nous allons le voir plus loin), ce type de méthode spectrale a le défaut de ne pas préserver la positivité des solutions. Néanmoins, Pareschi et Russo ont donné dans [151] une version modifiée de l'algorithme pour le cas élastique, permettant la préservation de la positivité au détriment de la précision. Nous n'utiliserons pas cette variante là.

Toute méthode numérique déterministe permettant le calcul d'un opérateur de type (53) nécessite de travailler sur un espace des vitesses *borné*, afin de permettre son implémentation sur des machines dont la quantité de mémoire est finie. Cela va poser problème pour l'étude de  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  et  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  car il est facile de montrer que l'action de ces opérateurs sur le support de la distribution  $f$  augmente sa taille. Plus précisément, si l'on se place dans le cas de l'opérateur inélastique  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  avec un coefficient de restitution constant  $e \in [0, 1]$  (ce qui inclut aussi le cas de  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$ ), on a la proposition suivante :

**Proposition 3.1** (Lemme 3.1 de [84]). *Supposons que la distribution  $f = f(v)$  vérifie*

$$\text{supp}(v \mapsto f(v)) \subset \mathcal{B}(0, R),$$

où  $\mathcal{B}(0, R)$  est la boule ouverte centrée en l'origine et de rayon  $R > 0$ . Alors,

$$\text{supp}(v \mapsto \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f)(v)) \subset \mathcal{B}(0, \sqrt{2} R).$$

*Démonstration.* Si  $'v$  et  $'v_* \in \mathcal{B}(0, R)$ , alors, les collisions étant inélastiques, on a

$$|v|^2 \leq |v|^2 + |v_*|^2 \leq |'v|^2 - |'v_*|^2 \leq 2R^2.$$

De même,

$$|v - v_*| \leq |v' - v'_*| \leq 2R.$$

Dans ce cas, d'après l'hypothèse sur le support de  $f$ , on a  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f) \neq 0$ . Enfin, si  $v'$  (resp.  $v'_*$ )  $\notin \mathcal{B}(0, R)$ , alors  $f(v') = 0$  (resp.  $f(v'_*) = 0$ ), et donc  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f) = 0$ .  $\square$

**Remarque 4.** En dimension  $d = 1$  (et donc pour le cas vraiment inélastique  $e < 1$ ), ce résultat peut en fait être amélioré. En effet, Naldi, Pareschi et Toscani ont remarqué dans ce cas dans [145] que  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  conserve la taille du support au cours du temps. Cela peut se voir de manière très simple en écrivant la représentation  $\omega$  des collisions :

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + e \frac{v - v_*}{2}, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - e \frac{v - v_*}{2}.$$

Si  $|v|, |v_*| \leq R$ , on a alors

$$|v'| \leq \frac{1+e}{2}|v| + \frac{1-e}{2}|v_*| \leq R.$$

Le modèle continu a de plus pour propriété de rendre la distribution  $f$  instantanément positive sur tout l'espace des vitesses  $\mathbb{R}^d$ . Afin de pouvoir étudier numériquement ce type de problèmes, il faut donc se placer dans un domaine fini et introduire un procédé permettant d'éviter d'avoir un support en vitesse de taille infinie, et la proposition précédente va nous y aider. Plaçons nous donc sur une *boîte*  $\mathcal{D}_V := [-V, V]^d$  finie, pour  $V > 0$ . Essentiellement, deux approches de ce problème sont possibles, chacune reposant sur une modification de la dynamique de collision microscopique.

- La première<sup>33</sup> consiste à ne pas considérer pour le calcul de  $\mathcal{Q}$  les collisions qui vont connecter des points à l'extérieur de la boîte. Cette approche est celle classiquement utilisée pour déterminer des approximations de type « vitesses finies » d'un modèle cinétique collisionnel, comme par exemple dans le travail de Buet [40]. Comme nous allons le voir dans la section 3.3, cette approche permet en général d'obtenir pour le cas élastique les conservations physiques de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. Elle permet aussi d'obtenir la décroissance de l'entropie. Néanmoins, si elle n'est pas menée correctement, cette méthode peut augmenter le nombre d'invariants collisionnels locaux, c'est-à-dire de fonctions  $\psi$  vérifiant

$$\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_* = 0.$$

De plus, cette technique revient en fait à modifier le noyau de collision de l'opérateur considéré, en y ajoutant une dépendance en les vitesses pré- et post-collisionnelles  $v, v_*, v', v'_*$ <sup>34</sup>. Cela va casser certaines propriétés de l'opérateur, comme sa structure d'opérateur de convolution, qui est nécessaire pour le développement de méthodes rapides, comme on va le voir en section 3.4.

- L'approche alternative que nous allons considérer dans la suite consiste à périodiser la fonction de distribution  $f$  sur le domaine en vitesse  $\mathcal{D}_V$ . Cela revient à rajouter des collisions « non physiques » en connectant certains points du domaine qui sont inclus géométriquement dans le cercle de collision (voir les figures 4 et 5) « modulo  $V$  » (c'est-à-dire à la translation d'un facteur  $V$  près). Il est important de noter que cet ajout de collisions peut nous faire perdre certains invariants collisionnels présents initialement dans le modèle. Enfin, nous allons alors devoir tronquer l'intégration apparaissant dans l'opérateur de collision, car sinon, le fait de périodiser la fonction de distribution nous donnerait un résultat infini.

<sup>33</sup>et la plus intuitive...

<sup>34</sup>Cette dépendance peut être interprétée comme des conditions aux bords pour le noyau.

**Une écriture générale pour les méthodes spectrales.** Cette périodisation est à la base des méthodes spectrales. Nous introduisons une troncature de l'opérateur de collision  $\mathcal{Q}$  en fixant un ensemble d'intégration borné  $\mathcal{C}_S \subset \mathcal{C}$ , tronqué en  $y$  et  $z$ , que nous allons définir par la suite. Le paramètre  $S$  sera défini par la suite, et dépend en fait du support  $\mathcal{B}(0, R)$  de la fonction de distribution à intégrer et du facteur de grossissement de l'opérateur de collision considéré ( $\sqrt{2}$  dans le cas de  $\mathcal{Q}_I$ ). L'opérateur tronqué s'écrit donc

$$(55) \quad \mathcal{Q}^S(f, f)(v) = \int_{\mathcal{C}_S} \mathcal{B}(y, z) [f'_* f' - f_* f] dy dz, \quad \forall v \in \mathcal{D}_V.$$

On déduit alors l'expression pour  $v \in \mathbb{R}^d$  par périodisation. Si l'on suppose que le noyau de collision  $\mathcal{B}$  est symétrique en sa première variable et que la transformation  $(v, v_*, \omega) \mapsto (v_*, v, -\omega)$  laisse l'opérateur tronqué  $\mathcal{Q}^S$  invariant, on peut alors introduire une formulation faible de cet opérateur (par exemple de la même manière que pour l'opérateur de Boltzmann dans la section 2.1). Elle se lit pour une fonction test  $\psi$  comme

$$(56) \quad \int_{\mathcal{D}_V} \mathcal{Q}^S(f, f)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_V \times \mathcal{C}_S} \mathcal{B}(y, z) f_* f [\psi' - \psi] dy dz dv.$$

Grâce à cette représentation faible de l'opérateur tronqué, on peut maintenant décrire la méthode spectrale associée. Supposons que l'on recherche une solution périodique de l'équation de collision (52) périodisée. Cette solution sera représentée par une somme de Fourier *tronquée*  $f_N$ , définie pour  $N \in \mathbb{N}$  fixé par

$$f_N(v) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k \psi_k(v), \quad \psi_k(v) := e^{i \frac{\pi}{V} k \cdot v}, \quad \forall v \in \mathcal{D}_V.$$

Dans cette expression, la somme est prise sur les multi-indices  $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ , c'est-à-dire

$$\sum_{k=-N}^N := \sum_{k_1, \dots, k_d = -N}^N$$

et le nombre complexe  $\widehat{f}_k$  désigne le  $k^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier de  $f$ , à savoir

$$\widehat{f}_k := \langle f, \psi_{-k} \rangle_{L^2(\mathcal{D}_V)}.$$

Le produit scalaire utilisé est donné par

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathcal{D}_V)} := \frac{1}{(2V)^d} \int_{\mathcal{D}_V} \varphi(v) \psi(v) dv.$$

Dans une méthode spectrale (parfois dite de *Fourier-Galerkin*), les inconnues sont les coefficients de Fourier de  $f$ , dépendant bien sûr du temps

$$\left( \widehat{f}_k(t) \right)_{k \in \llbracket -N, N \rrbracket^d}.$$

Ils sont obtenus pour  $k \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$  comme la solution de l'équation de collision tronquée projetée dans l'espace de Fourier

$$\frac{\partial \widehat{f}_k}{\partial t} = \left\langle \mathcal{Q}^S(f_N, f_N), \psi_{-k} \right\rangle_{L^2(\mathcal{D}_V)}.$$

Les coefficients de Fourier de l'opérateur de collision tronqué sont donnés en utilisant sa forme faible (56) par

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{Q}^S(f_N, f_N), \psi_{-k} \rangle_{L^2(\mathcal{D}_V)} &= \frac{1}{2(2V)^d} \int_{\mathcal{D}_V \times \mathcal{C}_S} \mathcal{B}(y, z) f_N(v) f_N(v_*) \\
&\quad \left( e^{-i\frac{\pi}{V}k \cdot v'} - e^{-i\frac{\pi}{V}k \cdot v} \right) dy dz dv \\
&= \frac{1}{2(2V)^d} \sum_{\substack{l, m=-N \\ l+m=-k}}^N \widehat{f}_l \widehat{f}_m \left[ \int_{\mathcal{D}_V} e^{i\frac{\pi}{V}(l+m-k) \cdot v} dv \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathcal{C}_S} \mathcal{B}(y, z) \left( e^{i\frac{\pi}{V}(m \cdot \theta_*(y, z) - k \cdot \theta'(y, z))} - e^{i\frac{\pi}{V}m \cdot \theta_*(y, z)} \right) dy dz \right] \\
(57) \quad &= \sum_{\substack{l, m=-N \\ l+m=-k}}^N \widehat{f}_l \widehat{f}_m \left( \widehat{B}(l, m) - \widehat{b}(m) \right),
\end{aligned}$$

où les coefficients  $\widehat{B}(l, m)$  et  $\widehat{b}(m)$ , appelés parfois *modes de Fourier du noyau*, sont définis pour  $l, m \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$  par

$$\begin{cases} \widehat{B}(l, m) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_S} \mathcal{B}(y, z) \exp \left( i\frac{\pi}{V} (m \cdot \theta_*(y, z) - (l+m) \cdot \theta'(y, z)) \right) dy dz, \\ \widehat{b}(m) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_S} \mathcal{B}(y, z) \exp \left( i\frac{\pi}{V} m \cdot \theta_*(y, z) \right) dy dz. \end{cases}$$

Le calcul de  $\mathcal{Q}^S(f_N, f_N)$  dans l'espace de Fourier est donc réduit à l'évaluation d'une somme, qui a la même structure que l'opérateur dans l'espace classique : différence de deux termes bilinéaires en la distribution de particules, le second ayant une structure de convolution. Cette propriété de convolution, une fois étendue au premier terme, est d'ailleurs à la base des méthodes rapides, que nous allons présenter dans la suite.

Il ne reste plus qu'à projeter l'opérateur de collision (57) défini en variables de Fourier dans l'espace  $\mathbb{P}_N$  des polynômes trigonométriques de degré au plus  $N$  dans chaque direction de l'espace des vitesses, par la projection orthogonale  $\mathcal{P}_N$  de  $L^2(\mathcal{D}_V)$  vers  $\mathbb{P}_N$ . On obtient alors l'équation spectrale associée à l'opérateur  $\mathcal{Q}$ , donnée sous forme réduite par

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \mathcal{P}_N \mathcal{Q}^S(f_N, f_N).$$

**Application aux milieux granulaires.** Nous allons maintenant appliquer cette méthode générale à l'opérateur des milieux granulaires  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  pour obtenir le schéma spectral dit *classique*, d'abord introduit par Pareschi et Russo dans [151] pour l'opérateur de Boltzmann, puis généralisé aux milieux granulaires par Filbet, Pareschi et Toscani dans [84].

Grâce au changement de variables  $(v, v_*) \rightarrow (v, u)$  où  $u = v - v_*$ , l'opérateur de collision (28) peut s'écrire, en utilisant la représentation  $\sigma$ , pour une fonction test  $\psi$  par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}} \mathcal{B}^{class}(y, z) f_* f [\psi' - \psi] dy dz dv.$$

Le domaine d'intégration est donné par  $\mathcal{C} := \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$  et les lois de collisions (54) sont

$$\theta'(u, \sigma) = -\frac{1+e}{4} (u - |u|\omega), \quad \theta_*(u, \sigma) = -u, \quad \theta'_*(u, \sigma) = -\frac{1+e}{4} (u + |u|\omega).$$

Enfin, le noyau de collision s'écrit après changement de variables

$$\mathcal{B}^{class}(u, \sigma) = B(|u|, 2(\hat{u} \cdot \sigma)^2 - 1),$$

pour  $\hat{u} := u/|u|$ . On obtient donc la forme générale (53).

On peut maintenant introduire l'espace des vitesses réduit  $\mathcal{D}_V$  et périodiser l'opérateur afin d'obtenir sa forme générale tronquée (55). On utilise pour cela la proposition 3.1 qui établit que l'opérateur  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  augmente la taille du support d'un facteur  $\sqrt{2}$ . Ainsi, si le support de la fonction  $f$  est inclus dans  $\mathcal{B}(0, R) \subset \mathcal{D}_V$  (et donc  $V \geq R$ ), il suffit que l'intégration agisse sur l'ensemble

$$\mathcal{C}_S := \mathcal{B}(0, S) \times \mathbb{S}^{d-1} \subset \mathcal{C}, \quad S \geq \sqrt{2}R$$

pour éviter les intersections entre différentes périodes de  $f$  durant une étape de collision. On pose donc  $V = S = \sqrt{2}R$  pour obtenir la forme faible de l'opérateur de collision tronqué  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}^V$  :

$$\int_{\mathcal{D}_V} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}^V(f, f)(v) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_V \times \mathcal{B}(0, V) \times \mathbb{S}^{d-1}} \mathcal{B}(u, \sigma) f_* f(\psi' - \psi) d\sigma du dv.$$

On déduit finalement l'expression des modes du noyau de la formule (57).

Un des aspects importants de l'équation spectrale, exprimé par exemple par la formule (57), est le fait que les modes du noyau ne doivent être calculés qu'une seule fois, ce qui est d'un grand intérêt pour l'implémentation en machine. De plus, dans le cas du noyau  $B(u, \sigma) = |u|$  (qui correspond en dimension 3 au cas des sphères dures), ce calcul peut être rendu explicite. Si  $d = 1$ , on obtient par exemple pour  $(l, m) \in \llbracket -N, N \rrbracket$  tels que  $l + m = k$ ,

$$\begin{cases} \hat{B}(l, m) = V^2 \left[ 2 \left( \text{sinc}(\sqrt{2}\pi s) + \text{sinc}(\sqrt{2}\pi m) \right) - \left( \text{sinc}^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}s\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}m\right) \right) \right], \\ \hat{b}(m) = V^2 \left[ 2 \text{sinc}(\sqrt{2}\pi e m) - \text{sinc}^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}e m\right) \right], \end{cases}$$

où  $s = [(1+e)l - (1-e)m]/2$ . Le cas  $d = 2$  donne

$$\begin{cases} \hat{B}(l, m) = \frac{V^3}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^2 J_0(\xi x) J_0(\eta x) dx, \\ \hat{b}(m) = \frac{V^3}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^2 J_0(\chi x) dx, \end{cases}$$

où  $\eta = |(3-e)m - (1+e)l| \pi / \sqrt{2}$ ,  $\xi = |l+m|(1+e) \pi / \sqrt{2}$ ,  $\chi = 2\sqrt{2} \pi m$  et  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0, donnée par

$$J_0(s) = \int_0^{2\pi} \cos(is \cos t) dt.$$

Ce cas nécessite donc une intégration numérique, qui peut être néanmoins rendue aussi précise que voulue, puis stockée pour une utilisation ultérieure. Enfin, le cas physiquement réaliste  $d = 3$  est donné par

$$\begin{cases} \hat{B}(l, m) = V^4 \sqrt{2} \int_0^1 x^3 \text{sinc}(\xi x) \text{sinc}(\eta x) dx, \\ \hat{b}(m) = V^4 \sqrt{2} \int_0^1 x^3 \text{sinc}(\chi x) dx, \end{cases}$$

qui peuvent cette fois être calculé analytiquement, voir par exemple [84].

Les coefficients pour le cas élastique  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  sont alors obtenus en prenant  $e = 1$  dans les formules précédentes. Néanmoins, nous allons voir dans la suite qu'une méthode beaucoup plus efficace existe pour ce cas. À ce propos, on remarque que le calcul de l'opérateur de collision en Fourier (57) requiert de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^{2d})$  multiplications. Bien que ce soit plus compétitif qu'une méthode de type « vitesses discrètes » (qui a en général un coût de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^{2d+\varepsilon})$  pour  $\varepsilon > 0$ , comme nous allons le voir dans la suite), cela reste encore prohibitif pour une implémentation en machine en dimension 3 d'espace. Cette complexité de calcul est due au terme de gain qui ne peut pas s'écrire comme une convolution discrète. Le cas échéant, nous allons voir que l'utilisation de techniques de type transformée de Fourier rapide (introduites par Cooley et Tukey dans [64]) peut faire baisser le coût du calcul à  $\mathcal{O}(N^d \log(N))$ .

**Remarque 5.** Une autre méthode spectrale, inspirée de l'approche « directe » par transformée de Fourier discrète de Bobylev et Rjasanow [29, 31, 30], a été présentée par Gamba et Tharkabhushanam dans [92, 93]. La différence avec notre méthode est que les auteurs de cet article commencent par effectuer une transformée de Fourier de l'opérateur, défini donc sur tout l'espace des vitesses  $\mathbb{R}^d$ , puis introduisent seulement après une troncation dans l'espace de Fourier. De plus, ils utilisent des multiplicateurs de Lagrange pour assurer la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

**Propriétés de la méthode spectrale.** Nous allons présenter quelques-unes des propriétés de cette méthode. Dans tout ce paragraphe, l'opérateur  $\mathcal{P}_N$  désignera la projection orthogonale de  $L^2(\mathcal{D}_V)$  vers  $\mathbb{P}_N$ .

Tout d'abord, intéressons nous aux moments. Il est classique qu'une méthode spectrale préserve exactement la masse de  $f$ . Une erreur est par contre faite lorsque l'on considère ses moments d'ordre supérieurs, celle-ci étant d'autant plus petite que le moment choisi est d'ordre élevé. Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Proposition 3.2.** Soient  $f \in L^2(\mathcal{D}_V)$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Alors on a pour  $j \in \{1, \dots, d\}$  et  $l \in \mathbb{N}_*$

$$\int_{\mathcal{D}_V} \mathcal{P}_N f(v) dv = \int_{\mathcal{D}_V} f(v) dv,$$

$$\left| \int_{\mathcal{D}_V} (\mathcal{P}_N f(v) - f(v)) v_j^l dv \right| \leq \|f\|_{L^2(\mathcal{D}_V)} \frac{C_l}{N^{l/2}}$$

où  $C_l$  est une constante positive.

*Démonstration.* La préservation de la masse est immédiate en utilisant la définition du coefficient de Fourier d'ordre 0. La propriété de convergence des moments est obtenue en combinant l'inégalité de Cauchy-Schwartz au fait que si  $k \neq (0, \dots, 0)$ , le coefficient de Fourier d'ordre  $k$  du polynôme  $v \mapsto v_j^l$  est donné par

$$\frac{1}{(2V)^d} \int_{\mathcal{D}_V} v_j^l \psi_{-k}(v) dv = i \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^d \delta_{k_m 0} \frac{(-1)^{k_j}}{(k_j)^l},$$

où  $\delta_{mn}$  désigne le symbole de Kronecker. □



Aussi, il est classique que l'approximation spectrale est consistante et régulière. Plus précisément, on a :

**Proposition 3.3.** *Soit  $f \in H_{per}^k(\mathcal{D}_V)$  pour  $k > d/2$  une fonction positive (et non nulle partout). Si le noyau de collision  $B$  est donné par (22) avec l'hypothèse de coupure angulaire (24), il existe une constante  $C$  dépendant seulement du noyau de collision et de la troncation envisagée telle que, pour tous  $p \in [0, k]$ ,*

$$\left\| \mathcal{P}_N \mathcal{Q}^S(f_N, f_N) - \mathcal{Q}^S(f_N, f_N) \right\|_{H_{per}^p} \leq C \|f\|_{L^1} \|f\|_{H_{per}^p}.$$

De plus,

$$\left\| \mathcal{P}_N \mathcal{Q}^S(f_N, f_N) - \mathcal{Q}^S(f_N, f_N) \right\|_{H_{per}^p} \leq C \|f\|_{L^1} \frac{\|f\|_{H_{per}^k}}{N^{k-p}}.$$

*Démonstration.* Cette preuve est inspirée de [82] et de [151]. La régularité de l'approximation s'obtient en combinant deux ingrédients. Le premier est une propriété de régularité de l'opérateur tronqué

$$(58) \quad \|\mathcal{Q}^S(f, f)\|_{H_{per}^p} \leq C(p, S, B) \|f\|_{L^1} \|f\|_{H_{per}^p},$$

que l'on montre par exemple par dualité, en utilisant la formulation faible de l'opérateur tronqué, la régularité de la partie cinétique  $\Phi$  du noyau de collision, l'intégrabilité de la partie angulaire  $b$  et surtout la finitude du domaine d'intégration. Sans cette dernière hypothèse, il n'est pas possible d'établir une estimation du type (58).

Le second est une estimation classique de l'erreur d'interpolation spectrale. Si  $u \in H_{per}^p(\mathcal{D}_V)$  pour  $p \geq 1$ , alors pour tout  $k \leq p$

$$(59) \quad \|\mathcal{P}_N u - u\|_{H_{per}^p} \leq \|u\|_{H_{per}^k} \frac{C(p)}{N^{k-p}},$$

que l'on montre par exemple en considérant la norme de Sobolev en variables de Fourier.

De plus, l'utilisation de (59) directement à la fonction  $\mathcal{P}_N \mathcal{Q}^S(f_N, f_N) - \mathcal{Q}^S(f_N, f_N)$  donne la consistance de l'approximation spectrale.  $\square$

Par contre, il est faux que l'approximation spectrale préserve la positivité des solutions de l'équation de Boltzmann. Néanmoins, la stabilité de l'approximation spectrale (et donc sa convergence lorsqu'on la combine à la proposition précédente) ont été établies pour le cas de l'opérateur de Boltzmann  $\mathcal{Q}_B$  seulement par Filbet et Mouhot dans [82]. Leur preuve repose sur un argument perturbatif.

Plus précisément, ils ont considéré le problème perturbé abstrait

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{Q}_B^S(f, f) + P_\varepsilon(f), & \forall v \in \mathcal{D}_V \\ f(0, v) = f_0(v), & \forall v \in \mathcal{D}_V, \end{cases}$$

où  $\mathcal{Q}_B^S$  est l'opérateur de Boltzmann élastique tronqué,  $P_\varepsilon$  est une perturbation régulière et équilibrée  $\forall \varepsilon > 0$ , c'est-à-dire qu'elle préserve la masse

$$\int_{\mathcal{D}_L} P_\varepsilon(f) dv = 0$$

et la régularité de  $f$  : il existe des constantes  $C_0, C_k$  positives telles que pour  $k \geq 0$ ,

$$\|P_\varepsilon(f)\|_{L^1} \leq C_0 \|f\|_{L^1} \|f\|_{L^1}, \quad \|P_\varepsilon(f)\|_{H_{per}^k} \leq C_0 \|f\|_{L^1} \|f\|_{H_{per}^k}.$$

Ils ont alors montré sous ces hypothèses la convergence des solutions de l'équation (60) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 vers les solutions de l'équation tronquée (52) sans perturbation. Ils ont aussi montré que ce modèle préservait « essentiellement » la positivité des solutions, à savoir que la partie négative des solutions est uniformément bornée (en temps) par une constante tendant vers 0 avec  $\varepsilon$ . Une propriété particulière de ce modèle tronquée, due à la perte d'une partie des invariants collisionnels, est que les équilibre des équations perturbées et non perturbées sont donnés par les fonctions constantes sur la période  $\mathcal{D}_V$  et non des distributions maxwelliennes.

La convergence de la méthode spectrale est alors obtenue en appliquant ce théorème à la perturbation  $P_N := \mathcal{P}_N \mathcal{Q}_B^S(f_N, f_N) - \mathcal{Q}_B^S(f_N, f_N)$ . Par contre, l'extension de ce résultat au cas inélastique reste encore ouverte, en grande partie à cause de l'absence d'inégalité de type entropie–production d'entropie et d'équilibre non trivial pour ce modèle.

Nous allons maintenant présenter une classe de modèles introduits pour reproduire le comportement de l'équation de Boltzmann élastique sur une grille discrète en vitesse.

### 3.3 Modèles de type « vitesses discrètes »

Plutôt que de considérer l'équation de Boltzmann complète pour une distribution de particule  $f(v)$  continue en la variable de vitesse  $v \in \mathbb{R}^d$ , un grand nombre de modèles dépendent d'un espace de vitesses discret. Le plus simple fut introduit par Carleman dans [44] et ne comporte que deux vitesses. Il décrit l'évolution de la distribution des vitesses d'un gaz unidimensionnel, composé de deux sortes de particules, une se déplaçant vers la gauche avec une densité  $f_-$ , l'autre se déplaçant vers la droite avec une densité  $f_+$ . Ces particules peuvent changer spontanément de direction avec une probabilité  $\gamma < 1/2$ , et la collision  $-+ \rightarrow ++$  peut arriver avec une probabilité  $1 - 2\gamma$ . Ce modèle s'écrit par exemple

$$\begin{cases} \frac{\partial f_-}{\partial t} + \frac{\partial f_-}{\partial x} = -\gamma f_- + \gamma f_+ + (1 - 2\gamma)f_- f_+, \\ \frac{\partial f_+}{\partial t} - \frac{\partial f_+}{\partial x} = \gamma f_- - \gamma f_+ - (1 - 2\gamma)f_- f_+. \end{cases}$$

L'asymétrie du processus de collision est à l'origine de l'irréversibilité de l'équation.

Un autre modèle célèbre est celui de Broadwell [39], qui décrit encore une fois l'évolution d'un gaz unidimensionnel, mais dans lequel les particules peuvent aussi être immobiles. De plus, elles ne peuvent changer de vitesse que par collision. Ce modèle peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial f_-}{\partial t} + \frac{\partial f_-}{\partial x} = f_0^2 - f_- f_+, \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{2} (f_- f_+ - f_0^2), \\ \frac{\partial f_+}{\partial t} - \frac{\partial f_+}{\partial x} = f_0^2 - f_- f_+. \end{cases}$$

Ce modèle dissipe globalement l'entropie discrète  $\mathcal{H}(f) := f_+ \log f_+ + 2f_0 \log f_0 + f_- \log f_-$ .

**Un modèle de type « vitesses discrètes » général.** Plus généralement, étant donné un ensemble dénombrable de vitesses  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{R}^d$ , on définit un modèle cinétique de type « vitesses discrètes » en supposant que la distribution de particules  $f = f(t, x, v)$ , solution de l'équation collisionnelle (4), se concentre sur la grille, c'est-à-dire

$$f(t, x, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f_j(t, x) \delta_{v-v_j}$$

où  $f_j(t, x)$  désigne la densité de particules allant à la vitesse  $v_j$  au point  $x \in \Omega$  à l'instant  $t \geq 0$  et  $\delta$  la masse de Dirac en 0 dans l'espace des vitesses. La suite de distribution  $f := (f_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$  est alors solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial f_j}{\partial t} + v_j \cdot \nabla_x f_j = \mathcal{Q}_j(f, f), & \forall j \in \mathbb{Z}^d, \\ f_j(0, x) = f_j(x). \end{cases}$$

Dans cette expression, la suite d'opérateurs  $\mathcal{Q}_D := (\mathcal{Q}_j)_j$  désigne l'*opérateur de collision discret*. Nous allons nous intéresser à des modèles décrivant un processus de collision élastique. Une introduction complète au sujet peut être trouvée dans les notes de cours [41] de Cabanes, Gatignol et Luo et dans l'article de revue de Płatkowski et Illner [157].

Afin d'être cohérent avec le modèle continu, l'opérateur discret doit reproduire les propriétés macroscopiques de l'opérateur de Boltzmann  $\mathcal{Q}_B$ , à savoir les conservations de la masse  $\rho$ , de la quantité de mouvement  $\rho \mathbf{u}$  et de l'énergie cinétique  $E$ . Ces quantités sont définies en fonction de la distribution de particules de la manière évidente

$$(\rho, \rho \mathbf{u}, E) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f_j \left( 1, v_j, \frac{|v_j|^2}{2} \right).$$

Une manière simple d'imposer leur conservation est d'écrire l'opérateur de collision discret de la manière suivante :

$$(61) \quad \mathcal{Q}_j(f, f) = \sum_{k, k', j' \in \mathbb{Z}^d} \Gamma_{j, k}^{j', k'} [f_{j'} f_{k'} - f_j f_k], \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d,$$

où la suite de coefficients  $(\Gamma_{j, k}^{j', k'})_{j, k, j', k'} \geq 0$  est le *noyau de collision discret*, exprimant la probabilité que la collision entre deux particules de vitesse  $v_j$  et  $v_k$  donne des particules de vitesse  $v_{j'}$  et  $v_{k'}$ . Il est nécessaire d'imposer plusieurs propriétés au noyau de collision. La première concerne la microréversibilité du modèle, comme dans le cas continu. Elle peut s'obtenir en imposant les symétries suivantes :

$$\Gamma_{j, k}^{j', k'} = \Gamma_{k, j}^{j', k'} = \Gamma_{j, k}^{k', j'} = \Gamma_{j', k'}^{j, k}.$$

Une telle écriture assure alors immédiatement la conservation de la masse, car on obtient par un simple changement d'indice que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{Q}_j(f, f) = 0.$$

La seconde concerne les invariants de collisions. On veut que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique soient conservées au niveau microscopique, et il faut donc que

$$|v_{j'}| + |v_{k'}| = |v_j| + |v_k|, \quad |v_{j'}|^2 + |v_{k'}|^2 = |v_j|^2 + |v_k|^2.$$

Une manière simple d'imposer cette propriété est alors de supposer que le noyau de collision vérifie l'égalité  $\Gamma_{j,k}^{j',k'} = 0$  si et seulement si l'une des relations suivantes

$$j' + k' = j + k, \quad |j'|^2 + |k'|^2 = |j|^2 + |k|^2$$

n'est pas vérifiée. On pose donc très simplement

$$(62) \quad \Gamma_{j,k}^{j',k'} = \mathbf{1}(j' + k' - j - k) \mathbf{1}(|j'|^2 + |k'|^2 - |j|^2 - |k|^2) w_{j,k}^{j',k'}.$$

où  $\mathbf{1}$  désigne la fonction indicatrice de 0 sur  $\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{1}(z) = 1$  si  $z = 0$  et  $\mathbf{1}(z) = 0$  sinon et les coefficients  $(w_{j,k}^{j',k'})_{j,k,j',k'}$  caractérisent le modèle choisi.

Nous pouvons alors écrire la forme faible de l'opérateur de collision discret (61), comme dans le cas continu : pour une suite  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ , on a

$$(63) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{Q}_j(f, f) \psi_j = \sum_{j,k,j',k' \in \mathbb{Z}^d} w_{j,k}^{j',k'} f_j f_k [\psi_{j'} + \psi_{k'} - \psi_j - \psi_k].$$

Cela nous permet d'obtenir très naturellement les conservations de l'opérateur, données comme dans le cas continu par les solutions  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$  de l'équation

$$\psi_{j'} + \psi_{k'} - \psi_j - \psi_k = 0.$$

La forme faible (63) nous donne aussi, exactement comme dans le cas continu, la décroissance globale de l'entropie

$$\mathcal{H}(f) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f_j \log f_j.$$

Enfin, l'utilisation de la relation (62) donnant les conservations microscopiques permet aussi de simplifier la forme forte de l'opérateur de collision (exactement comme dans le cas continu), à savoir

$$(64) \quad \mathcal{Q}_j(f, f) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^d} [f_{j+k} f_{j+l} - f_j f_{j+k+l}] w_{j,j+k+l}^{j+k,j+l} \mathbf{1}(k \cdot l) \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d.$$

### 3.4 Méthodes rapides

Nous allons maintenant introduire une méthode générale permettant de développer des méthodes numériques déterministes rapides, c'est-à-dire des algorithmes avec un coût inférieur à  $\mathcal{O}(N^{2d+\epsilon})$  (où  $\epsilon = 1$  pour les méthodes de type « vitesses discrètes » et  $\epsilon = 0$  pour les méthodes classiques) pour calculer l'opérateur de Boltzmann. Nous aurons donc pour la suite  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  uniquement. Nous allons voir que l'approche considérée permet d'introduire des méthodes spectrales rapides, comme dans les travaux de Filbet, Mouhot et Pareschi [142, 141, 83], mais aussi des méthodes de type « vitesses discrètes » rapides, objets du chapitre 4 de cette thèse.

L'idée de base repose sur une représentation particulière de l'opérateur de collision, proche de la représentation introduite par Carleman<sup>35</sup> dans [43]. Elle est aussi à la base de la méthode spectrale développée par Bobylev, Rjasanow et Ibragimov dans la série d'articles [29, 30, 31, 112]. On l'obtient par exemple en utilisant l'identité

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(|u|\sigma - u) d\sigma = \frac{1}{|u|^{d-2}} \int_{\mathbb{R}^d} \delta(2x \cdot u + |x|^2) F(x) dx.$$

<sup>35</sup>Par la suite, nous la désignerons d'ailleurs comme la *représentation de Carleman*

et le changement de variables

$$x = \frac{1}{2}r\sigma, \quad y = v_* - v - x$$

dans la représentation  $\sigma$  de l'opérateur de Boltzmann (13). La représentation de Carleman est alors donnée par

$$(65) \quad \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathcal{B}^{fast}(x, y) \delta(x \cdot y) [f(v+y) f(v+x) - f(v+x+y) f(v)] dx dy,$$

où le nouveau noyau de collision  $\mathcal{B}^{fast}$  est donné par

$$\mathcal{B}^{fast}(x, y) = 2^{d-1} B \left( \frac{|x|}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}}, \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \right) (|x|^2 + |y|^2)^{-\frac{d-2}{2}}.$$

On va voir que cette écriture possède certaines propriétés de découplage permettant l'écriture de méthodes rapides.

**La méthode spectrale rapide.** On a donc écrit l'opérateur de collision sous la forme générale (53) : le domaine d'intégration est alors donné par  $\mathcal{C} := \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , les lois de collisions génériques (54) sont

$$\theta'(x, y) = x, \quad \theta_*(x, y) = x + y, \quad \theta'_*(x, y) = y,$$

et le noyau de collision s'écrit

$$\mathcal{B}(x, y) := \mathcal{B}^{fast}(x, y) \delta(x \cdot y).$$

On peut alors introduire l'espace des vitesses réduit  $\mathcal{D}_V$  et tronquer l'opérateur afin d'obtenir sa forme (55). On utilise de nouveau la proposition 3.1 qui établit que l'opérateur  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  augmente la taille du support d'un facteur  $\sqrt{2}$  pour écrire le domaine d'intégration tronqué

$$\mathcal{C}_V := \mathcal{B}(0, V) \times \mathcal{B}(0, V) \subset \mathcal{C},$$

où  $V = S = \sqrt{2}R$  et  $R$  désigne le rayon du support de la distribution  $f$ , périodisée sur l'espace des vitesses  $\mathbb{R}^d$ .

Calculons maintenant ses modes de Fourier  $\widehat{B}^{fast}(l, m)$  et  $\widehat{b}^{fast}(m)$  pour  $l, m \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$ . Remarquons que, dans le cas élastique, on a  $\widehat{b}^{fast}(m) = \widehat{B}^{fast}(m, m)$  et

$$\widehat{B}^{fast}(l, m) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_V} \mathcal{B}^{fast}(x, y) \exp\left(i \frac{\pi}{V} (l \cdot x + m \cdot y)\right) dx dy.$$

La recherche d'un algorithme déterministe rapide pour le calcul de l'opérateur de collision consiste essentiellement en l'identification d'une structure de convolution dans l'expression de ces modes de Fourier, comme remarqué par exemple dans [154]. On veut donc approcher le mode  $\widehat{B}^{fast}(l, m)$  par la somme de convolution discrète

$$\widehat{B}^{fast}(l, m) = \sum_{p=1}^A \alpha_p(l) \alpha'_p(m).$$

L'insertion de cette expression dans la décomposition de Fourier de l'opérateur fera alors apparaître  $A$  convolutions discrètes, qui pourront être calculées par un algorithme de transformée de Fourier rapide en  $\mathcal{O}(A N^d \log_2 N)$  opérations. Pour aboutir à une telle décomposition des modes du noyau,

nous allons calculer une approximation de l'intégration sphérique intervenant dans l'opérateur de collision sur un nombre fini de directions.

Pour cela, commençons par réécrire la représentation de Carleman (65) en coordonnées sphériques, en utilisant la définition du noyau de collision  $\mathcal{B}^{fast}$

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}^V(f, f)(v) = 2^{d-3} \int_{e \in \mathbb{S}^{d-1}} \int_{e' \in \mathbb{S}^{d-1}} \delta(e \cdot e') \left[ \int_{-V}^V \int_{-V}^V \rho^{d-2} (\rho')^{d-2} B(\rho, \rho') [f(v + \rho' e') f(v + \rho e) - f(v + \rho' e' + \rho e) f(v)] d\rho d\rho' \right] de de'$$

On fait alors l'hypothèse de découplage suivante concernant le noyau de collision  $B$  :

$$B(y, z) = a(|y|) b(|z|), \quad \forall y, z.$$

Cette hypothèse est par exemple satisfaite si  $B$  est constant (et alors  $a = b = 1$ ), ce qui est le cas des molécules maxwelliennes en dimension  $d = 2$  et des sphères dures en dimension  $d = 3$ , avec une section efficace angulaire constante. Présentons le calcul des modes du noyau dans ce dernier cas.

Si on passe en coordonnées sphériques dans l'expression des modes du noyau, on trouve

$$\begin{aligned} \widehat{B}^{fast}(l, m) &= \frac{1}{4} \int_{e \in \mathbb{S}^2} \int_{e' \in \mathbb{S}^2} \delta(e \cdot e') \left[ \int_{-V}^V |\rho| e^{i \frac{\pi}{V} \rho(l \cdot e)} d\rho \right] \left[ \int_{-V}^V |\rho'| e^{i \frac{\pi}{V} \rho'(m \cdot e')} d\rho' \right] de de' \\ &= \frac{1}{4} \int_{e \in \mathbb{S}^2} \phi_V^3(l \cdot e) \left[ \int_{e' \in \mathbb{S}^2 \cap e^\perp} \phi_V^3(m \cdot e') de' \right] de, \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} \phi_V^3(s) &= \int_{-V}^V |\rho| e^{i \frac{\pi}{V} \rho s} d\rho, \\ &= V^2 \left( 2 \operatorname{sinc}(Vs) - \operatorname{sinc}^2(Vs/2) \right). \end{aligned}$$

On obtient donc l'expression

$$\widehat{B}^{fast}(l, m) = \int_{e \in \mathbb{S}_+^2} \phi_V^3(l \cdot e) \psi_V^3(\Pi_{e^\perp}(m)) de,$$

où  $\mathbb{S}_+^2$  désigne la demi-sphère unité,  $\Pi_P$  est la projection orthogonale sur le plan  $P$  et

$$\psi_V^3(s) = \int_0^\pi \phi_V^3(s \cos \theta) d\theta.$$

Enfin on introduit une approximation de la sphère unité pour calculer toutes ces quantités. On remarque que la fonction  $e \mapsto \phi_V^3(l \cdot e) \psi_V^3(\Pi_{e^\perp}(m))$  est périodique sur la demi-sphère unité  $\mathbb{S}_+^2$ . En prenant la paramétrisation sphérique  $(\theta, \varphi)$  de  $e \in \mathbb{S}_+^2$  et une grille uniforme de respectivement  $M_1$  et  $M_2$  cellules en  $\theta$  et  $\varphi$ , on obtient en utilisant la formule des rectangles<sup>36</sup>

$$\widehat{B}^{fast}(l, m) \simeq \frac{\pi^2}{M_1 M_2} \sum_{p, q=0}^{M_1, M_2} \alpha_{p, q}(m) \alpha'_{p, q}(l)$$

<sup>36</sup>Qui est de précision spectrale dans ce cas, voir [142].

où on a noté

$$\alpha_{p,q}(l) = \phi_V^3(l \cdot e_{\theta_p, \varphi_q}), \quad \alpha'_{p,q}(m) = \psi_V^3 \left( \Pi_{e_{\theta_p, \varphi_q}^\perp}(m) \right)$$

pour  $(\theta_p, \varphi_q) = (p\pi/M_1, q\pi/M_2)$ . Le coût final de l'algorithme est alors de  $\mathcal{O}(M_1 M_2 N^3 \log N)$ , pour des paramètres  $M_1$  et  $M_2$  éventuellement petits en raison de la précision de l'approche envisagée. Il est notable que l'erreur faite sur les lois de conservation par cette méthode spectrale rapide, malgré les approximations effectuées, est sensiblement la même que pour la méthode spectrale classique.

**Méthodes rapides de type « vitesses discrètes ».** Nous allons maintenant montrer que les mêmes idées permettent de développer une large classe de méthodes rapides permettant de calculer des modèles de type « vitesses discrètes ». Une approche spectrale est aussi à la base de ces méthodes.

Comme dans le cas de la méthode spectrale, tout repose sur un calcul de l'opérateur de collision discret sur un domaine borné en vitesse. Fixons pour cela un paramètre  $N \in \mathbb{N}^*$ . Il existe cette fois encore deux possibilités pour cette opération, analogues à leurs contreparties continues.

- La première consiste à forcer les indices (correspondant donc à des vitesses) apparaissant dans l'opérateur de collision discret (64) à rester dans la boîte discrète  $\llbracket -N, N \rrbracket^d$ , ce qui revient à écrire

$$\mathcal{Q}_j^{tr}(f, f) := \sum_{\substack{k, l \\ -N \leq j+k, j+l, j+k+l \leq N}} [f_{j+k} f_{j+l} - f_j f_{j+k+l}] w_{j, j+k+l}^{j+k, j+l} \mathbf{1}(k \cdot l), \quad \forall j \in \llbracket -N, N \rrbracket^d.$$

Ce nouvel opérateur est alors conservatif, mais comme dans le cas continu, son noyau de collision discret n'est plus invariant par rapport à la variable  $j$ . Les propriétés de convolution de l'opérateur sont alors cassées, empêchant l'écriture d'un algorithme rapide.

- L'autre possibilité consiste une nouvelle fois à périodiser la distribution de particules  $(f_j)$  sur la boîte et de tronquer la somme en  $k$  et  $l$  pour éviter les intersections de périodes. Cela amène l'introduction d'un nouveau paramètre numérique  $0 \leq \tilde{N} \leq N$  (dépendant de  $N$ ) et l'écriture de l'opérateur discret périodisé

$$(66) \quad \mathcal{Q}_j^{\tilde{N}}(f, f) := \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} [f_{j+k} f_{j+l} - f_j f_{j+k+l}] w_{j, j+k+l}^{j+k, j+l} \mathbf{1}(k \cdot l), \quad \forall j \in \llbracket -N, N \rrbracket^d.$$

Dans la suite, nous allons utiliser la version périodisée (66) de l'opérateur de collision discret. Il est intéressant ici de noter la première différence avec l'algorithme spectral : cet opérateur conserve la masse, mais aussi la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. Cela est dû au fait que la troncature a été faite dans l'espace des vitesses, et non pas dans l'espace de Fourier. Son expression très simple permet aussi de montrer l'existence de solutions globales au modèle périodisé homogènes en espace :

**Proposition 3.4** (Mouhot, Pareschi et TR). *Supposons que le noyau de collision discret  $(w_{i,j}^{k,l})$  est positif. Fixons des paramètres numériques  $\tilde{N} \leq N \in \mathbb{N}^*$  ainsi qu'une donnée initiale  $f_j(0) \geq 0$ ,  $j \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$ . Alors le système d'équations d'évolution*

$$\partial_t f_j = \mathcal{Q}_j^{\tilde{N}}(f, f), \quad \forall j \in \llbracket -N, N \rrbracket^d,$$

*est bien posé dans  $\mathbb{R}^{\llbracket -N, N \rrbracket^d}$ , globalement en temps. De plus, les coefficients  $f_j(t)$  sont positifs pour tout temps et la masse est préservée :*

$$\sum_{j \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} f_j(t) = \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} f_i(0), \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, on peut adapter un résultat de consistance démontré par Panferov et Heinz dans [149] (Théorème 3) pour le cas d'un noyau de collision de type sphères dures en dimension 3 (obtenu par quadrature), montrant qu'une telle périodisation fournit une approximation de l'opérateur de Boltzmann  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$ , avec un ordre de convergence  $r < 1$  (au moins) dépendant de la régularité de la donnée initiale. Cette méthode est donc peu précise, mais compense ce défaut par de bonnes propriétés de conservation des quantités macroscopiques.

Présentons maintenant la méthode rapide proprement dite. Elle repose sur une réécriture *pseudo-spectrale* de l'équation de collision discrète périodisée

$$\partial_t f_j = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} [f_{j+k} f_{j+l} - f_j f_{j+k+l}] w_{j, j+k+l}^{j+k, j+l} \mathbf{1}(k \cdot l), \quad \forall j \in \llbracket -N, N \rrbracket^d.$$

Réécrivons ce système en utilisant la transformée de Fourier discrète du vecteur  $(f_j)_{-N \leq j \leq N}$ . Cette involution s'écrit

$$\tilde{f}_J = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N f_j e_{-J}(j), \quad f_j = \sum_{J=-N}^N \tilde{f}_J e_J(j)$$

où  $e_K(k)$  désigne le nombre complexe  $e^{\frac{2i\pi K \cdot k}{2N+1}}$ . Ainsi, l'équation collisionnelle discrète se réécrit

$$\partial_t \tilde{f}_J = \sum_{K, L=-N}^N \left( \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N e_{K+L-J}(j) \right) \left[ \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} (e_K(k) e_L(l) - e_L(k+l)) w_{j, j+k+l}^{j+k, j+l} \mathbf{1}(k \cdot l) \right] \tilde{f}_K \tilde{f}_L$$

pour tout  $J \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$ . Or, on sait que

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N e_{K+L-J}(j) = \mathbf{1}(K+L-J).$$

Finalement, le système d'évolution discret s'écrit en variables de Fourier

$$(67) \quad \partial_t \tilde{f}_J = \sum_{\substack{K, L=-N \\ K+L=J}}^N \tilde{\beta}(K, L) \tilde{f}_K \tilde{f}_L, \quad \forall J \in \llbracket -N, N \rrbracket^d,$$

où les modes de Fourier de l'opérateur discret sont donnés par

$$\tilde{\beta}(K, L) = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} [e_K(k) e_L(l) - e_L(k+l)] w_{j, j+k+l}^{j+k, j+l} \mathbf{1}(k \cdot l) = \beta(K, L) - \beta(L, L)$$

avec

$$\beta(K, L) = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} e_K(k) e_L(l) w_{j, j+k+l}^{j+k, j+l} \mathbf{1}(k \cdot l).$$

Cette nouvelle formulation permet donc de réduire le coût de calcul de la méthode de  $\mathcal{O}(N^{2d+\varepsilon})$  à exactement  $\mathcal{O}(N^{2d})$  (comme la méthode spectrale classique), et ce sans approximation. L'implémentation en machine peut s'effectuer aisément grâce à l'utilisation de la transformée de Fourier rapide.



La méthode rapide s'établit alors comme dans le cas spectral en découplant les modes de Fourier du noyau :

$$\beta_{K,L} \simeq \sum_{p=1}^M \alpha_p(K) \alpha'_p(L),$$

puis en calculant le système (67) avec des algorithmes de convolution rapide. Pour cela, supposons (encore) que le noyau de collision discret s'écrive sous la forme découplée

$$w_{j,j+k+l}^{j+k,j+l} = a(k) b(l).$$

C'est par exemple le cas pour la méthode construite par quadrature de la représentation de Carleman dans [149]. En effet, on a alors en dimension  $d = 3$  pour le cas des sphères dures

$$a(k) = h^5 \frac{|k|}{\text{pgcd}(k_1, k_2, k_3)} \text{ et } b(l) = 1, \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}^3.$$

Celui des molécules maxwelliennes en dimension  $d = 2$  est analogue, à savoir

$$a(k) = h^3 \frac{|k|}{\text{pgcd}(k_1, k_2)} \text{ et } b(l) = 1, \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}^2.$$

On peut alors introduire un nouveau paramètre de troncature  $\bar{N} \leq \tilde{N}$ . Grâce à la décomposition du noyau de collision discret, on obtient alors l'expression des modes rapides  $\beta^{\bar{N}}(K, L)$ , à savoir

$$\begin{aligned} \beta(K, L) &= \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \mathbf{1}(k \cdot l) a(|k|) b(|l|) e_K(k) e_L(l) \\ &\simeq \beta^{\bar{N}}(K, L) = \sum_{e \in \mathcal{A}_{\bar{N}}^{d-1}} \left[ \sum_{\substack{k \in e\mathbb{Z} \\ -\bar{N} \leq k \leq \bar{N}}} a(|k|) e_K(k) \right] \left[ \sum_{\substack{l \in e^\perp \\ -\bar{N} \leq l \leq \bar{N}}} b(|l|) e_L(l) \right] \end{aligned}$$

avec égalité si  $\bar{N} = \tilde{N}$ . Dans cette expression,  $\mathcal{A}_{\bar{N}}^{d-1}$  désigne l'ensemble des représentants des directions des droites passant par 0 dans  $[-\bar{N}, \bar{N}]^d$ . Si l'on indexe cet ensemble, qui a un cardinal  $A_{\bar{N}}^{d-1}$ , on trouve alors

$$\beta^{\bar{N}}(K, L) = \sum_{p=1}^{A_{\bar{N}}^{d-1}} \alpha_p(K) \alpha'_p(L)$$

où on a noté

$$\alpha_p(K) = \sum_{\substack{k \in e_p \mathbb{Z} \\ -\bar{N} \leq k \leq \bar{N}}} a(|k|) e_K(k), \quad \alpha'_p(L) = \sum_{\substack{l \in e_p^\perp \\ -\bar{N} \leq l \leq \bar{N}}} b(|l|) e_L(l).$$

Finalement, après inversion de la transformée de Fourier discrète, on obtient un opérateur de collision discret qui se calcule en  $\mathcal{O}(A_{\bar{N}}^{d-1} N^d \log N)$  opérations. Nous avons calculé dans le chapitre 4 le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{A}_{\bar{N}}^{d-1}$ , et montré en utilisant des suites de Farey qu'il est de l'ordre de  $\bar{N}^d$ . Ainsi, on obtient finalement une complexité de l'ordre de  $\mathcal{O}(\bar{N}^d N^d \log N)$ , ce qui est un peu moins bon que la méthode spectrale rapide (qui se comporte elle en  $\mathcal{O}(M^{d-1} N^d \log N)$  pour  $M \leq N$ ). En particulier, dans le cas  $\bar{N} = N$  où aucune approximation n'est faite, la complexité de la méthode est un peu plus mauvaise que celle d'une méthode spectrale classique, mais les quantités macroscopiques sont par contre correctement conservées. De plus, nous avons montré numériquement que le coefficient  $\bar{N}$  peut être pris très petit, sans perte notable de précision ( $\bar{N} = 7$  suffit pour la majorité des applications).

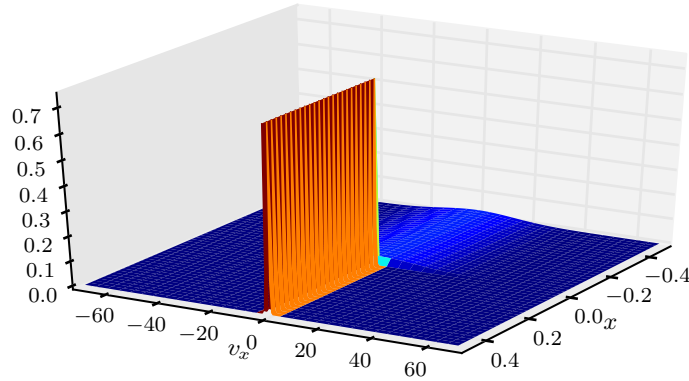


FIGURE 6 – Exemple de support pour le problème du tube de choc.

### 3.5 Méthodes de changement d'échelle

Maintenant que nous avons introduit une large classe d'algorithmes permettant l'approximation numérique déterministe, consistante et rapide d'équations cinétiques collisionnelles, nous allons présenter la méthode faisant l'objet du chapitre 3 permettant d'éviter certaines difficultés numériques qui sont souvent rencontrées dans ces problèmes.

Ces difficultés sont liées au support en vitesse de la fonction de distribution, et sont indépendantes de la méthode numérique utilisée<sup>37</sup>. Prenons l'exemple simple du problème du *tube de choc* : on suppose que dans un tube unidimensionnel infini se trouve un gaz présentant deux températures  $T_1$  et  $T_2$  très différentes (mettons  $T_2/T_1 = 1000$ ) selon que l'on se trouve à gauche ou à droite de l'origine. Si l'on suppose ce gaz à l'équilibre thermodynamique de chaque côté de l'origine, sa distribution  $f$  dans le tube est donnée par

$$f(x, v) = \begin{cases} \mathcal{M}_{1,0,T_1}(v) & \text{si } x < 0, \\ \mathcal{M}_{1,0,T_2}(v) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Son support va donc être très petit à gauche de l'origine, et très grand à droite, comme représenté dans la figure 6. Il faudrait donc pouvoir utiliser une méthode numérique capable de travailler sur des grilles de taille très différente en fonction de l'espace, ce qui peut très vite se révéler compliqué<sup>38</sup> et instable pour des approches déterministes.

Un autre type de problème, dynamique cette fois, peut être rencontré lors de l'étude numérique de l'équation des milieux granulaires. En effet, on a vu que les solutions de cette équation convergent vers une masse de Dirac en temps long, leur support se réduisant donc à un point. La précision de la méthode utilisée étant directement liée au nombre de points décrivant la distribution, on comprend donc bien qu'il faudrait dès le départ prendre un très grand nombre de points pour pouvoir décrire de manière précise la masse de Dirac. De plus, même avec une grille très fine, l'utilisation de la méthode spectrale pour la résolution de cette équation va faire apparaître des oscillations (phénomène de Gibbs) en raison de la troncature de la transformée de Fourier de la masse de Dirac.

Nous proposons donc une méthode pour éviter ces problèmes de supports, basée sur un simple changement de variables permettant de se ramener à étudier une nouvelle distribution de particules

<sup>37</sup>Cela dit, nous avons vu pour le cas des méthodes spectrales qu'il faut être très soigneux dans la gestion de ce support pour le calcul de l'opérateur de collision.

<sup>38</sup>En terme d'implémentation en machine.

dont la température est proche de 1 (et donc de « petit » support) en tout point de l'espace physique. C'est une extension à des modèles non homogènes en espace de la méthode introduite par Filbet et Russo dans [87], qui utilisait l'énergie cinétique comme nouvelle échelle. Cette approche est d'ailleurs très similaire de celle utilisée pour les milieux granulaires pour introduire l'équation autosimilaire (40). Pour une fonction positive donnée  $\omega$ , on introduit donc une nouvelle distribution  $g(t, x, \xi)$  vérifiant

$$(68) \quad f(t, x, v) = \frac{1}{\omega(t, x)^d} g\left(t, x, \frac{v}{\omega(t, x)}\right).$$

On suppose que pour tout  $t \geq 0$  et  $x \in \Omega$ , la quantité  $\omega(t, x)$  nous donne une mesure précise du « support » de la fonction  $f(t, x, \cdot)$ <sup>39</sup>. Ainsi, la distribution  $g$  devrait par construction « suivre » la concentration ou l'écartement de la distribution  $f$

Supposons maintenant que  $f$  soit solution de l'équation cinétique collisionnelle générale adimensionnée (4). Alors, il est facile de voir que la distribution  $g$  donnée par (68) est solution de l'équation cinétique suivante :

$$(69) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\omega \xi g) - \operatorname{div}_\xi \left[ \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \xi + \xi \otimes \xi \nabla_x \omega \right) g \right] = \frac{\omega^d}{\varepsilon} \tilde{\mathcal{Q}}(g, g).$$

Il faut donc maintenant se donner une définition précise de  $\omega$ , permettant une implémentation aisée sur machine pour pouvoir résoudre l'équation (69). Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, la température (ou du moins sa version décentrée) nous donne une bonne information sur la taille du support de  $f$ . La première idée est donc de prendre comme dans [87] une nouvelle échelle dépendant directement des moments de  $f$  :

$$\omega := \sqrt{\frac{2E(f)}{d\rho(f)}}.$$

Ainsi, la fonction  $\omega$  est déduite de la distribution  $g$ , via un changement de variable dans l'expression des moments. Ces deux quantités sont donc couplées, ce qui va être la cause d'instabilités numériques. En effet, en utilisant la définition de  $\omega$  dans l'expression de la densité et de l'énergie cinétique locales, on trouve qu'un tel choix va induire la contrainte

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, \xi) d\xi = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, \xi) |\xi|^2 d\xi, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega,$$

qu'il sera très dur de satisfaire numériquement en tous points de la grille.

Nous proposons donc pour éviter cette contrainte très forte d'utiliser la connaissance de la limite hydrodynamique  $\varepsilon \rightarrow 0$  de l'équation cinétique, donnant l'évolution des quantités limites  $\rho, \rho \mathbf{u}, E$  et donc à choisir

$$\omega := \sqrt{\frac{2E}{d\rho}}.$$

Ces quantités sont données par exemple par le système (21) dans le cas  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_B$  ou par le système (39) dans le cas  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_T$ . Le principal avantage est alors que l'équation (ou plutôt le système) donnant l'évolution de la fonction de mise à l'échelle  $\omega$  est *découplée* de l'équation cinétique donnant l'évolution de  $f$ . Les instabilités numériques seront alors évitées.

Cette nouvelle approche par changement de variables permet par exemple de compenser la concentration lors de l'étude numérique de l'équation des gaz granulaires. Elle nous a permis de

<sup>39</sup>Ou en tout cas de l'échelle typique en vitesse du problème considéré.

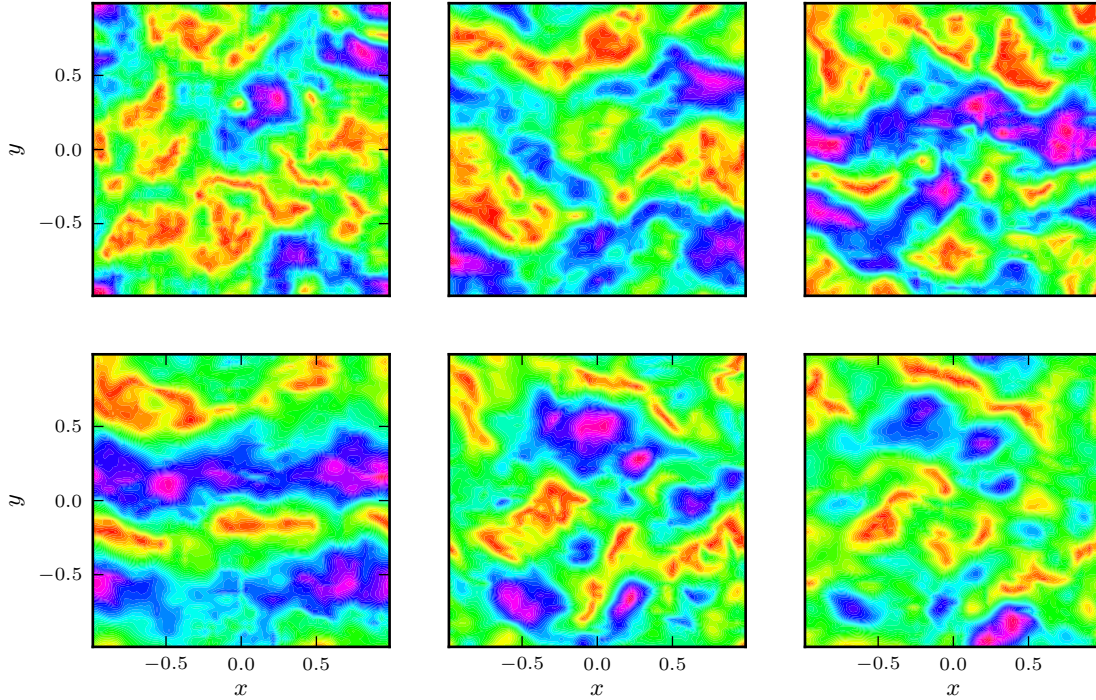


FIGURE 7 – Apparition d’amas de matière dans un gaz granulaire.

mettre en évidence le phénomène de création d’amas de matière pour la première fois directement dans le modèle cinétique, par des simulations déterministes. On observe par exemple sur la figure 7 représentant les lignes de niveau du nombre de Mach local (c’est à dire le rapport entre la vitesse moyenne et la vitesse du son) à différents temps l’apparition de structures caractéristiques du phénomène d’amas, remarquées par exemple dans [50]. Ces simulations ont été effectuées dans le cadre raréfié  $\varepsilon = 1 - e = 0.2$ , qui est en général inaccessible par l’approche macroscopique de type Euler ou Navier-Stokes.

Plus de simulations illustrant l’intérêt de la méthode de changement de variable sont présentées dans le chapitre 3. De plus, cette méthode numérique peut être appliquée à de nombreux problèmes mettant en jeu des équations cinétiques collisionnelles, pour peu que l’on connaisse l’expression de la limite hydrodynamique du modèle considéré.

## 4 Perspectives ouvertes par cette thèse

Nous allons présenter quelques perspectives ouvertes par le travail effectué dans cette thèse.

**Milieux granulaires** Concernant l’étude de l’équation des milieux granulaires, plusieurs pistes d’étude s’ouvrent à nous. Une première idée serait d’essayer d’obtenir une preuve de la loi de Haff avec des données initiales plus proche de ce qui est habituellement considéré dans la physique, c’est à dire seulement dans  $L^1_3$  et non pas  $L^p$  avec  $p > 1$ . L’utilisation des propriétés des espaces de Orlicz (comme considéré dans [137]) pourrait être envisagée.

Une autre piste de recherche en cours d'investigation concerne la question de la stabilité non-linéaire des solutions non homogènes en espace de cette équation. L'utilisation de l'étude spectrale menée au chapitre 5 est bien sûr cruciale pour cette question, ainsi que les travaux de Gualdani, Mischler et Mouhot [102] permettant d'élargir l'espace où les estimations de stabilité sont valides. Cette étude spectrale pourrait aussi nous permettre d'établir une limite hydrodynamique « à la Ellis et Pinsky » rigoureuse de l'équation des gaz granulaires, vers les équations linéarisées de Euler et Navier-Stokes associées.

**Diffusion fractionnaire** Nous envisageons aussi d'appliquer les idées introduites lors de l'étude de l'équation de Rosenau au chapitre 2 afin d'une part d'établir des résultats similaires pour l'équation de diffusion fractionnaire, et d'autre part essayer de développer de nouvelles méthodes numériques pour cette équation. C'est un travail en commun avec G. Toscani.

**Méthodes hybrides pour des problèmes multi-échelles** Dans le prolongement des idées introduites au chapitre 3, nous nous intéressons maintenant au développement de solveurs déterministes hybrides pour la résolution d'équation cinétiques comportant plusieurs régimes, fluide et raréfié. En effet, la plupart de ces méthodes sont basées sur des solveurs stochastiques (voir par exemple le travail récent de Alaïa et Puppo [1]), et nous aimerions tenir compte des propriétés des méthodes spectrales pour améliorer ces travaux. C'est un travail en commun avec F. Filbet.

**Méthodes rapides pour le calcul de la limite de collision rasante de l'équation de Boltzmann** Dans la suite de nos travaux sur les méthodes spectrales, nous aimerions effectuer l'implémentation de la méthode numérique développée par Pareschi, Toscani et Villani dans [155], permettant le calcul numérique de la limite de collision rasante de l'équation de Boltzmann sans coupure angulaire. Nous pourrions ainsi comparer les propriétés numériques de cette approche avec celles de solveurs développés directement pour l'équation de Landau. C'est un travail en commun avec L. Pareschi.

## 5 Notations et espaces fonctionnels

### 5.1 Notations

Nous présentons dans cette section certaines des notations les plus couramment utilisées dans ce manuscrit.

**Dérivées partielles.** Étant donnée une fonction  $\psi : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle ouvert et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert de classe Lipschitz, nous désignerons la *dérivée partielle* de  $\psi$  par rapport à la variable  $t \in I$  par

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \text{ ou } \partial_t \psi.$$

La *gradient* de  $\psi$  par rapport à la variable vectorielle  $X \in \Omega$  sera noté

$$\nabla_X \psi.$$

Enfin, le laplacien de  $\psi$  par rapport à  $X \in \Omega$  sera noté

$$\Delta_X \psi.$$

Concernant les fonctions à valeurs vectorielles, étant donnée  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , la divergence de  $\phi$  par rapport à  $X \in \Omega$  sera notée

$$\operatorname{div}_X \phi.$$

**Convolution.** Étant données deux fonctions  $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , on définira leur *convolution*  $*_X$  par rapport à la variable  $X \in \mathbb{R}^d$  par

$$\psi_1 *_X \psi_2(X) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi_1(X - Y) \psi_2(Y) dY$$

si cette expression a un sens.

**Transformée de Fourier.** La *transformée de Fourier* d'une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(X) e^{iX \cdot \xi} dX, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On utilisera aussi la notation raccourcie  $\widehat{f}(\xi) := \mathcal{F}(f)(\xi)$ .

## 5.2 Espaces fonctionnels couramment considérés

Nous allons brièvement présenter dans la suite quelques-uns des espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse, afin d'en fixer les notations. Soient  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in [1, +\infty[$ ,  $q \in \mathbb{R}_+$ ,  $m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable et  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable.

L'espace de Lebesgue à poids  $L^p(m)$  est défini par la norme

$$\|f\|_{L^p(m)}^p := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p m(x) dx.$$

On le notera simplement  $L^p$  ou  $L^p(\mathbb{R}^d)$  dans le cas où  $m = 1$ . L'espace  $L^\infty(m)$  est défini par la norme

$$\|f\|_{L^\infty(m)} := \operatorname{supess}_{x \in \mathbb{R}^d} (|f(x)| m(x)).$$

Dans le cas de poids polynomiaux, on définit l'espace de Lebesgue  $L_q^p$  par la norme

$$\|f\|_{L_q^p}^p := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \langle x \rangle^{pq} dx,$$

où le poids utilisé est donné par la notation raccourcie  $\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$ . L'espace  $L_q^\infty$  est, lui, défini par

$$\|f\|_{L_q^\infty} := \operatorname{supess}_{x \in \mathbb{R}^d} (|f(x)| \langle x \rangle^q).$$

Pour  $s \in \mathbb{N}$ , l'espace de Sobolev à poids polynomial  $W_q^{s,p}$  est donné par la norme

$$\|f\|_{W_q^{s,p}}^p := \sum_{|k| \leq s} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^k f(x)|^p \langle x \rangle^{pq} dx,$$

la sommation portant sur les multi-indices  $k = (k_1, \dots, k_d)$ . L'espace  $W_q^{s,\infty}$  est donné par la norme

$$\|f\|_{W_q^{s,\infty}} := \sum_{|k| \leq s} \operatorname{supess}_{x \in \mathbb{R}^d} (|\partial^k f(x)| \langle x \rangle^q).$$

Le cas particulier  $p = 2$  désigne l'espace de Sobolev  $H_q^s := W_q^{s,2}$ , défini de manière équivalente par transformée de Fourier par la norme

$$\|f\|_{H_q^s}^2 := \|\mathcal{F}(f \langle \cdot \rangle^s)\|_{L_q^2}.$$

L'espace des fonctions à variations bornées à poids polynomial  $BV_q$  est défini comme l'ensemble des limites faibles dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'$  des suites de  $W_q^{1,1}$ . Sa norme est donnée par

$$\|f\|_{BV_q} := \|f\|_{L_q^1} + \|f \langle \cdot \rangle^q\|_{TV}$$

où  $\|\cdot\|_{TV}$  désigne la variation totale.

Enfin, l'espace  $\mathcal{M}^q$  désigne l'espace des mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}^d$  ayant des moments bornés jusqu'à l'ordre  $q$ . Nous munissons cet espace de la métrique  $d_s$ , définie en prenant la transformée de Fourier pour  $f_1, f_2 \in \mathcal{M}^q$  possédant les mêmes moments jusqu'à l'ordre  $q - 1$  par

$$d_s(f_1, f_2) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{|\widehat{f_1}(\xi) - \widehat{f_2}(\xi)|}{|\xi|^s},$$

où  $s = [q]$  si  $q \notin \mathbb{N}$  ( $[q]$  désignant la partie entière de  $q$ ) et  $s = q - 1$  si  $q \in \mathbb{N}$ .

Première partie

---

**Analyse théorique du comportement  
asymptotique d'équations cinétiques  
collisionnelles homogènes en espace**

---





Cette partie contient les travaux en rapport avec l'étude asymptotique d'équations cinétiques collisionnelles, dans un cadre homogène en espace, c'est à dire de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{Q}(f),$$

où  $f = f(t, v)$  pour  $t \geq 0$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$  désigne la fonction de répartition des particules de vitesse  $v$  à l'instant  $t$ . Nous nous intéressons à la convergence de  $f$  vers une solution auto-similaire, grâce à l'utilisation de techniques de changement de variables.

Le premier chapitre concerne les gaz granulaires dits *anormaux*, et a fait l'objet d'une publication dans le journal *SIAM Journal of Mathematical Analysis* [161]. Ce modèle particulier de gaz granulaire dont le taux de collision dépend directement de la température peut exhiber en fonction d'un paramètre critique une explosion en temps soit polynomial (fini, cas sous-critique), soit exponentiel (infini, cas critique), soit inverse polynomial (infini, cas surcritique). Nous calculons explicitement la vitesse de refroidissement, c'est à dire la vitesse de convergence de l'énergie cinétique des solutions vers 0 (ce qui est notre définition de l'explosion), selon les différentes valeurs paramètre critique. Nous montrons aussi que les solutions de cette équation convergent vers une solution autosimilaire, obtenue grâce à un changement de variables non linéaire.

Le second chapitre concerne l'étude de l'équation de Rosenau, qui est une approximation de l'équation de la chaleur, initialement introduite dans [166] pour l'étude théorique du développement de Chapman-Enskog pour des équations de la dynamique des fluides. C'est un travail en commun avec Giuseppe Toscani, qui a été soumis. Nous montrons que l'approximation de Rosenau peut être interprétée comme un cas particulier d'une équation de Boltzmann linéaire pour une mécanique de collision simplifiée, et étudions la « qualité » de cette approximation de l'équation de la chaleur. Nous montrons en particulier grâce à un changement de variable que l'approximation numérique des solutions de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies centrées exhibe le comportement asymptotique correct, à savoir la convergence vers la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, mais avec un taux sous-optimal. Nous étendons ensuite ce résultat à d'autres types d'approximations.



---

Dynamique explosive des solutions de l'équation des gaz granulaires  
anormaux

---

**Résumé du chapitre.** Nous nous intéressons dans ce chapitre au comportement en temps long des solutions d'une équation de Boltzmann inélastique dont le noyau de collision dépend de l'énergie cinétique de la solution, dans un cadre homogène en espace. Un tel modèle décrit un gaz dilué, composé de sphères dures, dissipant de l'énergie lors des collisions (un gaz granulaire). Nous nous intéressons particulièrement au cas d'un gaz dit « anormal », où le taux de dissipation d'énergie cinétique est inversement proportionnel à la température. Le système exhibe alors un refroidissement (et donc une explosion) en temps fini. Nous étudions l'existence et l'unicité des profils d'explosion de ce modèle, la vitesse de refroidissement (afin de généraliser la loi de Haff, comportement classique des gaz granulaires) ainsi que la convergence vers les solutions auto-similaires. Pour établir nos résultats, nous introduisons un nouveau jeu de variables auto-similaires « non linéaires », nous permettant de nous ramener à l'étude de l'équation des gaz granulaires classique, avec et sans terme de dérive.

Ce chapitre a fait l'objet (dans une version raccourcie) d'une publication dans *SIAM Journal on Mathematical Analysis* [161].

---

**Contents**

<b>1.1 Introduction</b>	<b>70</b>
1.1.1 Functional Framework and Main Results	75
1.1.2 Plan of the Chapter	77
<b>1.2 Proof of Theorem 1.1.1</b>	<b>77</b>
1.2.1 Nonlinear Self-similar Variables	78
1.2.2 Preliminary Results	80
1.2.3 Anomalous Cooling Process	83
<b>1.3 Proof of Theorem 1.1.2</b>	<b>84</b>
<b>Appendix 1.A Some Known Results about the Granular Gases Equation</b>	<b>85</b>
<b>Appendix 1.B Existence of the Self-similar Profiles</b>	<b>87</b>
<b>Appendix 1.C Numerical Simulations of the Anomalous Cooling Process</b>	<b>90</b>

---

## 1.1 Introduction

In this chapter we are interested in a particular model of granular gases. A granular gas is a set of particles which interact by energy dissipating contact interactions. This is a model quite different from perfect molecular gas where energy is conserved, because the particles are “microscopic” regarding the scale of the system, but “macroscopic” in the sense that there are no molecules at all, but rather grains of a given size. For example, a suspension of pollen in a fluid or a planetary ring [115, 8] can be seen as a granular gas when intermolecular forces are neglected, each one in a different scale.

Our goal is to investigate the global behavior of the kinetic energy of a space homogeneous gas of inelastic hard spheres interacting *via* binary collisions (that is a granular gas), and existence and uniqueness of associated blow up profiles. The study of this kind of system started with the physics paper [103] of P.K. Haff, and has since generated a large increase of interest, both in physics (a complete introduction of the subject can be found in the textbook [38] by N. Brilliantov and T. Pöschel) and mathematics (*cf.* the review article [188] by C. Villani). It involves some complicated phenomena, such as kinetic *collapse* (*cf.* K. Shida [170]), where the gas freezes completely, *clustering* at the hydrodynamic level for inhomogeneous gases, or even spontaneous loss of homogeneity (as proved by I. Goldhirsch and G. Zanetti in [95]). This article will deal especially with the case of a gas whose particle’s collision rate increases with dissipation of energy. Such a gas is sometimes called *anomalous* (see article [137] of S. Mischler, C. Mouhot and R. Ricard), because of the unusual behavior of this collision rate. Another model of anomalous gas has been introduced by G. Toscani in [180] by assuming that the collisions are close to being elastic for large relative velocities of the grains. It has been studied precisely by H. Li and G. Toscani in [122], showing the finite time extinction of the support.

A granular gas can be described in a purely Newtonian way, but the number of macroscopic particles involved (ranging from  $10^6$  to  $10^{10}$ ) leads to adopting a statistical physics point of view. Therefore, we shall study the so-called space-homogeneous *inelastic Boltzmann* equation (also known as *granular gases* equation), given by

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{Q}_e(f, f),$$

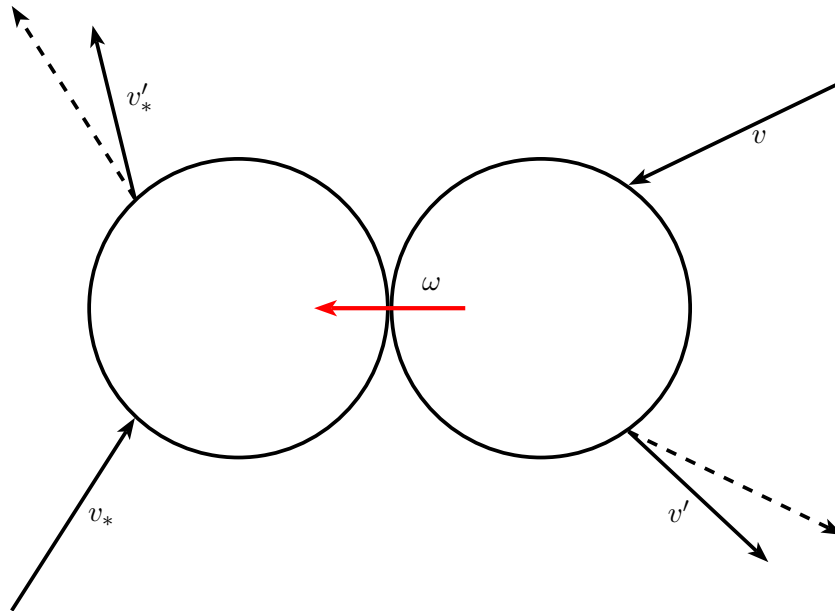


Figure 1.1: Geometry of collisions (dashed lines are elastic and solid lines inelastic)

where  $f = f(t, v)$  represents the particle's distribution function, depending on time  $t \geq 0$  and velocity  $v \in \mathbb{R}^d$ . It is always a nonnegative function. The collision operator  $\mathcal{Q}_e(f, g)$ , which will be made precise in the following (particularly concerning the meaning of subscript  $e$ ), models a binary inelastic collision process of hard spheres type, localized in time. This equation will be supplemented with the initial value

$$(1.2) \quad f(0, \cdot) = f_{in}.$$

The inelasticity is characterized by a collision mechanics where mass and momentum are conserved and kinetic energy is dissipated. At the microscopic level, it can be described as follows: given two particles of precollisional velocities  $v$  and  $v_*$ , their respective postcollisional velocities, denoted by  $v'$  and  $v'_*$ , are given by

$$\begin{cases} v' = v - \frac{1+e}{2} (u \cdot \omega) \omega, \\ v'_* = v_* + \frac{1+e}{2} (u \cdot \omega) \omega, \end{cases}$$

where  $u := v - v_*$  is the *relative velocity* of a pair of particles,  $\omega$  is the *impact direction* and  $e \in [0, 1]$  is the dissipation parameter, known as the *restitution coefficient* (see Figure 1.1 for a sketch of the collision process).

Physically, it means that energy is dissipated in the impact direction only. The parameter  $e$  can depend on the relative velocity and kinetic energy of the particles. For the need of the analysis, we will simply assume that  $e$  is a constant, which is a rather good physical approximation (a complete

discussion on this topic can be found in [38]). Besides,  $e$  will also be taken different from 1, since  $e = 1$  concerns the classical elastic case, in which no dissipation occurs. The inelastic case  $e < 1$  can also be characterized by the fact that the impact direction  $\omega$  does not bisect the angle between pre- and postcollisional velocities.

The parametrization of postcollisional velocities can also be found by using some properties of the model. Indeed, it is equivalent to conservation of impulsion and dissipation of energy:

$$\begin{aligned} v' + v'_* &= v + v_*, \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 - |v|^2 - |v_*|^2 &= -\frac{1-e^2}{2}|u \cdot \omega|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

One of our goals will be the study of the macroscopic dissipation of energy, sometimes referred to as the cooling process of the gas. This is of high interest when one wants to study the self-similar behavior of dissipative kinetic equations.

This phenomenon has been investigated mathematically by S. Mischler and C. Mouhot in [133] for the case of constant restitution coefficient  $e$  and by R. Alonso and B. Lods in [4] for visco-elastics hard spheres, more realistic at the physical level. In the latter one, energy dissipation is a power law of the relative velocity of colliding particles. We will use ideas of these two articles to write some of the results we present in the following. The paper [122] also deals with the cooling process of a one dimensional nonlinear friction equation, which arises when dealing with the quasi-elastic limit of equation (1.1) with a variable restitution coefficient. Finally, J.A. Carrillo, M. Di Francesco and G. Toscani in [48] and J.A. Carrillo and J.L. Vázquez in [54] used the behavior of the kinetic energy to investigate intermediate asymptotics of nonlinear diffusion equations.

Let us now describe precisely the collision operator we consider throughout the rest of this article. Let  $f$  and  $g$  be two nonnegative particles distribution functions depending only on  $v \in \mathbb{R}^d$ . The collision operator  $\mathcal{Q}_e(f, g)$ , where  $e \in [0, 1)$  is the constant restitution coefficient, can be expressed in the following weak form: given a regular test function  $\psi$ ,

$$(1.3) \quad \langle \mathcal{Q}_e(f, g), \psi \rangle := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f_* g (\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*) B(|u|, \hat{u} \cdot \omega, \mathcal{E}(f)) d\omega dv dv_*,$$

where we have used the usual shorthand notation  $\psi' := \psi(v')$ ,  $\psi'_* := \psi(v'_*)$ ,  $\hat{u} := u/|u|$  and

$$\mathcal{E}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 f(v) dv$$

denotes the *kinetic energy* of  $f$ . Moreover,  $B$  is a positive function known as the *collision kernel*. We will assume that it factorizes as

$$(1.4) \quad B(|u|, \hat{u} \cdot \omega, \mathcal{E}) = |u| b(\hat{u} \cdot \omega) \mathcal{E}^{-a}$$

for a nonnegative constant  $a$  and a nonnegative function  $b$  (the collisional *cross section*) of mass 1 in the unit sphere, bounded from below and above by two positive constants  $\beta_1$  and  $\beta_2$ :

$$(1.5) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad 0 < \beta_1 \leq b(x) \leq \beta_2 < \infty.$$

The gas is anomalous thanks to this collision kernel. Indeed, according to (1.4), the collision frequency will increase when the kinetic energy decreases. As we will see in the following, this kinetic effect will lead to the cooling in finite time, provided that the coefficient  $a$  is big enough. Such a phenomenon is related to the one described in [180, 122]: the gas is anomalous because the grains

are close to being elastic for large relative velocities. This is in opposition with the more physically intuitive models where collisions are elastic for small relative velocities (for example, viscoelastic hard spheres, as described in [38, 4], or even the simplified threshold model of T. Pöschel, N.V. Brilliantov and T. Schwager [159]). It also yields a finite time cooling.

Concerning this topic, we can also mention some recent works of I. Fouxon *et al.* [89] and Kolvin, Livne, and Meerson [116]. Under a weak inelasticity assumption with constant restitution coefficient, these authors derived granular hydrodynamics (of Euler and Navier-Stokes types) and proved the finite time cooling in these models for a one parameter family of initial conditions. To do so, they used a Lagrangian formulation to exhibit non-self-similar solution to these equations, and we shall not consider this approach in this chapter.

We can also give a strong form of the collision operator. As pointed out in [188] (the full derivation of this expression can be found *e.g.* in articles [22, 23] of A. Bobylev, J. Carrillo and I. Gamba), one can write

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_e(f, g)(v) &= \mathcal{E}(f)^{-a} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u| \left( J \frac{|'u|}{|u|} 'f 'g_* - f g_* \right) b(\hat{u} \cdot \sigma) d\sigma dv_* \\ &= \mathcal{Q}_e^+(f, g)(v) - f(v) L(g)(v).\end{aligned}$$

In this expression,  $'v$  and  $'v_*$  are the precollisional velocities of two particles of given velocities  $v$  and  $v_*$ , defined for  $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$  as

$$\begin{cases} 'v = \frac{v + v_*}{2} - \frac{1-e}{4e}(v - v_*) + \frac{1+e}{4e}|v - v_*|\sigma \\ 'v_* = \frac{v + v_*}{2} + \frac{1-e}{4e}(v - v_*) - \frac{1+e}{4e}|v - v_*|\sigma. \end{cases}$$

The parameter  $\sigma$  is no longer the impact direction, instead it is the center of what we can call the *collision sphere* [188]. The operator  $\mathcal{Q}_e^+(f, g)(v)$  is usually known as the *gain* term because it can be seen as the number of particles of velocity  $v$  created by collisions of particles of precollisional velocities  $'v$  and  $'v_*$ , whereas  $f(v) L(g)(v)$  is the *loss* term, modeling the loss of particles of precollisional velocities  $v$ . Finally, the coefficient  $J$  is the Jacobian of the map  $(v, v_*) \rightarrow ('v, 'v_*)$ , not identically equal to 1, but (provided that  $e$  is a nonzero constant) given by

$$J = \frac{|u|}{e^2 |'u|}.$$

Taking successively  $\psi(v) = 1$ ,  $v$ , and  $|v|^2$  in (1.3) gives macroscopic conservation of mass and momentum, and dissipation of kinetic energy. This implies that equilibria of this collision operator are Dirac distributions  $\rho \delta_{v=v_0}$  of prescribed mass  $\rho$  and momentum  $\rho v_0$ . In order to prevent apparition of these trivial solutions, one can add a diffusive term to give an input of energy, as was studied for example by Cercignani, R. Illner and C. Stoica in [60] and by A. Bobylev and Cercignani in [24] for Maxwell molecules. It is also possible to look for self-similar solutions to this equation thanks to a rescaling which leads to studying the inelastic Boltzmann equation with drift term, as was done by M. Ernst and R. Brito in [76].

Let us now describe more precisely the asymptotic behavior of the energy of  $f$ , assuming that this distribution is time dependent and of mass 1 and zero momentum.

**Definition 1.1.** If  $f$  is the solution to (1.1), we call the asymptotic behavior of  $\mathcal{E}(f)(t)$  the *cooling process*. We say that there is a *blow up* when  $\mathcal{E}(f)(t) \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow T_c$ , where  $T_c$  is the time of explosion of  $f$ .



If one multiplies equation (1.1) by  $|v|^2$  and integrates in velocity, using the weak formulation (1.3) of the collision operator and (1.4), one gets dissipation of kinetic energy:

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(f)(t) = -\mathcal{E}(f)(t)^{-a} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, v) f(t, v_*) |u| D(|u|) dv dv_*,$$

where  $D$  is a nonnegative quantity usually called the *dissipation rate*, given by

$$D(|u|) = \frac{1 - e^2}{4} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot \omega|^2 b(\hat{u} \cdot \omega) d\omega.$$

Using the polar coordinates  $\cos(\theta) = \hat{u} \cdot \omega$ , we have

$$(1.7) \quad D(|u|) = \frac{1 - e^2}{4} |u|^2 |\mathbb{S}^{d-2}| \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin^{d-3}(\theta) b(\cos(\theta)) d\theta.$$

Provided that  $f$  is of mass 1 and zero momentum, one can then apply Jensen's inequality to  $\Psi(v) = |v|^3$  and to the probability measure  $f(v_*) dv_*$ , together with conservative properties of equation (1.1) to get

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v_*) \Psi(|v - v_*|) dv_* \geq \Psi \left( \left| v \int_{\mathbb{R}^d} f(v_*) dv_* - \int_{\mathbb{R}^d} v_* f(v_*) dv_* \right| \right) = \Psi(|v|).$$

Using equalities (1.6) and (1.7), we have

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(f)(t) \leq -\beta_e \mathcal{E}(f)(t)^{-a} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, v) |v|^3 dv,$$

where  $\beta_e$  is given by

$$\beta_e = \frac{1 - e^2}{4} |\mathbb{S}^{d-2}| \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin^{d-3}(\theta) b(\cos(\theta)) d\theta < +\infty.$$

Moreover, applying the Hölder inequality with  $s = 3/2$  and its conjugate  $s' = 3$  to the map  $v \mapsto f(v)|v|^2$ , one gets, thanks to mass conservation,

$$(1.9) \quad \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(v) |v|^2 dv \right)^{\frac{3}{2}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(v) |v|^3 dv.$$

Using the Fubini theorem for nonnegative measurable function and gathering inequalities (1.8) and (1.9), we finally find a closed differential inequality for  $\mathcal{E}(f)$ , namely

$$(1.10) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(f)(t) \leq -\beta_e \mathcal{E}(f)(t)^{-a + \frac{3}{2}}, \quad \forall t < T_c.$$

According to this inequality, the cooling process will depend on the nonnegative coefficient  $a$  introduced in the definition of the collision kernel (1.4). We now have to describe rigorously the spaces of solutions to (1.1), in order to introduce the corresponding Cauchy problem and the main results of this article.

### 1.1.1 Functional Framework and Main Results

Let us present some functional spaces needed in the chapter. We denote by  $L_q^1$  for  $q \in [1, +\infty)$  the following weighted Lebesgue space:

$$L_q^1 = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable; } \|f\|_{L_q^1} := \int_{\mathbb{R}^d} |f(v)| \langle v \rangle^q dv < \infty \right\},$$

where  $\langle v \rangle := \sqrt{1 + |v|^2}$ . Thanks to this definition, we can introduce the sets of distribution of given mass 1, zero momentum, and energy  $\mathcal{E} > 0$  as

$$\mathcal{G} := \left\{ f \in L_1^1 : \int_{\mathbb{R}^d} f(v) dv = 1, \int_{\mathbb{R}^d} f(v) v dv = 0 \right\}$$

and

$$\mathcal{G}_{\mathcal{E}} := \left\{ f \in \mathcal{G} : \int_{\mathbb{R}^d} f(v) |v|^2 dv = \mathcal{E} \right\}.$$

Then, we denote by  $W_q^{1,1}$  the weighted Sobolev space

$$W_q^{1,1} := \left\{ f \in L_q^1; \nabla f \in L_q^1 \right\}.$$

We also introduce the space  $BV_q$  of weighted bounded variation functions, given as the set of weak limits in  $\mathcal{D}'$  of sequences of smooth functions which are bounded in  $W_q^{1,1}$ . Finally,  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$  is the space of probability measures on  $\mathbb{R}^d$ .

The Cauchy problem (1.1)–(1.2) has been extensively investigated in the past few years, starting with paper [22] and then by A. Bobylev, Cercignani and G. Toscani in [26], where Maxwellian molecules were considered using Fourier transform. A lot of properties of a more general model which includes elastic and inelastic collisions for Maxwellian molecules as a particular case (but not hard spheres) have also been studied in the book chapter [25] by A. Bobylev, Cercignani and I. Gamba.

Concerning hard spheres kernels, paper [180] presents a one dimensional model where the restitution coefficient depends on the relative velocity of the colliding particles through a phenomenological inverse power law. Then, the first important result about tail behavior in any dimension was given by A. Bobylev, I. Gamba, and V. Panferov in [27]. Existence of smooth solutions to a model with stochastic heating was proven by I. Gamba, V. Panferov, and C. Villani in [91]. S. Mischler, C. Mouhot and R. Ricard finally proved existence and uniqueness of weak solutions to the Cauchy problem for (1.1) in [137]. The more physical space inhomogeneous setting was investigated by D. Benedetto and M. Pulvirenti in [17] for the model introduced in [180], but in one dimension of space and velocity. Finally, R. Alonso studied in [2] the Cauchy problem near vacuum for a large class of restitution coefficients, in any dimension of space and velocity.

Let us define more precisely what we call Cauchy problem for (1.1).

**Definition 1.2.** Given a nonnegative initial condition  $f_{in} \in L_2^1 \cap \mathcal{G}$ , a nonnegative function  $f$  defined on  $[0, T] \times \mathbb{R}^d$  is said to be the solution to the Cauchy problem (1.1)–(1.2) if

$$f \in \mathcal{C} \left( 0, T; L_2^1 \right),$$

and if (1.1)–(1.2) holds in the weak sense, namely,

$$\int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(t, v) \partial_t \psi(t, v) dv + \langle \mathcal{Q}_e(f, f)(t, \cdot), \psi \rangle \right) dt = \int_{\mathbb{R}^d} f_{in}(v) \psi(0, \cdot) dv,$$

for any  $\psi \in \mathcal{C}_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ .

We notice that it is always possible to assume the initial condition in  $\mathcal{G}$ , namely of mass 1 and zero momentum, since we may always reduce to this case by a scaling and translation argument, using invariance properties of the collision operator.

Let us now introduce the *cooling time*  $T_c$  of  $f$  as the time before blow up, namely

$$T_c := \sup \{T > 0 : \mathcal{E}(f)(t) > 0, \forall t < T\}.$$

For a collision kernel given by (1.4) and (1.5), Theorem 1.4 of [137] (recalled in Appendix 1.A as Theorem 1.A.1) states the well-posedness in  $L^1_3$  of the Cauchy problem for the granular gases equation, together with the existence of the cooling process when  $t \rightarrow T_c$ .

We now state the main results of this chapter concerning the cooling process and blow up solutions to the anomalous model. It is known from [137] that if  $a$  is greater than  $1/2$ ,  $T_c$  is finite, meaning that blow up of  $f$  occurs in finite time whereas it takes infinite time for  $a \leq 1/2$ . We give the accurate asymptotic behavior of the energy in the main theorems of this article, for all nonnegative values of the parameter  $a$ , in agreement with the formal computation (1.10).

**Theorem 1.1.1.** *Let the collision kernel be subject to assertions (1.4) and (1.5). If  $f$  is the solution to (1.1) with an initial condition  $0 \leq f_{in} \in L^1_3 \cap \mathcal{G}_1 \cap L^p$  for  $p > 1$ , there exist some positive constants  $C_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , and  $T_c$ , depending on  $e$ ,  $a$ , and  $f_{in}$ , such that we have the following:*

(i) subcritical case: if  $0 \leq a < 1/2$ , and then  $\alpha = 1/(2a - 1) < 0$ ,

$$\frac{1}{(C_1 t + 1)^{-2\alpha}} \leq \mathcal{E}(f)(t) \leq \frac{1}{(C_2 t + 1)^{-2\alpha}}, \quad \forall t > 0;$$

(ii) critical case: if  $a = 1/2$ ,

$$e^{-C_3 t} \leq \mathcal{E}(f)(t) \leq e^{-C_4 t}, \quad \forall t > 0;$$

(iii) supercritical case: if  $a > 1/2$ , and then  $\alpha = 1/(2a - 1) > 0$ ,

$$(-C_5 t + 1)^{2\alpha} \leq \mathcal{E}(f)(t) \leq (-C_6 t + 1)^{2\alpha}, \quad \forall t < T_c.$$

Moreover, for all  $a \geq 0$ , there exist a function  $V \in \mathcal{C}^1(0, T_c)$  and a nonnegative profile  $G \in L^1_3 \cap \mathcal{G}_1$  such that the distribution

$$F(t, v) := V(t)^d G(V(t)v), \quad \forall (t, v) \in (0, T_c) \times \mathbb{R}^d,$$

is the solution to (1.1), called a self-similar solution.

In Section 1.2 we propose a proof of this Theorem based on the analysis of self-similar solutions to the inelastic Boltzmann equation with a linear drift term (widely studied in [133, 134]) and the asymptotic analysis of the time derivative of the energy. To this end, we introduce a new self-similar scaling, nonexplicit and strongly nonlinear (energy-dependent, as in [48]).

**Remark 1.** One can check that point (i) of this theorem is in good agreement with the one proven in [133] with  $a = 0$ , which is classically known as *Haff's law*[103]:

$$\frac{m_1}{(1+t)^2} \leq \mathcal{E}(f)(t) \leq \frac{M_1}{(1+t)^2}.$$

We then state a theorem of existence and uniqueness (up to a translation of time) of self-similar solutions to equation (1.1) with  $a \geq 0$ . We also obtain convergence of solutions to (1.1) bounded in  $L^1_3$  toward these particular solutions.

**Theorem 1.1.2.** *Let the collision kernel be subjects to assertions (1.4) and (1.5) with  $a \geq 0$ . There exists a constructive  $e_* \in (0, 1)$  such that for all  $e \in [e_*, 1)$ , the following hold:*

- (i) *the self-similar profile  $G = G_e \in L^1_3 \cap \mathcal{G}_1$  is unique and if  $F_e$  and  $\bar{F}_e$  are two self-similar solutions to (1.1), there is a time  $t_0 < T_c$  such that  $\bar{F}_e(t, v) = F_e(t + t_0, v)$  for  $t > \max\{0, -t_0\}$ .*
- (ii) *For  $p > 1$  and any  $M_0 > 0$ , there exists  $\eta \in (0, 1)$  such that if*

$$\begin{cases} f_{in} \in L^1_3 \cap \mathcal{G}_1 \cap L^p, \\ \|f_{in}\|_{L^1_3} \leq M_0, \end{cases}$$

*the solution  $f$  to equation (1.1) satisfies for a nonnegative constant  $C$*

$$\|f(t, \cdot) - F_e(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \begin{cases} \frac{C}{(1 + C_2 t)^{-\alpha \mu_e}} & \text{if } a < 1/2, \\ C e^{-C_4 \mu_e t/2} & \text{if } a = 1/2, \\ C(1 - C_6 t)^{\alpha \mu_e} & \text{if } a > 1/2, \end{cases}$$

*where  $\alpha = 1/(2a - 1)$  and  $\mu_e = (1 - \eta) + \mathcal{O}(1 - e)$ .*

The proof of this theorem is also based on the analysis of self-similar solutions to the inelastic Boltzmann equation with drift term, together with the use of the explicit cooling processes of Theorem 1.1.1.

### 1.1.2 Plan of the Chapter

This chapter is organized as follows. We prove Theorem 1.1.1 in Section 1.2. We give a nonlinear rescaling that allows us to treat the three different cooling processes at once in Subsection 1.2.1. We then use the expression of this rescaling to state a relation between energy in classical and self-similar variables. Subsequently, we show in Subsection 1.2.2 results concerning the asymptotic behavior of solutions to the granular gases equation with drift term, namely that their energy and time derivative are uniformly bounded in time. We finally use this result in Subsection 1.2.3 to establish the rigorous cooling process.

In Section 1.3 we then apply this precise asymptotic behavior together with a theorem of uniqueness of self-similar profiles already proven in [134] by S. Mischler and C. Mouhot to show the theorem 1.1.2 about the rate of convergence toward self-similar solutions.

Finally, we recall in Appendix 1.A some important results we used in the chapter, we give a proof of existence of self-similar profiles in Appendix 1.B and finally present some numerical simulations of the large time behavior of equation (1.1) in Appendix 1.C.

## 1.2 Proof of Theorem 1.1.1

This section presents the proof of Theorem 1.1.1, which studies the cooling processes for subcritical ( $a < 1/2$ ), critical ( $a = 1/2$ ) and supercritical ( $a > 1/2$ ) cases. To this end, we will prove some new estimates for the granular gases equation, with and without drift term. Let us start by introducing some nonclassical self-similar variables.

### 1.2.1 Nonlinear Self-similar Variables

We shall use a rescaling (seen *e.g.* in [76, 133]), in order to prevent the blow up of  $f$  by “zooming” on the distribution and studying it in self-similar variables.

We will assume that the collision kernel is given by (1.4) and (1.5) with  $a \geq 0$ . The granular gases equation (1.1) then reads as

$$(1.11) \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, v) = \mathcal{E}(f)(t)^{-a} \mathcal{Q}_e(f, f)(t, v),$$

where the collision operator is given for test functions  $\psi$  by

$$\langle \mathcal{Q}_e(f, g), \psi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u| f_* g (\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*) b(\hat{u} \cdot \omega) d\omega dv dv_*.$$

The rescaling of the distribution  $f$  will be written according to [76] as

$$(1.12) \quad \begin{cases} f(t, v) = V(t)^d g(T(t), V(t)v), \\ V(0) = 1, T(0) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow T_c} T(t) = \lim_{t \rightarrow T_c} V(t) = +\infty. \end{cases}$$

The functions  $T$  and  $V$  have to be *strictly increasing* in time for this rescaling to be well defined.

We shall determine  $T$  and  $V$  (the *self-similar variables*) and derive the equation followed by the distribution  $g = g(s, w)$  with  $s = T(t)$  and  $w = V(t)v$ . The term  $V(t)^d$  in front of  $g$  is simply given by mass conservation. Moreover, by making a change of variables in the expression of the collision operator and thanks to the hard sphere collision kernel, one gets that

$$\mathcal{Q}_e(g(\lambda \cdot), g(\lambda \cdot))(v) = \lambda^{-d-1} \mathcal{Q}_e(g, g)(\lambda v).$$

Especially, the bilinearity of operator  $\mathcal{Q}_e$  together with (1.12) yields

$$(1.13) \quad \mathcal{Q}_e(f, f)(t, \cdot) = (V(t))^{d-1} \mathcal{Q}_e(g, g)(s, \cdot).$$

**Remark 2.** Because of (1.13), our approach to the problem cannot be immediately extended to the case of a variable restitution coefficient. Indeed, if  $e = e(|u \cdot \hat{n}|)$ , where  $\hat{n}$  is the unit vector joining the center of the particles (this case covers the classical *viscoelastic hard spheres* model, see N. Brilliantov and T. Pöschel [37]), introducing the self-similar variables (1.12) in relation (1.13) gives

$$\mathcal{Q}_e(f, f)(t, \cdot) = (V(t))^2 \mathcal{Q}_{\tilde{e}(t, \cdot)}(g, g)(s, \cdot);$$

that is the collision operator becomes time-dependent through a new restitution coefficient  $\tilde{e}$ . Finally, the new collision equation is not “autonomous”, which prevents us from using some previous results on this equation as we will do in the following (*e.g.* Haff’s Law).

Now, if  $f$  follows rescaling (1.12), its time derivative becomes

$$(1.14) \quad \partial_t f = (V(t))^{d-1} (T'(t) V(t) \partial_s g + V'(t) \nabla_w \cdot (wg)).$$

Thanks to relations (1.13) and (1.14), if  $f$  is the solution to equation (1.11), the distribution  $g$  is the solution to

$$(1.15) \quad T'(t) V(t) \partial_s g + V'(t) \nabla_w \cdot (wg) = \mathcal{E}(f)(t)^{-a} \mathcal{Q}_e(g, g).$$

We shall get rid of the term in (1.15) involving a negative power of the kinetic energy to obtain a simpler equation, the classical homogeneous Boltzmann equation with an anti-drift term.

To this end, let us assume the rescaling to be “nonlinear” by asking it to depend on the energy of the solution itself:

$$\begin{cases} V'(t) = \tau \mathcal{E}(f)(t)^{-a}, \\ T'(t) V(t) = V'(t)/\tau, \end{cases}$$

where  $\tau$  is a nonnegative parameter. This idea is very close to the one used in [48] for nonlinear diffusion equations (sometimes referred to as the *Toscani map*). It was also extended in [54] to show the apparition of chaotic behavior for a precise (constructive) nonlinearity : the self-similar profile of this equation “oscillates” between Gaussian (heat equation) and Zel’dovich–Kompaneets–Barenblatt (porous medium equation) profiles.

The functions  $V$  and  $T$  are not explicit, but one can see that they are well defined and fulfill the requirement of the scaling (1.12). Indeed, the map  $t \mapsto \mathcal{E}(f)(t)^{-a}$  is strictly increasing on  $[0, T_c)$  thanks to the cooling process (1.32), is 1 when  $t = 0$ , given that the energy of the initial distribution  $f_{in}$  has been normalized to this value, and tends to infinity when  $t \rightarrow T_c$ . Moreover, one has  $T(t) = \log(V(t))/\tau$  with  $\tau \geq 0$  and then  $T$  is increasing on  $[0, T_c)$  with  $T(0) = 0$  and  $\lim_{t \rightarrow T_c} T(t) = +\infty$ .

With such an expression for  $V$  and  $T$  plugged in (1.15), the distribution  $g$  is the solution to the following equation:

$$(1.16) \quad \frac{\partial g}{\partial s} + \tau \nabla_w \cdot (wg) = \mathcal{Q}_e(g, g).$$

Actually, this is the granular gases equation for inelastic hard spheres with constant restitution coefficient, complemented with an *anti-drift* term. This last term will act like an input of energy and will prevent the blow up of  $g(s, \cdot)$  toward a Dirac mass when  $s \rightarrow \infty$ . This equation has been thoroughly studied in articles [133, 134]. Especially, we know that the kinetic energy of  $g$  is bounded from above and below by two positive constants and that there exists steady states  $G$  for this equation. We summed up this result in Appendix 1.A as Theorem 1.A.2. We give a proof of the existence of self-similar profiles in Appendix 1.B.

Summarizing, the distribution  $f$  defined by

$$\begin{cases} f(t, v) = V(t)^d g(T(t), V(t)v), \\ V'(t) = \tau \mathcal{E}(f)(t)^{-a}, \\ T(t) = \log(V(t))/\tau, \end{cases}$$

is the solution to the granular gases equation (1.11) for all times as soon as the function  $g$  is the solution to drift-collision equation (1.16). Conversely, if  $f$  is the solution to (1.11), one can associate a solution  $g$  to rescaled equation (1.16) by setting

$$g(s, w) = e^{-d\tau s} f\left(V^{-1}(e^{\tau s}), e^{-\tau s} w\right).$$

Note that the inverse  $V^{-1}$  of  $V$  is well defined by the discussion above.

Moreover, using the change of variables  $w = V(t)v$ , the following relation between energies of  $f$  and  $g$  holds:

$$\mathcal{E}(g)(T(t)) = (V(t))^2 \mathcal{E}(f)(t).$$

Then, the function  $V$  can be written for all  $0 \leq t < T_c$  as

$$(1.17) \quad V(t) = \left( \frac{\mathcal{E}(g)(T(t))}{\mathcal{E}(f)(t)} \right)^{1/2}.$$

Using this expression, the bounds (1.33) of the energy of  $g$ , and the raw cooling process (1.32), one has another proof that  $V(t) \rightarrow \infty$  and  $T(t) = \log(V(t)) \rightarrow \infty$  when  $t \rightarrow T_c$ .

Finally, if  $G$  is a *self-similar profile*, that is, a stationary solution to (1.16), we may associate a self-similar solution  $F$  to the original equation (1.11) by setting

$$F(t, v) = V(t)^d G(V(t)v), \quad \forall (t, v) \in (0, T_c) \times \mathbb{R}^d.$$

Such a  $G$  exists thanks to Theorem 1.A.2, which proves the last assertion of Theorem 1.1.1.

### 1.2.2 Preliminary Results

In this subsection we will show two results concerning solutions to the granular gases equation with and without drift term that we will need in order to prove rigorously the cooling process.

Let  $h = h(t, v)$  for  $t \geq 0$ , and  $v \in \mathbb{R}^d$  be the solution to the inelastic Boltzmann equation

$$(1.18) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \mathcal{Q}_e(h, h),$$

that is, the collision equation (1.11) with  $a = 0$ . According to [4] or [133], the (subcritical) Haff's law holds:

$$(1.19) \quad \frac{m}{(1 + \mu_0 t)^2} \leq \mathcal{E}(h)(t) \leq \frac{M}{(1 + \mu_0 t)^2}, \quad \forall t > 0.$$

An upper control of the third order moment of  $h$  can be deduced from this law. Let  $m_l(h)$  denote the  $2l$ th order moment of a distribution  $h$ , that is,

$$m_l(h) = \int_{\mathbb{R}^d} h(v) |v|^{2l} dv.$$

**Lemma 1.2.1.** *Let  $h$  be the solution to equation (1.11) for  $a = 0$ , with an initial condition  $h_{in} \in \mathcal{G} \cap L^p$  for  $p > 1$ . There exists a nonnegative constant  $\kappa$  such that if  $m_{3/2}(h_{in}) \leq \kappa$ , then for all  $t > 0$ ,*

$$(1.20) \quad 0 \leq m_{3/2}(h)(t) \leq \frac{\kappa}{(1 + \mu_0 t)^3}.$$

*Proof.* Setting  $m_l = m_l(h)$  and multiplying (1.11) with  $a = 0$  by  $|v|^3$ , one gets after integration in velocity space

$$\frac{d}{dt} m_{3/2}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_e(h, h)(t, v) |v|^3 dv.$$

Some more information is then needed regarding the third order moment of the collision operator. A.V. Bobylev, I.M. Gamba and V.A. Panferov had shown in [27] (and this result was then extended to the case of bounded cross section in [4]; see Appendix 1.A, Theorem 1.A.4) the following estimate:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_e(h, h)(t, v) |v|^3 dv \leq -(1 - \gamma) m_2(t) + \gamma S_{3/2}(t),$$

where  $0 < \gamma < 1$  and

$$\begin{aligned} S_{3/2} &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{5}{4} \rfloor} \binom{3/2}{k} (m_{k+1/2} m_{3/2-k} + m_k m_{3/2-k+1/2}) \\ &= \frac{3}{2} (m_{3/2} m_{1/2} + m_1^2). \end{aligned}$$

By definition, we have  $m_1 = \mathcal{E}(h)$ . Besides, by convexity,  $m_2 \geq m_{3/2}^{4/3}$  and  $m_1 \geq m_{1/2}^2$ . Thus,  $m_{3/2}(t)$  verifies, thanks to the subcritical Haff's law (1.19), that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{3/2}(t) &\leq -(1-\gamma) m_{3/2}(t)^{4/3} + \frac{3}{2} \gamma \left( \mathcal{E}(h)(t)^2 + m_{3/2}(t) \mathcal{E}(h)(t)^{1/2} \right) \\ &\leq -(1-\gamma) m_{3/2}(t)^{4/3} + \frac{3}{2} \gamma \left( \frac{M^2}{(1+\mu_0 t)^4} + m_{3/2}(t) \frac{M^{1/2}}{1+\mu_0 t} \right). \end{aligned}$$

Then, one has

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( m_{3/2}(t) - \frac{\kappa}{(1+\mu_0 t)^3} \right) &\leq -(1-\gamma) m_{3/2}(t)^{4/3} + \frac{3\mu_0 \kappa}{(1+\mu_0 t)^4} \\ &\quad + \frac{3}{2} \gamma \left( \frac{M^2}{(1+\mu_0 t)^4} + m_{3/2}(t) \frac{M^{1/2}}{1+\mu_0 t} \right), \end{aligned}$$

where  $\kappa$  is a nonnegative constant such that  $m_{3/2}(0) \leq \kappa$ . Then inequality (1.20) is fulfilled for  $t = 0$  and by continuity, the lemma is proved for  $t < t_*$  with a positive time  $t_*$ . For  $t = t_*$ , one gets  $m_{3/2}(t_*) = \kappa(1+\mu_0 t_*)^{-3}$ , and the last differential inequality reads as

$$\frac{d}{dt} \left( m_{3/2}(t_*) - \frac{\kappa}{(1+\mu_0 t_*)^3} \right) \leq \left( -(1-\gamma) \kappa^{4/3} + C_1 \kappa + \frac{3}{2} \gamma M^2 \right) \frac{1}{(1+\mu_0 t_*)^4},$$

where  $C_1 = 3(\mu_0 + \gamma\sqrt{M}/2)$ . If the constant  $\kappa$  is chosen large enough, the right-hand side of this inequality is negative, which concludes the proof.  $\square$

Thanks to this estimate, we can now show that the time derivative of  $\mathcal{E}(g)$  is uniformly bounded.

**Proposition 1.2.1.** *If  $g$  is the solution to the inelastic Boltzmann equation with drift term (1.16), then there exists two constructive constants  $-\infty < M_0 < 0 < M_1 < +\infty$  such that*

$$M_0 \leq \frac{d}{ds} \mathcal{E}(g)(s) \leq M_1, \quad \forall s \geq 0.$$

*Proof.* Given that  $g$  is solution to (1.16), it is possible to define a new distribution  $h$  by setting

$$h(t, v) := V_0(t)^d g(T_0(t), V_0(t) v),$$

where we defined as in [137]

$$\begin{cases} V_0(t) = 1 + \mu_0 t, \\ T_0(t) = \log(1 + \mu_0 t). \end{cases}$$



Then,  $h$  is the solution to the inelastic Boltzmann equation (1.18). Thanks to the expression of this rescaling, one has

$$\mathcal{E}(g)(T_0(t)) = V_0(t)^2 \mathcal{E}(h)(t).$$

Differentiating this relation with respect to time gives

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(g)(T_0(t)) = A(t) + B(t),$$

with

$$A(t) = 2\mu_0(1 + \mu_0 t) \mathcal{E}(h)(t), \quad B(t) = (1 + \mu_0 t)^2 \frac{d}{dt} \mathcal{E}(h)(t).$$

Therefore, using the subcritical Haff's law (1.19), if  $t > 0$ ,

$$(1.21) \quad \frac{2\mu_0 m}{1 + \mu_0 t} \leq A(t) \leq \frac{2\mu_0 M}{1 + \mu_0 t}.$$

Moreover, by the weak expression (1.3) of  $\mathcal{Q}_e(h, h)$ , equation (1.18), and (1.6) with  $a = 0$ , one has on the one hand,

$$(1.22) \quad \begin{aligned} B(t) &= (1 + \mu_0 t)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}(h, h) |v|^2 dv \\ &= -\beta_e (1 + \mu_0 t)^2 \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} h h_* |v - v_*|^3 dv dv_* \leq 0. \end{aligned}$$

On the other hand, the Fubini theorem and mass conservation yield

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} h h_* |v - v_*|^3 dv dv_* \leq 8m_{3/2}(h).$$

Then, using inequality (1.20) of Lemma 1.2.1 in (1.22) allows one to show that  $B$  satisfies

$$(1.23) \quad -\frac{8\kappa\beta_e}{1 + \mu_0 t} \leq B(t) \leq 0.$$

Therefore, we can gather inequalities (1.21), (1.22), and (1.23) to write

$$(1.24) \quad \frac{2(\mu_0 m - 4\kappa\beta_e)}{1 + \mu_0 t} \leq \frac{d}{dt} \mathcal{E}(g)(T_0(t)) \leq \frac{2\mu_0 M}{1 + \mu_0 t}.$$

Using the chain rule, we have

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(g)(T_0(t)) = T_0'(t) \frac{d}{ds} \mathcal{E}(g)(s) = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 t} \frac{d}{ds} \mathcal{E}(g)(s)$$

and we can finally write, according to (1.24),

$$2m - \frac{8\kappa\beta_e}{\mu_0} \leq \frac{d}{ds} \mathcal{E}(g)(s) \leq 2M.$$

This concludes the proof. □

**Remark 3.** We notice in the proof that the lower bound  $M_0$  is not necessarily a nonnegative constant, allowing the energy of  $g$  to have some inflection points.

We are now ready to prove Theorem 1.1.1.

### 1.2.3 Anomalous Cooling Process

In this Subsection we will prove the cooling process of an anomalous gas for a nonnegative constant  $a$  in the collision kernel (1.4), that is, points (i), (ii) and (iii) of Theorem 1.1.1. Both upper and lower bounds for the energy of  $f$  will be obtained together, thanks to the results of Subsection 1.2.2.

For the sake of simplicity, let us denote for  $t < T_c$

$$E(t) := \mathcal{E}(f)(t) \text{ and } \bar{E}(t) := \mathcal{E}(g)(T(t)),$$

and set  $\tau = 1$ . We have already seen in (1.17) that  $V(t) = \bar{E}(t)^{1/2} E(t)^{-1/2}$ . Then differentiating this expression with respect to time yields

$$(1.25) \quad \begin{aligned} E(t)^{-a} &= V'(t) \\ &= \frac{\bar{E}'(t)}{2(E(t)\bar{E}(t))^{1/2}} - \frac{\bar{E}(t)^{1/2} E'(t)}{2E(t)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Thanks to the expression of  $\bar{E}$  and a chain rule, one has, on the one hand,

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \bar{E}'(t) &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(T(t), w) |w|^2 dw \right) \\ &= T'(t) \chi(t), \end{aligned}$$

where we defined

$$\chi := \frac{d}{ds} (\mathcal{E}(g)) \circ T.$$

On the other hand, the time derivative of  $T$  is given by

$$(1.27) \quad T'(t) = \frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{E(t)^{-a+1/2}}{\bar{E}(t)^{1/2}}.$$

Finally, gathering relations (1.25), (1.26), (1.27) and dividing by  $E(t)^{-a}$ , one has

$$(1.28) \quad \frac{\chi(t)}{\bar{E}(t)} - \bar{E}(t)^{1/2} E'(t) E(t)^{a-3/2} = 2.$$

Thanks to the result of Proposition 1.2.1, there exist two finite constants  $M_0 < 0 < M_1$  such that  $M_0 \leq \chi(t) \leq M_1$ . Thus, using the uniform bounds (1.33) of  $\bar{E}$  and the nonpositivity of  $M_0$ , one has

$$\frac{M_0}{c_0} \leq \frac{\chi(t)}{\bar{E}(t)} \leq \frac{M_1}{c_0}.$$

Therefore, gathering equality (1.28), bounds (1.33), and inequality (1.10) implies that

$$(1.29) \quad -K := c_0^{-1/2} \left( \frac{M_0}{c_0} - 2 \right) \leq E'(t) E(t)^{a-3/2} \leq -\beta_e < 0,$$

where  $\beta_e$  is given by (1.7) and  $K > 0$  because we took  $M_0 < 0 < 2c_1$ . Then, if  $0 \leq a < 1/2$ , the time integration of the two sides of inequality (1.29) between 0 and  $t$  and the fact that  $E(0) = 1$  yield

$$\frac{1}{(C_1 t + 1)^{-2\alpha}} \leq E(t) \leq \frac{1}{(C_2 t + 1)^{-2\alpha}},$$

with  $\alpha = 1/(2a - 1) < 0$ ,  $C_1 = -2\alpha K > 0$  and  $C_2 = -2\alpha\beta_e > 0$ . This is point (i) of Theorem 1.1.1. Moreover, if  $a = 1/2$ , the same argument gives point (ii), namely

$$\exp(-Kt) \leq E(t) \leq \exp(-\beta_e t).$$

Finally, taking  $a > 1/2$  gives point (iii) with  $C_3 = 2\alpha K > 0$  and  $C_4 = 2\alpha\beta_e > 0$ :

$$(1 - C_3 t)^{2\alpha} \leq E(t) \leq (1 - C_4 t)^{2\alpha}.$$

Let us now show the result concerning self-similar profiles of equation (1.1).

### 1.3 Proof of Theorem 1.1.2

For  $a \geq 0$ , we will study in this section the uniqueness of self-similar profiles of the inelastic Boltzmann equation with drift (1.16). The cooling process found in the previous subsection will allow us to state a result concerning convergence of solutions to (1.1) towards self-similar solutions.

We shall use a theorem concerning the convergence toward self-similar profiles for small inelasticity in the scaled granular gases equation (1.16), which has been shown in [134] (we recall it for the reader convenience in Appendix 1.A, Theorem 1.A.3). For this, let us set

$$\tau = \tau_e := 1 - e,$$

in order to balance the dissipation of kinetic energy by the drift. Thanks to this scaling, we have uniqueness and attractiveness of the self-similar profiles of equation (1.16).

Let us show thanks to this theorem the trend toward self-similar solutions of our problem. We have already seen in subsection 1.2.1 that if  $g$  is the solution to (1.16), then  $f$  is the solution to (1.1) with  $f(t, v) = V(t)^d g(T(t), V(t)v)$ , where

$$(1.30) \quad \begin{cases} V(t) = \left( \frac{\mathcal{E}(g)(T(t))}{\mathcal{E}(f)(t)} \right)^{1/2}, \\ T(t) = \frac{\log(V(t))}{\tau_e}. \end{cases}$$

Thus, if  $G_e$  is the unique self-similar profile of equation (1.16), one can find a self-similar solution to equation (1.1) by setting  $F_e(t, v) = V(t)^d G_e(V(t)v)$ . The uniqueness of this solution up to a translation of time can be shown as in [134] to prove the first point of Theorem 1.1.2.

Moreover, the transformation  $w \rightarrow V(t)v$  and the rate of convergence toward equilibrium (1.34) give

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \|f(t, \cdot) - F_e(t, \cdot)\|_{L^1} &= V(t)^d \int_{\mathbb{R}^d} |g(T(t), V(t)v) - G_e(V(t)v)| dv \\ &\leq \|g(T(t), \cdot) - G_e\|_{L^1_2} \\ &\leq e^{-(1-\eta)\nu_e T(t)}. \end{aligned}$$

Besides, thanks to the expression (1.30) of the self-similar variables and the choice  $\tau_e = 1 - e$ , one has

$$\nu_e T(t) = \log(V(t)) + \mathcal{O}(1 - e).$$

The positive lower bound of  $\mathcal{E}(g_{T(t)})$  in Theorem 1.A.2 together with inequality (1.31) and relation (1.30) yields

$$\|f(t, \cdot) - F_e(t, \cdot)\|_{L^1} \leq C\mathcal{E}(f)(t)^{\mu_e/2},$$

where  $\mu_e = 1 - \eta + \mathcal{O}(1 - e)$  and  $C$  is a nonnegative constant. Finally, using the cooling process of Theorem 1.1.1 that we have shown in the last subsection, we can conclude the proof of Theorem 1.1.2, which is the trend toward self-similar solution of the solutions to (1.1) and the rate of convergence depending on the (weak) inelasticity  $1 - e$  and the coefficient  $a$  of the energy dependent collision kernel (1.4).

## Summary and Perspectives

We have given in this chapter the asymptotic behavior of the space-homogeneous inelastic Boltzmann equation for anomalous gases. Depending on a parameter, we can observe in this model a blow up in finite time. We quantified the time of blow up and gave the associated self-similar profiles. Under a weak inelasticity hypothesis, we also obtained the uniqueness (up to a translation of the time) of the self-similar solutions to this equation, and the convergence of the classical solutions toward them.

To prove these theorems, we introduced a new energy-dependent self-similar scaling, which leads to the study of the inelastic Boltzmann equation with a linear drift term. We gave some results concerning the asymptotic behavior of the energy of the solutions to this equation, by using some well known theorems about this equation.

Concerning the perspectives of this work, we would like to adapt our results to nonconstant restitution coefficient models, such as the viscoelastic one. We also want to prove the rate of cooling using a more classical self-similar scaling, generalizing the one used in [76] and [133], and moments methods. That would perhaps allow to give up the rather nonphysical  $L^p$  hypothesis on the initial condition for the proof of Haff's Law.

## Appendix 1.A Some Known Results about the Granular Gases Equation

In this appendix we will present some important results concerning the inelastic Boltzmann equation, with and without drift term, that we used in this chapter.

Let us start by the resolution of the Cauchy problem (1.1)–(1.2) for an anomalous gas.

**Theorem 1.A.1** (Theorem 1.4 of [137]). *Let  $f_{in}$  be a nonnegative distribution satisfying*

$$f_{in} \in L^1_3 \cap \mathcal{G} \text{ and } f_{in} \in BV_4 \cap L^1_5.$$

*Then, the following results hold for a cross section given by (1.4) and (1.5):*

- (i) *The cooling time  $T_c$  is well define and positive.*
- (ii) *For each  $T \in ]0, T_c[$ , there exists a unique solution  $f \in \mathcal{C}(0, T; L^1_2) \cap L^\infty(0, T; L^1_3)$  to the initial value problem (1.1)–(1.2). Such a solution is nonnegative, mass and momentum conservative, and kinetic energy dissipative;*

(iii) The energy of  $f$  is subject to the following asymptotic behavior

$$(1.32) \quad \mathcal{E}(f)(t) \rightarrow 0 \text{ and } f(t, \cdot) \rightarrow \delta_{v=0} \text{ when } t \rightarrow T_c,$$

where the convergence of  $f$  occurs for weak-\* topology of  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ .

We then give a result stating boundedness of solutions to the granular gases equation with a drift term, together with the existence of steady states for this equation. We give a proof of existence in Appendix 1.B

**Theorem 1.A.2** (Theorems 1.1 and 1.3 of [133]). *Let  $g_{in} \in \mathcal{G} \cap L^p$  for a fixed  $p > 1$  be an initial datum for (1.16) with constant restitution coefficient  $e$ . If  $g$  is the solution to the associated Cauchy problem, then*

$$(1.33) \quad 0 < c_0 \leq \mathcal{E}(g)(s) \leq c_1 < \infty, \quad \forall s \geq 0.$$

Moreover, there exists a self-similar profile  $0 \leq G \in L^1_2 \cap \mathcal{G}$ :

$$\tau \nabla_w \cdot (wG) - \mathcal{Q}_e(G, G) = 0.$$

Then, this result was extended, proving uniqueness and attractiveness of the steady states, under a weak inelasticity assumption.

**Theorem 1.A.3** (Theorem 1.1 (i) and (iv) of [134]). *There exists a constructive  $e_* \in (0, 1)$  such that for all  $e \in [e_*, 1)$ , the self-similar profile  $G_e$  from Theorem 1.A.2 is unique and globally attractive on bounded subsets of  $L^1_3$ : for any  $M > 0$ , there exists  $\eta \in (0, 1)$  such that if*

$$g_{in} \in L^1_3 \cap \mathcal{G}, \quad \|g_{in}\|_{L^1_3} \leq M_0,$$

then the solution  $g$  to equation (1.16) satisfies

$$(1.34) \quad \|g(t, \cdot) - G_e\|_{L^1_2} \leq e^{-(1-\eta)\nu_e t},$$

where  $\nu_e = \tau_e + \mathcal{O}(\tau_e^2)$ .

The last important result concerns estimates of the moments of the granular collision operator  $\mathcal{Q}_e$ . For a nonnegative distribution  $f$  and  $p \geq 0$ , we will define the  $2p$ th moment of  $f$  and  $\mathcal{Q}_e(f, f)$  by

$$m_p := \int_{\mathbb{R}^d} f(v) |v|^{2p} dv, \quad \mathcal{Q}_p := \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_e(f, f)(v) |v|^{2p} dv.$$

This theorem was first proved for constant cross section and restitution coefficient in [27] and then extended to the more general case of Grad's cut-off assumption kernels with variable restitution coefficient in [2]. It states the following.

**Theorem 1.A.4** (Lemma 3 of [27], Proposition 2.6 of [2]). *For any  $p \geq 1$ , there exists an explicit constant  $\gamma = \gamma(p, b) \in (0, 1)$  such that*

$$\mathcal{Q}_p \leq -(1 - \gamma) m_{p+1/2} + \gamma S_p,$$

where  $S_p$  is given by

$$S_p = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{p}{k} (m_{k+1/2} m_{p-k} + m_k m_{p-k+1/2}),$$

and the binomial coefficients for noninteger  $p \geq 0$  have been defined by

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1, \quad \binom{p}{0} = 1.$$

## Appendix 1.B Existence of the Self-similar Profiles

For the reader convenience, we shall prove in this appendix existence of the self-similar profiles of equation (1.16). This appendix is mainly inspired from [133].

**A stability estimate.** Let us start with a stability estimate for (1.16).

**Lemma 1.B.1.** *Let  $0 \leq g_{in}, h_{in} \in L^1_3$  be the initial condition of the Cauchy problem for equation (1.16), and  $g, h$  the two associated solutions. Then, there exists a constant  $C_{stab}$  depending on  $g_{in}$  and  $h_{in}$  such that*

$$\|g(s, \cdot) - h(s, \cdot)\|_{L^1_2} \leq \|g_{in} - h_{in}\| e^{C_{stab}s}.$$

*Proof.* Multiplying the equation satisfied by  $g - h$  by  $\varphi(s, w) := \text{sgn}(g(s, w) - h(s, w))(1 + |w|^2)$  and integrating in velocity, one gets using the chain rule

$$\frac{d}{ds} \|g(s, \cdot) - h(s, \cdot)\|_{L^1_2} = -\tau \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_w \cdot (w (g(s, w) - h(s, w))) \varphi(s, w) dw + I(s),$$

where the quantity  $I$  is given by

$$I := \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{Q}_e(g, g) - \mathcal{Q}_e(h, h)) \varphi(w) dw.$$

Therefore, using the weak form (1.3) of the collision operator and the bounds (1.5) of the cross section, we have on the one hand (as in [91]) by symmetry and thanks to the swap  $(w, w_*) \rightarrow (w_*, w)$ ,

$$\begin{aligned} I &\leq C_1 \iiint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |w - w_*| ((g - h) h_* + g (g_* - h_*)) (\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) d\omega dw dw_* \\ &\leq C_1 \iiint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |w - w_*| (g - h)(g_* + h_*) (\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) d\omega dw dw_* \\ &\leq C_2 \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |w - w_*| |g - h| (g_* + h_*) (1 + |w_*|^2) dw dw_*. \end{aligned}$$

On the other hand, we know that

$$(1.35) \quad \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |w - w_*| \psi_1(w) \psi_2(w_*) (1 + |w_*|^2) dw dw_* \leq \|\psi_1\|_{L^1_2} \|\psi_2\|_{L^1_3}.$$

Indeed, (1.35) is equivalent to the following inequality:

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|w - w_*|}{(1 + |w|^2)(1 + |w_*|^2)^{1/2}} \mu(dw, dw_*) \leq 1,$$

where  $\mu$  is the probability distribution defined by

$$\mu(dw, dw_*) := \frac{1}{\|\psi_1\|_{L^1_2} \|\psi_2\|_{L^1_3}} \psi_1(w) \psi_2(w_*) (1 + |w|^2) (1 + |w_*|^2)^{3/2} dw dw_*.$$

To prove (1.35), it then remains to use that

$$|w - w_*| \leq (1 + |w|^2) (1 + |w_*|^2)^{1/2},$$

which can be shown by taking the difference of the square of its two members. Finally, setting  $\psi_1 = |g - h|$  and  $\psi_2 = g + h$  in (1.35) yields

$$(1.36) \quad I(s) \leq C_2 \|g(s, \cdot) - h(s, \cdot)\|_{L_2^1} \|g(s, \cdot) + h(s, \cdot)\|_{L_3^1}.$$

Coming back to the drift term, one has thanks to Divergence formula,

$$(1.37) \quad \begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_w \cdot (w(g(w) - h(w)) \varphi(w)) dw &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(w) - h(w)| \nabla_w \cdot (w(1 + |w|^2)) dw \\ &\quad - d \|g - h\|_{L_2^1} \\ &= 2 \|g - h\|_{L_2^1}. \end{aligned}$$

Gathering inequalities (1.36) and (1.37), one gets

$$\frac{d}{ds} \|g(s, \cdot) - h(s, \cdot)\|_{L_2^1} \leq C_{stab} \|g(s, \cdot) - h(s, \cdot)\|_{L_2^1},$$

with  $C_{stab} := C_2 \sup_{s \geq 0} \|g(s, \cdot) + h(s, \cdot)\|_{L_3^1} + 2\tau < \infty$  because  $g, h \in L^\infty(0, T; L_3^1)$  for all positive  $T$ . The conclusion comes thanks to Gronwall Lemma.  $\square$

We will now focus on the propagation of Lebesgue norms.

**Uniform propagation of Lebesgue norms in rescaled variables.** By splitting the gain term  $\mathcal{Q}_e^+$  of the collision operator into a sum of smooth and remainder terms it was shown in [133] that the following functional inequality holds:

**Proposition 1.B.1** (Proposition 2.6 of [133]). *For any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\theta = \theta(d, p) \in (0, 1)$  and a constant  $C_\varepsilon = C_\varepsilon(d, p) > 0$  such that  $C_\varepsilon \rightarrow \infty$  if  $\varepsilon \rightarrow 0$  and*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g^{p-1}(w) \mathcal{Q}_e^+(g, g)(w) dw &\leq C_\varepsilon \|g\|_{L_1^1}^{1+p\theta} \|g\|_{L^p}^{p(1-\theta)} + \varepsilon \|g\|_{L_2^1} \|g\|_{L_{1/p}^p} \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{L^p}^{p(1-\theta)} + \varepsilon (1 + c_1) \|g\|_{L_{1/p}^p}^p, \end{aligned}$$

where  $c_1$  is the uniform bound of the kinetic energy of  $g$ .

Using this result and the uniform bounds on the energy of the rescaled distribution  $g$  solution to (1.16), it is possible to show the uniform propagation of the  $L^p$  norm of  $g$ :

**Proposition 1.B.2.** *Let us assume that  $g_{in} \in \mathcal{G} \cap L_{1/p}^p$  for  $p > 1$ . If  $g$  is solution to the Cauchy problem for (1.16), there exist positive, explicit constants  $\Lambda$  and  $K$  such that*

$$\sup_{s \geq 0} \|g(s, \cdot)\|_{L^p} \leq \max \left\{ \left( \frac{K}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{p\theta}}, \|g_{in}\|_{L^p} \right\}.$$

*Proof.* Provided that  $g_{in}$  is in  $L_{1/p}^p$ , then  $g(s, \cdot) \in L^p$  for any  $s > 0$ . Multiplying (1.16) by  $|w|^p$ , one gets after integration and the use of Divergence formula, together with the strong form of the collision operator

$$\frac{1}{p} \frac{d}{ds} \|g(s, \cdot)\|_{L^p}^p = \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g^{p-1} \mathcal{Q}_e^+(g, g) dw - \int_{\mathbb{R}^d} g^p L(g) dw \right] - \int_{\mathbb{R}^d} g^{p-1} \nabla_w \cdot (wg) dw.$$

Besides, given that the kernel  $b$  is of finite mass on the unit sphere, one has by Jensen' inequality

$$L(g)(w) = (g *_w |\cdot|)(w) \geq |w|,$$

in which the operator  $*_w$  denotes the convolution in the rescaled velocity space. Moreover, it holds

$$\int_{\mathbb{R}^d} g^{p-1} \nabla_w \cdot (wg) dw = \int_{\mathbb{R}^d} (dg^p + g^{p-1} w \cdot \nabla_w g) dw = d \left(1 - \frac{1}{p}\right) \|g\|_{L^p}.$$

Therefore, one gets

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{ds} \|g(s, \cdot)\|_{L^p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} g^{p-1} \mathcal{Q}_e^+(g, g) dw - \left[ \int_{\mathbb{R}^d} g^p |w| dw + d \left(1 - \frac{1}{p}\right) \|g\|_{L^p}^p \right] \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} g^{p-1} \mathcal{Q}_e^+(g, g) dw - \Lambda_1 \int_{\mathbb{R}^d} g^p (1 + |w|) dw, \end{aligned}$$

with  $\Lambda_1 := 1 + d(1 - 1/p) > 0$ . Then, using Proposition 1.B.1 and the fact that

$$\|g\|_{L_{1/p}^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} g^p (1 + |w|) dw,$$

one can write

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{ds} \|g(s, \cdot)\|_{L^p}^p &\leq C_\varepsilon \|g\|_{L^p}^{p(1-\theta)} - \|g\|_{L_{1/p}^p}^p [\Lambda_1 - \varepsilon(1 + c_1)], \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\leq C_\varepsilon \|g\|_{L^p}^{p(1-\theta)} - \Lambda \|g\|_{L^p}^p, \end{aligned}$$

where  $\Lambda = \Lambda_1 - \varepsilon(1 + c_1)$ . Assuming that

$$\varepsilon < \frac{\Lambda_1}{1 + c_1},$$

$\Lambda$  is also positive. Setting  $K := C_\varepsilon$ , the result of the proposition finally comes using a maximum principle.  $\square$

We are now ready to prove the existence of self-similar profiles.

**Existence of self-similar profiles.** We will use the following abstract Theorem, seen *e.g.* in [77] or in another form in [91]. This is a simple consequence of the Schauder-Tychonoff fixed point Theorem (*e.g.* [73, pp.161-163]).

**Theorem 1.B.1.** *Let  $\mathcal{Y}$  be a Banach space, and  $(T_s)_{s \geq 0}$  a continuous semi-group on  $\mathcal{Y}$  such that:*

- (i) *there exists a nonempty convex subset  $\mathcal{Z}$  of  $\mathcal{Y}$  weakly (sequentially) compact, invariant under the action of  $T_s$ , for all  $s \geq 0$ ;*
- (ii)  *$T_s$  is weakly (sequentially) continuous on  $\mathcal{Z}$ , for all  $s \geq 0$ .*

*Then, there exists  $z_0 \in \mathcal{Z}$  such that  $T_s z_0 = z_0$ , for all  $s \geq 0$ .*



*Proof.* For all  $t > 0$ , thanks to Schauder-Tychonoff fixed point Theorem, there exists  $z_t \in \mathcal{Z}$  such that  $S_t z_t = z_t$ , thanks to hypotheses on  $\mathcal{Z}$  and continuity of  $S_t$ . Then, iterating this relation, one gets

$$S_{l2^{-m}} z_{2^{-n}} = z_{2^{-n}}, \forall l, m, n \in \mathbb{N}, m \leq n,$$

because  $l2^{-m}$  is a multiple of  $2^{-n}$  if  $m \leq n$ . Besides, thanks to the weak compactness of  $\mathcal{Z}$ , there exists an extraction  $(n_k)_{k \geq 0}$  such that

$$z_{n_k} \rightharpoonup z_0 \in \mathcal{Z} \text{ when } k \rightarrow \infty.$$

Then, using weak continuity of  $S_t$ , one gets  $S_t z_0 = z_0$ , for all  $t$  real positive dyadic numbers. Finally, the density of the dyadic numbers in  $\mathbb{R}$  and continuity of  $t \rightarrow S_t$  give the result, that is  $S_t z_0 = z_0$ , for all  $t > 0$ .  $\square$

We shall apply Theorem 1.B.1 to the evolution semi-group  $(T_s)_{s \geq 0}$  of equation (1.16), on the Banach space  $\mathcal{Y} := L_2^1$ . We have to check some properties of this semi-group.

First of all,  $(T_s)_{s \geq 0}$  is continuous on  $\mathcal{Y}$  thanks to the study of the Cauchy problem (Theorem 1.A.1). Moreover, the stability estimate of Lemma 1.B.1 means that  $T_s$  is (strongly) continuous on each bounded subset of  $\mathcal{Z}$ . Besides, if one sets

$$\mathcal{Z} := \left\{ 0 \leq f \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{G}; \|f\|_{L_3^1} + \|f\|_{L^p} \leq M_0 \right\}$$

for  $p > 1$  and  $M_0 > 0$ , then thanks again to Theorem 1.A.1 and to the uniform propagation of  $L^p$  norms we showed in Proposition (1.B.2),  $T_s \mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}$ , for all  $s \geq 0$  (if one sets  $M$  sufficiently large). Being bounded in  $L^p$  norm for  $p > 1$  and then uniformly integrable, the set  $\mathcal{Z}$  is weakly compact in  $\mathcal{Y}$ , thanks to Dunford-Pettis compactness criterion (*e.g.* [68, p.27]).

Finally, one can apply Theorem 1.B.1 to prove existence of a nonnegative distribution  $G \in L_3^1 \cap \mathcal{G} \cap L^p$  stationary solution to equation (1.16).

## Appendix 1.C Numerical Simulations of the Anomalous Cooling Process

In this appendix, we will show that the cooling processes presented in Theorem 1.1.1 can be observed numerically (and even slightly improved) thanks to accurate, deterministic methods. We use the spectral method [84] presented in the introduction of this manuscript (Subsection 3.2) to perform numerical simulations of the anomalous granular gases equation (1.1) for different values of  $a$ .

In the first test, the initial condition is simply taken as the centered reduced Gaussian distribution

$$f_0(v) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

With this choice, we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_0(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

We performed for this test 2 dimensional simulations and took  $N_v = 64$  half Fourier modes in each direction of the velocity space. Due to the high accuracy of the spectral scheme, this is largely enough to observe the cooling process without spurious oscillations because of the concentration in velocity variables.

We observe in Figure 1.2 that the subcritical, critical and supercritical Haff's law hold as expected. Surprisingly, we can see that they hold not only asymptotically, but also for small times: the numerical values of the kinetic energy match almost exactly some explicit functions, depending only on  $f_0$  and  $a$ .

We then present in Figure 1.3 the results of numerical simulations made for an initial condition chosen far from a simple Gaussian distribution, to show that the convergence towards the Dirac mass also hold for complicated initial datum. We took the same grid in the velocity space that in the last simulations. We can observe that the Dirac mass is very well captured by the spectral scheme.

## Acknowledgments

I would like to thank Francis Filbet and Clément Mouhot for fruitful discussions and comments on this article and also for their careful reading. I would also like to thank Bertrand Lods for his encouragement, careful reading, and for pointing out a mistake in a proof in a preliminary version of the work. Finally, I would like to thank the anonymous referees for their very interesting remarks about the manuscript.

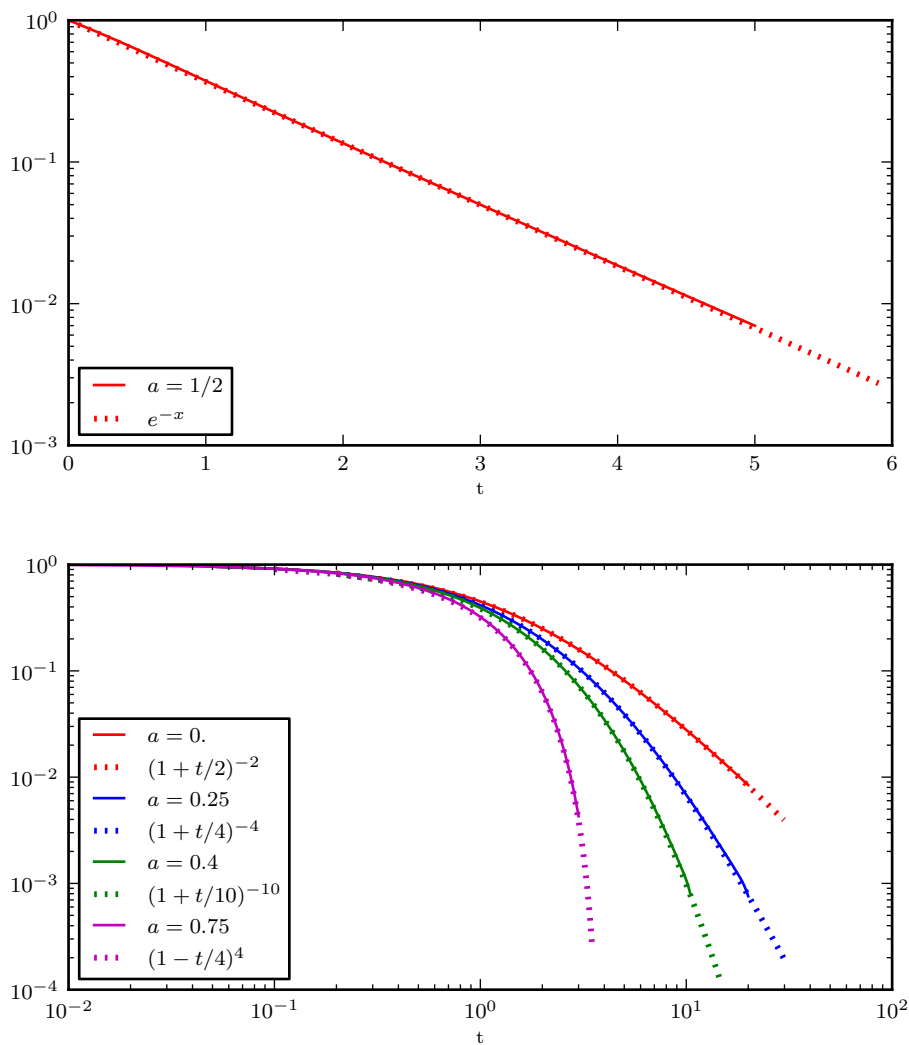


Figure 1.2: Time evolution of the temperature of the solution to equation (1.11) for the subcritical  $a = 0, 1/4$  and  $2/5$ , critical  $a = 1/2$  and supercritical  $a = 3/4$  cases ( $d = 2$ ).

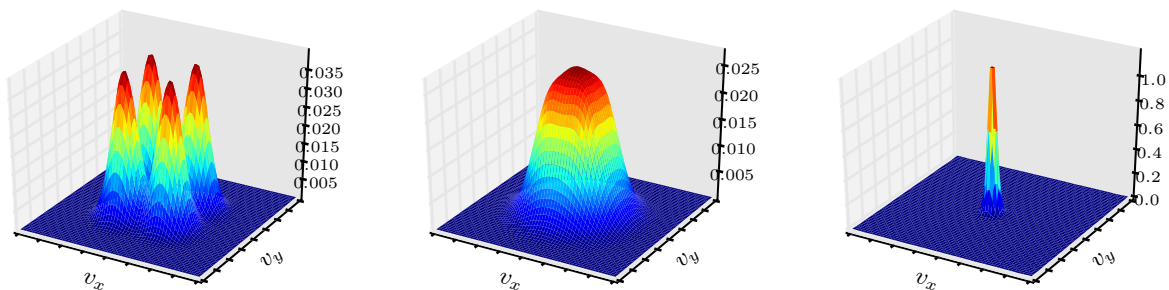


Figure 1.3: Time evolution of the distribution function  $f(t, v)$  in the subcritical case case  $a = 1/4$ , at  $t = 0, 0.5$  and  $7$ .

---

Comportement asymptotique d'approximations de type « Rosenau »  
de l'équation de la chaleur  
En Collaboration avec Giuseppe TOSCANI

---

**Résumé du chapitre.** Dans ce chapitre, nous étudions la validité et le comportement en temps long des solutions d'une classe d'approximations de l'équation de la chaleur, dites approximations de Rosenau [166], introduites initialement comme régularisation du développement de Chapman-Enskog pour des équations hydrodynamiques. Ces approximations consistent essentiellement à remplacer l'équation de la chaleur par une équation cinétique de type Boltzmann linéaire, décrivant les collisions des particules avec un milieu extérieur donné, fixé. Ce milieu est modélisé par une distribution de probabilité de variance finie. De manière intéressante, l'utilisation d'une loi de Bernoulli pour décrire le milieu fait apparaître le schéma aux différences centrées, grand classique de la résolution numérique de l'équation de la chaleur. Nous montrons que les solutions de cette équation sont de « bonnes » approximations, au sens qu'elles convergent vers la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, mais à un taux sous-optimal. Cette dernière propriété n'avait à notre connaissance jamais été observée pour les différences centrées.

---

**Contents**

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>2.2</b>	<b>A Kinetic Description of the Rosenau Approximation . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>2.3</b>	<b>Representations of the Solutions to the Rosenau Equation . . . . .</b>	<b>99</b>
2.3.1	Wild Sums . . . . .	99
2.3.2	Fourier Transform . . . . .	100
<b>2.4</b>	<b>Asymptotic Behavior of Solutions to the Rosenau Equation . . . . .</b>	<b>102</b>
2.4.1	Approximate Solutions with Finite Energy . . . . .	105
2.4.2	Approximate Solution with Finite Fourth Order Moment . . . . .	107
2.4.3	Strong Convergence of a “Regularized” Approximate Solution . . . . .	109
<b>2.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>Appendix 2.A A Characterization of Fourier Transforms of Positive Measures</b>		<b>112</b>

---

## 2.1 Introduction

Rosenau [166] has recently proposed a regularized version of the Chapman-Enskog expansion of hydrodynamics. This regularized expansion resembles the usual Navier-Stokes viscosity terms at low wave-numbers, but unlike the latter, it has the advantage of being a bounded macroscopic approximation to the linearized collision operator. The model is given by the scalar equation

$$(2.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \Psi(f) = \left[ \frac{-\varepsilon \xi^2}{1 + \varepsilon^2 m^2 \xi^2} \hat{f}(\xi) \right]^\vee,$$

where  $\hat{f}(\xi)$  denotes the Fourier transform of  $f(v)$ , while  $f(\xi)^\vee$  denotes the inverse Fourier transform.

The operator on the right hand side looks like the usual viscosity term  $\varepsilon f_{vv}$  at low wave-numbers  $\xi$ , while for higher wave numbers it is intended to model a bounded approximation of a linearized collision operator, thereby avoiding the artificial instabilities that occur when the Chapman-Enskog expansion for such an operator is truncated after a finite number of terms.

One of the advantages of this regularization is that it is equivalent in small frequencies to the heat equation (and then regularizes initial data), whereas high frequencies behave as an absorption term. In particular, information will travel at finite speed, and tools from hyperbolic equations can be used. Note that the right side of (2.1) can be written as

$$(2.2) \quad \left[ \frac{-\varepsilon \xi^2}{1 + \varepsilon^2 m^2 \xi^2} \hat{f}(\xi) \right]^\vee = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon m)^2} \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon^2 m^2 \xi^2} \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi) \right]^\vee = \frac{1}{m \bar{\varepsilon}} [M_{\bar{\varepsilon}} * f - f],$$

where  $\bar{\varepsilon} = m\varepsilon$ ,  $*$  denotes convolution and

$$(2.3) \quad M_\gamma(v) = \frac{1}{2\gamma} e^{-|v|/\gamma}$$

is a non-negative function satisfying  $\|M_\gamma\|_{L^1} = 1$ .

In other words, the Rosenau approximation consists in substituting the linear diffusion equation

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(v, t) = \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(v, t)$$

with the linear kinetic equation

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(v, t) = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} [M_\varepsilon * g(v, t) - g(v, t)]$$

in which the Maxwellian  $M_\varepsilon$  [57] is given by (2.3).

Equation (2.1) has then been studied by S. Schochet and E. Tadmor in [169] in the context of vanishing viscosity solutions of scalar conservation laws. It was also used by C. Rohde to model capillarity effects close to fluid-vapour phase transitions in Navier-Stokes equations [165]. Interestingly, this non-local approach seems more physically relevant than the original Korteweg's idea to use the heat operator for describing such phenomenons. More recently, it has been replaced in a general context of system of hyperbolic balance laws with non-local source term by R. Colombo and G. Guerra in the two companion papers [62, 63]. They showed in particular the well posedness in  $L^1$  (globally in time) of the Cauchy problem for (2.1) together with uniform stability estimates, in the framework of viscosity solutions.

Despite the previous studies, it is not completely clear and well established from a mathematical point of view if the correction proposed by Rosenau is a *good* approximation to the linear heat equation. In particular, it is not clear whether or not the large-time behavior of the solution to the Rosenau approximation agrees with the large-time behavior of the linear diffusion equation.

The aim of this paper is to give an answer to the previous question, and to underline that the Rosenau approximation can be viewed as a particular case of a general approximation to the heat equation by means of a linear kinetic equation of type (2.5), provided the *background density*  $M_\varepsilon$  is a probability density function of zero mean and variance proportional to  $\varepsilon^2$ . In particular, it will be shown that, in a certain metric equivalent to the weak\*-convergence of measures, the distance between the solution to the heat equation and the solution to the kinetic equation can be bounded uniformly in terms of  $\varepsilon$  and  $t$ , provided the background density has a sufficiently high number of moments (typically more than two).

The plan on the paper is as follows. In Section 2.2, using tools of the kinetic theory of rarefied gases, we will introduce a possible derivation and the main features of the Rosenau approximation with a general kernel. This allows to describe well known models such as the central differences schemes for the heat equation. In Section 2.3, this kinetic formulation will be used to obtain explicit solutions to the Rosenau equation (2.5), using both Fourier transform and Wild sums. Lastly, in Section 2.4, we will investigate the large time behavior of the solutions to (2.5), showing that the convergence towards the fundamental solution occurs in weak topology at a suboptimal rate (compared to the heat equation). We shall also combine these results to show that strong convergence in  $L^1$  towards the fundamental solution to the heat equation is obtained after a suitable regularization of the Rosenau equation, obtained by discarding its singular part. Finally, in the Appendix 2.A, we presents a property obtained as a byproduct of the analysis conducted on the Rosenau equation, namely a criterion for a class of function to be the Fourier transform of a probability measure.

## 2.2 A Kinetic Description of the Rosenau Approximation

Let  $v \in \mathbb{R}$  denote velocity, and let us assume to have at time  $\tau > 0$  a system of particles immersed in a background. Let us suppose that the number of particles in the system is sufficiently large to be studied by means of statistical mechanics, namely by giving the velocity distribution  $f(v, \tau)$  at time  $\tau > 0$ . Moreover, let us assume that the main phenomenon which can modify particle's velocity is the interaction of particles with the background. Let  $M(w)$  denote the fixed in time (probability)

distribution of the particles of the background, which we will assume of finite variance  $\gamma^2$ . Assume that the collision process of a particle with velocity  $v$  with a background particle with a velocity  $w$  generates a post-collision velocity  $v^*$  given by

$$(2.6) \quad v^* = v + w.$$

Then, in a suitable scaling [57], the effect of interactions (2.6) on the time-variation of the density  $f(v, \tau)$  can be quantitatively described by a linear Boltzmann-type equation, in which the variation of the density is due to a balance between gain and loss terms, that, for the given number  $v$  take into account all the interactions of type (2.6) which end up with the number  $v$  (gain term) as well as all the interactions which, starting from the number  $v$ , lose this value after interaction (loss term). The balance equation for the density of particles is fruitfully written in weak form. It corresponds to say that the aforementioned interaction process on particles modifies the solution  $f(v, \tau)$  according to

$$(2.7) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(v) f(v, \tau) dv = \lambda \int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi(v^*) - \varphi(v)) f(v, \tau) M(w) dv dw,$$

where the constant  $\lambda > 0$  denotes the intensity of the variation process, and  $\varphi(v)$  is a smooth function. Note that choosing  $\varphi(v) = 1$  shows that, independently of the background distribution,  $f(v, \tau)$  remains a probability density if it so initially

$$\int_{\mathbb{R}} f(v, \tau) dv = \int_{\mathbb{R}} f_0(v) dv = 1.$$

This is in general the unique conservation law associated to equation (2.7).

From now on, let us assume in addition that the probability distribution of the background is centered, and its variance depends on a small parameter  $\varepsilon > 0$ . To emphasize this dependence, we will denote this distribution by  $M_\varepsilon(w) = \varepsilon^{-1} M(\varepsilon^{-1} w)$ . Then  $M_\varepsilon(w)$  satisfies

$$(2.8) \quad \int_{\mathbb{R}} M_\varepsilon(w) dw = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} w M_\varepsilon(w) dw = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} w^2 M_\varepsilon(w) dw = \varepsilon^2 \gamma^2.$$

The weak formulation (2.7) yields immediately the time evolution of the moments of  $f$ . Taking  $\varphi(v) = v$  one obtains

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}} v f(v, \tau) dv = \lambda \int_{\mathbb{R}} w M_\varepsilon(w) dw \int_{\mathbb{R}} f(v, \tau) dv = 0.$$

Moreover, if  $\varphi(v) = v^2$

$$(2.9) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}} v^2 f(v, \tau) dv = \lambda \int_{\mathbb{R}_+^2} [(v^*)^2 - v^2] f(v, \tau) M_\varepsilon(w) dv dw = \lambda \varepsilon^2 \gamma^2.$$

Thus, the second moment of  $f$  grows linearly with respect to time and depends on  $\varepsilon$ . One way to avoid this dependency is to scale the time properly. Setting  $t = \varepsilon^2 \tau$  and introducing a new particles distribution function  $g_\varepsilon$  such that  $g_\varepsilon(v, t) = f(v, \tau)$  gives according to (2.9),

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v^2 g_\varepsilon(v, t) dv = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}} v^2 f(v, \tau) dv = \lambda \gamma^2,$$

and the second moment of  $g_\varepsilon$  does not depend on  $\varepsilon$ .

The distribution  $g_\varepsilon$  is a weak solution to

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(v, t) \varphi(v) dv = \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} [\varphi(v+w) - \varphi(v)] g_\varepsilon(v, t) M_\varepsilon(w) dv dw,$$

with  $g_\varepsilon(v, t=0) = g_0(v) = f_0(v)$ . Note that, since

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(v+w) g_\varepsilon(v, t) M_\varepsilon(w) dv dw &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(z) g_\varepsilon(v, t) M_\varepsilon(z-v) dv dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) M_\varepsilon * g_\varepsilon(z) dz, \end{aligned}$$

equation (2.10) can be rewritten as

$$(2.11) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(v, t) \varphi(v) dv = \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) (M_\varepsilon * g_\varepsilon(v) - g_\varepsilon(v)) dv,$$

which is the weak form of (2.2). Hence, if the background distribution is given by (2.3), equation (2.10) coincides with Rosenau's approximation (2.5), where  $\sigma^2 = \lambda$ . Of course, other choices of the background are possible, and, provided conditions (2.8) are satisfied, the evolution of the moments of the solution to (2.10) up to the second order do not depend on the background distribution.

It is then easy to see that, in the case in which  $M_\varepsilon$  coincides with the "Maxwellian" (2.3),  $g_\varepsilon$  is an approximate (at the leading order in  $\varepsilon$ ) weak solution of the heat equation (2.4). Indeed, given that  $\varepsilon$  is small enough, one can Taylor expand  $\varphi(v^*)$ , where  $v^* = v + w$ , to obtain

$$\varphi(v^*) = \varphi(v) + w \varphi'(v) + \frac{w^2}{2} \varphi''(v) + \frac{1}{3!} \varphi^{(3)}(\tilde{v}) w^3$$

for  $\tilde{v} \in (v, v+w)$ . Using this relation in (2.10), one obtains

$$(2.12) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(v, t) \varphi(v) dv = \frac{\lambda \gamma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(v, t) \varphi''(v) dv + R(\varepsilon)$$

where the remainder  $R(\varepsilon)$  satisfies

$$(2.13) \quad |R(\varepsilon)| \leq \frac{\lambda}{3!} \|\varphi^{(3)}\|_{L^\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} w^3 M_\varepsilon(w) dw = \varepsilon \frac{\lambda}{3!} \|\varphi^{(3)}\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} w^3 M_1(w) dw.$$

**Remark 1.** One can easily notice thanks to (2.12) that equation (2.10) is an approximation to the heat equation (2.4) (with diffusion coefficient  $\sigma^2 = \lambda \gamma^2/2$ ), provided that the remainder converges to zero as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . In order to have this convergence, it is enough that the distribution of the background is such that some moment of order greater than two remains bounded. We will use this in the following to obtain various approximations of the heat equation, just changing the distribution of the background.

**Remark 2.** The Rosenau type kinetic equation (2.10) is such that mass, momentum and energy of its solution have the same evolution of the corresponding moments of the solution to the heat equation (2.4). A further interesting analogy with the heat equation is given by studying the evolution of convex functionals along the solution. Let  $\Phi(r)$ ,  $r \geq 0$  be a (regular) convex function of  $r$ . Then, using equation (2.11) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \Phi(g_\varepsilon(v, t)) dv &= \int_{\mathbb{R}} \Phi'(g_\varepsilon(v, t)) \frac{\partial g_\varepsilon(v, t)}{\partial t} dv \\ &= \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \Phi'(g_\varepsilon(v, t)) (M_\varepsilon * g_\varepsilon(v) - g_\varepsilon(v)) dv. \end{aligned}$$



Thanks to the convexity of  $\Phi(\cdot)$ , for  $r, s \geq 0$

$$\Phi'(s)(r - s) \leq \Phi(r) - \Phi(s),$$

and one obtains

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \Phi(g_\varepsilon(v, t)) dv \leq \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} (\Phi(M_\varepsilon * g_\varepsilon(v)) - \Phi(g_\varepsilon(v))) dv.$$

Now, use the fact that  $M_\varepsilon$  is a probability distribution, so that by Jensen's inequality

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Phi(M_\varepsilon * g_\varepsilon(v)) dv &= \int_{\mathbb{R}} \Phi \left( \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(v - w) M_\varepsilon(w) dw \right) dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(g_\varepsilon(v - w)) M_\varepsilon(w) dv dw = \int_{\mathbb{R}} \Phi(g_\varepsilon(v)) dv, \end{aligned}$$

and one concludes with

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \Phi(g_\varepsilon(v, t)) dv \leq 0.$$

Thus any convex functional is non-increasing along the solution to the Rosenau type kinetic equation (2.5), in agreement with the analogous property of the heat equation.

**Remark 3.** A leading example of Rosenau type approximation is obtained by assuming that the background distribution  $M_\varepsilon$  is a balanced Bernoulli distribution

$$(2.14) \quad M_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} [\delta_0(v + \varepsilon\gamma) + \delta_0(v - \varepsilon\gamma)],$$

where as usual  $\delta_0$  denotes a Dirac mass concentrated at  $v = 0$ . Note that the Maxwellian (2.14) satisfies (2.8). Then, according to (2.11), the distribution  $g_\varepsilon$  solves

$$(2.15) \quad \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}(v, t) = \frac{\lambda}{2\varepsilon^2} [g_\varepsilon(v - \varepsilon\gamma, t) - 2g_\varepsilon(v, t) + g_\varepsilon(v + \varepsilon\gamma, t)].$$

Now, let us fix  $\lambda = 2$  and  $\gamma = \sigma$ . Then, given a parameter  $\Delta v > 0$  and a uniform grid  $v_i = i\Delta v$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  on  $\mathbb{R}$ , by setting  $g_i(t) := g_\varepsilon(v_i, t)$  and  $\varepsilon = \Delta v/\sigma$ , equation (2.15) reads

$$g_i'(t) = \sigma^2 \frac{g_{i+1}(t) - 2g_i(t) + g_{i-1}(t)}{\Delta v^2}.$$

This is exactly the classical semi-explicit second order central differences scheme for the heat equation (2.4). It follows that this scheme furnishes an approximation to the heat equation which satisfies all the properties outlined in Remarks 1 and 2, as well as the convergence towards the exact solution, which follows easily by applying (2.13).

**Remark 4.** The previous example introduces into the matter a background with a non regular distribution (presence of point masses). This situation clearly differs from the standard Rosenau approximation, characterized by the regular density (2.3). Due to its wide applications in numerical simulations, the study of the properties of the Rosenau approximation given by this type of background turns out to be important. For this reason, in addition to the study of the classical Rosenau model, in what follows we will deal also with the Bernoulli type background, outlining when possible the principal differences.

## 2.3 Representations of the Solutions to the Rosenau Equation

Equation (2.5) is a linear kinetic equation of Boltzmann type, which exhibits a lot of similarities with the heat equation. Therefore, we can resort both to linear kinetic theory and to the theory of linear diffusion equations to obtain explicit representations of the solution. We shall present here two equivalent ways to construct these solutions, each one giving a different insight on the behavior of  $g_\varepsilon$ . In the rest of this Section, to avoid inessential difficulties, we will assume that the initial value  $g_0(v)$  is a probability density with finite moments up to a given order (in general more than two).

### 2.3.1 Wild Sums

The first method we introduce to obtain an explicit representation of the solution  $g_\varepsilon$  is closely related to the so-called theory of *Wild sum expansions* of the Boltzmann equation. Wild indeed proved in [190] that one may represent solutions to the nonlinear Boltzmann equation for Maxwell molecules by using convergent power series. This method is particularly simple when one deals with linear convolution equations such as (2.5). To start with, let us set

$$h_\varepsilon(v, t) := \exp\left(\frac{\lambda t}{\varepsilon^2}\right) g_\varepsilon(v, t).$$

Then the Cauchy problem for (2.5) can be rewritten as a fixed point problem (which is nothing but a Duhamel formula). Let  $h \rightarrow \Phi_\varepsilon(h)$  define the map

$$(2.16) \quad \Phi_\varepsilon(h) = g_0 + \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \int_0^t M_\varepsilon * h(s) ds.$$

Then  $g_\varepsilon(v, t)$  solves (2.5) exactly when  $\Phi_\varepsilon(h_\varepsilon) = h_\varepsilon$ .

To find the fixed point, it is then sufficient to make a Picard iteration. Starting from  $h_\varepsilon^{(0)} := g_0$  one defines, for  $n \in \mathbb{N}$

$$(2.17) \quad h_\varepsilon^{(n+1)} = \Phi_\varepsilon\left(h_\varepsilon^{(n)}\right).$$

By recurrence it yields

$$(2.18) \quad \begin{aligned} h_\varepsilon^{(1)}(v, t) &= h_\varepsilon^{(0)}(v, t) + \frac{\lambda t}{\varepsilon^2} M_\varepsilon * g_0(v), \\ h_\varepsilon^{(2)}(v, t) &= h_\varepsilon^{(1)}(v, t) + \left(\frac{\lambda t}{\varepsilon^2}\right)^2 \frac{1}{2} M_\varepsilon * M_\varepsilon * g_0(v), \\ &\vdots \\ h_\varepsilon^{(n)}(v, t) &= h_\varepsilon^{(n-1)}(v, t) + \left(\frac{\lambda t}{\varepsilon^2}\right)^n \frac{1}{n!} M_\varepsilon^{*n} * g_0(v), \end{aligned}$$

where we use the shorthand  $M^{*n} := M * \dots * M$  ( $n$  times). Then, we have for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $\varepsilon > 0$

$$h_\varepsilon^{(n+1)}(v, t) - h_\varepsilon^{(n)}(v, t) \geq 0.$$

Hence the sequence  $\left(h_\varepsilon^{(n)}(v, t)\right)_{n \geq 0}$  converges towards  $h_\varepsilon(v, t) \geq 0$  when  $n \rightarrow \infty$ , where according to (2.18)

$$h_\varepsilon(v, t) = g_0(v) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda t}{\varepsilon^2}\right)^n \frac{1}{n!} M_\varepsilon^{*n} * g_0(v).$$

By passing to the limit  $n \rightarrow \infty$  in (2.17), one obtains that  $h_\varepsilon$  is a (nonnegative) fixed point for (2.16). This procedure allows to write the (nonnegative) solution  $g_\varepsilon$  to the Cauchy problem for (2.5) as

$$(2.19) \quad g_\varepsilon(v, t) = e^{-\lambda t/\varepsilon^2} g_0(v) + e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{\lambda t}{\varepsilon^2} \right)^n \frac{1}{n!} M_\varepsilon^{*n} * g_0(v).$$

### 2.3.2 Fourier Transform

The standard approach to solve the heat equation on the whole space is to use Fourier transform. Given a probability density  $f(v)$ , we define its *Fourier transform*  $\widehat{f}$  for  $\xi \in \mathbb{R}$  by

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi v} f(v) dv.$$

Choosing then  $\varphi(v) = e^{-i\xi v}$  shows that equation (2.11) can be written in Fourier variables as

$$\frac{\partial \widehat{g}_\varepsilon}{\partial t}(\xi, t) = -A_\varepsilon(\xi) \widehat{g}_\varepsilon(\xi, t),$$

where

$$(2.20) \quad A_\varepsilon(\xi) := \lambda \frac{1 - \widehat{M}_\varepsilon(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Then, the Fourier transform of  $g_\varepsilon$  is given by

$$(2.21) \quad \widehat{g}_\varepsilon(\xi, t) = \widehat{g}_0(\xi) \exp \{-A_\varepsilon(\xi) t\}, \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

where  $\widehat{g}_0$  is the Fourier transform of the initial density. Since  $M_\varepsilon$  is a probability density,  $|\widehat{M}_\varepsilon(\xi)| \leq 1$  for all  $\xi \in \mathbb{R}$ , which implies that the real part of  $A_\varepsilon$  is nonnegative. Moreover, thanks to condition (2.8), if  $M_\varepsilon$  possesses more than two moments bounded, one can write

$$A_\varepsilon(\xi) := \frac{\lambda \gamma^2}{2} \xi^2 + o(\xi^2).$$

Finally, it is possible to invert the Fourier transform (2.21) and get

$$(2.22) \quad g_\varepsilon(v, t) = g_0 * P_\varepsilon(\cdot, t)(v),$$

where we have set

$$P_\varepsilon(v, t) = \exp \{-A_\varepsilon(\xi) t\}^\vee(v).$$

Clearly, representations (2.19) and (2.22) have to coincide. Indeed, applying a Fourier transform to (2.19) yields

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \widehat{g}_\varepsilon(\xi, t) &= e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \widehat{g}_0(\xi) + e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{\lambda t}{\varepsilon^2} \right)^n \frac{1}{n!} \widehat{M}_\varepsilon^n(\xi) \widehat{g}_0(\xi) \\ &= e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \left[ \left( e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi) \lambda t/\varepsilon^2} - 1 \right) + 1 \right] \widehat{g}_0(\xi) \\ &= \exp \{-A_\varepsilon(\xi) t\} \widehat{g}_0(\xi), \end{aligned}$$

where  $A_\varepsilon$  is given by (2.20).

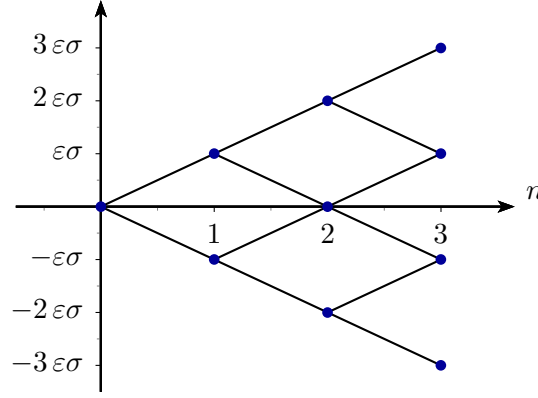


Figure 2.1: Schematic representation of the convolution steps of the central difference kernel. Each node is a Dirac mass, weighted by binomial coefficients.

**Remark 5.** According to relation (2.23), any Rosenau-type approximation to the heat equation is such that the smoothness of the solution is lost, independently of the regularity of the kernel  $M_\varepsilon$ . Indeed, the fundamental solution to equation (2.5) (namely the solution to the Cauchy problem obtained from the initial value  $g_0 = \delta_0$ ) can be represented in Fourier variable by

$$\begin{aligned} \widehat{G}_\varepsilon(\xi, t) &= e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \left( e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi)\lambda t/\varepsilon^2} - 1 \right) + e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \\ (2.24) \qquad \qquad &=: G_1(\xi, t) + G_2(t). \end{aligned}$$

If  $M_\varepsilon \in L^1$ , then according to Riemann-Lebesgue Lemma [174],  $|\widehat{M}_\varepsilon(\xi)| \rightarrow 0$  when  $|\xi| \rightarrow \infty$  and then  $|G_1(\xi, t)| \rightarrow 0$ . The loss of smoothness comes from  $G_2(t)$  which is the Fourier transform of a Dirac mass (of weight depending on time). According to (2.24), the singularity disappears exponentially when  $\varepsilon \rightarrow 0$  or time goes to infinity.

If one considers the Rosenau kernel (2.3) with  $\lambda = \sigma^2$ ,

$$\widehat{M}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{1 + (\varepsilon\sigma)^2 \xi^2},$$

and for all  $t, \varepsilon > 0$ ,

$$G_1(\xi, t) = e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2} \left( \exp \left( \frac{\sigma^2 t}{\varepsilon^2} \frac{1}{1 + (\varepsilon\sigma)^2 \xi^2} \right) - 1 \right).$$

Thus  $G_1(\xi, t)$  decreases exponentially fast towards zero when  $|\xi| \rightarrow \infty$ , and the loss of smoothness comes only from  $G_2$ .

On the contrary, if one considers the central differences kernel (2.14) with  $\lambda = 2$  and  $\sigma > 0$ , then  $\widehat{M}_\varepsilon(\xi) = \cos(\varepsilon\sigma\xi)$  and for all  $t, \varepsilon > 0$ ,

$$G_1(\xi, t) = e^{-2t/\varepsilon^2} \left( \exp \left( \frac{2t}{\varepsilon^2} \cos(\varepsilon\sigma\xi) \right) - 1 \right),$$

which does not converge at infinity. Then, if the kernel has some singularities, the loss of regularity is stronger than in the  $L^1$  case. The representation (2.19) can be used to understand the behavior

in time of the solution obtained from the central differences kernel. Indeed, each convolution by  $M_\varepsilon$  consists in creating a weighted sum of each point (*i.e.* Dirac masses) of the grid (see Figure 2.1):

$$\begin{aligned} M_\varepsilon * \delta_0(v) &= \frac{1}{2} (\delta_0(v - \varepsilon\sigma) + \delta_0(v + \varepsilon\sigma)), \\ M_\varepsilon^{*2} * \delta_0(v) &= \frac{1}{4} \delta_0(v - 2\varepsilon\sigma) + \frac{1}{2} \delta_0(v) + \frac{1}{4} \delta_0(v + 2\varepsilon\sigma), \\ M_\varepsilon^{*3} * \delta_0(v) &= \frac{1}{8} \delta_0(v - 3\varepsilon\sigma) + \frac{3}{8} \delta_0(v - \varepsilon\sigma) + \frac{3}{8} \delta_0(v + \varepsilon\sigma) + \frac{1}{8} \delta_0(v + 3\varepsilon\sigma) \end{aligned}$$

and so on. Thus, the fundamental solution of the central difference scheme is given by

$$g_\varepsilon(v, t) = e^{-2t/\varepsilon^2} \delta_0(v) + e^{-2t/\varepsilon^2} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{2t}{\varepsilon^2} \right)^n \frac{1}{n!} g_\varepsilon^{(n)}(v),$$

where, for  $n \in \mathbb{N}$  we defined

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^{(2n)}(v) &= \left( \frac{1}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} [\delta_0(v + 2k\varepsilon\sigma) + \delta_0(v - 2k\varepsilon\sigma)], \\ g_\varepsilon^{(2n+1)}(v) &= \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} [\delta_0(v + (2k+1)\varepsilon\sigma) + \delta_0(v - (2k+1)\varepsilon\sigma)]. \end{aligned}$$

## 2.4 Asymptotic Behavior of Solutions to the Rosenau Equation

In Section 2.2 the similarities between the Rosenau-type kinetic equation and the linear diffusion equation have been enlightened. In particular, as well known from the classical literature on numerical approximation of partial differential equations, equation (2.5) provides a consistent approximation of the heat equation in a fixed time interval. It is not known, however, if equation (2.5) still realizes a good approximation for large times, and, in case of a positive answer, in which way the difference between the solutions of the Rosenau and diffusion equations can be estimated with respect both to time and the parameter  $\varepsilon$ .

In this Section, we will furnish a partial answer to this question. To clarify our intent, we will briefly resume various well-known facts about the large-time behavior of the solution to the heat equation posed in the whole space.

Let  $g = g(v, t)$  be a solution to the heat equation (2.4) and define the *heat kernel*  $\Omega_\sigma$  by

$$(2.25) \quad \Omega_\sigma(v, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2t}} \exp \left\{ -\frac{v^2}{4\sigma^2t} \right\}, \quad \forall (v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

The Gaussian function in (2.25), which is also known as the fundamental (or self-similar) solution for (2.4), represents an intermediate asymptotics of a large class of solutions to the heat equation. The recent review paper [15] gives a precise state of the art on this topic.

To make this concept more precise, let us define, for  $k > 0$ , the  $k^{\text{th}}$  order moment of a given distribution  $f$  as the quantity

$$\int_{\mathbb{R}} f(v) |v|^k dv.$$

We also define the entropy of  $f$  as

$$\int_{\mathbb{R}} f(v) |\log(f(v))| dv.$$

Then it can be shown [179] that  $g(v, t)$  behaves as the heat kernel when  $t \rightarrow \infty$ , provided that the initial condition  $g_0$  is of finite kinetic energy and entropy:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 + v^2/2 + |\log(g_0(v))|\right) g_0(v) dv < +\infty.$$

Moreover, the rate of convergence towards the fundamental solution can be computed in  $L^1$  norm

$$(2.26) \quad \|g(t) - \Omega_\sigma(t)\|_{L^1} \leq \frac{C}{\sqrt{1+2t}},$$

where  $C$  is an explicit constant and the  $L^p$  norm has been defined for  $p \geq 1$  by

$$\|f\|_{L^p}^p := \int_{v \in \mathbb{R}} |f(v)|^p dv.$$

The bound (2.26) is sharp. A marked improvement of the constant in (2.26) has been recently obtained in [9], by selecting well parameterized Gaussian functions, characterized either by mass centering or by fixing the second moments or the covariance matrix of the solution.

Most of the results follow by considering the equivalence between the heat equation and the linear Fokker-Planck equation

$$(2.27) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left( vu + \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial v} \right).$$

which has a stationary solution given by the Gaussian

$$(2.28) \quad \omega_\sigma(v) := \Omega_\sigma(v, t = 1).$$

Setting  $T(t) := e^{2t-1}/2$ , we can in fact consider the change of variables

$$(2.29) \quad u(v, t) := e^t g(e^t v, T(t)).$$

Then  $u(v, t)$  is solution to the Fokker-Planck equation (2.27) as soon as  $g$  is a solution to the heat equation (2.4). The converse also holds true.

It has been shown in [51] that the solution to the linear Fokker-Planck equation converges for large times to the stationary solution  $\omega_\sigma$  and the following asymptotic behavior holds

$$\|u(t) - \omega_\sigma\|_{L^1} \leq C e^{-t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Using the self-similar scaling (2.29), it is clear that this result is equivalent to the rate (2.26), and once more, the bound is sharp.

Our goal in the following is to prove that the same kind of result holds for the Rosenau-type approximation to the heat equation. Due to the generality of this approximation, which depends of the background distribution  $M$ , we will obtain a weaker convergence (with respect to the  $L^1$  distance) to the fundamental solution, as discussed in Section 2.3, Remark 5. The  $L^1$  distance will be here substituted by some suitable weaker Fourier based metrics, which are particularly adapted to the convolution structure of the kinetic equation (2.10).

This family of metrics has been introduced in the paper [90] to study the trend to equilibrium of solutions to the space homogeneous Boltzmann equation for Maxwell molecules, and subsequently applied to a variety of problems related to kinetic models of Maxwell type. For a more detailed description, we address the interested reader to the recent lecture notes [53].

Given  $s > 0$  and two probability distributions  $f_1$  and  $f_2$ , their Fourier based distance  $d_s(f_1, f_2)$  is the quantity

$$d_s(f_1, f_2) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{|\widehat{f_1}(\xi) - \widehat{f_2}(\xi)|}{|\xi|^s}.$$

The distance is finite, provided that  $f_1$  and  $f_2$  have the same moments up to order  $[s]$ , where, if  $s \notin \mathbb{N}$ ,  $[s]$  denotes the entire part of  $s$ , or up to order  $s - 1$  if  $s \in \mathbb{N}$ . Moreover  $d_s$  is an ideal metric. The main properties are the following

1. For all probability distributions  $f_1, f_2, f_3$ ,

$$d_s(f_1 * f_3, f_2 * f_3) \leq d_s(f_1, f_2);$$

2. Define for a given nonnegative constant  $a$  the dilatation

$$f_a(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Then for all probability distributions  $f_1, f_2$ , and any nonnegative constant  $a$

$$d_s(f_{1,a}, f_{2,a}) \leq a^s d_s(f_1, f_2).$$

This distance can be easily and fruitfully applied to the study of the large-time behavior of the heat equation. In Fourier variables, the solution to the heat equation (2.4) with initial condition  $g_0$  is

$$\widehat{g}(\xi, t) = \widehat{g_0}(\xi) e^{-\sigma^2 \xi^2 t}.$$

Thus, if  $g_0$  is of finite mass, the solution will converge pointwise towards 0 when  $t \rightarrow \infty$ . A way to consider a nontrivial limit distribution is to make the change of variable  $\xi \rightarrow V(t)\xi$  with  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$ . Then, the scaled distribution will converge towards the Gaussian distribution

$$\widehat{\omega}_\sigma(\xi) = \widehat{g_0}(0) e^{-\sigma^2 \xi^2},$$

and one can improve the rate (2.26) in Fourier distance, as soon as the initial datum possesses finite moments of certain order equal to those of the Gaussian [99]. From now on, let us set

$$(2.30) \quad \widehat{\omega}_\sigma(\xi) = \widehat{\Omega}_\sigma(\xi, t = 1) = \exp\{-\sigma^2 \xi^2\},$$

the Fourier transform of the Gaussian distribution (2.28). We prove

**Proposition 2.4.1.** *Let  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$ . For a given  $s > 0$ , let  $g_0$  be a nonnegative distribution of unit mass such that  $d_s(g_0, \omega_\sigma) < \infty$  for some  $s > 1$ . Then, if  $g(v, t)$  is the unique solution to the Cauchy problem (2.4) with initial condition  $g_0$ , the scaled distribution  $h(v, t) := V(t)^{-1} g(V(t)^{-1} v, t)$  is such that, for all  $t \geq 0$*

$$(2.31) \quad d_s(h(t), \omega_\sigma) \leq \frac{1}{(1+t)^{s/2}} d_s(g_0, \omega_\sigma).$$

*Proof.* Thanks to the scaling properties of the Fourier transform one has

$$\begin{aligned}
d_s(h(t), \omega_\sigma) &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{|\widehat{g}(V(t)\xi, t) - \widehat{\omega}_\sigma(\xi)|}{|\xi|^s} \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{1}{|\xi|^s} \left| \widehat{g}_0(V(t)\xi) \exp\left(-\sigma^2 \xi^2 \frac{t}{1+t}\right) - \exp\left(-\sigma^2 \xi^2\right) \right| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{1}{|\xi|^s} \left| \widehat{g}_0(V(t)\xi) - \exp\left(-\sigma^2 \xi^2 V^2(t)\right) \right| \left| \exp\left(-\sigma^2 \xi^2 \frac{t}{1+t}\right) \right| \\
&\leq V(t)^s \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{1}{|\xi|^s} \left| \widehat{g}_0(\xi) - \exp\left(-\sigma^2 \xi^2\right) \right|.
\end{aligned}$$

□

**Remark 6.** Taking a Dirac mass as the initial condition in the Cauchy problem for equation 2.4 shows that these rates are optimal.

### 2.4.1 Approximate Solutions with Finite Energy

To recover the asymptotic behavior of the solution to the Rosenau-type approximation (2.11), we are going to apply a technique similar to that used in Proposition 2.4.1. Let us consider again the scaling  $\xi \rightarrow V(t)\xi$  with  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$ , and define

$$h(v, t) := V(t)^{-1} g\left(V(t)^{-1} v, t\right) \quad \text{and} \quad h_\varepsilon(v, t) := V(t)^{-1} g_\varepsilon\left(V(t)^{-1} v, t\right).$$

If the initial datum  $g_0$  is such that

$$(2.32) \quad \int_{\mathbb{R}} g_0(v) dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} v g_0(v) dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} v^2 g_0(v) dv = E < \infty,$$

and  $\lambda\gamma^2/2 = \sigma^2$ , then  $d_2(g_0, \omega_\sigma)$  is bounded, and, according to (2.31) one obtains

$$(2.33) \quad d_2(h_\varepsilon(t), \omega_\sigma) \leq \frac{1}{1+t} d_2(g_0, \omega_\sigma) + d_2(h_\varepsilon(t), h(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Hence, we have to estimate the Fourier distance between the exact scaled solution  $h$  and its approximate counterpart  $h_\varepsilon$ . We shall use for this the representation (2.21) of  $g_\varepsilon$  in Fourier variables. Let us introduce a positive parameter  $R$ . Since the mass of the initial datum  $g_0$  is equal to 1, one has

$$\begin{aligned}
d_2(h_\varepsilon(t), h(t)) &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{1}{\xi^2} \left| \exp\left\{-A_\varepsilon\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+t}}\right)t\right\} - \exp\left\{-\sigma^2 \xi^2 \frac{t}{1+t}\right\} \right| \\
&\leq \frac{2}{R^2} + \sup_{|\xi| \leq R} \frac{1}{\xi^2} \left| \exp\left\{-A_\varepsilon\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+t}}\right)t\right\} - \exp\left\{-\sigma^2 \xi^2 \frac{t}{1+t}\right\} \right| \\
&\leq \frac{2}{R^2} + \sup_{|\xi| \leq R} \frac{1}{\xi^2} \left| \exp\left\{-\sigma^2 \xi^2 \frac{t}{1+t} \left(\frac{1+t}{\sigma^2 \xi^2} A_\varepsilon\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+t}}\right) - 1\right)\right\} - 1 \right|.
\end{aligned}$$

Using the elementary inequality  $|1 - e^{-x}| \leq |x|$ , one finally has

$$(2.34) \quad d_2(h_\varepsilon(t), h(t)) \leq \frac{2}{R^2} + \sup_{|\xi| \leq R} D_\varepsilon(\xi, t),$$



where

$$D_\varepsilon(\xi, t) := \frac{t}{(\varepsilon\xi)^2} \left| \lambda \left( 1 - \widehat{M}_\varepsilon \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+t}} \right) \right) - \frac{(\varepsilon\sigma\xi)^2}{1+t} \right|.$$

In order to compute this last quantity and to obtain the rate of convergence, let us specify both the background distribution and the constants  $\gamma$  and  $\lambda$ .

**Central Differences.** As in Remark 3, let us set  $\lambda = 2$  and

$$M_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}[\delta_0(v + \varepsilon\sigma) + \delta_0(v - \varepsilon\sigma)].$$

Then  $\widehat{M}_\varepsilon(\xi) = \cos(\varepsilon\sigma\xi)$ , and thanks to Taylor's theorem, there exists  $\theta \in (0, 1)$  such that

$$(2.35) \quad D_\varepsilon(\xi, t) = \frac{t}{3} \frac{\varepsilon\sigma\xi}{(1+t)^{3/2}} \left| \sin \left( \theta \frac{\varepsilon\sigma\xi}{\sqrt{1+t}} \right) \right| \leq \frac{t}{(1+t)^2} \frac{(\varepsilon\sigma\xi)^2}{3}.$$

Gathering inequalities (2.34) and (2.35) yields for  $R > 0$  the inequality

$$d_2(h_\varepsilon(t), h(t)) \leq \frac{2}{R^2} + \frac{t}{(1+t)^2} \frac{(\varepsilon\sigma R)^2}{3}.$$

It just remains to optimize on  $R$  to obtain

$$(2.36) \quad d_2(h_\varepsilon(t), h(t)) \leq \sqrt{\frac{3\sigma^2}{2}} \varepsilon \frac{\sqrt{t}}{1+t}.$$

According to inequality (2.33), this rate is suboptimal. Indeed, the exact solution  $h$  will converge towards the self-similar one at rate  $(1+t)^{-1}$  whereas (2.36) shows that the approximate solution will converge towards the exact one at rate  $(1+t)^{-1/2}$ . We just stated the following

**Proposition 2.4.2.** *Let  $g_0$  be a nonnegative distribution with finite moments up to order 2 given by (2.32). If  $g_\varepsilon$  is solution to Cauchy problem for the Rosenau-type approximation (2.11) with the central difference kernel (2.14), then the scaled distribution  $h_\varepsilon(t, v) := V(t)^{-1} g_\varepsilon(V(t)^{-1}v, t)$  for  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$  verifies for all  $t \geq 0$*

$$d_2(h_\varepsilon(t), \omega_\sigma) \leq \frac{1}{1+t} d_2(g_0, \omega_\sigma) + \sqrt{\frac{3\sigma^2}{2}} \varepsilon \frac{\sqrt{t}}{1+t}.$$

**Remark 7.** The previous result does not take into account the rate of convergence of the initial condition  $g_0$  to its approximated counterpart  $g_{0,\varepsilon}$ . Indeed, when doing a numerical simulation, one has to approximate the initial condition by sampling the original one, and then either take a succession of Dirac masses concentrated at the sampling points or consider a piecewise constant function at these points. In both cases, the optimal rate  $(1+t)^{-1}$  in time will be obtained. Unfortunately, the rate in  $\varepsilon$  is not optimal in this case, because the central difference method should be of order 2 in the space variable.

**Rosenau Regularization.** In this case the Maxwellian reads

$$\widehat{M}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{1 + (\varepsilon\sigma)^2\xi^2},$$

and  $\lambda = \sigma^2$ . We obtain

$$D_\varepsilon(\xi, t) = \frac{(\varepsilon\sigma)^2 t}{1+t} \left| \frac{\xi^2}{1+t + (\varepsilon\sigma)^2\xi^2} \right|.$$

Inserting this expression in inequality (2.34) gives for  $R > 0$

$$d_2(h_\varepsilon(t), h(t)) \leq \frac{2}{R^2} + \frac{t}{(1+t)^2} \frac{(\varepsilon\sigma R)^2}{3}.$$

It just remains to optimize on  $R$  to obtain the rate of convergence in  $d_2$  norm of  $h_\varepsilon$  towards  $h$ :

$$(2.37) \quad d_2(h_\varepsilon(t), h(t)) \leq \sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} \varepsilon \frac{\sqrt{t}}{1+t}.$$

Hence, this approximation has exactly the same order of convergence than the one given by the central differences kernel. We proved

**Proposition 2.4.3.** *Let  $g_0$  be a nonnegative distribution with finite moments up to order 2 given by (2.32). If  $g_\varepsilon$  is solution to Cauchy problem for the Rosenau-type approximation (2.11) with the Rosenau kernel (2.3), then the scaled distribution  $h_\varepsilon(t, v) := V(t)^{-1} g_\varepsilon(V(t)^{-1}v, t)$  for  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$  verifies, for all  $t \geq 0$*

$$d_2(h_\varepsilon(t), \omega_\sigma) \leq \frac{1}{1+t} d_2(g_0, \omega_\sigma) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} \varepsilon \frac{\sqrt{t}}{1+t}.$$

**Remark 8.** Note that as a by-product of our analysis of the large-time behavior of the solution to the Rosenau-type approximation of the diffusion equation we proved that the  $d_2$ -distance between the solution of the diffusion equation and its numerical approximation by the central difference scheme is uniformly bounded in time with respect to the parameter  $\varepsilon$ , as given by (2.36).

## 2.4.2 Approximate Solution with Finite Fourth Order Moment

In Subsection 2.4.1, the convergence results required the boundedness of the  $d_2$ -distance between the initial value of the Rosenau equation and the Gaussian density. This boundedness has been achieved by assuming that the initial datum is of finite energy. Indeed, moments play an important role with respect to convergence. We will improve here the results of Subsection 2.4.1, provided that the initial condition has finite moments up to order four. We will see that this allows to compute the rate of convergence (in time) towards self-similarity with very few assumptions on the kernel  $M_\varepsilon$ .

Without loss of generality (thanks to scaling and translational invariance), we can choose the initial distribution  $g_0$  to satisfy

$$\int_{\mathbb{R}} g_0(v) \varphi(v) dv = (1, 0, 1, 0, \mu),$$

where  $\varphi(v) = (1, v, v^2/2, v^3, v^4)$ , and  $\mu$  is a positive constant. If  $g$  is solution to the Cauchy problem for equation (2.4) with initial condition  $g_0$ , then in one hand

$$(2.38) \quad \int_{\mathbb{R}} g(v, t) \varphi(v) dv = (1, 0, 1 + t\sigma^2, 0, \mu + 24t + 12\sigma^2 t^2).$$

In the other hand, a solution  $g_\varepsilon$  to equation (2.11) with same initial datum verifies

$$(2.39) \quad \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(v, t) \varphi(v) dv = (1, 0, 1 + t\sigma^2, 0, \mu + (24 + B_\varepsilon)t + 12\sigma^2 t^2),$$

provided that  $M_\varepsilon$  follows assumption (2.8) and where

$$B_\varepsilon := \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} M_\varepsilon(v) v^4 dv.$$

We can see that the fourth order moment of the exact and approximate solutions differ at time  $t > 0$  from a factor  $B_\varepsilon t$ . Keeping the same notations of Subsection 2.4.1, we will use this fact to compute the  $d_3$  distance between the rescaled approximate solution  $h_\varepsilon$  and the rescaled exact one  $h$ . Indeed, it is well known (see for example the textbook [174] of E. Stein and R. Shakarchi) that if  $k \in \mathbb{N}$ , the  $k^{\text{th}}$  moment of a distribution correspond to the  $k^{\text{th}}$  derivative of its Fourier transform. Then  $\widehat{g}(\cdot, t)$  and  $\widehat{g}_\varepsilon(\cdot, t)$  are at least four times differentiable and according to Taylor's theorem (2.38)–(2.39) imply

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi, t) &= 1 + \frac{1 + t\sigma^2}{2} \xi^2 + \frac{1 + 24t + 12\sigma^2 t^2}{24} \xi^4 + \mathcal{O}(|\xi|^5), \\ \widehat{g}_\varepsilon(\xi, t) &= 1 + \frac{1 + t\sigma^2}{2} \xi^2 + \frac{1 + (24 + B_\varepsilon)t + 12\sigma^2 t^2}{24} \xi^4 + \mathcal{O}(|\xi|^5). \end{aligned}$$

Thus, one has for  $R > 0$

$$(2.40) \quad \begin{aligned} d_3(h_\varepsilon(t), h(t)) &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^*} \frac{1}{|\xi|^3} \left| \widehat{g}_\varepsilon\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+t}}, t\right) - \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1+t}}, t\right) \right| \\ &\leq \frac{2}{R^3} + \frac{B_\varepsilon t}{24(1+t)^2} R. \end{aligned}$$

Optimizing (2.40) over  $R$  and gathering the result with inequality (2.31) (with  $s = 3$ ) gives

**Theorem 2.4.1.** *Let  $g_0$  be a nonnegative distribution with finite moments up to order 4. If  $g_\varepsilon$  is solution to the Rosenau approximation (2.11) with a kernel  $M_\varepsilon$  verifying (2.8), then the scaled distribution  $h_\varepsilon(t, v) := V(t)^{-1} g_\varepsilon(V(t)^{-1}v, t)$  for  $V(t) := (1+t)^{-1/2}$  is such that, for all  $t \geq 0$*

$$d_3(h_\varepsilon(t), \omega_\sigma) \leq \frac{1}{(1+t)^{3/2}} d_3(g_0, \omega_\sigma) + \frac{13\sqrt{2}}{24} (B_\varepsilon)^{3/4} \left( \frac{\sqrt{t}}{1+t} \right)^{3/2},$$

where  $\omega_\sigma$  is the Gaussian distribution (2.30) and

$$B_\varepsilon := \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} M_\varepsilon(v) v^4 dv.$$

**Remark 9.** Once more, the rate of convergence in time is suboptimal. Nevertheless, it gives a better convergence in time with respect to the one obtained with a minor number of moments. In this case, in fact, the difference in Fourier norm between solutions converges to zero at rate  $(1+t)^{-3/4}$ . This suggests that the rate of convergence approaches the optimal rate when the number of moments of the initial value approach infinity.

Let us now specify the kernel  $M_\varepsilon$ , to check if there are essential differences among the rate of convergence in  $\varepsilon$ .

The choice of the central differences kernel

$$M_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}[\delta_0(v + \varepsilon\sigma) + \delta_0(v - \varepsilon\sigma)]$$

gives  $B_\varepsilon = 2\varepsilon^2\sigma^4$ . Then

$$d_3(h_\varepsilon(t), \omega_\sigma) \leq \frac{1}{(1+t)^{3/2}} d_3(g_0, \omega_\sigma) + C_1 \varepsilon^{3/2} \left( \frac{\sqrt{t}}{1+t} \right)^{3/2},$$

where  $C_1$  is a positive constant depending on  $\sigma$ . Compared to (2.36), the rate in  $\varepsilon$  is improved by a factor  $1/2$ .

If we consider now the Rosenau kernel

$$\widehat{M}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{1 + (\varepsilon\sigma)^2 \xi^2},$$

$B_\varepsilon = K\varepsilon^3$  for a nonnegative constant  $K$ . Then

$$d_3(h_\varepsilon(t), \omega_\sigma) \leq \frac{1}{(1+t)^{3/2}} d_3(g_0, \omega_\sigma) + C_2 \varepsilon^{9/4} \left( \frac{\sqrt{t}}{1+t} \right)^{3/2},$$

where  $C_2$  is a positive constant depending on  $\sigma$ .

**Remark 10.** We can see here that we have really improved the rate in  $\varepsilon$ , and moreover, this rate depends closely on the Rosenau kernel. This shows once more that the number of moments is an essential part of the size of the rate in  $\varepsilon$ . Indeed in formulas (2.36) and (2.37), where only moments up to order 2 were considered, this difference between kernels was not evident.

### 2.4.3 Strong Convergence of a ‘‘Regularized’’ Approximate Solution

Let us assume that the kernel  $M_\varepsilon$  belongs to  $L^1(\mathbb{R})$ . The analysis of Section 2.4 shows that, in a suitable scaling which allows to maintain the energy of the solution bounded, there is convergence in Fourier distance towards a Gaussian function. This result, however, can not be directly used to conclude that the solution to the Rosenau kinetic equation converges towards the fundamental solution, as time goes to infinity. In fact, since the  $d_s$ -metric is not scaling invariant, and the decay in time of the distance found in Theorem 2.4.1 is of order  $t^{-3/4}$ , by reverting to the original variables, the decay in time disappears. Nevertheless, these weak convergence estimates can be fruitfully employed to prove that a regularized part of the solution to Rosenau equation converges strongly toward the fundamental solution to the heat equation. To this extent, we shall make a heavy use of the representations given in Section 2.3. In particular, we will write the fundamental solution (2.24) by splitting it in two parts

$$\begin{aligned} \widehat{G}_\varepsilon(\xi, t) &= e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \left( e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi)\lambda t/\varepsilon^2} - (1 - \widehat{M}_\varepsilon(\xi)) \right) + (1 - \widehat{M}_\varepsilon(\xi)) e^{-\lambda t/\varepsilon^2} = \\ &=: \widehat{P}_{\varepsilon,reg}(\xi, t) + (1 - \widehat{M}_\varepsilon(\xi)) e^{-\lambda t/\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

As we shall see, this splitting separates in a natural way the singular part of the kernel from its *regularized* part  $P_{\varepsilon,reg}$

$$(2.41) \quad \widehat{P}_{\varepsilon,reg}(\xi, t) := e^{-\lambda t/\varepsilon^2} \left( e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi)\lambda t/\varepsilon^2} - (1 - \widehat{M}_\varepsilon(\xi)) \right).$$

Let  $g$  (respectively  $g_{\varepsilon,reg}$ ) a solution to the heat equation (2.4) (resp. a solution to the Rosenau equation (2.5) obtained by convolution with the regularized kernel). In other words

$$(2.42) \quad \begin{aligned} g(v, t) &= g_0(v) * \Omega_\sigma(\cdot, t), \\ g_{\varepsilon,reg}(v, t) &= g_0(v) * P_{\varepsilon,reg}(\cdot, t). \end{aligned}$$

Then, since the initial datum  $g_0(v)$  is of unit mass,

$$\begin{aligned} \|g(t) - g_{\varepsilon,reg}(t)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (\Omega_\sigma(v-w, t) - P_{\varepsilon,reg}(v-w, t)) g_0(w) dw \right| dv \\ &\leq \|\Omega_\sigma(t) - P_{\varepsilon,reg}(t)\|_{L^1}. \end{aligned}$$

On the other hand, if  $\lambda = \sigma^2$

$$\begin{aligned} \left| \widehat{P}_{\varepsilon,reg}(\xi, t) - \widehat{\Omega}_\sigma(\xi, t) \right| &= \left| e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2} \left( e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi) \sigma^2 t/\varepsilon^2} - (1 - \widehat{M}_\varepsilon(\xi)) \right) - e^{-\sigma^2 |\xi|^2 t} \right| \\ &\leq \left| e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2} e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi) \sigma^2 t/\varepsilon^2} - e^{-\sigma^2 |\xi|^2 t} \right| + \left| 1 - \widehat{M}_\varepsilon(\xi) \right| e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

and this implies

$$(2.43) \quad d_2(P_{\varepsilon,reg}(t), \Omega_\sigma(t)) \leq d_2(G_\varepsilon(t), \Omega_\sigma(t)) + d_2(M_\varepsilon, \delta_0) e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2}.$$

By means of the scaling property of the Fourier metric  $d_s$ , formula (2.43) ensures that, after the scaling  $\xi \rightarrow \xi/\sqrt{1+t}$ , the convergence results (in scaled variables) of Section 2.4 guarantee the convergence of the regularized kernel towards the Gaussian fundamental solution.

Now, thanks to the regularity of  $P_{\varepsilon,reg}(t)$ , we can consider also convergence of the (regularized) approximate fundamental solution  $P_{\varepsilon,reg}$  towards the heat kernel  $\Omega_\sigma$  in stronger norms, typically  $L^1$ , which are invariant with respect to dilatation. Actually, it is enough to deal with  $L^2$  norms. Indeed, it is well known [46, 53] that if  $f \in L^2(\mathbb{R})$  is of finite kinetic energy, there exists an explicit, nonnegative constant  $C_1$  such that

$$(2.44) \quad \|f\|_{L^1} \leq C_1 \|f\|_{L^2}^{2/5} \left( \int_{\mathbb{R}} |v|^2 |f(v)| dv \right)^{1/5}.$$

Note that the second moment of the quantities involved is uniformly bounded only in the scaled variables used in Section 2.4. In original variables, in fact, the second moment of the solution, both of the heat equation and its Rosenau approximation, is increasing linearly with respect to time. Then, it is possible to interpolate the  $L^2$  norm by some appropriate Fourier and homogeneous Sobolev norms. More precisely, if we define for  $p > 0$  the  $s^{th}$  homogeneous Sobolev norm of  $f$  as

$$\|f\|_{\dot{H}^p}^2 := \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2p} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

it was shown in [46] that for all  $r \in (0, 1)$  there exists an explicit, nonnegative constant  $C_2 = C_2(r)$  such that

$$(2.45) \quad \|f - g\|_{L^2} \leq C_2 d_2(f, g)^{2(1-r)} \|f - g\|_{\dot{H}^N}^{2r},$$

where  $N = 5(1-r)/r$ . Then, according to inequalities (2.44)–(2.45)–(2.43) and to the results of Subsection 2.4.2, we will obtain the strong convergence of  $P_{\varepsilon,reg}(t, \cdot)$  towards  $\Omega_\sigma(t, \cdot)$  when  $t \rightarrow \infty$  if the function  $G_\varepsilon(\cdot, t)$  belongs to the homogeneous Sobolev space  $\dot{H}_v^N(\mathbb{R})$  for arbitrarily small  $N$ .

We will deal with the Rosenau kernel with  $\lambda = \sigma^2$

$$\widehat{M}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{1 + (\varepsilon\sigma)^2 \xi^2}$$

which belongs to  $\dot{H}^p(\mathbb{R})$  for all  $p < 1$ . Hence, in scaled variables, for all  $p < 1$

$$e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2} \left\| \widehat{M}_\varepsilon \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+t}} \right) \right\|_{\dot{H}^N}^p = e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2} \left( \frac{\sqrt{1+t}}{\varepsilon\sigma} \right)^{1+p} \|\widehat{M}_\varepsilon(\xi)\|_{\dot{H}^N}^s \leq C(\varepsilon) \|\widehat{M}_\varepsilon(\xi)\|_{\dot{H}^N}^s.$$

According to (2.41), it remains to check the smoothness of

$$\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon(\xi, t) := e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi) \sigma^2 t/\varepsilon^2} - 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Let us set  $p < 1$ . We have thanks to *de l'Hospital* rule

$$\begin{aligned} \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \xi^{p+1} \widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon(\xi, t) &= \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi) \sigma^2 t/\varepsilon^2} - 1}{\frac{1}{\xi^{p+1}}} \\ &= \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} -\frac{\sigma^2 t}{(p+1)\varepsilon^2} \xi^{p+2} \widehat{M}_\varepsilon'(\xi) e^{\widehat{M}_\varepsilon(\xi) \sigma^2 t/\varepsilon^2} \\ &= \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^4 t}{p+1} \frac{\xi^{p+3}}{1 + (\varepsilon\sigma)^2 \xi^2} \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{\varepsilon^2 (1 + (\varepsilon\sigma)^2 \xi^2)}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Then we have proved that  $\xi^p \widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon(\xi, t) = o(\xi^{-1})$  which means according to Riemann criterion that  $\mathcal{G}_\varepsilon(\cdot, t) \in \dot{H}^p(\mathbb{R})$  for any  $t \geq 0$ . Proceeding as before, we then conclude that

$$e^{-\sigma^2 t/\varepsilon^2} \left\| \widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+t}} \right) \right\|_{\dot{H}^N}^p \leq C(\varepsilon) \|\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon(\xi)\|_{\dot{H}^N}^p.$$

Finally,  $P_{\varepsilon, \text{reg}}(\xi/\sqrt{1+t}, t) \in \dot{H}^p(\mathbb{R})$ , meaning thanks to inequalities (2.44)–(2.45)–(2.43) and Theorem 2.4.1 that the following theorem holds

**Theorem 2.4.2.** *Under the assumptions of Theorem 2.4.1, if  $g$  is a solution to the heat equation (2.4) and  $g_{\varepsilon, \text{reg}}$  is given by (2.42) for the Rosenau kernel (2.3), then one has*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t) - g_{\varepsilon, \text{reg}}(t)\|_{L^1} = 0.$$

**Remark 11.** Theorem 2.4.2 has various consequences. Coupling the decay of the  $d_2$  metric obtained in (2.36) with inequalities (2.44) and (2.45), the regularity of  $P_{\varepsilon, \text{reg}}$  implies a rate of decay of the  $L^1$ -norm smaller or equal to  $(1+t)^{-1/15}$ . On the other hand, the singular part of the fundamental solution  $\widehat{\mathcal{G}}_\varepsilon(\xi, t)$  converges to zero exponentially both in time and with respect to  $\varepsilon$ . Hence, after a transitory time, there is prevalence of the regular part of the fundamental solution, which decays to zero in  $L^1$  at a suboptimal rate. Therefore, the main difference between the large-time behavior of the heat equation and its Rosenau approximation consists in a slower rate of convergence of the latter towards the Gaussian fundamental solution. The method of proof also indicates that the rate of convergence in  $L^1$  is strictly linked to the regularity of the distribution of the background. For this reason, the argument leading to Theorem 2.4.2 can not be applied to the central difference approximation. Maybe a different approach will help to clarify if, in some weaker norm, a result similar to that of Theorem 2.4.2 holds also for the central difference type approximation.

## 2.5 Conclusions

We studied in this paper the validity of the approximation to the linear diffusion equation proposed by Rosenau [166] as a regularized version of the Chapman-Enskog expansion of hydrodynamics. This approximation essentially is realized by substituting the heat equation with a linear kinetic equation of Boltzmann type, describing collisions of particles with a fixed background. This remark allows to consider the Rosenau approximation as a particular realization of a model Boltzmann equation, in which the background distribution is a general probability density with bounded variance. In addition to the Rosenau distribution, we considered in this paper also a point masses background, which furnishes the central difference scheme to solve the linear diffusion equation. The main differences between the action of the two different backgrounds have been studied in some details. In particular, our analysis put into evidence that the approximation with a regular kernel is a good approximation, in that it possesses most of the typical properties of the heat equation, including the same large-time behavior, a part of a slower rate of decay towards the fundamental solution. We were not able to prove an analogous property for the non regular approximation, for which the rate of decay towards the Maxwellian distribution has been only proven in scaled variables.

## Appendix 2.A A Characterization of Fourier Transforms of Positive Measures

As a byproduct of the analysis we have made on this chapter, we discovered a property that we believe is new in the theory of Fourier transforms. It is a criterion for a given function  $P = P(\xi)$  for  $\xi \in \mathbb{R}$  to be the Fourier transform of a probability measure  $\mu$  (namely a finite measure of unit mass).

There exists a lot of results on this topic, such as the so-called *Pólya criterion* [168], stating that  $P : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  is the Fourier transform of a probability measure if it is even, continuous on  $[0, \infty)$ , convex on  $(0, \infty)$  and verify

$$P(0) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} P(\xi) = 0.$$

This result can also give the expression of the measure  $\mu$ , but under additional technical assumptions. Another very strong result on this topic is the well known *Bochner's Theorem* [33], which give a characterization of such functions under the hypothesis of being *positive definite*, namely that for all  $n \in \mathbb{N}$ , for all  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , the matrix  $(P(x_i - x_j))_{i,j=1\dots n}$  is positive semi-definite. This requirement is rather hard to verify in practical cases, and do not give the value of the measure  $\mu$ . What we obtained is a somehow weaker result, but it gives a precise characterization of the measure  $\mu$ :

**Proposition 2.A.1.** *Let  $M \in L^1(\mathbb{R})$  be a positive measure with moments finite up to order 2. Then the function*

$$(2.46) \quad P(\xi) := \exp\left(\widehat{M}(\xi) - 1\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

*is the Fourier transform of a probability measure  $\mu$ , given by*

$$\mu(v) = e^{-1} \delta_0(v) + e^{-1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} M_\varepsilon^{*n}(v).$$

*Proof.* We essentially carried out the whole proof in Section 2.3. Indeed, if we take  $\varepsilon = \lambda = t = 1$  in the representation in Fourier variables (2.21) of the solutions to the Rosenau equation for the kernel  $M_\varepsilon := M$  with  $g_0 = \delta_0$ , the Dirac mass centered in  $v = 0$ , we obtain the expression of  $P$  in (2.46).

Thus,  $P$  is a solution to the Rosenau equation (2.5), and as so is a positive measure of unity mass thanks to mass conservation. Finally, the representation of  $\mu$  is nothing but the Wild sum expansion (2.19).  $\square$

**Remark 12.** By iterating the construction (2.46), we can obtain a large class of new functions which are the Fourier transform of a positive measure. Indeed, thanks to the moments properties of the Rosenau equation, if  $M \in L^1_2$  then it is the same for  $P$ , because  $P$  is given by the solution of (2.5) taken at  $t = 1$ . Thus,  $P$  fulfills the hypothesis of proposition 2.A.1, and then the function

$$\xi \mapsto \exp \left( \exp \left( \widehat{M}(\xi) - 1 \right) - 1 \right)$$

is the Fourier transform of a positive measure, and so on...

## Acknowledgment

This work was initiated during a visit of Thomas Rey, which thanks the University of Pavia for its grateful hospitality. The research of TR was granted by the European Research Council ERC Starting Grant 2009, project 239983-NuSiKiMo. GT acknowledges support by MIUR project ‘‘Optimal mass transportation, geometrical and functional inequalities with applications’’.





Deuxième partie

---

## **Méthodes spectrales pour l'analyse numérique de problèmes multi-échelles**

---



Cette partie est consacrée au développement et à l'utilisation de méthodes spectrales pour l'analyse numérique de problèmes multi-échelles issus de la théorie des équations cinétiques collisionnelles, c'est à dire à l'étude d'équations dont le prototype est le suivant :

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{\mathcal{Q}(f^\varepsilon)}{\varepsilon},$$

où la distribution de particules  $f^\varepsilon = f^\varepsilon(t, x, v)$  pour  $t \geq 0$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$  dépend d'un paramètre  $\varepsilon$  exprimant la raréfaction du gaz, et donc le régime considéré.

Le premier chapitre présente le développement d'un nouvel algorithme introduit pour étudier le comportement en temps long d'équations cinétiques collisionnelles. Cette méthode est basée sur une mise à l'échelle de l'équation initiale par l'énergie cinétique relative et s'applique naturellement aux gaz granulaire (grâce à la loi de Haff). Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans [85]. Les techniques numériques utilisées pour le calcul de l'opérateur de collision seront en majorité des méthodes spectrales.

Le second chapitre est dédié au développement et l'étude, à l'aide de méthodes spectrales, d'algorithmes rapides pour le calcul de modèles cinétiques collisionnels de type « vitesses discrètes ». En particulier, on y montre que le coût typique d'une méthode de ce type, de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^{2d+1})$ , où  $d$  est la dimension de l'espace des vitesses, peut être ramenée à  $\mathcal{O}(N^d \log(N))$ , et ce sans perte de précision ou de positivité des solutions.



---

Une méthode de changement d'échelle pour des équations cinétiques collisionnelles – Applications aux milieux granulaires  
En collaboration avec Francis FILBET

---

**Résumé du chapitre.** Nous présentons dans ce chapitre un nouvel algorithme numérique élaboré pour l'étude en temps long d'équations cinétiques collisionnelles, basé sur une mise à l'échelle de l'équation initiale par l'énergie cinétique relative. Cette technique permet d'éviter les problèmes habituels de changement d'échelle dans l'espace des vitesses induits par la plupart des équations cinétiques collisionnelles. Nous présentons deux possibilités différentes de mise à l'échelle, ainsi que plusieurs applications de cette méthode à des équations cinétiques de type Boltzmann (gaz raréfiés classiques ou gaz granulaires) sur des domaines d'espaces avec conditions aux bords de Maxwell. Nous mettons enfin l'accent sur l'équation des gaz granulaires lors des simulations numériques en montrant que malgré la dissipation d'énergie cinétique, notre méthode permet l'étude numérique de problèmes délicats, comme le retour vers l'équilibre global, des problèmes de flot de cisaillement et même la formation de « clusters ».

---

**Contents**

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>120</b>
<b>3.2</b>	<b>The Rescaling Velocity Method</b>	<b>122</b>
3.2.1	The Generalized Filbet-Russo Scaling	122
3.2.2	The Macroscopic Scaling	123
<b>3.3</b>	<b>Applications of the Rescaling Velocity Method</b>	<b>124</b>
3.3.1	Application to the Boltzmann Equation	124
3.3.2	Application to the Granular Gases Equation	125
3.3.3	Application to a Simplified Granular Gases Model	127
<b>3.4</b>	<b>Boundary Conditions</b>	<b>128</b>
3.4.1	Specular Boundary Conditions	130
3.4.2	Diffusive Boundary Conditions	130
<b>3.5</b>	<b>Discretization of the Problem</b>	<b>131</b>
3.5.1	The Finite Volume Method for a Conservative Transport Equation	131
3.5.2	The Spectral Method for the Collision Operator	132
3.5.3	The WENO Approach for a System of Conservation Laws	134
<b>3.6</b>	<b>Numerical Simulations</b>	<b>135</b>
3.6.1	Convergence toward a Dirac mass	135
3.6.2	Trend to Equilibrium in the Non Homogeneous Case	136
3.6.3	Inelastic Shear Flow Problem	142
3.6.4	Cluster Formation in Granular Gases	143
<b>Appendix 3.A Quasi-Elastic Limit of the Granular Gases Operator</b>		<b>145</b>
3.A.1	Taylor Expansion of the Collision Operator	147
3.A.2	Macroscopic Properties of the Dissipative Operator	148
<b>Appendix 3.B A Formal Compressible Euler Limit</b>		<b>149</b>

---

### 3.1 Introduction

We are interested in numerical simulations of the long time behavior of collisional kinetic equations such as the Boltzmann equation for granular gases. To this end, we introduce a new technique which is based on the information provided by the hydrodynamic fields computed from a macroscopic model corresponding to the original kinetic equation. Then we simply rescale the kinetic equation according to these hydrodynamic quantities. The reason to do so is that the change of scales in velocity is a challenging numerical problem when one wants to deal with solutions to dissipative kinetic equations on a fixed grid. Indeed, most of the usual deterministic methods fails to capture the correct long time behavior because of concentration or spreading over the velocity space.

Recently, F. Filbet and G. Russo proposed in [87] a rescaling method for space homogeneous kinetic equations on a fixed grid. This idea is mainly based on the self-similar behavior of the solution to the kinetic equation. However for space non homogeneous case, the situation is much more complicated and this method cannot be applied since the transport operator and the boundary conditions break down this self-similar behavior. Here we propose a very simple idea based on a rescaling of the kinetic equation according to its hydrodynamic limit. We will see that this approach

can actually be applied to various type of collisional kinetic equations such as elastic and inelastic Boltzmann equation (also known as the *granular gases equation*).

Among popular methods for numerical simulations of collisional gases, the most widely used are meshless. On the one hand, the Molecular Dynamics algorithm is a deterministic method up to the random initialization of the particles which is valid in a dense regime [104]. This method has been used to describe the apparition of shocks in supersonic sand and reproduces very accurately experimentation results [160]. On the other hand, Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) methods are stochastic algorithms working either in dense or rarefied regimes. We refer for instance to [19] for a complete review of this topic. These methods are really efficient in term of computational cost since their complexity grows linearly with the number  $N$  of particles but they are rather inaccurate since the order of accuracy is about  $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ . Another approach consists in a direct resolution of the Boltzmann operator on a phase space grid. For instance, deterministic and highly accurate methods based on a spectral discretization of the collisional operator have been proposed by F. Filbet, G. Naldi, L. Pareschi, G. Toscani and G. Russo in [151, 145, 84] for the space-homogeneous setting. Although being of complexity  $\mathcal{O}(N^2)$ , they are spectrally accurate and then need very few points to be precise. Another spectral method, inspired of the direct fast Fourier transform approach of A.V. Bobylev and S. Rjasanow [29, 31, 30] using Lagrange multiplier to improve the conservations was also used for space-homogeneous simulations by I. Gamba and S.H. Tharkabhushanam in [92].

Due to the large number of particles involved in the study of rarefied gas dynamics, we shall adopt a statistical physics' point of view, by the use of Boltzmann-like kinetic equations. For a given nonnegative initial condition  $f_0$ , we will consider a particle distribution function  $f^\varepsilon = f^\varepsilon(t, x, v)$ , for  $t \geq 0$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  and  $v \in \mathbb{R}^d$ , solution to the initial-boundary value problem

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{\mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon)}{\varepsilon}, \\ f^\varepsilon(0, x, v) = f_0(x, v). \end{cases}$$

where the collision operator  $\mathcal{Q}$  is a Boltzmann-like operator, which preserves at least mass and momentum. This equation describes numerous models such as the Boltzmann equation for elastic and inelastic collisions or Fokker-Planck-Landau type equations. The parameter  $\varepsilon > 0$  is the dimensionless Knudsen number, that is the ratio between the mean free path of particles before a collision and the length scale of observation. It measures the rarefaction of the gas: the gas is *rarefied* if  $\varepsilon \sim 1$  and *dense* if  $\varepsilon \ll 1$ . The open set  $\Omega$  is a bounded Lipschitz-continuous domain of  $\mathbb{R}^d$ , which means that the model (3.1) has to be supplemented with boundary conditions described later.

This chapter is organized as follows. We present in Section 3.2 the rescaling velocity method and give two possible choices of scaling functions, the coupled Filbet-Russo scaling and the new uncoupled macroscopic one. We choose to use the latter in the rest of the chapter, and apply it to three different collision operators in Section 3.3: the Boltzmann operator, the full granular gases operator and a simplified BGK-like granular gases operator. Subsequently, we introduce in Section 3.4 the spatial boundary conditions we have to impose on  $\Omega$ : the so-called *Maxwell* boundary conditions, a convex combination of specular and diffusive reflections at the boundary. We present these conditions for the kinetic model (in classical and rescaled variables) and for the macroscopic equations. In Section 3.5, we introduce the numerical methods we shall use for the discretization of each term of the problem: the collision operator, the conservative transport term and the system of conservation laws with source term. Finally, we present in Section 3.6 some numerical results concerning the full and simplified granular gases models, in space homogeneous and inhomogeneous



settings, with different geometries.

## 3.2 The Rescaling Velocity Method

This section is devoted to the presentation of a new scaling for equation (3.1) allowing to follow the change of scales in velocity. It is an extension to the space-dependent setting of the method first introduced in [87], using the relative kinetic energy as a scaling function. Moreover, the idea is very close to the classical one used by J.A. Carrillo and G. Toscani in [52] and J.A. Carrillo, M. Di Francesco and G. Toscani in [48] for nonlinear diffusion equations. It was also extended by J.A. Carrillo and J. Vázquez in [54] to show the apparition of chaotic behavior for a precise (constructive) nonlinearity : the self-similar profile of this equation “oscillates” between Gaussian (heat equation) and Zel’dovich-Kompaneets-Barenblatt (porous medium equation) profiles.

Let us drop for simplicity the  $\varepsilon$ -dependence in  $f$ . For a given positive function  $\omega$ , we introduce a new distribution  $g(t, x, \xi)$  by setting

$$(3.2) \quad f(t, x, v) = \frac{1}{\omega(t, x)^d} g\left(t, x, \frac{v}{\omega(t, x)}\right),$$

where the function  $\omega$  is assumed to be an accurate measure of the “support” or scale of the distribution  $f$  in velocity variables. Then according to this scaling, the distribution  $g$  should naturally “follow” either the concentration or the spreading in velocity of the distribution  $f$ .

Let us now derive the kinetic equation verified by the distribution  $g$ . Differentiating relation (3.2) with respect to time yields

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\omega^d} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \operatorname{div}_\xi(\xi g) \right].$$

Provided that  $v = \omega \xi$ , one also has

$$v \cdot \nabla_x f = \frac{\xi}{\omega^{d-1}} \cdot \left[ \nabla_x g - \frac{1}{\omega} \nabla_x \omega \operatorname{div}_\xi(\xi g) \right].$$

Then, if  $f$  is solution to (3.1), the distribution  $g$  given by (3.2) is solution to the following equation:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \omega \xi \cdot \nabla_x g - \frac{1}{\omega} \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \xi \cdot \nabla_x \omega \right) \operatorname{div}_\xi(\xi g) \right] = \frac{\omega^d}{\varepsilon} \tilde{Q}(g, g),$$

where  $\tilde{Q}$  is such that  $\tilde{Q}(g, g) = Q(f, f)$ . This equation can actually be written in the more convenient conservative form:

$$(3.3) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\omega \xi g) - \operatorname{div}_\xi \left[ \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \xi + \xi \otimes \xi \nabla_x \omega \right) g \right] = \frac{\omega^d}{\varepsilon} \tilde{Q}(g, g).$$

In order to make this rescaling efficient, the main difficulty is now to choose an appropriate scaling function  $\omega$  to define completely the distribution  $g$ .

### 3.2.1 The Generalized Filbet-Russo Scaling

The first and natural idea follows from the work [87]. It consists in computing the function  $\omega$  directly from the distribution function  $f$ , by setting

$$(3.4) \quad \omega := \sqrt{\frac{2E_f}{d\rho_f}},$$

where  $\rho_f$  and  $E_f$  are respectively the local mass and kinetic energy of  $f$

$$(3.5) \quad \rho_f := \int_{\mathbb{R}^d} f(v) dv, \quad E_f := \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \frac{|v|^2}{2} dv$$

We also define the mean velocity field  $\mathbf{u}_f$  and temperature  $T_f$  by

$$(3.6) \quad \mathbf{u}_f := \frac{1}{\rho_f} \int_{\mathbb{R}^d} f(v) v dv, \quad T_f := \frac{1}{d\rho_f} \left( 2E_f - \rho_f |\mathbf{u}_f|^2 \right).$$

Assuming that  $f$  is nonnegative, the quantity  $\omega$  will then provide correct information on its support: if  $f$  is concentrated,  $\omega$  will be small, whereas it will be large for scattered distributions. This approach has been shown to be very accurate for the space-homogeneous setting in [87], but it is difficult to extend to our case because the definition of  $\omega$  yields very restrictive constraints on the moments of  $g$ .

Indeed using the change of variable  $v \rightarrow \omega \xi$  in (3.5), we find that

$$\omega^2(t, x) = \frac{2E_f(t, x)}{d\rho_f(t, x)} = \frac{2}{d} \frac{E_g(t, x)}{\rho_g(t, x)} \omega^2(t, x)$$

and then for a distribution function  $g$  given by (3.2), the condition (3.4) imposes that

$$\rho_g(t, x) = \frac{2}{d} E_g(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

Stated in another form, it means that

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, \xi) d\xi = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, \xi) |\xi|^2 d\xi, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

This condition gives a very strong constraint on  $g$  since it has to be satisfied locally both in time and space. From a numerical point of view, it means that the time and space discretizations have to be done in such a way that this condition is also preserved at the discrete level, which becomes very restrictive on the choice of the numerical method. Moreover, given that  $\omega$  depends on the distribution  $g$  itself, the linear free transport equation satisfied by  $f$  becomes a strongly nonlinear transport equation in  $g$ , which can be difficult to solve numerically.

### 3.2.2 The Macroscopic Scaling

In order to relax this constraint on the distribution function  $g$ , we propose a different choice of the function  $\omega$ . Moreover, to avoid a strong coupling between  $\omega$  and  $g$  leading to nonlinear terms, we do not want to compute  $\omega$  directly from the distribution function  $g$  itself but only from macroscopic quantities which are assumed to be close enough to the one computed from  $f$ . Therefore, a good candidate will be a solution to the system of macroscopic equations obtained from a closure of the kinetic model (3.1).

More precisely, assume that in the asymptotic limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ , the distribution function  $f$  solution to (3.1) converges towards a steady state  $\mathcal{M}_{\rho, \mathbf{u}, T}$ , where  $\rho$  is the *mass*,  $\mathbf{u}$  the *velocity* and  $T$  the *temperature*. Then, a first order approximation with respect to  $\varepsilon$  would be

$$f^\varepsilon = \mathcal{M}_{\rho, \mathbf{u}, T} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

where the macroscopic quantities are solutions to [97]

$$(3.7) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}(E + p)) = G(\rho, \mathbf{u}, E). \end{cases}$$

In this last system,  $E$  is the kinetic energy given by

$$2E = d\rho T + \rho |\mathbf{u}|^2,$$

$p > 0$  is the pressure and  $G \in \mathbb{R}$  the “energy” of the collision operator. A natural choice for  $\omega$  is to set

$$(3.8) \quad \omega := \sqrt{\frac{2E}{d\rho}}.$$

The scaling function  $\omega$  becomes independent of the original distribution but still follows the change of scales in velocity, provided that the closure has been done properly. The system (3.3)-(3.7) is now uncoupled which is better both for a numerical and mathematical point of view. Moreover, it will be easier to solve thanks to the hyperbolic structure of (3.7).

In the following section we give several examples of application of such a method.

### 3.3 Applications of the Rescaling Velocity Method

We start with the simple example of the classical Boltzmann equation and then present different applications to inelastic kinetic models for granular gases.

#### 3.3.1 Application to the Boltzmann Equation

The Boltzmann equation describes the behavior of a dilute gas of particles when the only interactions taken into account are binary elastic collisions. It is given by equation (3.1) where  $f^\varepsilon(t, x, v)$  is the time-dependent particle distribution function in the phase space and the Boltzmann collision operator  $\mathcal{Q}_B$  is a quadratic operator, local in  $(t, x)$

$$(3.9) \quad \mathcal{Q}_B(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(|v - v_*|, \cos \theta) [f'_* f' - f_* f] dn dv_*,$$

where we used the shorthand  $f = f(v)$ ,  $f_* = f(v_*)$ ,  $f' = f(v')$ ,  $f'_* = f(v'_*)$ . The velocities of the colliding pairs  $(v, v_*)$  and  $(v', v'_*)$  are related by

$$v' = v - ((v - v_*) \cdot n) n, \quad v'_* = v_* + ((v - v_*) \cdot n) n,$$

where  $n \in \mathbb{S}^{d-1}$  is the *impact direction*<sup>1</sup>. The *collision kernel*  $B$  is a non-negative function which by physical arguments of invariance only depends on  $|v - v_*|$  and  $\cos \theta = \hat{u} \cdot n$ , where  $\hat{u} = (v - v_*)/|v - v_*|$ .

Boltzmann's collision operator has the fundamental properties of conserving mass, momentum and energy

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_B(f, f) \varphi(v) dv = 0, \quad \varphi(v) = 1, v, |v|^2$$

<sup>1</sup>We used  $n$  instead of  $\omega$  in this representation for clarity purpose.

and satisfies the well-known Boltzmann's  $H$ -theorem (for the space homogeneous case)

$$-\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f \log f \, dv = - \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_B(f, f) \log(f) \, dv \geq 0.$$

The functional  $-\int f \log f \, dv$  is the entropy of the solution. Boltzmann  $H$ -theorem implies that any equilibrium distribution function, *i.e.* any function which is a maximum of the entropy, has the form of a locally Maxwellian distribution [59, 97]

$$(3.10) \quad \mathcal{M}_{\rho, u, T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|u-v|^2}{2T}\right),$$

where the density, velocity and temperature of the gas  $\rho$ ,  $u$  and  $T$  are computed from the distribution function as in (3.5)-(3.6). For further details on the physical background and derivation of the Boltzmann equation we refer to [59, 187].

Assuming that the collision kernel is given by the *variable hard spheres* model, that is,

$$B(|z|, \cos \theta) = |z|^\lambda b(\cos \theta)$$

for  $\lambda \in [0, 1]$  and  $b$  bounded, then for a distribution  $g$  given by (3.2), we have using (3.9)

$$\mathcal{Q}_B(f, f) = \omega^{\lambda-d} \mathcal{Q}_B(g, g)$$

and the rescaled equation (3.3) reads

$$(3.11) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\omega \xi g) - \operatorname{div}_\xi \left[ \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \xi + \xi \otimes \xi \nabla_x \omega \right) g \right] = \frac{\omega^\lambda}{\varepsilon} \mathcal{Q}_B(g, g).$$

Moreover, applying a standard closure of the Boltzmann equation by a Maxwellian distribution (3.10), we find that the macroscopic quantities and then  $\omega$  thanks to (3.8), are given by

$$(3.12) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho T \mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}(E + \rho T)) = 0. \end{cases}$$

We shall now apply the rescaling method to the granular gases equation.

### 3.3.2 Application to the Granular Gases Equation

A granular gas is a set of particles which interact by energy dissipating collisions leading to inelastic collisions. This inelasticity is characterized by a collision mechanics where mass and momentum are conserved and kinetic energy is dissipated. Thus, the collision phenomenon is a non-*microreversible* process. The velocities of the colliding pairs  $(v, v_*)$  and  $(v', v'_*)$  are related by

$$(3.13) \quad v' = v - \frac{1+e}{2} (u \cdot n) n, \quad v'_* = v_* + \frac{1+e}{2} (u \cdot n) n,$$

where  $u := v - v_*$  is the *relative velocity*,  $n \in \mathbb{S}^{d-1}$  the impact direction and  $e \in [0, 1]$  the dissipation parameter, known as *restitution coefficient*. It means that the energy is dissipated in the impact direction only and will be chosen constant. The parametrization of post-collisional velocities can

also be found by using some properties of the model. Indeed, it is equivalent to the conservation of impulsions and dissipation of energy:

$$(3.14) \quad \begin{cases} v' + v'_* = v + v_*, \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 - |v|^2 - |v_*|^2 = -\frac{1-e^2}{2} |u \cdot n|^2 \leq 0. \end{cases}$$

This microscopic mechanism allows us to describe the granular collision operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ . If the non-negative particles distribution function  $f$  depends only on  $v \in \mathbb{R}^d$ , the collision operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, g)$  can be expressed in the following weak form: given a smooth test function  $\psi$ ,

$$(3.15) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f) \psi \, dv := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |v - v_*| f_* f (\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*) b(\cos \theta) \, dn \, dv \, dv_*,$$

where we have used the shorthand  $\psi' := \psi(v')$ ,  $\psi'_* := \psi(v'_*)$ ,  $\psi := \psi(v)$  and  $\psi_* := \psi(v_*)$ .

Taking  $\psi(v) = 1$ ,  $v$  and  $|v|^2$  in (3.15), the relations (3.14) yield conservation of mass and momentum at the kinetic level and dissipation of kinetic energy

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f) |v|^2 \, dv = -D(f).$$

where  $D(f)$  is the *energy dissipation functional*, given by

$$(3.16) \quad D(f) = C(1 - e^2) \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* |v - v_*|^3 \, dv \, dv_* \geq 0,$$

for  $C$  an explicit, nonnegative constant depending on the cross section  $b$  and the dimension. The decrease of the energy, together with conservation of mass and momentum imply that the equilibria of the collision operator are Dirac distributions  $\rho \delta_u(v)$  where the density  $\rho$  and momentum  $\rho u$  are prescribed. This is the major problem for the numerical study of equation (3.1) with deterministic algorithms because of this concentration in velocity variables. In that case, the rescaling method (3.2) becomes an essential tool to follow the concentration in velocity of the distribution function.

For the hard sphere kernel (3.15) and for a rescaled distribution function  $g$  given by (3.2), we have

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f) = \omega^{1-d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(g, g).$$

The rescaled equation (3.3) then reads

$$(3.17) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\omega \xi g) - \operatorname{div}_\xi \left[ \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \xi + \xi \otimes \xi \nabla_x \omega \right) g \right] = \frac{\omega}{\varepsilon} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(g, g).$$

To complete the rescaling procedure, it remains to derive a set of equations for  $\rho$  and  $E$  to define the rescaling function  $\omega$ . To this end, we will assume that the restitution coefficient  $e$  is close to 1, which corresponds to the weak inelasticity case, in order to write the collision operator as a perturbation of the classical Boltzmann operator and then write the system (3.7) associated to granular gases. Let us mention that there are alternative methods for deriving hydrodynamic equations from dissipative kinetic models, which can be found in the review paper of M. Bisi, J.A. Carrillo and G. Spiga [20]. Here, we focus on the approach developed by G. Toscani [181, 182]: we write the granular gases operator as a perturbation of the elastic Boltzmann operator

$$(3.18) \quad \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f) = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, f) + \varepsilon \mathcal{I}(f, f) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

where  $\mathcal{I}$  is a quadratic, energy dissipative nonlinear friction operator given by

$$\mathcal{I}(f, f)(v) = \frac{1}{2} \operatorname{div}_v \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n| (u \cdot n) n f_* f b(\cos \theta) dn dv_* \right).$$

Using the expansion (3.18) of the operator with respect to  $\varepsilon$ , it was shown in [181] that we can derive the macroscopic system (3.7) associated to  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ . Assuming that the inelasticity is of the same order of the Knudsen number:

$$(3.19) \quad 1 - e = \varepsilon,$$

then, up to the second order in  $\varepsilon$ , the macroscopic quantities are solution to

$$(3.20) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \rho T \mathbf{I}) = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}(E + \rho T)) = -K_d \rho^2 T^{3/2}, \end{cases}$$

for an explicit and nonnegative constant  $K_d$  given by (3.50). The solution of this system will give the scaling function  $\omega$  in (3.8).

### 3.3.3 Application to a Simplified Granular Gases Model

The rescaling velocity method can be also applied to a simplified model designed to mimic the behavior of the granular gases equation with a simpler collision operator. Indeed, A. Astillero and A. Santos derived in [11, 12] a very simple approximation of the granular gases equation, containing its main features. It consists in replacing the *bilinear* collision operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  by a *nonlinear* relaxation operator, supplemented with a drag force in the velocity space, depending on the moment of the particle distribution function itself, in order to match the correct macroscopic dissipation of kinetic energy of the granular gases equation.

The relaxation operator we will use is the so-called Ellipsoidal Statistical BGK operator (ES-BGK) [6]. To this aim we first define some macroscopic quantities of the particle distribution function  $f$  such as the opposite of the *stress tensor*

$$\Theta_f(t, x) = \frac{1}{\rho_f} \int_{\mathbb{R}^d} (v - \mathbf{u}_f) \otimes (v - \mathbf{u}_f) f(t, x, v) dv.$$

Therefore the *translational temperature* is related to the stress tensor as  $T_f = \operatorname{tr}(\Theta_f)/d$ . We finally introduce the corrected tensor

$$\mathcal{T}_f(t, x) = [(1 - \nu) T_f \mathbf{I} + \nu \Theta_f](t, x),$$

which can be viewed as a linear combination of the initial stress tensor  $\Theta_f$  and of the isotropic stress tensor  $T_f \mathbf{I}$  developed by a Maxwellian distribution. The parameter  $-\infty < \nu < 1$  is used to modify the value of the Prandtl number through the formula

$$0 \leq \operatorname{Pr} = \frac{1}{1 - \nu} \leq +\infty \quad \text{for } \nu \in (-\infty, 1).$$

Thus we introduce a corrected Gaussian  $\mathcal{G}[f]$  defined by

$$\mathcal{G}[f] = \frac{\rho_f}{\sqrt{\det(2\pi \mathcal{T}_f)}} \exp\left(-\frac{(v - \mathbf{u}_f) \mathcal{T}_f^{-1} (v - \mathbf{u}_f)}{2}\right)$$

and the corresponding collision operator is now

$$(3.21) \quad \mathcal{Q}_S(f) = \tau(P_f) (\mathcal{G}[f] - f) + C \rho_f T_f^{1/2} \operatorname{div}_v((v - \mathbf{u}_f)f),$$

where  $\tau$  is a given function depending on the *kinetic pressure*  $P_f := \rho_f T_f$  and  $C$  is given by

$$C = (1 - e) \frac{K_d}{d}.$$

The coefficient  $e$  corresponds to the restitution coefficient of the granular operator  $\mathcal{Q}_T$  and will be assumed equal to  $1 - \varepsilon$  as in (3.19). This expression yields the correct granular energy dissipation (3.16).

This new operator replaces the inelastic collision operator by an “equivalent” elastic operator and the drift term acts like an external drag force which mimics the cooling effect of the particles. In particular, the hydrodynamic equations associated to the rescaled equation (3.3) with operator (3.21) are exactly given by the system (3.20). The operator  $\tilde{\mathcal{Q}}_S$  such that  $\tilde{\mathcal{Q}}_S(g) = \mathcal{Q}_S(f)$  is given by

$$\tilde{\mathcal{Q}}_S(g) = \frac{1}{\omega^d} \left[ \tau_g (\mathcal{G}[g] - g) + C \omega \rho_g T_g^{1/2} \operatorname{div}_\xi((\xi - \mathbf{u}_g)g) \right],$$

using the shorthand  $\tau_g := \tau(\omega^2 P_g)$ . Equation (3.3) then simply reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\omega \xi g) &= \frac{\tau_g}{\varepsilon} (\mathcal{G}[g] - g) \\ &+ \operatorname{div}_\xi \left[ \left( C \omega \rho_g T_g^{1/2} (\xi - \mathbf{u}_g) + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \xi + \xi \otimes \xi \nabla_x \omega \right) g \right], \end{aligned}$$

where the function  $\omega$  is given by (3.8) using the closed system (3.20).

### 3.4 Boundary Conditions

In order to define completely the mathematical problem for the kinetic equation (3.1), one has to set boundary conditions on  $\partial\Omega$ . The most simple (yet physically relevant) are the so-called Maxwell boundary conditions [128], where a fraction  $1 - \alpha \in [0, 1]$  of the particles is *specularly* (elastically) reflected by a wall, whereas the remaining fraction  $\alpha$  is *thermalized*, leaving the wall (moving at a velocity  $\mathbf{u}_w$ ) at a temperature  $T_w > 0$  (see Figure 3). The parameter  $\alpha$  is called *accommodation* coefficient, because it expresses the tendency of the gas to accommodate to the state of the wall. More details on the subject can be found in the textbook of Cercignani [57]. The main difficulty consists to apply appropriate boundary conditions on the macroscopic model which are consistent with the kinetic boundary value problem.

Let us consider a distribution function  $f(t, x, v)$  solution to (3.1) for  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d$  with  $\Omega$  a bounded Lipschitz-continuous domain of  $\mathbb{R}^d$ . We assume the boundary  $\partial\Omega$  to have a unit outer normal  $\mathbf{n}_x$  for all  $x \in \partial\Omega$ . Then, for an *incoming* velocity  $v \in \mathbb{R}^d$  (namely  $v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0$ ), we set

$$f(t, x, v) = \alpha \mathcal{R}f(t, x, v) + (1 - \alpha) \mathcal{M}f(t, x, v), \quad \forall x \in \partial\Omega, v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0,$$

with

$$(3.22) \quad \begin{cases} \mathcal{R}f(t, x, v) = f(t, x, v - 2(\mathbf{n}_x \cdot v) \mathbf{n}_x), \\ \mathcal{M}f(t, x, v) = \mu(t, x) \mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}(v). \end{cases}$$

In this last expression,  $\mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}$  is the wall Maxwellian

$$\mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}(v) := \frac{1}{(2\pi T_w)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v - \mathbf{u}_w|^2}{2T_w}\right)$$

and  $\mu$  insures global mass conservation:

$$(3.23) \quad \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} f(t, x, v) v \cdot \mathbf{n}_x dv = -\mu(t, x) \int_{v \cdot \mathbf{n}_x < 0} \mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}(v) v \cdot \mathbf{n}_x dv.$$

Thanks to these definitions, we have the following result:

**Proposition 3.4.1.** *Let  $f$  be a smooth solution to the kinetic equation (3.1) with Maxwell boundary conditions (3.22),  $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  and  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . If  $\varphi$  is symmetric with respect to the normal component of the velocity, then we have for any  $x \in \partial\Omega$  and  $t \in \mathbb{R}_+$ :*

$$(3.24) \quad \begin{cases} \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(\mathcal{R}f(t, x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv = - \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} \Psi(f(t, x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv, \\ \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(\mathcal{R}f(t, x, v)) v \cdot \boldsymbol{\tau}_x \varphi(v) dv = \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} \Psi(f(t, x, v)) v \cdot \boldsymbol{\tau}_x \varphi(v) dv, \end{cases}$$

where  $\boldsymbol{\tau}_x$  belongs to  $\mathbf{n}_x^\perp$ . Moreover, we also have

$$(3.25) \quad \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \mathcal{M}f(t, x, v) v \cdot \mathbf{n}_x dv = - \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} f(t, x, v) v \cdot \mathbf{n}_x dv.$$

*Proof.* Concerning (3.24), for any  $x \in \partial\Omega$ , we integrate on the set  $\{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0\}$  the function  $v \mapsto \Psi(\mathcal{R}f(t, x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v)$ . The transformation  $v' = v - 2(\mathbf{n}_x \cdot v) \mathbf{n}_x$  being isometric, its Jacobian is equal to 1 and the change of variable  $v \mapsto v'$  preserves the Lebesgue measure  $dv$ . Moreover, we have the identities  $v' \cdot \mathbf{n}_x = -v \cdot \mathbf{n}_x$  and  $v' \cdot \boldsymbol{\tau}_x = v \cdot \boldsymbol{\tau}_x$ . Hence, writing  $v = (v \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{n}_x + (v \cdot \boldsymbol{\tau}_x) \boldsymbol{\tau}_x$  yields using the symmetry of  $\varphi$

$$\begin{aligned} \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(\mathcal{R}f(t, x, v)) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv &= \int_{v \cdot \mathbf{n}_x \leq 0} \Psi(f(t, x, v')) v \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v) dv \\ &= - \int_{v' \cdot \mathbf{n}_x \geq 0} \Psi(f(t, x, v')) v' \cdot \mathbf{n}_x \varphi(v') dv', \end{aligned}$$

which proves the first part of (3.24). The second part is obtained exactly the same way.

The relation (3.25) is straightforward using the definition (3.23) of  $\mu$ .  $\square$

Thanks to this proposition, we can state some of the properties of equation (3.1) under Maxwell boundary conditions:

**Corollary 3.4.1.** *Let  $f$  be a smooth solution to the kinetic equation (3.1) with Maxwell boundary conditions (3.22). Then,*

1. the mass of  $f$  is globally conserved for any accommodation coefficient  $\alpha \in [0, 1]$ ;



2. if  $\mathcal{Q}$  preserves the kinetic energy, then in the specular case  $\alpha = 1$  the energy of  $f$  is globally conserved ;
3. if  $\mathcal{Q}$  produces entropy, namely

$$- \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}(f, f) \log(f) dv \geq 0$$

then in the specular case  $\alpha = 1$  the entropy functional  $\int f \log f dv dx$  is dissipated.

*Proof.* (1) We start by multiplying equation (3.1) by  $\varphi$  and integrating in velocity and space variables. We have made the general assumption that  $\mathcal{Q}$  preserves the mass. Then, using the Stokes formula and taking  $\Psi(f) = f$  and  $\varphi(v) = 1$  (which is symmetric with respect to the normal component of  $v$ ) in (3.24) is enough to guarantee the mass conservation for the specular boundary conditions. The relation (3.25) allows to conclude in the diffusive case.

(2) In the pure specular case, the elastic collisions at the boundary yield the microscopic conservation of kinetic energy:  $|v'|^2 = |v|^2$ . Then, taking  $\Psi(f) = f$  and  $\varphi(v) = |v|^2$  (which is symmetric with respect to the normal component of  $v$ ) in (3.24) and using the Stokes formula gives the conservation of kinetic energy.

(3) Multiplying equation (3.1) by  $\log f + 1$  and taking  $\Psi(f) = f \log f$ ,  $\varphi(v) = 1$  in (3.24) yields the dissipation of entropy, thanks to Stokes formula.  $\square$

We shall now present the boundary conditions associated to the Maxwell conditions for the rescaled distribution  $g$  and the hydrodynamics quantities  $(\rho, \rho \mathbf{u}, E)$  solution to the Euler' system. We split in two parts, pure specular and pure diffusive boundary conditions.

### 3.4.1 Specular Boundary Conditions

The natural translation of a specular reflection of a particle of velocity  $v$  in the physical space, at a point  $x$  of the boundary  $\partial\Omega$  is a specular reflection at the point  $x$ , but with a rescaled velocity  $\xi = v\omega$ . More precisely, for an incoming velocity  $\xi$  (namely  $\xi \cdot \mathbf{n}_x \leq 0$ ), we set

$$\mathcal{R}g(t, x, \xi) = g(t, x, [\xi - 2(\mathbf{n}_x \cdot \xi) \mathbf{n}_x]).$$

Concerning the macroscopic quantities, the relation (3.24) of Proposition 3.4.1 imposes the so-called *slip boundary* condition [172]. More precisely, it corresponds to a zero-flux boundary conditions for the mean velocity:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_x = 0.$$

This condition yields in particular the global conservation of mass and kinetic energy that we observed at the kinetic level in Corollary 3.4.1. It then remains to fix a condition for the momentum flux. To mimic the specular reflection, we reverse the velocity at the boundary, as presented in [18].

### 3.4.2 Diffusive Boundary Conditions

We want to impose a velocity  $\mathbf{u}_w$  and a temperature  $T_w$  at a point  $x$  of the boundary, using a wall maxwellian  $\mathcal{M}_{1, \mathbf{u}_w, T_w}$  in the physical space. Then, for an incoming velocity  $\xi$  in the rescaled space, we set

$$\mathcal{M}g(t, x, \xi) = \mu(t, x) \mathcal{M}_{1, \tilde{\mathbf{u}}_w, \tilde{T}_w}(\xi).$$

In this last expression,  $\mathcal{M}_{1, \tilde{\mathbf{u}}_w, \tilde{T}_w}$  is the “rescaled” wall Maxwellian, with  $\tilde{\mathbf{u}}_w = \omega \mathbf{u}_w$ ,  $\tilde{T}_w := \omega^2 T_w$  and  $\mu$  insures the global mass conservation:

$$\int_{\xi \cdot \mathbf{n}_x > 0} g(t, x, \xi) \xi \cdot \mathbf{n}_x d\xi = -\mu(t, x) \int_{\xi \cdot \mathbf{n}_x < 0} \mathcal{M}_{1, \tilde{\mathbf{u}}_w, \tilde{T}_w}(\xi) \xi \cdot \mathbf{n}_x d\xi.$$

At the macroscopic level, the relation (3.25) of Proposition 3.4.1 imposes a zero-flux boundary conditions for the mean velocity:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_x = 0.$$

This yields the global conservation of mass for the macroscopic model, corresponding to the result of Corollary 3.4.1. We also want to fix the temperature  $T_w > 0$  of the wall. We set

$$E(x) = \frac{d}{2} \rho(x) T_w.$$

These boundary conditions allow to solve the boundary value problems (3.12) or (3.20).

## 3.5 Discretization of the Problem

We will present in this Section the numerical schemes we used for the discretization of the uncoupled models (3.3) and (3.7). We need to distinguish three independent problems: the treatment of the free transport term, the collision term and the system of conservation laws.

### 3.5.1 The Finite Volume Method for a Conservative Transport Equation

In this subsection, we focus on the space discretization of the conservative transport equation

$$(3.26) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}_X (a(t, X) g) = 0, \quad \forall (t, X) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O}, \\ g(0, X) = g_0(X), \end{cases}$$

for a smooth function  $a : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^d$  and a Lipschitz-continuous domain  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ . Our approach of the problem will be made in the framework of finite volume schemes. We shall present the spatial discretization of (3.26) in one space dimension for simplicity purposes. The extension for Cartesian grid in the multidimensional case will then be straightforward.

In the one dimensional setting, the domain  $\mathcal{O} = (a, b)$  is a finite interval of  $\mathbb{R}$ . We define a mesh of  $\mathcal{O}$ , not necessarily uniform, by introducing a sequence of  $N_x$  control volume  $K_i := (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$  for  $i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$  with  $x_i := (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}) / 2$  and

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < \cdots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < \cdots < x_{N_x} < x_{N_x+\frac{1}{2}} = b.$$

The Lebesgue measure of the control volume is then simply  $m(K_i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ . Let  $g_i = g_i(t)$  be an approximation of the mean value of  $g$  over a control volume  $K_i$ . By integrating the transport equation (3.26) over  $K_i$ , we get the space discretized free transport equation

$$(3.27) \quad \begin{cases} m(K_i) \frac{\partial g_i}{\partial t}(t) + \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket, \\ g_i(0) = \frac{1}{m(K_i)} \int_{K_i} g_0(x) dx. \end{cases}$$

In the Cauchy problem (3.27), the quantity  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$  is an approximation of the flux function  $x \mapsto a(t, x) g(t, x)$  at the cell interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . We choose to use in the following upwind fluxes with the second order Van Leer's slope limiter [186]. If we denote by  $A_i(t) := a(t, x_i)$  the velocity at the cell center, then the slope limited upwind flux is given by

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = A_i^+ g_{i+\frac{1}{2},-} - A_i^- g_{i+\frac{1}{2},+}$$

where  $x^+ := \max(x, 0)$  and  $x^- := \max(-x, 0)$  are respectively the positive and negative part of a real number  $x$  and  $g_{i+\frac{1}{2},\pm}$  is the slope limited reconstruction of  $g$  at the cell interface, namely

$$\begin{cases} g_{i+\frac{1}{2},-} = g_i + \frac{1}{2} \phi(\theta_i) (g_{i+1} - g_i), \\ g_{i+\frac{1}{2},+} = g_i - \frac{1}{2} \phi(\theta_i) (g_{i+2} - g_{i+1}). \end{cases}$$

In this last expression,  $\theta_i$  is the *slope*

$$\theta_i = \frac{g_i - g_{i-1}}{g_{i+1} - g_i}$$

and  $\phi$  is the so-called *Van Leer's* limiter

$$\phi(\theta) := \frac{\theta + |\theta|}{1 + \theta}.$$

### 3.5.2 The Spectral Method for the Collision Operator

We now focus on the numerical resolution of

$$(3.28) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \mathcal{Q}(g, g),$$

where  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  or  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ . These Boltzmann-like operators will be computed using a spectral method. Fourier techniques for the resolution of the Boltzmann equation have been first introduced independently by L. Pareschi and B. Perthame in [150] and by A. Bobylev and S. Rjasanow in [29]. It has since been investigated by a lot of authors. One can find numerous results about this method in the article [151] of L. Pareschi and G. Russo. It has been recently shown to be convergent by F. Filbet and C. Mouhot in [82] for the elastic case and allows spectral accuracy [42]. It has then been derived for the granular gases operator (3.15) by F. Filbet, L. Pareschi and G. Toscani in [84]. Let us present the main features of this method.

Any deterministic numerical method for the computation of the Boltzmann operator requires to work on a *bounded* velocity space. Our approach consists in adding some non physical binary collisions by periodizing the particle distribution function and the collision operator. This implies the loss of some local invariant, but a careful periodization allows at least the preservation of mass. This periodization is the basis of spectral methods.

We thus consider a bounded velocity domain  $\mathcal{D}_V := [-V, V]^d$ . If  $g$  is compactly supported in  $\mathcal{D}_V$ , the collision operator spreads the support of  $g$  by a factor at most equal to  $\sqrt{2}$ . This was shown in Lemma 3.1 of [84] using the weak formulation (3.15) of  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  and can actually be improved in dimension 1. In this latter case, G. Naldi, L. Pareschi and G. Toscani showed in [145] that the size of the support is conserved by  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ . Using these results, simple geometric considerations [151] shows

that one can truncate the weak form of  $Q_{\mathcal{I}}$  to made him act on the set  $\mathcal{U} := \mathcal{D}_V \times B(0, 2\lambda V) \times \mathbb{S}^{d-1}$ : for any smooth test function  $\psi$ , the truncated collision operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}^V$  is given by

$$(3.29) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}^V(g, g) \psi \, dv := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{U}} |v - v_*| g_* g (\psi' - \psi) b(\cos \theta) \, dn \, dv \, dv_*.$$

The coefficient  $\lambda := (3 + \sqrt{2})/2$  is an *anti-aliasing* parameter used when periodizing the distribution  $g$ .

The approximate solution to the periodized equation is represented as a truncated Fourier sum  $g_{N_v}$ , defined for  $N_v \in \mathbb{N}$  by

$$g_{N_v}(v) = \sum_{|k| \leq N_v} \widehat{g}_k \psi_k(v), \quad \psi_k(v) := e^{i\frac{\pi}{V}k \cdot v}.$$

In this expression, the sum is taken over the multi-index  $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$  and  $\widehat{g}_k$  stands for the  $k^{\text{th}}$  Fourier coefficient of  $g$ , namely

$$\widehat{g}_k := \frac{1}{(2V)^d} \int_{\mathcal{D}_V} g(v) \psi_{-k}(v) \, dv.$$

In a Fourier-Galerkin spectral method, the unknowns are the time-dependent Fourier coefficients  $(\widehat{g}_k(t))_{k \in \llbracket -N_v, N_v \rrbracket^d}$ . They are obtained for any  $k \in \llbracket -N_v, N_v \rrbracket^d$  by the solution to the Fourier transformed, truncated equation (3.28)

$$\frac{\partial \widehat{g}_k}{\partial t} = \left\langle \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}^V(g_{N_v}, g_{N_v}), \psi_{-k} \right\rangle_{L^2(\mathcal{D}_V)}.$$

The Fourier coefficients of the truncated collision operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}^V$  are given using (3.29) by

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \left\langle \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}^V(g_{N_v}, g_{N_v}), \psi_{-k} \right\rangle_{L^2(\mathcal{D}_V)} &= \frac{1}{2(2V)^d} \int_{\mathcal{U}} |u| g_{N_v}(v) g_{N_v}(v - u) \\ &\quad \left( e^{-i\frac{\pi}{V}k \cdot v'} - e^{-i\frac{\pi}{V}k \cdot v} \right) \, dn \, dv \, du, \\ &= \sum_{\substack{l, m = -N_v \\ l+m=k}}^{N_v} \widehat{g}_l \widehat{g}_m \left( \widehat{B}(l, m) - \widehat{\gamma}(m) \right), \end{aligned}$$

where  $\widehat{B}(l, m)$  and  $\widehat{\gamma}(m)$  are defined for  $l, m \in \llbracket -N_v, N_v \rrbracket^d$  by

$$\begin{cases} \widehat{B}(l, m) = \frac{1}{2} \int_{B(0, 2\lambda V)} |u| e^{-i\frac{\pi}{V}((\frac{3-e}{4})u \cdot m - (\frac{1+e}{4})u \cdot l)} \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-i\frac{\pi}{V}(\frac{1+e}{4})|u|(l+m) \cdot \omega} \, d\omega \right) \, du, \\ \widehat{\gamma}(m) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{2} \int_{B(0, 2\lambda V)} |u| e^{-iu \cdot m} \, du. \end{cases}$$

The computation of  $Q_{\mathcal{I}}(g_{N_v}, g_{N_v})$  in Fourier variables is then reduced to the evaluation of a sum, which has the same structure (bilinear in  $g$  and written as the difference of two terms, the gain and loss one) than the integral in classical variables.

**Remark 1.** Notice that the kernel modes have only to be computed once, which is of great interest for the numerical implementation. Moreover, it can be done explicitly for  $d = 1$  and  $d = 3$  [84]. The case  $d = 2$  needs a numerical integration, which can be made as precise as one wants and then stored for further use.

It then remains to project the Fourier collision operator (3.30) in the space  $\mathbb{P}_{N_v}$  of trigonometric polynomials of degree at most  $N_v$  in each direction, using the orthogonal projection of  $L^2(\mathcal{D}_V)$  onto  $\mathbb{P}_{N_v}$ .

### 3.5.3 The WENO Approach for a System of Conservation Laws

The fluid equations (3.20) can be written as a system of nonlinear hyperbolic conservation laws with source term

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}_x F(U) = G(U),$$

where  $U : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $n = d + 2$ . There exists a large number of numerical methods to solve this type of problem, and we choose to use a finite difference approach.

The reconstruction of the fluxes will be made by a high-order Weighted Essentially Non-Oscillatory (*WENO*) method with a 5 points stencil. Indeed, it is very well adapted to the treatment of shocks in fluid system. The reader can consult the lecture notes [171] of C.W. Shu for most of the details about this method. Let us present it in the one dimensional setting and on an uniform grid.

We will approximate the solution  $U$  at time  $t$  and position  $x_i = i\Delta x$ ,  $\Delta x > 0$ , by the vector  $(U_i)_{i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket}$  for  $N_x \in \mathbb{N}$ , solution to

$$\frac{d}{dt} U_i(t) + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = G(U_i), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket,$$

The vector  $(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket}$  is the numerical flux. We will adopt a characteristic-wise *WENO* method for the reconstruction of this flux. It can be summarized in the following way. Given some divided differences of the cell averages  $\bar{U}_i$  of  $(U_i)_{i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket}$  at time  $t$ :

1. Compute an average (also called intermediate) state  $U_{i+\frac{1}{2}}$  using arithmetic mean.
2. Compute the right (resp. left) eigenvectors matrix  $R(U_{i+\frac{1}{2}})$  (resp.  $R^{-1}(U_{i+\frac{1}{2}})$ ) and the eigenvalues  $\lambda_l(U_{i+\frac{1}{2}})$  of  $F'(U_{i+\frac{1}{2}})$ , then set

$$R = R(U_{i+\frac{1}{2}}), \quad R^{-1} = R^{-1}(U_{i+\frac{1}{2}}), \quad \Lambda = \operatorname{Diag}(\lambda_l(U_{i+\frac{1}{2}})).$$

3. Project the divided differences lying in the 5 points stencil of the reconstruction onto the local characteristics fields:

$$\bar{V}_j := R^{-1} \bar{U}_j, \quad \bar{H}_j := R^{-1} F(\bar{U}_j), \quad \forall j \in \llbracket i-5, i+5 \rrbracket.$$

4. Perform the scalar reconstruction of the local characteristic variables, namely
  - 4.1. Obtain the 5<sup>th</sup> order reconstructed values  $V_{i+\frac{1}{2},+}$  and  $V_{i+\frac{1}{2},-}$  of  $\bar{V}_i$  using the *WENO* procedure described in [171, Procedure 2.3];
  - 4.2. Compute the Lax-Friedrichs flux

$$H_{i,\pm} := \frac{1}{2} \left( \bar{H}_i + \max_{i,l} |\lambda_l(U_{i+\frac{1}{2}})| V_{i+\frac{1}{2},\pm} \right).$$

5. Go back to the physical space, thanks to the right eigenvectors

$$F_{i,\pm} := R H_{i,\pm}$$

and finally compute the numerical flux

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = F_{i,+} + F_{i,-}.$$

The rescaling function  $\omega$  (and its time and space derivatives) given by the macroscopic scaling (3.8) is then evolved in time thanks to the WENO fluxes  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$ .

We shall now present numerical simulations of the rescaling velocity method for energy dissipative equations.

## 3.6 Numerical Simulations

### 3.6.1 Convergence toward a Dirac mass

In this section, we will deal with a space homogeneous distribution  $f = f(t, v)$ , solution to the granular gases equation

$$(3.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f), \\ f(t=0) = f_0, \end{cases}$$

with an initial condition chosen as the sum of two gaussian distributions of total temperature equal to 1:

$$f_0(v) := \frac{1}{2(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \left( \exp\left(-\frac{|v - \sigma \mathbf{e}|^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{|v + \sigma \mathbf{e}|^2}{2\sigma^2}\right) \right), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d,$$

where  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^\top$  and  $\sigma = 1/10$ . With this choice, we have

$$(3.32) \quad \int_{\mathbb{R}^d} f_0(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

The corresponding scaled distribution  $g = g(t, \xi)$  given by (3.2) is then solution to the homogeneous granular equation with a time-dependent drift term

$$(3.33) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} - \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \xi g \right) = \omega \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(g, g), \\ g(t=0) = g_0. \end{cases}$$

The initial condition  $g_0$  is chosen by  $g_0 = f_0$  because  $\omega(0) = 1$  according to (3.32).

To study the evolution of  $\omega$ , we propose to compare the rescaling approach proposed by F. Filbet and G. Russo in [87] and the macroscopic one based on the closure of the kinetic model. In the space homogeneous setting, the mass  $\rho = 1$  is preserved. Hence, we have

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{2}{d} E(t)}$$

and it is enough to compute the time evolution of the kinetic energy  $E$  to obtain  $\omega$ . Then on the one hand, following [87], we will study the distribution  $g$  solution to (3.33) coupled with the exact kinetic energy

$$(3.34) \quad \frac{dE}{dt} = \omega^3 \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(g, g) \frac{|\xi|^2}{2} d\xi.$$

On the other hand, from the result of Subsection 3.3.2, we replace the ordinary differential equation (3.34) by

$$(3.35) \quad \frac{dE}{dt} = -K_d \rho^2 T^{3/2},$$

where  $dT(t) = 2E(t)$  because of the conservation of momentum. Let us emphasize that (3.33)-(3.35) is an uncoupled model. We will then compare it with the solution to (3.31) in classical variables.

**Description of the results.** We start with a two dimensional test, designed to compare the results obtained with both coupled (3.33)-(3.34) and uncoupled models (3.33)-(3.35) and intended to show that the latter one will give better results. We choose the computational domain in velocity as the box  $\mathcal{D}_V = [-V, V]^2$  with  $V = 9$  to avoid some possible loss of mass due to the drift term. We take successively  $N_v = 32$  and  $N_v = 48$  half Fourier modes in each direction of the velocity space.

We present in Figure 3.1 the time evolution of the first marginal distribution

$$g^{(1)}(t, \xi_1) := \int_{\mathbb{R}} g(t, \xi_1, \xi_2) d\xi_2.$$

We can see that both models give close results for short time in the coarse and fine grids, but some oscillations eventually appear in the coupled model, leading to the breakout of the scheme. This is due to the wrong computation of the kinetic energy of  $g$ , because of the heavy tails of this distribution [133]. This phenomenon does not occur anymore when we refine the grid. In this case, the results given by both models are in very good agreement, especially for the long time behavior: the equilibrium distribution is very well captured by the new uncoupled model.

We then compare the result of this test for the uncoupled model with a solution to equation (3.31) computed in classical variables with the spectral scheme. We take  $V = 8$  and  $N_v = 32$  half modes in each directions of the classical velocity space.

We observe in Figure 3.2 that both models give the same result for short time. Then, on the one hand, the solution obtained by the spectral scheme in classical variables breaks down for intermediate time ( $t \sim 1$ ) because of the concentration which yields spurious oscillations. We can see in particular the loss of symmetry of the solution at time  $t = 1$ . On the other hand, the rescaled variables prevent concentration and thus allows the spectral scheme to achieve its full accuracy: the Dirac mass is very well captured for large time. This is also due to the correct change of scales in the support of the scaled distribution, thanks to the expression of  $\omega$ .

### 3.6.2 Trend to Equilibrium in the Non Homogeneous Case

We consider now the full inelastic Boltzmann equation in dimension  $d$  on the torus

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, f)}{\varepsilon}, \quad x \in \mathbb{T}^d, v \in \mathbb{R}^d$$

with periodic boundary conditions in  $x$ . We first introduce the hydrodynamical fields associated to a kinetic distribution  $f(t, x, v)$ . These are the  $(d+1)$  fields of density  $\rho$  (scalar) and mean velocity  $\mathbf{u}$  (vector valued) defined by the formulas (3.5)-(3.6). Whenever  $f(t, x, v)$  is a smooth solution to the granular gases equation with periodic boundary conditions, one has the global conservation laws

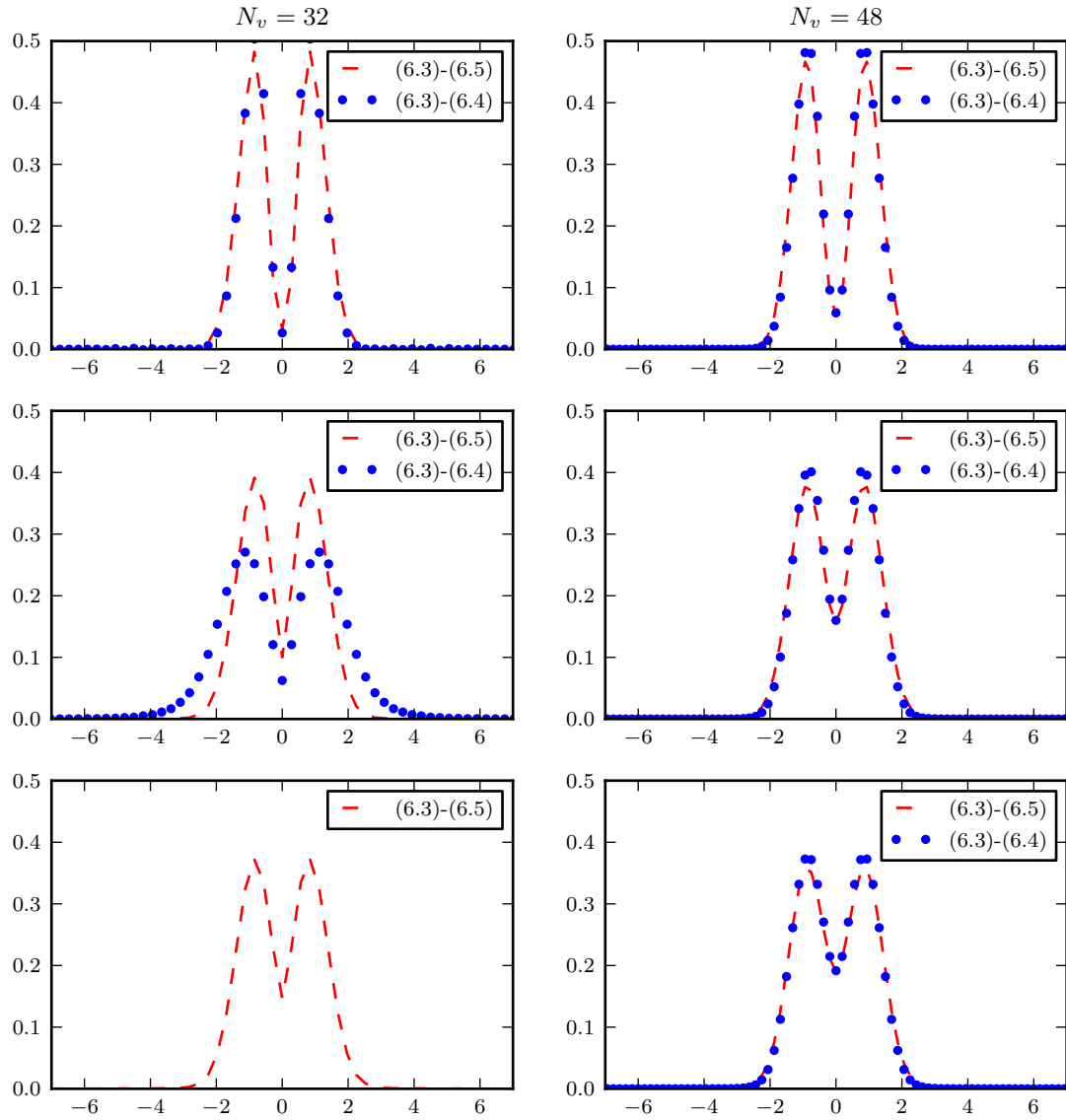


Figure 3.1: Comparison of the first marginal distribution  $g^{(1)}$  for coupled model (3.33)-(3.34) (points) and uncoupled model (3.33)-(3.34) (dashed line), at time  $t = 0.5, 10$  and  $50$  for  $N_v = 32$  (left) and  $N_v = 48$  (right).



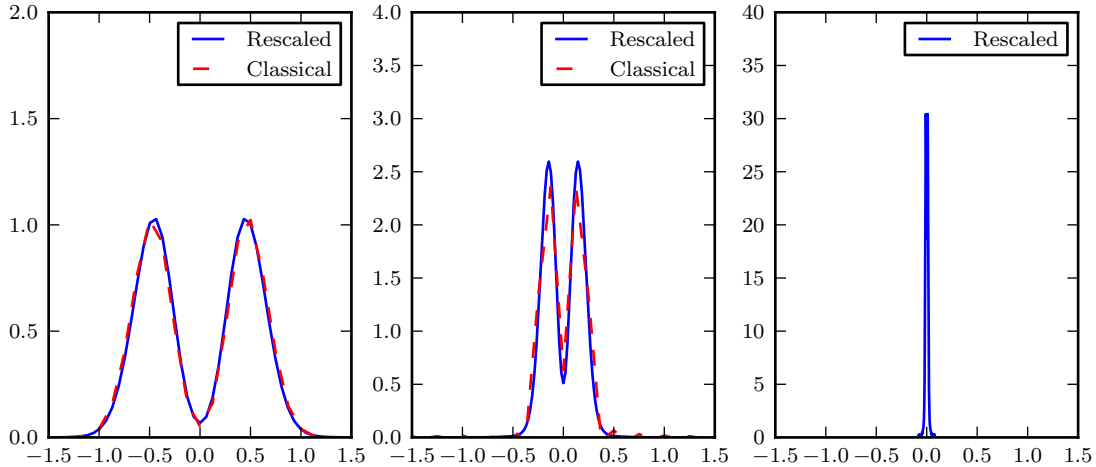


Figure 3.2: Comparison of the first marginal  $f^{(1)}$  of the solution to (3.31) computed in classical (dashed line) and scaled variables (solid line), at time  $t = 0.3, 1$  and  $20$ .

for mass and momentum

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) dx dv &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) v dx dv &= 0. \end{aligned}$$

Therefore, without loss of generality we shall impose

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) dx dv = 1, \quad \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) v dx dv = 0,$$

where we normalized the measure on the torus:  $m(\mathbb{T}^d) = 1$ . These conservation laws are then enough to uniquely determine the stationary state of the inelastic Boltzmann equation: the normalized global Dirac distribution in velocity and constant in space

$$(3.36) \quad f_\infty(v) = \delta_0(v).$$

Our goal here is to investigate numerically the long time behavior of the solution  $f$ . If  $f$  is any reasonable solution of the inelastic Boltzmann equation, satisfying certain *a priori* bounds of compactness, then it is expected that  $f$  does converge to the global distribution function  $f_\infty$  as  $t$  goes to  $+\infty$ . The point is that on the opposite to the elastic Boltzmann equation, the solution does not satisfy any entropy theorem. Therefore, to measure the convergence to equilibrium we compute the evolution of the quantity

$$\mathcal{L}(t) = \|\rho(t) - 1\|_{L^1}.$$

We present numerical results for the full granular gases equation (3.1), using the uncoupled rescaled model (3.17)-(3.20). The initial condition  $g_0(x, \xi) = \omega(0, x)^d f_0(x, \omega(0, x) \xi)$  is set as

$$\begin{cases} f_0(x, v) = \frac{\rho_0(x)}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right), & \forall (x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \\ \omega(0, x) = \sqrt{\frac{2}{d\rho_0(x)}}, \end{cases}$$

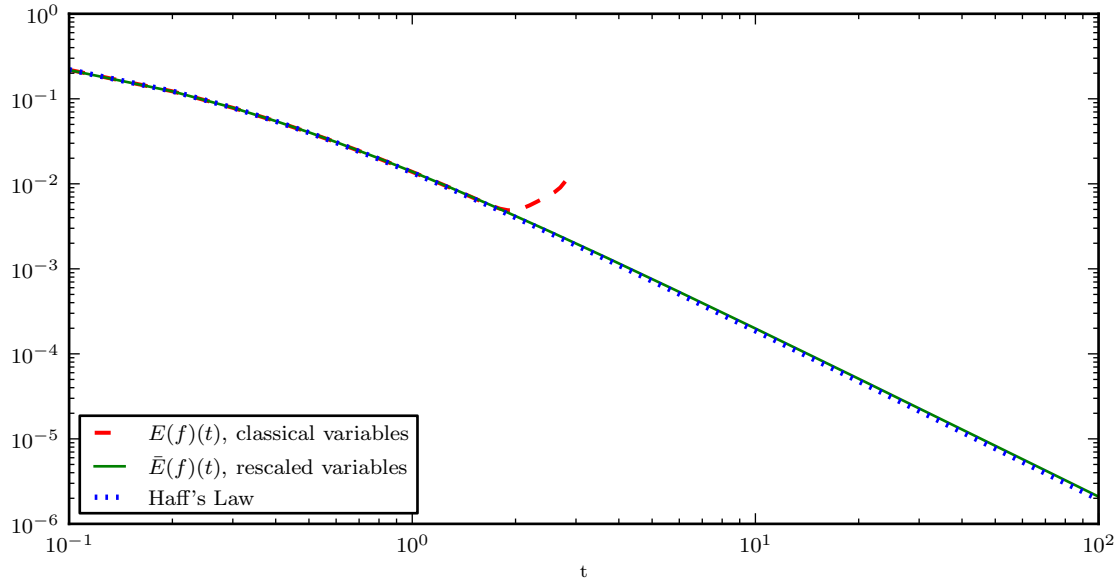


Figure 3.3: Comparison of the global inhomogeneous cooling process in original and scaled variables ( $\varepsilon = 0.1$ ).

with  $\rho_0(x) = 1 + 0.1 \cos(\pi x)$  and  $\mathbb{T} = [0, L]$ .

**Description of the results.** We start with a simple one dimensional test (in space and velocity), intended to show that the uncoupled model is a good approximation of equation (3.1) in the space inhomogeneous case. We take  $L = 1$  and  $N_x = 25$  points in space variable, a rescaled velocity box  $\mathcal{D}_V$  of size  $V = 10$  and  $N_v = 32$  half Fourier modes in rescaled variables. We also perform computations in classical velocity variables, with a velocity box of size  $V = 8$  and  $N_v = 128$  half modes, in order to achieve a good accuracy and avoid oscillations in short time.

We compare the evolution of the global kinetic energy  $E(t)$  of both simulations. We also plot the theoretical asymptotic behavior of the kinetic energy (namely, the Haff's Law [103]), given formally by

$$E(t) \simeq \frac{E(0)}{(1 + \sqrt{2}K_1 t)^2}.$$

We can see in Figure 3.3 that the Haff's Law is very well captured by the rescaling method. This is also the case for short time in the classical method, but due to the fast apparition of spurious oscillations (even with  $N_v = 128$  half modes), a strong divergence from the expected global behavior occurs in this case. Once more, the efficiency of the rescaling method for the long time behavior of the solution becomes clear, since the Haff's Law is perfectly described.

Let us investigate more precisely the long time behavior of the numerical solution obtained from the rescaled method. In Figure 3.4, we present the time evolution in log-log scale of  $\mathcal{L}(t)$  which describes the relaxation towards global equilibrium of the local mass  $\rho(t, x)$  in  $L^1$  norm.

Numerical investigations on the elastic Boltzmann equation showed some evidences of oscillations during the relaxation process, for example in the local relative entropy [83], as it was conjectured by L. Desvillettes and C. Villani in [70]. In the inelastic case, the situation is different. On the

one hand the solution  $f(t)$  does not converge to a smooth steady state since  $f_\infty$  is the Dirac mass (3.36), but hopefully our rescaling method allows to follow the concentration in velocity. On the other hand, on the evolution of  $\mathcal{L}(t)$  we still observe the apparition of oscillations, but now the oscillation frequency is constant with respect to the logarithmic time scale, which is a big difference with the elastic case (see Figure 3.4). Let us mention that we can also observe this oscillation phenomenon with pure specular boundary conditions.

We also remark that the scheme breaks down when  $\mathcal{L}(t)$  becomes too small (this is particularly clear for the case  $\varepsilon = 0.05$  in Figure 3.4). This can be avoided by refining the space and velocity grids.

**Interpretation of the results.** Here, we performed simulations on the full inelastic Boltzmann equation in a simplified geometry (one dimension of space and velocity, periodic and specular boundary conditions, fixed Knudsen number) with the spectral method to observe the evolution of the quantity  $\mathcal{L}(t)$  and to check numerically if such oscillations occur. It is in fact possible to give a simple interpretation of these oscillations thanks to the work [74]. Since this effect is observed near the global equilibrium, which is homogeneous in space, one can consider that the space inhomogeneous granular gases equation is a small perturbation of the homogeneous equation, which exhibits a self-similar behavior and the Haff's Law. Therefore, we rescale this equation as

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(t, x, v) = V(t)^d h(s(t), x, V(t) v), \\ V(t) = 1 + (1 - e) t, \\ s(t) = \frac{\log(1 + (1 - e) t)}{(1 - e)}. \end{array} \right.$$

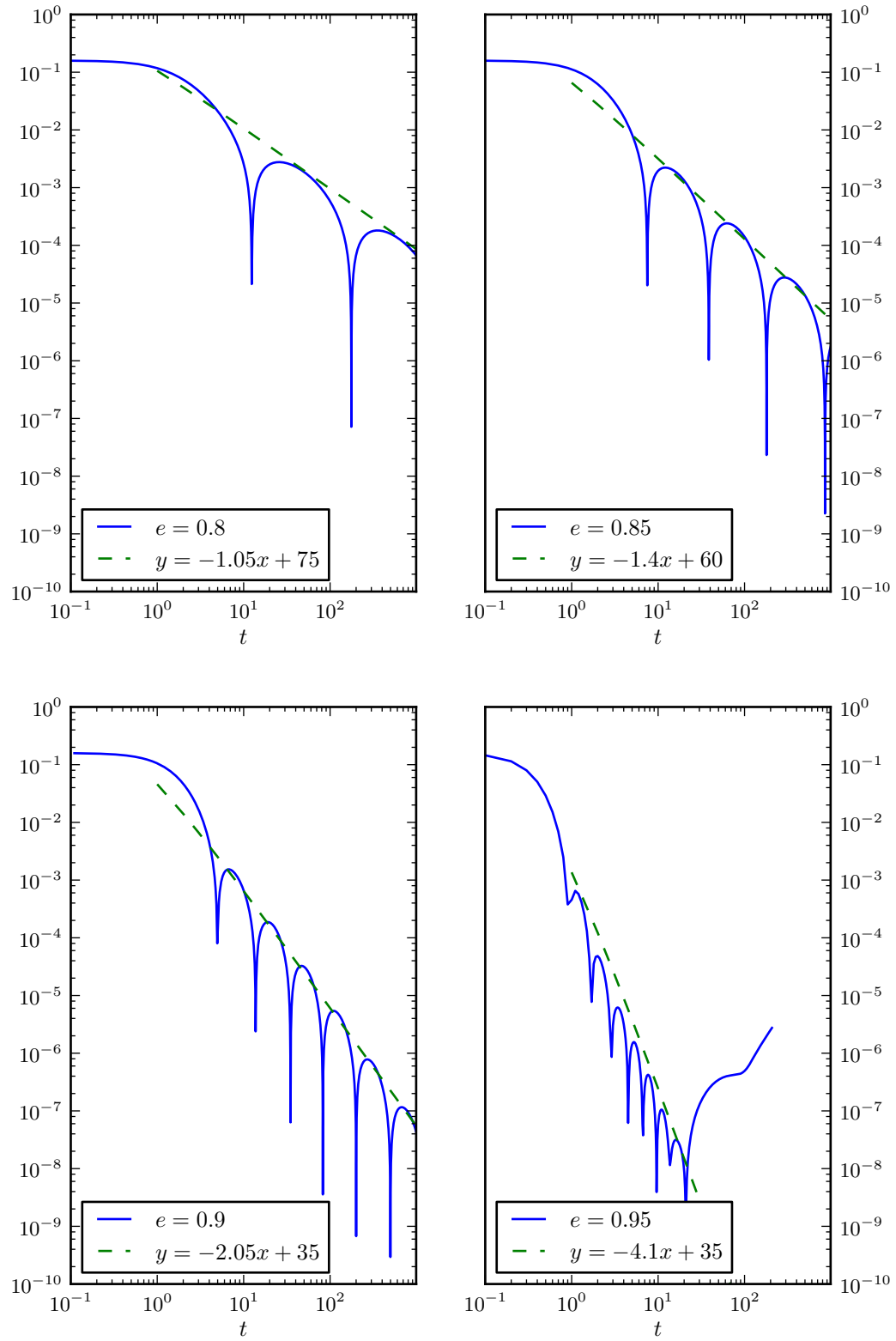
Then, one can show after straightforward computations that the distribution  $h$  is solution to the granular Boltzmann equation with an anti-drift term in the usual set (see the paper [133] and the references therein) of self similar variables  $(s, x, \nu) := (s(t), x, V(t) v)$

$$(3.38) \quad \frac{\partial h}{\partial s} + \nu \cdot \nabla_x h + (1 - e) \nabla_\nu(\nu h) = \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(h, h)}{\varepsilon}.$$

Due to the convergence toward an equilibrium distribution  $H_e$ , we can replace the collision operator by its linearization  $\mathcal{L}_e$  around  $H_e$  in (3.38). The initial condition we took actually amounts to study the long time behavior of the first spatial Fourier mode of  $h$ . This behavior is formally given by the one of  $t \mapsto e^{\lambda_j t}$  when  $t \rightarrow \infty$  for any  $j \in \{0, \dots, d + 1\}$ , where  $\lambda_j$  is one of the  $d + 2$  hydrodynamic eigenvalues of the linearized operator  $\mathcal{L}_e$ .

At least for weak inelasticity, we have seen in Subsection 3.3.2 that the inelastic collision operator can be understood as a perturbation of the elastic Boltzmann operator. In [162], we used this expansion and results from [134] to perform a spectral analysis of  $\mathcal{L}_e$ , as it has already been done for the elastic Boltzmann operator in [74]. This allows to compute the first terms of the Taylor expansion of the hydrodynamic eigenvalues  $\lambda_j$ . We give this expansion with respect to  $\eta = 2\pi/L$  and  $1 - e$ :

$$(3.39) \quad \lambda_j = i\eta \lambda_j^{(1)} + \eta^2 \lambda_j^{(2)} - (1 - e) + \mathcal{O}(\eta^3) + \mathcal{O}((1 - e)^2),$$

Figure 3.4: Trend to equilibrium:  $\mathcal{L}(t) = \|\rho - 1\|_{L^1}$ .

Restitution coefficient $e$	Damping rate $\beta$	$-(1-e)\beta$
0.8	-1.05	0.21
0.85	-1.4	0.21
0.9	-2.05	0.205
0.95	-4.1	0.205

Table 3.1: Influence of the restitution coefficient  $e$  on the damping rate in the time evolution of the quantity  $\mathcal{L}$ .

where  $\lambda_j^{(1)}$  is the first order expansion in  $\eta$  of the elastic hydrodynamic eigenvalues:

$$\lambda_j^{(1)} = \begin{cases} \pm\sqrt{1 + \frac{2}{d}}, & j \in \{0, 1\}, \\ 0, & j \in \{2, \dots, d+1\}. \end{cases}$$

The second order expansion in  $\eta$  is given by

$$\lambda_j^{(2)} = \begin{cases} -\frac{\kappa}{d+2} - \frac{\mu}{2}, & j \in \{0, 1\}, \\ -\left(1 + \frac{2}{d}\right)\kappa, & j = 2, \\ -\frac{d}{2(d-1)}\mu, & j \in \{3, \dots, d+1\}, \end{cases}$$

with  $\mu$  the viscosity coefficient and  $\kappa$  the heat conductivity of the Navier-Stokes limit of the elastic Boltzmann equation.

The expansion (3.39) can explain the oscillations and the damping observed in Figure 3.4. Indeed, the first order term in  $\eta$  is imaginary and will generate oscillations during the return toward equilibrium, of period  $\eta\sqrt{1 + 2/d}$ . Then, the period of oscillation  $\zeta$  will be proportional to  $L^{-1}$ , as in [83]. In our case, the time has not been scaled, and then according to the definition (3.37) of  $s(t)$ , the oscillations will appear in a logarithmic time. The second order term in  $\eta$  and the term in  $(1-e)$  are nonpositive and then will exhibit a damping effect of magnitude  $\eta^2\alpha + (1-e)\beta$  for  $\alpha, \beta$  positive, according to (3.39). We can see in Table 3.1 that this effect can be observed numerically: when the restitution coefficient varies, the quantity  $(1-e)\beta$  remains constant, when measured in the logarithmic scale.

### 3.6.3 Inelastic Shear Flow Problem

The uniform shear flow problem is perhaps one of the most widely studied nonequilibrium problem for granular gases, both experimentally and theoretically [12]. It can be described as follows: consider a gas enclosed between two infinite planes located at  $y = -1/2$  and  $y = 1/2$ , in opposite relative motion with respective velocities  $-1/2$  and  $1/2$  in the  $x$ -direction. The planes are not described as realistic thermalized, reflecting walls (*i.e.* Maxwell boundary conditions) but as Lee-Edwards boundaries: when a particle of velocity  $v$  hits one of the planes, it is reemitted through the opposite one with a velocity  $v'$  such that the relative velocity of the particle with respect to the plane is preserved before and after this exchange. In consequence, the energy of the system increases during this process.

Thus, the particles gain energy at the boundary while other particles lose energy due to the inelasticity of the collisions. This problem has been solved numerically using Direct Simulation Monte Carlo methods in [12, 167]. We shall consider it using the full deterministic inelastic Boltzmann equation. The gas is taken initially at thermal equilibrium in the two dimensional infinite tube

$$f_0(x, v) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right), \quad \forall x \in [-1/2, 1/2] \times \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

The evolution of the system will be induced by the inelastic collisions as well as the flow created by the energy input at the boundaries.

**Description of the results.** The simulations are made thanks to the rescaled model (3.17), with the granular gases collision operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$ , on a simplified geometry: one dimension of space and velocity with  $\Omega = [-1/2, 1/2]$ . The shear flow problem is mimicked by using diffusive boundary conditions: we impose constant temperature  $T_w = 1$  and velocity  $u_w = 0$  on the boundary  $x = \pm 1/2$ . The restitution coefficient of the inelastic collisions is  $e = 0.9$ . We take  $N_x = 100$  and 150 points for the space grid and  $N_v = 32$  half Fourier modes on a rescaled velocity box  $\mathcal{D}_V = [-V, V]$  of size  $V = 12$ . We compare these results with computations made on the model (3.1) in classical variables. We take in this case  $N_x = 100$  spatial points and  $N_v = 32$  half Fourier modes on a velocity box  $\mathcal{D}_V$  with  $V = 8$ .

We present in Figure 3.5 the evolution of the normalized density  $\rho(t, x)/\bar{\rho}$  and temperature  $T(t, x)/\bar{T}(t)$ , where  $\bar{\rho}$  and  $\bar{T}$  are the space averaged quantities

$$\bar{T}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} T(t, x) dx, \quad \bar{\rho} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho(t, x) dx.$$

On the one hand, we observe that the computation in classical and rescaled variables agree very well for short time. Then, the oscillations due to the concentration in velocity variable for the classical case quickly break the result of this computation. On the other hand, the solution obtained in rescaled variables can be computed for large time, thanks to the change of scales induced by the choice (3.8) of  $\omega$ . We also notice the stability of the scheme with respect of the space grid.

The short time behavior of this quantity is close to the one presented in [12] using DSMC simulations on the more realistic  $2d_x \times 2d_v$  geometry. Indeed, we can see that the thermalized walls heat the system at the boundary and the collisions cool it inside the domain. This induces very strong gradients near the boundaries for the macroscopic quantities. When time evolves, the temperature will eventually become uniform inside the domain with bigger and bigger gradients near the boundary. This large time behavior is different of the one described in [12] where the temperature reaches a space uniform steady state. This might be due to the use of a simplified geometry. Indeed, in their case, the heating of the boundary induced by the Lee-Edwards conditions will stop because of the uniformization of the gas.

### 3.6.4 Cluster Formation in Granular Gases

We consider now the kinetic equation (3.1) with the simplified granular gases operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$  in dimension 2 of space and velocity, on the torus  $\mathbb{T}^2 = [0, 1]^2$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}(f)}{\varepsilon}, \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$$

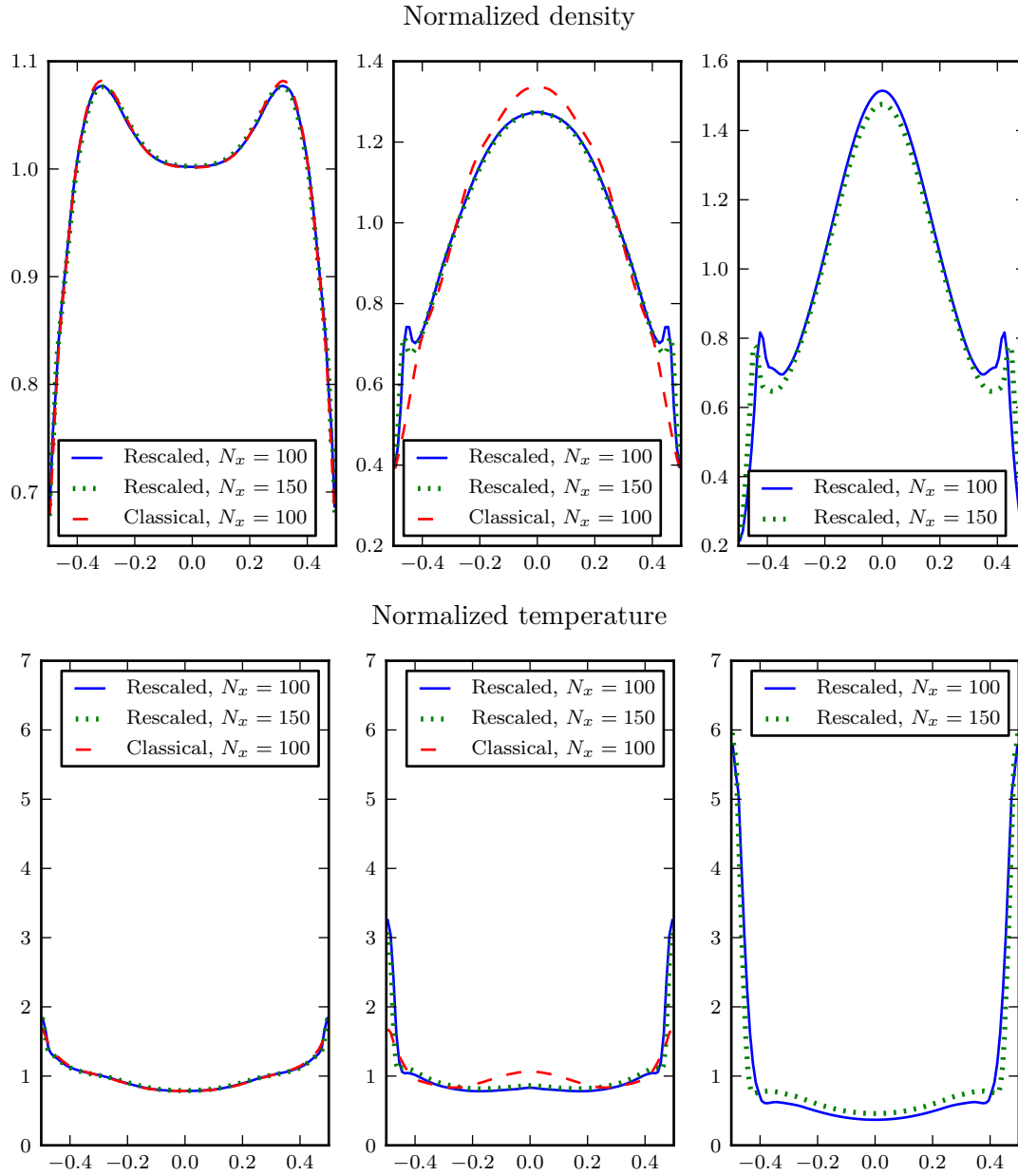


Figure 3.5: Normalized density  $\rho(t, x)/\bar{\rho}$  and temperature  $T(t, x)/\bar{T}(t)$  for the shear flow problem, computed in classical and rescaled variables, at time  $t = 0.25, 0.75$  and  $2$ .

with periodic boundary conditions in  $x$ . We shall present some numerical evidences of *clustering* for this simplified granular gases model.

The problem of cluster formation in a force-free granular media is a particularly difficult test case of numerical methods for granular gases simulations. It has been shown to occur numerically in both microscopic and macroscopic simulations. More precisely, in the classical Molecular Dynamics (MD) simulations of [95], clusters arise from an initially homogeneous gas of particles. It was also observed using MD simulations in [159] that clustering is a transient phenomenon: an initially homogeneous system of particles interacting by inelastic collisions will tend to form clusters and then will eventually come back after some time to the homogeneous cooling state. Clusters were also observed using deterministic numerical simulations for the macroscopic quantities, thanks to the energy dissipative Navier-Stokes model of [50].

We will show that this phenomenon also occurs at the mesoscopic scale, namely using a kinetic description. The initial condition for the problem is taken as a Maxwellian distribution of homogeneous, isotropic momentum and temperature and uniform density:

$$f_0(x, v) = \frac{U(x)}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right), \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$$

with  $U$  an uniformly distributed random variable over  $[0, 1]^2$ .

**Description of the results.** The simulations are made using the simplified granular gases operator  $\mathcal{Q}_S$  presented in Subsection 3.6.4 in the rescaled model (3.3)-(3.7). The macroscopic scaling function  $\omega$ , given by (3.8), is computed thanks to the energy dissipative Euler system (3.20). Due to the correct energy dissipation, this model mimics the behavior of the kinetic granular gases equation and is then consistent with the MD simulations of [95]. Moreover, the ES-BGK operator used in the definition of  $\mathcal{Q}_S$  gives the good Prandtl number for the Navier-Stokes limit of the model, which is also consistent with the macroscopic model of [50].

We take  $N_x = 50$  points in each direction of space on the torus and  $N_v = 50$  points in each direction of a velocity box of size  $V = 7$ . The restitution coefficient is  $e = 0.99$  (and then  $\varepsilon = 0.01$  thanks to the weak inelasticity assumption (3.19)). We show in Figure 3.6 the density contour plot given by the kinetic model and by the dissipative Euler system (3.20) used to compute the scaling function. We see that both models give the same results for short time, which is consistent with the fact that the hydrodynamic limit of the kinetic equation (3.1) with the Fokker-Planck operator (3.21) is given at the first order in  $\varepsilon$  by Euler system (3.7). Then, for larger time, clusters start to appear even with a coarse grid in space. It is interesting to notice that the clusters remain bounded through time, even without taking into account the dense gas effects through a “pair correlation function” depending of a maximal packing fraction, as in [50].

## Appendix 3.A Quasi-Elastic Limit of the Granular Gases Operator

We will compute in this Section the expansion of the granular gases operator with respect to the restitution coefficient, in order to compute the friction operator  $\mathcal{I}$  of Subsection 3.3.2 and its main features.



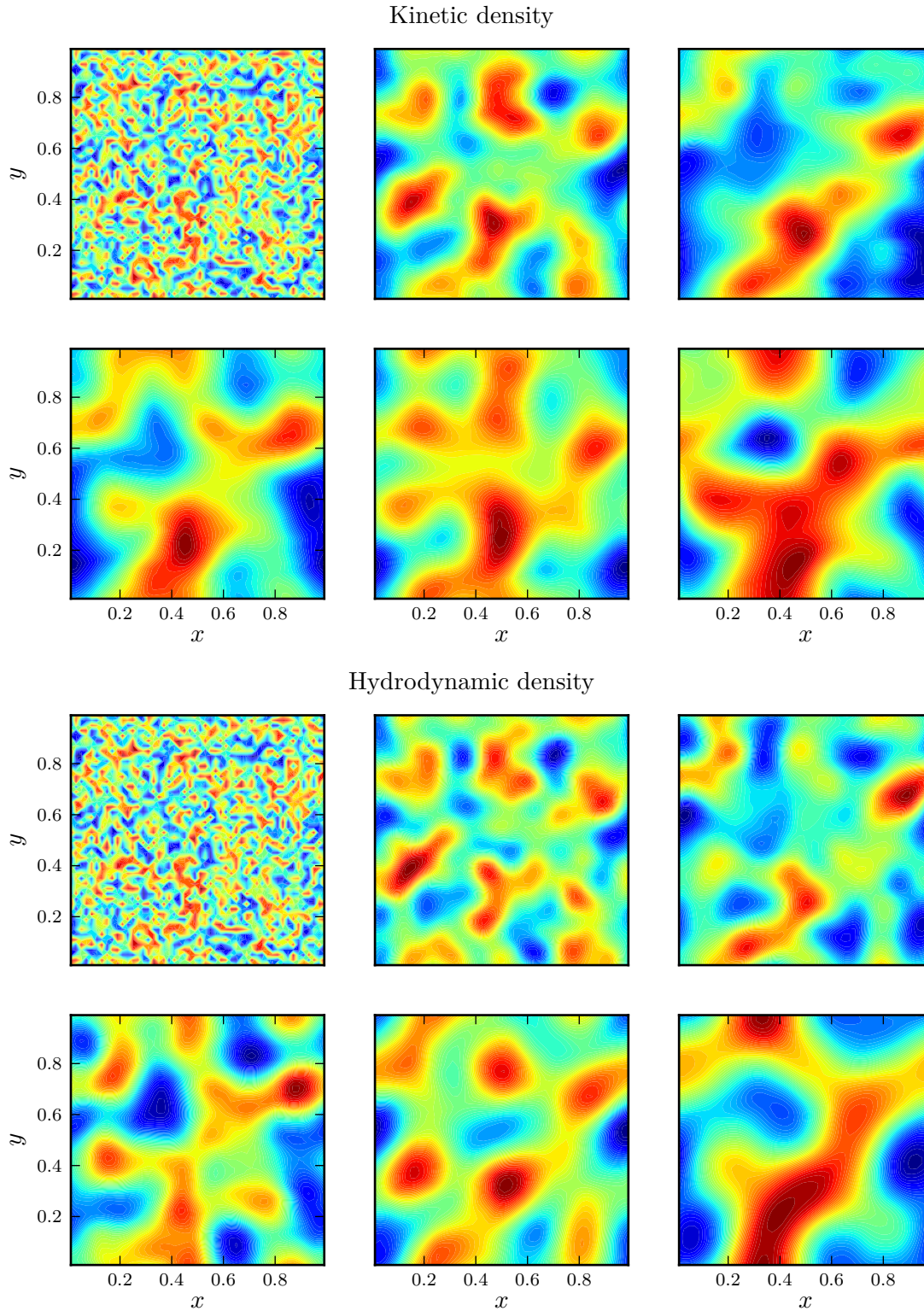


Figure 3.6: Contour plot of the density given by the simplified granular gases model (top) and the dissipative Euler system (bottom), at time  $t = 0, 0.25, 0.5, 1, 5$  and  $10$ . High values are displayed in red, low in blue.

### 3.A.1 Taylor Expansion of the Collision Operator

Let us denote in the following by  $\tilde{v}$  et  $\tilde{v}_*$  the respective post-collisional velocities coming from the *elastic* collision of two particles of velocities  $v$  and  $v_*$

$$\tilde{v} = v - ((v - v_*) \cdot n) n, \quad \tilde{v}_* = v_* + ((v - v_*) \cdot n) n,$$

where  $u = v - v_*$ . Thus, using expression (3.13) of the collisional transform, one can write inelastic collisions as a perturbation of order  $1 - e$  of elastic ones:

$$v' = \tilde{v} + \frac{1 - e}{2} ((v - v_*) \cdot n) n, \quad v'_* = \tilde{v}_* - \frac{1 - e}{2} ((v - v_*) \cdot n) n.$$

Keeping this in mind and considering the weak inelasticity hypothesis  $1 - e = \varepsilon$ , one has

$$v' = \tilde{v} + \frac{\varepsilon}{2} ((v - v_*) \cdot n) n.$$

Now, following the same argument than in [181], one can Taylor expand  $\psi$  near  $v'$ , writing

$$\psi(v') = \psi(\tilde{v}) + \frac{\varepsilon}{2} ((v - v_*) \cdot n) n \cdot \nabla \psi(\tilde{v}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

The weak expression (3.15) of the inelastic collision operator gives

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, g), \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} \left( \psi(\tilde{v}) - \psi(v) + \frac{\varepsilon}{2} (u \cdot n) n \cdot \nabla \psi(\tilde{v}) \right) \\ &\quad |u \cdot n| f_* g b(\cos \theta) dn dv dv_* + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ (3.40) \quad &= \langle \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(f, g), \psi \rangle + \varepsilon \langle \mathcal{I}(f, g), \psi \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

where  $u = v - v_*$ ,  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  is the energy conservative Boltzmann operator and  $\mathcal{I}$  is the quadratic, energy dissipative operator given in weak form by

$$(3.41) \quad \langle \mathcal{I}(f, g), \psi \rangle := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n| (u \cdot n) f_* g \nabla \psi(\tilde{v}) \cdot n b(\cos \theta) dn dv dv_*.$$

Using the expression of the elastic post-collisional velocities, it is easy to see that the Jacobian of transformation  $(v, v_*) \rightarrow (\tilde{v}, \tilde{v}_*)$  is equal to 1. Then, thanks to this fact and to the elementary computation

$$\tilde{u} \cdot n = (u - 2(u \cdot n)n) \cdot n = -u \cdot n,$$

one can write using divergence Theorem

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(f, g), \psi \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n| (u \cdot n) \tilde{f}_* \tilde{g} \nabla \psi(v) \cdot n b(\cos \theta) dn dv dv_* \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(v) \operatorname{div}_v \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n| (u \cdot n) n \tilde{f}_* \tilde{g} b(\cos \theta) dn dv_* \right) dv. \end{aligned}$$

This last result being true for all test functions  $\psi$ , one can deduce the strong form of  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{I}(f, g)(v) = \frac{1}{2} \operatorname{div}_v \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n| (u \cdot n) n \tilde{f}_* \tilde{g} b(\cos \theta) dn dv_* \right).$$

**Remark 2.** According to [134, Proposition 3.2] and under suitable regularity assumptions on  $f$ , the application  $[0, 1] \ni e \mapsto \mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(f, \cdot)$  is Lipschitz-continuous for the operator norm. Thus, if  $\varepsilon$  is close to 0, the inelastic operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  is a correction of order  $\varepsilon$  of the Boltzmann operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$ . The advantage of our formal approach is that we obtain an explicit representation of the perturbing operator.

### 3.A.2 Macroscopic Properties of the Dissipative Operator

**Moments of the Friction operator.** We shall study the moments of  $I$  in order to compute their evolution during time. Thanks to its weak form (3.41), it is easy to see that there is conservation of mass and momentum for this operator: if  $\psi(v) = 1$ ,  $v$  then

$$\langle \mathcal{I}(f, g), \psi \rangle = 0$$

Moreover, using the swap of variables  $(v, v_*) \rightarrow (v_*, v)$ , which brings the transformations  $u \rightarrow -u$  and  $\tilde{v} \rightarrow \tilde{v}_*$ , one gets by using once more (3.41), symetrisation and Fubini Theorem (all quantities are non-negative):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(f, f), \frac{1}{2}|v|^2 \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n| (u \cdot n) f_* f n \cdot \tilde{v}_* b(\cos \theta) dn dv dv_* \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n| (u \cdot n) f_* f n \cdot (\tilde{v} - \tilde{v}_*) b(\cos \theta) dn dv dv_* \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n|^3 f_* f b(\cos \theta) dn dv dv_* \\ (3.42) \quad &= - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} A(|u|) f f_* dv dv_*, \end{aligned}$$

where we denoted for a fixed  $u \in \mathbb{R}^d$ , thanks to the spherical coordinates  $u \cdot n = \cos \theta$

$$\begin{aligned} A(|u|) &:= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u \cdot n|^3 b(\cos \theta) dn \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{d-2}|}{4} |u|^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta) \cos^{d-2}(\theta) b(\cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

If we assume that the cross section is constant (say  $b(\cos \theta) = (2\pi)^{-1}$ ), then we have

$$A(|u|) = C_d |u|^3,$$

where we have set

$$(3.43) \quad C_d := |\mathbb{S}^{d-2}| \frac{\beta(2, (d-1)/2)}{8\pi}$$

and  $\beta$  denotes the so-called Euler “Beta” function, given for non-negative  $x, y$  by

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

Finally, one can compute the expression of the energy of  $\mathcal{I}(f, f)$  thanks to (3.42)

$$(3.44) \quad \langle \mathcal{I}(f, f), \frac{1}{2}|v|^2 \rangle = -C_d \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |u|^3 f(v) f(v_*) dv dv_*.$$

Using this inequality together with the conservative properties of the operators  $Q_{\mathcal{B}}$  and  $I$ , we are now able to compute (at least formally) the evolution of the global moments of the granular gases equation (3.1).

**Evolution of the Hydrodynamic Quantities.** It is clear by integration in velocity and space variables that we have global conservation of mass and momentum in equation (3.1) with  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} + \varepsilon \mathcal{I}$  if  $\Omega = \mathbb{R}^d$  or  $\mathbb{T}^d$ , because  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  and  $\mathcal{I}$  conserve these quantities, as well as the free transport term  $v \cdot \nabla_x$ . We also have the following dissipative property for the energy:

**Proposition 3.A.1.** *Assume that  $\Omega = \mathbb{R}^d$  or  $\mathbb{T}^d$ . Let  $f$  be a smooth solution to equation (3.1) with  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} + \varepsilon \mathcal{I}$  of zero momentum. There exists an explicit non-negative constant  $K$  such that*

$$\frac{d}{dt} \overline{E}(f)(t) \leq -K \overline{E}(f)(t)^{\frac{3}{2}},$$

where  $\overline{E}$  is the space averaged kinetic energy

$$\overline{E}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} E(t, x) dx.$$

*Proof.* If one multiplies (3.1) by  $|v|^2/2$  and integrates in velocity and space variables, together with the use of (3.44) and Jensen inequality with the convex function  $r \mapsto r^3$  and the measure  $f(v_*) dv_*$ , one gets

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{E}(f)(t) &= -\frac{C_d}{|\Omega|} \iiint_{\Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v - v_*|^3 f(t, x, v) f(t, x, v_*) dv dv_* dx, \\ &\leq -\bar{\rho} \frac{C_d}{|\Omega|} \int_{\mathbb{R}^d} |v|^3 f(t, x, v) dv dx. \end{aligned}$$

Then, Hölder inequality applied with  $s = 3/2$  and its conjugate  $s' = 3$  to the map  $v \mapsto f(v)|v|^2$  gives the result.  $\square$

**Remark 3.** Integrating this result with respect to time gives the following upper bound for the energy of  $f$ :

$$\overline{E}(f)(t) \leq \left( \overline{E}(f_{in})^{-\frac{1}{2}} - Kt \right)^{-2}$$

Especially, it agrees with the classical upper bound for a space-homogeneous gas of inelastic hard spheres with constant restitution coefficient (the Haff's Law), given formally in [103] and rigorously in the articles [133] of S. Mischler and C. Mouhot and [4] of R. Alonso and B. Lods (the difficult part being the associated lower bound).

For more complex spatial geometries with Maxwell boundary conditions, only mass is preserved, according to Section 3.4.

## Appendix 3.B A Formal Compressible Euler Limit

We are now going to study the fluid dynamic limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  of equation (3.1), where  $\mathcal{Q}$  is a collision operator preserving mass and momentum, in order to compute the pressure tensor and the kinetic energy for the closed system (3.7). Multiplying equation (3.1) by a smooth test function  $\psi$  and integrating in velocity variables yield

$$(3.45) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(v) f(t, x, v) dv + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^d} v \psi(v) f(t, x, v) dv = \frac{1}{\varepsilon} \langle \mathcal{Q}(f, f), \psi \rangle.$$

**Conservation of mass.** If we take  $\psi(v) = 1$  in equation (3.45), using the conservative properties of  $\mathcal{Q}$ , one obtains a conservation law for the local mass:

$$(3.46) \quad \partial_t \rho + \operatorname{div}_x \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

**Conservation of momentum.** Using the same argument, taking  $\psi(v) = v$  in (3.45) yields

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v f(v) dv = 0,$$

where we have set  $(a \otimes b)_{i,j} = a_i b_j$  for  $a, b \in \mathbb{R}^d$ . Thanks to the bilinearity of this operation, if  $c(v) = v - \mathbf{u}$  is the local velocity of a particle

$$\begin{aligned} v \otimes v &= (c + \mathbf{u}) \otimes (c + \mathbf{u}) \\ &= c \otimes c + 2\mathbf{u} \otimes c + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Since  $\langle c, f \rangle = 0$ , one gets the conservation law for the momentum

$$(3.47) \quad \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x (\mathbb{P}(f) + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = 0,$$

where the *pressure* tensor  $\mathbb{P}(f)$  is given by

$$\mathbb{P}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} c(v) \otimes c(v) f(t, x, v) dv.$$

**Remark 4.** Since  $\operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla_x) \mathbf{u} + \mathbf{u} \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u})$ , plugging the conservation law (3.46) in this equation gives the non-conservative form of (3.47)

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_x) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}_x \mathbb{P}(f) = 0.$$

**Conservation of energy.** Finally, let us take  $\psi(v) = |v|^2/2$  in equation (3.45). We find the non-closed equation for  $E$

$$\partial_t E + \frac{1}{2} \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 v f(t, x, v) dv = \langle \mathcal{Q}(f, f), \frac{|v|^2}{2} \rangle.$$

Using again the fact that  $\int_{\mathbb{R}^d} c(v) f(v) dv = 0$ , it comes that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 v f(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^d} (|c(v)|^2 + 2c(v) \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2) (c(v) + \mathbf{u}) f(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |c(v)|^2 c(v) f(v) dv + \mathbf{u} \operatorname{Trace} (\mathbb{P}(f)) + 2\mathbf{u} \cdot \mathbb{P}(f) + \rho \mathbf{u} |\mathbf{u}|^2 \\ &= 2\mathbb{Q}(f) + \mathbf{u} (\operatorname{Trace} (\mathbb{P}(f)) + \rho |\mathbf{u}|^2) + 2\mathbf{u} \cdot \mathbb{P}(f), \end{aligned}$$

where the *heat flux* vector  $\mathbb{Q}(f)$  has been defined by

$$\mathbb{Q}(f) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |c(v)|^2 c(v) f(v) dv.$$

Using the fact that  $\operatorname{Trace} (\mathbb{P}(f)) = d\rho T = 2E - \rho |\mathbf{u}|^2$ , one gets the conservation law for the energy:

$$(3.48) \quad \partial_t E + \operatorname{div}_x (\mathbb{Q}(f) + E\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbb{P}(f)) = \langle \mathcal{Q}(f, f), \frac{|v|^2}{2} \rangle.$$

**Application: closure of the quasi-elastic granular gases equation.** Up to now, collecting the equations (3.46)–(3.47)–(3.48), we have shown that the hydrodynamic quantities fulfill the following system:

$$(3.49) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbb{P}(f)) = 0, \\ \partial_t E + \operatorname{div}_x(\mathbb{Q}(f) + E\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbb{P}(f)) = \langle \mathbb{Q}(f, f), \frac{|v|^2}{2} \rangle, \end{cases}$$

In order to obtain a system independent of the distribution  $f$ , we need to compute the pressure  $\mathbb{P}$ , the heat flux  $\mathbb{Q}$  and the dissipation of energy. We shall do this for the granular gases operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$  in the quasi-elastic regime  $1 - e = \varepsilon$ . Indeed, thanks to this hypothesis, we have seen in (3.40) that we have

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{I}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} + \varepsilon \mathcal{I} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

It has been shown in [134, Theorem 1.3 and 4.1] that the Maxwellian distribution with the correct temperature is a correction of order  $\varepsilon$  of the granular self-similar solution. Then, we shall use Maxwellian distributions to close (approximately) the system.

It is well known that the Maxwellian distributions are the (only) zeros of the operator  $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$  (e.g. [57]). Moreover, taking  $\psi(v) = (1, v, |v - \mathbf{u}|^2)$  yields

$$\langle \mathcal{M}_{\rho, \mathbf{u}, T}, \psi \rangle = (\rho, \rho \mathbf{u}, d\rho T).$$

Thus, we can plug in the moment equation (3.45) a Maxwellian distribution  $\mathcal{M}$  whose mass, momentum and temperature are the (local) ones of the distribution  $f$  in order to obtain the system of conservation law (3.49). The distribution  $\mathcal{M}$  being explicitly defined, we can compute its pressure tensor  $\mathbb{P}$ , thanks to the change of variables  $c \rightarrow C = c/\sqrt{T}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{M}) &= \int_{\mathbb{R}^d} c(v) \otimes c(v) \mathcal{M}(v) dv \\ &= \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} c(v) \otimes c(v) \exp\left(-\frac{|v - \mathbf{u}|^2}{2T}\right) dv \\ &= \frac{\rho T}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} C(v) \otimes C(v) \exp\left(-\frac{|C(v)|^2}{2}\right) dv \\ &= \rho T I_d, \end{aligned}$$

where  $I_d$  is the identity matrix of size  $d$  (and then  $\mathbb{P}$  is diagonal). We also used in this computation the nullity of the odd moments of a centred reduced Gaussian. Thanks to the same argument, it comes that the heat flux is zero:

$$\mathbb{Q}(\mathcal{M}) = 0.$$

The left hand side of (3.49) is then the usual compressible Euler system of gas dynamics. Let us compute its right hand side.

One has thanks to the expression (3.42) of the kinetic energy of  $I(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  and the transformation

$(v, v_*) \rightarrow (V, V_*) = \left( (v - \mathbf{u})/\sqrt{T}, (v_* - \mathbf{u})/\sqrt{T} \right)$  (whose Jacobian is  $T^d$ ):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(\mathcal{M}, \mathcal{M}), \frac{|v|^2}{2} \rangle &= - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} A(|u|) \mathcal{M}(v) \mathcal{M}(v_*) \, dv \, dv_* \\ &= - \frac{\rho^2}{(2\pi T)^d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} A(|u|) \exp\left(-\frac{1}{2T} (|v - \mathbf{u}|^2 + |v_* - \mathbf{u}|^2)\right) \, dv \, dv_* \\ &= - \frac{\rho^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} A(\sqrt{T}|U|) \exp\left(-\frac{|V|^2 + |V_*|^2}{2}\right) \, dV \, dV_*, \end{aligned}$$

where we have set  $U := V - V_*$ . Since

$$|V|^2 + |V_*|^2 = |V|^2 + |V - U|^2 = \frac{|U|^2}{2} + 2 \left|V - \frac{U}{2}\right|^2,$$

we can substitute  $(V, V_*)$  by  $(V - U, V_* - U)$  to get

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}(\mathcal{M}, \mathcal{M}), \frac{|v|^2}{2} \rangle &= - \frac{\rho^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} A(\sqrt{T}|U|) \exp\left(-\frac{|U|^2}{2}\right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|V - \frac{U}{2}|^2} \, dV \right) \, dU \\ &= - \frac{\rho^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} A(\sqrt{T}|U|) \exp\left(-\frac{|U|^2}{2}\right) \, dU. \end{aligned}$$

To finish, we know that  $A(\lambda) = C_d \lambda^3$ , where the constant  $C_d$  is given by (3.43). Hence

$$\langle \mathcal{I}(\mathcal{M}, \mathcal{M}), \frac{|v|^2}{2} \rangle = -K_d \rho^2 T^{\frac{3}{2}},$$

where we have set

$$(3.50) \quad K_d = 2^{3/2} \frac{C_d}{(4\pi)^{d/2}} \left| \mathbb{S}^{d-2} \right| \Gamma(5/2),$$

with  $\Gamma$  the so-called Gamma function. This concludes the derivation of the closed system (3.20).

## Acknowledgment

The authors would like to thank ICERM at Brown University for the kind hospitality during the 2011 Fall Semester Program on "Kinetic Theory and Computation" where part of this work has been carried on. TR also like to thanks Lorenzo Pareschi for interesting discussions about the BGK-like simplified granular gases model. This work is partially supported by the European Research Council ERC Starting Grant 2009, project 239983-NuSiKiMo.

---

Décomposition convolutive et algorithmes de sommation rapide  
pour des approximations de type « vitesses discrètes » de l'équation  
de Boltzmann

En collaboration avec Clément MOUHOT et Lorenzo  
PARESCHI

---

**Résumé du chapitre.** Les approximations de type « vitesses discrètes » sont des méthodes déterministes très populaires utilisées pour calculer l'opérateur de collision de Boltzmann (élastique). Elles reposent sur une évaluation numérique directe par des méthodes de quadratures de l'opérateur de Boltzmann, et ont donc un coût prohibitif, en général de l'ordre de  $O(N^{2d+1})$ , où  $d$  est la dimension de l'espace des vitesses. Dans ce chapitre, d'après les idées introduites dans [141, 142], nous développons des techniques de sommation rapide pour l'évaluation de ces schéma à « vitesses discrètes » qui permettent de réduire le coût de calcul jusqu'à  $O(\bar{N}^d N^d \log_2 N)$ , pour  $\bar{N} \ll N$ , presque sans perte de précision.



---

**Contents**


---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>154</b>
<b>4.2</b>	<b>Preliminaries</b>	<b>155</b>
4.2.1	The Boltzmann equation	155
4.2.2	Carleman-like representation in bounded domains	156
4.2.3	Application to discrete-velocity models	159
<b>4.3</b>	<b>Fast DVM's Algorithms</b>	<b>161</b>
4.3.1	Principle of the method: a pseudo-spectral viewpoint	162
4.3.2	Expansion of the discrete kernel modes	163
4.3.3	Implementation of the algorithm	168
<b>4.4</b>	<b>Numerical Results</b>	<b>169</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>172</b>

---

## 4.1 Introduction

Among deterministic methods to approximate the Boltzmann collision integral, one of the most popular is represented by discrete velocity models (DVM). These methods [40, 127, 28, 65, 149, 164, 131, 32] are based on a regular grid in the velocity field and construct a discrete collision mechanics on the points of the quadrature rule in order to preserve the main physical properties.

As compared to Monte-Carlo methods, these methods have certain number of assets: accuracy, absence of statistical fluctuations, and the fact that the distribution function is explicitly represented in the velocity space. However their computational cost is more than quadratic and they cannot compete with the linear cost of a Monte Carlo approach. Indeed the “naive” cost of a product quadrature formula for the  $(d-1)+d$  fold Boltzmann collision integral in dimension  $d$  is  $O(M^{d-1}N^d)$ , where  $M$  is related to the angle and  $N$  to the velocity discretizations. More concretely Buet presented in [40] a DVM algorithm widely used since then in  $O(N^{2d+1+\varepsilon})$  for all  $\varepsilon > 0$  (and a constant depending on  $\varepsilon$ ); Michel and Schneider algorithm in [131] is  $O(N^{2d+\delta})$  where  $\delta$  depends on  $d$  and is close to 1; finally the method of Panferov and Heinz [149] is  $O(N^{2d+1})$ . For this reason several acceleration techniques for DVM have been proposed in the past literature. We do not seek to review them here, and refer the reader to [40, 117, 126, 158, 185].

More recently a new class of methods based on the use of spectral techniques in the velocity space has attracted the attention of the scientific community. The method first developed for the Boltzmann equation in [150] is based on a Fourier-Galerkin approximation of the integral collision operator. As shown in [151, 152] the method permits to obtain spectrally accurate solution at a reduced computational cost of  $O(N^{2d})$ . A proof of stability and convergence for this method has been given in [82]. Finally the method has been extended to the case of the quantum Boltzmann collision operator [81, 111]. Other methods based on spectral techniques have been developed in [30, 92].

One of the major differences between DVM and spectral methods is that in the latter the interaction kernel of the Boltzmann collision integral is not modified in order to obtain a conservative equation on a bounded domain. This aspect has a profound influence on the resulting structure of the algorithm since most of the symmetries which are present in the original operator are preserved. Using this fact, in [141, 142], the authors developed a numerical technique based on the

Fast Fourier Transform (FFT) that permits to reduce the cost of spectral method from  $O(N^{2d})$  to  $O(M^{d-1}N^d \log_2 N)$  where  $M$  is the number of angle discretizations. These ideas have been successfully used in [83] to compute space non homogeneous solutions of the Boltzmann equation.

In this paper we will consider general discrete velocity approximation of the Boltzmann equation without any modification to the original collision kernel and show how the FFT techniques developed in [141, 142] can be adapted to this case to obtain acceleration algorithms. In this way, for a particular class interactions using a Carleman-like representation of the collision operator we are able to derive discrete velocity approximations that can be evaluated through fast algorithms at a cost of  $O(\bar{N}^d N^d \log_2 N)$ ,  $\bar{N} \ll N$ . The class of interactions includes *Maxwellian molecules* in dimension two and *hard spheres* molecules in dimension three.

Let us emphasize here that a detailed analysis of the computational complexity in DVM is non trivial since imposing conservations on the points of the quadrature rule originates a summation formula that requires the exact enumeration of the set of involved orthogonal directions in  $\mathbb{Z}^d$ .

The rest of the paper is organized in the following way. In the next Section we introduce briefly the Boltzmann equation and give a Carleman-like representation of the collision operator which is used as a starting point for the development of our methods. In Section 4.3 a fast DVM method is introduced together with a detailed analysis of its computational complexity. In Section 4.4, we present some numerical results obtained with the fast and the classical DVM methods.

## 4.2 Preliminaries

### 4.2.1 The Boltzmann equation

The Boltzmann equation describes the behavior of a dilute gas of particles when the only interactions taken into account are binary elastic collisions. It reads for  $x, v \in \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ )

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}(f, f)$$

where  $f(t, x, v)$  is the time-dependent particle distribution function in the phase space. The Boltzmann collision operator  $\mathcal{Q}$  is a quadratic operator local in  $(t, x)$ . The time and position acts only as parameters in  $\mathcal{Q}$  and therefore will be omitted in its description

$$(4.1) \quad \mathcal{Q}(f, f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^d} \int_{\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}} B(\cos \theta, |v - v_*|) [f'_* f' - f_* f] d\sigma dv_*.$$

In (4.1) we used the shorthand  $f = f(v)$ ,  $f_* = f(v_*)$ ,  $f' = f(v')$ ,  $f'_* = f(v'_*)$ . The velocities of the colliding pairs  $(v, v_*)$  and  $(v', v'_*)$  are related by

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma.$$

The collision kernel  $B$  is a non-negative function which by physical arguments of invariance only depends on  $|v - v_*|$  and  $\cos \theta = \hat{g} \cdot \sigma$  (where  $\hat{g} = (v - v_*)/|v - v_*|$ ).

Boltzmann's collision operator has the fundamental properties of conserving mass, momentum and energy

$$\int_{v \in \mathbb{R}^d} \mathcal{Q}(f, f) \phi(v) dv = 0, \quad \phi(v) = 1, v, |v|^2$$

and satisfies the well-known Boltzmann's  $H$ -theorem

$$-\frac{d}{dt} \int_{v \in \mathbb{R}^d} f \log f dv = - \int_{v \in \mathbb{R}^d} \mathcal{Q}(f, f) \log(f) dv \geq 0.$$

The functional  $-\int f \log f$  is the entropy of the solution. Boltzmann  $H$ -theorem implies that any equilibrium distribution function, i.e. any function which is a maximum of the entropy, has the form of a locally Maxwellian distribution

$$M(\rho, u, T)(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|u-v|^2}{2T}\right),$$

where  $\rho$ ,  $u$ ,  $T$  are the density, mean velocity and temperature of the gas

$$\rho = \int_{v \in \mathbb{R}^d} f(v) dv, \quad u = \frac{1}{\rho} \int_{v \in \mathbb{R}^d} v f(v) dv, \quad T = \frac{1}{d\rho} \int_{v \in \mathbb{R}^d} |u-v|^2 f(v) dv.$$

For further details on the physical background and derivation of the Boltzmann equation we refer to [59] and [187].

#### 4.2.2 Carleman-like representation in bounded domains

In this short paragraph we shall approximate the collision operator on a bounded domain starting from a representation which somehow conserves more symmetries of the collision operator when one truncates it in a bounded domain. This representation was used in [29, 30, 31, 112, 142] and is close to the classical Carleman representation (cf. [43]).

We have the following

**Lemma 4.2.1.** *Introducing the change of variables*

$$x = \frac{1}{2} r \sigma, \quad y = v_* - v - x$$

the collision operator (4.1) can be rewritten in the form

$$\mathcal{Q}(f, f)(v) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{y \in \mathbb{R}^d} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) [f(v+y) f(v+x) - f(v+x+y) f(v)] dx dy,$$

where

$$\tilde{B}(x, y) = \tilde{B}(|x|, |y|) = 2^{d-1} B\left(\frac{|x|}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}}, \sqrt{|x|^2 + |y|^2}\right) (|x|^2 + |y|^2)^{-\frac{d-2}{2}}.$$

*Proof.* The basic identity we shall need is

$$(4.2) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(|u|\sigma - u) d\sigma = \frac{1}{|u|^{d-2}} \int_{\mathbb{R}^d} \delta(2x \cdot u + |x|^2) F(x) dx.$$

It can be verified easily by completing the square in the delta Dirac function, taking the spherical coordinate  $x = r\sigma$  and performing the change of variable  $r^2 = s$ . Setting  $u = v - v_*$  we can write the collision operator in the form

$$\mathcal{Q}(f, f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}} B(\cos \theta, |u|) \left[ f\left(v_* - \frac{|u|\sigma - u}{2}\right) f\left(v + \frac{|u|\sigma - u}{2}\right) - f(v_*) f(v) \right] d\sigma \right\} dv_*$$

and thus relation (4.2) yields

$$\mathcal{Q}(f, f)(v) = 2 \int_{v_* \in \mathbb{R}^d} \left\{ \int_{x \in \mathbb{R}^d} B \left( \frac{x \cdot u}{|x||u|}, |u| \right) \frac{1}{|u|^{d-2}} \delta(2x \cdot u + |x|^2) \right. \\ \left. [f(v_* - x/2) f(v + x/2) - f(v_*) f(v)] dx \right\} dv_*.$$

Now let us make the change of variable  $x \rightarrow x/2$  in  $x$  to get

$$\mathcal{Q}(f, f)(v) = 2^{d+1} \int_{v_* \in \mathbb{R}^d} \int_{x \in \mathbb{R}^d} B \left( \frac{x \cdot u}{|x||u|}, |u| \right) \frac{1}{|u|^{d-2}} \delta(4x \cdot u + 4|x|^2) \\ [f(v_* - x) f(v + x) - f(v_*) f(v)] dx dv_*$$

and then setting  $y = v_* - v - x$  in  $v_*$  we obtain

$$\mathcal{Q}(f, f)(v) = 2^{d+1} \int_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{x \in \mathbb{R}^d} B \left( \frac{x \cdot u}{|x||u|}, |u| \right) \frac{1}{|u|^{d-2}} \delta(-4x \cdot y) \\ [f(v + y) f(v + x) - f(v + x + y) f(v)] dx dy$$

where now  $u = -(x + y)$ . Thus in the end we have

$$\mathcal{Q}(f, f)(v) = 2^{d-1} \int_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{y \in \mathbb{R}^d} B \left( -\frac{x \cdot (x + y)}{|x||x + y|}, |x + y| \right) \frac{1}{|x + y|^{d-2}} \delta(x \cdot y) \\ [f(v + y) f(v + x) - f(v + x + y) f(v)] dx dy.$$

□

Figure 4.1 sums up the different geometrical quantities of the usual representation and the one we derived from Carleman's one.

Now let us consider the bounded domain  $\mathcal{D}_T = [-T, T]^d$  ( $0 < T < +\infty$ ). First one can remove the collisions connecting with some points out of the box. This is the natural preliminary stage for deriving conservative schemes based on the discretization of the velocity. In this case there is no need for a truncation on the modulus of  $x$  and  $y$  since we impose them to stay in the box. It yields

$$\mathcal{Q}^{\text{tr}}(f, f)(v) = \int \int_{\{x, y \in \mathbb{R}^d \mid v+x, v+y, v+x+y \in \mathcal{D}_T\}} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) \\ [f(v + y) f(v + x) - f(v + x + y) f(v)] dx dy$$

defined for  $v \in \mathcal{D}_T$ . One can easily check that the following weak form is satisfied by this operator

$$(4.3) \quad \int \mathcal{Q}^{\text{tr}}(f, f) \varphi(v) dv = \frac{1}{4} \int \int \int_{\{v, x, y \in \mathbb{R}^d \mid v, v+x, v+y, v+x+y \in \mathcal{D}_T\}} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) \\ f(v + x + y) f(v) [\varphi(v + y) + \varphi(v + x) - \varphi(v + x + y) - \varphi(v)] dv dx dy$$

and this implies conservation of mass, momentum and energy as well as the  $H$ -theorem on the entropy. The problem of this truncation on a bounded domain is the fact that we have changed the collision kernel itself by adding some artificial dependence on  $v, v_*, v', v'_*$ . In this way convolution-like properties are broken.

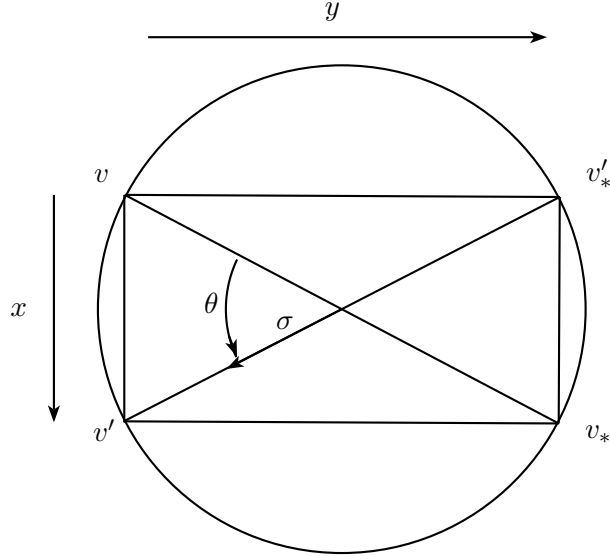


Figure 4.1: Geometry of the collision  $(v, v_*) \leftrightarrow (v', v'_*)$ .

A different approach consists in truncating the integration in  $x$  and  $y$  by setting them to vary in  $\mathcal{B}_R$ , the ball of center 0 and radius  $R$ . For a compactly supported function  $f$  with support  $\mathcal{B}_S$ , we take  $R = S$  in order to obtain all possible collisions. Since we aim at using the FFT algorithm to evaluate the resulting quadrature approximation, and hence we will make use of periodic distribution functions, we must take into account the aliasing effect due to periods superposition in the Fourier space. As for the spectral method a geometrical argument (see [151] for further details and Figure 4.2) shows that using the periodicity of the function it is enough to take  $T \geq (3 + \sqrt{2})S/2$  to prevent intersections of the regions where  $f$  is different from zero.

The operator now reads

$$\mathcal{Q}^R(f, f)(v) = \int_{x \in \mathcal{B}_R} \int_{y \in \mathcal{B}_R} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) [f(v + y)f(v + x) - f(v + x + y)f(v)] dx dy$$

for  $v \in \mathcal{D}_T$ . The interest of this representation is to preserve the real collision kernel and its properties. It is easy to check that, except for the aliasing effect, the operator preserves all the original conservation properties, see the weak form in equation (4.4).

In order to understand the possible effect of periods superposition we can rely on the following weak form valid for any function  $\varphi$  *periodic* on  $\mathcal{D}_T$

$$(4.4) \quad \int_{\mathcal{D}_T} \mathcal{Q}^R(f, f) \varphi(v) dv = \frac{1}{4} \int_{v \in \mathcal{D}_T} \int_{x \in \mathcal{B}_R} \int_{y \in \mathcal{B}_R} \tilde{B}(x, y) \delta(x \cdot y) f(v + x + y)f(v) [\varphi(v + y) + \varphi(v + x) - \varphi(v + x + y) - \varphi(v)] dv dx dy.$$

About the conservation properties one can show that

1. The only invariant  $\varphi$  is 1: it is the only periodic function on  $\mathcal{D}_T$  such that

$$\varphi(v + y) + \varphi(v + x) - \varphi(v + x + y) - \varphi(v) = 0$$

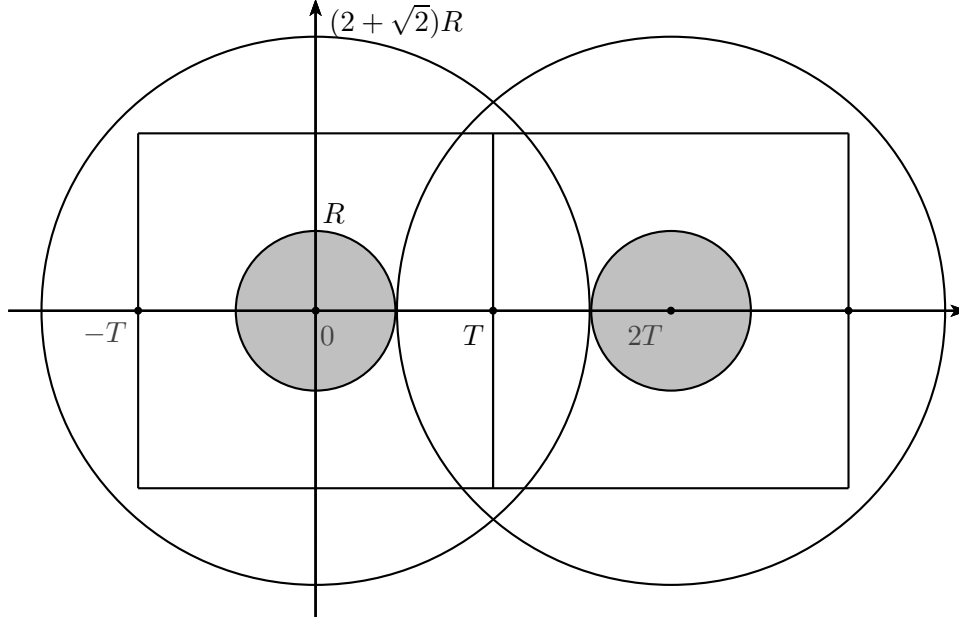


Figure 4.2: Restriction of the distribution function in two dimensions,  $T = \frac{3+\sqrt{2}}{2}R$ .

for any  $v \in \mathcal{D}_T$  and  $x \perp y \in \mathcal{B}_R$  (see [56] for instance). It means that the mass is locally conserved but not necessarily the momentum and energy.

2. When  $f$  is even there is *global* conservation of momentum, which is 0 in this case. Indeed  $\mathcal{Q}^R$  preserves the parity property of the solution, which can be checked using the change of variable  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ .
3. The collision operator satisfies formally the  $H$ -theorem

$$\int_{v \in \mathbb{R}^d} \mathcal{Q}^R(f, f) \log(f) dv \leq 0.$$

4. If  $f$  has compact support included in  $\mathcal{B}_S$  with  $T \geq (3 + \sqrt{2})S/2$  (no-aliasing condition, see [151] for a detailed discussion) and  $R = S$ , then no unphysical collisions occur and thus mass, momentum and energy are preserved. Obviously this compactness is not preserved with time since the collision operator spreads the support of  $f$  by a factor  $\sqrt{2}$ .

### 4.2.3 Application to discrete-velocity models

The representation  $\mathcal{Q}^R$  of this section can also be used to derive discrete velocity models (DVM). Any DVM can be written in the general form

$$(4.5) \quad D_i(f, f) = \sum_{j,k,l \in \mathbb{Z}^d} \Gamma_{i,j}^{k,l} [f_k f_l - f_i f_j],$$

where  $D_i$  denotes the discrete Boltzmann collision operator and the integer indexes refer to the points in the computational grid.

In order to keep conservations the coefficients  $\Gamma_{i,j}^{k,l}$  are defined by

$$(4.6) \quad \Gamma_{i,j}^{k,l} = \mathbf{1}(i+j-k-l) \mathbf{1}(|i|^2 + |j|^2 - |k|^2 - |l|^2) B(|k-i|, |l-j|) w_{i,j}^{k,l}$$

where  $\mathbf{1}$  denotes the function on  $\mathbb{Z}$  defined by  $\mathbf{1}(z) = 1$  if  $z = 0$  and 0 elsewhere, and  $w_{i,j}^{k,l} > 0$  are the weights of the quadrature formula, which characterize the different DVM. The function  $B > 0$  is the discrete collision kernel. One can check on this formulation that the scheme satisfies the usual conservation laws and entropy inequality (see [157, 41] and the references therein). More details on the DVM schemes can also be found in [41].

Thanks to equations (4.5) and (4.6), we can write at the discrete level the same representation as in the continuous case

$$D_i(f, f) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\Gamma}_{k,l} [f_{i+k} f_{i+l} - f_i f_{i+k+l}]$$

with

$$\tilde{\Gamma}_{k,l} = 2^{d-1} B \left( \frac{|k|}{\sqrt{|k|^2 + |l|^2}}, \sqrt{|k|^2 + |l|^2} \right) (|k|^2 + |l|^2)^{-\frac{d-2}{2}} \mathbf{1}(k \cdot l) w_{k,l}.$$

This is coherent with the DVM obtained by quadrature starting from the Carleman representation in [149].

Now again when one is interested to compute the DVM in a bounded domain there are two possibilities. First as in the case of  $\mathcal{Q}^{\text{tr}}$  one can force the discrete velocities to stay in a box, which yields for  $i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$  (again using the one index notation for  $d$ -dimensional sums)

$$D_i^{\text{tr}}(f, f) = \sum_{\substack{k,l \\ -N \leq i+k, i+l, i+k+l \leq N}} \tilde{\Gamma}_{k,l} [f_{i+k} f_{i+l} - f_i f_{i+k+l}].$$

This new discrete operator is completely conservative but the collision kernel is not invariant anymore according to  $i$ , which breaks the convolution properties and then prevents the derivation of a fast algorithm.

The other possibility is to periodize the function  $f$  over the box and truncate the sum in  $k$  and  $l$ . It yields for a given truncation parameter  $\tilde{N} \in \mathbb{N}^*$

$$(4.7) \quad D_i^{\tilde{N}}(f, f) = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \tilde{\Gamma}_{k,l} [f_{i+k} f_{i+l} - f_i f_{i+k+l}],$$

for any  $i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$ .

It is easy to see that  $D^{\tilde{N}}$  satisfies exactly a discrete weak form and conservation properties similar to  $\mathcal{Q}^R$ . Let us briefly state and sketch the proof of the conservation and stability properties of the scheme.

**Proposition 4.2.1.** *Assume that the quadrature weight  $w_{i,j}^{k,l} > 0$  are positive. Consider some truncation numbers  $\tilde{N} \leq N \in \mathbb{N}^*$  and some non-negative initial data  $f_i(0) \geq 0$ ,  $i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$ . Then the discrete evolution equation*

$$\partial_t f_i = D_i^{\tilde{N}}(f, f) = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \tilde{\Gamma}_{k,l} [f_{i+k} f_{i+l} - f_i f_{i+k+l}], \quad i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d,$$

is globally well-posed in  $\mathbb{R}^{\llbracket -N, N \rrbracket^d}$ . Moreover the coefficients  $f_i(t)$  are non-negative for all time, and

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} f_i(t) = \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} f_i(0).$$

**Remark 1.** The DVM scheme we consider therefore preserves non-negativity, but let us also emphasize that it preserves momentum and energy up to aliasing issues. This is different from spectral methods where the truncation of Fourier modes introduces an additional error in the conservation laws. Concerning the spectral method, stability and convergence have been proved recently in [83] to hold in  $L^1$  but only asymptotically, i.e. for  $N$  big enough related to the initial data.

*Proof of Proposition 4.2.1.* We have the following  $L^1$ -like estimate

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} |f_i(t)| &= \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} \left| \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \tilde{\Gamma}_{k,l} [f_{i+k} f_{i+l} - f_i f_{i+k+l}] \right| \\ &\leq C \left( \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} |f_i| \right)^2. \end{aligned}$$

The use of a Grönwall argument then gives the local well-posedness of the scheme in  $\mathbb{R}^{\llbracket -N, N \rrbracket^d}$ . Moreover, given a local solution  $f_i(t)$ , for  $t \in [0, T]$  and  $T > 0$ , it is clear by construction that the conservation of mass holds. The proof of preservation of non-negativity for this solution is also direct by writing

$$\partial_t f_i + M f_i \geq \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \tilde{\Gamma}_{k,l} f_{i+k} f_{i+l}$$

for a constant  $M$  large enough, and using Duhamel's principle. Finally, the conservations of mass and non-negativity implies the preservation of  $L^1$  norm, and we can iterate the argument giving the local well-posedness (still using inequality (4.8)) to obtain the global well-posedness of the scheme.  $\square$

Finally one can derive the following consistency result from [149, Theorem 3] in the case of hard spheres collision kernel with  $d = 3$

**Theorem 4.2.1.** *Assume that  $f, g \in C^k(\mathbb{R}^3)$  ( $k \geq 1$ ) with compact support  $\mathcal{B}_S$ . The uniform grid of step  $h$  is constructed on the box  $\mathcal{D}_T$  with the no-aliasing condition  $T \geq (3 + \sqrt{2})S/2$ . Then for  $\tilde{N} = \lfloor S/h \rfloor$  (where  $\lfloor \cdot \rfloor$  denotes the floor function) and  $h > 0$  sufficiently small,*

$$\left\| \mathcal{Q}(g, f) - D^{\tilde{N}}(g, f) \right\|_{L^\infty(\mathbb{Z}_h)} \leq C h^r$$

where  $D^{\tilde{N}}$  is the DVM operator defined in (4.7) (for the precise quadrature weights derived in [149]) on the grid above-mentioned, and  $f_i = f(ih)$ . Here  $r = k/(k+3)$  and the constant  $C$  is independent on  $h$ .

**Remark 2.** As can be seen from Theorem 4.2.1, the periodized DVM presented in this subsection is expected to have a quite poor accuracy. On the contrary the spectral method [150], even in the fast version of [142], has been proven to be spectrally accurate, i.e. of infinite order for smooth solutions. Nevertheless this periodized DVM has some interesting features compared to the spectral method: preservation of sign, stability, and preservation of the conservation laws up to aliasing issues.

### 4.3 Fast DVM's Algorithms

The fast algorithms developed for the spectral method in [142] can be in fact extended to the periodized DVM method. The method that originates was triggered by the reading of the direct FFT approach proposed in [29, 31, 30].



### 4.3.1 Principle of the method: a pseudo-spectral viewpoint

We start from the periodized DVM in  $\llbracket -N, N \rrbracket^d$  with representation (4.7) and as in the continuous case we set, for  $k, l \in -\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}$ ,

$$\tilde{B}(|k|, |l|) = 2^{d-1} B \left( \frac{|k|}{\sqrt{|k|^2 + |l|^2}}, \sqrt{|k|^2 + |l|^2} \right) (|k|^2 + |l|^2)^{-\frac{d-2}{2}}.$$

With this notation

$$\tilde{\Gamma}_{k,l} = \mathbf{1}(k \cdot l) \tilde{B}(|k|, |l|) w_{k,l},$$

and thus the DVM becomes

$$\partial_t f_i = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \mathbf{1}(k \cdot l) \tilde{B}(|k|, |l|) w_{k,l} [f_{i+k} f_{i+l} - f_i f_{i+k+l}].$$

Now we transform this set of ordinary differential equations into a new one using the involution transformation of the discrete Fourier transform on the vector  $(f_i)_{-N \leq i \leq N}$ . This involution reads for  $I \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$

$$\tilde{f}_I = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N f_i e_{-I}(i), \quad f_i = \sum_{I=-N}^N \tilde{f}_I e_I(i)$$

where  $e_K(k)$  denotes  $e^{\frac{2i\pi K \cdot k}{2N+1}}$ , and thus the set of differential equations becomes

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{f}_I &= \sum_{K,L=-N}^N \left( \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N e_{K+L-I}(i) \right) \\ &\quad \left[ \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \mathbf{1}(k \cdot l) \tilde{B}(|k|, |l|) w_{k,l} (e_K(k) e_L(l) - e_L(k+l)) \right] \tilde{f}_K \tilde{f}_L \end{aligned}$$

for  $-N \leq I \leq N$ . We have the following identity

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N e_{K+L-I}(i) = \mathbf{1}(K+L-I)$$

and so the set of equations is

$$(4.9) \quad \partial_t \tilde{f}_I = \sum_{\substack{K,L=-N \\ K+L=I}}^N \tilde{\beta}(K, L) \tilde{f}_K \tilde{f}_L$$

with

$$\tilde{\beta}(K, L) = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \mathbf{1}(k \cdot l) \tilde{B}(|k|, |l|) w_{k,l} [e_K(k) e_L(l) - e_L(k+l)] = \beta(K, L) - \beta(L, L)$$

where

$$(4.10) \quad \beta(K, L) = \sum_{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N}} \mathbf{1}(k \cdot l) \tilde{B}(|k|, |l|) w_{k,l} e_K(k) e_L(l).$$

Let us first remark that this new formulation allows to reduce the usual cost of computation of a DVM exactly to  $O(N^{2d})$  (as with the usual spectral method) instead of  $O(N^{2d+\delta})$  for  $\delta \sim 1$  [40, 131, 149]. Note however that the  $(2N+1)^d \times (2N+1)^d$  matrix of coefficients  $(\beta(K, L))_{K, L}$  has to be computed and stored first, thus the storage requirements are larger with respect to usual DVM. Nevertheless symmetries in the matrix can substantially reduce this cost.

Now the aim is to give an expansion of  $\beta(K, L)$  of the form

$$\beta_{K, L} \simeq \sum_{p=1}^M \alpha_p(K) \alpha'_p(L).$$

for a parameter  $M \in \mathbb{N}^*$  to be defined later. Indeed, this formulation will allow us to write (4.9) as a sum of  $M$  discrete convolutions and then this algorithm can be computed in  $O(M N^d \log_2(N))$  operations by using standard FFT techniques [64, 42], as in the fast spectral method.

### 4.3.2 Expansion of the discrete kernel modes

We make a decoupling assumption on the collision kernel as in the spectral case [142]

$$(4.11) \quad \tilde{B}(|k|, |l|) w_{k, l} = a(k) b(l).$$

Note that the DVM constructed by quadrature in dimension 3 for hard spheres in [149] on the cartesian velocity grid  $h\mathbb{Z}^3$  (for  $h > 0$ ) satisfies this decoupling assumption with  $a(k) = h^5 |k|/\text{gcd}(k_1, k_2, k_3)$  and  $b(l) = 1$  (see [149, Formula (20-21)]), and  $\text{gcd}(k_1, k_2, k_3)$  denotes the greater common divisor of the three integers. For Maxwell molecules in dimension 2 on the grid  $h\mathbb{Z}^2$ , these coefficients are  $a(k) = h^3 |k|/\text{gcd}(k_1, k_2)$  and  $b(l) = 1$ .

The difference here with the spectral method, which is a continuous numerical method, is that we have to *enumerate* the set of  $\{-\tilde{N} \leq k, l \leq \tilde{N} \mid k \perp l\}$ . This motivates for a detailed study of the number of lines passing through 0 and another point in the grid (this is equivalent to the study of this set), in order to compute the complexity of the method in term of  $N$ .

To this purpose let us introduce the Farey series and a new parameter  $0 \leq \bar{N} \leq \tilde{N}$  for the size of the grid used to compute the number of directions. The usual Farey series is

$$\mathcal{F}_{\bar{N}}^1 = \left\{ (p, q) \in \llbracket 0, \bar{N} \rrbracket^2 \mid 0 \leq p \leq q \leq \bar{N}, q \geq 1, \text{ and } \text{gcd}(p, q) = 1 \right\}$$

where  $\text{gcd}(p, q)$  denotes again the greater common divisor of the two integers (more details can be found in [105]). It is straightforward to see that the number of lines  $A_{\bar{N}}^1$  passing through 0 in the grid  $\llbracket -\bar{N}, \bar{N} \rrbracket^2$  is

$$A_{\bar{N}}^1 = 2 \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^1 \right|,$$

where the factor 2 (instead of 4) allows to take into account the permutations when counting the couples  $(p, q)$ . We gave a schematic representation of the two dimensional Farey serie in Figure 4.3

Similarly one can define the set

$$\mathcal{F}_{\bar{N}}^2 = \left\{ (p, q, r) \in \llbracket 0, \bar{N} \rrbracket^3 \mid 0 \leq p \leq q \leq r \leq \bar{N}, r \geq 1, \text{ and } \text{gcd}(p, q, r) = 1 \right\}$$

and the number of lines  $A_{\bar{N}}^2$  passing through 0 in the grid  $\llbracket -\bar{N}, \bar{N} \rrbracket^3$  is

$$A_{\bar{N}}^2 = 4 \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^2 \right| - 12 \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^1 \right|$$

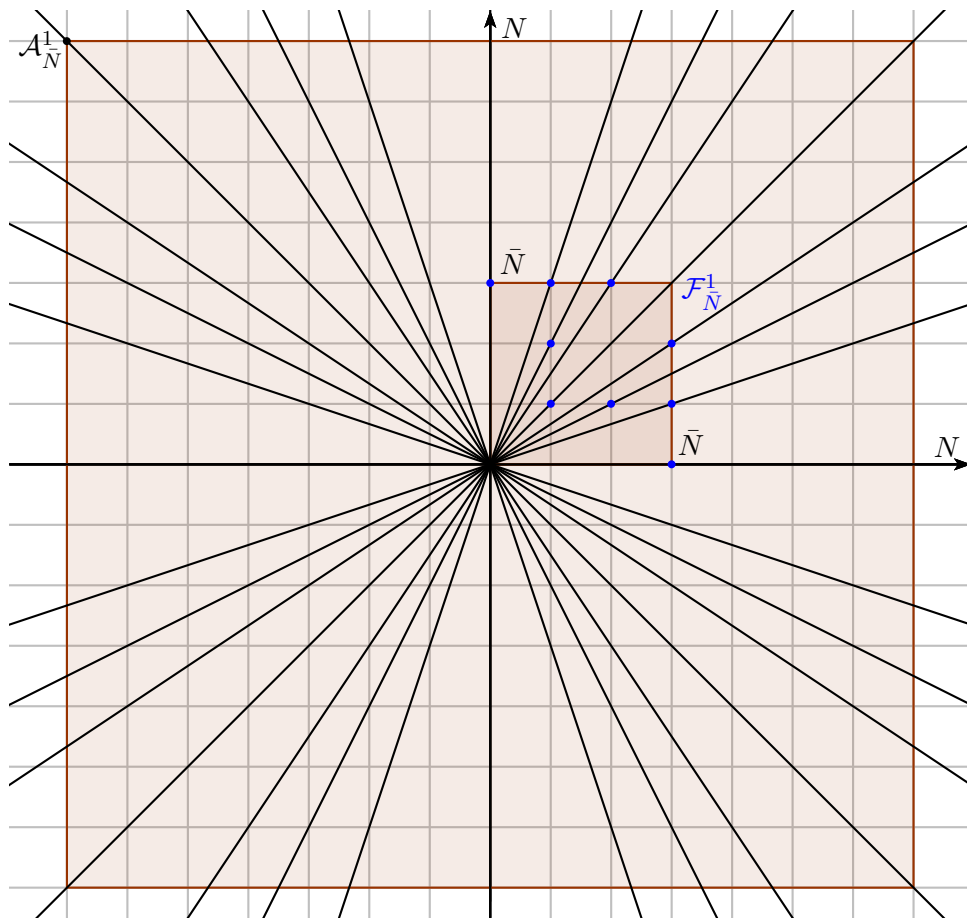


Figure 4.3: Representation of the Farey serie  $\mathcal{F}_{\bar{N}}^1$  and of  $\mathcal{A}_{\bar{N}}^1$ , the primal representant of lines in  $[-N, N]$  associated, for  $N = 7$  and  $\bar{N} = 3$ .

all possible permutations of the three numbers, minus  $6 \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^1 \right|$  for the spurious terms when two equal numbers are swapped, times 2 accounting for the possible negative values by symmetry. The exponents of the Farey series refer to the dimension of the space of lines (which is  $d - 1$ ). Now let us estimate the cardinals of  $\mathcal{F}_{\bar{N}}^1$  and  $\mathcal{F}_{\bar{N}}^2$ .

**Lemma 4.3.1.** *The Farey series in dimension  $d = 2$  and  $d = 3$  satisfy the following asymptotic behavior*

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^1 \right| &= \frac{\bar{N}^2}{2\zeta(2)} + O(\bar{N} \log \bar{N}) = \frac{3\bar{N}^2}{\pi^2} + O(\bar{N} \log \bar{N}), \\ \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^2 \right| &= \frac{\bar{N}^3}{12\zeta(3)} + O(\bar{N}^2), \end{aligned}$$

where  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 0} n^{-s}$  denotes the usual Riemann zeta function.

**Remark 3.** In dimension  $d$ , the formula would be

$$\mathcal{F}_{\bar{N}}^{d-1} = \left\{ (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \llbracket 0, \bar{N} \rrbracket^d \mid 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_d \leq \bar{N}, p_d \geq 1 \right. \\ \left. \text{and } \gcd(p_1, p_2, \dots, p_d) = 1 \right\}$$

and, using the same arguments than before, we have for  $d \geq 2$ ,

$$A_{\bar{N}}^{d-1} = 2^{d-1} \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^{d-1} \right| - 2^{d-2} (d!) \left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^{d-2} \right|.$$

The cardinal of  $\mathcal{F}_{\bar{N}}^{d-1}$  could be computed by induction with the same tools as in the proof below (for  $d \geq 3$ ):

$$\left| \mathcal{F}_{\bar{N}}^{d-1} \right| = C_d \frac{\bar{N}^d}{\zeta(d)} + O(\bar{N}^{d-1}).$$

The non-negative constant  $C_d$  is given by

$$C_d := \frac{1}{2d} \binom{d}{d-1} B_{d-1},$$

where  $B_d$  corresponds to the  $d^{\text{th}}$  Bernoulli number [105]. This comes from the leading order term in  $\bar{N}$  of the quantity  $\sum_{k=1}^{\bar{N}} k^{d-1}$ .

*Proof of Lemma 4.3.1.* The proof of the first equality is extracted from [105, Theorems 330 & 331 page 268], and given shortly for convenience of the reader. The proof of the second inequality is inspired from this first proof.

Let us introduce  $\varphi(n)$  the Euler function (i.e. the number of integers less than and prime to  $n$ ) and the multiplicative Möbius function  $\mu(n)$  such that  $\mu(1) = 1$ ,  $\mu(n) = 0$  if  $n$  has a squared factor and  $\mu(p_1 p_2 \dots p_k) = (-1)^k$  if all the primes  $p_1, p_2, \dots, p_k$  are different. We have the following connection between these two arithmetical functions (see [105, Formula (16.3.1), page 235]):

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{dd'=n} d' \mu(d).$$

Now let us compute the cardinal of the Farey serie in dimension 2:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{\bar{N}}^1| &= 1 + \varphi(1) + \cdots + \varphi(\bar{N}) = 1 + \sum_{m=1}^{\bar{N}} \sum_{dd'=m} d' \mu(d) \\
&= 1 + \sum_{dd' \leq \bar{N}} d' \mu(d) = 1 + \sum_{d=1}^{\bar{N}} \mu(d) \left( \sum_{d'=1}^{[\bar{N}/d]} d' \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \mu(d) \left( [\bar{N}/d]^2 + [\bar{N}/d] \right) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \mu(d) \left( (\bar{N}/d)^2 + O(\bar{N}/d) \right) \\
&= 1 + \frac{\bar{N}^2}{2} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O \left( \bar{N} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \frac{1}{d} \right) = 1 + \frac{\bar{N}^2}{2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O \left( \bar{N}^2 \sum_{\bar{N}+1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \right) \\
&\quad + O \left( \bar{N} \log \bar{N} \right) = \frac{\bar{N}^2}{2\zeta(2)} + O(\bar{N}) + O \left( \bar{N} \log \bar{N} \right)
\end{aligned}$$

where we have used the classical formula  $1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s$  (cf. [105, Theorem 287, page 250]).

Now for the dimension  $d = 3$ , we enumerate the set  $\mathcal{F}_{\bar{N}}^2$  in the following way: we fix  $r \geq 1$  then  $1 \leq q \leq r$  (the case  $q = 0$  is trivial and treated separately), then  $p \leq q$  such that  $\gcd(p, \gcd(q, r)) = 1$  (we use the associativity of the function  $\gcd$ ). This leads us to count the number of  $p$  in  $[[1, q]]$  such that  $\gcd(p, \delta) = 1$  for a given  $\delta|q$ . When  $\delta > 1$ , writing  $p = k\delta + p_0$  with  $p_0 \in [[1, \delta - 1]]$ , this number is seen to be  $\varphi(\delta)(q/\delta)$ . When  $\delta = 1$  this number is  $q + 1$  (all the values from 0 to  $q$ ). Thus the formula  $\varphi(\delta)(q/\delta)$  is still valid if we deal separately with the case  $p = 0$ , which has cardinal  $|\mathcal{F}_{\bar{N}}^1|$ . Now let us compute the cardinal of  $\mathcal{F}_{\bar{N}}^2$ . We first write

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{\bar{N}}^2| &= |\mathcal{F}_{\bar{N}}^1| + \sum_{r=1}^{\bar{N}} \sum_{q=1}^r q \frac{\varphi(\gcd(q, r))}{\gcd(q, r)} \\
&= \frac{\bar{N}^2}{2\zeta(2)} + O \left( \bar{N} \log \bar{N} \right) + \sum_{r=1}^{\bar{N}} \sum_{q=1}^r q \sum_{d|q, d|r} \frac{\mu(d)}{d} \\
(4.12) \quad &= \frac{\bar{N}^2}{2\zeta(2)} + O \left( \bar{N} \log \bar{N} \right) + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{r=1 \\ d|r}}^{\bar{N}} \sum_{\substack{q=1 \\ d|q}}^r q.
\end{aligned}$$

We shall now focus on the last member of the right hand side of this expression. We have

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r=1 \\ d|r}}^{\bar{N}} \sum_{\substack{q=1 \\ d|q}}^r q &= d \sum_{r=1}^{\bar{N}} \sum_{\substack{d'=1 \\ d|r}}^{[r/d]} d' = \frac{d}{2} \sum_{r=1}^{\bar{N}} \left( \left[ \frac{r}{d} \right]^2 + \left[ \frac{r}{d} \right] \right) \\
&= \frac{d}{2} \sum_{d'=1}^{[\bar{N}/d]} \left( (d'')^2 + d'' \right) \\
(4.13) \quad &= \frac{d}{2} \left( \frac{1}{3} \left( \bar{N}/d \right)^3 + O \left( (\bar{N}/d)^2 \right) + O \left( \bar{N}/d \right) \right).
\end{aligned}$$

Finally, we obtain by plugin (4.13) into (4.12)

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{\bar{N}}^2| &= \frac{\bar{N}^2}{2\zeta(2)} + O(\bar{N} \log \bar{N}) + \frac{1}{4} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \mu(d) \left( \frac{1}{3} (\bar{N}/d)^3 + O((\bar{N}/d)^2) + O(\bar{N}/d) \right) \\
&= \frac{\bar{N}^2}{2\zeta(2)} + O(\bar{N} \log \bar{N}) + \frac{\bar{N}^3}{12} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \frac{\mu(d)}{d^3} + O\left(\bar{N}^2 \sum_{d=1}^{\bar{N}} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) + O\left(\bar{N} \sum_{d=1}^{\bar{N}} \frac{\mu(d)}{d}\right) \\
&= \frac{\bar{N}^3}{12} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^3} + O\left(\bar{N}^3 \sum_{d=\bar{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{d^3}\right) + O(\bar{N}^2) + O(\bar{N} \log \bar{N}) \\
&= \frac{\bar{N}^3}{12\zeta(3)} + O(\bar{N}^2).
\end{aligned}$$

This conclude the proof.  $\square$

Now one can deduce the following decomposition of the kernel modes using their definition (4.10) and the decoupling assumption (4.11) on the discrete kernel

$$\begin{aligned}
\beta(K, L) &= \sum_{-\bar{N} \leq k, l \leq \bar{N}} \mathbf{1}(k \cdot l) a(|k|) b(|l|) e_K(k) e_L(l) \\
&\simeq \beta^{\bar{N}}(K, L) = \sum_{e \in \mathcal{A}_{\bar{N}}^{d-1}} \left[ \sum_{\substack{k \in e\mathbb{Z} \\ -\bar{N} \leq k \leq \bar{N}}} a(|k|) e_K(k) \right] \left[ \sum_{\substack{l \in e^\perp \\ -\bar{N} \leq l \leq \bar{N}}} b(|l|) e_L(l) \right]
\end{aligned}$$

with equality if  $\bar{N} = \tilde{N}$ . Here  $\mathcal{A}_{\bar{N}}^{d-1}$  denotes the set of primal representants of directions of lines in  $\llbracket -\bar{N}, \bar{N} \rrbracket$  passing through 0. After indexing this set, which has cardinal  $A_{\bar{N}}^{d-1}$ , one gets

$$(4.14) \quad \beta^{\bar{N}}(K, L) = \sum_{p=1}^{A_{\bar{N}}^{d-1}} \alpha_p(K) \alpha'_p(L)$$

with

$$\alpha_p(K) = \sum_{\substack{k \in e_p \mathbb{Z} \\ -\bar{N} \leq k \leq \bar{N}}} a(|k|) e_K(k), \quad \alpha'_p(L) = \sum_{\substack{l \in e_p^\perp \\ -\bar{N} \leq l \leq \bar{N}}} b(|l|) e_L(l).$$

After inversion of the discrete Fourier transform, this method yields a decomposition of the discrete collision operator

$$(4.15) \quad D_i^{\tilde{N}} \simeq D_i^{\tilde{N}, \tilde{N}} = \sum_{p=1}^{A_{\tilde{N}}^{d-1}} D_i^{\tilde{N}, \tilde{N}, p}, \quad i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d,$$

with equality with (4.7) if  $\bar{N} = \tilde{N}$ . Each  $D_i^{\tilde{N}, \tilde{N}, p}(f, f)$  is defined by the  $p$ -th term of the decomposition of the kernel modes (4.14). Each term  $D_i^{\tilde{N}, \tilde{N}, p}$  of the sum is a discrete convolution operator when it is written in Fourier space. Moreover, each  $\alpha_p$  (resp.  $\alpha'_p$ ) is defined as the discrete Fourier transform of some non-negative coefficients  $a(|k|)$  times the characteristic function of  $k \in e_p \mathbb{Z}$  (resp.  $b(|l|)$  times the characteristic function of  $l \in e_p^\perp$ ). Hence, we get after inversion of the transform that  $D_i^{\tilde{N}, \tilde{N}, p}$  is a discrete convolution with non-negative coefficients.

By using the approximate kernel modes  $\beta^{\bar{N}}(K, L)$ , we obtain a new discrete evolution equation, which inherits the same nice stability properties as the usual DVM schemes, as stated in the following proposition. Its proof is exactly similar to the one of Proposition 4.2.1, when computing by inverse Fourier transform the coefficients  $\tilde{\Gamma}_{k,l}^{\bar{N}}$  associated to the approximate kernel modes  $\beta^{\bar{N}}(K, L)$ .

**Proposition 4.3.1.** *Assume that the quadrature weight  $w_{i,j}^{k,l} > 0$  are positive. Consider some truncation numbers  $\bar{N} \leq \tilde{N} \leq N \in \mathbb{N}^*$  and some non-negative initial data  $f_i(0) \geq 0$ ,  $i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d$ . Then the discrete evolution equation*

$$\partial_t f_i = D_i^{\tilde{N}, \bar{N}}(f, f), \quad i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d,$$

is globally well-posed in  $\mathbb{R}^{\llbracket -N, N \rrbracket^d}$ . Moreover the coefficients  $f_i(t)$  are non-negative for all time, and

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} f_i(t) = \sum_{i \in \llbracket -N, N \rrbracket^d} f_i(0).$$

**Remark 4.** Using the non-negativity of the coefficients together with the conservation of mass, momentum and energy, we can prove thanks to standard arguments (see [41]) that the discrete entropy of solutions to the fast DVM method is non-increasing in time.

### 4.3.3 Implementation of the algorithm

The fast DVM method described in the last subsection depends on the three parameters  $N$  (the size of the gridbox),  $R$  (the truncation parameter) and  $\bar{N}$  (the size of the box in the space of lines). The only constraint on these parameters is the no-aliasing condition that relates  $R$  and the size of the box (and thus  $R$  and  $N$ , thanks to the parameter  $\tilde{N}$ ).

Thus one can see thanks to Lemma 4.3.1 that even if we take  $\bar{N} = \tilde{N} = N$ , i.e. we take all possible directions in the grid  $\llbracket -N, N \rrbracket^d$ , we get the computational cost  $O(N^{2d} \log_2 N)$  which is better than the usual cost of the DVM,  $O(N^{2d+1})$  (but slightly worse than the cost  $O(N^{2d})$  obtained by solving directly the pseudo-spectral scheme, thanks to a bigger storage requirement).

More generally for a choice of  $\bar{N} < N$  we obtain the cost  $O(\bar{N}^d N^d \log_2 N)$ , which is slightly worse than the cost of the fast spectral algorithm (namely  $O(M^{d-1} N^d \log_2 N)$  where  $M$  is the number of discrete angle [142]), but interesting given that the algorithm is accurate for small values of  $\bar{N}$ , and more stable. The justification for this is the low accuracy of the method (the reduction of the number of direction has a small effect on the overall accuracy of the scheme).

Finally, as for the fast spectral algorithm, the decomposition (4.15) is completely parallelizable and the computational cost should be reduced (formally) on a parallel machine up to  $O(N^d \log_2 N)$ . This method also has the same adaptivity of the fast spectral algorithm: in a space inhomogeneous setting, the parameter  $\bar{N}$  can be made space dependent, according to the fact that some regions in space deserve less accuracy than others, being close to equilibrium.

**Remark 5.**

1. Concerning the construction of the set of directions  $\mathcal{A}_{\bar{N}}^d$ , it can be done with systematic algorithms of iterated subdivisions of a simplex, thanks to the properties of the Farey series. In dimension  $d = 2$  this construction is quite simple (see [105]). In dimension 3 we refer to [147].
2. Let us remark that in order to get a *regular* scheme (i.e with no other conservation laws than the usual ones) in spite of the reduction of directions, it is enough that the schemes contains

the directions 0 and  $\pi/2$  (see [56]). This is satisfied if we take the directions contained in  $\mathcal{F}_1^{d-1}$ , i.e. as soon as  $\bar{N} \geq 1$ .

3. Finally in the practical implementation of the algorithm one has to take advantage of the symmetry of the decomposition (4.14) in order to reduce the number of terms in the sum: for instance in dimension 2, if  $a = b = 1$ , one can write a decomposition with  $A_{\bar{N}}^{d-1}/2$  terms.

## 4.4 Numerical Results

We will present in this Section some numerical results for the space homogeneous Boltzmann equation in dimension 2, with Maxwell molecules. We will compare the fast DVM method presented in Section 4.3 with the method introduced in [149] (this latter method shall be referred to as the *classical DVM* one). The time discretization is performed by a total variation diminishing second order Runge-Kutta method.

The first remark concerning the numerical simulations is that, thanks to the discrete velocity approach, the conservations of mass, momentum and energy is only affected by the aliasing error and thus, for a sufficiently large computational domain, it is exact up to machine precision. This is a relevant advantage compared to the spectral (classical or fast) methods, where only mass (and momentum if one considers symmetric distributions) is conserved exactly.

Let us now present some accuracy tests. In the case of two dimensional Maxwell molecules, we have an exact solution of the homogeneous Boltzmann equation given by

$$f(t, v) = \frac{\exp(-v^2/2S)}{2\pi S^2} \left[ 2S - 1 + \frac{1-S}{2S} v^2 \right]$$

with  $S = S(t) = 1 - \exp(-t/8)/2$ . It corresponds to the well known ‘‘BKW’’ solution, obtained independently in [21] and [118]. This test is performed to check the accuracy of the method, by comparing the error at a given time  $T_{end}$  when using  $N = 8$  to  $N = 128$  grid points for each coordinate (the case  $N = 128$  for the classical DVM has been omitted due to its large computational cost). We give the results obtained by the classical DVM method and the fast one, with different numbers of  $\bar{N}$ . We choose the value  $\tilde{N}$  such that the classical method is convergent according to Theorem 4.2.1, namely

$$\tilde{N} = \left\lceil \frac{2N}{3 + \sqrt{2}} \right\rceil.$$

Then, one has  $\tilde{N} = 1$  when  $N = 8$ ,  $\tilde{N} = 3$  when  $N = 16$ ,  $\tilde{N} = 7$  when  $N = 32$  and  $\tilde{N} = 14$  when  $N = 64$ . These values give a result corresponding to the kernel mode (4.10), namely that no truncation of the number of lines has been done: the solution obtained is essentially the same obtained with the classical DVM method. Note that  $\bar{N}$  must be chosen less or equal than  $\tilde{N}$  and this is why we do not present the results with, e.g.,  $N = 16$  and  $\bar{N} = 7$ .

Table 4.1 shows the relative  $L^1$  error between the exact ‘‘BKW’’ solution  $f$  and the approximate one  $f_i$ . It is defined by

$$\mathcal{E}_1(t) = \frac{\sum_{i=-N}^N |f_i(t) - f(v_i, t)|}{\sum_{i=-N}^N |f_i(t)|}.$$

The size of the domain has to be chosen carefully in order to minimize the aliasing error. In this test, we used  $T = 5$  for  $N = 8$ ,  $T = 5.5$  for  $N = 16$ ,  $T = 7$  for  $N = 32$  and  $T = 8$  for  $N = 64, 128$ .

We can see that, even with very few directions, there is a small loss of accuracy for the fast DVM method compared to the classical one, and that taking all possible directions we recover the original



Number of points $N$	Classical DVM	Fast DVM with $\bar{N} = 1$	Fast DVM with $\bar{N} = 3$	Fast DVM with $\bar{N} = 7$	Fast DVM with $\bar{N} = 14$
8	1.445E-3	1.4511E-3	x	x	x
16	8.912E-4	9.887E-4	8.9646E-4	x	x
32	6.1054E-4	6.5209E-4	5.8397E-4	6.1328E-4	x
64	2.6351E-4	4.094E-4	2.906E-4	3.667E-4	2.7341E-4
128	x	2.6669E-4	1.8245E-4	2.0371E-4	1.6341E-4

Table 4.1: Comparison of the  $L^1$  error between the classical DVM method and the fast DVM method with different values of  $\bar{N}$  at time  $T = 0.01$ , after one iteration.

Number of points $N$	Classical DVM	Fast DVM with $\bar{N} = 3$	Fast DVM with $\bar{N} = 7$	Fast DVM with $\bar{N} = 14$	Fast DVM with $\bar{N} = 28$
16	2 s. 95	0 s. 5	x	x	x
32	2 min. 18 s.	3 s. 19	14 s. 52	x	x
64	133 min. 44 s.	16 s. 2	73 s. 4	4 min. 43 s.	x
128	x	85 s. 8	6 min. 18 s.	23 min. 2 s.	92 min. 11 s.

Table 4.2: Comparison of the computational time between the classical DVM method and the fast DVM method with different values of  $\bar{N}$  at time  $T = 1$  ( $\Delta t = 0.01$ ).

DVM solution. The observed order of convergence in  $N$  is close to 1, as predicted by Theorem 4.2.1 and nearly the same for all values of the truncation parameter  $\bar{N}$  (with a small loss for  $\bar{N} = 1$ ).

We also observe that the method is convergent with respect to  $\bar{N}$ , although being not necessarily monotone (in the sense that the accuracy can be better for a fixed couple of parameters  $(N, \bar{N}_1)$ ,  $\bar{N}_1 < N$ , compared to the result obtained with another couple  $(N, \bar{N}_2)$  with  $\bar{N}_1 < \bar{N}_2 < N$ ). This is due to the very irregular discrete sphere associated with the Farey serie, which implies that the information contained in the kernel modes is more complete with the Farey serie  $\mathcal{F}_{\bar{N}_1}^1$  rather than  $\mathcal{F}_{\bar{N}_2}^1$ .

We then compare in Figure 4.4 the time evolution of this error, still in  $L^1$  norm. We can see that it increases initially (exactly as in the classical and fast spectral methods [83]), and then decreases monotonically in time. A saturation phenomenon due to aliasing errors finally occurs as for the fast spectral method (see [83], Figure 1).

We then give the computational cost of the classical and fast DVM methods in Table 4.2. Here one can see the drastic improvement when comparing the two methods: taking *e.g.*  $N = 64$  points in each direction, the fast method is more than 28 time faster than the classical one when no truncation is done (i.e. when we take  $\bar{N} = \tilde{N} = 14$ ), and even 109 times faster with a small loss of accuracy when taking  $\bar{N} = 7$ .

We also present the evolution of these computational times with respect to the total number of points in Figure 4.5. It is clear when we look at the interpolant curve that the theoretical predictions and the effective computational costs agree perfectly. When  $\bar{N}$  is fixed, the fast DVM method is of order  $N^2 \log(N)$  whereas when  $N$  is fixed, the dependence in  $\bar{N}$  is very close to  $\bar{N}^2$  (actually, the slope of the interpolant curve is about 1.9).

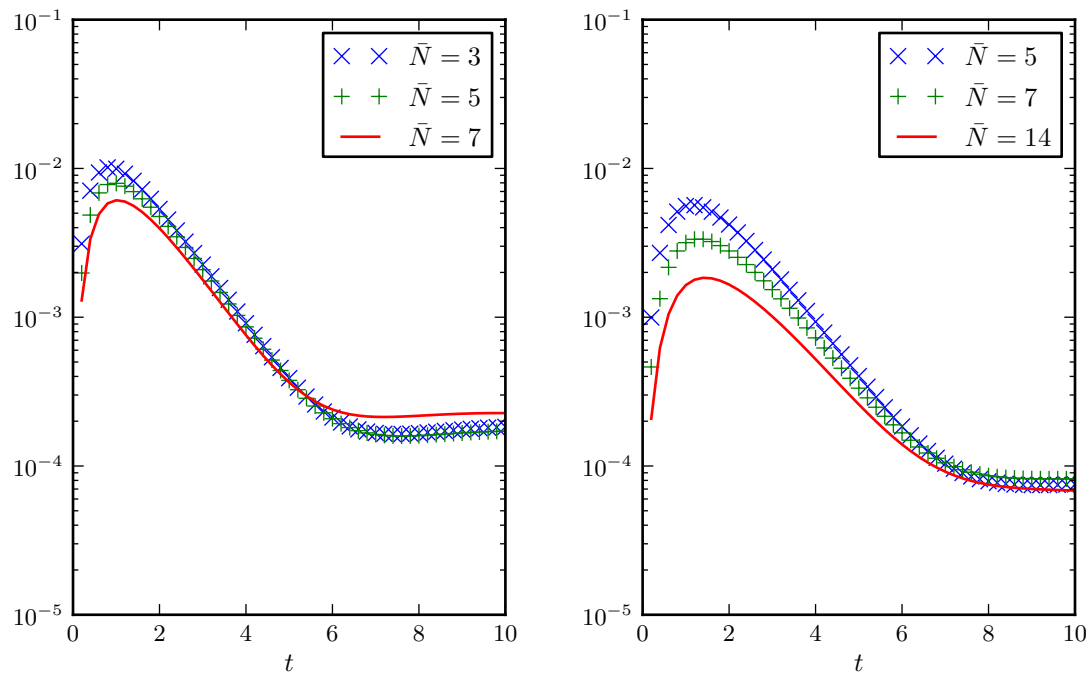


Figure 4.4: Evolution of the numerical relative  $L^1$  error of the fast DVM method for  $N = 32$  (left) and  $N = 64$  (right) grid points.

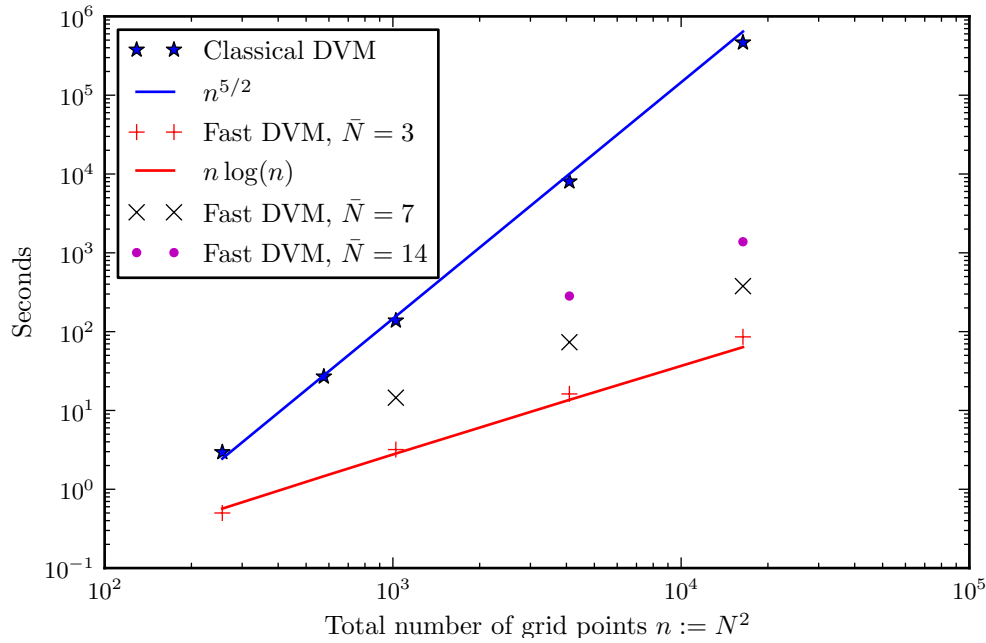


Figure 4.5: Evolution of the computational time with respect to the total number of points for the classical and fast DVM methods, at time  $T = 1$

## 4.5 Conclusions

We have presented a deterministic way for computing the Boltzmann collision operator with fast algorithms. The method is based on a Carleman-like representation of the operator that allows to express it as a combination of convolutions (this is trivially true for the loss part but it is not trivial for the gain part). A suitable periodized truncation of the operator is then used to derive fast algorithms for computing discrete velocity models (DVM). This can be adapted to any DVM, provided it features a decoupling properties on the quadrature nodes. Our approach will bring the overall cost in dimension  $d$  to  $O(\bar{N}^d N^d \log_2 N)$  where  $N$  is the size of the velocity grid and  $\bar{N}$  is the size of the grid used to compute directions in the approximation of the discrete operator. Numerical evidences show that the quantity  $\bar{N}$  can be taken small compared to  $N$ . Consistency and accuracy of the proposed schemes are also presented, both theoretically and numerically.

## Acknowledgments

The first author wishes to thank Bruno Sévenec for fruitful discussions on the Farey series. The third author wishes to thank Francis Filbet for fruitful discussions and comments about the implementation of the numerical method.

Troisième partie

---

## **Étude spectrale de l'opérateur granulaire linéarisé**

---



Ce chapitre est dédié à l'étude spectrale de l'opérateur granulaire avec bain thermique dans un cadre inhomogène en espace, linéarisé au voisinage d'un équilibre homogène. C'est un travail en cours [162]. Il est basé essentiellement sur le célèbre article de Ellis et Pinsky [74] concernant les approximations fluides (c'est à dire les limites hydrodynamiques de type Euler et Navier-Stokes compressibles linéarisés) de l'équation de Boltzmann linéarisée au voisinage d'une distribution maxwellienne centrée réduite. Ce travail établit l'existence et l'unicité de branches de valeurs propres pour cet opérateur linéarisé. Le calcul d'un développement de Taylor de ces valeurs propres, ainsi que des vecteurs propres associé, est aussi effectué, permettant d'établir la limite hydrodynamique rigoureuse de cette équation linéarisée dans l'espace tout entier, le tore, et le cube avec conditions aux bords spéculaires.

Le but du chapitre est donc d'adapter ces techniques à l'opérateur des gaz granulaires linéarisé (avec un bain thermique), dans un régime faiblement inélastique, afin d'établir rigoureusement la limite hydrodynamique de cette équation, ainsi que des résultats de stabilité dans un cadre non homogène afin de montrer des résultats d'existence de solutions fortes proche de l'équilibre. Nous aurons besoin pour ce dernier problème d'élargir l'espace où les estimations de stabilité sont disponibles, comme présenté dans les articles [134] et surtout [102]. Rappelons à ce sujet que le problème de la stabilité dans un cadre proche de l'équilibre, même pour le cas « simplifié » de l'équation de Boltzmann, reste un sujet très difficile, nécessitant d'utiliser des méthodes de production d'entropie très précises (comme dans le travail [70]) ou d'énergie nonlinéaire ([176]), et ne donne en général que des résultats de convergence à des taux sous-exponentiels, sauf dans des cas bien précis (potentiels mous, par exemple).



---

Approximation fluide du premier ordre de l'équation des gaz  
granulaires linéarisée

---

**Résumé du chapitre.** Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude spectrale de l'opérateur granulaire avec bain thermique dans un cadre inhomogène en espace, linéarisé au voisinage d'un équilibre homogène. Nous menons une étude inspirée de l'article de Ellis et Pinsky [74], mais dans l'espace fonctionnel  $L^1(m^{-1})$ , plus large que l'habituel espace  $L^2(\mathcal{M}_{1,0,1}^{-1})$ . Plus précisément, après une transformée de Fourier de la variable d'espace, nous donnons une description du spectre de l'opérateur obtenu, puis un développement de Taylor des branches des valeurs propres, pour les petites fréquences spatiales de l'opérateur de collision et de faibles coefficients inélasticité.



**Contents**

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>178</b>
5.1.1	The Model Considered	178
5.1.2	The Linearized Operator	180
5.1.3	Functional Framework and Main Results	181
<b>5.2</b>	<b>Localization of the Spectrum</b>	<b>184</b>
5.2.1	Geometry of the Essential Spectrum	184
5.2.2	Behavior of the Eigenvalues for Small Inelasticity	186
<b>5.3</b>	<b>Taylor Expansion of the Eigenvalues</b>	<b>189</b>
5.3.1	Projection of the Eigenvalue Problem	189
5.3.2	Finite Dimensional Resolution	193
5.3.3	Computation of the First Coefficients of the Expansion	197
<b>5.4</b>	<b>Functional toolbox on the collision operator</b>	<b>202</b>

**5.1 Introduction**

We want to study the stability as well as the asymptotic behavior ( $t \rightarrow \infty$  or equivalently  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) of the solutions to the granular gases equation with a *thermal bath*

$$(5.1) \quad \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{Q}_\varepsilon(f^\varepsilon, f^\varepsilon) + \varepsilon \Delta_v(f^\varepsilon)),$$

where  $f^\varepsilon = f^\varepsilon(t, x, v)$ , for  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  and  $v \in \mathbb{R}^d$ .

**5.1.1 The Model Considered**

Let  $(0, 1] \ni \alpha = 1 - \varepsilon$  be the restitution coefficient of the microscopic collision process. Then, we can define the *collision operator*  $\mathcal{Q}_\alpha$  by

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}_\alpha(f, g)(v) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u| \left( \frac{f' g'_*}{\alpha^2} - f g_* \right) b(\hat{u} \cdot \sigma) d\sigma dv_*, \\ &= \mathcal{Q}_\alpha^+(f, g)(v) - f(v)L(g)(v), \end{aligned}$$

where we have used the usual shorthand notation  $'\psi := \psi(v')$ ,  $'\psi_* := \psi(v'_*)$  and  $\hat{u} := u/|u|$ . In (5.2),  $v'$  and  $v'_*$  are the pre-collisional velocities of two particles of given velocities  $v$  and  $v_*$ , defined for  $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$  as

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} - \frac{1 - \alpha}{4\alpha}(v - v_*) + \frac{1 + \alpha}{4\alpha}|v - v_*|\sigma, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} + \frac{1 - \alpha}{4\alpha}(v - v_*) - \frac{1 + \alpha}{4\alpha}|v - v_*|\sigma. \end{cases}$$

The parameter  $\sigma$  is the center of the *collision sphere* [188] and  $u := v - v_*$  is the *relative velocity* of the pair of particles. Finally, the function  $b$  is the so-called *angular cross-section*, describing the probability of collision between two particles. We assume that

$$(5.3) \quad b \text{ is a Lipschitz, non-decreasing and convex function on } (-1, 1)$$

and also that it is bounded from above and below by two nonnegative constant  $b_m$  and  $b_M$

$$(5.4) \quad b_m \leq b(x) \leq b_M, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

In particular, this cross-section is integrable on the unit sphere, thus fulfilling the so-called Grad's cut-off assumption. The operator  $\mathcal{Q}_\alpha^+(f, g)(v)$  is usually known as *gain* term because it can be understood as the number of particles of velocity  $v$  created by collisions of particles of pre-collisional velocities  $v'$  and  $v_*$ , whereas  $f(v)L(g)(v)$  is the *loss* term, modeling the loss of particles of pre-collisional velocities  $v$ .

We can also give a weak form of the collision operator. Indeed, if we parametrize the post-collisional velocities  $v'$  and  $v'_*$  as

$$\begin{cases} v' = v - \frac{1+\alpha}{2}(u \cdot \omega)\omega, \\ v'_* = v_* + \frac{1+\alpha}{2}(u \cdot \omega)\omega, \end{cases}$$

then we have the representation, for any smooth test function  $\psi$ ,

$$(5.5) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_\alpha(f, g) \psi(v) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |u| f_* g (\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*) b(\hat{u} \cdot \omega) d\omega dv dv_*.$$

Thanks to this expression, we can compute the macroscopic properties of this operator. Indeed, we have the microscopic conservation of impulsion and dissipation of kinetic energy:

$$\begin{aligned} v' + v'_* &= v + v_*, \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 - |v|^2 - |v_*|^2 &= -\frac{1-\alpha^2}{2}|u \cdot \omega|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Then if we integrate the collision operator against  $\varphi(v) = (1, v|v|^2)$ , we obtain the preservation mass and momentum and the dissipation of kinetic energy:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{Q}_\alpha(f, f)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1-\alpha^2)D(f, f) \end{pmatrix},$$

where  $D(f, f) \geq 0$  is the *energy dissipation* functional, given by

$$(5.6) \quad D(f, f) := b_1 \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* |v - v_*|^3 dv dv_* \geq 0,$$

and  $b_1$  is the angular momentum, depending on the cross-section  $b$  and given by

$$b_1 := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (1 - (\hat{u} \cdot \omega)) b(\hat{u} \cdot \omega) d\omega < \infty.$$

These macroscopic properties, together with the conservation of positiveness, will imply that the equilibrium profiles of the operator  $\mathcal{Q}_\alpha$  are trivial Dirac masses. The thermal bath will prevent this fact. Indeed, the existence of a non-trivial equilibrium profile  $F_\alpha$  to the space homogeneous granular gases equation with a thermal bath is insured by the competition occurring between the dissipation of kinetic energy occasioned by the collision operator  $\mathcal{Q}_\alpha$  and the gain of energy given

by the diffusion term  $\Delta_v$ . More precisely, if we multiply the equation  $\mathcal{Q}_\alpha(f, f) + (1 - \alpha) \Delta_v(f) = 0$  by  $|v|^2$  and integrate in velocity, we obtain using (5.6) the balance equation

$$(5.7) \quad (1 - \alpha^2) D(f, f) = 2(1 - \alpha) d.$$

It has then been shown in [134, 135] that under the hypotheses (5.3)–(5.4) on the cross-section, there exists  $\alpha_* \in (0, 1)$  such that for all  $\alpha \in [\alpha_*, 1]$ , there exists an unique equilibrium profile  $0 \leq F_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  of unit mass and zero momentum:

$$(5.8) \quad \begin{cases} \mathcal{Q}_\alpha(F_\alpha, F_\alpha) + (1 - \alpha) \Delta_v(F_\alpha) = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^d} F_\alpha(v) dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} F_\alpha(v) v dv = 0. \end{cases}$$

In the last expression,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  denotes the Schwarz class of  $\mathcal{C}^\infty$  functions decreasing at infinity faster than any polynomials. Of course, if  $\alpha = 1$ , the distribution  $F_1$  is nothing but the following *Maxwellian* distribution

$$(5.9) \quad F_1(v) := \mathcal{M}_{1,0,\bar{T}_1}(v),$$

where  $\mathcal{M}_{\rho,\mathbf{u},T}$  is the Maxwellian distribution of mass  $\rho$ , velocity  $\mathbf{u}$  and temperature  $T$ , only equilibria of the elastic collision operator  $\mathcal{Q}_1$  (see *e.g.* [59] for more details), and given by

$$\mathcal{M}_{\rho,\mathbf{u},T}(v) := \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v - \mathbf{u}|^2}{2T}\right)$$

for  $(\rho, \mathbf{u}, T) \in \mathbb{R}^{d+2}$ . The quantity  $\bar{T}_1$  in (5.9) is then defined by dividing the balance equation (5.7) by  $1 - \alpha$  and passing to the limit  $\alpha \rightarrow 1$ :

$$D(F_1, F_1) = d.$$

We can then show thanks to this relation (see *e.g.* [135]) that  $\bar{T}_1$  is given by

$$(5.10) \quad \bar{T}_1 = \frac{1}{2} \frac{d^{2/3}}{b_1^{2/3}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{M}_{1,0,1}(v) |v|^3 dv \right)^{-2/3}.$$

### 5.1.2 The Linearized Operator

The major problem when one wants to deal with the type of problem we are interested with (such as the fluid dynamic limit, see *e.g.* the paper of Carlen, Chow and Grigo [45] for more details on this topic) concerning equation (5.1) is to compute a Taylor expansion of the eigenvalues of the *linearized* operator

$$(5.11) \quad -v \cdot \nabla_x + \mathcal{L}_\alpha,$$

where the linearization  $\mathcal{L}_\alpha$  of the collision operator  $\mathcal{Q}_\alpha + (1 - \alpha) \Delta_v$  has been done near the self-similar profile  $F_\alpha$ . This means that we are studying *fluctuations*  $h$  of  $f^\alpha$  near  $F_\alpha$ :

$$f^\alpha = F_\alpha + h$$

where  $h \in L^1(m^{-1}) := L^1(m^{-1}(v) dv)$ , for  $m$  an *exponential weight* function: there exists  $a > 0$  and  $0 < s < 1$  such that

$$(5.12) \quad m(v) := \exp(-a |v|^s).$$

Such a scaling is well defined provided that the original distribution  $f \in L^1(m^{-1})$ . The use of this weighted  $L^1$  space is crucial if one wants to prove nonlinear stability for the solutions to (5.1), because we shall need for this purpose to connect the properties of the linearized operator  $\mathcal{L}_\alpha$  to the existing  $L^1_3$  *a priori* estimates for the nonlinear operator  $\mathcal{Q}_\alpha$ .

The linearized operator is given for  $v \in \mathbb{R}^d$  by

$$\mathcal{L}_\alpha(h)(v) := \mathcal{Q}_\alpha(h, F_\alpha)(v) + \mathcal{Q}_\alpha(F_\alpha, h)(v) + (1 - \alpha)\Delta_v(h)(v).$$

In particular, for  $\alpha = 1$  it classically splits between a compact operator  $\mathcal{L}_1^c$  on  $L^1(m^{-1})$  [139] and a multiplication operator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(h) &= \mathcal{L}_1^c(h) - h \nu_1 \\ &= \mathcal{L}_1^+(h) - \mathcal{L}^*(h) - \mathcal{L}^\nu(h), \end{aligned}$$

where  $\mathcal{L}_1^+$  is the linearization of the elastic gain term,  $\mathcal{L}^*$  a convolution operator and  $\mathcal{L}^\nu$  is the operator of multiplication by  $\nu$ . The quantity  $\nu_\alpha$  is the so-called *collision frequency*, defined for  $\alpha \in (0, 1]$  as

$$\nu_\alpha(v) := L(F_\alpha)(v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} |v - v_*| F_\alpha(v_*) b(\hat{u} \cdot \sigma) d\sigma dv_*.$$

It is known (see for example the lemma 2.3 of [134] for an elementary proof) that for any  $g \in L^1_3(\mathbb{R}^d)$ , there exists some explicit nonnegative constants  $c_0, c_1$  such that

$$0 < c_0(1 + |v|) \leq L(g)(v) \leq c_1(1 + |v|), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

In particular, the collision frequency  $\nu_\alpha$  verifies

$$(5.13) \quad 0 < \nu_{0,\alpha}(1 + |v|) \leq \nu_\alpha(v) \leq \nu_{1,\alpha}(1 + |v|),$$

for two explicit nonnegative constants  $\nu_{0,\alpha}, \nu_{1,\alpha}$ .

The kernel  $N_1$  of the elastic operator  $\mathcal{L}_1$  is spanned by the *collisional invariants*, namely

$$N_1 := \text{Span}\{\mathcal{M}, v_i \mathcal{M}, |v|^2 \mathcal{M} : 0 \leq i \leq d\},$$

where  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1,0,1}$ . For  $\alpha < 1$ , the kernel  $N_\alpha$  of the inelastic operator  $\mathcal{L}_\alpha$  is smaller, because of the lack of energy conservation; it is given by

$$N_\alpha := \text{Span}\{F_\alpha, v_i F_\alpha : 0 \leq i \leq d\}.$$

### 5.1.3 Functional Framework and Main Results

Let us present some functional spaces needed in the chapter. We denote by  $L^p_q$  for  $p \in [1, +\infty)$  and  $q \in [1, +\infty)$  the following weighted Lebesgue spaces:

$$L^p_q = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable; } \|f\|_{L^p_q} := \int_{\mathbb{R}^d} |f(v)| \langle v \rangle^{pq} dv < \infty \right\},$$

where  $\langle v \rangle := \sqrt{1 + |v|^2}$ . The weighted  $L_q^\infty$  is defined thanks to the norm

$$\|f\|_{L_q^\infty} := \sup_{v \in \mathbb{R}^d} (|f(v)| \langle v \rangle^q).$$

Then, we denote for  $s \in \mathbb{N}$  by  $W_q^{s,p}$  the weighted Sobolev space

$$W_q^{s,p} := \left\{ f \in L_q^1; \|f\|_{W_q^{s,p}}^p := \sum_{|k| \leq s} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^k f(v)|^p \langle v \rangle^{p q} dv < \infty \right\}.$$

The case  $p = 2$  is the Sobolev space  $H_q^s := W_q^{s,2}$ , which can also be defined thanks to Fourier transform by the norm

$$\|f\|_{H_q^s}^2 := \|\mathcal{F}_v(f \langle \cdot \rangle^s)\|_{L_q^2}.$$

We also need to define the more general weighted spaces  $L^p(m^{-1})$  and  $W^{s,p}(m^{-1})$ , where  $m$  is an exponential weight function given by (5.12) respectively by the norms

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(m^{-1})}^p &:= \int_{\mathbb{R}^d} |f(v)|^p m^{-1}(v) dv, \\ \|f\|_{W^{s,p}(m^{-1})}^p &:= \sum_{|k| \leq s} \left\| \partial^k f \right\|_{L^p(m^{-1})}^p. \end{aligned}$$

We also need to state some notions about operator that we shall use a lot in the following.

**Definition 5.1.** A closed operator  $T$  defined on a Banach space  $X$  is said to be a

- *Fredholm* operator of index  $(\text{nul}(T), \text{def}(T))$  if the quantities  $\text{nul}(T) := \dim(\ker T)$  (the *nullity*) and  $\text{def}(T) := \text{codim}(\text{Range}(T))$  (the *deficiency*) are finite;
- *semi-Fredholm* operator if  $\text{Range}(T)$  is closed and at least one of these two quantities are finite.

For such an operator, we define the

- *resolvent set*  $R(T) \subset \mathbb{C}$  and the *resolvent operator*  $\mathcal{R}(T, \zeta)$  as

$$R(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : T - \zeta \text{ is invertible on } X, \text{ of bounded inverse } \mathcal{R}(T, \zeta)\};$$

- *spectrum*  $\Sigma(T)$  of  $T$  as the (closed) set

$$\Sigma(T) := R(T)^c;$$

- *Fredholm set*  $\mathcal{F}(T) \subset \mathbb{C}$  of  $T$  as

$$\mathcal{F}(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : T - \zeta \text{ is Fredholm}\};$$

- *semi-Fredholm set*  $\mathcal{SF}(T) \subset \mathbb{C}$  of  $T$  as

$$\mathcal{SF}(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : T - \zeta \text{ is semi-Fredholm}\};$$

- *essential spectrum*  $\Sigma_e(T)$  of  $T$  as the set

$$\Sigma_e(T) := \mathcal{SF}(T)^c \subset \Sigma(T);$$

- *discrete spectrum*  $\Sigma_d(T)$  of  $T$  as the set

$$\Sigma_d(T) := \Sigma(T) \setminus \Sigma_e(T).$$

In all the following of this chapter, we shall consider the operator (5.11) in spatial Fourier variables. More precisely, if we define the Fourier transform in  $x$  of a function  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  as

$$\mathcal{F}_x(\varphi)(\gamma) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\gamma \cdot x} \varphi(x) dx, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^d,$$

it is well known that

$$\mathcal{F}_x(\nabla g)(\gamma) = i\gamma \mathcal{F}_x(g)(\gamma).$$

Then using the fact that  $\mathcal{L}_\alpha$  only acts on velocity variables, we can write the self-similar equation (5.11) in spatial Fourier variables as

$$(5.14) \quad -i(\gamma \cdot v) + \mathcal{L}_\alpha =: \mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}.$$

This operator is well defined on  $L^1(m^{-1})$ , with domain  $\text{dom}(\mathcal{L}_{\alpha, \gamma}) = W_1^{2,1}(m^{-1})$ .

The two main results of this chapter are the following Theorems. We first localize the spectrum of the operator  $\mathcal{L}_{\alpha, \gamma}$  in the space  $L^1(m^{-1})$ , generalizing to this space the classical  $L^2$  result of Nicolaenko [146] (see also the chapter 7 of the book [59] of Cercignani, Illner and Pulvirenti). Let us denote by  $\Delta_x$  for  $x \in \mathbb{R}$  the half-plane

$$\Delta_x := \{\zeta \in \mathbb{C} : \Re \zeta \geq x\}.$$

Then we can prove the following result (which has also been summarized in Figure 5.2.2):

**Theorem 5.1.1.** *Let  $\alpha \in (\alpha_1, 1]$ , for a constructive constant  $1 > \alpha_1 > 0$ . There exists a constructive constant  $\bar{\mu}_\alpha > 0$  such that the essential spectrum of the operator  $\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}$  in  $W_1^{2,1}(m^{-1})$  is contained on the half-plane  $\Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}^c$ :*

$$\Sigma_e(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}) \subset \Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}^c.$$

*The remaining part of its spectrum is composed of discrete eigenvalues. Their behavior for small frequencies  $\gamma$  is the following.*

*Let us fix  $\delta > 0$ . There exist some constants  $0 < \bar{\lambda} < \mu_* < \mu_\alpha$  and  $\alpha_2 \in (\alpha_1, 1]$  such that if  $\alpha \in (\alpha_2, 1]$  there exists a nonnegative number  $\gamma_0$  such that for all  $|\gamma| \leq \gamma_0$ , if  $\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)})$ , then*

$$\begin{aligned} \lambda \in \Delta_{-\mu_*} &\Rightarrow |\Im \lambda| \leq \delta; \\ \lambda \in \Delta_{-\frac{\bar{\lambda}}{2}} &\Rightarrow |\lambda| \leq \delta. \end{aligned}$$

We then give a first order (in  $\gamma$  and  $\alpha$ ) Taylor expansion of the eigenvalues of  $\mathcal{L}_{\alpha, \gamma}$ , which generalize the results of Ellis and Pinsky [74] and Mischler and Mouhot [135]. Notice that our result also contains a part of the analysis led by Brilliantov and Pöschel in the chapter 25 of their book [38] about the stable and unstable modes of the fluid approximation of the granular gases equation, namely that the energy eigenvalue is proportional to the inelasticity. Let us define the eigenvalue problem we want to deal with: finding a triple  $(\lambda, \gamma, h)$  such that

$$(5.15) \quad (-i(\gamma \cdot v) + \mathcal{L}_\alpha) h = \lambda h,$$

for  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  and  $h \in L^1(m^{-1})$ .

**Theorem 5.1.2.** *There exist  $\alpha_* \in (\alpha_2, 1]$ , some open sets  $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ , neighborhood of  $(0, 0)$ , and functions*

$$\begin{cases} \lambda^{(j)} : U_1 \times (\alpha_*, 1] \rightarrow U_2 & \forall j \in \{-1, \dots, d\}, \\ e^{(j)} : U_1 \times \mathbb{S}^{d-1} \times (\alpha_*, 1] \rightarrow L^1(m^{-1}) & \forall j \in \{-1, \dots, d\}, \end{cases}$$

such that

1. the triple  $(\rho\omega, \lambda^{(j)}(\rho, \alpha), e^{(j)}(\rho, \omega, \alpha))$  is solution to the eigenvalue problem (5.15), for all  $\alpha \in (\alpha_*, 1]$ ,  $\rho \in U_1$ ,  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,  $j \in \{-1, \dots, d\}$ ;
2. the eigenvalue  $\lambda^{(j)} \in \mathcal{C}^\infty(U_1 \times (\alpha_*, 1])$  verifies

$$\begin{cases} \lambda^{(j)}(0, 1) = 0, & \forall j \in \{-1, \dots, d\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(j)}}{\partial \rho}(0, 1) = j i \sqrt{1 + \frac{2}{d}}, & \forall j \in \{-1, 0, 1\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(j)}}{\partial \rho}(0, 1) = 0, & \forall j \in \{2, \dots, d\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(0)}}{\partial \alpha}(0, 1) = -\frac{3}{T_1}, \end{cases}$$

3. for  $\alpha \in (\alpha_*, 1]$ , if a triple  $(\lambda, \rho\omega, h)$  is solution to the problem (5.15) for  $(\rho, \lambda) \in U_1 \times U_2$ , then necessarily  $\lambda = \lambda^{(j)}$  for some  $j \in \{-1, \dots, d\}$ .

## 5.2 Localization of the Spectrum

In this section, we shall give a rough localization of the spectrum of the linearized collision operator  $\mathcal{L}_\alpha$ .

### 5.2.1 Geometry of the Essential Spectrum

We start by describing the “easy part”, namely the essential spectrum. As we have to deal with the Banach space  $L^1(m^{-1})$ , we cannot apply directly the classical Weyl's Theorem about the stability of the spectrum under relatively compact perturbations, because of the lack of Hilbertian structure. We shall rather apply the more general version stating only the stability of the semi-Fredholm set, which is well suited for our definition of the essential spectrum.

**Proposition 5.2.1.** *Let  $\alpha \in (\alpha_0, 1]$ , where  $\alpha_0$  is defined in Lemma 5.4.1. There exists a constructive constant  $\bar{\mu}_\alpha > 0$  such that the essential spectrum of the operator  $\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}$  in  $W_1^{2,1}(m^{-1})$  is contained on the half-plane  $\Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}^c$ :*

$$\Sigma_e(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}) \subset \Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}^c.$$

*The remaining part of its spectrum is composed of discrete eigenvalues.*

*Proof.* Let us use the expression (5.14) of the collision operator in spatial Fourier variables, and decompose it for  $h \in L^1(m^{-1})$  as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)} h &= -[i(\gamma \cdot v) + \nu_\alpha(v)] h + (1 - \alpha)\Delta_v h + 2\mathcal{Q}_\alpha^+(F_\alpha, h) - F_\alpha L(h) \\ (5.16) \quad &= D_{(\alpha, \gamma)} h + \mathcal{L}_\alpha^c h, \end{aligned}$$

where

$$(5.17) \quad \begin{cases} D_{(\alpha, \gamma)} := -[i(\gamma \cdot v) + \nu_\alpha(v)] \text{Id} + (1 - \alpha)\Delta_v, \\ \mathcal{L}_\alpha^c := 2\mathcal{Q}_\alpha^+(F_\alpha, \cdot) - F_\alpha L(\cdot). \end{cases}$$

We start by the spectrum of  $D_{(\alpha, \gamma)}$  in  $L^1(m^{-1})$ . This operator is the difference of a Laplace operator with the operator of multiplication by  $C_{(\alpha, \gamma)}(v) := i(\gamma \cdot v) + L(F_\alpha)$ . This quantity verifies according to the lower bound of the collision frequency (5.13)

$$\Re C_{\alpha, \gamma}(v) > \nu_{0, \alpha},$$

where  $\nu_{0, \alpha}$  is the lower bound of the loss term  $v \rightarrow L(F_\alpha)(v)$  (thanks the smoothness of the profile  $F_\alpha$  stated in Proposition 5.4.2).

It is known from *e.g.* [109] that the spectrum of the Schrödinger like operator  $D_{(\alpha, \gamma)}$  is independent of the  $L^p$  space (for  $p \in [1, +\infty]$ ) where we study it. Let us compute this spectrum in  $L^2$ . We shall look at the stability properties of the semi-group generated by  $D_{(\alpha, \gamma)}$  on  $L^2(m^{-1})$ : let  $h = h(t, v) \in \mathcal{C}(0, +\infty; W_1^2)$  be a weak solution to

$$(5.18) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = D_{(\alpha, \gamma)} h.$$

If we multiply this equation by  $\bar{h}$  and integrate in the velocity space, we have thanks to Stokes formula

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|h(t)\|_{L^2}^2 &= -(1 - \alpha) \|\nabla_v h(t)\|_{L^2}^2 - \|C_{(\alpha, \gamma)} h(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq -\nu_{0, \alpha} \|h(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

and finally, we obtain that

$$\|h(t)\|_{L^2} \leq e^{-\nu_{0, \alpha} t/2},$$

Then, there exists a constant  $0 < \bar{\mu}_\alpha < \nu_{0, \alpha}$  such that the spectrum of the operator  $D_{(\alpha, \gamma)}$  is included in the set  $\Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}^c$ .

Moreover, thanks to the Hölder continuity of the inelastic gain term in operator norm (with loss of weight) stated in Proposition 5.4.2, the operator  $\mathcal{L}_\alpha^c$  is  $D_{(\alpha, \gamma)}$ -compact (and this is here that the weak inelasticity assumption  $\alpha \in (\alpha_0, 1]$  is used). Notice that we have chosen to define the essential spectrum of an operator  $S$  “à la Kato”, namely as the complement of the semi-Fredholm set of  $S$  in  $\mathbb{C}$ . Then we can apply the Banach version of Weyl’s Theorem (see *e.g.* [114, Theorem IV.5.26 and IV.5.35]), stating that the semi-Fredholm set is stable under relatively compact perturbation. Hence, the essential spectrum of  $\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}$  is included in  $\Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}^c$ .

The set  $\Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}$  is then equal to the Fredholm set  $\mathcal{F}(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)})$ . It remains to show that this set only contains the eigenvalues and the resolvent set. We know from the discussion in [114, Chapter IV, Section 6, and Theorem 5.33] that  $\mathcal{F}(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)})$  is an open set, composed of the union of a countable number of components  $\mathcal{F}_n$ , characterized by the value of the index: for any  $n \in \mathbb{N}$ , the functions

$$\text{nul} : \zeta \rightarrow \text{nul}(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)} - \zeta), \quad \text{def} : \zeta \rightarrow \text{def}(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)} - \zeta)$$

are constant on  $\mathcal{F}_n$ , except for a countable set of isolated values of  $\zeta$ . In our case, we have  $\mathcal{F}(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}) = \Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}$  which is connected; it has only one component, which means that  $\text{nul}(\zeta)$  and  $\text{def}(\zeta)$  are constant on  $\Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}$ , except for a countable set of isolated values of  $\zeta$ .



We will prove that these constant values are  $\text{nul}(\zeta) = \text{def}(\zeta) = 0$ , meaning that  $\zeta$  belongs to the resolvent set of  $\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}$ . The remaining isolated values  $\zeta$ , being in the Fredholm set, verify  $\text{nul}(\zeta) < +\infty$  and  $\text{def}(\zeta) < +\infty$ , which exactly characterizes the eigenvalues. We shall follow closely the proof of [139, Proposition 3.4], and exhibit an uncountable set of  $\Delta_{-\bar{\mu}_\alpha}$  such that  $\text{nul}(\zeta) = \text{def}(\zeta) = 0$  on this whole set.

Let us use the decomposition (5.61) introduced initially in [134]

$$\mathcal{L}_{\alpha, \gamma} = A_\delta - B_{\alpha, \delta}(i(\gamma \cdot v)),$$

for  $\delta > 0$  (see Section 5.4 for more details). We know from Lemma 5.4.1 that  $A_\delta$  is compact on  $L^1(m^{-1})$ , and that  $B_{\alpha, \delta}$  satisfies the coercivity estimate

$$(5.20) \quad \|B_{\alpha, \delta}(\zeta)\|_{L^1(m^{-1})} \geq \|(\nu_1 + \Re e \zeta)g\|_{L^1(m^{-1})} - \varepsilon(\delta) \|(\nu_1 + \Re e \zeta)g\|_{L^1(m^{-1})},$$

where  $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$  where  $\delta \rightarrow 0$ . If we fix  $r_0 > 0$  sufficiently big and  $\delta > 0$  small enough, then we have according to (5.20) for all  $r \geq r_0$

$$\|B_{\alpha, \delta}(r + i(\gamma \cdot v))\|_{L^1(m^{-1})} \geq \frac{\nu_{0,1} + r_0}{2} \|g\|_{L^1(m^{-1})}.$$

Thus, the operator  $B_{\alpha, \delta}(r + i(\gamma \cdot v))$  is invertible on  $L^1(m^{-1})$ , for all  $r \geq r_0$ , and then it is the same for  $\mathcal{L}_{\alpha, \gamma} - r = A_\delta - B_{\alpha, \delta}(r + i(\gamma \cdot v))$  by compacity of  $A_\delta$ . It finally means that the interval  $[r_0, +\infty)$  is included on the resolvent set of  $\mathcal{L}_{\alpha, \gamma}$ , and then that

$$\text{nul}(\zeta) = \text{def}(\zeta) = 0, \quad \forall \zeta \in [r_0, +\infty),$$

which concludes the proof.  $\square$

### 5.2.2 Behavior of the Eigenvalues for Small Inelasticity

We shall now focus on the discrete spectrum of this operator, namely its eigenvalues. A major difference with the elastic case in the classical Hilbertian  $L^2$  setting is that the operator we deal with is not a nonpositive operator, and we cannot conclude thanks to the last proposition that this operator has a *spectral gap* (namely a negative bound for its eigenvalues). Nevertheless, we know from [139] for the elastic case and [135] for the weak inelasticity case  $\alpha \in (\alpha_0, 1)$  that  $\mathcal{L}_\alpha$  has a spectral gap  $-\bar{\lambda}$  in  $L^1(m^{-1})$ , verifying for  $\alpha$  sufficiently small (say  $\alpha \in (\alpha_1, 1]$  for  $1 > \alpha_1 > \alpha_0$ )

$$0 < \bar{\lambda} < \mu_* < \bar{\mu}_\alpha,$$

for a nonnegative constant  $\mu_*$  depending on  $\alpha$ .

Let us now study the behavior of the discrete spectrum of  $\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}$  for small values of the frequency  $\gamma$ . We shall show that if  $\gamma \rightarrow 0$ , then the eigenvalues of this operator converge first towards the real axis and then towards 0.

**Proposition 5.2.2.** *Let  $\delta > 0$ . There exists  $\alpha_2 \in (\alpha_1, 1]$  such that if  $\alpha \in (\alpha_2, 1]$  there exists a nonnegative number  $\gamma_0$  such that for all  $|\gamma| \leq \gamma_0$ , if  $\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)})$ , then*

$$(5.21) \quad \lambda \in \Delta_{-\mu_*} \Rightarrow |\Im m \lambda| \leq \delta;$$

$$(5.22) \quad \lambda \in \Delta_{-\frac{\bar{\lambda}}{2}} \Rightarrow |\lambda| \leq \delta.$$

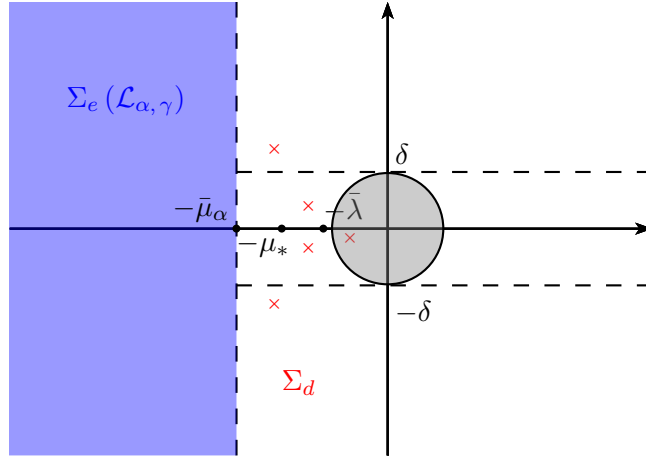


Figure 5.1: Localisation of the eigenvalues of  $\mathcal{L}_{\alpha, \gamma}$  for  $|\gamma| \leq \gamma_0(\delta)$ .

*Proof.* Let us first notice that if  $\lambda$  is an eigenvalue of  $\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)}$  and  $h$  an associated eigenvector, then using the decomposition (5.16) introduced in the proof of Proposition 5.2.1, we can write

$$(5.23) \quad \mathcal{L}_{\alpha}^c h = \left( \lambda - D_{(\alpha, \gamma)} \right) h,$$

where  $\mathcal{L}_{\alpha}^c$  is compact on  $L^1(m^{-1})$  (thanks to the sharp estimates of Lemma 5.4.1) and

$$D_{(\alpha, \gamma)} = -[i(\gamma \cdot v) + \nu_{\alpha}(v)] \text{Id} + (1 - \alpha)\Delta_v.$$

We will proceed by contradiction using the representation (5.23). Concerning the first implication, if, for  $\delta > 0$ , there exist a sequence  $(\gamma_n)_n \subset \mathbb{R}^d$  converging towards 0, a sequence of functions  $(h_n)_n \in L^1(m^{-1})$  of unit norm, and a sequence of complex numbers  $\lambda_n \in \Sigma_d(\mathcal{L}_{(\alpha, \gamma_n)})$  verifying

$$(5.24) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{\alpha}^c h_n = \left( \lambda_n - D_{(\alpha, \gamma_n)} \right) h_n, \\ |\Im \lambda_n| > \delta, \quad \Re \lambda_n \geq -\mu_*, \end{cases}$$

then we must have  $\limsup |\Im \lambda_n| < \infty$ . Indeed, the operator  $\mathcal{L}_{\alpha}^c$  is compact on  $L^1(m^{-1})$ , and then the sequence  $(\mathcal{L}_{\alpha}^c h_n)_n$  converges (up to an extraction) towards  $g \in L^1(m^{-1})$ . Thus we can write using (5.24)

$$(5.25) \quad g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lambda_n - D_{(\alpha, \gamma_n)} \right) h_n.$$

We have seen in the proof of Proposition 5.2.1 that the semi-group  $S_t^{(\alpha, \gamma)}$  associated to the operator  $D_{(\alpha, \gamma)}$  in  $L^1$  is exponentially decaying in time, uniformly in  $\alpha$  and  $\gamma$ . But, we know (see e.g. [75], chap. II) that if  $\mathcal{R}(D_{(\alpha, \gamma)}, \cdot)$  is the resolvent operator of  $D_{\alpha, \gamma}$ , we have the integral representation for all  $\zeta \in R(D_{(\alpha, \gamma)})$

$$\mathcal{R}(D_{(\alpha, \gamma)}, \zeta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-t\zeta} S_t^{(\alpha, \gamma)} dt.$$

Thus, using the decay of  $S_t^{(\alpha, \gamma)}$ , we have  $\mathcal{R}(D_{(\alpha, \gamma)}, 0) =: D_{(\alpha, \gamma)}^{-1}$  bounded in  $L^1$ , uniformly in  $\gamma$ , and then according to (5.25)

$$(5.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n - D_{(\alpha, 0)} \right)^{-1} g.$$

But, we also have for  $v \in \mathbb{R}^d$

$$\left( \lambda_n - D_{(\alpha, \gamma_n)} \right)^{-1} g(v) = \frac{1}{\lambda_n + i(\gamma_n \cdot v) + \nu_\alpha(v)} \left( \text{Id} - \frac{1 - \alpha}{\lambda_n + i(\gamma_n \cdot v) + \nu_\alpha(v)} \Delta_v \right)^{-1} g$$

and then by considering again the behavior of the solutions to equation (5.18), which gives inequality (5.19), we obtain a constant  $C$  independent on  $(\alpha, \lambda_n, \gamma_n)$  such that

$$(5.27) \quad \left\| \left( \lambda_n - D_{(\alpha, \gamma_n)} \right)^{-1} g \right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|\lambda_n| - \nu_{0, \alpha}} \|g\|_{L^\infty}.$$

Finally, if  $\lim |\Im \lambda_n| = \infty$  we would have according to the limit (5.26) and the estimation (5.27)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_{L^\infty} = 0$$

with  $\|h_n\|_{L^1(m^{-1})} = 1$ , which is not possible. Hence,  $|\Im \lambda_n| \leq C$  for an infinite number of indices  $n$  and  $C > 0$ .

But, we also have  $-\mu_* \leq \Re \lambda_n < r_0$ , and then we can extract another subsequence  $(\lambda_{n_k})_k$  converging towards  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that  $\Im \lambda \geq \delta > 0$ . Using the fact that  $\gamma_n \rightarrow 0$  and the smoothness of the map  $\lambda \mapsto \left( \lambda - D_{(\alpha, 0)} \right)^{-1}$ , we obtain in (5.26)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k} = \left( \lambda - D_{(\alpha, 0)} \right)^{-1} g =: h \in L^1(m^{-1}),$$

with  $\|h\|_{L^1(m^{-1})} = 1$ . Hence we conclude by inversion of  $\left( \lambda - D_{(\alpha, 0)} \right)^{-1}$  and by the smoothness of the nonlocal part of  $\mathcal{L}_\alpha$  that

$$\left( \lambda - D_{(\alpha, 0)} \right) h = g = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\alpha^c h_n = \mathcal{L}_\alpha^c h$$

which means according to the definition of  $\mathcal{L}_\alpha$  that

$$\lambda h = \mathcal{L}_\alpha h.$$

This is absurd because  $|\Im \lambda| \geq \delta > 0$ ,  $\Re \lambda \geq -\mu_*$  for  $\mu_*$  close to the spectral gap of  $\mathcal{L}_\alpha$ , and yet we know from [134] that the eigenvalues of  $\mathcal{L}_\alpha$  can be made arbitrarily close (with respect to  $1 - \alpha$ ) to the ones of  $\mathcal{L}_1$ , which are real according to [139].

We shall now give the proof of the implication (5.22), also by contradiction. If for  $\delta > 0$  there exist a sequence  $(\gamma_n)_n$  converging towards 0, a sequence  $(h_n)_n \in L^1(m^{-1})$  of unit norm, and some complex numbers  $\lambda_n \in \Sigma_d(\mathcal{L}_{\varepsilon, \gamma_n})$  such that

$$-\bar{\lambda}/2 \leq \Re \lambda_n \leq -\delta,$$

then  $\lambda_n \in \Delta_{-\mu_*}$  and according to the relation (5.21) we have  $|\Im \lambda_n| \leq \delta$ . We can then extract a subsequence  $(\lambda_{n_k})_k$  which converges towards a complex number  $\lambda$  also verifying  $-\bar{\lambda}/2 \leq \Re \lambda \leq -\delta$ . When  $k \rightarrow \infty$ , the same argument than before gives  $\mathcal{L}_\alpha h = \lambda h$  with  $\lambda \neq 0$ . By using again the spectral properties of  $\mathcal{L}_\alpha$ , we then have  $\Re \lambda \leq -\bar{\lambda}$ , which is absurd.  $\square$

We summarized the results of this proposition in Figure 5.2.2. Moreover, it gives us some rough informations on the behavior of the resolvent operator of  $\mathcal{L}_{(\alpha,\gamma)}$ .

**Corollary 5.2.1.** *If  $\alpha \in (\alpha_1, 1]$ , the resolvent operator  $\mathcal{R}(\mathcal{L}_{(\alpha,\gamma)}, \zeta)$  is well defined for  $\zeta \in \Delta_{-\mu^*}$  such that  $\Im m \zeta > \delta$ .*

### 5.3 Taylor Expansion of the Eigenvalues

Our goal in this section is to give a Taylor expansion of the eigenvalues of  $\mathcal{L}_{(\alpha,\gamma)}$  in  $\alpha$  and  $\gamma$ , in order to show that, at least for small values of  $\alpha$  and  $\gamma$ , they stay at the left of the imaginary axis. We shall follow closely the proof of [74]. We are interested in the following eigenvalue problem: finding  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  and  $h \in L^1(m^{-1})$  such that

$$(-i(\gamma \cdot v) + \mathcal{L}_\alpha) h = \lambda h,$$

which can be reformulated thanks to the decomposition (5.16) as

$$(5.28) \quad \mathcal{L}_\alpha^c h = (\lambda + \nu_\alpha(v) + i(\gamma \cdot v) - (1 - \alpha)\Delta_v) h.$$

#### 5.3.1 Projection of the Eigenvalue Problem

Let us now define the scalar product we will use in the following. If  $\phi, \psi$  are such that the following expression has a meaning, we will set

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(v) \overline{\psi(v)} (\mathcal{M}_{1,0,1})^{-1}(v) dv.$$

Indeed, our goal is to introduce a *spectral decomposition* of  $L^1(m^{-1})$  as a direct sum of  $\mathcal{L}_\alpha$ -invariant spaces. The bracket we use is the one of  $L^2(\mathcal{M}_{1,0,1}^{-1})$  and allows us to define the spectral projections.

Let us start by decomposing the operator  $\mathcal{L}_\alpha^c$  as

$$(5.29) \quad \mathcal{L}_\alpha^c = \nu_\alpha^{1/2} (\Pi + \mathcal{S}_\alpha) \nu_\alpha^{1/2},$$

where  $\Pi$  is the projection on the space

$$\mathcal{N}_\alpha := \nu_\alpha^{1/2} \mathcal{N}_1 = \text{Span}\{\nu_\alpha^{1/2} \mathcal{M}, \nu_\alpha^{1/2} v_i \mathcal{M}, \nu_\alpha^{1/2} |v|^2 \mathcal{M} : 0 \leq i \leq d\}$$

with  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{1,0,1}$ , and  $\mathcal{S}_\alpha$  is defined thanks to  $\Pi$  and  $\mathcal{L}_\alpha^c$ . Actually,  $\mathbb{P} := \nu_\alpha^{-1/2} \Pi$  is the spectral projection on the null space of  $\mathcal{L}_1$ , and can be defined using the resolvent operator of  $\mathcal{L}_1$  as

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta|=r} \mathcal{R}(\mathcal{L}_1, \zeta) d\zeta$$

where  $r < \delta$  for  $\delta$  sufficiently small (see the discussion in Section 5 of [134]). In particular,  $\mathbb{P}$  commutes with  $\mathcal{L}_1$ . Moreover, the operator  $\mathcal{L}_\alpha^c$  being compact on  $L^1(m^{-1})$ ,  $\Pi + \mathcal{S}_\alpha$  is compact on the same space. Given that the rank of  $\Pi$  is finite,  $\mathcal{S}_\alpha$  is then a compact operator on  $L^1(m^{-1})$ . We start with a lemma concerning the eigenvalues of the operator  $\nu_1^{-1/2} \mathcal{S}_1 \nu_1^{1/2}$ .

**Lemma 5.3.1.** *On the space  $L^1(m^{-1})$ ,  $\lambda = 1$  is not an eigenvalue of  $\nu_1^{-1/2} \mathcal{S}_1 \nu_1^{1/2}$ .*

*Proof.* If there is an  $h \in L^1(m^{-1})$  such that  $\nu_1^{-1/2} \mathcal{S}_1 \nu_1^{1/2} h = h$ , then according to (5.29),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 h &= -\nu_1 h + \nu_1^{1/2} (\Pi + \mathcal{S}_1) \nu_1^{1/2} h \\ (5.30) \quad &= \nu_1^{1/2} \Pi \nu_1^{1/2} h. \end{aligned}$$

Projecting this equation upon the null space of  $\mathcal{L}_1$ , using (5.30), we obtain for all  $\varphi \in N_1$  that

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{L}_1 h, \varphi \rangle \\ &= \langle \Pi \nu_1^{1/2} h, \nu_1^{1/2} \varphi \rangle, \end{aligned}$$

and then  $\Pi \nu_1^{1/2} h$  is orthogonal to  $\nu_1^{1/2} N_1$ , which is the whole range of  $\Pi$ . Then, necessarily, as  $\Pi$  is a projection, we have  $\Pi \nu_1^{1/2} h = 0$ . It means according to (5.30) that  $\mathcal{L}_1 h = 0$ , and then that  $h \in N_1$ , which is absurd because  $\Pi$  is a projection onto  $\nu_1^{1/2} N_1$  thus

$$\nu_1^{1/2} h = \Pi \nu_1^{1/2} h = 0.$$

□

Let us now denote by  $\Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}$  the operator

$$\Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} = (\nu_\alpha(v) + \lambda + i(\gamma \cdot v) - (1 - \alpha)\Delta_v)^{-1} \nu_\alpha(v).$$

If the triple  $(\gamma, \lambda, h)$  is solution to the eigenvalue problem (5.28), then we can write using the decomposition (5.29)

$$\begin{aligned} h &= (\nu_\alpha(v) + \lambda + i(\gamma \cdot v) - (1 - \alpha)\Delta_v)^{-1} \nu_\alpha(v) (\nu_\alpha(v))^{-1} \mathcal{L}_\alpha^c h \\ (5.31) \quad &= \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} \nu_\alpha^{-1/2} (\Pi + \mathcal{S}_\alpha) \nu_\alpha^{1/2} h. \end{aligned}$$

This will allow us to rewrite the eigenvalues problem with bounded operators. To this purpose, we need to prove a technical lemma about the asymptotic behavior of the operator  $\Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}$ .

**Lemma 5.3.2** (Conjecture to be shown). *There exists an  $s \in \mathbb{N}$  (that we believe equal to 2) such that for all  $g \in W^{s,1}(m^{-1})$ , we have*

$$\left\| \left( \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) g \right\|_{L^1(m^{-1})} \leq \varepsilon(\lambda, \gamma, \alpha) \|g\|_{W^{s,1}(m^{-1})},$$

where  $\lim_{(\lambda, \gamma, \alpha) \rightarrow (0, 0, 1)} \varepsilon(\lambda, \gamma, \alpha) = 0$ . In particular, this result holds true for  $h$  solution to the eigenvalue problem (5.28). Indeed, there exists a nonnegative constant  $C_s \geq 0$  such that

$$\|h\|_{W^{s,1}(m^{-1})} \leq C_s \|h\|_{L^1(m^{-1})}.$$

*Incomplete proof.* If we set  $C_{(\alpha, \gamma)} = i(\gamma \cdot v) + \nu_\alpha$ , we have for all  $v \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \left| \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} g(v) - g(v) \right| &= \left| \left( \lambda + C_{(\alpha, \gamma)}(v) - (1 - \alpha)\Delta_v \right)^{-1} \nu_\alpha(v) g(v) - g(v) \right| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda| - \nu_{0, \alpha}} \left| \left[ \text{Id} - \frac{1 - \alpha}{\lambda + C_{(\alpha, \gamma)}(v)} \Delta_v \right]^{-1} \nu_\alpha(v) g(v) - g(v) \right|. \end{aligned}$$

We want to use a bootstrap argument, using the regularizing properties of the non local part of  $\mathcal{L}_\alpha$  (through the operator  $\mathcal{S}_\alpha$ ), as was done for instance in [134] for the control of the eigenvalues in the space-homogeneous setting, by using the decomposition

$$0 = (\mathcal{L}_{\alpha,\gamma} - \lambda)h = (A_\delta - B_{\alpha,\delta}(\lambda + i(\gamma \cdot v)))h.$$

□

In all the following, we shall use the polar decomposition  $\gamma = \rho\omega$  for  $\rho \geq 0$  and  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  of the frequency  $\gamma$ . Then, we have:

**Lemma 5.3.3.** *There exist  $\alpha_3 \in (\alpha_2, 1]$  and some open sets  $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ , neighborhood of  $(0, 0)$  such that if  $(\rho, \lambda, \alpha) \in U_1 \times U_2 \times (\alpha_3, 1]$ , then for all  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , the operator*

$$\Psi_{(\lambda,\rho\omega,\alpha)} := \text{Id} - \Phi_{(\lambda,\rho\omega,\alpha)}\nu_\alpha^{-1/2}\mathcal{S}_\alpha\nu_\alpha^{1/2}$$

has a bounded inverse on  $L^1(m^{-1})$ .

*Proof.* We have seen that  $\nu_\alpha^{1/2}\mathcal{S}_\alpha\nu_\alpha^{1/2}$  is a compact operator on  $L^1(m^{-1})$ . Moreover, we have according to the representation (5.23) (with  $D_{(\alpha,\gamma)}$  given by (5.17))

$$\begin{aligned}\Phi_{(\lambda,\rho\omega,\alpha)} &= (\nu_\alpha(v) + \lambda + i(\gamma \cdot v) - (1 - \alpha)\Delta_v)^{-1}\nu_\alpha(v) \\ &= \left(\lambda - D_{(\alpha,\gamma)}\right)^{-1}\nu_\alpha(v)\end{aligned}$$

which is a bounded operator (at least for small frequencies  $\gamma$ ), thanks to the analysis we led on Section 5.2, and particularly from the localization of the discrete spectrum of  $\mathcal{L}_{(\alpha,\gamma)}$  of Proposition 5.2.2. Hence, the operator

$$\Phi_{(\lambda,\rho\omega,\alpha)}\nu_\alpha^{-1/2}\mathcal{S}_\alpha\nu_\alpha^{1/2} = \left(\Phi_{(\lambda,\rho\omega,\alpha)}\nu_\alpha^{-1}\right)\left(\nu_\alpha^{1/2}\mathcal{S}_\alpha\nu_\alpha^{1/2}\right)$$

is compact on  $L^1(m^{-1})$ .

By Fredholm alternative, it just remains to show that for  $(\rho, \lambda)$  small enough and  $\alpha$  close to 1, there is no non-trivial solutions  $h \in L^1(m^{-1})$  of

$$(5.32) \quad h = \Phi_{(\lambda,\rho\omega,\alpha)}\nu_\alpha^{-1/2}\mathcal{S}_\alpha\nu_\alpha^{1/2}h.$$

Let us do this by contradiction. Assume that there are sequences  $(\lambda_n, \gamma_n, \alpha_n)_n \rightarrow (0, 0, 1)$  and  $(h_n)_n \subset L^1(m^{-1})$ ,  $\|h_n\| = 1$  solutions to (5.32). First, we notice thanks to the continuity of the equilibrium profiles  $F_\alpha$  with respect to  $\alpha$  (recalled in Proposition 5.4.4) and to the smoothness properties of these profiles (recalled in Proposition 5.4.3) that we have

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \|\nu_\alpha - \nu_1\|_{L^\infty} = 0.$$

Moreover, according to Lemma 5.4.1, the operator  $\mathcal{L}_\alpha$  converges towards  $\mathcal{L}_1$  in the norm of graph in  $L^1(m^{-1})$ . Then, the operator  $\nu_{\alpha_n}^{-1/2}\mathcal{S}_{\alpha_n}\nu_{\alpha_n}^{1/2}$ , which is compact on  $L^1(m^{-1})$ , converges towards the operator  $\nu_1^{-1/2}\mathcal{S}_1\nu_1^{1/2}$ , and we have up to a subsequence,

$$\nu_{\alpha_n}^{-1/2}\mathcal{S}_{\alpha_n}\nu_{\alpha_n}^{1/2}h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \in L^1(m^{-1}).$$

Thus, if we write  $\Phi_n := \Phi_{(\lambda_n, \gamma_n, \alpha_n)}$ , given that  $h_n$  is solution to (5.32), we have

$$(5.33) \quad h_n = \Phi_n \left[ \nu_{\alpha_n}^{-1/2} \mathcal{S}_{\alpha_n} \nu_{\alpha_n}^{1/2} h_n - g \right] + \Phi_n g.$$

But, according to Lemma 5.3.2 we have

$$(5.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n g - g\|_{L^1(m^{-1})} = 0.$$

Hence, by Lebesgue dominated convergence Theorem, this implies with identity (5.33) that the sequence  $(h_n)_n$  strongly converges towards  $g$  (using also the fact that the sequence  $(\Phi_n g)_n$  is bounded in  $L^1(m^{-1})$  for large  $n$  thanks to (5.34)). Therefore, we have by continuity

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{\alpha_n}^{-1/2} \mathcal{S}_{\alpha_n} \nu_{\alpha_n}^{1/2} h_n = \nu_1^{-1/2} \mathcal{S}_1 \nu_1^{1/2} g,$$

namely  $g$  is an eigenvector for  $\nu_1^{-1/2} \mathcal{S}_1 \nu_1^{1/2}$  associated to the eigenvalue 1, which is absurd according to Lemma 5.3.1. Finally, the operator  $\text{Id} - \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} \nu_{\alpha}^{-1/2} \mathcal{S}_{\alpha} \nu_{\alpha}^{1/2}$  is invertible on  $L^1(m^{-1})$  for small  $(\lambda, \gamma)$  and  $\alpha$  close to 1. □

Let us now rewrite the relation (5.31) as

$$\begin{aligned} \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} h &= \left[ \text{Id} - \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} \nu_{\alpha}^{-1/2} \mathcal{S}_{\alpha} \nu_{\alpha}^{1/2} \right] \Phi_{(\lambda, \gamma)} \nu_{\alpha}^{-1/2} (\Pi + \mathcal{S}_{\alpha}) \nu_{\alpha}^{1/2} h \\ &= \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} \left\{ \nu_{\alpha}^{-1/2} \Pi \nu_{\alpha}^{1/2} + \nu_{\alpha}^{-1/2} \mathcal{S}_{\alpha} \nu_{\alpha}^{1/2} \left[ \text{Id} - \Phi_{(\lambda, \gamma)} (\Pi + \mathcal{S}_{\alpha}) \nu_{\alpha}^{1/2} \right] \right\} h. \end{aligned}$$

According to Lemma 5.3.3,  $\Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}$  is invertible for small  $(\lambda, \gamma)$  and  $\alpha \in (\alpha_3, 1]$ . Then, provided that  $h$  is solution to (5.31), we have

$$(5.35) \quad h = \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} \nu_{\alpha}^{-1/2} \Pi \nu_{\alpha}^{1/2} h.$$

The “conjugated operator”  $\mathcal{P} := \nu_{\alpha}^{-1/2} \Pi \nu_{\alpha}^{1/2}$  is the projection on the space of elastic collisional invariants  $N_1$ . We can use it to rewrite (5.35) (and then the eigenvalue problem (5.28)) in the following finite dimensional system of equations

$$(5.36) \quad \mathcal{P} h = \mathcal{P} \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} \mathcal{P} h,$$

which can be understood as:

*Finding*  $X_{(\lambda, \gamma, \alpha)} = (x_0, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+2}$  such that

$$(5.37) \quad \left( A_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) X_{(\lambda, \gamma, \alpha)} = 0,$$

where  $A = \mathcal{P} \Psi^{-1} \Phi \in \mathcal{M}_{d+2, d+2}(\mathbb{R})$

We shall find in the following conditions on  $\lambda$  in order to have

$$\det \left( A_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) = 0.$$

That will allows us to construct a non-trivial solution  $X$  to (5.37) and coming back to the original problem, given that  $X = \mathcal{P} h$ , we will obtain thanks to equation (5.35) a solution  $h$  to the original eigenvalue problem (5.28).

### 5.3.2 Finite Dimensional Resolution

We shall study the vector  $X$  component-wise, assuming that

$$(5.38) \quad \mathcal{P}h(v) = x_0 \mathcal{M} + (x \cdot v) \mathcal{M} + x_{d+1} \left( |v|^2 - c_\nu \right) \mathcal{M},$$

where  $c_\nu$  is such that  $\langle \nu_\alpha, |v|^2 \rangle = \langle \nu_\alpha, c_\nu \rangle$ . If we compute the product of (5.38) with elements of  $\mathcal{N}_1$ , we find using the definition of  $\mathcal{P}$  and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  for all  $1 \leq i \leq d$

$$(5.39) \quad \begin{cases} \langle \nu_\alpha h, \mathcal{M} \rangle = x_0 \langle \nu_\alpha, \mathcal{M} \rangle, \\ \langle \nu_\alpha h, v_i \mathcal{M} \rangle = x_i \langle \nu_\alpha v_i, v_i \mathcal{M} \rangle, \\ \langle \nu_\alpha h, (|v|^2 - c_\nu) \mathcal{M} \rangle = x_{d+1} \left\langle \nu_\alpha \left( |v|^2 - c_\nu \right), \left( |v|^2 - c_\nu \right) \mathcal{M} \right\rangle. \end{cases}$$

In order to simplify the notations, we shall define for the following

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{M}} := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(v) \bar{\psi}(v) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv.$$

Using (5.35) together with the relations (5.39), we obtain for all  $1 \leq i \leq d$

$$(5.40) \quad \begin{cases} x_0 \langle \nu_\alpha, 1 \rangle_{\mathcal{M}} = x_0 \langle \nu_\alpha, T_\gamma 1 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle \nu_\alpha, T_\gamma (x \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} + x_{d+1} \left\langle \nu_\alpha, T_\gamma \left( |v|^2 - c_\nu \right) \right\rangle_{\mathcal{M}}, \\ x_i \langle \nu_\alpha v_i, v_i \rangle_{\mathcal{M}} = x_0 \langle \nu_\alpha v_i, T_\gamma 1 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle \nu_\alpha v_i, T_\gamma (x \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} + x_{d+1} \left\langle \nu_\alpha v_i, T_\gamma \left( |v|^2 - c_\nu \right) \right\rangle_{\mathcal{M}}, \\ x_{d+1} \left\langle \nu_\alpha \left( |v|^2 - c_\nu \right), |v|^2 - c_\nu \right\rangle_{\mathcal{M}} = x_0 \left\langle \nu_\alpha \left( |v|^2 - c_\nu \right), T_\gamma 1 \right\rangle_{\mathcal{M}} + \left\langle \nu_\alpha \left( |v|^2 - c_\nu \right), T_\gamma (x \cdot v) \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ \quad + x_{d+1} \left\langle \nu_\alpha \left( |v|^2 - c_\nu \right), T_\gamma \left( |v|^2 - c_\nu \right) \right\rangle_{\mathcal{M}}, \end{cases}$$

where we have set for fixed  $(\lambda, \alpha)$

$$(5.41) \quad T_\gamma := \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}.$$

The system (5.40) is the componentwise version of the projected problem (5.36). We are going to decompose this system of  $d+2$  equations in  $X = (x_0, \dots, x_{d+1})$  in a closed system of 3 equations in  $x_0$ ,  $x \cdot \omega$  and  $x_{d+1}$  for a fixed  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  (corresponding to the *longitudinal* sound waves of the Boltzmann equation, see also the work of Nicolaenko [146]) together with a scalar relation in  $x_i$  for all  $1 \leq i \leq d$  (corresponding to the *transverse* sound waves). For this, we will need the following technical lemma

**Lemma 5.3.4.** *Let  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $e := (1, 0, \dots, 0)^T$  and  $\gamma = \rho \omega$  for  $\rho \in \mathbb{R}$  and  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Then, we have*

$$(5.42) \quad \langle \nu_\alpha, T_\gamma (x \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} = x \cdot \omega \langle \nu_\alpha, T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}},$$

$$(5.43) \quad \langle \nu_\alpha (x \cdot v), T_\gamma 1 \rangle_{\mathcal{M}} = x \cdot \omega \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} 1 \rangle_{\mathcal{M}},$$

$$(5.44) \quad \begin{aligned} \langle \nu_\alpha (x \cdot v), T_\gamma (y \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} &= (x \cdot \omega)(y \cdot \omega) \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}} \\ &\quad + [x \cdot \omega - (x \cdot \omega)(y \cdot \omega)] \langle \nu_\alpha v_2, T_{\rho e} v_2 \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

$$(5.45) \quad \left\langle \nu_\alpha (x \cdot v), T_\gamma \left( |v|^2 - c_\nu \right) \right\rangle_{\mathcal{M}} = x \cdot \omega \left\langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} \left( |v|^2 - c_\nu \right) \right\rangle_{\mathcal{M}},$$

$$(5.46) \quad \left\langle \nu_\alpha \left( |v|^2 - c_\nu \right), T_\gamma (x \cdot v) \right\rangle_{\mathcal{M}} = x \cdot \omega \left\langle \nu_\alpha \left( |v|^2 - c_\nu \right), T_{\rho e} v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}}.$$



*Proof.* According to the definitions of  $T_\gamma$  and  $\Psi_{(\lambda,\gamma,\alpha)}$ , the  $\gamma$ -dependency of  $T_\gamma$  is only happening through the operator  $\Phi_{(\lambda,\gamma,\alpha)}$ . But, for  $M \in \mathcal{O}(d)$  the orthogonal group of  $\mathbb{R}^d$  (namely,  $MM^* = \mathbf{I}_d$ ) one has for  $v \in \mathbb{R}^d$  and  $g \in \text{dom}(\Phi_{(\lambda,\gamma,\alpha)})$ , using the fact that  $\nu_\alpha$  is a radial function, for all  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{(\lambda,\gamma,\alpha)} g\right)(Mv) &= (\nu_\alpha(Mv) + \lambda + i(\gamma \cdot Mv) - (1-\alpha)\Delta_v)^{-1} \nu_\alpha(Mv) g(Mv), \\ &= \left(\Phi_{(\lambda,M^{-1}\gamma,\alpha)} Mg\right)(v), \end{aligned}$$

where we set  $Mg(v) := g(Mv)$ . Then

$$(T_\gamma g)(Mv) = \left(T_{M^{-1}\gamma} Mg\right)(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Especially, if  $g$  is a radial function, there exists a function  $\Gamma_g$  such that

$$(T_\gamma g)(v) = \Gamma_g(\gamma \cdot v, |v|).$$

One has thanks to this result

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha, T_\gamma(x \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} &= \left\langle T_\gamma^* \nu_\alpha, (x \cdot v) \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{\nu_\alpha}(\gamma \cdot v, |v|) (x \cdot v) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv. \end{aligned}$$

Let  $M \in \mathcal{O}(d)$  such that  $M^{-1}\omega = e$ . Thanks to the change of variables  $v = M\xi$  and using the polar coordinates  $\gamma = \rho\omega$  one has  $\gamma \cdot v = \rho M^{-1}\omega \cdot \xi = \rho\xi_1$  and then

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha, T_\gamma(x \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{\nu_\alpha}(\rho\xi_1, |\xi|) (M^{-1}x \cdot \xi) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{\nu_\alpha}^{odd}(\rho\xi_1, |\xi|) (M^{-1}x \cdot \xi) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

where  $g^{odd}(a, \cdot) = (g(a, \cdot) - g(-a, \cdot))/2$ . Given that  $\mathcal{M}_{1,0,1}$  is a radial function,  $\langle g^{odd}, h \rangle_{\mathcal{M}} = \langle g, h^{odd} \rangle_{\mathcal{M}}$  and  $(M^{-1}x)_1 = (M^{-1}x) \cdot M^{-1}\omega$ , one has

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha, T_\gamma(x \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{\nu_\alpha}^{odd}(\rho\xi_1, |\xi|) (M^{-1}x)_1 \xi_1 \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &= (M^{-1}x)_1 \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_{\nu_\alpha}(\rho\xi_1, |\xi|) \xi_1 \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &= x \cdot \omega \left\langle T_{\rho e}^* \nu_\alpha, v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

which proves (5.42).

Thanks to the same arguments

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha(x \cdot v), T_\gamma 1 \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(v) (x \cdot v) \Gamma_1(\gamma \cdot v, |v|) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(\xi) (M^{-1}x \cdot \xi) \Gamma_1(\rho\xi_1, |\xi|) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(\xi) (M^{-1}x \cdot \xi) \Gamma_1^{odd}(\rho\xi_1, |\xi|) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &= x \cdot \omega \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} 1 \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

which proves (5.43). Concerning the next identity, one has

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha(x \cdot v), T_\gamma(y \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} &= \sum_{1 \leq i, j \leq d} x_i y_j \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(v) v_i (T_\gamma v_j)(v) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq d} x_i y_j \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(\xi) (M\xi)_i (T_{\rho e}(M\xi)_j)(\xi) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq d} x_i y_j M_{il} M_{jk} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(\xi) \xi_l (T_{\rho e} \xi_k)(\xi) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

If  $k \neq l$ , this integral is zero (it is clear by doing the transformation  $\xi \rightarrow -\xi$ ). In the other case, one has

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha(x \cdot v), T_\gamma(y \cdot v) \rangle_{\mathcal{M}} &= \sum_{1 \leq i, j \leq d} x_i y_j M_{i1} M_{j1} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(\xi) \xi_1 (T_{\rho e} \xi_1)(\xi) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq d \\ 2 \leq l \leq d}} x_i y_j M_{il} M_{jl} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\alpha(\xi) \xi_2 (T_{\rho e} \xi_2)(\xi) \mathcal{M}_{1,0,1}(\xi) d\xi \\ &= (x \cdot \omega)(y \cdot \omega) \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i, j \leq d} x_i y_j [(MM^*)_{ij} - M_{i1} M_{j1}] \langle \nu_\alpha v_2, T_{\rho e} v_2 \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

which is (5.44) because  $MM^* = I_d$ . The inequalities (5.45) and (5.46) are finally obtained using the same methods of proof.  $\square$

Applying this lemma to system (5.40), we find for all  $1 \leq i \leq d$

$$(5.47) \quad x_0 \langle \nu_\alpha, T_{\rho e} 1 - 1 \rangle_{\mathcal{M}} + x \cdot \omega \langle \nu_\alpha, T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}} + x_{d+1} \langle \nu_\alpha, T_{\rho e} (|v|^2 - c_\nu) \rangle_{\mathcal{M}} = 0,$$

$$(5.48) \quad \begin{aligned} x_i \langle \nu_\alpha v_i, v_i \rangle_{\mathcal{M}} &= \omega_i x_0 \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} 1 \rangle_{\mathcal{M}} + [x_i - \omega_i (x \cdot \omega)] \langle \nu_\alpha v_2, T_{\rho e} v_2 \rangle_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \omega_i (x \cdot \omega) \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}} + \omega_i x_{d+1} \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} (|v|^2 - c_\nu) \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

$$(5.49) \quad \begin{aligned} x_0 \langle \nu_\alpha (|v|^2 - c_\nu), T_{\rho e} 1 \rangle_{\mathcal{M}} &+ x \cdot \omega \langle \nu_\alpha (|v|^2 - c_\nu), T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}} \\ &+ x_{d+1} \langle \nu_\alpha (|v|^2 - c_\nu), T_{\rho e} (|v|^2 - c_\nu) - (|v|^2 - c_\nu) \rangle_{\mathcal{M}} = 0. \end{aligned}$$

Now, on the one hand, if we multiply (5.48) by  $\omega_i$  and sum over all  $i$ , using the fact that  $|\omega| = 1$ , we find that

$$(5.50) \quad x_0 \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} 1 \rangle_{\mathcal{M}} + x \cdot \omega \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} v_1 - v_1 \rangle_{\mathcal{M}} + x_{d+1} \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} (|v|^2 - c_\nu) \rangle_{\mathcal{M}} = 0.$$

The system (5.47)–(5.50)–(5.49) is closed in  $(x_0, x \cdot \omega, x_{d+1})$  for a fixed  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Coming back to a more abstract form, there exists solutions to this system if and only if

$$(5.51) \quad D(\lambda, \rho, \alpha) = 0,$$

where we have defined  $D$  as the following Gram-like matrix (remember that  $T_\gamma$  is given by (5.41) and depends on  $(\lambda, \gamma, \alpha)$ )

$$(5.52) \quad D(\lambda, \rho, \alpha) := \begin{vmatrix} \langle \nu_\alpha, (T_{\rho e} - \text{Id}) 1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \nu_\alpha, T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \nu_\alpha, T_{\rho e} (|v|^2 - c_\nu) \rangle_{\mathcal{M}} \\ \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} 1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \nu_\alpha v_1, (T_{\rho e} - \text{Id}) v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \nu_\alpha v_1, T_{\rho e} (|v|^2 - c_\nu) \rangle_{\mathcal{M}} \\ \langle \nu_\alpha (|v|^2 - c_\nu), T_{\rho e} 1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \nu_\alpha (|v|^2 - c_\nu), T_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle \nu_\alpha (|v|^2 - c_\nu), (T_{\rho e} - \text{Id}) (|v|^2 - c_\nu) \rangle_{\mathcal{M}} \end{vmatrix}.$$

On the other hand, if one multiplies (5.50) by  $\omega_i$  and subtract this expression to (5.48), one finds

$$(5.53) \quad [x_i - \omega_i (x \cdot \omega)] D_\omega(\lambda, \rho, \alpha) = 0,$$

where we have set

$$(5.54) \quad D_\omega(\lambda, \rho, \alpha) := \langle \nu_\alpha v_1, (T_{\rho e} - \text{Id}) v_1 \rangle_{\mathcal{M}}.$$

Then, if one solves (5.50) in  $C \cdot \omega$ , the relation (5.53) will give the expression of  $x_i$ , provided that the equation  $D_\omega(\lambda, \rho, \alpha) = 0$  admits a unique solution  $\lambda$ .

We will simplify these expressions thanks to the following Lemma.

**Lemma 5.3.5.** *Let  $(\rho, \lambda, \alpha) \in U_1 \times U_2 \times (\alpha_3, 1]$ . If  $g, h$  are elastic collisional invariants, namely if*

$$g, h \in N_1 = \text{Span}\{\mathcal{M}, v_i \mathcal{M}, |v|^2 \mathcal{M} : 0 \leq i \leq d\},$$

*then we can write for all  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  and  $\gamma = \rho \omega$*

$$\begin{aligned} \left( \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) h &= \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \left( \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) h, \\ \left\langle \nu_\alpha g, \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} h \right\rangle &= \left\langle \nu_\alpha g, \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \left( \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) h \right\rangle. \end{aligned}$$

*Proof.* By definition of  $\mathcal{N}_\alpha$ , we have  $\nu_\alpha^{1/2} h \in \mathcal{N}_\alpha$ , and then  $S \nu_\alpha^{1/2} h = 0$ . But, we know that

$$\Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} = \text{Id} - \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} \nu_\alpha^{-1/2} \mathcal{S}_\alpha \nu_\alpha^{1/2}.$$

Thus, we have  $\Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} h = h$ , and given that  $\Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}$  is invertible for  $(\rho, \lambda, \alpha) \in U_1 \times U_2 \times (\alpha_3, 1]$  and  $\gamma = \rho \omega$ , we have

$$(5.55) \quad \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} h = h,$$

which proves the first relation. Using the orthogonality of the collisional invariants and (5.55), we obtain the second equality:

$$\begin{aligned} \left\langle \nu_\alpha g, \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} h \right\rangle &= \left\langle \nu_\alpha g, \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} h \right\rangle - \left\langle \nu_\alpha g, h \right\rangle \\ &= \left\langle \nu_\alpha g, \left( \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) h \right\rangle \\ &= \left\langle \nu_\alpha g, \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \left( \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right) h \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Let us set  $\Upsilon_{(\lambda, \gamma, \alpha)} := \Psi_{(\lambda, \gamma, \alpha)}^{-1} \left( \Phi_{(\lambda, \gamma, \alpha)} - \text{Id} \right)$ . Thanks to this lemma, to the definition of  $c_\nu$  and by the nullity of the odd moments of the centered gaussian, we can write (5.52) in a “simpler” form, namely

$$(5.56) \quad D(\lambda, \rho, \alpha) = \begin{vmatrix} \left\langle \nu_\alpha, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} \mathbf{1} \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} g \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ \left\langle \nu_\alpha v_1, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} \mathbf{1} \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha v_1, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha v_1, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} g \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ \left\langle \nu_\alpha g, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} \mathbf{1} \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha g, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha g, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} g \right\rangle_{\mathcal{M}} \end{vmatrix},$$

where we have set  $g(v) := |v|^2 - c_\nu$ . We can also write (5.54) the same way

$$(5.57) \quad D_\omega(\lambda, \rho, \alpha) = \langle \nu_\alpha v_1, \Upsilon_{\rho e} v_1 \rangle_{\mathcal{M}}.$$

Before solving these equations, we need a last lemma.

**Lemma 5.3.6.** *Let  $h$  be an elastic collisional invariant (namely  $h \in N_1$ ). If  $\Psi^*$  denotes the adjoint operator of  $\Psi$ , then we have*

$$\left(\Psi_{(0,0,1)}^*\right)^{-1} \nu_1 h = \nu_1 h.$$

*Proof.* Let  $(\rho, \lambda, \alpha) \in U_1 \times U_2 \times (\alpha_2, 1]$  and  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  and set  $\gamma = \rho\omega$ . If  $T$  is an invertible operator on a Banach space, it is known that  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ . Moreover, provided that  $\nu_1 \in \mathbb{R}$ , the adjoint operator  $\Phi_{(\lambda,\gamma,1)}^*$  is the operator of multiplication by

$$\frac{\nu_1(v)}{\nu_1(v) + \lambda - i(\gamma \cdot v)}$$

Then, if  $(\lambda, \rho) \rightarrow (0, 0)$  we have  $\Phi_{(\lambda,\rho\omega,1)}^* \rightarrow \text{Id}$  strongly. But, we can also compute

$$\begin{aligned} \Psi_{(\lambda,\rho\omega,\alpha)}^* &= \text{Id} - \left(\Phi_{(\lambda,\rho\omega)} \nu_1^{-1/2} \mathcal{S}_1 \nu_1^{1/2}\right)^* \\ &= \text{Id} - \nu_1^{1/2} \mathcal{S}_1^* \nu_1^{-1/2} \Phi_{(\lambda,\rho\omega)}^*, \end{aligned}$$

and as  $h \in N_1$ , we have

$$\nu_1^{1/2} \mathcal{S}_1^* \nu_1^{-1/2} \nu h = 0.$$

Finally, we can write

$$\begin{aligned} \Psi_{(0,0,1)}^* \nu_1 h &= \left(\text{Id} - \nu_1^{1/2} \mathcal{S}_1^* \nu_1^{-1/2}\right) \nu h \\ &= \nu_1 h, \end{aligned}$$

which concludes the proof after inversion.  $\square$

### 5.3.3 Computation of the First Coefficients of the Expansion

We can now study in details for what values of the parameters  $\lambda$  and  $\alpha$  one can solve the projected eigenvalue problem (5.53). We start by considering the behavior of the transverse sound waves.

**Proposition 5.3.1.** *Let  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ . There exist  $\rho_0 > 0$  and  $\alpha_4 \in (\alpha_3, 1]$  such that the problem of solving the equation*

$$D_\omega(\lambda, \rho, \alpha) = 0$$

*has a unique solution  $\lambda_\omega = \lambda(\rho, \alpha) \in \mathcal{C}^\infty((-\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_0) \times (\alpha_4, 1])$ , verifying*

$$\lambda_\omega(0, 1) = \frac{\partial \lambda_\omega}{\partial \rho}(0, 1) = \frac{\partial \lambda_\omega}{\partial \alpha}(0, 1) = 0.$$

*Proof.* Let us write thanks to the compact expression (5.57) of  $D_\omega$

$$\begin{aligned} 0 &= -D_\omega(\lambda, \rho, \alpha) \\ &= -\left\langle \left(\Psi_{(\lambda,\rho e,\alpha)}^*\right)^{-1} (\nu_\alpha v_1), \left(\Phi_{(\lambda,\rho e,\alpha)} - \text{Id}\right) v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \left(\Psi_{(\lambda,\rho e,\alpha)}^*\right)^{-1} (\nu_\alpha v_1) \left[ (\nu_\alpha(v) + \lambda + i(\rho e \cdot v) - (1-\alpha)\Delta_v)^{-1} \nu_\alpha(v) - \text{Id} \right] (v_1) \\ &\hspace{25em} \mathcal{M}_{1,0,1}(v) \, dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\Psi_{(\lambda,\rho e,\alpha)}^*\right)^{-1} (\nu_\alpha v_1) (\nu_\alpha(v) + \lambda + i\rho v_1 - (1-\alpha)\Delta_v)^{-1} (\lambda + i\rho v_1 - (1-\alpha)\Delta_v) (v_1) \\ &\hspace{25em} \mathcal{M}_{1,0,1}(v) \, dv. \end{aligned}$$

Let us now set  $z = \lambda/\rho$  and  $s = 1 - \alpha$ . We shall take the limit  $(\rho, s) \rightarrow (0, 0)$  in  $D_\omega$ . For this, we define a new function  $G_\omega$  as

$$G_\omega(z, \rho, s) := \frac{1}{\rho} D_\omega(\rho z, \rho, 1 - s).$$

Then, as  $\Delta_v(v_1) = 0$ , we will have  $D_\omega(\lambda, \rho, \alpha) = 0$  if and only if

$$\begin{aligned} 0 &= -G_\omega(z, \rho, s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \Psi_{(\rho z, \rho e, 1-s)}^* \right)^{-1} (\nu_{1-s} v_1) (\nu_{1-s}(v) + \rho z + i \rho v_1 - s \Delta_v)^{-1} ((z + i v_1) v_1) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv. \end{aligned}$$

Moreover, if  $\alpha \rightarrow 1$ , thanks to the continuity of the equilibrium profiles  $F_\alpha$  with respect to  $\alpha$  (recalled in Proposition 5.4.4) and to the smoothness properties of these profiles (recalled in Proposition 5.4.3), we have  $\nu_\alpha(v) \rightarrow \nu_1(v)$ , uniformly in  $v$ . Hence, if we take the limit  $(\rho, s) \rightarrow (0, 0)$ , we find thanks to Lemma 5.3.6 that

$$\begin{aligned} 0 &= -G_\omega(z, 0, 1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \Psi_{(0,0,1)}^* \right)^{-1} (\nu_1 v_1) \frac{z + i v_1}{\nu_1} (v_1) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv \\ &= z \int_{\mathbb{R}^d} v_1^2 \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv = z. \end{aligned}$$

Thus we have  $z = 0$ .

It just remains to apply the implicit function theorem to the map  $(z, \rho, s) \mapsto G_\omega(z, \rho, s)$  in  $(0, 0, 0)$ . Provided that we have

$$\begin{cases} G_\omega(0, 0, 0) = 0, \\ \frac{\partial G_\omega}{\partial z}(0, 0, 0) = 1, \end{cases}$$

there exist two real constants  $\bar{\rho}_0 > 0$ ,  $\alpha_4 \in (\alpha_3, 1]$  and a mapping  $z_\omega \in \mathcal{C}^\infty((-\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_0) \times [0, 1 - \alpha_4])$  such that if  $|\rho| \leq \bar{\rho}_0$  and  $s \in [0, 1 - \alpha_4)$ , then

$$\frac{1}{\rho} D_\omega(\rho z_\omega(\rho, s), \rho, 1 - s) = G_\omega(z_\omega(\rho, s), \rho, s) = 0.$$

To conclude the proof, we set  $\lambda_\omega(\rho, \alpha) := \rho z_\omega(\rho, 1 - \alpha)$  and this function has the properties we were looking from.  $\square$

Let us now turn to the dispersion relations (5.51), corresponding to the longitudinal sound waves. We will recall the simplified expression of  $D$  for the reader convenience:

$$D(\lambda, \rho, \alpha) = \begin{vmatrix} \left\langle \nu_\alpha, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} 1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} g \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ \left\langle \nu_\alpha v_1, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} 1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha v_1, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha v_1, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} g \right\rangle_{\mathcal{M}} \\ \left\langle \nu_\alpha g, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} 1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha g, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} v_1 \right\rangle_{\mathcal{M}} & \left\langle \nu_\alpha g, \Upsilon_{(\lambda, \rho e, \alpha)} g \right\rangle_{\mathcal{M}} \end{vmatrix}.$$

We then prove the following result concerning the behavior of the eigenvalues for small frequency and inelasticity.

**Proposition 5.3.2.** *For  $\lambda \in U_2$  (see Lemma 5.3.3), there exists  $\bar{\rho} > 0$  and  $\alpha_5 \in (\alpha_4, 1]$  such that for  $\alpha \in (\alpha_5, 1]$  the elastic dispersion relation  $D(\lambda, \rho, \alpha) = 0$  has exactly three branches of solutions*

$\lambda^{(j)}(\rho, \alpha)$  for all  $j \in \{-1, 0, 1\}$  and  $\rho \in (-\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_1)$ . These solutions are of class  $\mathcal{C}^\infty(-\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_1)$  and verify

$$\begin{cases} \lambda^{(j)}(0, 1) = 0, & \forall j \in \{-1, 0, 1\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(j)}}{\partial \rho}(0, 1) = j i \sqrt{1 + \frac{2}{d}}, & \forall j \in \{-1, 0, 1\}, \\ \frac{\partial \lambda^{(0)}}{\partial \alpha}(0, 1) = -\frac{3}{\bar{T}_1}, \end{cases}$$

where,  $\lambda^{(0)}$  is the so-called energy eigenvalue and  $\bar{T}_1$  is given by (5.10). Finally, we also have the symmetry properties

$$\lambda^{(j)}(-\rho, \alpha) = \overline{\lambda^{(j)}(\rho, \alpha)} = \lambda^{(-j)}(\rho, \alpha).$$

*Proof.* We shall use the ideas introduced in the proof of Proposition 5.3.1: instead of solving directly the equation (5.51), we want to solve an equivalent one depending on  $z = \lambda/\rho$  and  $s = 1 - \alpha$ . We then introduce a function  $G = G(z, \rho, s)$  by setting

$$G(z, \rho, s) := \frac{1}{\rho^3} D(\rho z, \rho, 1 - s).$$

According to the simplified expression (5.56) of  $D$ , all the components of the matrix found in  $G(z, \rho, s)$  can be written for  $h_1, h_2 \in N_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \langle \nu_{1-s} h_1, \Upsilon_{(\rho z, \rho e, 1-s)} h_2 \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \Psi_{(\rho z, \rho e, 1-s)}^* \right)^{-1} (\nu_{1-s} h_1)(v) \\ &\quad (\nu_{1-s}(v) + \rho z + i \rho v_1 - s \Delta_v)^{-1} \left( z + i v_1 - \frac{s}{\rho} \Delta_v \right) (h_2)(v) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv. \end{aligned}$$

By doing the same computations than in the proof of Proposition 5.3.1, this quantity becomes first for  $s = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( \Psi_{(\rho z, \rho e, 1)}^* \right)^{-1} (\nu_1 h_1)(v) \frac{z + i v_1}{\nu_1(v) + \rho z + i \rho v_1} h_2(v) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv$$

and then for  $\rho = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_1(v)(z + i v_1) h_2(v) \mathcal{M}_{1,0,1}(v) dv.$$

Thus, we can write according to the definition of  $D$  and to classical computations about the even moments of the reduced Gaussian function

$$\begin{aligned} G(z, 0, 1) &= \begin{vmatrix} \langle 1, z + i v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle 1, (z + i v_1) v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle 1, (z + i v_1) g \rangle_{\mathcal{M}} \\ \langle v_1, z + i v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle v_1, (z + i v_1) v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle v_1, (z + i v_1) g \rangle_{\mathcal{M}} \\ \langle g, z + i v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle g, (z + i v_1) v_1 \rangle_{\mathcal{M}} & \langle g, (z + i v_1) g \rangle_{\mathcal{M}} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} z & i & z(d - c_\nu) \\ i & z & i(d + 2 - c_\nu) \\ z(d - c_\nu) & i(d + 2 - c_\nu) & z((d - c_\nu)^2 + 2d) \end{vmatrix} \\ &= 2z(dz^2 + d + 2) \\ &= 2(z - z_{-1})(z - z_0)(z - z_{+1}), \end{aligned}$$

where we have set  $z_j = j i \sqrt{1 + 2/d}$  for  $j \in \{-1, 0, +1\}$ . Hence, we have shown that

$$\begin{cases} G(z_j, 0, 0) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial z}(z_j, 0, 0) \neq 0, \end{cases}$$

and we can apply again the implicit function theorem to show that in a neighborhood  $\mathcal{B} \times (-\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_1) \times [0, 1 - \alpha_5]$  of  $(z_j, 0)$ , there exists a unique function  $\tilde{z}_j \in \mathcal{C}^\infty((-\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_1) \times [0, 1 - \alpha_5])$  such that if  $|\rho| \leq \bar{\rho}_1$  and  $s \in [0, 1 - \alpha_5]$ , then  $G(\tilde{z}_j(\rho, s), \rho, s) = 0$  (and of course  $\tilde{z}_j(0, 0) = z_j$ ). We finally set  $\lambda^{(j)}(\rho, s) := \rho \tilde{z}_j(\rho, s)$ , which give a solution to (5.51) (with  $\alpha = 1 - s$ ) verifying

$$\begin{cases} \lambda^{(j)}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial \lambda^{(j)}}{\partial \rho}(0, 0) = z_j. \end{cases}$$

We now have to prove that these three branches are the only solutions to  $D(\lambda, \rho, \alpha) = 0$  for small  $\rho$  and  $1 - \alpha$ .

For this, following once more [74], we shall use tools from complex analysis. Let us fix  $|\rho| \leq \bar{\rho}_1$  and  $\alpha \in (\alpha_5, 1]$ ; according to the definition of  $D$ , the map  $\lambda \mapsto D(\lambda, \rho, \alpha)$  is holomorphic on the set  $U_2$  (defined Lemma 5.3.3). Moreover, following the previous computations, we also have  $D(\lambda, 0, 1) = \lambda^3 H(\lambda)$  for a function  $H$  holomorphic on  $U_2$  such that  $H(0) = 1$ . Hence, if  $\lambda$  is defined along a circle  $\mathcal{C}$  around 0, then  $D(\lambda, 0, 1)$  will encircle the origin exactly three times. Using the strong convergence of the multiplication operator  $\Phi_{(\lambda, \rho e, \alpha)}$  towards Id when  $(\rho, \alpha) \rightarrow (0, 1)$ , we can write

$$\lim_{(\rho, \alpha) \rightarrow (0, 1)} \sup_{\lambda \in U_2} |D(\lambda, \rho, \alpha) - D(\lambda, 0, 1)| = 0.$$

Hence, for small  $(\rho, 1 - \alpha)$ , the function  $\lambda \mapsto D(\lambda, \rho, \alpha)$  encircles the origin also only three times when  $\lambda$  traverses  $\mathcal{C}$ . This function then only has three roots for fixed  $\rho$  and  $\alpha$ .

Next, we compute the partial derivative with respect to  $\alpha$  of the energy eigenvalue. This eigenvalue is given by the solution of the dispersion relation that depends on  $\rho$  only at second order, namely  $\lambda^{(0)}$ . Let  $e_{(\gamma, \alpha)}^{(0)}$  be the associated eigenvector. We then have for all  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  and  $\rho \geq 0$

$$(5.58) \quad \mathcal{L}_{(\alpha, \gamma)} e_{(\rho \omega, \alpha)}^{(0)}(v) = \lambda^{(0)}(\rho, \alpha) e_{(\rho \omega, \alpha)}^{(0)}(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

In particular, the “elastic, space homogeneous” energy eigenvector  $e_{(0, 1)}^{(0)}$  is defined thanks to the the elastic equilibrium profile  $F_1$  defined in (5.10) as

$$(5.59) \quad e_{(0, 1)}^{(0)} = c_0 \left( |v|^2 - d \bar{T}_1 \right) F_1,$$

where  $c_0$  is a normalizing constant. We have by construction, using some elementary properties of Gaussian functions

$$\left\| e_{(0, 1)}^{(0)} \right\|_{L^1(m^{-1})} = 1, \quad N \left( e_{(0, 1)}^{(0)} \right) = 0, \quad \mathcal{E} \left( e_{(0, 1)}^{(0)} \right) = 2 c_0 d \bar{T}_1^2,$$

where we have defined the *mass*  $N(f)$  and the *kinetic energy*  $\mathcal{E}(f)$  of a given distribution  $f$  as

$$N(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(v) dv, \quad \mathcal{E}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(v) |v|^2 dv.$$

By integrating the eigenvalue equation (5.58) against  $|v|^2$  and dividing by  $1 - \alpha$ , we obtain according to the expression of the energy dissipation functional (5.6)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{(0)}(\rho, \alpha)}{1 - \alpha} \mathcal{E} \left( e_{(\rho\omega, \alpha)}^{(0)} \right) = \\ - 2(1 + \alpha) D \left( F_\alpha, e_{(\rho\omega, \alpha)}^{(0)} \right) + 2dN \left( e_{(\rho\omega, \alpha)}^{(0)} \right) + i \frac{\rho}{1 - \alpha} \omega \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e_{(\rho\omega, \alpha)}^{(0)}(v) v |v|^2 dv. \end{aligned}$$

Taking  $\rho = 0$ , we then have

$$\frac{\lambda^{(0)}(0, \alpha)}{1 - \alpha} \mathcal{E} \left( e_{(0, \alpha)}^{(0)} \right) = -2(1 + \alpha) D \left( F_\alpha, e_{(0, \alpha)}^{(0)} \right) + 2dN \left( e_{(0, \alpha)}^{(0)} \right).$$

Now, we use the rate of convergence of the inelastic profile  $F_\alpha$  towards the elastic one  $F_1$  recalled in Proposition 5.4.4 and the smoothness of  $e_{(0, \alpha)}^{(0)}$  with respect to  $\alpha$  obtained thanks to the use of the implicit functions theorem. We then obtain thanks to the nullity of the mass of  $e_{(0, 1)}^{(0)}$

$$(5.60) \quad \frac{\lambda^{(0)}(0, \alpha)}{1 - \alpha} \mathcal{E} \left( e_{(0, 1)}^{(0)} \right) = -2(1 + \alpha) D \left( F_1, e_{(0, 1)}^{(0)} \right) + \mathcal{O}(1 - \alpha).$$

Finally, we compute thanks to the expression of the elastic energy eigenvector (5.59) and to the definition (5.10) of the equilibrium temperature the quantities

$$\mathcal{E} \left( e_{(0, 1)}^{(0)} \right) = 2d c_0 \bar{T}_1^2, \quad D \left( F_1, e_{(0, 1)}^{(0)} \right) = \frac{3}{2} d c_0 \bar{T}_1.$$

Gathering these relations and passing to the limit  $\alpha \rightarrow 1$  in (5.60) gives the result.

Concerning the last assertion of the proposition, we notice thanks to the invariance of the eigenvalue problem (5.28) under the composition of the convex conjugation and the reflection  $\gamma \rightarrow -\gamma$  that  $\bar{D}(\lambda, \rho, \alpha) = D(\bar{\lambda}, -\rho, \alpha) = D(\bar{\lambda}, \rho, \alpha)$ .  $\square$

**Remark 1.** As a consequence of the symmetry relation

$$\lambda^{(j)}(-\rho, \alpha) = \overline{\lambda^{(j)}(\rho, \alpha)} = \lambda^{(-j)}(\rho, \alpha),$$

we have  $\lambda^{(0)}(\rho, \alpha) \in \mathbb{R}$ .

Thanks to this proposition, we can construct the  $d + 2$  hydrodynamic eigenvectors

$$\left( e^{(j)}(\rho, \omega) \right)_{j \in \{-1, \dots, d\}}$$

of the elastic linearized collision operator, for small  $\rho$  and a given  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Indeed,

- for  $j \in \{2, \dots, d\}$ , we take  $\lambda = \lambda_\omega(\rho, \alpha)$  for  $|\rho| \leq \bar{\rho}_0$  and  $\alpha \in (\alpha_4, 1]$  given by Proposition 5.3.1 and choose in (5.38)  $x_0 = x_{d+1} = 0$  and any vector  $x \in \omega^\perp$ . The relation (5.35) then allows us to construct the eigenvectors  $e^{(j)}(\rho, \omega)$  associated to the conservation of momentum.
- for  $j \in \{-1, 0, 1\}$ , we pick a solution  $\lambda = \lambda^{(j)}(\rho)$  for  $|\rho| \leq \bar{\rho}_1$  and  $\alpha \in (\alpha_5, 1]$  to the dispersion relation  $D(\lambda, \rho, \alpha) = 0$  given by Proposition 5.3.2 and choose the vector  $(x_0, x \cdot \omega, x_{d+1})$  to be a solution to the system (5.47)–(5.50)–(5.49) corresponding to this eigenvalue. We finally set  $x = (x \cdot \omega) \omega$  and recover through (5.38)

$$\mathcal{P}e^{(j)}(\rho, \omega)(v) = x_0(\rho) + (x \cdot v)(\rho, \omega \cdot v) + x_{d+1}(\rho) \left( |v|^2 - c_\nu \right).$$



Inserting this expression in (5.35) finally gives us the eigenvalue, depending only on  $\rho$  (as a  $\mathcal{C}^\infty$  function),  $|v|$  and  $v \cdot \omega$ . With this procedure, we have constructed three independent solutions  $e^{(j)} \in L^1(m^{-1})$  to the eigenvalue problem

$$(-i\rho(\omega \cdot v) + \mathcal{L}_1) e^{(j)} = \lambda^{(j)} e^{(j)}, \quad \forall j \in \{-1, 0, 1\}.$$

## 5.4 Functional toolbox on the collision operator

Let us present some important properties concerning the granular gases operator we heavily used on this paper.

To be consistent with [134], we shall define for  $\delta > 0$  the regularized operator

$$\mathcal{L}_{1,\delta} = \mathcal{L}_{1,\delta}^+ - \mathcal{L}^* - \mathcal{L}^\nu,$$

where  $\mathcal{L}_{1,\delta}^+$  is the regularization of the truncated gain term introduced in [139]. One of the key properties of the regularized operator is that it converges towards  $\mathcal{L}_1$  when  $\delta \rightarrow 0$  in the norm of graph of  $L^1(m^{-1})$  (and also in the weighted Sobolev spaces  $W_q^{k,1}(m^{-1})$ ) but with a loss of integration weights:

**Proposition 5.4.1** (Proposition 5.5 of [134]). *For any  $k, q \in \mathbb{N}$ , we have*

$$\|(\mathcal{L}_{1,\delta} - \mathcal{L}_1)g\|_{W_q^{k,1}(m^{-1})} \leq \varepsilon(\delta) \|g\|_{W_{q+1}^{k,1}(m^{-1})},$$

where  $\varepsilon(\delta)$  is an explicit constant, going to 0 as  $\delta \rightarrow 0$ .

We then state a result about the Hölder continuity (in the norm of the graph) of the gain term of the granular gases operator with respect to the restitution coefficient  $\alpha$ .

**Proposition 5.4.2** (Proposition 3.2 of [134]). *For any  $\alpha, \alpha' \in (0, 1]$ , and any  $g \in L_1^1(m^{-1})$ ,  $f \in W_1^{1,1}(m^{-1})$ , there holds*

$$\begin{cases} \left\| \mathcal{Q}_\alpha^+(g, f) - \mathcal{Q}_{\alpha'}^+(g, f) \right\|_{L^1(m^{-1})} \leq \varepsilon(\alpha - \alpha') \|f\|_{W_1^{1,1}(m^{-1})} \|g\|_{L_1^1(m^{-1})}, \\ \left\| \mathcal{Q}_\alpha^+(f, g) - \mathcal{Q}_{\alpha'}^+(f, g) \right\|_{L^1(m^{-1})} \leq \varepsilon(\alpha - \alpha') \|f\|_{W_1^{1,1}(m^{-1})} \|g\|_{L_1^1(m^{-1})}, \end{cases}$$

where we have set  $\varepsilon(r) = Cr^{\frac{1}{3+4s}}$ , the constant  $s$  being given by the weight function  $m$ .

We also need to estimate the smoothness, the tail behavior and the pointwise lower bound (uniformly with respect to the restitution coefficient  $\alpha$ ) of the equilibrium profiles  $F_\alpha$  solutions to (5.8). We have the following result.

**Proposition 5.4.3** (Propositions 2.1 and 2.3 of [135]). *Let us fix  $\alpha_0 \in (0, 1)$ . There exist some positive constants  $a_1, a_2, a_3, a_4$  (independent of  $\alpha$ ) and, for any  $k \in \mathbb{N}$  a positive constant  $C_k$  such that for all  $\alpha \in [\alpha_0, 1)$*

$$\begin{aligned} \|F_\alpha\|_{L^1(e^{a_1|v|})} &\leq a_2, & \|F_\alpha\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} &\leq C_k, \\ F_\alpha(v) &\geq a_3 e^{-a_4|v|^8}, & \forall v \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Moreover, these profiles converge in  $L_2^1$  towards the elastic Maxwellian  $F_1$ , with an explicit rate

**Proposition 5.4.4** (Proposition 3.1 of [135]). *For any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $C_\varepsilon$  such that*

$$\|F_\alpha - F_1\|_{L^1_2} \leq C_\varepsilon (1 - \alpha)^{\frac{1}{2+\varepsilon}}.$$

We now define for  $\zeta \in \mathbb{C}$  and  $\delta > 0$  the operators

$$(5.61) \quad A_\delta := \mathcal{L}_{1,\delta}^+ - \mathcal{L}^* \quad \text{and} \quad B_{\alpha,\delta}(\zeta) := \mathcal{L}^{\nu_1} + \mathcal{I}_\alpha + \zeta - \left( \mathcal{L}_1^+ - \mathcal{L}_{1,\delta}^+ \right),$$

where  $\mathcal{I}_\alpha := \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_\alpha$  is the difference between the elastic and inelastic linearized operators. We can then write the problem of computing the inverse of resolvent operator of  $\mathcal{L}_\alpha$  as the perturbation equation

$$\mathcal{L}_\alpha - \zeta = A_\delta - B_{\alpha,\delta}(\zeta).$$

We state a result of convergence of the linearized granular gases operator towards the linearized elastic operator (which is a consequence of Proposition 5.4.2), as well as estimates on the operator  $B_{\alpha,\delta}$ .

**Lemma 5.4.1** (Lemmas 5.9 of [134] and 5.2 of [135]). *For any  $k, q \in \mathbb{N}$  and any exponential weight function  $m$ , the following properties hold:*

1. *There exist a constructive  $\alpha_0 \in (0, 1]$  and some nonnegative constant  $C = C(k, q, m)$  such that for any  $\alpha \in (\alpha_0, 1]$ ,*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\alpha\|_{W_{q+1}^{k+2,1}(m^{-1}) \rightarrow W_q^{k,1}(m^{-1})} &\leq C, \\ \|\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_1\|_{W_3^{3,1}(m^{-1}) \rightarrow L^1(m^{-1})} &\leq C(1 - \alpha). \end{aligned}$$

2. *For any  $\delta > 0$ , the operator  $A_\delta : L^1 \rightarrow W_\infty^{1,1}(m^{-1})$  is a bounded linear operator (more precisely, it maps function  $L^1$  into  $C^\infty$  functions with compact support).*
3. *There exists some constants  $\delta^* > 0$  and  $\alpha_1 \in (\alpha_0, 1)$  such that for any  $\zeta \in \Delta_{-\nu_0}$ ,  $\delta < \delta_*$  and  $\alpha \in [\alpha_1, 1]$  the operator*

$$B_{\alpha,\delta}(\zeta) : W_{q+1}^{k+2,1}(m^{-1}) \rightarrow W_q^{k,1}(m^{-1})$$

*is invertible. Moreover, its inverse operator satisfies*

$$\begin{aligned} \|B_{\alpha,\delta}(\zeta)^{-1}\|_{W_q^{k,1}(m^{-1}) \rightarrow W_q^{k,1}(m^{-1})} &\leq \frac{C_1}{|\nu_0 - \Re \zeta|}, \\ \|B_{\alpha,\delta}(\zeta)^{-1}\|_{W_q^{k,1}(m^{-1}) \rightarrow W_{q+1}^{k+2,1}(m^{-1})} &\leq \frac{C_2}{|\nu_0 - \zeta|} \end{aligned}$$

*for some explicit constants  $C_1, C_2$  depending on  $k, q, \delta^*, \alpha_1$ .*

As a consequence of these results, we also have the following proposition.

**Proposition 5.4.5** (Proposition 3.8 of [134]). *For any  $k, q \in \mathbb{N}$ , any exponential weight function  $m$ , and any  $\alpha \in (\alpha_0, 1]$ ,*

$$\left\| \mathcal{L}_\alpha^+ - \mathcal{L}_1^+ \right\|_{W_q^{k,1}(m^{-1}) \rightarrow W_{q+1}^{k,1}(m^{-1})} \leq \varepsilon (1 - \alpha)$$

*where  $\varepsilon$  has been defined in Proposition 5.4.2.*



---

## Bibliographie

---

- [1] ALAIA, A., AND PUPPO, G. A hybrid method for hydrodynamic-kinetic flow, Part II: Coupling of hydrodynamic and kinetic models. *J. Comput. Phys.* *231*, 16 (2012), 5217–5242.
- [2] ALONSO, R. J. Existence of Global Solutions to the Cauchy Problem for the Inelastic Boltzmann Equation with Near-vacuum Data. *Indiana Univ. Math. J.* *58*, 3 (2009), 999–1022.
- [3] ALONSO, R. J., CANIZO, J. A., GAMBA, I. M., AND MOUHOT, C. A new approach to the creation and propagation of exponential moments in the Boltzmann equation. Preprint Arxiv 1203.2364, 2012.
- [4] ALONSO, R. J., AND LODS, B. Free cooling and high-energy tails of granular gases with variable restitution coefficient. *SIAM J. Math. Anal.* *42*, 6 (2010), 2499–2538.
- [5] ALONSO, R. J., AND LODS, B. Uniqueness and regularity of steady states of the Boltzmann equation for viscoelastic hard-spheres driven by a thermal bath. Preprint Arxiv 1112.0096, 2012.
- [6] ANDRIES, P., LE TALLEC, P., PERLAT, J.-P., AND PERTHAME, B. The Gaussian-BGK model of Boltzmann equation with small Prandtl number. *Eur. J. Mech. B Fluids* *19*, 6 (Nov. 2000), 813–830.
- [7] AOKI, K., DEGOND, P., AND MIEUSSENS, L. Numerical Simulations of Rarefied Gases in Curved Channels: Thermal Creep, Circulating Flow, and Pumping Effect. *Commun. Comput. Phys.* *6* (2009), 1–44.
- [8] ARAKI, S., AND TREMAINE, S. The Dynamics of Dense Particle Disks. *Icarus* *65*, 1 (Jan. 1986), 83–109.
- [9] ARNOLD, A., CARRILLO, J. A., AND KLAPPROTH, C. Improved entropy decay estimates for the heat equation. *J. Math. Anal. Appl.* *343*, 1 (2008), 190–206.
- [10] ARNOLD, V., AND EMBAREK, D. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir Moscou, 1976.

- 
- [11] ASTILLERO, A., AND SANTOS, A. A granular fluid modeled as a driven system of elastic hard spheres. In *The Physics of Complex Systems. New Advances and Perspectives*, F. Mallamace and H. E. Stanley, Eds. IOS Press, Amsterdam, Sept. 2004, pp. 475–480.
- [12] ASTILLERO, A., AND SANTOS, A. Uniform shear flow in dissipative gases: Computer simulations of inelastic hard spheres and frictional elastic hard spheres. *Phys. Rev. E* 72, 3 (Sept. 2005), 1–23.
- [13] BABOVSKY, H. On a simulation scheme for the Boltzmann equation. *Math. Methods Appl. Sci.* 8, 2 (1986), 223–233.
- [14] BARDOS, C., AND DEGOND, P. Global Existence for the Vlasov-Poisson Equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. C* 2, 2 (1985), 101–118.
- [15] BARTIER, J.-P., BLANCHET, A., DOLBEAULT, J., AND ESCOBEDO, M. Improved intermediate asymptotics for the heat equation. *Appl. Math. Lett.* 24, 1 (Jan. 2011), 76–81.
- [16] BENEDETTO, D., CAGLIOTI, E., CARRILLO, J. A., AND PULVIRENTI, M. A Non-Maxwellian Steady Distribution for One-Dimensional Granular Media. *J. Statist. Phys.* 91, 5/6 (1998), 979–990.
- [17] BENEDETTO, D., AND PULVIRENTI, M. On the one-dimensional Boltzmann equation for granular flows. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 35, 5 (Apr. 2002), 899–905.
- [18] BESSE, C., BORGHOL, S., GOUDON, T., LACROIX-VIOLET, I., AND DUDON, J.-P. Hydrodynamic Regimes, Knudsen Layer, Numerical Schemes: Definition of Boundary Fluxes. *Adv. Appl. Math. Mech.* 3, 5 (2011), 519–561.
- [19] BIRD, G. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*, 2nd ed. Oxford University Press, 1994.
- [20] BISI, M., CARRILLO, J. A., AND SPIGA, G. Some alternative methods for hydrodynamic closures to dissipative kinetic models. *Eur. Phys. J. Special Topics* 179, 1 (May 2010), 165–178.
- [21] BOBYLEV, A. V. Exact solutions of the Boltzmann equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 225, 6 (1975), 1296–1299.
- [22] BOBYLEV, A. V., CARRILLO, J. A., AND GAMBA, I. On some properties of kinetic and hydrodynamic equations for inelastic interactions. *J. Statist. Phys.* 98, 3 (2000), 743–773.
- [23] BOBYLEV, A. V., CARRILLO, J. A., AND GAMBA, I. Erratum on: “On some properties of kinetic and hydrodynamic equations for inelastic interactions”. *J. Statist. Phys.* 103, 5-6 (2001), 1137–1138.
- [24] BOBYLEV, A. V., AND CERCIGNANI, C. Moment equations for a granular material in a thermal bath. *J. Statist. Phys.* 106, 3-4 (2002), 547–567.
- [25] BOBYLEV, A. V., CERCIGNANI, C., AND GAMBA, I. Generalized kinetic Maxwell type models of granular gases. In *Mathematical models of granular matter*, vol. 1937 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2008, pp. 23–57.

- [26] BOBYLEV, A. V., CERCIGNANI, C., AND TOSCANI, G. Proof of an asymptotic property of self-similar solutions of the Boltzmann equation for granular materials. *J. Statist. Phys.* 111, 1-2 (2003), 403–417.
- [27] BOBYLEV, A. V., GAMBA, I., AND PANFEROV, V. Moment inequalities and high-energy tails for Boltzmann equations with inelastic interactions. *J. Statist. Phys.* 116, 5 (2004), 1651–1682.
- [28] BOBYLEV, A. V., PALCZEWSKI, A., AND SCHNEIDER, J. On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320, 5 (1995), 639–644.
- [29] BOBYLEV, A. V., AND RJASANOW, S. Difference scheme for the Boltzmann equation based on the fast Fourier transform. *Eur. J. Mech. B Fluids* 16, 2 (1997), 293–306.
- [30] BOBYLEV, A. V., AND RJASANOW, S. Fast deterministic method of solving the Boltzmann equation for hard spheres. *Eur. J. Mech. B Fluids* 18, 5 (1999), 869–887.
- [31] BOBYLEV, A. V., AND RJASANOW, S. Numerical solution of the boltzmann equation using a fully conservative difference scheme based on the fast fourier transform. *Transport Theory Statist. Phys.* 29, 3-5 (2000), 289–310.
- [32] BOBYLEV, A. V., AND VINEREAN, M. C. Construction of Discrete Kinetic Models with Given Invariants. *J. Statist. Phys.* 132, 1 (Apr. 2008), 153–170.
- [33] BOCHNER, S. Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. *Math. Ann.* 108 (1933), 378–410.
- [34] BOLLEY, F., GENTIL, I., AND GUILLIN, A. Uniform convergence to equilibrium for granular media. Preprint Arxiv 1204.4138.
- [35] BOLTZMANN, L. Weitere studien über das wärmeleichgewicht unter gasmolekñen. *Wiener Berichte* 66 (1872), 275–370.
- [36] BONY, J.-M. Solutions globales bornées pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann, en dimension 1 d'espace. In *Journées "Équations aux dérivées partielles" (Saint Jean de Monts, 1987)*. École Polytechnique, Palaiseau, 1987. Exp. No. XVI, 10 pp.
- [37] BRILLIANTOV, N., AND PÖSCHEL, T. Self-diffusion in granular gases. *Phys. Rev. E* 61, 2 (Feb. 2000), 1716–1721.
- [38] BRILLIANTOV, N., AND PÖSCHEL, T. *Kinetic Theory of Granular Gases*. Oxford University Press, USA, 2004.
- [39] BROADWELL, J. E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method. *J. Fluid Mech.* 19 (1964), 401–414.
- [40] BUET, C. A discrete-velocity scheme for the Boltzmann operator of rarefied gas dynamics. *Transport Theory Statist. Phys.* 25, 1 (Jan. 1996), 33–60.
- [41] CABANNES, H., GATIGNOL, R., AND LUO, L.-S. *The Discrete Boltzmann Equation (Theory and Applications)*. University of California, College of engineering, Los-Angeles, 2003.

- [42] CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A., AND ZANG, T. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [43] CARLEMAN, T. Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann. *Acta Math.* 60, 1 (1933), 91–146.
- [44] CARLEMAN, T. *Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz*. Publ. Sci. Inst. Mittag-Leffler. 2. Almqvist & Wiksells Boktryckeri Ab, Uppsala, 1957.
- [45] CARLEN, E., CHOW, S.-N., AND GRIGO, A. Dynamics and hydrodynamic limits of the inelastic Boltzmann equation. *Nonlinearity* 23, 8 (2010), 1807–1849.
- [46] CARLEN, E., GABETTA, E., AND TOSCANI, G. Propagation of Smoothness and the Rate of Exponential Convergence to Equilibrium for a Spatially Homogeneous Maxwellian Gas. *Commun. Math. Phys.* 199, 3 (Jan. 1999), 521–546.
- [47] CARNOT, S. Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance. *Bachelier, Libraire* (1824), 1–38.
- [48] CARRILLO, J. A., FRANCESCO, M. D., AND TOSCANI, G. Intermediate Asymptotics Beyond Homogeneity and Self-Similarity: Long Time Behavior for  $u_t = \Delta\phi(u)$ . *Arch. Ration. Mech. Anal.* 180, 1 (Jan. 2006), 127–149.
- [49] CARRILLO, J. A., MCCANN, R. J., AND VILLANI, C. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Math. Iberoam.* 19, 3 (2004), 971–1018.
- [50] CARRILLO, J. A., POËSCHEL, T., AND SALUEÑA, C. Granular hydrodynamics and pattern formation in vertically oscillated granular disk layers. *J. Fluid Mech.* 597 (2008), 119–144.
- [51] CARRILLO, J. A., AND TOSCANI, G. Exponential convergence toward equilibrium for homogeneous Fokker-Planck-type equations. *Math. Methods Appl. Sci.* 21, 13 (1998), 1269–1286.
- [52] CARRILLO, J. A., AND TOSCANI, G. Asymptotic  $L^1$ -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.* 49, 1 (2000), 113–142.
- [53] CARRILLO, J. A., AND TOSCANI, G. Contractive probability metrics and asymptotic behavior of dissipative kinetic equations. *Riv. Mat. Univ. Parma (7)* 6 (2007), 75–198.
- [54] CARRILLO, J. A., AND VÁZQUEZ, J. Asymptotic Complexity in Filtration Equations. *J. Evol. Equ.* 7, 3 (Feb. 2007), 471–495.
- [55] CASTELLA, F., AND PERTHAME, B. Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 322, 6 (1996), 535–540.
- [56] CERCIGNANI, C. *Theory and Application of the Boltzmann Equation*. Elsevier, New York, 1975.
- [57] CERCIGNANI, C. *The Boltzmann equation and its Applications*, vol. 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [58] CERCIGNANI, C. *Slow Rarefied Flows*, vol. 41 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. Theory and application to micro-electro-mechanical systems.

- [59] CERCIGNANI, C., ILLNER, R., AND PULVIRENTI, M. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, vol. 106 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [60] CERCIGNANI, C., ILLNER, R., AND STOICA, C. On diffusive equilibria in generalized kinetic theory. *J. Statist. Phys.* 105, 1-2 (2001), 337–352.
- [61] CLAUSIUS, R. Über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. *Ann. Physik* 217, 9 (1865), 124–130.
- [62] COLOMBO, R. M., AND GUERRA, G. Hyperbolic balance laws with a non local source. *Comm. Partial Differential Equations* 32, 10-12 (2007), 1917–1939.
- [63] COLOMBO, R. M., AND GUERRA, G. Hyperbolic balance laws with a dissipative non local source. *Commun. Pure Appl. Anal.* 7, 5 (June 2008), 1077–1090.
- [64] COOLEY, J. W., AND TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.* 19 (1965), 297–301.
- [65] COQUEL, F., ROGIER, F., AND SCHNEIDER, J. A deterministic method for solving the homogeneous Boltzmann equation. *Rech. Aéropat.* 3, 3 (1992), 1–10.
- [66] DAERR, A. *Dynamique des Avalanches*. PhD thesis, Université Denis Diderot Paris 7, 2000.
- [67] DARROZES, J., AND GUIRAUD, J. Généralisation formelle du théoreme H en présence de parois. *C. R. Acad. Sci. Paris* 262 (1966), 369–371.
- [68] DELLACHERIE, C., AND MEYER, P. *Probabilities and Potential*. North-Holland, 1978.
- [69] DESVILLETES, L., AND MISCHLER, S. About the splitting algorithm for Boltzmann and B.G.K. equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 6, 8 (1996), 1079–1101.
- [70] DESVILLETES, L., AND VILLANI, C. On the Trend to Global Equilibrium for Spatially Inhomogeneous Kinetic Systems: the Boltzmann Equation. *Invent. Math.* 159, 2 (2005), 245–316.
- [71] DIA, B. O., AND SCHATZMANN, M. Commutateurs de certains semi-groupes holomorphes et applications aux directions alternées. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 30, 3 (1996), 343–383.
- [72] DUFTY, J. W. Nonequilibrium Statistical Mechanics and Hydrodynamics for a Granular Fluid. In *2nd Warsaw School on Statistical Physics* (2008), E. Cichocki, M. Napiorkowski, and J. Piasecki, Eds., no. June 2007, Warsaw University Press, p. 64.
- [73] EDWARDS, R. *Functional Analysis. Theory and Applications*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.
- [74] ELLIS, R., AND PINSKY, M. The First and Second Fluid Approximations to the Linearized Boltzmann Equation. *J. Math. Pures Appl.* 54, 9 (1975), 125–156.
- [75] ENGEL, K., AND NAGEL, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer Verlag, 2000.



- [76] ERNST, M., AND BRITO, R. Scaling solutions of inelastic Boltzmann equations with overpopulated high energy tails. *J. Statist. Phys.* 109, 3-4 (2002), 407–432. Special issue dedicated to J. Robert Dorfman on the occasion of his sixty-fifth birthday.
- [77] ESCOBEDO, M., MISCHLER, S., AND RICARD, M. R. On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 22, 1 (2005), 99–125.
- [78] ESTEBAN, M., AND PERTHAME, B. On the modified Enskog equation for elastic and inelastic collisions. Models with spin. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 8, 3-4 (1991), 289–308.
- [79] EYMARD, R., GALLOUËT, T., AND HERBIN, R. Finite volume methods. In *Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, Handb. Numer. Anal., VII. North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020.
- [80] FENICHEL, N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J. Differential Equations* 31, 1 (1979), 53–98.
- [81] FILBET, F., HU, J. W., AND JIN, S. A numerical scheme for the quantum boltzmann equation efficient in the fluid regim. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 42 (2012), 443–463.
- [82] FILBET, F., AND MOUHOT, C. Analysis of Spectral Methods for the Homogeneous Boltzmann Equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 363 (2011), 1947–1980.
- [83] FILBET, F., MOUHOT, C., AND PARESCHI, L. Solving the Boltzmann Equation in  $N \log^2 N$ . *SIAM J. Sci. Comput.* 28, 3 (2007), 1029–1053.
- [84] FILBET, F., PARESCHI, L., AND TOSCANI, G. Accurate Numerical Methods for the Collisional Motion of (Heated) Granular Flows. *J. Comput. Phys.* 202, 1 (2005), 216–235.
- [85] FILBET, F., AND REY, T. A Rescaling Velocity Method for Dissipative Kinetic Equations - Applications to Granular Media. Submitted, 2012.
- [86] FILBET, F., AND RUSSO, G. High order numerical methods for the space non-homogeneous Boltzmann equation. *J. Comput. Phys.* 186, 2 (Apr. 2003), 457–480.
- [87] FILBET, F., AND RUSSO, G. A rescaling velocity method for kinetic equations: the homogeneous case. In *Modelling and numerics of kinetic dissipative systems* (Hauppauge, NY, 2006), Nova Sci. Publ., pp. 191–202.
- [88] FILBET, F., SONNENDRÜCKER, E., AND BERTRAND, P. Conservative Numerical Schemes for the Vlasov Equation. *J. Comput. Phys.* 172, 1 (Sept. 2001), 166–187.
- [89] FOUXON, I., MEERSON, B., ASSAF, M., AND LIVNE, E. Formation of density singularities in ideal hydrodynamics of freely cooling inelastic gases: A family of exact solutions. *Phys. Fluids* 19, 9 (2007), 093303.
- [90] GABETTA, E., TOSCANI, G., AND WENNBURG, B. Metrics for probability distributions and the trend to equilibrium for solutions of the Boltzmann equation. *J. Statist. Phys.* 81, 5-6 (Dec. 1995), 901–934.
- [91] GAMBA, I., PANFEROV, V., AND VILLANI, C. On the Boltzmann equation for diffusively excited granular media. *Commun. Math. Phys.* 246, 3 (2004), 503–541.

- 
- [92] GAMBA, I. M., AND THARKABHUSHANAM, S. H. Spectral-Lagrangian methods for collisional models of non-equilibrium statistical states. *J. Comput. Phys.* 228, 6 (Apr. 2009), 2012–2036.
- [93] GAMBA, I. M., AND THARKABHUSHANAM, S. H. Shock and Boundary Structure formation by Spectral-Lagrangian methods for the Inhomogeneous Boltzmann Transport Equation. *J. Comput. Math.* 28, 4 (2010), 430–460.
- [94] GERARD-VARET, D., AND NGUYEN, T. Remarks on the ill-posedness of the Prandtl equation. *Asymptot. Anal.* (2012).
- [95] GOLDBIRSCHE, I., AND ZANETTI, G. Clustering instability in dissipative gases. *Phys. Rev. Lett.* 70, 11 (Mar. 1993), 1619–1622.
- [96] GOLSE, F. New Results in Velocity Averaging. *Séminaire X-EDP*, 9 (2002), 15.
- [97] GOLSE, F. The Boltzmann equation and its hydrodynamic limits. In *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations Vol. 2*, C. Dafermos and E. Feireisl, Eds. North-Holland, 2005, pp. 159–303.
- [98] GOLSE, F., AND SAINT-RAYMOND, L. The incompressible Navier–Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 91, 5 (May 2009), 508–552.
- [99] GOUDON, T., JUNCA, S., AND TOSCANI, G. Fourier-based distances and Berry-Esseen like inequalities for smooth densities. *Monatsh. Math.* 135, 2 (2002), 115–136.
- [100] GRAD, H. Asymptotic Theory of the Boltzmann Equation. *Phys. Fluids* 6 (1963), 147–181.
- [101] GRAD, H. Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear Boltzmann equations. In *AMS Symposium on Application of Partial Differential Equations in Mathematical Physics* (September 1964), Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.
- [102] GUALDANI, M. P., MISCHLER, S., AND MOUHOT, C. Factorization for non-symmetric operators and exponential h-theorem. Preprint Arxiv 1006.5523.
- [103] HAFF, P. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *J. Fluid Mech.* 134 (1983), 401–30.
- [104] HAILE, J. *Molecular Dynamics Simulation: Elementary Methods*. Wiley professional paperback series. Wiley, 1992.
- [105] HARDY, G. H., AND WRIGHT, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, sixth ed. Oxford University Press, Oxford, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.
- [106] HARTEN, A., OSHER, S., ENGQUIST, B., AND CHAKRAVARTHY, S. R. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. *Appl. Numer. Math.* 2, 3-5 (1986), 347–377.
- [107] HAURAY, M., AND JABIN, P.-E.  $N$ -particles approximation of the Vlasov equations with singular potential. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 183, 3 (2007), 489–524.
- [108] HAURAY, M., AND JABIN, P.-E. Propagation of chaos for particles approximations of Vlasov equations with singular forces. Preprint Arxiv 1107.3821, 2011.

- [109] HEMPEL, R., AND VOIGT, J. The spectrum of a Schrödinger operator in  $L_p(\mathbf{R}^\nu)$  is  $p$ -independent. *Comm. Math. Phys.* 104, 2 (1986), 243–250.
- [110] HORST, E. On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov-Poisson system. *Math. Methods Appl. Sci.* 16, 2 (1993), 75–86.
- [111] HU, J., AND YING, L. A fast spectral algorithm for the quantum Boltzmann collision operator. *preprint* (2011).
- [112] IBRAGIMOV, I., AND RJASANOW, S. Numerical solution of the Boltzmann equation on the uniform grid. *Computing* 69, 2 (2002), 163–186.
- [113] JENKINS, J., AND RICHMAN, M. Grad’s 13-moment system for a dense gas of inelastic spheres. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 87 (1985), 355–377. 10.1007/BF00250919.
- [114] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, 1966.
- [115] KAWAI, T., AND SHIDA, K. An Inelastic Collision Model for the Evolution of “Planetary Rings”. *J. Phys. Soc. Japan* 59, 1 (Jan. 1990), 381–388.
- [116] KOLVIN, I., LIVNE, E., AND MEERSON, B. Navier-stokes hydrodynamics of thermal collapse in a freely cooling granular gas. *Phys. Rev. E* 82 (Aug 2010), 021302.
- [117] KOWALCZYK, P., PALCZEWSKI, A., RUSSO, G., AND WALENTA, Z. Numerical solutions of the Boltzmann equation: comparison of different algorithms. *Eur. J. Mech. B Fluids* 27, 1 (Jan. 2008), 62–74.
- [118] KROOK, M., AND WU, T. T. Exact solutions of the Boltzmann equation. *Phys. Fluids* 20, 10 (1977), 1589.
- [119] LANDAU, L. D. On the vibrations of the electronic plasma. *Acad. Sci. USSR. J. Phys.* 10 (1946), 25–34.
- [120] LASKAR, J. Large scale chaos and marginal stability in the solar system. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 64, 1-2 (1996), 115–162. Chaos in gravitational  $N$ -body systems (La Plata, 1995).
- [121] LEVEQUE, R. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [122] LI, H., AND TOSCANI, G. Long-Time Asymptotics of Kinetic Models of Granular Flows. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 172, 3 (May 2004), 407–428.
- [123] LIN, Z., AND ZENG, C. Small BGK Waves and Nonlinear Landau Damping. *Commun. Math. Phys.* 306, 2 (July 2011), 291–331.
- [124] LIN, Z., AND ZENG, C. Small BGK Waves and Nonlinear Landau Damping (higher dimensions). Preprint Arxiv 1106.4368, 2012.
- [125] LIU, X.-D., OSHER, S., AND CHAN, T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.* 115, 1 (1994), 200–212.

- [126] MARKOWICH, P., AND PARESCHI, L. Fast, conservative and entropic numerical methods for the Boson Boltzmann equation. *Numer. Math.* 99 (2005), 509–532.
- [127] MARTIN, Y.-L., ROGIER, F., AND SCHNEIDER, J. Une méthode déterministe pour la résolution de l'équation de Boltzmann inhomogène. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 314, 6 (1992), 483–487.
- [128] MAXWELL, J. C. On the dynamical theory of gases. *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 157 (1867), 49–88.
- [129] METROPOLIS, N., ROSEMBLUTH, A., ROSEMBLUTH, M. N., TELLER, A. H., AND TELLER, E. Equations of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics* 21, 6 (Feb. 1953), 1087–1092.
- [130] METROPOLIS, N., AND ULAM, S. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association* 44, 247 (1949), 335–341.
- [131] MICHEL, P., AND SCHNEIDER, J. Approximation simultanée de réels par des nombres rationnels et noyau de collision de l'équation de Boltzmann. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330, 9 (May 2000), 857–862.
- [132] MISCHLER, S. Kinetic equations with Maxwell boundary conditions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 5 (2010).
- [133] MISCHLER, S., AND MOUHOT, C. Cooling process for inelastic Boltzmann equations for hard spheres, Part II: Self-similar solutions and tail behavior. *J. Statist. Phys.* 124, 2 (2006), 703–746.
- [134] MISCHLER, S., AND MOUHOT, C. Stability, convergence to self-similarity and elastic limit for the Boltzmann equation for inelastic hard spheres. *Commun. Math. Phys.* 288, 2 (2009), 431–502.
- [135] MISCHLER, S., AND MOUHOT, C. Stability, convergence to the steady state and elastic limit for the Boltzmann equation for diffusively excited granular media. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 24, 1 (2009), 159–185.
- [136] MISCHLER, S., AND MOUHOT, C. Kac's program in kinetic theory. Preprint Arxiv 1107.3251, 2011.
- [137] MISCHLER, S., MOUHOT, C., AND RICARD, M. Cooling process for inelastic Boltzmann equations for hard spheres, Part I: The Cauchy problem. *J. Statist. Phys.* 124, 2 (2006), 655–702.
- [138] MISCHLER, S., MOUHOT, C., AND WENBERG, B. A new approach to quantitative propagation of chaos for drift, diffusion and jump processes. Preprint Arxiv 1101.4727, 2011.
- [139] MOUHOT, C. Rate of Convergence to Equilibrium for the Spatially Homogeneous Boltzmann Equation with Hard Potentials. *Commun. Math. Phys.* 261, 3 (Nov. 2006), 629–672.
- [140] MOUHOT, C. Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel. *Séminaire Bourbaki* 64 (Novembre 2011), 45.

- [141] MOUHOT, C., AND PARESCHI, L. Fast methods for the Boltzmann collision integral. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 339, 1 (2004), 71–76.
- [142] MOUHOT, C., AND PARESCHI, L. Fast algorithms for computing the Boltzmann collision operator. *Math. Comp.* 75, 256 (2006), 1833–1852 (electronic).
- [143] MOUHOT, C., PARESCHI, L., AND REY, T. Convolutional Decomposition and Fast Summation Methods for Discrete-Velocity Approximations of the Boltzmann Equation. Submitted, 2012.
- [144] MOUHOT, C., AND VILLANI, C. On Landau damping. *Acta Math.* 207, 1 (Dec. 2011), 29–201.
- [145] NALDI, G., PARESCHI, L., AND TOSCANI, G. Spectral methods for one-dimensional kinetic models of granular flows and numerical quasi elastic limit. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 37, 1 (2003), 73–90.
- [146] NICOLAENKO, B. Dispersion Laws for Plane Wave Propagation. In *The Boltzmann Equation Seminar - 1970 to 1971* (1971), F. Grunbaum, Ed., Courant Institute of Mathematical Sciences, pp. 125–172.
- [147] NOGUEIRA, A., AND SEVENNEC, B. Multidimensional Farey partitions. *Indag. Math. (N.S.)* 17, 3 (2006), 437–456.
- [148] PALLARD, C. Moment Propagation for Weak Solutions to the Vlasov–Poisson System. *Comm. Partial Differential Equations* 37, 7 (July 2012), 1273–1285.
- [149] PANFEROV, V. A., AND HEINTZ, A. G. A New Consistent Discrete-Velocity Model for the Boltzmann Equation. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 25, 7 (2002), 571–593.
- [150] PARESCHI, L., AND PERTHAME, B. A Fourier Spectral Method for Homogeneous Boltzmann Equations. *Transport Theory Statist. Phys.* 25, 3 (1996), 369–382.
- [151] PARESCHI, L., AND RUSSO, G. Numerical Solution of the Boltzmann Equation I : Spectrally Accurate Approximation of the Collision Operator. *SIAM J. Numer. Anal.* 37, 4 (2000), 1217–1245.
- [152] PARESCHI, L., AND RUSSO, G. On the stability of spectral methods for the homogeneous Boltzmann equation. *Transport Theory Statist. Phys.* 29, 3-5 (2000), 431–447.
- [153] PARESCHI, L., AND RUSSO, G. An introduction to Monte Carlo method for the Boltzmann equation. *ESAIM: Proceedings* 10 (2001), 35–75.
- [154] PARESCHI, L., RUSSO, G., AND TOSCANI, G. Methode spectrale rapide pour l’equation de Fokker-Planck-Landau. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (2000), 517–522.
- [155] PARESCHI, L., TOSCANI, G., AND VILLANI, C. Spectral methods for the non cut-off Boltzmann equation and numerical grazing collision limit. *Numerische Mathematik* 93, 3 (Jan. 2003), 527–548.
- [156] PERTHAME, B. Exact solutions of the nonlinear Boltzmann equation. In *Modeling of Collisions*, P. Raviart, Ed. Gauthier-Villars, 1998, ch. 2, pp. 139–176.
- [157] PŁATKOWSKI, T., AND ILLNER, R. Discrete velocity models of the Boltzmann equation: a survey on the mathematical aspects of the theory. *SIAM Rev.* 30, 2 (1988), 213–255.

- [158] PLATKOWSKI, T., AND WALÚS, W. An acceleration procedure for discrete velocity approximation of the Boltzmann collision operator. *Comp. Math. Appl.* 39 (2000), 151–163.
- [159] PÖSCHEL, T., BRILLIANTOV, N., AND SCHWAGER, T. Transient clusters in granular gases. *J. Phys.: Condens. Matter* 17 (2005), 2705–2713.
- [160] RERICHA, E. C., BIZON, C., SHATTUCK, M. D., AND SWINNEY, H. L. Shocks in supersonic sand. *Phys. Rev. Lett.* 88 (Dec 2001), 014302.
- [161] REY, T. Blow up analysis for anomalous granular gases. *SIAM J. Math. Anal.* 44, 3 (2012), 1544–1561.
- [162] REY, T. First and Second Order Fluid Approximations to the Granular Gases Equation. In preparation, 2012.
- [163] REY, T., AND TOSCANI, G. Large-time Behavior of the Solutions to Rosenau Type Approximations to the Heat Equation. submitted, 2012.
- [164] ROGIER, F., AND SCHNEIDER, J. A direct method for solving the Boltzmann equation. *Transport Theory Statist. Phys.* 23, 1-3 (1994), 313–338.
- [165] ROHDE, C. On local and non-local Navier-Stokes-Korteweg systems for liquid-vapour phase transitions. *ZAMM* 85, 12 (Dec. 2005), 839–857.
- [166] ROSENAU, P. Tempered diffusion: A transport process with propagating fronts and inertial delay. *Phys. Rev. A* 46, 12 (1992), 12–15.
- [167] RUIZ-MONTERO, M., AND BREY, J. J. On the development of inhomogeneities in freely evolving granular gases: The shear state and beyond. *Eur. Phys. J. Special Topics* 179, 1 (May 2010), 249–262.
- [168] SASVARI, Z. On a classical theorem in the theory of fourier integrals. *Proceedings of the American Mathematical Society* 126, 3 (1998), 711–713.
- [169] SCHOCHET, S., AND TADMOR, E. The Regularized Chapman-Enskog Expansion for Scalar Conservation Laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 119, 2 (1992), 95–107.
- [170] SHIDA, K., AND KAWAI, T. Cluster formation by inelastically colliding particles in one-dimensional space. *Phys. A.* 162, 1 (1989), 145–160.
- [171] SHU, C.-W. High order ENO and WENO schemes for computational fluid dynamics. In *Advanced Numerical Approximations of Nonlinear Hyperbolic Equations*, A. Quarteroni, Ed., vol. 9 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* Springer, Berlin, 1999, pp. 439–582.
- [172] SONE, Y. *Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications*. Modeling And Simulation in Science, Engineering And Technology. Birkhäuser, 2007.
- [173] SONE, Y., BARDOS, C., GOLSE, F., AND SUGIMOTO, H. Asymptotic theory of the Boltzmann system, for a steady flow of a slightly rarefied gas with a finite Mach number: General theory. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 19, 3 (May 2000), 325–360.
- [174] STEIN, E., AND SHAKARCHI, R. *Fourier Analysis, an Introduction*. Princeton University Press, Princeton ; Oxford, 2003.

- [175] STRAIN, R. M., AND GUO, Y. Almost exponential decay near Maxwellian. *Comm. Partial Differential Equations* 31, 1-3 (2006), 417–429.
- [176] STRAIN, R. M., AND GUO, Y. Exponential decay for soft potentials near Maxwellian. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 187, 2 (2008), 287–339.
- [177] STRANG, G. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.* 5 (1968), 506–517.
- [178] TADMOR, E. Approximate Solutions of Nonlinear Conservation Laws. In *Advanced Numerical Approximations of Nonlinear Hyperbolic Equations*, A. Quarteroni, Ed., vol. 9 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* Springer, Berlin, 1999, pp. 439–582.
- [179] TOSCANI, G. Kinetic approach to the asymptotic behaviour of the solution to diffusion equations. *Rend. Mat. Appl. (7)* 16, 2 (1996), 329–346.
- [180] TOSCANI, G. One-dimensional kinetic models of granular flows. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 34, 6 (Apr. 2000), 1277–1291.
- [181] TOSCANI, G. Kinetic and Hydrodynamic Models of Nearly Elastic Granular Flows. *Monatsh. Math.* 142, 1 (2004), 179–192.
- [182] TOSCANI, G. Hydrodynamics from the dissipative Boltzmann equation. In *Mathematical models of granular matter*, vol. 1937 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2008, pp. 59–75.
- [183] TSUJI, T., AOKI, K., AND GOLSE, F. Relaxation of a Free-Molecular Gas to Equilibrium Caused by Interaction with Vessel Wall. *Journal of Statistical Physics* 140, 3 (July 2010), 518–543.
- [184] UKAI, S. Les solutions globales de l'équation de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 282, 6 (1976), A317–A320.
- [185] VALOUGEORGIS, D., AND NARIS, S. Acceleration schemes of the discrete velocity method: Gaseous flows in rectangular microchannels. *SIAM J. Sci. Comput.* 25 (2003), 534–552.
- [186] VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *J. Comput. Phys.* 23, 3 (Mar. 1977), 263–275.
- [187] VILLANI, C. *A Review of Mathematical Topics in Collisional Kinetic Theory*. Elsevier Science, 2002.
- [188] VILLANI, C. Mathematics of Granular Materials. *J. Statist. Phys.* 124, 2 (2006), 781–822.
- [189] VILLANI, C. Hypocoercivity. *Mem. Amer. Math. Soc.* 202 (2009), 184.
- [190] WILD, E. On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 47, 03 (Oct. 1951), 602–609.
- [191] WU, Z.  $L^1$  and BV-type stability of the inelastic Boltzmann equation near vacuum. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 22, 3 (Nov. 2009), 239–249.

- 
- [192] WU, Z. On the inelastic Enskog equation near vacuum. *Journal of Mathematical Physics* 51, 3 (2010), 033508.



## Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude mathématique et numérique d'une classe d'équations cinétiques collisionnelles, de type équation de Boltzmann. Nous avons porté un intérêt tout particulier à l'équation des milieux (ou gaz) granulaires, initialement introduite dans la littérature physique pour décrire le comportement hors équilibre de matériaux composés d'un grand nombre de grains, ou particules, non nécessairement microscopiques, et interagissant par des collisions dissipant l'énergie cinétique. Ces modèles se sont révélés avoir une structure mathématique très riche. Cette thèse se structure en trois parties pouvant être lues de manière indépendante, mais néanmoins en rapport avec des équations cinétiques collisionnelles en général, et l'équation des milieux granulaires en particulier.

La première partie est dédiée à l'étude mathématique du comportement asymptotique de certaines équations cinétiques collisionnelles dans un cadre homogène en espace. Nous y montrons des résultats de type explosion et convergence vers la solution autosimilaire avec calcul explicite des taux, pour des opérateurs de type Boltzmann, grâce à l'utilisation (entre autre) d'une nouvelle méthode de changement de variables dépendant directement de la solution de l'équation considérée. En particulier, nous démontrons que pour un modèle de gaz granulaire – dit anormal – il est possible d'observer une explosion en temps fini.

Dans la deuxième partie, orientée analyse numérique et calcul scientifique, nous nous intéressons au développement et à l'étude de méthodes spectrales pour la résolution de problèmes multi-échelles, issus de la théorie des équations cinétiques collisionnelles. Les méthodes de changement de variables tiennent aussi une place importante dans cette partie, et permettent d'observer numériquement des phénomènes non triviaux qui apparaissent lors de l'étude de gaz granulaires, comme la création d'amas de matière ou la caractérisation précise du retour vers l'équilibre.

La troisième et dernière partie est dédiée à l'étude spectrale de l'opérateur des milieux granulaires avec bain thermique, linéarisé au voisinage d'un équilibre homogène en espace, afin d'établir des résultats de type stabilité et convergence vers une limite hydrodynamique. Ce travail est en fait la généralisation d'un résultat célèbre dans la théorie de l'équation de Boltzmann, dû à R. Ellis et M. Pinsky, et établissant rigoureusement la première limite hydrodynamique vers les équations d'Euler compressibles linéaires puis Navier-Stokes de cette équation.

## Abstract

This dissertation is dedicated to the mathematical and numerical study of a class of collisional kinetic equations, such as the Boltzmann equation of perfect gases. We took a particular interest in the granular media (or gases) equation, which has been first introduced in the physical literature to describe the non-equilibrium behavior of materials composed of a large number of grains (the particles) of macroscopic size, interacting through energy dissipative collisions. These models have a very rich mathematical structure. This dissertation is divided in three independent parts, all related to the theory of collisional kinetic equation, with a strong emphasis on granular media.

The first part concerns the mathematical study of the asymptotic behavior of space homogeneous Boltzmann-like kinetic equations. We prove some blow up results, as well as convergence towards self-similarity, with explicit rates for two different models. One of the key tools of our proofs is the use of a new scaling method, where the scaling function depends on the solution itself. We especially prove that for a particular model of granular gases (also known as anomalous), finite time blow up occurs.

The second part is dedicated to the development and study of spectral methods for the resolution of multi-scale problems, coming from the theory of collisional kinetic equations. Some rescaling methods take a very important place in this part, allowing to observe numerically some nontrivial phenomena such as the clustering in space which occurs in the time evolution of a space inhomogeneous granular gas, or to investigate numerically the trend to equilibrium for this equation.

The whole third (and last) part is dedicated to the spectral study of the granular gases operator with a thermal bath, linearized near a space homogeneous self-similar profile. The goal of this work is to prove some stability results for the complete space inhomogeneous equation, and to investigate the hydrodynamic limit of the model. This work is based and extends the famous result of R. Ellis and M. Pinsky on the spectrum of the linearized Boltzmann equation, intended to establish rigorously the hydrodynamic limit of this equation towards the linearized Euler and Navier-Stokes equations.